

DIPLOMAMUNKA

Szabóné Balla Henrietta

**Debrecen
2007**

Debreceni Egyetem

Informatika Kar

Játékos logikai feladványok

Témavezető:
Dr. Veréb Krisztián
egyetemi adjunktus

Készítette:
Szabóné Balla Henrietta
programtervező matematikus szakos hallgató

Debrecen

2007

A logikában semmi sem véletlen...

(Wittgenstein)

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés.....	2
2. Feladatok	5
3. Elmélet	7
4. Megoldások	12
4. 1. Általánosan	12
4. 2. Logikai törvények alkalmazásával	16
4. 3. Quine-táblával	20
4. 4. Gentzen-kalkulussal.....	37
4. 5. Gentzen - program segítségével	42
5. Összefoglalás	56

1. Bevezetés

A logika a görög *logosz* szóból származik. Jelentése: gondolat, szó, ész. A logika az egyik legrégebbi tudomány, szinte egyidős az emberiséggel. Mint tudomány megjelenése hozzávetőleg az ókorra tehető. Az első jelentős logikával foglalkozó tudós Arisztotelész volt. Arisztotelész logikai írásai az *Organon* című gyűjtemény részei, ezen belül a *Herméneutika*, az *Első Analitika*, és a *Második Analitika* című könyvek a legjelentősebbek, melyben tulajdonképpen megalapozta a logikát. Arisztotelész szerint a logika feladata igaznak tekintett állításokból levezetett igaz következtetések levonása. A következtetésekből már betűkkel jelölte a változtatható részeket. Kimondta a kétértékű logika alapvető törvényeit, három logikai alapszabályt határozott meg, melyek sokáig az egyetlen alapját képezték a matematikának. Ezek a következők voltak: azonosság elve, ellentmondás elve és a harmadik kizárásának elve. Az arisztotelészi logika nagy hatást gyakorolt a gondolkodókra, tudósokra mintegy kétezer éven keresztül. Az ókorban alakult ki a sztoikus logika rendszere is.

A középkorban a skolasztikus logika fejlődött ki, ami az arisztotelészi hagyomány folytatásának tekinthető. Ezután sokáig lassan fejlődött a matematikai logika, a középkorban közel azonos szinten maradt.

Az újkorra a modern szimbolikus vagy formális logika létrejött a jellemző. A fordulópont Boole, De Morgan és Frege nevéhez fűződik. Boole és De Morgan egy időben mutatta ki, hogy a formális logika törvényeit a matematikában is lehet használni, s leírta az általa bevezetett szimbólumokkal a logika legalapvetőbb törvényeit.

A Cantor által felépített halmazelméletben több ellentmondás is felmerült, melyek közül az elsőt Cantor maga tárta fel. Ez a matematikai krízis azonban újabb lendületet adott a logika fejlődésének, hiszen az ellentmondások mindegyike a harmadik kizárásának elvén alapult.

A huszadik században a klasszikus logika törvényeit megtagadó elméletek láttak napvilágot. Megjelent a többértékű logika elmélete, amely Lukaszewicz nevéhez kötődik szorosán. A többértékű logika elmélete elutasítja a kizárt harmadik törvényét: egy állításnak három logikai értéke lehet: igaz, hamis, a harmadik lehetőség az eldönthetetlen vagy a lehetséges. A fuzzy logika még tovább ment. A kétértékű logikával ellentétben itt bármely 0 és 1 közötti logikai érték lehetséges. A hagyományos kétértékű logika és a technika révén keletkezett a

számítógép, a fuzzy-logika pedig főként a vezérlést forradalmasította, e technika segítségével készülnek a videó kamerák, porszívók, mosógépek.

A dolgozatot 6 fő részre tagoltam. Az első részben ismertetek három logikai feladványt játékos formában. A feladványok kidolgozásában a Smullyan könyvek [6, 7, 8, 9, 10] nagy szerepet kaptak, viszont a feladatokat magam találtam ki, ami később bosszúságot jelentett megoldásuk során, a feladatok bonyolultsága miatt. Egyszóval az egyediségre való törekvés az egyszerűség rovására ment, amivel saját magamnak okoztam nehézséget.

A második részben kapott helyet a logika elméleti oldalról történő bemutatása (logika elmélet). A diplomamunkának nem az a fő feladata, hogy az elméleti anyagot ismertesse, de mivel nélkülözhetetlen a gyakorlati feladatok megoldása során, ezért a megoldáshoz szükséges elméleti részt néhol jobban ismertetem. Az elmélet tárgyalása nem teljes, a logika szerteágazó ismeretanyagának csak azon részével foglalkozom, amely az adott gyakorlati feladatok megoldásához szorosan kötődik. Ennek köszönhető tehát az is, hogy a konkrét megoldási részben is szerepel némi elméleti anyag, mely remélhetően az olvasót nem zavarja össze.

A harmadik résztől többféle megoldási módot fejtek ki. A feladatok megoldása során, a logika gyakorlatban való hasznosításának bemutatása a cél, így tehát nem követem mereven a levezetések és helyességbizonyítások merev logikai lépéseit, hanem azok felhasználásával egy vegyes technikát mutatok be. Fontos persze kiemelnem, hogy természetesen a logika szabályait mindig pontosan követtem és betartottam, csak épp bizonyos – a játékos logikai feladványok megoldása közben kevésbé releváns részeket – átugrottam, illetve más technikákkal helyettesítettem (például a Quine táblák esetén nem törekszem propozicionális tautológiák megkeresésére, stb.) A száraz matematikai levezetések mellett igyekeztem az érthetőségre is törekedni, és a matematikai logika alkalmazása mellett az ún. emberi logikát is felhasználni a feladatok megoldásánál. Ez utóbbi természetesen szintén formalizálható a megoldás keresése közben, de gyakran épít „ki nem mondott” vagy épp „magától értetődő” állításokra.

Először csupán az előbb említett emberi logikával, és csak kis matematikai logika segítségével oldom meg a feladatokat, így ezeket a megoldásokat logikával nem foglalkozó ember is könnyebben megérti.

A negyedik részben a logikai törvények alkalmazását ismerhetjük meg, és gyakorolhatjuk be. A logikai törvények nagyon fontos részét képezik a logika tudományágának, hiszen azok képezik a kalkulusok axiómarendszerét, illetve azok keresése és bizonyítása mindig fontos szerepet töltött be a matematika történetében. Épp ezért használatukra én is kellő hangsúlyt fektetek.

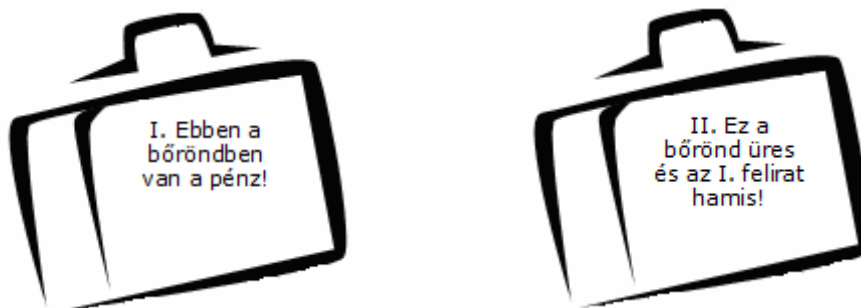
A következő részben a Quine-tábla felhasználását mutatom be a feladatok megoldása során. Nem teljes Quine-táblával dolgozok (nem tautológiákat keresek), hanem csak részlegessel, azaz csak az állítások kielégíthetősége érdekel engem

Az utolsó részben a Gentzen-kalkulus gyakorlati alkalmazását szemléltetem, mind papíron, mind program segítségével.

2. Feladatok

Képzeld el, hogy egy újfajta, - manapság oly népszerű - televíziós vetélkedőn veszünk részt, ahol próbára tehetjük logikus gondolkodásunkat. A téma vadonatúj: a bőröndökön lévő felirat és egy kis segítség alapján kell eldönteni, hogy melyik bőrönd rejti a pénzt. A feladatok körönként egyre nehezednek, a tét egyre nagyobb. Az első körben 100 ezer forintot, a második körben 500 ezer forintot, és a harmadik körben egymillió forintot lehet nyerni teli bőröndönként.

1. Első körben két bőrönd közül kell választani. A következő feliratok állnak a bőröndökön:



Segítségként azt kapjuk, hogy annak a bőröndnek a felirata igaz, amelyikben a pénz van, és az üres bőrönd felirata pedig hamis.

2. Ha kezdünk belerázódni, és ilyen könnyűek a feladatok, akkor gyűjtsünk még egy kis pénzt!



Itt is érvényes, hogy annak a bőröndnek a felirata igaz, amelyikben a nyeremény található, a másik felirat hamis.

3. Következik a harmadik forduló, ahol egy kicsit nehezítettük a dolgon. Most a pénzzel teli, és az üres bőröndön kívül olyan bőröndöt is lehet választani, amelyik lenullázza az eddig összegyűjtött pénzt. Egy bőröndben biztosan található pénz, de üres vagy nullázó bőröndből bármennyi lehet, akár nulla is.

A pénzzel teli bőrönd felirata igaz, az üresé hamis, és amelyik bőröndben a nullázó található, az lehet igaz is és hamis is. Lássuk hát a bőröndöket:



Sok szerencsét, vagy inkább jó fejtörést a játékhoz!

3. Elmélet

Vegyük a következő jelöléseket (logikai jeleket):

\neg : tagadás, negáció

\wedge : és, konjunkció

\vee : vagy (megengedő vagy), diszjunkció

\supset : következik, implikáció

\equiv : akkor és csak akkor, ekvivalencia

\Leftrightarrow : definíció szerint

Kijelentés (ítélet): Olyan kijelentő mondat, amely egyértelműen igaz vagy hamis (a kettő együtt nem lehet). A kijelentéseket latin nagybetűkkel jelöljük: A , B , C ,

Logikai érték: Az a tulajdonság, hogy egy kijelentés igaz vagy hamis, a kijelentés logikai értéke.

Kijelentés-logika (ítélet-kalkulus):[3]

A kijelentés-logika tárgya: A kijelentések közötti műveletek vizsgálata és a kijelentések külső szerkezetének formalizálása.

Kijelentés-logikai műveletek: Kijelentések közötti műveletekről csak abban az esetben beszélünk, ha a két kijelentésből kapott összetett mondat is kijelentés, és annak logikai értékét a komponensek logikai értéke egyértelműen meghatározza.

