Debreceni Egyetem,
Természettudományi és Technológiai Kar
Matematikai Intézet

Szakdolgozat

A BIZONYÍTÁSOK ÉS TANÍTÁSUK A KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKÁBAN

Készítette:
Hutás Henrietta
informatika-matematika tanár

Témavezető:
Dr. Páles Zsolt
egyetemi tanár

Debrecen
2009

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik lehetővé tették és támogatták egyetemi tanulmányaimat, illetve ezen szakdolgozat elkészítését. Külön köszönet illeti témavezetőmet, Dr. Páles Zsoltot, szakmai segítségéért, türelméért, bizalmáért.

Előszó

Dolgozatom célja, hogy felhívjam a figyelmet a bizonyítások folyamatos kiszorulására a középiskolai matematikából, és a bizonyítások gondolkodást és problémamegoldást fejlesztő hatására. Bemutatok néhány bizonyítási sémát, melyek elsajátítása több esetben hasznos, esetleg ötletadó lehet. Az általam megjelölt típusbizonyítások önkényes, nem teljes körű besorolás eredményei. Természetesen sok esetben tisztán ezek a módszerek nem feltétlenül vezetnek eredményre, olykor ezek együttes alkalmazása szükséges, esetleg teljesen új ötletekre van szükség, de jónéhány, a középiskolában tanított bizonyítási feladatban használhatók. Törekedtem arra, hogy egy jó, középiskolában hasznosítható bizonyítási feladatokat tartalmazó feladatgyűjteményt állítsak össze, melyet inkább az emelt szinten matematikát tanulók és tanítók figyelmébe ajánlok. Mivel úgy vélem, a mai diákoknak komoly gondot okoz a szövegértés, és nehezen tudják a hétköznapi nyelven megfogalmazott állításokat matematikai formalizmussal leírni, törekszem rá, ahol csak lehet, hogy állításaimat szövegesen, és matematikai jelölésekkel is megadjam. Itt teszek említést arról, hogy a szakdolgozathoz készült egy tanári szakdolgozat is, mely a bizonyítások szerepét inkább didaktikai, filozófiai szempontból vizsgálja, s az aktuális álláspontokat, véleményeket összegzi. [5]

A bizonyításokról röviden

Az ember szinte létezésétől kezdve törekszik megismerni az őt körülvevő világot. Már az ókori görög polihisztorok is törekedtek rá, hogy állításaikat bizonyítsák, gondolatmeneteiket logikusan felépítsék. A logikus gondolatmenet levezetésére szükség is volt, hiszen nem voltak ügyvédek, mindenki magát képviselte a politikai felszólalásokon és gyűléseken.

Az igazság, az igazság létezése ma is az embereket foglalkoztató filozófiai kérdés. Az igazság, egy adott szituációban különböző emberek számára mást és mást jelenthet. Ezt a matematikában nem engedhetjük meg. Az igazságnak mindenki számára azonos, objektív fogalomnak kell lennie.

A modern matematikára a következő módszer jellemző. "A valóság egy-egy jelenségcsoporjának lényeges elemeit, összefüggéseit megfigyelve, fogalmakat és ezek között összefüggéseket állapít meg, úgynevezett matematikai modellt alkot. A modellben értelmezett fogalmak közötti összefüggéseket úgynevezett axiómák formájában fogalmazza meg. Ezekből logikai úton tételeket bizonyít. A kapott tételeket, vagy azok további következményeit azután a tanulmányozott jelenségcsoportban mérhető adatokkal, eseményekkel veti össze. Ha a kívánalmaknak megfelelő pontosságú egyezést tapasztal, akkor a modell jól írja le a kérdéses jelenségcsoportot."[4, 488. oldal] Ha nem, akkor finomabb modellt kell alkotni.

Ejtsünk néhány szót magukról a bizonyításokról, bizonyítási módszerekről. Már Szókratész idejében alkotó ókori görög matematikusok is törekedtek rá, hogy állításaikat igazolják, meglévő ismereteikből logikai lépések segítségével magyarázzák. Sok, ma is elfogadott bizonyítást, bizonyítási módszert olvashatunk Arisztotelész Organonjában és Eukleidesz *Elemek* című művében, illetve néhol Platón műveiben. A matematikában csak az olyan állításokat fogadjuk el igaznak, melyek a már meglévő ismereteinkből levezethetők, gondolati úton elérhetők. Pusztán tapasztalati eredményeket nem tekintünk bizonyításnak. Kivételt képeznek ez alól bizonyos alapállítások, az ún. axiómák, melyeket alapvetően igaznak fogadunk el, és nem bizonyítunk. Csak jóval később, a XIX. századi nagy matematikusok, logikusok, mint Cauchy, Weierstrass, Abel, Bolzano, Frege voltak azok, akik leírták a szigorú bizonyításelemzés eljárását, melynek lényege, hogy nem elegendő a bizonyítást hihetőnek, elfogadhatónak ítélni, alaposan elemzés alá kell vetni a bizonyítás lépéseit magukat is.

Nézzük pontosan mit is tekintünk ma bizonyításnak.

"Angolul a 'bizonyít' (prove) régies vagy köznapi jelentése 'kipróbál' ('try out'), 'ellenőriz', 'tesztel' ('test'), megállapítja a valódi tényállást ('determine the true state of affairs'). Mi köze ehhez a szó matematikai jelentésének? [...] A gond csak az, a 'matematikai bizonyításnak' is két jelentése van. Egy gyakorlati és egy elméleti. Megmutatjuk a diákoknak a gyakorlatban, mi az a bizonyítás, és elmondjuk nekik, elméletben mit jelent. A szó két értelme nem egyezik. [...] A bizonyítás első számú jelentése, a gyakorlati jelentés formalizálatlan és pontatlan. A gyakorlati értelemben vett matematikai bizonyítás nem más, mint amit akkor hajtunk végre, amikor el akarjuk hitetni a tételeinkről, hogy igazak. Olyan érvelés, amely meggyőzi a dörzsölt és kérkedő hozzáértőt. [...] A második jelentés - az elméleti jellegű matematikai bizonyítás - formalizált. Arisztotelész dolgozta ki az alapjait, majd később Boole, Peirce, Frege, Russel, Hilbert és Gödel is formalizálta. Adott szimbólumsorok (formális mondatok) a logika adott szabályai (például modus ponens) szerinti módosítást jelenti. Szigorúan deduktív logikát követő, vagy szigorúan deduktív logikára visszavezethető lépések sorozata, amit "formalizálásnak, idealizációnak, a bizonyításról alkotott elképzelés racionális rekonstrukciójának" (P. Ernest személyes közlése) fognak fel."[10, 52-53. oldal]

Az idézet szerinti első bizonyítás alapvető módszere a dedukció elvén alapszik. A matematika deduktív jellege a görög kultúrában alakult ki. A deduktív felépítési módszer a görög filozófiában jelent meg először, s innen került át a matematikába. "A matematika tudományának az a mai s alapvetően meghatározó vonása, hogy állításait, tételeit logikai eszközökkel bizonyítja egyszerűbb, a szemléletre, a tapasztalatra való hivatkozással igaznak tekintett állításokból."[4, 482. oldal]

A matematikaoktatásban, a matematikai tételek bizonyításánál a szigorú dedukciós tárgyalásmódot alkalmazzák. Lakatos Imre a *Bizonyítások és cáfolatok* c. könyvében - ahogy egyik egyetemi tanárom, Dr. Kántor Sándorné írta - "a tudományfilozófiának egy új irányzatát, a kétségbevonhatóság filozófiáját fejlesztette ki, a matematika tanításának egy új elképzelését dolgozta ki, az ún. Lakatos-féle heurisztikát, amelyben egy problémából, egy sejtésből kiindulva párhuzamosan keresi a bizonyítást, és az ellenpéldát."[6, 225. oldal] Módszerének lényege, hogy a diák először sejtse meg a bizonyítandó állítást, majd ne elégedjen meg azzal, hogy bizonyította, hanem a bizonyítást is vesse további vizsgálatok alá. Ellenőrizze, állítása minden esetben igazolható-e, vagy adható-e rá ellenpélda. Vizsgálja, milyen változásokat kell eszközölni a bizonyításban, ha az állítás szempontjából fontos feltételek valamelyikét megváltoztatja. Célja, hogy az új eredményt a diák maga konstruálja meg, és igazolja, nem pedig az, hogy egy készen kapott eredményt formális úton bizonyítson.

Lakatos tézise a következő: "Az informális, kváziempirikus nem a kétségbevonhatatlanul megalapozott tételek számának egyhangú növekedése révén fejlődik, hanem a találgatások szüntelen helyesbítésével, az elmélkedés és a kritika, a bizonyítások és cáfolatok logikája segítségével."[6, 232. oldal]

Mi a bizonyítások szerepe általában? Mi a bizonyítások szerepe a matematika órán?

G. H. Hardy szerint, "tulajdonképpen olyan, hogy matematikai bizonyítás, nem létezik; végülis nem tehetünk mást, csak kiemelünk, [...] a bizonyítások [...] dagályos szóvirágok, céljuk a lélektani hatás, szemléltető ábrák az oktatásban, eszközök a diákok képzeletének serkentésére."

Wilder szerint a bizonyítás "csak intuitív sugallataink ellenőrzésére használt eljárás."

Hozzám Pólya Görgy elképzelése áll legközelebb, miszerint a bizonyítások, még ha nem is teljesek, kapcsolatokat létesítenek a matematikai tények között, s ez elősegíti, hogy emlékezetünkben megőrizzük őket; a bizonyítások mnemotechnikai[1] rendszert eredményeznek.[8]

A matematika tanításának humanista megközelítése szerint a bizonyítás - és általában a tanítás - célja a megértés. Attól függően részletezi, vagy rövidíti le a bizonyítást, hogy mit gondol, hogyan fogja jobban megérteni a fogalmakat, eljárásokat és felhasználásukat maga a diák. Nem matematikus osztályban a mottó az legyen: "A bizonyítás a tanárért és a diákért van, nem bilincs, hogy korlátozza őket." A leendő matematikusok tanításában ez úgy módosul, hogy "A bizonyítás a kutatás szolgálatában áll, nem bilincs, ami a matematikus fantáziáját hivatott korlátozni." A bizonyítás képes meggyőzni, és megmagyarázni. A kutatásban a meggyőzés az elsődleges. A középiskolában és az egyetemen a magyarázat. [10, 64-65. oldal]

Talán éppen ez az oka annak, hogy középiskolában, egy kevésbé motivált osztályban a deduktív bizonyítási eljárások kerülnek csupán bemutatásra. De egy emeltszintű csoportban, vagy egy szakkörön, ahol kellően motivált, matematikával foglalkozni akaró tanulók dolgoznak együtt, érdemes a Lakatos-féle módszerrel próbálkozni.

Szintén hasznos lehet megfogadni Pólya György tanácsait, aki *A gondolkodás iskolája* c. művében az oktatásban jól hasznosítható kérdésgyűjteményt

[1]Mnemonika (görög eredetű szó): az emlékezés működését mesterségesen megkönnyítő, a mechanikus emlékezést segítő eljárások, fogások elnevezése.

állított össze. Ezen kérdésekből a feladatmegoldásoknál igyekszem minél többet idézni.

1. A matematikai logika eszközei és módszerei

A matematikai logika fejlődése bizonyos mértékig a geometria fejlődéséhez hasonló. A logika az emberi gondolkodás törvényszerűségeivel foglalkozó tudomány. A logikus gondolkodás formális tulajdonságait már a régi görögök is vizsgálták. Így alakult ki a formális logika. Fejlődése az ókori görögöktől indult el. A legnagyobb logikával foglalkozó ókori tudós Arisztotelész (i.e. 384-322) volt, aki a logikai következtetések vizsgálatához már szimbólumokat is használt *Organon* című művében. Később Descartes, majd az újkorban Leibniz az, aki a logika matematikai eszközökkel való felépítésének programját megfogalmazta. Az első, matematikai logikáról szóló munka G.Bool (1815-1864) *A logika matematikai elemzése* című műve volt. 1913-ban egy Ehrenfest nevű francia fizikus tett említést ötletéről, miszerint a matematikai logika eszközeit áramkörök leírására is lehet használni. Ezt a gondolatot felhasználva, többek között a magyar származású Neumann János munkássága nyomán született meg az első, programvezérlésű számítógép terve. Ezek alapján kijelenthetjük, hogy az informatika tudományának egyik legfontosabb alapköve a matematikai logika.