Negáció (tagadás): Egy tetszőleges A kijelentés negációján azt a $\neg A$ kijelentést értjük, amely pontosan akkor igaz, ha az A hamis.

A negáció logikai értéke:

A	$\neg A$
i	h
h	i

A negáció tulajdonságai:

- Kettős tagadás: $\neg \neg A = A$

Konjunkció (és): Tetszőleges A, B kijelentések konjunkcióján azt a $A \wedge B$ kijelentést értjük, amely pontosan akkor igaz, ha a két eredeti kijelentés egyidejűleg igaz.

A konjunkció logikai értéke:

A	B	$A \wedge B$
h	h	h
h	i	h
i	h	h
i	i	i

A konjunkció tulajdonságai:

- Kommutatív: $A \wedge B = B \wedge A$
- Asszociatív: $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
- Idempotens: $A \wedge A = A$

Diszjunkció (vagy): Tetszőleges A, B kijelentések diszjunkcióján azt az $A \vee B$ kijelentést értjük, amely pontosan akkor hamis, ha mindkét kijelentés egyidejűleg hamis.

A diszjunkció logikai értéke:

A	B	$A \vee B$
h	h	h
h	i	h
i	h	h
i	i	i

A diszjunkció tulajdonságai:

- Kommutatív: $A \vee B = B \vee A$
- Asszociatív: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
- Idempotens: $A \vee A = A$
- Disztributív: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
 $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- De Morgan-képletek:
 - $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
 - $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Implikáció („ha...akkor”): Tetszőleges A, B kijelentések implikációján azt az $A \supset B$ kijelentést értjük, amely pontosan akkor hamis, ha az A kijelentés logikai értéke igaz, és a B

logikai értéke hamis. Az A -t feltételnek vagy premisszának, a B -t következménynek vagy konklúzióknak nevezzük.

Az implikáció logikai értéke:

A	B	$A \supset B$
h	h	i
h	i	i
i	h	h
i	i	i

Az implikáció nem kommutatív, nem asszociatív és nem idempotens.

Ekvivalencia (pontosan akkor, akkor és csak akkor): Tetszőleges A, B kijelentések ekvivalenciáján azt az $A \equiv B$ kijelentést értjük, amely pontosan akkor igaz, ha az A és B logikai értéke egyidejűleg megegyezik.

Az ekvivalencia logikai értéke:

A	B	$A \equiv B$
h	h	i
h	i	h
i	h	h
i	i	i

Az ekvivalencia tulajdonságai:

- Kommutatív: $A \equiv B = B \equiv A$
- Asszociatív: $A \supset (B \supset C) = (A \supset B) \supset C = A \supset B \supset C$
- Nem idempotens: $A \supset A = i$

Az Ω nyelv A formulája az A_1, \dots, A_k formulák Boole-kombinációja, ha az A formula az A_1, \dots, A_k formulákból logikai összekötőjelek segítségével épül fel, kvantorok nélkül. Az A_i -ket ($i = 1, \dots, n$) komponenseknek nevezzük.

A komponensek logikai értéke meghatározza a formula értékét.

Az Ω nyelv ($\Omega = (Srt, Cnst, Fn, Pr)$ - elsőrendű logikai nyelv) A formulája az A_1, \dots, A_k Ω -beli formulák Boole-kombinációja, ha az A formula A_1, \dots, A_k -ből épül fel a logikai jelek segítségével, kvantorok alkalmazása nélkül.

A Quine-féle tábla [12] arra ad választ, hogy hogyan függ az A formula igazságértéke az A_1, \dots, A_k formulák értékétől. A Quine-táblában a sorok az A_1, \dots, A_k formulák összes különböző lehetséges értékeit tartalmazzák. A 0 és az 1 összes lehetséges kombinációja adja az oszlopokat az A_1, \dots, A_k formulák alatt. Elvégezve a logikai műveleteket megkapjuk a főoszlopot. A főoszlop a formula fő logikai összekötőjele alatt keletkezik.

Az olyan Boole-kombinációt, melyhez tartozó értéktáblázatban a főoszlop csupa 1 értékből áll, propozicionális tautológiának nevezzük.

Minden propozicionális tautológia logikai törvény (a megfordítás nem igaz).

Meg kell említeni még néhány fontos logikai összefüggést:

Kettős tagadás tétele: Egy kijelentés tagadásának a tagadása maga az eredeti kijelentés.

$$\neg(\neg A) = A$$

A harmadik kizárásának tétele: (lásd lentebb: „szabvány igaz”) egy kijelentés vagy igaz, vagy nem igaz, harmadik lehetőség nincs.

Az ellentmondás tétele: (lásd lentebb: „szabvány hamis”) egy kijelentés és tagadása egyidejűleg nem lehet igaz.

A Gentzen-kalkulus:[14]

Legyenek Γ és Δ véges formulahalmazok, A, B, \dots formulák. Egy szekvent egy (Γ, Δ) pár (később: $\Gamma \rightarrow \Delta$). A \rightarrow jel implikációt reprezentál. A szekventben Γ és Δ véges formulasorozat.

Azt mondjuk, hogy egy szekvent teljesül, ha amikor a nyíl baloldalán lévő minden formula igaz, a nyíl jobboldalán lévő formulák legalább egyike igaz.

Egy szekventet a Gentzen-kalkulusban levezethetőnek nevezünk, ha

- vagy axióma
- vagy olyan levezetési szabály, melyben ez a vonal alatti szekvent és a vonal feletti szekvent(ek) levezethetőek.

A Gentzen-kalkulus helyes, mert ha az $A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_k$ szekvent levezethető a Gentzen-kalkulusban, akkor a $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \supset B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_k$ formula logikai törvény.

A szekvent kalkulus teljes, mert ha az A formula logikai törvény, akkor a $\rightarrow A$ szekvent levezethető a Gentzen-kalkulusban.

A Gentzen-kalkulus axiómasémái: $A \Gamma \rightarrow \Delta \quad A, \perp \rightarrow, \rightarrow T$

A Gentzen-kalkulus levezetési szabályait a feladat megoldása során ismertetem, és csak azokat írom le, amelyeket felhasználok a levezetés során.

És most lássuk az elmélet alkalmazását a gyakorlatban!

4. Megoldások

4. 1. Általánosán

1. Az első bőrönd felirata lehet igaz és hamis is, így tehát a második bőrönd felirata fog dönteni.

Vegyük azt az állítást, miszerint a bőröndben pénz van, legyen ennek az állításnak A a jele.

A következő állításunk legyen az, hogy a bőrönd üres, ennek a jele legyen B .

Természetesen egy bőrönd nem lehet egyidejűleg tele és üres is, ezért az A és a B állítás kizárják egymást. A kizáró vagy logikai értéke akkor hamis, ha mindkét kijelentés logikai értéke egyidejűleg hamis (vagy éppen igaz). A logikai érték akkor igaz, ha az első kijelentés igaz (hamis), és a másik kijelentés hamis (igaz).

Van még egy állításunk, ami úgy szól, hogy az I. felirat hamis, ezt jelöljük C -vel.

Tudjuk, hogy amelyik bőröndre igaz az A kijelentés, annak a feliratnak igaznak kell lennie.

Tehát a második bőrönd feliratát vizsgáljuk, amiben a B és C kijelentés logikai és-el van összekapcsolva. Ha azt feltételezzük, hogy ebben a bőröndben van a pénz, vagyis erre a bőröndre igaz az A állítás, akkor azt kell megnéznünk, hogy a felirat igaz-e. Ahhoz, hogy a $B \wedge C$ igaz legyen, ahhoz a B -nek és a C -nek is igaznak kell lennie:

B	C	$B \wedge C$
h	h	h
h	i	h
i	h	h
i	i	i

De a B nem lehet igaz, mert az A és a B állítás kizárják egymást, így a felirat hamis, tehát az I felirat az igaz, miszerint abban a bőröndben van a pénz.

2. Most egy kicsit összetettebb feladattal állunk szemben. Először is bontsuk fel a két-két kijelentésből álló feliratokat atomjaira:

Az I-es bőröndben van a pénz: A

A II. felirat igaz: B .

Az I. felirat hamis: C .

A II-es bőröndben van a pénz: D

Tegyük fel, hogy az I. felirat a hamis. Ebből az is rögtön következik, hogy a második felirat az igaz. A feliratban található két állítást *vagy* logikai összefüggés kapcsolja össze.

A	B	$A \vee B$
h	h	h
h	i	i
i	h	i
i	i	i

Ekkor mind a két kijelentésnek, az A -nak és B -nek is hamisnak kell lennie, vagyis a bőrönd üres és a II. felirat hamis. Ellentmondásra jutottunk, mivel a kezdeti feltevésünk az volt, hogy a II felirat az igaz.

Most tegyük azt fel, hogy a I. felirat az igaz. Ebből következik, hogy a II. felirat a hamis.

A	B	$A \vee B$
h	h	h
h	i	i
i	h	i
i	i	i

C	D	$C \wedge D$
h	h	h
h	i	h
i	h	h
i	i	i

Itt már több lehetőség közül választhatunk, a diszjunkció és a konjunkció is 3-3 esetben ad számunkra megfelelő logikai értéket. Próbáljuk a sok lehetőség közül megtalálni a megfelelőt, és kizárni a többit.

Tehát, ha a II. felirat a hamis, akkor legalább az egyik kijelentésnek hamisnak kell lennie, ami rögtön teljesül, mivel a felirat tartalmazza a D állítást, miszerint ebben a bőröndben van a pénz, és ekkor a feliratnak, mint tudjuk igaznak kell lennie, és most ennek éppen az ellenkezőjét feltételezzük. A C állítás jelenleg még lehet akár igaz vagy hamis is, a

feliraton szereplő $C \wedge D$ állítás logikai értékét nem befolyásolja. Egyébként, ha a kezdeti feltételezést nézzük, hogy az I. felirat igaz, a C kijelentés logikai értéke is hamis.

Térjünk vissza az I. felirathoz. Tudjuk, hogy ez a felirat igaz, vagyis a két kijelentés közül valamelyiknek igaznak kell lennie, de a B állításról már tudjuk, hogy hamis, mert eleve az ellenkezőjét feltételeztük, ezért az A kijelentésnek kell igaznak lennie, annak, hogy az első bőröndben található a pénz. Tehát az a feltétel is teljesült, hogy annak a bőröndnek a felirata igaz, amelyikben a pénz van.

3. A legegyszerűbb, ha az I-es számú bőrönd feliratával kezdjük. Ha a felirat hamis lenne, akkor az azt jelentené, hogy ebben a bőröndben van a pénz, de ez azért nem lehetséges, mivel a pénzes bőrönd felirata igaznak kell, hogy legyen. Így a felirat biztosan igaz, ez azt jelenti, hogy vagy pénz van benne, amit a felirat eleve cáfol, vagy nullázót tartalmaz, ezért a bőrönd biztosan nullázót tartalmaz.

Vegyük a IV-es feliratot! A feliratot bontsuk fel két állításra. Jelölje A azt az állítást, miszerint a II-es felirat igaz, B , hogy a III-as felirat igaz. Viszont ott a III. felirat is, ami pont azt mondja ki, hogy a II. felirat igaz. Itt B magával vonja A -t, vagyis, ha B igaz, akkor A is, de ha B hamis, akkor A is hamis.

A	B	$A \vee B$
h	h	h
h	i	i
i	h	i
i	i	i

A IV-es felirat lehet hamis, és ekkor mind az A , mind a B logikai értékének hamisnak kell lennie a diszjunkció igazságtáblája miatt. Ezzel azt kapnánk, hogy a II-es, III-as, IV-es felirat is hamis, ami nem lehetséges, mert tudjuk, hogy valamelyik bőröndben pénznek kell lenni, és ennek a bőröndnek a felirata igaz, és az egyetlen igaznak talált feliratú bőröndben –a I-esben– biztos, hogy nincs pénz. Tehát azt kaptuk, hogy a IV-es felirat biztosan igaz, ami vagy azt jelenti, hogy ebben található a pénz, vagy a nullázó. Ahhoz, hogy a felirat igaz legyen legalább az egyik kijelentésnek igaznak kell lenni (lásd az igazságtábla többi sorát). Vegyük sorra ezeket az eseteket:

A-hamis	$\leftarrow \downarrow$ <i>ellentmondás</i>	A-igaz	$\leftarrow \downarrow$ <i>ellentmondás</i>	A-igaz	
B-igaz	\Rightarrow A-igaz	B-hamis	\Rightarrow A-hamis	B-igaz	\Rightarrow A-igaz

Például a második esetben az A igaz, a B hamis, de mivel a B azt mondja ki, hogy A igaz, és ez az állítás hamis, ezért lesz az A hamis. És mert az $A \vee \neg A$ formula tautológia, a harmadik kizárásának tétele (lásd 9.o.) azt jelenti, hogy egy állítás vagy igaz vagy nem igaz, harmadik lehetőség nincs, ezért ezt az esetet is kizárjuk.

Egy esetünk maradt, ahol az A és a B állítás is igaz. Az, hogy a B állítás igaz, magával vonja az A kijelentés igaz értékét. A jelenlegi eredmények szerint mindegyik felirat igaz, és a pénz az II-es, a III-as, vagy a IV-es börönd valamelyikében lehet.

Már csak a II-es böröndöt kell vizsgálnunk. A börönd felirata biztosan igaz, tehát a két kijelentés közül valamelyiknek igaznak kell lenni.

A	B	$A \vee B$
h	h	h
h	i	i
i	h	i
i	i	i

Az az állítás, miszerint a börönd üres, kétségtelenül hamis, mert az csak akkor teljesülne, ha a felirat hamis lenne. Akkor annak muszáj igaznak lenni, hogy a pénz páratlan számú böröndben van, ami kizárja a II-es, és a IV-es számú böröndöt. Egyszóval a pénz a III-as böröndben van, és az összes többiben nullázó található.

Most nézzük meg mindezt a logika nyelvén!

4. 2. Logikai törvények alkalmazásával

1. Vezessük be a következő jelöléseket:

- AF : Az I-es börönd felirata
- BF : A II-es börönd felirata
- A : Az I-es böröndben van a pénz
- B : A II-es böröndben van a pénz

Most azt kell logikai jelekkel leírni, hogy vagy az első börönd felirata igaz és az első böröndben van a pénz, és nem a második böröndben, vagy a második felirat az igaz és a második böröndben van a pénz, nem pedig az elsőben:

$$(A \wedge AF \wedge \neg B) \vee (B \wedge BF \wedge \neg A)$$

Ezt a képletet általánosan lehet használni ezeknél a feladatoknál. Különbség a feliratok különbözőségénél van.

Itt az első börönd felirata azt mondja ki, hogy ebben a böröndben van a pénz, ami pontosan megfelel az A kijelentésnek, vagyis: $AF \Leftrightarrow A$.

A második börönd felirata azt állítja, hogy a második börönd üres, ami azt jelenti, hogy nem ebben a böröndben van a pénz, vagyis: $\neg B$, és az első felirat hamis, tehát: $\neg AF$, ami az első felirat alapján ($AF \Leftrightarrow A$): $\neg A$.

A megfelelő jeleket behelyettesítve az eredeti képletből a következőt kapjuk:

$$(A \wedge A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B \wedge \neg A \wedge \neg A)$$

Egyszerűsíthetjük a kapott képletet a logikai törvények [2] segítségével.

Idempotencia: $X \wedge X \sim X$

Így ezt kapjuk: $(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B \wedge \neg A)$

„Szabvány hamis”: $\perp \Leftrightarrow X \wedge \neg X$

$$(A \wedge \neg B) \vee (\perp \wedge \neg A)$$

Műveletek szabvány formulákkal: $\perp \wedge X \sim \perp$

$$(A \wedge \neg B) \vee \perp$$

Műveletek szabvány formulákkal: $\perp \vee X \sim X$

$$A \wedge \neg B$$

Megkaptuk az eredményt, miszerint szavakba foglalva az I-es bőröndben van a pénz és nem a II-es bőröndben.

2. Itt is az előzővel megegyező jelöléseket vezetünk be:

- AF : Az I-es bőrönd felirata
- BF : A II-es bőrönd felirata
- A : Az I-es bőröndben van a pénz
- B : A II-es bőröndben van a pénz

Az első felirat (AF) szerint ebben a bőröndben van a pénz, vagyis A , vagy a bőrönd üres, vagyis $\neg A$. Így van formalizálva az I-es felirat: $AF \Leftrightarrow A \vee \neg A$

„Szabvány igaz”: $T \Leftrightarrow X \vee \neg X$

$$AF \Leftrightarrow T$$

A II-es felirat azt állítja, hogy az I-es felirat hamis ($\neg AF$), és ebben a bőröndben van a pénz (B), így: $BF \Leftrightarrow \neg AF \wedge B$, az AF -be behelyettesíthetünk, és ezt kapjuk:
 $BF \Leftrightarrow \neg(A \vee \neg A) \wedge B$

De Morgan azonosság: $\neg (X \vee Y) \sim \neg X \wedge \neg Y$

$$BF \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg \neg A \wedge B$$

Kettős tagadás tétele: $\neg \neg X \sim X$

$$BF \Leftrightarrow \neg A \wedge A \wedge B$$

„Szabvány hamis”: $\perp \Leftrightarrow X \wedge \neg X$

$$BF \Leftrightarrow \perp \wedge B$$

Műveletek szabvány formulákkal: $\perp \wedge X \sim \perp$

$$BF \Leftrightarrow \perp$$

Tulajdonképpen már meg is kaptuk az eredményt, mivel az első bőrönd felirata mindig igaz, és ezáltal a második bőrönd felirata mindig hamis, és tudjuk, hogy annak a bőröndnek a felirata igaz, amelyikben a pénz található, ezért a pénz az első bőröndben van. Bizonyítsuk be ezt az első feladatban meghatározott képlet szerint is.

$$(A \wedge AF \wedge \neg B) \vee (B \wedge BF \wedge \neg A)$$

Helyettesítsünk be a fenti általános képletünkbe:

$$(A \wedge T \wedge \neg B) \vee (B \wedge \perp \wedge \neg A)$$

Műveletek szabvány formulákkal: $T \wedge X \sim X$

$$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \perp \wedge \neg A)$$

Műveletek szabvány formulákkal: $\perp \wedge X \sim \perp$

$$(A \wedge \neg B) \vee \perp$$

Műveletek szabvány formulákkal: $\perp \vee X \sim X$

$$A \wedge \neg B$$

Tehát a képlettel számolva is azt kaptuk, hogy a pénz az első bőröndben van és nem a másodikban.

4. 3. Quine-táblával

3. Maradjunk a már megszokott jelöléseknél:

- AF : Az I-es börönd felirata
- BF : A II-es börönd felirata
- CF : A III-as börönd felirata
- DF : A IV-es börönd felirata
- A : Az I-es böröndben van a pénz
- B : A II-es böröndben van a pénz
- C : A III-as böröndben van a pénz
- D : A IV-es böröndben van a pénz

$$AF \Leftrightarrow \neg A$$

$$BF \Leftrightarrow \neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D)$$

$$CF \Leftrightarrow BF$$

$$DF \Leftrightarrow BF \vee CF$$

A $CF \Leftrightarrow BF$ miatt $CF \Leftrightarrow \neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D)$, és $DF \Leftrightarrow BF \vee BF$, ez pedig az idempotencia $(X \vee X \sim X)$ miatt $DF \Leftrightarrow BF \vee BF \Rightarrow DF \Leftrightarrow BF \Rightarrow DF \Leftrightarrow \neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D)$.