A logika szó hétköznapi jelentése rendszeresség, következetesség, ugyanakkor egy tudományszak neve is, melynek fő feladata a helyes következtetés fogalmának szabatos meghatározása, törvényszerűségeinek feltárása.

A logikai következtetés egy gondolati eljárás, melynek során a kiinduló információkból, az állításokból (*premisszák*ból) igazoljuk a kinyert információkat, a következmény(eke)t (*konklúzió*t). A logika feladata a premisszák és a konklúzió közötti összefüggés tanulmányozása.

A matematikai logika alapfogalmai a *kijelentés*, az *igaz* és a *hamis*. Egy kijelentés igaz, ha az információtartalma a valóságnak megfelelő, egyébként hamis, függetlenül tudásunktól. Annak a kijelentésnek van logikai értéke, amelyről az adott tárgyalásban egyértelműen eldönthető, hogy igaz-e vagy hamis.

1.1. **Definíció.** Egy kijelentő mondat *állítás* vagy *ítélet*, ha egyértelmű információt hordoz és igazságértékkel bír.

Az ítéleteket általában latin nagybetűkkel jelöljük. A formális logika nem vizsgálja a kijelentések tartalmát, csak a logikai értéküket. Az A ítélet logikai értékének leírására az $|A|$ jelölést használjuk.

Nézzünk néhány példát és ellenpéldát kijelentésekre és ítéletekre!

A: A 100 összetett szám.
B: A 100 osztható 9-cel.
C: A 100 szép kerek szám.

A: Ennek az állításnak a logikai értéke igaz.
B: Ennek az állításnak a logikai értéke hamis.
C: Ennek az kijelentésnek nincs logikai értéke, ugyanis nem értelmeztük, hogy mit jelent a "szép kerek szám" kifejezés.

Arisztotelész alapelvei:

1) *Az ellentmondástalanság elve*: Egyetlen állítás sem lehet igaz is és hamis is egyszerre.
2) *A kizárt harmadik elve*: Nincs olyan állítás, amely sem nem igaz, sem nem hamis.

Láthatjuk, hogy egy következtetésben szereplő premisszák és konklúziók maguk is állítások, ítéletek.

1.2. **Definíció.** Egy következtetés *helyes következtetés*, ha igaz premisszák esetén a konklúzió csak igaz lehet, illetve *helytelen a következtetés*, ha igaz premisszák esetén is megtörténhet, hogy a konklúzió hamis.

Az ítéletek között logikai műveleteket értelmezünk. Nézzük ezek közül a legfontosabbakat. Legyen A, B, C ítélet.

1.3. **Definíció.** Az A ítélet *negáció*ján (tagadásán) azt a kijelentést értjük, amely igaz, ha A hamis, és hamis, ha A igaz. Jelölés: $\neg A$

1.4. **Definíció.** Az A és B ítélet *konjunkció*ján azt a kijelentést értjük, amely pontosan akkor igaz, ha a két eredeti ítélet egyidejűleg igaz. Jelölés: $A \wedge B$.

1.5. **Megjegyzés.** *A konjunkciót másképpen* logikai és művelet*nek is szokás nevezni. A hétköznapi nyelvben a konjunkció műveletét és, de, noha, pedig, bár, mégis, továbbá, valamint, illetve, stb. kötőszók valamelyikével fejezhetjük ki.*

1.6. **Definíció.** Az A és B ítélet *diszjunkció*ján azt a kijelentést értjük, amely pontosan akkor hamis, ha a két eredeti ítélet egyidejűleg hamis. Jelölés: $A \vee B$.

1.7. **Megjegyzés.** *A diszjunkciót másképpen* logikai megengedő vagy művelet*nek is szokás nevezni. A hétköznapi nyelvben a diszjunkció műveletét vagy, vagy-vagy, stb. kötőszók valamelyikével fejezhetjük ki.*

1.8. **Definíció.** Az A előtag és B utótag *implikáció*ján azt az ítéletet értjük, amely pontosan akkor hamis, ha az előtag igaz, de az utótag hamis. Az előtagot *feltétel*nek, az utótagot *következmény*nek nevezzük. Jelölés: $A \supset B$ vagy $A \Rightarrow B$.

1.9. **Megjegyzés.** *A hétköznapi nyelvben a diszjunkció műveletét ha ... akkor ... típusú összetett mondatokkal fejezhetjük ki. A matematikai tételek többsége ha A, akkor B típusú. Egyes tételeknél a két összetevőt felcserélve hamis, másoknál igaz állításokat kapunk. Ez utóbbiaknál $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ egyszerre teljesül.*

1.10. **Definíció.** Az A és B ítéletek *ekvivalenciá*ján azt az ítéletet értjük, amely pontosan akkor igaz, ha a két összetevő logikai értéke megegyezik. Jelölés: $A \Leftrightarrow B$

1.11. **Megjegyzés.** *A matematikában gyakran előfordul, hogy két kijelentés ugyanazt a gondolatot fejezi ki, azaz a két kijelentés egyenértékű. Ha ez teljesül, akkor a két kijelentést a következő szavakkal kapcsolhatjuk össze: ... akkor és csak akkor, ha...; ... pontosan akkor, ha...; ... ekvivalens azzal, hogy.... Fontos, hogy az ilyen típusú állítások gyakorlatilag két állításból állnak, mindkét irányt igazolni kell!*

Az eddig megemlített logikai műveletek igazságtáblái a következőképpen néznek ki.

P, Q ítéletek

Negáció: ¬P

P	¬P
I	H
H	I

Konjunkció: P∧Q

P	Q	P∧Q
I	I	I
I	H	H
H	I	H
H	H	H

Diszjunkció: P∨Q

P	Q	P∨Q
I	I	I
I	H	I
H	I	I
H	H	H

Implikáció: P⇒Q

P	Q	P⇒Q
I	I	I
I	H	H
H	I	I
H	H	I

Ekvivalencia: P⇔Q

P	Q	P⇔Q
I	I	I
I	H	H
H	I	H
H	H	I

Igazságtáblák segítségével tetszőleges, kvantormentes formula igazságértéke könnyen meghatározható. Nézzünk erre egy példát. Ahhoz, hogy ki tudjuk tölteni az igazságtáblát, ismerni kell a műveleti sorrendet a logikai műveletek között. Balról jobbra haladva a műveleti sorrend a következő: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

1.12. **Probléma.** *Igazoljuk, hogy a következő két állítás ekvivalens egymással:*
P1: Ha az 5 *prímszám, akkor kék az ég.*
P2: Vagy az 5 *nem prímszám, vagy kék az ég.*

Bizonyítás. Első ránézésre, semmi értelme a feladatnak. Nem látunk értelmes összefüggést a tagmondatok között. De pontosan az a lényege a formális bizonyításnak, hogy nem vesszük figyelembe az ítéletek hétköznapi tartalmát, csupán az igazságértékeiket és a közöttük álló logikai összefüggéseket. Arról nem beszélve, hogy a feladat nem az ítéletek igazságértékére kérdez rá, hanem a két ítélet ekvivalenciájára. Formalizáljuk a feladat ítéleteit.

A: az 5 prímszám
B: kék az ég

A két megadott állításból már megadható mindkét, feladatbeli ítélet:

P1: $A \Rightarrow B$
P2: $\neg A \vee B$

Az állítás szerint a két formula ekvivalens, azaz

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	A	$\vee$	$B)$
I	I	I	I	H	I	I	I
I	H	H	I	H	I	H	H
H	I	I	I	I	H	I	I
H	I	H	I	I	H	I	H

Az ekvivalencia definíció szerint akkor igaz, ha mindkét részformula egyszerre igaz vagy hamis. Ha megnézzük az igazságtáblát, láthatjuk, hogy A és B igazságértékétől függetlenül a két állítás egyszerre igaz, vagy hamis, így az ekvivalencia fennáll. Az állítást igazoltuk.

□

A logika és így a matematikai logika legfontosabb feladatai közé tartozik a helyes következtetési szabályok feltárása, illetve az egyes következtetési módok helyességének eldöntése. A következőkben megadok néhány következtetési sémát, és hozzájuk néhány példát.

1.13. **Tétel.** *Legyen* P, Q, R *ítélet. Ekkor a következő következtetési szabályok, melyekben a vonal fölött szerepelnek a premisszák, a vonal alatt a konklúzió, helyes következtetést tesznek lehetővé:*

1.

$$\frac{(P \wedge Q) \Rightarrow R, P \wedge \neg R}{\neg Q}$$

2. modus ponens:

$$\frac{R, R \Rightarrow P}{P}$$

3. indirekt bizonyítás:

$$\frac{\neg P \Rightarrow \neg Q, Q}{P}$$

4. kontrapozíció:

$$\frac{P \Rightarrow Q}{\neg Q \Rightarrow \neg P}$$

5. hipotetikus szillogizmus:

$$\frac{P \Rightarrow R, R \Rightarrow Q}{P \Rightarrow Q}$$

Bizonyítás. Felhasználva az igazságtáblákat, vizsgáljuk például az első következtetési szabályt.

Ha $|P \wedge \neg R| = igaz$, akkor $|P| = igaz$ és $|R| = hamis$. Mivel $|R| = hamis$, a $|(P \wedge Q) \Rightarrow R| = igaz$ csak akkor teljesül, ha $|P \wedge Q| = hamis$. Mivel $|P| = igaz$, kell, hogy $|Q| = hamis$ legyen. De ekkor $|\neg Q| = igaz$. Ezzel az állítást igazoltuk. Hasonlóan okoskodással a többi következtetési szabály is igazolható.

Az említett levezetési szabályok mindegyike igazolható továbbá igazságtáblával, úgy, hogy a premisszákra elvégezve a logikai és műveletet, majd ehhez implikációval kapcsolva a konklúziót, a tábla implikáció alatti oszlopában csupa igaz értéknek kell szerepelnie. (Ezen levezetésektől most eltekintünk.) □

1.14. **Probléma.** *Igazoljuk, hogy az alábbi következtetések helyesek:*

1) P1: Ha Hófehérke találkozik a gonosz mostohával, és beleharap a mérgezett almába, akkor meghal.
P2: Hófehérke találkozott a gonosz mostohával, de nem halt meg.
Q: Tehát Hófehérke nem harapott bele a mérgezett almába.

2) P1: Ha egy adott szám nem osztható 2-vel, akkor nem prím.
P2: Az adott szám prím.

Q: Tehát az adott szám osztható 2-vel.

3) P1: Sokat tanulok.

P2: Ha sokat tanulok, okos leszek.

Q: Okos vagyok.

4) P1: Ha kifogy a benzin, az autó leáll.

P2: Ha leáll az autó, elkésünk.

Q: Tehát ha kifogy a benzin, elkésünk.

5) P1: A konvex érintőnégyszög két-két szemközti oldalának összege megegyezik.

Q: Tehát, ha a konvex négyszög két-két szemközti oldalának összege nem egyezik meg, akkor nem érintőnégyszög.

Bizonyítás. Formalizáljuk a premisszákat és a konklúziókat.

1) P: Hófehérke találkozik a mostohával.
   Q: Hófehérke beleharap a mérgezett almába.
   R: Hófehérke meghal.
   Ezekre az ítéletekre alkalmazható a 1.13. Tétel 1. következtetési szabálya, melyről beláttuk, hogy helyes logikai következtetést eredményez.
2) P: Az adott szám osztható 2-vel.
   Q: Az adott szám prím.
   Ezekre az ítéletekre alkalmazható a 1.13. Tétel indirekt bizonyítás következtetési szabálya, melyről belátható, hogy helyes logikai következtetést eredményez.
3) R: Sokat tanulok.
   P: Okos leszek.
   Ezekre az ítéletekre alkalmazható a 1.13. Tétel modus ponens következtetési szabálya, melyről belátható, hogy helyes logikai következtetést eredményez.
4) P: Kifogy a benzin.
   Q: Az autó leáll.
   R: Elkésünk.
   Ezekre az ítéletekre alkalmazható a 1.13. Tétel hipotetikus szillogizmus következtetési szabálya, melyről belátható, hogy helyes logikai következtetést eredményez.
5) P: A konvex négyszög érintőnégyszög.
   Q: A konvex négyszög két-két szemközti oldalának összege megegyezik.
   Ezekre az ítéletekre alkalmazható a 1.13. Tétel kontrapozíció következtetési szabálya, melyről belátható, hogy helyes logikai következtetést eredményez.

$\square$

A logika témakörébe tartoznak olyan feladatok is, melyekben használjuk ugyan a logikai szabályokat, a helyes logikai következetéseket, de nem explicit módon; a formalizmust elhagyjuk. Ezen feladatokban nagy jelentősége van a *jó ötlet*nek, és a *heurisztiká*nak.

Pólya György így írja le a heurisztikát: "Heurisztika vagy "ars inveniendi" egy bizonyos, nem túl szabatosan körülhatárolt tudományág neve volt, amely a logikához, filozófiához vagy lélektanhoz tartozott. Sokszor vázolták fel nagy vonalakban, ritkán tárgyalták részleteiben; ma már úgyszólván teljesen feledésbe merült. A heurisztika célja a felfedezés és feltalálás módszerének és szabályainak tanulmányozása. [...] Heurisztikus okoskodás olyan okoskodás, amely nem végleges, hanem csak átmeneti és plauzábilis[2]; célja a kitűzött feladat megoldása. A heurisztikus okoskodás önmagában jó. A rossz az, ha a heurisztikus okoskodást összevegyítjük a szigorú bizonyítással. Még rosszabb az, ha a heurisztikus okoskodást szigorú bizonyításként akarjuk feltüntetni." [8, 117-118. oldal]

Nézzünk egy ilyen gondolkodtató logikai feladatot, melyet heurisztikus okoskodással oldunk meg.

1.15. **Probléma.** *(Matematikusok a kannibálok szigetén) Matematikusok egy csoportja hajótörést szenved, de szerencséjükre egy mentőcsónak segítségével mégis partot érnek egy aprócska szigetnél. Szerencsétlenségükre a szigeten kannibálok élnek, akik fogságba is ejtik őket, ám nem eszik meg azonnal vendégeiket, hanem tesznek nekik egy ajánlatot. Az ajánlat így hangzik: egymás mögé sorakoztok, majd mindegyikőtök fejére teszünk egy piros, vagy egy fehér sapkát. Mindenki csak az előtte állókat látja. Először a sor végén álló, majd az előtte álló, és így tovább, mindenki tippelhet, milyen színű sapka van a fején. Aki eltalálja, életben marad, aki nem, azt megesszük. Mielőtt kiosztjuk a sapkákat, kaptok néhány percet tanácskozni. Hányan menekülhetnek meg? Adj olyan eljárást, hogy a lehető legtöbben éljék túl a próbát!*

Könnyen látható, hogy ha minden második matematikus az előtte álló fején lévő sapka színét mondja, akkor a társaság fele biztosan megmenekül. De lehet-e több biztos túlélő? Megmutatható, hogy egy jó stratégiával az egész társaság egy ember kivételével biztosan megmenekül. Csak az az egy ember nem menekül meg feltétlenül, aki a sor végén áll, és először mond színt, nyílván úgy, hogy azzal a többieket informálja. *Miből induljak ki?* [8] Mivel két szín szerepel a feladatban, sejthető, hogy a kettes számrendszernek, illetve a paritásnak nagy jelentősége van a megoldásban.

[2] hihető, elfogadható, valószínű

Bizonyítás. 1. eset: Ha $n = 2k$ db matematikus van, akkor az utolsó személy páratlan számú társát látja. Ez azt jelenti, hogy a két szín közül az egyikből páros, a másikból páratlan számú van. Ha a matematikusok megegyeznek, hogy az utolsó azt a színt mondja, amelyikből például páratlan számút lát, akkor mindenki fogja tudni, milyen színű sapka van a fején, az alapján, amit addig hall és amit maga előtt lát. Például ha az i. $(1 \leq i \leq 2k-1)$ matematikus látja, hogy előtte, és hallja, hogy mögötte hány piros és fehér sapka van, akkor ha ezeket színenként összeadja, tudni fogja, a saját fején mi van. Ha például pirosból páros számút számolt össze, és az utolsó ember a pirosat mondta, akkor az i. matematikus fején is piros van, ha páratlan pirosat számolt, akkor az ő fején fehér van.

2. eset: Ha $n = 2k+1$ db matematikus van, akkor a fenti okoskodás nem jó. Ekkor az utolsó matematikus kivételével páros a létszám, ez csak úgy lehet, ha mindkét színből páros számú van, vagy mindkét színből páratlan. Ebben az esetben meg kell egyezniük, hogy például, ha mindkét színből páros van, akkor az utolsó a piros színt mondja, ha mindkettőből páratlan, akkor a fehér színt. Így hasonlóan az előző esethez, mindenki tudhatja, milyen színű sapka van a fején.

Van-e olyan megoldás, mely mindkét esetet egyszerre kezeli?

Szemléljük kicsit absztraktabban a problémát! Jelölje a piros színt a 0, a fehéret az 1 szám, így egy csak 0-kból és 1-esekből álló sorozatot kapunk. Az utolsó matematikus összegezze az előtte lévő számokat (színeket) $(\mod 2)$, azaz vegye az összeg maradékát kettővel osztva, s az így kapott számnak megfelelő színt mondja! Minden matematikus elvégzi ezt a számítást, az alapján, amit maga előtt lát, és amit maga mögül hall, majd a kapott számot öszehasonlítja azzal, amit az utolsó mondott. Ha a két szám megegyezik, akkor az aktuális matematikushoz a 0 szám tartozik, tehát piros sapka van a fején, egyébként pedig fehér. Ezzel az eljárással mindkét eset kezelhető, teljesen mindegy, hogy hány matematikusról van szó. □

2. Geometriai állítások bizonyítása

2.A. A geometria fejlődésének történeti áttekintése. A geometria a matematika egyik legősibb ága. Maga a geometria szó görögül eredetileg földmérést jelentett. A geometria fejlődése a terület, és térfogat számítás illetve csillagászat tapasztalatai alapján indult el. I.e. VI. században vált el tapasztalati gyökereitől, többek között Zénón és Thalész munkásságának hatására. Euklidesz körülbelül i.e. 300 körül élt, és alkotott, *Elemek* c. könyvében foglalta össze az addigi geometriai eredményeket. Az *Elemek*ben a geometriai objektumok tulajdonságait viszonylag kis számú axiómából vezeti le, így a modern matematika axiomatikus módszerének úttörője volt. "Az axiómákat a görög filozófusoktól eredeztethetően úgy szokás felfogni, mint olyan egyszerű és nyilvánvaló empirikus vagy intuitív tapasztalatok matematikai megfogalmazásait, a tér olyan alapvető tulajdonságait, melyekben épeszű ember nem kételkedik."[2] Középiskolában geometria alatt alapvetően az euklideszi geometriákat értjük. A manapság középiskolában tanított tételek többsége megtalálható Euklidesz 2000 éves könyvében.

Az euklideszi geometria precíz, pontosított axiomatikus leírását David Hilbert (1862-1943) adta meg. Az euklideszi geometria szinte 2000 évig az egyetlen elfogadott geometriai elmélet volt. Az 1800-es években Carl Friedrich Gauss, Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij, Bolyai János, Henri Poincaré, Bernhard Riemann munkásságának hatására megszülettek a nemeuklideszi geometriák.

2.B. Matematikai háttér. Mindenek előtt vezessünk be néhány jelölést, és konvenciót.

Legyen $E \neq \emptyset$ halmaz, elemeit nevezzük pontoknak, L legyen az E halmaz bizonyos részhalmazainak halmaza, mely részhalmazokat egyeneseknek nevezünk, és P az E halmaz bizonyos részhalmazainak halmaza, mely részhalmazokat pedig síkoknak nevezünk. A *pont, egyenes, sík* alapfogalom, melyet nem definiálunk. Az alapfogalmak közötti kapcsolat legyen az *illeszkedés.* Ha egy pont eleme egy egyenesnek, vagy egy síknak, azt mondjuk, hogy a pont illeszkedik az egyenesre, illetve síkra, vagy fordítva, az egyenes, illetve sík illeszkedik a pontra. Ezentúl a pontokat jelöljük az angol ábécé nagybetűivel $(A, B, C, \dots)$, az egyeneseket pedig a kisbetűivel $(a, b, c, \dots)$, míg a síkokat $S_1, S_2, \dots$ módon.

2.1. **Axióma.** Illeszkedési axiómák*: Tekintsük a* $(\mathrm{E}, \mathrm{L}, \mathrm{P})$ *hármast.*

H1: Bármely két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.
H2: Bármely egyenesre illeszkedik legalább két pont.
H3: Létezik legalább három olyan pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre (nem kollineárisak).
H4: Bármely három, nem kollineáris pontra illeszkedik pontosan egy sík.
H5: Egyetlen sík sem üreshalmaz (minden síknak van legalább egy pontja).
H6: Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes minden pontja illeszkedik a síkra.
H7: Két nem diszjunkt síknak legalább két közös pontja van.

H8: Létezik legalább 4 pont, melyek nem illeszkednek egy síkra.

2.2. **Definíció.** Az (E, L, P) hármast *Hilbert féle illeszkedési tér*nek nevezzük, ha eleget tesz a 2.1. Axiómának .

2.3. **Megjegyzés.** *Egy* $H \neq \emptyset$ *halmaz, és* $A, B \subset H$ *halmazok esetén, az* A *és* B *halmazokat diszjunktnak nevezzük, ha* $A \cap B = \emptyset$ *és* $A \cup B = H$.

2.4. **Definíció.** Az (E, L) párt *Hilbert féle illeszkedési sík*nak nevezzük, ha teljesül rá *H1, H2, H3.*

2.5. **Axióma.** (Vonalzó axióma) *Az* $(\mathrm{E}, \mathrm{L}, \mathrm{P})$ *illeszkedési térben teljesül a vonalzó axióma, ha:*

V1: Adott egy $d : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ *leképezés.*

V2: $\forall l \in \mathrm{L}$ *esetén* $\exists f : l \to \mathbb{R}$ *bijekció, melyhez* $\forall P, Q \in \mathrm{E}$ *esetén* $|f(P) - f(Q)| = d(P, Q)$, *ahol* d *egy távolságfüggvény,* f *pedig az* l *egyenes koordinátázása.*

2.6. **Axióma.** (Félsík axióma) *Az* $(\mathrm{E}, \mathrm{L}, \mathrm{P})$ *illeszkedési térben teljesül a félsík axióma, ha* $\forall S \subset \mathrm{P}$ *sík és* $\forall l \subset S$ *egyenes esetén léteznek a* H_1, H_2 *nemüres, diszjunkt, konvex halmazok, melyekre teljesülnek a következők:*

F1: $H_1 \cup H_2 = S \setminus l$.

F2: $A \in H_1$ *és* $B \in H_2$, *akkor* $\overline{AB} \cap l \neq \emptyset$, *ahol* $\overline{AB}$ *az* A *és* B *végpontú szakaszt jelenti.*

Ekkor H_1*-et és* H_2*-t* l határegyenesű nyílt félsík*nak nevezzük.*

2.7. **Definíció.** Egy (E, L, P) illeszkedési teret *folytonosan rendezett illeszkedési tér*nek nevezzük, ha eleget tesz 2.5. Axiómának és 2.6. Axiómának .