Vegyük az általános képletünket és bővítsük ki egy kicsit:

$$(A \wedge AF \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (B \wedge BF \wedge \neg A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee \\ (C \wedge CF \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee (D \wedge DF \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

Most helyettesítsük be a feliratok kifejezéseit:

$$\begin{aligned} & (A \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee \\ & (B \wedge (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee \\ & C \wedge (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D)) \vee \\ & (D \wedge (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \end{aligned}$$

A képlet első részébe található az $A \wedge \neg A$ kifejezés, ami a „Szabvány hamis”:

$\perp \Leftrightarrow X \wedge \neg X$, és a műveletek szabvány formulákkal: $\perp \wedge X \sim \perp$ logikai törvények miatt \perp .

$$\begin{aligned} & \perp \vee (B \wedge (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee \\ & (C \wedge (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee \\ & (D \wedge (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \end{aligned}$$

Műveletek szabvány formulákkal: $\perp \vee X \sim X$

$$\begin{aligned} & (B \wedge (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee \\ & (C \wedge (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee \\ & (D \wedge (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \end{aligned}$$

Disztributivitás: $X \wedge (Y \vee Z) \sim (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$

$$\begin{aligned} & ((B \wedge \neg B) \vee (B \wedge (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee \\ & ((C \wedge \neg B) \vee (C \wedge (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee \\ & ((D \wedge \neg B) \vee (D \wedge (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \end{aligned}$$

„Szabvány hamis”: $\perp \Leftrightarrow X \wedge \neg X$, műveletek szabvány formulákkal: $\perp \vee X \sim X$

$$\begin{aligned} & ((B \wedge (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee \\ & ((C \wedge \neg B) \vee (C \wedge (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg D) \vee \\ & ((D \wedge \neg B) \vee (D \wedge (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy nagyon bonyolult kifejezést kaptunk, ezért másfelől kell megközelítenünk a megoldást.

Vegyük azt a kezdeti feltételt, hogy amelyik bőröndben van a pénz, annak a felirata igaz. Ez a kapcsolat „ha...akkor” vagy „abból következik” kapcsolat lesz. Az $A (B,C,D)$ lesz a premissza, az $AF (BF,CF,DF)$ pedig a konklúzió.

$$(A \supset AF) \wedge (B \supset BF) \wedge (C \supset CF) \wedge (D \supset DF)$$

Helyettesítsük be a feliratok kifejezéseit:

$$\begin{aligned} & (A \supset \neg A) \wedge \\ & (B \supset (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \\ & (C \supset (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \\ & (D \supset (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \end{aligned}$$

Ellentmondás az implikációban: $X \supset \neg X \sim \neg X$

$$\begin{aligned} & \neg A \wedge \\ & (B \supset (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \\ & (C \supset (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \\ & (D \supset (\neg B \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \end{aligned}$$

Tovább alakítani nem szükséges. Próbáljuk megoldani a feladatot Quine-tábla felhasználásával. Nem használjuk fel az A, B, C, D formulák összes különböző lehetséges értékeit, mert tudjuk, hogy pénz csak egy bőröndben található, és így nem adhatjuk egyszerre két vagy több formulának az 1-es értéket.

A	B	C	D
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Ezután az összes Quine-táblában is ezekkel az értékekkel fogunk dolgozni, ebben a sorrendben.

Eredményül azt kaptuk, hogy két sor logikai értéke is 1, ahol a C és a D logikai értéke igaz, vagyis ezek közül valamelyikben van a pénz, A, B értéke 0. Így tehát nem kaptunk egyértelmű választ arra, hogy melyik bőröndben van az eredmény.

Vegyük észre, hogy a II. feliratban az üres bőröndre a $\neg B$ jelölést használtuk, ami igaz, de nem elégíti ki az üres meghatározását, mert ha nincs benne a pénz, attól még nullázó lehet benne, és akkor is igaz a felirat. Következésképpen az előző két feladatnál használt általános képlet ehhez a feladathoz nem megfelelő, és újabb jelöléseket kell bevezetni.

Legyen:

$A0$: az I. bőröndben nullázó van,

$B0$: a II. bőröndben nullázó van,

$C0$: a III. bőröndben nullázó van,

$D0$: a IV. bőröndben nullázó van.

Az új képletbe pedig azt formalizáljuk le, hogy az egyes bőröndökben vagy benne van a pénz, és ekkor a bőrönd felirata igaz, és nem a nullázó van benne, vagy a nullázó van benne, és igaz a felirat, és nincs benne pénz, vagy üres a bőrönd, és ekkor nincs benne pénz, se nullázó, és a felirat hamis. Mivel így az összes lehetséges esetet számba vesszük, ezért az egyes bőröndök eseteit és logikai kapcsolattal kell összekapcsolni.

$$\begin{aligned} & ((A \wedge AF \wedge \neg A0) \vee (A0 \wedge AF \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg A0 \wedge \neg AF)) \wedge \\ & ((B \wedge BF \wedge \neg B0) \vee (B0 \wedge BF \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg B0 \wedge \neg BF)) \wedge \\ & ((C \wedge CF \wedge \neg C0) \vee (C0 \wedge CF \wedge \neg C) \vee (\neg C \wedge \neg C0 \wedge \neg CF)) \wedge \\ & ((D \wedge DF \wedge \neg D0) \vee (D0 \wedge DF \wedge \neg D) \vee (\neg D \wedge \neg D0 \wedge \neg DF)) \end{aligned}$$

A képlet nagysága miatt az egyes bőröndöket külön tárgyaljuk és majd a végén kapcsoljuk össze és-sel.

Lássuk az I-es bőröndöt:

$$((A \wedge AF \wedge \neg A0) \vee (A0 \wedge AF \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg A0 \wedge \neg AF))$$

Tudjuk, hogy $AF \Leftrightarrow \neg A$, és ezt behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$((A \wedge \neg A \wedge \neg A0) \vee (A0 \wedge \neg A \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg A0 \wedge \neg (\neg A)))$$

Kettős tagadás törvénye: $\neg \neg X \sim X$, és egyszerűsítés után:

$$((A \wedge \neg A \wedge \neg A0) \vee (A0 \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg A0 \wedge A))$$

„Szabvány hamis”: $\perp \Leftrightarrow X \wedge \neg X$

$$((\perp \wedge \neg A0) \vee (A0 \wedge \neg A) \vee (\neg A0 \wedge \perp))$$

Műveletek szabvány formulákkal: $\perp \wedge X \sim \perp$

$$(\perp \vee (A0 \wedge \neg A) \vee \perp)$$

Műveletek szabvány formulákkal: $\perp \vee X \sim X$

$$A0 \wedge \neg A$$

Ha az nullázó van a bőrdömbben, akkor nincs benne pénz és a bőrdömb felirata igaz, tehát $A0 \Leftrightarrow \neg A \wedge AF$. Ezt behelyettesítve:

$$\neg A \wedge AF \wedge \neg A$$

Egyszerűsítés, és a $AF \Leftrightarrow \neg A$ felhasználásával megkapjuk a legegyszerűbb formát:

$$\neg A$$

Írjuk be ide már most a Quine-táblához szükséges értékeket (az A értékeit a fenti táblázat alapján):

\neg	A
0	1
1	0
1	0
1	0

Nézzük a második böröndöt! Itt már nem az egyszerűsítésekre, és a logikai törvények alkalmazására fektettem a hangsúlyt, hanem a kiértékelésre.

Írjuk fel a felirat és a nullázó definícióját.

$$BF \Leftrightarrow (\neg B \wedge \neg B0) \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D)$$

$$B0 \Leftrightarrow \neg B \wedge BF \wedge (A \vee C \vee D)$$

Itt egy picit gondolkodnunk kell, mert a felirat és a nullázó definíciója egymásra hivatkozik, így nincs mit tenni, az egyik változót bent kell hagyni a képletben. A BF azt mondja ki, hogy a börönd üres, vagyis nincs benne pénz.

$$BF \Leftrightarrow (\neg B \wedge \neg BF) \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D)$$

Itt viszont az a gond, hogy a BF önmagára hivatkozik, és így az önmagába való behelyettesítése végtelen ciklus lenne, ezért elnevezzük a BF -et X -nek, mely egy új változó, értéke szintén 1 vagy 0 lehet, és definíciója megegyezik BF -el.

$$X \Leftrightarrow (\neg B \wedge \neg BF) \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D)$$

Tehát a végtelen ciklus elkerülése érdekében a

$$BF \Leftrightarrow (\neg B \wedge \neg X) \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D)$$

Képletet fogom alkalmazni (a harmadik és negyedik börönd esetében a definícióból adódó

$$BF \equiv X$$

tétel miatt BF helyett mindenütt X -et használok.)

Nézzük a képletet.

$$((B \wedge BF \wedge \neg B0) \vee (B0 \wedge BF \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg B0 \wedge \neg BF))$$

Behelyettesítjük a BF -et és a $B0$ -t:

$$\left(\begin{array}{l} (B \wedge ((\neg B \wedge \neg X) \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D)) \wedge \neg (\neg B \wedge X \wedge (A \vee C \vee D))) \vee \\ ((\neg B \wedge X \wedge (A \vee C \vee D)) \wedge ((\neg B \wedge \neg X) \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D)) \wedge \neg B) \vee \\ (\neg B \wedge \neg (\neg B \wedge X \wedge (A \vee C \vee D)) \wedge \neg ((\neg B \wedge \neg X) \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \end{array} \right)$$

Tekintettel arra, hogy ismét nagy terjedelmű a képletünk, bontsuk fel a *vagy*-oknál három részre, és majd a végén összekapcsoljuk. Célszerű ezért elnevezni a részeket. Legyenek: *B1*, *B2*, *B3*.

A kifejezések értékeit a táblázatnak megfelelően írjuk be kétszer, mert az X 0 és 1 értékét is meg kell vizsgáljuk.

Az eredmény oszlopot kiemelem a táblázatból.

$$B1 \Leftrightarrow (B \wedge ((\neg B \wedge \neg X) \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg (\neg B \wedge X \wedge (A \vee C \vee D))$$

B	^	¬	B	^	¬	X	∨	A	∨	C	^	¬	B	^	¬	D	^	¬	¬	B	^	X	^	A	∨	C	∨	D
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1

$$B2 \Leftrightarrow ((\neg B \wedge X \wedge (A \vee C \vee D)) \wedge ((\neg B \wedge \neg X) \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D))) \wedge \neg B$$

¬	B	^	X	^	A	∨	C	∨	D	^	¬	B	^	¬	X	∨	A	∨	C	^	¬	B	^	¬	D	^	¬	B
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0

$$B3 \Leftrightarrow (\neg B \wedge \neg (\neg B \wedge X \wedge (A \vee C \vee D))) \wedge \neg (((\neg B \wedge \neg X) \vee (A \vee C \wedge \neg B \wedge \neg D)))$$

\neg	B	\wedge	\neg	\neg	B	\wedge	X	\wedge	A	\vee	C	\vee	D	\wedge	\neg	\neg	B	\wedge	\neg	X	\vee	A	\vee	C	\wedge	\neg	B	\wedge	\neg	D		
1	0	1		1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0		
0	1	0		0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	
1	0	1		1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
1	0	1		1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	
1	0	0		1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	0		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	
1	0	0		1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	
1	0	0		1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	

Most, hogy ki van értékelve mind a három rész, most értékeljük ki őket együtt. A II. bóröndre vonatkoztatott kiértékelés eredményét szintén pirossal emelem ki.