2.8. **Axióma.** (Szögmérő axióma) *Azt mondjuk, hogy egy* $(\mathrm{E}, \mathrm{L}, \mathrm{P})$ *folytonosan rendezett illeszkedési téren teljesül a szögmérő axióma, ha adott a tér szögvonalainak halmazát a* $[0, \pi]$ *intervallumba képző* m *leképezés úgy, hogy*

S1: (a szögmérés additivitása) Egy adott $AOB\measuredangle$ *konvex szögtartomány* P *pontjára* $m(AOB\measuredangle) = m(AOP\measuredangle) + m(POB\measuredangle)$.

S2: (szögszerkesztési posztulátum) Adott egy H *félsík és ennek határegyenesén egy* $\overrightarrow{OA}$ *félegyenes, akkor* $\forall t \in \{0, \pi\}$ *esetén egyértelműen létezik* $\overrightarrow{OB} \subset H$, *hogy* $m(AOB\measuredangle) = t$.

Ekkor az $m(AOB\measuredangle)$ *az* $AOB\measuredangle$*-höz tartozó konvex szögtartomány* mérték*e.*

2.9. **Definíció.** Két szög *kongruens*, ha mértékük megegyezik.

2.10. **Axióma.** (Kongruencia axióma) *Ha két, nem feltétlenül különböző háromszög között létezik olyan bijektív leképezés, melynél az egyik háromszög két oldala kongruens a másik háromszög megfelelő két oldalával, és az általuk bezárt szögek is kongruensek, akkor a két háromszög kongruens.*

2.11. **Definíció.** Az (E, L, P, d, m) ötös *abszolút tér*, ha (E, L, P) illeszkedési tér, melyre teljesül 2.5. Axióma , 2.6. Axióma , 2.8. Axióma és 2.10. Axióma .

2.12. **Axióma.** *(*Párhuzamossági axióma*) Megadva egy egyenest és egy arra nem illeszkedő pontot, legfeljeb egy olyan egyenes létezik, mely tartalmazza a pontot, és párhuzamos az egyenessel.*

2.13. **Definíció.** Egy abszolút teret *euklideszi tér*nek nevezünk, ha eleget tesz a 2.12. Axiómának .

Következmény. *Egy euklideszi térben pontosan egy olyan egyenes van, mely illeszkedik az adott pontra, és párhuzamos az egyenessel.*

Ezzel megadtuk az euklideszi geometria axiomatikus felépítését, melyre támaszkodva a középiskolában tanított geometriai állítások nagy része igazolható.

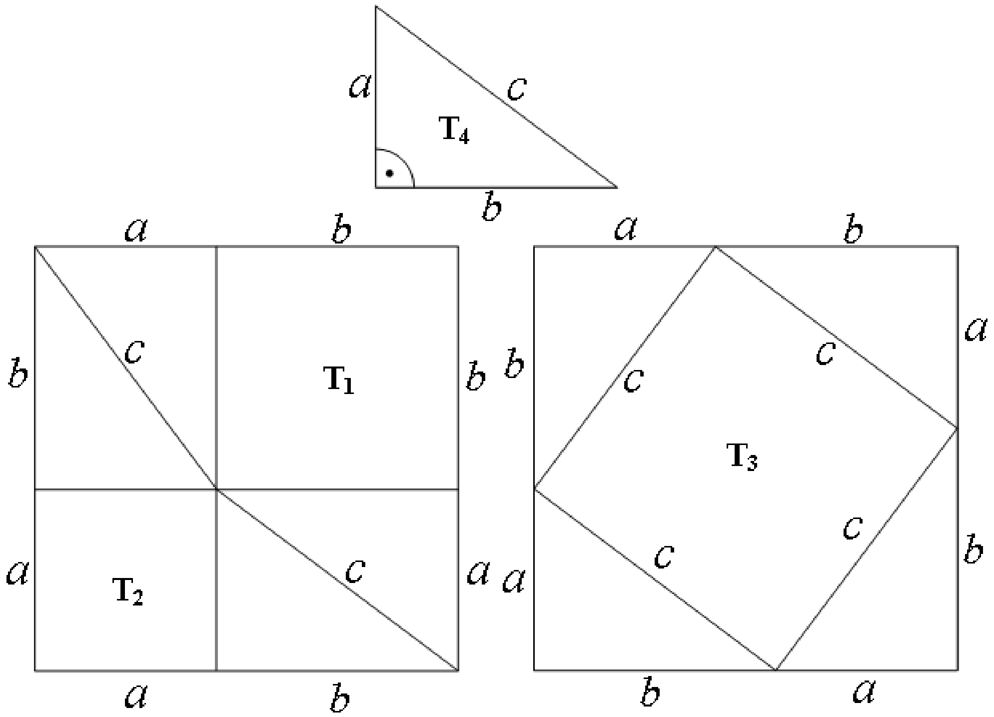
2.C. A módszer bemutatása. A geometriai bizonyítások tipikusan deduktív gondolkodásmódot igényelnek, hiszen minden új eredményt a fent leírt módon felépített axiómarendszerből próbálnak levezetni.

A jó ábrának óriási lehet a jelentősége a probléma megoldására vonatkozóan. Egy jól elkészített, szemléletes ábra fél siker. Nézzünk olyan bizonyításokat, melyekben egy jól kitalált ábra adja meg a kulcsot.

2.14. **Probléma.** *Pitagorasz-tétel: Ha a és b egy derékszögű háromszög két befogója, c pedig az átfogója, akkor a háromszög oldalaira az*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

összefüggés áll fönn.



1. felosztás 2. felosztás

Bizonyítás. Síkidomok átdarabolásával végezzük.

Rajzoljunk két egybevágó $a + b$ oldalhosszúságú négyzetet, majd a négyzeteket osszuk fel négyzetekre, és egybevágó derékszögű háromszögekre két különböző módon, az ábrának megfelelően. Mindkét felosztásnál keletkezik négy-négy egybevágó háromszög, hiszen mind a nyolc háromszögben a és b azonos, a közbezárt szög pedig 90°. Adjuk meg a síkidomok területét.

$$T_1 = b^2$$
$$T_2 = a^2$$
$$T_3 = c^2$$
$$T_4 = \frac{ab}{2}$$

Mivel kezdetben úgy vettük fel a két négyzetet, hogy azok egybevágóak, területük is egyenlő. Így a következő egyenlőségek teljesülnek:

$$T_2 + T_1 + 4T_4 = T_3 + 4T_4$$
$$T_2 + T_1 = T_3$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

□

Gyakran előfordul, hogy viszonylag nehéz, bonyolultnak tűnő algebrai összefüggéseket geometriai úton könnyen, látványosan lehet igazolni. Ha a diákok képesek felismerni a képletek mögött rejtőző geometriai tartalmat, a bizonyítás szinte leolvasható az ábrákról. Nézzünk néhány ilyen példát.

2.15. **Probléma.** *Igazoljuk két nemnegatív valós szám számtani és mértani közepe közötti összefügést, azaz*

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab},$$

tetszőleges $0 \leqq a, b \in \mathbb{R}$ *esetén.*

Bizonyítás. A szemléletesség kedvéért emeljük négyzetre az egyenlőtlenség mindkét oldalát, majd szorozzuk meg 4-gyel. A négyzetre emelést most elvégezhetjük, hiszen mindkét oldalon pozitív kifejezés áll, így az átalakítás az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget eredményez.

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geqq ab$$

$$(a+b)^2 \geqq 4ab \tag{2.1}$$

Vizsgáljuk az egyenlőtlenség két oldalát. *Nem ismersz valami rokonfeladatot? Nem tudnád felhasználni a módszerét?*[1] Vajon milyen geometriai alakzatot tudunk mögé képzelni? Az előző feladat ötletet adhat, hiszen ott az ab szorzatot egy derékszögű háromszög területével hoztuk kapcsolatba, illetve találkoztunk egy $(a+b)$ oldalú négyzettel is.

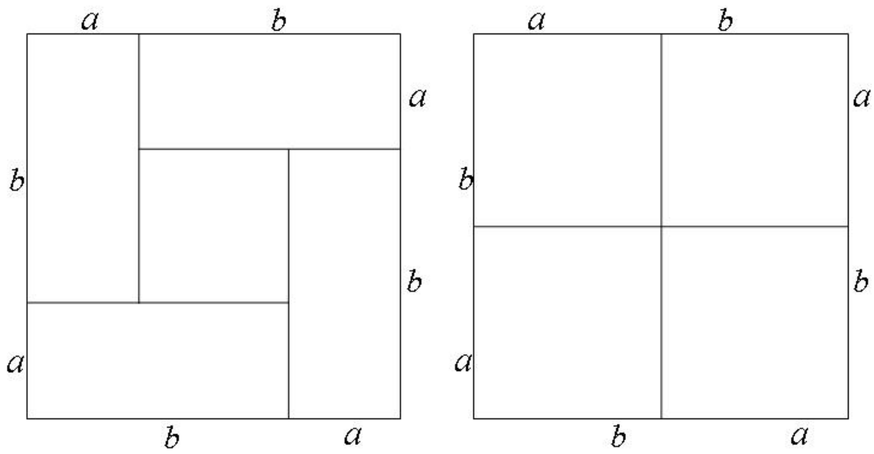
A bal oldalon az $(a+b)^2$ jelentse nekünk egy $(a+b)$ oldalú négyzet területét, a jobb oldalon látható ab pedig egy a, b oldalú téglalap területét. Rajzoljuk meg a négyzetet, majd az alábbi ábrán látható módon minden oldalon jelöljük ki az a és b szakaszokat, majd a téglalapokat is szerkesszük meg. Látható, hogy a (2.1) egyenlőtlenség bal oldalán az $(a+b)$ oldalú négyzet területe áll, jobb oldalán pedig négy a, b oldalhosszúságú, egybevágó téglalap területe.

Ugyanakkor leolvasható az ábráról, hogy az $(a+b)$ oldalú négyzet területe négy egybevágó téglalap, és egy $(b-a)$ oldalú négyzet területének összegével egyezik meg, azaz

$$(a+b)^2 = 4ab + (b-a)^2.$$

Tehát az állítás igaz, hiszen az $a+b$ oldalú négyzet területe egy $(b-a)$ oldalhosszúságú négyzet területével nagyobb, mint a négy téglalap területének összege.

Továbbá az is leolvasható az ábráról, hogy egyenlőség akkor áll fenn, ha eltűnik a $(b-a)$ oldalú négyzet, azaz ez a különbség 0 lesz, vagyis $a = b$.



Nem tudnád másképen is levezetni az eredményt?[8] □

2.16. **Megjegyzés.** *Ezt a problémát később (*3.12. *Probléma) bizonyítjuk algebrai módszerekkel is.*

A következő probléma igazolása előtt kimondunk egy tételt, melyre a bizonyítás során szükség lesz.

2.17. **Tétel.** *Bármely háromszögben egy oldal négyzetét megkapjuk, ha a másik két oldal négyzetének összegéből kivonjuk a két oldal és a közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát.*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

[4, 446. oldal]

2.18. **Probléma.** *Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget, ha* $0 \leqq x, y, u \in \mathbb{R}$*:*

$$\sqrt{x^2+y^2} \leqq \sqrt{x^2+u^2-\sqrt{2}xu} + \sqrt{u^2+v^2-\sqrt{2}yu}.$$

Bizonyítás. Vizsgáljuk az egyenlőtlenség két oldalát. A két gyökös kifejezés miatt nehézkes lehet algebrai módszerekel próbálkozni. Próbáljunk a képletek mögé geometriai jelentést képzelni.

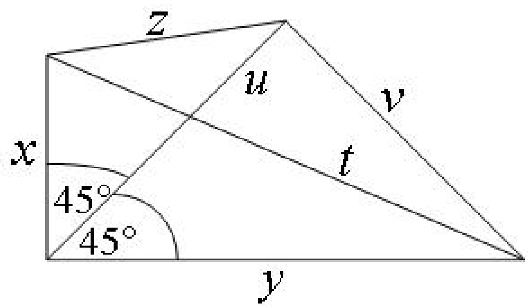
Nézzük először a bal oldalt, idézzük fel geometriai ismereteinket. *Nem ismersz olyan tételt, aminek hasznát vehetnéd?*[8] Van olyan képlet, tétel, összefüggés, melynek alakja megegyezik, vagy legalább hasonlít a bal oldalra? Egy jól felkészült, matematikában jártas középiskolás észre kell vegye, hogy a négyzetgyökjel alatt két szám négyzetösszege áll, ami a Pitagorasz-tételre (2.14. Probléma) emlékeztet minket: a négyzetgyökjeles kifejezés egy x, y befogójú derékszögű háromszög átfogóját írja le. Rajzoljunk tehát egy x, y befogójú derékszögű háromszöget.

A jobb oldal bonyolultabbnak tűnik, de az hamar feltűnik, hogy két azonos szerkezetű kifejezés található. Ha a bal oldal esetén felismertük a Pitagorasz-tételt, felfedezhetjük, hogy itt annak általános esetét, a koszinusz tételt (2.17. Tétel) használhatjuk föl. Úgy tűnik, a két kifejezés két általános háromszög egyik oldalát jelenti. De hogyan rajzoljuk be ezt a két háromszöget az ábránkba? A koszinusz tételnek megfelelően

$$\begin{aligned} \sqrt{2}xu &= 2xu\cos\gamma & \sqrt{2}yu &= 2yu\cos\delta \\ \sqrt{2} &= 2\cdot\cos\gamma & \sqrt{2} &= 2\cdot\cos\delta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &= \cos\gamma & \frac{\sqrt{2}}{2} &= \cos\delta \end{aligned}$$

ahol γ az x és u oldal által közbezárt szög, δ az y és u oldal által közbezárt szög.

Most már az egyenlőtlenség jobb oldalát is tudjuk ábrázolni. Rajzoljunk egy tetszőleges hosszúságú u szakaszt x és y metszéspontjából kiindulva úgy, hogy x-szel és y-nal is 45°-os szöget zárjon be. A közös pontból kiinduló x, y, u szakaszok végpontjait összekötve t, z, v szakaszokat kapjuk, ahogy az az ábrán is látható.



Ha eddig eljutottunk, már könnyű dolgunk van. Az állításban szereplő egyenlőtlenség megegyezik a következő egyenlőtlenséggel:

$$t \geqq z + v,$$

ami nem más, mint a háromszög-egyenlőtlenség, tehát az állításban szereplő egyenlőtlenség teljesül. Egyenlőség akkor áll fenn, ha a z és v is a t szakaszra illeszkedik, azaz $t = z + v$.

$\square$

A következő probléma előtt tekintsünk át néhány szükséges definíciót, és állítást.

2.19. **Definíció.** Legyen egy derékszögű háromszög két befogója a és b, az a oldallal szemközti szög α, átfogója pedig c. Ekkor a következő szögfüggvényeket értelmezzük:

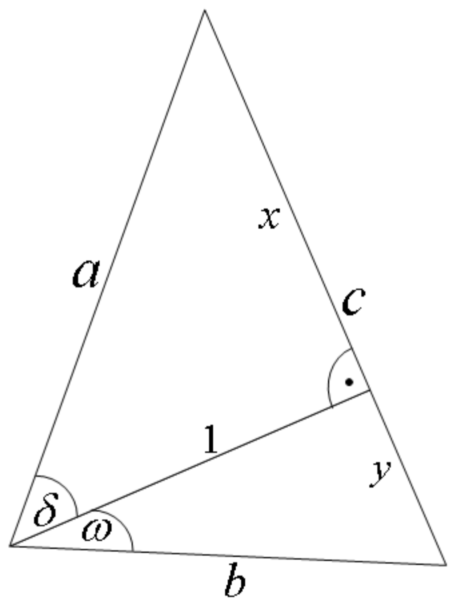
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$
$$ctan\alpha = \frac{b}{a}$$

2.20. **Tétel.** *Tetszőleges háromszög területe megegyezik két tetszőleges oldal és a közbezárt szög szinuszának szorzatának felével.*

2.21. **Probléma.** *Igazoljuk két szög összegének szinuszára vonatkozó addíciós tételt, azaz:*

$$\sin(\delta+\omega) = \sin\delta\cos\omega + \cos\delta\sin\omega$$

Bizonyítás. Készítsünk egy ábrát. Rajzoljunk egy olyan háromszöget, melynek egyik szöge $(\delta+\omega)$, és a δ, ω szögek határán lévő, 1 hosszúságú szakasz merőleges a $(\delta+\omega)$ szöggel szemközti oldalra (ld. ábra).



Az abc oldalú háromszög területét kétféleképpen is kiszámíthatjuk.

Egyrészt

$$T = \frac{ab\sin\ (\delta+\omega)}{2},$$

a 2.20. Tétel szerint.

Másrészt két háromszög területének összegeként:

$$T = \frac{x \cdot 1}{2} + \frac{y \cdot 1}{2},$$

mivel a háromszögek területe megegyezik egy $x, 1$, illetve $y, 1$ oldalú téglalap területének felével.

Adjuk meg az ábrán látható ismeretlen mennyiségeket a δ és az ω szögek segítségével.

$$\begin{aligned} \tan\delta &= \frac{x}{1} & \tan\omega &= \frac{y}{1} \\ \tan\delta &= x & \tan\omega &= y \\ \cos\delta &= \frac{1}{a} & \cos\omega &= \frac{1}{b} \\ \frac{1}{\cos\delta} &= a & \frac{1}{\cos\omega} &= b. \end{aligned}$$

Írjuk be ezeket a menyiségeket a területképletekbe, az így kapott kifejezéseknek egyenlőeknek kell lenniük:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos\delta} \cdot \frac{1}{\cos\omega} \cdot \sin(\delta+\omega) &= \frac{\tan\delta}{2} + \frac{\tan\omega}{2} \\ \frac{\sin(\delta+\omega)}{\cos\delta\cos\omega} &= \frac{\sin\delta}{\cos\delta} + \frac{\sin\omega}{\cos\omega}. \end{aligned}$$

Ha a kapott egyenletet beszorozzuk $\cos\delta\cos\omega$-val, akkor

$$\sin(\delta+\omega) = \sin\delta\cos\omega + \cos\delta\sin\omega$$

egyenletet kapjuk, mely pontosan a bizonyítandó összefüggés.

□

Gyakori hiba, hogy egy rossz ábra hibás következtetésre ad lehetőséget. Tipikus példa egy olyan feladat, melyben általános háromszögre teszünk valamilyen állítást, de a diák "véletlenül" valamilyen speciális háromszöget rajzol (derékszögűt, vagy egyenlőszárút, esetéleg szabályosat), s annak segítségével már nem feltétlenül helytálló következtetéseket von le. Ezért nagyon fontos, hogy a tanár is készítsen ábrát a táblára, és hangsúlyozza, hogy a táblán lévő ábrát minél inkább hasonlóan másolják a füzetbe, figyeljenek az arányokra, szögekre!

3. Algebrai módszer

3.A. Az algebra és kialakulása. Az algebra a matematika aritmetikai műveletekkel, azok tulajdonságaival, fajtáival foglalkozó ága. Részterületei a következők: elemi algebra, absztrakt algebra, lineáris algebra, univerzális algebra, algebrai számelmélet, algebrai kombinatorika, algebrai geometria. Ezek közül középiskolában az elemi algebrát tárgyaljuk, és érintjük a lineáris algebrát, bár inkább csak a gyakorlati eredményeit használjuk, az elméletet nem részletezzük.

Már 4000 évvel ezelőtt az ókori babiloniaiak is foglalkoztak algebrával. Kifejlesztettek egy algebrai módszeren alapuló aritmetikai rendszert. A következő kétezer évben kínai, indiai és görög matematikusok legfőképpen lineáris, másod-, harmad- negyedfokú és többváltozós egyenletek, lineáris egyenletrendszerek, diofantoszi egyenletek gyökeinek, megoldásainak meghatározásában dolgoztak ki módszereket, megoldásokat. Az indiai Brahmagupta volt az első matematikus, aki általános módszert alkalmazott az első- és másodfokú egyenletek megoldására, és diofantoszi egyenleteket is tudott kezelni.

A Bakhshali kéziratban már alfabetikus jeleket és képleteket használtak az ötváltozós lineáris egyenletek megoldására és harmad-, negyedfokú egyenletekkel is foglalkoztak.

Euklidesz görög matematikus az *Elemek* című művéből egy egész fejezetet szentel másod- és harmadfokú egyenleteknek, melyeket geometriai módon old meg. 150 körül az alexandriai Hérón három köteten át ír az algebrai egyenletekről, majd 200-ban az algebra atyja, Diophantosz egyiptomban élő matematikus megírja *Arithmetica* című könyvét, melyben számelméleti problémákkal és algebrai egyenletekkel foglalkozik. A későbbiekben, körülbelül ezer évig csak Európán kívül foglalkoztak érdemben matematikával, indiai, perzsa és kínai matematikusok.

"Maga az algebra szó az arab eredű "al-jabr" szóból származik, mely Abú Abdalláh Muhammad ibn Múszá al-Hvárizmí perzsa matematikus Kitab al-Jabr wa-l-Muqabala (ejtsd: "Hisab al-dzsabr walmukabala" ,szó szerint "*A rövidítés és törlés tudománya*") című, 820-ban írt értekezésének címében található. Az "al-jabr" szó újraegyesülést jelent, a változók redukálására vonatkozik." [1]

Az algebra gyors ütemű fejlődése 1535 után indult el, miután Leonardo Fibonacci (1170-1250) Pisában megírta *Liber Acci* című művét. "A magasabbfokú egyenletek megoldásainak keresése sok és nehéz kérdést vetett fel. Jelentősebb eredményt a XVI. században a Bolognában élt matematikusoknak sikerült elérni. S. Ferro (1465-1526), N. Tartaglia (1500-1557), G. Cardano

(1501-1576) nevéhez fűződik a harmadfokú, L. Ferrari nevéhez pedig (1522-1565) a negyedfokú egyenletek megoldása.

N. Abel (1802-1829) norvég matematikus 1826-ban bebizonyította, hogy az ötöd- és magasabbfokú egyenletekre nem létezik általános megoldóképlet." [4, 289. oldal]

R. Bombelli (1526-1572) használta először az imaginárius számokat, melyek értelmezését később K. F. Gauss (1777-1855) írta le, s ő vezette be a komplex szám elnevezést is.

A lineáris algebra kialakulásában nagy szerepet játszott Kowa Seki japán matematikus, a determináns fogalmának bevezetésével, Gottfried Leibnitz (1646 - 1716), a lineáris egyenletek mátrixok segítségével történő megoldásával és Gabriel Cramer (1704-1752) a róla elnevezett szabály felismerésével.

3.B. A módszer matematikai háttere. Középiskolában a valós számtestben ($\mathbb{R}$-ben) dolgozunk. Ez azt jelenti, hogy adott a valós számok halmazán értelmezett két művelet, az összeadás(+) és a szorzás $(\cdot)$.