$B1$	\vee	$B2$	\vee	$B3$
0	1	1	1	1
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Jöhet a III. bórönd!

$$((C \wedge CF \wedge \neg C0) \vee (C0 \wedge CF \wedge \neg C) \vee (\neg C \wedge \neg C0 \wedge \neg CF))$$

$CF \Leftrightarrow BF$, itt elég ennyit megadnunk, nem kell a BF definícióját külön beírni

$$C0 \Leftrightarrow \neg C \wedge CF \wedge (A \vee B \vee D) \Rightarrow C0 \Leftrightarrow \neg C \wedge X \wedge (A \vee B \vee D)$$

Helyettesítsünk be.

$$\left(\begin{array}{l} (C \wedge X \wedge \neg (\neg C \wedge X \wedge (A \vee B \vee D))) \vee \\ ((\neg C \wedge X \wedge (A \vee B \vee D)) \wedge X \wedge \neg C) \vee \\ (\neg C \wedge \neg (\neg C \wedge X \wedge (A \vee B \vee D)) \wedge \neg X) \end{array} \right)$$

Bontsuk fel $C1$, $C2$, $C3$ kisebb formulákra az egész kifejezést, és nézzük egyenként őket.

$$C1 \Leftrightarrow (C \wedge X \wedge \neg (\neg C \wedge X \wedge (A \vee B \vee D)))$$

C	^	X	^	¬	¬	C	^	X	^	A	∨	B	∨	D
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1

A $((\neg C \wedge X \wedge (A \vee B \vee D)) \wedge X \wedge \neg C)$ kifejezés a konjunkció asszociatív tulajdonsága miatt egyszerűsíthető, így a $((A \vee B \vee D) \wedge X \wedge \neg C)$ kifejezést kapjuk.

$$C2 \Leftrightarrow ((A \vee B \vee D) \wedge X \wedge \neg C)$$

A	\vee	B	\vee	D	\wedge	X	\wedge	\neg	C
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0

$$C3 \Leftrightarrow (\neg C \wedge \neg (\neg C \wedge X \wedge (A \vee B \vee D))) \wedge \neg X$$

\neg	C	\wedge	\neg	\neg	C	\wedge	X	\wedge	A	\vee	B	\vee	D	\wedge	\neg	X
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0

A III. bóröndre vonatkozó kiértékelés a következő táblázatban pirossal van kijelölve.

$C1$	\vee	$C2$	\vee	$C3$
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
1	1	0	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1

Elérkeztünk a IV. utolsó bórönd elemzéséhez.

$$((D \wedge DF \wedge \neg D0) \vee (D0 \wedge DF \wedge \neg D) \vee (\neg D \wedge \neg D0 \wedge \neg DF))$$

$$DF \Leftrightarrow BF$$

$$D0 \Leftrightarrow \neg D \wedge DF \wedge (A \vee B \vee C) \Rightarrow D0 \Leftrightarrow \neg D \wedge X \wedge (A \vee B \vee C)$$

Helyettesítsük be a fenti értékeket a képletbe.

$$\left(\begin{array}{l} (D \wedge X \wedge \neg (\neg D \wedge X \wedge (A \vee B \vee C))) \vee \\ ((\neg D \wedge X \wedge (A \vee B \vee C)) \wedge X \wedge \neg D) \vee \\ (\neg D \wedge \neg (\neg D \wedge X \wedge (A \vee B \vee C)) \wedge \neg X) \end{array} \right)$$

Bontsuk fel 3 formulára ezt a nagy formulánkat, itt is legyen $D1$, $D2$, $D3$.

A $((\neg D \wedge X \wedge (A \vee B \vee C)) \wedge X \wedge \neg D)$ formula itt is látványosan egyszerűsíthető, és ezért kevesebb munka van vele. A konjunkció asszociatív tulajdonsága miatt egyszerűsíthető, így a $((A \vee B \vee C) \wedge X \wedge \neg D)$ kifejezést kapjuk.

$$D1 \Leftrightarrow (D \wedge X \wedge \neg (\neg D \wedge X \wedge (A \vee B \vee C)))$$

D	\wedge	X	\wedge	\neg	\neg	D	\wedge	X	\wedge	A	\vee	B	\vee	C
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0

$$D2 \Leftrightarrow ((A \vee B \vee C) \wedge X \wedge \neg D)$$

A	\vee	B	\vee	C	\wedge	X	\wedge	\neg	D
1	1	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$$D3 \Leftrightarrow (\neg D \wedge \neg (\neg D \wedge X \wedge (A \vee B \vee C))) \wedge \neg X$$

\neg	D	\wedge	\neg	\neg	D	\wedge	BF	\wedge	A	\vee	B	\vee	C	\wedge	\neg	BF
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Kapcsoljuk össze vagy-okkal a részkifejezéseket.

$D1$	\vee	$D2$	\vee	$D3$
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
1	1	0	1	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0

És most elérkezett az idő, hogy a kezdeti nagy képletet értékeljük ki. A nagy képlet négy böröndjére vonatkozó állításokat a böröndök sorszámával jelöljük.

I.	\wedge	II.	\wedge	III.	\wedge	IV.
0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0

Az eredmény oszlopban csupán egy 1-es érték van, tehát megtaláltuk a megoldást! A sorhoz tartozó logikai értékek a következők:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>X</i>
0	0	1	0	1

Eszerint a II. börönd felirata ($BF \Leftrightarrow X$) igaz, és a III. böröndben van a pénz (*C*).

4. 4. Gentzen-kalkulussal

Ebben a fejezetben tehát a Gentzen kalkulussal oldom meg a feladatokat. A levezetésben kialakuló levezetési fát szintenként taglalom, úgy, hogy mindegyik lépésben odaírom, melyik szabály került alkalmazásra (fontos újfent kijelentenem, hogy nem törekszem a Gentzen-kalkulus teljes részletekben történő bemutatására, csak egy lehetséges alkalmazását akarom szemléltetni).

A szabályok [5] nevei azt mutatják, hogy a nyíl melyik oldaláról elimináljuk a megadott logikai összekötőjelet, így tehát beszélhetünk Nyíl/Implikáció illetve Implikáció/Nyíl szabályról, stb.

1. Az eddig használt jelölésekkel dolgozunk itt is.

Írjuk fel az első képlet behelyettesített változatát!

$$(A \wedge A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B \wedge \neg A \wedge \neg A)$$

Tegyük fel, hogy az első bőrváltozatban van a pénz. Ezt úgy írjuk fel, hogy a fenti képletből következik (implikáció) A .

$$\begin{aligned} & (A \wedge A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B \wedge \neg A \wedge \neg A) \supset A \\ \rightarrow & (A \wedge A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B \wedge \neg A \wedge \neg A) \supset A \end{aligned}$$

Nyíl/Implikáció szabály: $\frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, X \supset Y}$

$$(A \wedge A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B \wedge \neg A \wedge \neg A) \rightarrow A$$

Diszjunkció/Nyíl szabály: $\frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta \quad \Gamma, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \vee Y \rightarrow \Delta}$

$$A \wedge A \wedge \neg B \rightarrow A$$

$$B \wedge \neg B \wedge \neg A \wedge \neg A \rightarrow A$$

$$\text{Konjunkció/Nyíl szabály: } \frac{\Gamma, X, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \wedge Y \rightarrow \Delta}$$

$$\underline{A}, A, \neg B \rightarrow \underline{A}$$

$$B, \neg B, \neg A, \neg A \rightarrow A$$



A baloldali ágon nem kell tovább haladnunk, hiszen az már le van vezetve, mert mindkét oldalon van megegyező formula.

$$\text{Negáció/Nyíl szabály: } \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\Gamma, \neg X \rightarrow \Delta}$$

$$\underline{B}, \neg A, \neg A \rightarrow \underline{B}$$



Bebizonyítottuk a kezdeti feltevést. Most próbáljuk meg mindezt B -vel.

$$\rightarrow (A \wedge A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B \wedge \neg A \wedge \neg A) \supset B$$

$$\text{Nyíl/Implikáció szabály: } \frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, X \supset Y}$$

$$(A \wedge A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B \wedge \neg A \wedge \neg A) \rightarrow B$$

$$\text{Diszjunkció/Nyíl szabály: } \frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta \quad \Gamma, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \vee Y \rightarrow \Delta}$$

$$A \wedge A \wedge \neg B \rightarrow B$$

$$B \wedge \neg B \wedge \neg A \wedge \neg A \rightarrow B$$

$$\text{Konjunkció/Nyíl szabály: } \frac{\Gamma, X, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \wedge Y \rightarrow \Delta}$$

$$A, A, \neg B \rightarrow B$$

$$\underline{B}, \neg B, \neg A, \neg A \rightarrow \underline{B}$$



Negáció/Nyíl szabály: $\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\Gamma, \neg X \rightarrow \Delta}$

$$A, A \rightarrow B, B$$

Nem minden ág zárult le, ezért a levezetni kívánt szekvent nem logikai törvény, vagyis a következtetésünk nem volt helyes.

Megoldásként most is azt kaptuk, hogy az I-es bőrdobban van a pénz (A).