Az így kapott $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ struktúra test, azaz a következők teljesülnek:

1) $(\mathbb{R}, +)$ kommutatív csoport, hiszen tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén
   i) A művelet asszociatív, azaz $(a+b)+c = a+(b+c)$,
   ii) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ neutrális elem, melyre $a+0 = 0+a = a$,
   iii) $\exists a' = -a$ inverz elem, melyre $a+(-a) = (-a)+a = 0$,
   iv) A művelet kommutatív, azaz $a+b = b+a$.
2) $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ kommutatív csoport, hiszen tetszőleges $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esetén
   i) A művelet asszociatív, azaz $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
   ii) $\exists 1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ neutrális elem, melyre $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$,
   iii) $\exists a' = \frac{1}{a}$ inverz elem, melyre $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$,
   iv) A művelet kommutatív, azaz $a \cdot b = b \cdot a$.
3) Az összeadás a szorzásra nézve disztributív, azaz $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Természetesen egy középiskolás diáknak nem kell ismernie az absztrakt algebra elemeit, így a test struktúra definícióját sem, de fontos, hogy ezeket az alapvető műveleteket, és azok tulajdonságait jól ismerje. Ezekre a műveletekre építve újabb műveleteket is be kell vezetni, mint pl.: a kivonás, osztás, hatványozás, ezek ismerete és használata is követelmény. Ezek olyan alapvető ismeretek, melyekkel már egy nyolcadik osztályos gyerek is rendelkezik.

Ezeket a műveleteket és különböző mennyiségeket felhasználva matematikai összefüggéseket írhatunk le. Előfordulhat, hogy tudjuk, egy adott mennyiség milyen kapcsolatban áll más mennyiségekkel, de a konkrét értékét nem ismerjük. Ilyenkor ezeket ismeretlenekkel (változókkal) jelöljük. Így bizonyos problémákat formalizálva, algebrai kifejezésekkel, egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel, s ezek rendszerével tudjuk leírni.

3.1. **Definíció.** Konstansokra, ismeretlenekre, illetve ezek hatványaira alkalmazva a négy alapműveletet, *algebrai kifejezés*t kapunk. A kifejezés *egytagú*, ha csak a szorzás és osztás műveletek segítségével állítottuk elő, és *többtagú*, ha az összeadás és kivonás műveleteket is alkalmaztuk. Attól függően, hogy egy algebrai kifejezésben egy, vagy több ismeretlen szerepel, *egyismeretlenes*, és *többismeretlenes* algebrai kifejezésről beszélünk. Egy egyismeretlenes algebrai kifejezés *fokszám*án, a benne szereplő ismeretlen legnagyobb kitevőjét értjük.

3.2. **Definíció.** Az $a_n, a_{n-1}, \dots a_1, a_0$ együtthatókkal felírt

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})$$

egyenletet egyismeretlenes n-ed fokú egyenletnek, más szóval *algebrai egyenlet*nek nevezzük.[4, 285. oldal] A föntebb leírt feltételek mellett

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \Delta \quad 0,$$

$\Delta \in \{<, >, \leqq, \geqq\}$ esetén egyismeretlenes n-ed fokú egyenlőtlenségről beszélünk.

Természetesen többismeretlenes egyenlet és egyenlőtlenség is definiálható, de ezek kezelése messze meghaladja a középiskolai szintet.

A 3.2. Definícióban szereplő egyenlet bal oldalán egy x-től függő polinomfüggvény áll, melyet $f(x)$-szel jelölve

$$f(x) = 0$$

alakú egyenletet kapjuk. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy az egyenlet megoldásai az $f(x)$ függvény zérushelyei. Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya az egyenlet alaphalmaza.

3.3. **Definíció.** Az olyan átalakításokat, amelyeknek segítségével egy egyenletből olyan másik egyenlethez jutunk, hogy mindkettőnek az alaphalmaza ugyanaz és közülük bármelyik egyenletnek minden gyöke (a többszörösségüket is figyelembe véve) a másik egyenletnek is gyöke, *ekvivalens átalakítások*nak nevezzük.[4, 295. oldal]

Nézzünk néhány ilyen gyakran használt átalakítást:

a) konstans hozzáadása, kivonása mindkét oldalból
b) ismeretlen, illetve ismeretlen konstansszorosának hozzáadása, kivonása mindkét oldalból
c) algebrai kifejezés hozzáadása, kivonása mindkét oldalból

d) midkét oldal nullától különböző konstanssal történő szorzása

3.4. **Megjegyzés.** *Ezek az átalakítások ekvivalens átalakítások az egyenlőtlenségekre nézve is, azzal a kiegészítéssel, hogy a d) pontban említett konstansoknak pozitívaknak kell lenniük.*

3.5. **Megjegyzés.** *A négyzetgyökvonás és a hatványozás nem minden esetben eredményez ekvivalens átalakítást. Ezek használata előzetes vizsgálódást igényel.*

Egyenletek (egyenlőtlenségek) összessége egyenletrendszert (egyenlőtlenségrendszert) alkot.

3.6. **Definíció.** Tetszőleges $a_{i,j}$ és b_i ($i \in \{1, 2, \dots m\}, j \in \{1, 2, \dots n\}$) konstansok mellett az

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{n,m}x_n &= b_m \end{aligned}$$

egyenletrendszert n *ismeretlenes,* m *egyenletből álló lineáris egyenletrendszer*nek nevezzük [3, 63. oldal].

3.7. **Definíció.** Két n ismeretlenes lineáris egyenletrendszert *ekvivalens*nek nevezünk, ha összes megoldásaik halmaza megegyezik.

3.8. **Tétel.** *Gauss-féle eliminációs módszer: Az alábbi átalakítások a lineáris egyenletrendszer vele ekvivalens lineáris egyenletrendszerbe viszik át (ld.* [3, 67. oldal]*):*

1. *Egyenlet szorzása nemnulla számmal.*
2. *Egy egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet lambdaszorosát.*
3. *Olyan egyenlet elhagyása, mely a megmaradóak lineáris kombinációja.*
4. *Egyenletek sorrendjének felcserélése.*
5. *Az ismeretlenek sorrendjének felcserélése az együtthatóikkal együtt, minden egyenletben.*

3.9. **Megjegyzés.** *Az átalakítások úgy értendők, hogy az egyenletek mindkét oldalával ugyanazt az átalakítást kell végrehajtani*

3.C. A MÓDSZER BEMUTATÁSA. René Descartes szerint minden egyes probléma visszavezethető algebrai probléma megoldására. Az általa kidolgozott egyetemes módszer a következő ([9, 37. oldal]):

1. Minden problémát vezessünk vissza matematikai problémára!

2. Minden matematikai problémát vezessünk vissza algebraira!
3. Minden algebrai problémát vezessünk vissza egyetlen egyenlet megoldására!

Azt gondolom, ez a módszer túlságosan általános, a világunk minden területén fellépő problémák nem feltétlenül írhatók le matematikai nyelven. De a matematika területén fellépő problémák jelentős része formalizálható, algebrai módszerekkel megoldható. A kérdéses adatokat ismeretlenekkel jelölve, a probléma összefüggéseit figyelembe véve egyenleteket írhatunk fel, melyek megoldása az eredeti probléma megoldását is szolgáltatja.

Az algebrai módszer segítségével történő bizonyítás lényege, hogy a probléma formalizálása után, az állítás feltételeit felhasználva, ekvivalens átalakításokkal megkapjuk a bizonyítani kívánt állítást.

3.10. **Probléma.** *Legyen (a_n) egy számtani sorozat, melynek differenciája (két szomszédos elemének különbsége) $d \in \mathbb{R}$. Igazoljuk, hogy e sorozat első n db elemének összege*

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2},$$

ahol a_1 a sorozat első, a_n a sorozat n-dik eleme.

Bizonyítás. Az állítás csupán algebrai eszközökkel igazolható. Teljes indukcióval igazolható, hogy a számtani sorozat esetén $a_n = a_1 + (n-1)d$ (5.11. Probléma).

Ekvivalans átalakítás az, ha egy egyenletet megszorzunk egy konstans számmal, és az is, ha két egyenletet összeadunk.

Írjuk fel az első n elem összegét explicit módon:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots a_{n-1} + a_n$$

Majd írjuk fel ugyanezt az egyenletet, úgy hogy a jobb oldalon szereplő összeget fordított sorrendben írjuk föl:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots a_2 + a_1$$

A két egyenletet összeadva a következőt kapjuk:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \tag{3.1}$$

Tetszőleges $i \in \{1, \dots, n-1\}$ esetén

$$\begin{aligned} a_i + a_{n-i+1} &= [a_1 + (i-1)d] + \{a_1 + [(n-i+1) - 1]d\} = \\ = (a_1 + (i-1)d) + (a_1 + (n-i)d) &= a_1 + a_1 + [(i-1) + (n-i)]d = \\ &= a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n \end{aligned}$$

Ezért a (3.1)-ben a jobb oldalt a következőképpen is írhatjuk:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n),$$

ahol az $(a_1 + a_n)$ összeg n-szer szerepel. Így

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Ha a_n helyére behelyettesítjük a $a_n = a_1 + (n-1)d$ kifejezést, majd elvégezzük a lehetséges összevonásokat, megkapjuk az állítás másik részét, miszerint

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

Így a teljes állítást igazoltuk. □

A következő feladathoz tekintsük az

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

nullára redukált másodfokú egyenletet, melynek gyöke x_1, x_2, s így gyöktényezős alakja

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0. \tag{3.3}$$

Igazoljuk a másodfokú egyenlet gyökei (megoldásai), és együtthatói közötti összefüggéseket, azaz a Viete-formulát.

3.11. **Probléma.** *Viete-formula: Legyen x_1, x_2 az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenelt két egymástól nem feltétlenül különböző valós gyöke. Ekkor a következő összefüggések állnak fenn:*

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \qquad \text{\textit{és}} \qquad \frac{c}{a} = x_1 x_2$$

Bizonyítás. Induljunk ki a (3.3)-ból, az ismeretleneket tartalmazó tényezők összeszorzása után a következő alakot kapjuk:

$$a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) = 0$$

Kiemelés segítségével érjük el, hogy az ismeretlen együtthatói kiolvashatók legyenek az egyenletből.

$$a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = 0 \tag{3.4}$$

Most a (3.2)-ből emeljük ki a-t:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \tag{3.5}$$

Mivel eddig csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, (3.4) és (3.5) ekvivalens egymással, s mivel x^2 együtthatója mindkettőben megegyező, így a többi együtthatónak is meg kell egyezniük. Ezek alapján

x együtthatója:

$$\frac{b}{a}=-(x_1+x_2)$$

a konstans:

$$\frac{c}{a}=x_1x_2$$

□

3.12. **Probléma.** *Igazoljuk két nemnegatív valós szám számtani és mértani közepe közötti összefügést, azaz*

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab},$$

tetszőleges $0\leqq a,b\in\mathbb{R}$ *esetén.*

Bizonyítás. Csupán algebrai módszerekkel.

Emeljük négyzetre az egyenlőtlenség mindkét oldalát. Ez jelen esetben megengedett átalakítás, mivel az állítás feltétele szerint $0\leqq a,b$, így $0\leqq a+b$ és $0\leqq ab$, így a négyzetre emeléssel nem keletkezik új gyöke az egyenlőtlenségnek. Ezt követően szorozzuk meg 4-el az egyenlőtlenséget:

$$\frac{(a+b)^2}{4}\geqq ab$$

$$(a+b)^2\geqq 4ab$$

3.13. **Megjegyzés.** *A bizonyítás menete eddig megegyezik a* 2.15. *Problémánál megadott bizonyítás első lépéseivel.*

Hogyan menjünk tovább?[8] Milyen további átalakításokat végezhetünk? Alkalmazzuk az egyenlőtlenség bal oldalára az $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ nevezetes azonosságot, majd mindkét oldalból vonjunk ki $4ab$-t:

$$a^2+2ab+b^2\geqq 4ab$$

$$a^2-2ab+b^2\geqq 0.$$

Fel kell ismerni, hogy az átalakított egyenlőtlenségünk bal oldalán újra egy nevezetes azonosság áll ($(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$), melyet alkalmazva

$$(a-b)^2 \geqq 0.$$

Mivel a bal oldalon egy négyzetszám áll, melyről tudjuk, hogy mindig nemnegatív, így az egyenlőtlenség tetszőleges a, b számokra teljesül. Az utolsó egyenlőtlenség teljesülése pedig maga után vonja az állítás teljesülését is, mivel csak ekvivalens átalakításokat alkalmaztunk. Az utolsó egyenlőtlenségből az is kiolvasható, hogy egyenlőség akkor áll fenn, ha $a - b = 0$, vagyis $a = b$.