2. Tegyük fel, hogy az I-es bőrdobban van a pénz (A).

$$(A \wedge (A \vee \neg A) \wedge \neg B) \vee (B \wedge (\neg(A \vee \neg A) \wedge B) \wedge \neg A) \supset A$$

Itt most nem a logikai törvények alkalmazásával foglalkozunk, és nem az egyszerűsítésre fektetjük a hangsúlyt, hanem a levezetési szabályok alkalmazására, ezért a formulát így hagyjuk ahogy van.

$$\rightarrow (A \wedge (A \vee \neg A) \wedge \neg B) \vee (B \wedge (\neg(A \vee \neg A) \wedge B) \wedge \neg A) \supset A$$

Nyíl/Implikáció szabály: $\frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, X \supset Y}$

$$(A \wedge (A \vee \neg A) \wedge \neg B) \vee (B \wedge (\neg(A \vee \neg A) \wedge B) \wedge \neg A) \rightarrow A$$

Diszjunkció/Nyíl szabály: $\frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta \quad \Gamma, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \vee Y \rightarrow \Delta}$

$$A \wedge (A \vee \neg A) \wedge \neg B \rightarrow A$$

$$B \wedge (\neg(A \vee \neg A) \wedge B) \wedge \neg A \rightarrow A$$

Konjunkció/Nyíl szabály: $\frac{\Gamma, X, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \wedge Y \rightarrow \Delta}$

$$\underline{A}, (A \vee \neg A), \neg B \rightarrow \underline{A}$$

$$B, \neg(A \vee \neg A) \wedge B, \neg A \rightarrow A$$



$$\text{Konjunkció/Nyíl szabály: } \frac{\Gamma, X, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \wedge Y \rightarrow \Delta}$$

$$B, \neg(A \vee \neg A), B, \neg A \rightarrow A$$

$$\text{Negáció/Nyíl szabály: } \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\Gamma, \neg X \rightarrow \Delta}$$

$$B, B \rightarrow A, A, A \vee \neg A$$

$$\text{Nyíl/Diszjunkció szabály: } \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, X \vee Y}$$

$$B, B \rightarrow A, A, A, \neg A$$

$$\text{Nyíl/Negáció szabály: } \frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg X}$$

$$B, B, \underline{A} \rightarrow \underline{A}, A, A$$



Nézzük, mi a helyzet akkor, ha a B -t feltételezzük helyesnek.

$$(A \wedge (A \vee \neg A) \wedge \neg B) \vee (B \wedge (\neg(A \vee \neg A) \wedge B) \wedge \neg A) \supset B$$

$$\rightarrow (A \wedge (A \vee \neg A) \wedge \neg B) \vee (B \wedge (\neg(A \vee \neg A) \wedge B) \wedge \neg A) \supset B$$

$$\text{Nyíl/Implikáció szabály: } \frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, X \supset Y}$$

$$(A \wedge (A \vee \neg A) \wedge \neg B) \vee (B \wedge (\neg(A \vee \neg A) \wedge B) \wedge \neg A) \rightarrow B$$

$$\text{Diszjunkció/Nyíl szabály: } \frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta \quad \Gamma, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \vee Y \rightarrow \Delta}$$

$$A \wedge (A \vee \neg A) \wedge \neg B \rightarrow B$$

$$B \wedge (\neg(A \vee \neg A) \wedge B) \wedge \neg A \rightarrow B$$

Konjunkció/Nyíl szabály: $\frac{\Gamma, X, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \wedge Y \rightarrow \Delta}$

$$A, A \vee \neg A, \neg B \rightarrow B$$

$$\underline{B}, \neg(A \vee \neg A) \wedge B, \neg A \rightarrow \underline{B}$$



Diszjunkció/Nyíl szabály: $\frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta \quad \Gamma, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \vee Y \rightarrow \Delta}$

$$A, A, \neg B \rightarrow B$$

$$A, \neg A, \neg B \rightarrow B$$

Negáció/Nyíl szabály: $\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\Gamma, \neg X \rightarrow \Delta}$

$$A, A, \neg B \rightarrow B$$

$$A, \neg B \rightarrow B, A$$



Negáció/Nyíl szabály: $\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\Gamma, \neg X \rightarrow \Delta}$

$$A, A \rightarrow B, B$$

Nem minden ág zárult le, vagyis ez a következtetésünk nem helyes. Megoldásként azt kaptuk, hogy az I-es bőröndben van a pénz (A).

3.feladat: a fentiekhez hasonlóan a harmadik feladat megoldásához is alkalmazható a Gentzen kalkulus, bár ott bizonyos trükköket is be kell vezetni a korábban már ismertett problémák miatt. A dolgozat terjedelme miatt ezzel tehát a továbbiakban nem foglalkozom, de a kedves olvasó kipróbálhatja az ismertett lépéseket.

4. 5. Gentzen - program segítségével

Munkánk megkönnyítése céljából írtam egy „Gentzen - programot”. Ide csak be kell írni a premisszákat és a konklúziót és már meg is kapjuk az eredményt, miszerint logikai következmény-e a formulánk vagy sem. Ezután nem kell bonyolult számításokba bocsátkoznunk, mert megteszi ezt helyettünk a program. Ha levezethető a formula Gentzen-kalkulussal, akkor levezeti nekünk.

A feladat implementálását Java nyelven hajtottam végre.

Alkalmazott szimbólumok:

Műveleti jelek:	!	negáció
	&	konjunkció
	v	diszjunkció
	i	implikáció

Zárójelek: < , >

Propozicionális betűk: A,B,C,...,Z

Implementálás:

A *FaG* osztály valósítja meg a Gentzen-kalkulus szabályait, melynek segítségével eldönthető, hogy az adott formula logikai következménye-e valamely formuláknak. A program csak teljesen bezárójelezett formulára működik helyesen.

Az osztály konstruktora segítségével a szekventből fát épít fel.

Az osztály tartalmazza:

<i>adat</i>	tárolja a csúcshoz tartozó műveleti jelet vagy műveleti jel nélküli szekventet
<i>szekvent</i>	a csúcshoz tartozó szekvent
<i>jobb</i>	megadja a csúcs jobb oldali szekventjét
<i>bal</i>	megadja a csúcs bal oldali szekventjét
<i>levezetheto</i>	jelzi, az adott csúcs levezethető-e: „false” ha nem, „true” ha igen

seged visszaadja a szekvent műveleti jellel rendelkező formuláját, vagy „nincs” szót, ha ilyen formula nem található a szekventben

cimkezes a felépített fában a *levezetheto* tulajdonságokat állítja be

getLevezetheto a felcímkézett fában lekérdezi a gyökér *levezetheto* tulajdonságát

```
String adat;
String szekvent;
private FaG jobb;
private FaG bal;
private Vector premisszak;
private String konkluzio;
public boolean levezetheto=false; //ha levezetheto true, kulonben false
public static StringBuffer sb = new StringBuffer();
```

A fa felépítése rekurzív módon történik, ami a következő lépésekből áll:

A FaG osztály konstuktora a paraméterként kapott szekventre a következő lépéseket hajtja végre:

1. Az osztály *seged* metódusa segítségével meghatározza, hogy melyik formulára kell alkalmazni szabályt. Ezt egy átmeneti változóban tárolja (*tmp*).

```
public static String seged(String test2){
    String muvjelek = new String("&vi!");
    //kivesszuk a bal oldalat
    StringBuffer bf;
    int muvjelszam=0,i=0,j=0,
    kezdo=0, veg =test2.length() ,elsomuvjel=0,f=0,szj =-1;
    szj = test2.indexOf("-");
    //ha nincs benne vesszo, a szekvent jobb oldala egy formula
    //balrol jobbra visszaadja az elso formulat, amiben muveleti jel van
    //1. meg kell keresni az elso muveleti jelet
    for(j = 0; j<test2.length();j++)
        for (i = 0; i<muvjelek.length();i++)
            if(muvsjelek.charAt(i) == test2.charAt(j) && f == 0 )
                {elsomuvjel =j;f++;}
    if(elsomuvjel > 0){
```

```

//baloldal
if(elsomuvjel < szj ){
    f=0;
    for(i=elsomuvjel;i>0;i--)
        if(test2.charAt(i)==' ' && f==0)
            { kezd = i; f++;}
    veg = szj;
    f=0;
    for(i=elsomuvjel; i<szj ;i++)
        if(test2.charAt(i)==' ' && f==0)
            { veg = i+1; f++;}
}
//jobboldal
else{
    kezd = szj+1;
    f=0;
    for(i= elsomuvjel ;i >szj ;i--)
        if(test2.charAt(i)==' ' && f==0)
            { kezd = i; f++;}
    veg =test2.length();
    f=0;
    for(i=elsomuvjel; i<test2.length() ;i++)
        if(test2.charAt(i)==' ' && f==0)
            { veg = i; f++;}
}
}
String s = test2.substring(kezd,veg);
bf = new StringBuffer(s);
muvjelszam=0;
for(j=0;j<muvjelek.length();j++)
    for(i=0;i<bf.length();i++)
        if(bf.charAt(i) == muvjelek.charAt(j))
            muvjelszam++;
if(muvjelszam != 0) {
    for(i=0; i< bf.length();i++)
        if(bf.charAt(i) == ',') {
            bf.deleteCharAt(i);

```

```

        }
    }
    else {bf = new StringBuffer("nincs");} //ekkor mar csak nagybetuk vannak
    benne
    return bf.toString();
}

```

2. Ha a *tmp* értéke „nincs” akkor azt jelenti, hogy a benne lévő szekvent csupa propozicionális betűből épül fel. Ezt az *adat* részben tárolom. Különben a *tmp*-ben egy formula van.