□

4. Indirekt bizonyítási módszer

4.A. A módszer kialakulása, és matematikai háttere. Az indirekt bizonyítási eljárás kialakulása szoros kapcsolatban áll a matematikai logika fejlődésével. A vele rokon módszert, a reductio ad absurdum-ot az eleaták tették a filozófiában gyakorivá és feltételezhetően innen épült be a matematikába is.

4.B. A módszer bemutatása. A módszer lényege, hogy feltárjunk egy ellentmondást. A bizonyítás formája a cáfolat, vagyis oly módon bizonyítjuk valaminek az igazát, hogy az ellenkezőjét megcáfoljuk - ekkor kétségtelenül igaz lesz az eredeti állításunk. Az indirekt bizonyítás az állítás helyességét úgy igazolja, hogy bebizonyítja az ellentétes állítás hamisságát.

Legyen P és Q állítás (ld. 1.1. Definíció), ha a P állításból következik, hogy a Q állítás hamis, akkor ha Q igaz, ebből következik, hogy P hamis. (1.13. Tétel)

4.1. **Probléma.** *A $\sqrt{2}$ irracionális szám.*

Bizonyítás. (1) Induljunk ki az állítás tagadásából, azaz abból, hogy a $\sqrt{2}$ szám nem irracionális, hanem tegyük fel, hogy racionális. Ekkor $\sqrt{2}$ felírható $\frac{a}{b}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, és a, b relatív prímek, azaz $(a, b) = 1$, így a tört nem egyszerűsíthető tovább. Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd az egyenletet átrendezve a következő egyenletet kapjuk:

$$2b^2 = a^2$$

Ekkor

$$2|2b^2 \qquad \text{és} \qquad 2|a^2$$

Mivel a^2 egy négyzetszám, viszont 2 nem négyzetszám, így

$$2|a \tag{4.1}$$

Ebből viszont az következik, hogy

$$4|a^2 \qquad \text{és} \qquad 4|2b, \;\Rightarrow 2|b^2$$

Mivel b^2 egy négyzetszám, viszont 2 nem négyzetszám, így

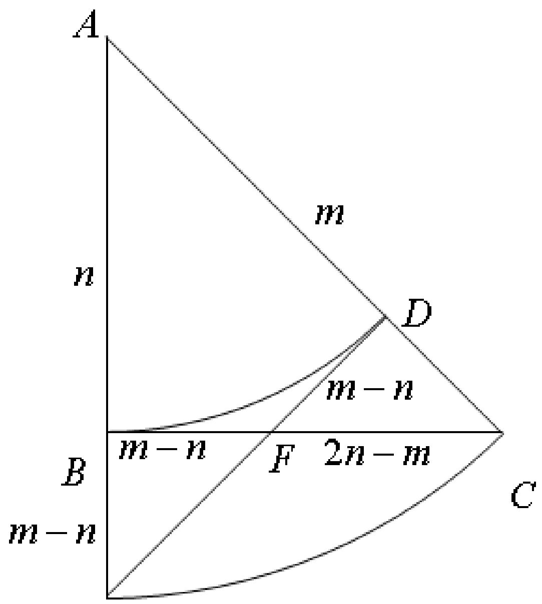
$$2|b \tag{4.2}$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, hiszen a (4.1) és a (4.2) egyenletek szerint a és b is osztható 2-vel, tehát a feltételezésünkkel ellentétben az $\frac{a}{b}$ tört egyszerűsíthető. Ez csak akkor lehetséges, ha hibás volt a feltevésünk, tehát a $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként, így irracionális. □

Bizonyítás. (2) Szintén indirekt, de geometriai módszereket is felhasznál.

Legyen ABC egy egyenlőszárú derékszögű háromszög, melynek átfogója m, befogói n hosszúságúak. A Pitagorasz tétel miatt $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

Indirekt tegyük fel, hogy $m, n \in \mathbb{Z}$, m és n relatív prímek, azaz az $\frac{m}{n}$ tört már nem egyszerűsíthető. A-ból kiindulva rajzoljunk m sugarú körívet, melynek metszéspontja az $\overrightarrow{AB}$ félegyenessel E, és n sugarú körívet, melynek metszéspontja az $\overrightarrow{AC}$ félegyenessel D. Az ED, BC szakaszok metszéspontját pedig jelölje F. (ld. ábra!)



Az így kapott szakaszokra teljesül, hogy $AB = AD$, $AC = AE$ és $BAC\measuredangle$ és $DAE\measuredangle$ szögek kongruensek. Ekkor a 2.10. Axióma miatt az $ABC\triangle$ és az $ADE\triangle$ egybevágó. Az $EBF\measuredangle$ derékszög, és az egybevágóság miatt a $BEF\measuredangle = 45°$, így az $EBF\triangle$ szintén egyenlőszárú, derészögű háromszög. Ezért $BE = m - n$ és $BF = m - n$. A szimmetria miatt $DF = m - n$,

$DC = m - n$ és $FDC\triangle$ szintén egyenlőszárú derékszögű háromszög. Ekkor az $FC = n - (m - n) = 2n - m$. Mivel $m, n \in \mathbb{Z}$, a $2n - m, m - n \in \mathbb{Z}$ is teljesül, és $2n - m < m$, $m - n < n$. Így az $FDC\triangle$ kisebb, egyenlőszárú, derékszögű háromszög, mint az $ABC\triangle$, azaz az átfogó és egy befogó aránya szintén $\sqrt{2}$. Ez viszont ellentmond annak a feltevésünknek, hogy az $\frac{m}{n}$ tört egyszerűsíthető. □

4.2. **Probléma.** *Pitagorasz tétel megfordítása: Ha egy háromszög két oldalának négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű. Formálisan, ha adott egy háromszög, melynek oldalai k, l, m, akkor ha*

$$k^2 + l^2 = m^2,$$

akkor a háromszög derékszögű.

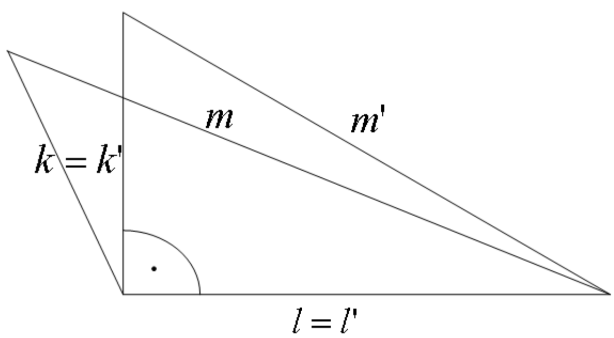
Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy egy k, l, m oldalú háromszögre teljesül a tétel feltétele, miszerint

$$k^2 + l^2 = m^2, \tag{4.3}$$

de a konklúzió már nem, azaz a háromszög nem derékszögű. Tekintsünk egy olyan derékszögú háromszöget, melynek két befogója k és l, átfogója $m' \neq m$. (ld ábra!) Ekkor Pitagorasz tétele (2.14. Probléma) miatt

$$k^2 + l^2 = m'^2. \tag{4.4}$$

(4.3) és (4.4) miatt $m = m'$, ami ellentmondáshoz vezet. Hiszen két háromszög egybevágó, ha megfelelő oldalaik hossza megegyezik, így a k', l', m' háromszögnek is derékszögűnek kell lennie, ami ellentmond feltevésünknek, miszerint nem derékszögű.



□

5. A teljes indukció módszere

5.A. Matematikai háttér. A teljes indukció módszere a természetes számok halmazának létezésére és tulajdonságaira épül, és halmazelméleti alapokra vezethető vissza. Tekintsük a valós számok halmazát ($\mathbb{R}$).

5.1. **Definíció.** Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *induktív*, ha $1 \in A$ és $x \in A$ esetén $x+1 \in A$ is teljesül.

5.2. **Tétel.** *Létezik az $\mathbb{R}$-nek induktív részhalmaza.*

Bizonyítás. Az $\mathbb{R}$ maga is iduktív halmaz, illetve tetszőleges számú induktív halmaz metszete is induktív. Ezért az $\mathbb{R}$ összes induktív halmazának metszete is induktív. Ez a metszet a legszűkebb induktív részhalmaza $\mathbb{R}$-nek. □

A valós számok legszűkebb induktív részhalmazának elemeit természetes számoknak, magát a halmazt a természetes számok halmazának nevezzük, és $\mathbb{N}$-nel jelöljük. Jelölje x' az $x \in \mathbb{N}$ elem rákövetkezőjét, és $x' := x + 1$.

5.3. **Tétel.** $\mathbb{N}$ *teljesíti a* Peano axiómák*at, azaz:*

(i) $1 \in \mathbb{N}$.
(ii) $n \in \mathbb{N}$ *akkor* $n' \in \mathbb{N}$.
(iii) Ha $n \in \mathbb{N}$, *akkor* $n' \neq 1$.
(iv) Ha $n, m \in \mathbb{N}$ *és* $n' = m'$, *akkor* $n = m$.
(v) Ha $A \subset \mathbb{N}$ *és* $1 \in A$ *és* $(n \in A \Rightarrow n' \in A)$ *akkor* $A = \mathbb{N}$.[7, 19-20. oldal]

5.4. **Tétel.** *Legyen T_n az $n \in \mathbb{N}$-re vonatkozó állítás, és legyen (T_n) tulajdonságoknak olyan sorozata, hogy (T_1) igaz és ha (T_n) igaz, akkor (T_{n+1}) is igaz. Ekkor T_n minden $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $A := \{n \in \mathbb{N} \mid T_n \ \ igaz\}$. Ekkor A induktív halmaz, s mivel $\mathbb{N}$ a legszűkebb induktív halmaz, így $\mathbb{N} \subset A$. Ugyanakkor az A halmaz definíciója alapján $A \subset \mathbb{N}$. Ez azt jelenti, hogy $A = \mathbb{N}$, azaz T_n minden $n \in \mathbb{N}$-re teljesül.[7, 19-20. oldal] □

Ez az eljárás teszi lehetővé, hogy a természetes számokra vonatkozó állításokat tudjunk bebizonyítani.

5.B. A módszer bemutatása. A teljes indukció első írásos emléke szerint 1575-ben Francesco Maurolico *Arithmeticorum libri fuo* című művében bizonyította, hogy az első n páratlan szám összege n^2.

A módszer célja, hogy egy, a természetes számokra vonatkozó állítást igazoljunk. Ehhez szükséges, hogy a tanulók tisztában legyenek a természetes számok fogalmával. Középiskolában nem teszünk említést a fenti tételekről, és a Peano axiómákról, az $\mathbb{N}$ halmazt úgy definiáljuk, hogy megadjuk az elemeit. $\mathbb{N} := 1, 2, 3, ...$ (azaz a pozitív egész számok halmaza, megállapodás szerint a 0 is hozzávehető). Az eljárás a következő:

1) Igazoljuk az állítást a lehető legkisebb n-re! Ez általában az $n = 1$ esetet jelenti.
2) Indukciós feltétel: tételezzük fel, hogy az állítás teljesül az $n = k$ ($k = 1, 2, \dots$) esetre.
3) Bizonyítsuk be az indukciós feltétel segítségével, hogy az állítás teljesül az $n = k + 1$ esetre is.

Természetesen az utolsó lépés jelenti a nehézséget. Észre kell venni, hogyan lehet felhasználni az indukciós feltételt.

Nézzük, hogyan kell alkalmazni a teljes indukció módszerét egy konkrét példán keresztül. A gyerekek számára általában nehéz látni, miért is helytálló ez a módszer. Ezért törekszem rá, hogy az egymást követő esetek közötti kapcsolatra rámutassak, majd pedig az általános esetet is levezetem.