Ebben a formulában (*adat*) a fő műveleti jel pozícióját egy változóval jelezzük (*akt*). A műveleti jel elé vagy mögé rakunk egy „-”-t attól függően, hogy ez az adott műveleti jel a szekvent melyik oldalán található. Ezzel a karakter kombinációval jelzi, hogy melyik szabályt kell alkalmazni. Az aktuális szekventet egy *bf* változóban tárolja.

```

StringBuffer muvjel = new StringBuffer();
String muvjelek = new String("&vi!");
String tmp;
StringBuffer bf = new StringBuffer(_adat);

int kulso=0, akt=0,level=0,sz=0;
_adat = _adat.trim();
//megkeressuk a szekvent poziciojat '-'
if((sz = bf.indexOf("-",)) != -1) bf = bf.deleteCharAt(sz+1);
if(bf.charAt(bf.length()-1) == ',' ) bf = bf.deleteCharAt(bf.length()-1);
tmp = seged(bf.toString());
//a tmpben van a szekvent jobb oldali elso szétbonthato formula
//jobboldali szabalyok alkalmazasa
if(tmp.compareTo("") != 0 ) {
    if (tmp.startsWith("<") && tmp.endsWith(">")) //toroljuk a kulso zarojeleket
        tmp = tmp.substring(1,tmp.length()-1);
    //megkeressuk azt az muvjelet, ami nincs bezarojelezve
    szekvent = new String(bf.toString());
    sb.append("Szekvent: "+ bf.toString());
    for (int i = 0; i < tmp.length(); i++){
        if (tmp.charAt(i) == '<') level++;
    }
}

```

```

else if (tmp.charAt(i) == '>') level--;
if (level == 0 && muvjelek.indexOf(tmp.charAt(i)) != -1){
    kulso++;
    muvjel = muvjel.append(tmp.charAt(i));
    akt = i;
}
}
//levelelem
if ( tmp.compareTo("nincs")==0 ){
    sb.append("\n");
    //ki kell szedni a szekventbol a zarojeleket
    bf = new StringBuffer( bf.toString().replaceAll(" ", ""));
    for(int i = 0; i<bf.length();i++)
        if(bf.charAt(i) == '<' || bf.charAt(i) == '>') bf = bf.deleteCharAt(i);
    adat = bf.toString();
    //a levelelem levezethetoseget is be kell allitani
    //akkor levezetheto, ha a szekvent bal ill jobb oldalan szerepel ua az a betu
    int f = 0, h=0;
    for(int i = 0;i< bf.indexOf("-");i++)
        for(int j= bf.indexOf("-"); j< bf.length();j++){
            if( Character.isUpperCase(bf.charAt(i)) &&
Character.isUpperCase(bf.charAt(j)) &&
                bf.charAt(i) == bf.charAt(j) && f ==0 ) f++;
        }
    for(int i = 0;i< bf.length();i++){
        if( (Character.isUpperCase(bf.charAt(i)) != true &&
                bf.charAt(i) != ',' &&
                bf.charAt(i) != '-') && h==0)
            h=1;
    }
    if(f==1 && h==0) levezetheto = true;
    bal = null;
    jobb = null;
}
//operatorok
else { //!&vi
    if(bf.indexOf("-") < (bf.indexOf(tmp)+akt) ){

```

```

    adat = "-" + tmp.substring(akt, akt+1);           // muveleti jel
  }
  else{
    adat = tmp.substring(akt, akt+1) + "-"; // muveleti jel
  }

```

3. Az így megkapott szabályt alkalmazzuk:

$$\frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg X}$$

Ha a szabály "-!", akkor a *bf*-ből a feldolgozandó formulát törli a jobb oldalról, majd beszúrja a bal oldalra „!” - jel nélkül. Az aktuális faelem jobb oldalán folytatódik tovább a felépítés az így előállított *bf* szekvenettel.

A szabályhoz tartozó Java kód a következő:

```

if(adat.compareTo("!=") == 0 ){
    sb.append(" Szabaly: -!\n");
    int szj = bf.indexOf("-");
    String seged = new String("<" + tmp + ">");
    bf.delete(bf.indexOf(seged, szj), bf.indexOf(seged, szj) +
seged.length());

    bf.insert(0, tmp.substring(akt+1).substring(1, tmp.substring(akt+1).length()-1
)+",");

    bf = new StringBuffer( this.tisztitas(bf.toString()) );
    jobb = new FaG(bf.toString());
}

```

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \quad \Gamma \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, X \wedge Y}$$

Ha a szabály "-&", akkor a *bf*-ből a feldolgozandó formulát töröli a jobb oldalról. Az így előállt formulát *bf* lemásolja *b*, illetve *j* átmeneti változóba. A & műveleti jel bal oldalát beszúrja a *b* szekvent elejére. A & műveleti jel jobb oldalát beszúrja a *j* szekvent végére.

Az aktuális faelem bal oldalán folytatódik a felépítés a b szekvenntel. Az aktuális faelem jobb oldalán folytatódik a felépítés a j szekvenntel.

```

if(adat.compareTo("-&") == 0 ){
    sb.append(" Szabaly: -&\n");
    int szj = bf.indexOf("-");
    String seged = new String("<"+tmp+">");
    bf.delete(bf.indexOf(seged,szj),bf.indexOf(seged,szj)+
seged.length());
    StringBuffer b = new StringBuffer(bf.toString()) , j = new
StringBuffer(bf.toString());
    b.append(", "+tmp.substring(0,akt));
    b = new StringBuffer( this.tisztitas(b.toString()) );
    j.append(", "+tmp.substring(akt+1));
    j = new StringBuffer( this.tisztitas(j.toString()) );
    bal = new FaG(b.toString());
    jobb = new FaG(j.toString());
}

```

$$- \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, X \vee Y}$$

Ha a szabály "-v", akkor a bf -ből a feldolgozandó formulát törli a jobb oldalról. A \vee műveleti jel bal és jobb oldalát beszúrja a bf szekvent végére vesszővel elválasztva. Az aktuális faelem jobb oldalán folytatódik a felépítés a bf szekvenntel.

```

if(adat.compareTo("-v") == 0 ){
    sb.append(" Szabaly: -v\n");
    int szj = bf.indexOf("-");
    String seged = new String("<"+tmp+">");
    bf.delete(bf.indexOf(seged,szj),bf.indexOf(seged,szj)+
seged.length());
    bf.append(", "+tmp.substring(0,akt)+", "+tmp.substring(akt+1));
    bf = new StringBuffer( this.tisztitas(bf.toString()) );
    jobb = new FaG(bf.toString());
}

```

$$\frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta, Y}{\Gamma \rightarrow \Delta, X \supset Y}$$

Ha a szabály "-i", akkor a *bf*-ből a feldolgozandó formulát törli a jobb oldalról. Az *i* műveleti jel bal oldalát a *bf* elejére az *i* műveleti jel jobb oldalát a *bf* végére másolja. Az aktuális faelem jobb oldalán folytatódik a felépítés a *bf* szekvenntel.

```
if(adat.compareTo("-i") == 0 ){
    sb.append(" Szabaly: -i\n");
    int szj = bf.indexOf("-");
    String seged = new String("<"+tmp+">");
    bf.delete(bf.indexOf(seged),bf.indexOf(seged)+seged.length()+1);
    bf.insert(0,tmp.substring(0,akt)+"");
    bf.append(","+tmp.substring(akt+1));
    bf = new StringBuffer( this.tisztitas(bf.toString()) );
    jobb = new FaG(bf.toString());
}
```

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X}{\Gamma, \neg X \rightarrow \Delta}$$

Ha a szabály "!-", akkor a *bf*-ből a feldolgozandó formulát törli a bal oldalról, majd beszúrja a jobb oldalra „!” - jel nélkül. Az aktuális faelem jobb oldalán folytatódik tovább a felépítés az így előállított *bf* szekvenntel.

```
if(adat.compareTo("!-") == 0 ){
    sb.append(" Szabaly: !-\n");
    int szj = bf.indexOf("-");
    String seged = new String("<"+tmp+">");
    bf.delete(bf.indexOf(seged,0),bf.indexOf(seged,0)+ seged.length());
    bf.append(","+tmp.substring(akt+1));
    bf = new StringBuffer( this.tisztitas(bf.toString()) );
    jobb = new FaG(bf.toString());
}
```

$$\frac{\Gamma, X, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \wedge Y \rightarrow \Delta}$$

Ha a szabály "&-", akkor a *bf*-ből a feldolgozandó formulát törli a bal oldalról. Az & műveleti jel bal és jobb oldalát beszúrja a *bf* szekvent elejére vesszővel elválasztva. Az aktuális faelem jobb oldalán folytatódik a felépítés a *bf* szekventtel.

```
if(adat.compareTo("&-") == 0 ){
    sb.append(" Szabaly: &-\n");
    int szj = bf.indexOf("-");
    String seged = new String("<"+tmp+">");
    bf.delete(bf.indexOf(seged,0),bf.indexOf(seged,0)+ seged.length());
    bf.insert(0,tmp.substring(0,akt)+","+tmp.substring(akt+1)+",");
    bf = new StringBuffer( this.tisztitas(bf.toString()) );
    jobb = new FaG(bf.toString());
}
```

$$\frac{\Gamma, X \rightarrow \Delta \quad \Gamma, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \vee Y \rightarrow \Delta}$$

Ha a szabály "v-", akkor a *bf*-ből a feldolgozandó formulát törli a bal oldalról. Az így előállt formulát *bf* lemásolja *b*, illetve *j* átmeneti változóba. A v műveleti jel bal oldalát beszúrja a *b* szekvent elejére. A & műveleti jel jobb oldalát beszúrja a *j* szekvent elejére. Az aktuális faelem bal oldalán folytatódik a felépítés a *b* szekventtel. Az aktuális faelem jobb oldalán folytatódik a felépítés a *j* szekventtel.

```
if(adat.compareTo("v-") == 0 ){
    sb.append(" Szabaly: v-\n");
    int szj = bf.indexOf("-");
    String seged = new String("<"+tmp+">");
    bf.delete(bf.indexOf(seged,0),bf.indexOf(seged,0)+ seged.length());
    StringBuffer b = new StringBuffer(bf.toString()) , j = new
StringBuffer(bf.toString());
    b.insert(0,tmp.substring(0,akt)+",");
    b = new StringBuffer( this.tisztitas(b.toString()) );
    j.insert(0,tmp.substring(akt+1)+",");
    j = new StringBuffer( this.tisztitas(j.toString()) );
    bal = new FaG(b.toString());
    jobb = new FaG(j.toString());
}
```

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, X \quad \Gamma, Y \rightarrow \Delta}{\Gamma, X \supset Y \rightarrow \Delta}$$

Ha a szabály "i-", akkor a *bf*-ből a feldolgozandó formulát törli a bal oldalról. Az így előállt formulát *bf*-ből lemásolja *b*, illetve *j* átmeneti változóba. Az *i* műveleti jel bal oldalát beszúrja a *b* szekvent végére. A *&* műveleti jel jobb oldalát beszúrja a *j* szekvent elejére. Az aktuális faelem bal oldalán folytatódik a felépítés a *b* szekventtel. Az aktuális faelem jobb oldalán folytatódik a felépítés a *j* szekventtel.

```
if(adat.compareTo("i-") == 0 ){
    sb.append(" Szabaly: i-\n");
    int szj = bf.indexOf("-");
    String seged = new String("<" + tmp + ">");
    bf.delete(bf.indexOf(seged,0),bf.indexOf(seged,0)+ seged.length());
    StringBuffer b = new StringBuffer(bf.toString()) , j = new
StringBuffer(bf.toString());
    b.append(", " + tmp.substring(0,akt));
    b = new StringBuffer( this.tisztitas(b.toString()) );
    j.insert(0,tmp.substring(akt+1)+",");
    j = new StringBuffer( this.tisztitas(j.toString()) );
    bal = new FaG(b.toString());
    jobb = new FaG(j.toString());
}
```

A feladatok levezetését Java applet-ben lehet megtekinteni. A vizsgál gombra kattintással a premisszának és a konklúzióval implikációval történő összekapcsolásából keletkezett formula kerül levezetésre Gentzen-kalkulussal. Ha egyszerre több premissza kerül megadásra, akkor azokat *&*-ekkel kapcsoljuk össze. A vizsgál gombhoz tartozó forráskód a következő:

```
private void jButton4ActionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
    Vector p=new Vector();
    StringTokenizer strtok =new StringTokenizer(Prem.getText() );
    String szekvent;
    StringBuffer prems = new StringBuffer();
    textArea3.setText("Vizsgal");
```

```

while(strtok.hasMoreTokens())
{
    p.addElement(new String(strtok.nextToken(",")));
}
String k=new String(Konkluzio.getText());
for(int i=0;i<p.size();i++){
    prems.append(((String)p.elementAt(i)).toString()+"&");
}
prems = new StringBuffer(prems.substring(0,prems.length()-1));
if (p.size()>1)
    szekvent = new String("-<<" +prems+">i"+k+">".replaceAll("&i","i"));
else
    szekvent = new String("-<" +prems+"i"+k+">".replaceAll("&i","i"));
textArea3.setText(szekvent);
FaG gentzen = new FaG(szekvent);
textArea3.append("\n+(gentzen.getLevezetheto() == true ? "Igen":"Nem")+
logikai következmény.");
if(gentzen.getLevezetheto() == true){
    textArea3.append("\nLevezetese:");
    textArea3.append("\n"+gentzen.sb.toString());
    }
}

```

A töröl gombra kattintáskor törlődik az előzőnek megadott premissza, konklúzió és az előző levezetés. A töröl gombhoz tartozó forráskód az alábbiakban látható:

```

private void jButton3ActionPerformed(java.awt.event.ActionEvent evt) {
    textArea3.setText("");
    Prem.setText("");
    Konkluzio.setText("");
}

```

Az első feladat levezetése a következőképpen néz ki az applet-ben:

Gentzen-kalkulus:

Premisszák:

$\langle\langle\langle\langle A \rangle \& \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \vee \langle \langle \langle \langle B \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \rangle \rangle \rangle$

Konklúzió:

$\langle A \rangle$

Vizsgál Töröl

Levezetés:

$\langle\langle\langle\langle A \rangle \& \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \vee \langle \langle \langle \langle B \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \rangle \rangle \rangle \langle A \rangle$
 Igen logikai következmény.
 Levezetése:
 Szekvent: $\langle\langle\langle\langle A \rangle \& \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \vee \langle \langle \langle \langle B \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \rangle \rangle \langle A \rangle$ Szabaly: \vee -
 Szekvent: $\langle\langle\langle A \rangle \& \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \langle A \rangle$ Szabaly: $\&$ -
 Szekvent: $\langle\langle A \rangle \& \langle A \rangle \rangle \langle ! \langle B \rangle \rangle \langle A \rangle$ Szabaly: $\&$ -
 Szekvent: $\langle A \rangle \langle A \rangle \langle ! \langle B \rangle \rangle \langle A \rangle$ Szabaly: \vee -
 Szekvent: $\langle A \rangle \langle A \rangle \langle A \rangle \langle B \rangle$
 Szekvent: $\langle \langle \langle B \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \rangle \langle A \rangle$ Szabaly: $\&$ -
 Szekvent: $\langle \langle B \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \langle ! \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \rangle \langle A \rangle$ Szabaly: $\&$ -
 Szekvent: $\langle B \rangle \langle ! \langle B \rangle \rangle \langle ! \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \rangle \langle A \rangle$ Szabaly: \vee -
 Szekvent: $\langle B \rangle \langle ! \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \rangle \langle A \rangle \langle B \rangle$ Szabaly: $\&$ -
 Szekvent: $\langle ! \langle A \rangle \rangle \langle ! \langle A \rangle \rangle \langle B \rangle \langle A \rangle \langle B \rangle$ Szabaly: \vee -
 Szekvent: $\langle ! \langle A \rangle \rangle \langle B \rangle \langle A \rangle \langle B \rangle \langle A \rangle$ Szabaly: \vee -
 Szekvent: $\langle B \rangle \langle A \rangle \langle B \rangle \langle A \rangle \langle A \rangle$

B konklúziót megadva eredményül azt kapjuk, hogy a formula nem logikai következmény:

Gentzen-kalkulus:

Premisszák:

$\langle\langle\langle\langle A \rangle \& \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \vee \langle \langle \langle \langle B \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \rangle \rangle \rangle$

Konklúzió:

$\langle B \rangle$

Vizsgál Töröl

Levezetés:

$\langle\langle\langle\langle A \rangle \& \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \vee \langle \langle \langle \langle B \rangle \& \langle ! \langle B \rangle \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \& \langle ! \langle A \rangle \rangle \rangle \rangle \rangle \langle B \rangle$
 Nem logikai következmény.

Láthatjuk, hogy A-t megadva következménynek helyes logikai következményt kapunk, míg B-t megadva helytelen a logikai következményünk.

Ezzel végéhez is értünk a feladványok különféle megoldásainak.

5. Összefoglalás

A diplomamunkámhoz előzetesen támasztott célkitűzéseimnek - úgy érzem - eleget tettem. Sikerült saját feladatokat kitalálnom, azokat megoldanom, és a megoldásokat bizonyítanom. Mindenek előtt az érthetőségre törekedtem, és természetesen a matematikai logika szabályainak, tételeinek pontos alkalmazására.

Az elméletnek valóban csak azt a csekély részét ismerttettem, ami elengedhetetlen volt a feladatok megoldásához. Mint már említettem, nem az elmélet ismertetése volt a cél, arra nagyon sok jó könyvet találhatunk, pl. a könyvtárban.

A feladatok megoldása néhol némi nehézségbe ütközött, de remélem a kész munkán ennek már nyoma sincs.

Persze nem csak azok a levezetési technikák léteznek, amiket ismerttettem, de a dolgozat szűkre szabott terjedelme miatt ennyi módszer bemutatására futotta. Ha a kedves olvasót érdekelnek más feladat-megoldási módszerek is, netán ez a dolgozat keltette fel érdeklődését a logika iránt, akkor ajánlom az irodalomjegyzékben szereplő könyvekkel, jegyzetekkel való ismerkedést. Remélem, ahhoz az olvasóhoz is közelebb került a logika világa, aki eddig szkeptikusan állt e tudományághoz, vagy netalán idegenkedett tőle.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom témavezetőmnek, dr. Veréb Krisztiánnak a dolgozat elkészítésében nyújtott segítségéért, sok éves türelméért, és segítőkészségéért.

Külön köszönet illeti dr. Juhász István tanár urat emberségéért, jóindulatáért. És azért mert hozzá mindig fordulhattam még apró-cseprő gondjaimmal is, és nélküle biztosan nem jutottam volna el idáig.

Szeretnék köszönetet mondani tanárainknak is. A teljesség igénye nélkül a következőknek (abc sorrendben): Dr. habil. Bácsó Sándor, Dr. Bognár Katalin, Bodroginé Dr. Zichar Marianna, Dr. Bölcskei András, Prof. Dr. Dömösi Pál, Ecsedi Kornél, Dr. Fazekas Gábor, Dr. Glevitzky Béla, Dr. Nyakóné Dr. Juhász Katalin, Dr. Papp Zoltán, Prof. Dr. Pethő Attila, Dr. Rutkovszky Edéné, Dr. Sztrik János, Tomán Henrietta.

Végül, de nem utolsó sorban köszönetet mondok férjemnek kitartásáért, óriási türelméért, és belém vetett hitéért. Gyermekeimnek is köszönettel tartozom, amiért aktívan közreműködtek egyetemre járásomban.

Irodalomjegyzék

- [1] Csirmaz László, Hajnal András, Matematikai Logika
Egyetemi jegyzet, ELTE, Budapest, 1993
- [2] Dragálin Albert, Buzási Szvetlána, Bevezetés a matematikai logikába
Egyetemi jegyzet, KLTE, TTK, Debrecen, 1996
- [3] Pásztorné Varga Katalin – Várterész Magda, A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása
Panem Könyvkiadó, Budapest, 2003
- [4] Pásztorné Varga Katalin, A matematikai logika és alkalmazásai
Egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982
- [5] Pásztorné Varga Katalin, Feladatok és megoldásaik a Mesterséges intelligencia 2-3 című tantárgyakhoz
http://kornygazdeu.bme.hu/rescue/info/mi2_mi3.pdf
- [6] Raymond Smullyan, A hölgy vagy a tigris? - és egyéb logikai feladatok
Typotex kiadó, Budapest, 2005
- [7] Raymond Smullyan, Alice Rejtvényországban - Carrolli mesék nyolcvan év alatti gyermekeknek
Typotex kiadó, Budapest, 2006
- [8] Raymond Smullyan, Mi a címe ennek a könyvnek? - Drakula rejtélye és más logikai feladatok
Typotex kiadó, Budapest, 2005
- [9] Raymond Smullyan, Seherezáde rejtélye - Bámulatos klasszikus és modern fejtörők
Typotex kiadó, Budapest, 2005
- [10] Raymond Smullyan, Sherlock Holmes sakkrejtélyei - 50 izgalmas sakknyomozás
Typotex kiadó, Budapest, 2005

[11] Várterész Magda, Az informatika logikai alapjai előadások

<http://www.inf.unideb.hu/~varteres/logikauj/Logikafo.pdf>

[12] Várterész Magda, Matematikai logika előadás fóliái 2003-2004-es tanév

<http://www.inf.unideb.hu/~varteres/logika/Logikafo.pdf>

[13] Várterész Magda, Matematikai logika példatár

http://www.inf.unideb.hu/szamtud/tagok/?varteres=logika_peldatar/default.htm

[14] Várterész Magda, Mesterséges intelligencia 2 előadások

<http://www.inf.unideb.hu/~varteres/mi2folia/fofiafo.pdf>

[15] Várterész Magda, Mesterséges intelligencia 2 és Mesterséges intelligencia 3 példatár

http://www.inf.unideb.hu/~varteres/mi2_mi3_peldatar/mi2_mi3.pdf