5.5. **Probléma.** *Az első n darab páratlan szám összege n^2.*

Először vizsgáljunk meg jónéhány esetet, és próbáljunk a k-di ($k = 1, 2, \dots$) és $k + 1$-dik eset között összefüggést felfedezni.

$$\begin{array}{lcrl}
n = 1 & \Rightarrow & 1 = 1 & 1^2 = 1 \\
n = 2 & \Rightarrow & 1 + 3 = 4 & 2^2 = 4 \\
n = 1 + 1 & \Rightarrow & 1 + 3 = 4 & (1+1)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 = 4 \\
n = 3 & \Rightarrow & 1 + 3 + 5 = 9 & 3^2 = 9 \\
n = 2 + 1 & \Rightarrow & 4 + 5 = 9 & (2+1)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2 = 9 \\
n = 4 & \Rightarrow & 1 + 3 + 5 + 7 = 16 & 4^2 = 16 \\
n = 3 + 1 & \Rightarrow & 9 + 7 = 16 & (3+1)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1^2 = 16 \\
n = 5 & \Rightarrow & 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 & 5^2 = 25 \\
n = 4 + 1 & \Rightarrow & 16 + 9 = 25 & (4+1)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 1^2 = 25 \\
n = 6 & \Rightarrow & 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 & 6^2 = 36 \\
n = 5 + 1 & \Rightarrow & 25 + 11 = 36 & (5+1)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 1 + 1^2 = 36 \\
\vdots & & &
\end{array}$$

Próbáljuk felírni az állítást az általános esetben:

$$n = k \quad \Rightarrow \quad 1 + 3 \cdots + (2k-1) = k^2$$

$$n = k+1 \quad \Rightarrow \quad 1 + 3 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

Úgy tűnik, ha teljesül a k. ($k = 1, 2, \dots$), akkor segítségével az $k+1$. állítás is igazolható. Most nézzük, hogyan alkalmazható az állításra a teljes indukció módszere!

Bizonyítás. Teljes indukcióval.

1) Vizsgáljuk az $n = 1$ esetet!

$$1 = 1 \qquad \text{és} \qquad 1^2 = 1$$

Az állítás teljesül.

2) Tegyük fel, hogy az $n = k$ (k=1,2,...) esetre az állítás teljesül, tehát:

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2$$

3) Vizsgáljuk az $n = k+1$ esetet! Az állítás szerint

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

Induljunk ki az egyenlet bal oldalából!

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1)-1] = 1 + 3 + \cdots + (2k-1) + (2k+1)$$

Mivel az indukciós feltétel szerint

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2,$$

ezért

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = k^2 + 2k + 1.$$

Az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ nevezetes azonosság miatt:

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Így $1 + 3 + \cdots + (2k-1) + [2(k+1)-1] = (k+1)^2$ teljesül.

Tehát az állítás teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén. □

A következő példánk előtt tisztában kell lennünk a következő fogalmakkal!

5.6. **Definíció.** Ha A és B halmazok, és A minden eleme B-nek is eleme, akkor azt mondjuk, hogy A a B-nek *részhalmaza* ($A \subseteq B$ vagy $B \supseteq A$). Ha ezen túl B-nek van olyan eleme, mely A-nak nem eleme, akkor A a B-nek *valódi részhalmaza* ($A \subset B$ vagy $B \supset A$).

5.7. **Megjegyzés.** *Természetesen tetszőleges A halmaznak van legalább kettő részhalmaza, az üreshalmaz ($\emptyset \subset A$), és önmaga ($A \subseteq A$).*

5.8. **Probléma.** *Egy n elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval.

1) Vizsgáljuk az $n = 1$ esetet. Legyen A egy egyelemű halmaz, azaz $|A| = 1$, $A = \{a\}$. Az 5.7. Megjegyzés szerint ($\emptyset \subseteq A$) és ($A \subseteq A$), további részhalmaz nincs, hiszen A-nak nincs a-n kívül más eleme. Tehát A részhalmazainak száma $2 = 2^1$, így az állítás igaz.
2) Tegyük fel, hogy $n = k$-ra teljesül az állítás, azaz ha $|A| = k$, akkor a részhalmazainak száma 2^k.
3) Vizsgáljuk az $n = k+1$ esetet. Az igazolandó állítás szerint ha $|A| = k+1$, akkor A részhalmazainak száma 2^{k+1}. Ha elveszünk egy $x \in A$ elemet az A halmazból, akkor egy olyan A' halmazt kapunk, melyre $|A'| = k$, és $A' \cup \{x\} = A$ vagyis $A' \subset A$. Ez azt jelenti, hogy A' minden részhalmaza A-nak is részhalmaza, így az indukciós feltétel szerint A-nak biztosan van 2^k részhalmaza. Az így kapott részhalmazok mindegyikéhez hozzávéve az előbb elvett x elemet, újabb, az eddigiektől különböző 2^k részhalmazt képezünk.

$$\emptyset \subset A', \quad x \in A, \quad \Rightarrow \emptyset \cup \{x\} \subset A$$
$$\forall B \subset A', \quad x \in A, \quad \Rightarrow B \cup \{x\} \subset A$$

$\vdots$

$$A' \subseteq A', \quad x \in A, \quad \Rightarrow A' \cup \{x\} \subseteq A$$

Így előállítottuk A összes részhalmazát, melynek száma

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Tehát az állítás teljesül tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén. □

A következő példa előtt tisztázzuk a következő definíciókat.

5.9. **Definíció.** A pozitív, egész számok halmazán értelmezett függvényt *sorozat*nak nevezzük. [4, 332. oldal]

Jelölés: (a_n)

5.10. **Definíció.** Az olyan (a_n) sorozatot, melyben bármely két egymást követő tag különbsége állandó, *számtani sorozat*nak nevezzük. Az állandó különbséget differenciának nevezzük, és d-vel jelöljük.

5.11. **Probléma.** *Legyen* (a_n) *egy számtani sorozat, melynek differenciája* $d \in \mathbb{R}$. *E sorozat* n*-edik eleme a következőképpen számolható:*

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval.

1) Az $n = 1$ eset triviális, azonosságot eredményez. Nézzük az $n = 2$ esetet is! Definíció szerint $a_2 - a_1 = d$. Hozzáadva a_1-t, és kivonva d-t,
$$a_2 = a_1 + d$$
összefüggést kapjuk. Ugyanakkor a bizonyítandó képletből kiindulva:
$$a_2 = a_1 + (2-1)d = a_1 + d$$
2) Tegyük fel, hogy $n = k$-ra teljesül az állítás, azaz $a_k = a_1 + (k-1)d$.
3) Vizsgáljuk az $n = k+1$ esetet!
$$a_{k+1} = a_k + d,$$
definíció szerint. Az indukciós feltétel szerint
$$a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd = a_1 + [(k+1) - 1]d.$$
Tehát az állítást igazoltuk.

□

A teljes indukció módszerének nehézsége a diákok számára abban rejlik, hogy nehezen ismerik föl, hogyan lehet az indukciós feltételt alkalmazni. Nézzünk egy példát, mi történhet, ha rossz indukciós lépést alkalmazunk.

5.12. **Probléma.** *Hol a hiba a következő bizonyításban? Állítás: Bármely* n *pozitív egészre* $a^{n-1} = 1$, *ahol* $a > 0$ *tetszőleges szám.*

Bizonyítás. Ha $n = 1$, akkor $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$

Ha feltesszük, hogy a tétel igaz az $1, 2, \cdots n$ esetre, akkor azt kapjuk, hogy
$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1}a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1;$$
tehát a tétel $(n+1)$ esetére is igaz. [11, 159. oldal] □

Megoldás: A hiba létezése nyílvánvaló, könnyedén tudunk ellenpéldát mutatni: legyen $a = 2$, minden $1 < n \in \mathbb{N}$ esetén $a^{n-1} \neq 1$. Ha megvizsgáljuk az algebrai átalakításokat, nem találunk bennük hibát. Úgy tűnik, a hiba az indukciós lépésben keresendő. A levezetés szerint $a^{n-1} = 1$, és $a^{n-2} = 1$. Ugyanakkor az indukciós feltétel csak az előző, $n-1$-edik esetre vonatkozik.

Itt viszont az n-edik eset bizonyításakor a feltételt az $n-1$-edik, és $n-2$-edik esetre is alkalmaztuk. Ez okozta a hibát, melynek következtétben egy hamis állítást véltünk igazolni.

Összegzés

Napjaink oktatási rendszerében a kompetenciák kerültek előtérbe. A legfontosabb matematikai kompetencia a logikus gondolkodás, és a problémamegoldás. Azt gondolom, a matematikai bizonyítások nem feltétlenül arra valók, hogy szigorú matematikai elméleteket építsenek föl diákjaink, hanem azért, hogy gondolkodásukat fejlesszék. Ahhoz, hogy valaki jó problémamegoldó legyen, rengeteg problémát kell látnia és megoldania. Többek között ezért is szükséges, hogy a diákjainkat a matematikai állítások igazolására ösztönözzük. Ehhez képest egyre kevesebb hangsúly kerül a bizonyítások tanítására, hiszen a középszintű érettségin egyáltalán nem követelmény a bizonyítás.

Célom az volt, hogy a matematikai bizonyításokat néhány szempont szerint csoportosítsam, és néhány levezetést bemutassak. Bízom benne, hogy ha egy középiskolás kezébe kapná ezt a dolgozatot, könnyedén megértené a leírásaimat, és jó ötletanyagnak találná a megoldott feladatokat. Természetesen azzal a feltétellel, hogy bizonyos matematikai előismeretekkel rendelkezik, hiszen ezen dolgozatban helytakarékosság miatt nem volt lehetőseég minden használt fogalmat precízen definiálni.

Gyakorlótanításom során volt szerencsém bizonyításokat tanítani. Élmény volt számomra, hogy az általam tanított előismeretekből merítve az osztály szinte segítség nélkül tudott számukra új tételeket bizonyítani. Tisztában vagyok vele, hogy ez nem az én néhány hetes munkám eredménye volt, hanem vezetőtanárom addigi módszereinek köszönhető, mégis megnyugtató számomra, hogy az általam befektetett munka gyümölcsözőnek bizonyult. Ez mindenképp azt bizonyítja számomra, hogy igazán van helye és jelentősége a bizonyításoknak a középiskolai matematika órán.

Végezetül egy ismeretlen kolléga szavait idézem: "Azzal, hogy a középszintű anyagból kikerültek a bizonyítások éppen csak a matematikaoktatás lényege sérült: az önálló következtetések levonására való képességre nevelés." [5]

Irodalom

[1] http://hu.wikipedia.org/wiki/Algebra
[2] http://hu.wikipedia.org/wiki/Geometria
[3] Gaál István - Kozma László, Lineáris algebra, Debrecen, Kossuth Egyetemi Kiadó, 2003
[4] Hajnal Imre - dr. Nemetz Tibor - dr. Pintér Lajos - dr. Urbán János, Matematika IV. osztály (fakultatív B változat), Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1982
[5] Hutás Henrietta, A bizonyítások szerepe a középiskolai matematika oktatásában
[6] Lakatos Imre, Bizonyítások és cáfolatok, Budapest, Typotex, 1998
[7] http://riesz.math.klte.hu/∼pales/hung/anal.pdf
Páles Zsolt, Bevezetés az analízisbe (Előadáskövető egyetemi jegyzet), Debrecen, 1997
[8] Pólya György, A gondolkodás iskolája, Budapest, Akkord Kiadó, 2000
[9] Pólya György, A problémamegoldás iskolája, Budapest, Tankönyvkiadó, 1967
[10] Reuben Hersh, A matematika természete, Budapest, Typotex, 2000
[11] Róka Sándor, 2000 feladat az elemi matematika köréből, Budapest, Typotex, 2006
[12] http://www.inf.unideb.hu/∼varteres/logikauj/Logikafo.pdf
Várterész Magda, Az informatika logikai alapjai (Előadáskövető egyetemi jegyzet), Debrecen, 2006

Tartalom