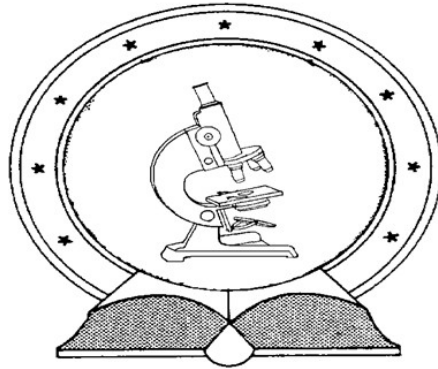


DE TTK



1949

Általánosított kúpszeletek és alkalmazásaik

egyetemi doktori (PhD) értekezés

Nagy Ábris

Témavezető: Dr. Vincze Csaba

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2016.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Differenciálgeometria és alkalmazásai programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2016.

.....
Nagy Ábris
jelölt

Tanúsítom, hogy Nagy Ábris doktorjelölt 2011-2014 között a fent megnevezett Doktori Iskola Differenciálgeometria és alkalmazásai programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2016.

.....
Dr. Vincze Csaba
témavezető

Általánosított kúpszeletek és alkalmazásai

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban.

Írta: Nagy Ábris okleveles matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok
Doktori Iskolája Differenciálgeometria és alkalmazásai programja
keretében.

Témavezető: Dr. Vincze Csaba

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 20.... .

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20.... .

Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	1
2	Kúpszeletek alkalmazása a differenciálgeometriában	11
2.1.	Az általánosított kúpszeletfüggvény	11
2.2.	Elliptikus integrálok	16
2.3.	A köralapú kúpszeletek	20
2.4.	Minkowski-funkcionálok	26
2.5.	A reducibilis részcsoportok esete	30
2.6.	Az irreducibilis részcsoportok esete	39
2.7.	Alkalmazások	44
3	Geometriai tomográfia	47
3.1.	Röntgenfüggvények	49
3.2.	A röntgenfüggvények konvergenciája	54
4	Kúpszeletek alkalmazása a geometriai tomográfiában	65
4.1.	Röntgenfüggvények és kúpszeletek	65
4.1.1.	A kúpszeletfüggvény leképezés folytonossága	73
4.2.	Rekonstrukciós algoritmus	88
4.2.1.	A konvergencia bizonyítása	90
4.2.2.	Linearizálás és egészértékű programozás	96
	Összefoglalás	111
	Summary	126

1 Bevezetés

Általánosított kúpszeleten az n - dimenziós valós koordinátatér olyan alakzatát értjük, melynek pontjaira egy rögzített K halmaz pontjaitól mért átlagos távolság ugyanakkora. A K halmaz elemeit nevezzük *fókusznak*. A fókuszok nem feltétlenül véges számosságú ponthalmazt alkotnak, mint ahogy a távolságmérés során sem feltétlenül az euklideszi távolság játszik szerepet. Mindezeken túl az átlagolási eljárásra vonatkozóan is különbözőképpen járhatunk el: súlyozott (de véges) összegek, integrál stb. Ebbe a koncepcióba a szakirodalomban fellelhető általánosítások többsége beilleszthető. A klasszikusok közül említést érdemel a multifokális ellipszisek témaköre, melyek pontjaira a véges K halmaz pontjaitól mért távolságok összege (vagy, ha úgy tetszik, számtani közepe) állandó. A multifokális ellipszisek szorosan kapcsolódnak optimalizálási feladatokhoz [16], [25]. Ezek közös eredete a Fermat-féle probléma: keressük azt a P pontot az ABC háromszög síkjában, melyre a $PA + PB + PC$ összeg minimális. A multifokális ellipszisek alkalmazási területe meglepően széles: az építészettől az úthálózatok tervezésén át a kortárs tervezésemélet által területi tervezésnek (spatial planning) nevezett irányzattal bezárólag [33]. A véges sok ponttól mért távolságösszegfüggvény minimumhelyének jellemzését Vázsonyi Endre oldotta meg [44]. Ugyancsak ő vetette fel a kérdést, hogy vajon approximálható-e minden konvex síkgörbe multifokális ellipszisekkel, ha a fókuszok száma elegendően nagy – ez a polinomiális lemniszkáta-approximáció additív verziója. Erdős Pál és Vincze István igazolták, hogy egy szabályos háromszög vonal nem közelíthető meg tetszőleges pontossággal ilyen módon [11], ld.

még [42]. Más szóval ez a szabályos alakzat nincs benne a multifokális ellipszisek halmazának topologikus lezártjában a Hausdorff-metrikára nézve.

Természetesen a definícióban szereplő számtani közép helyett más közepeket is tekinthetünk. Súlyozott számtani közép alkalmazásával például hiperbolákat kaphatunk, továbbá ha a fókuszok között pontokon kívül egyeneseket is megengedünk, akkor a parabolákat is megkaphatjuk. C. Gross és T.-K. Strempele vetették fel a nem véges fókuszszereggel rendelkező kúpszeletek vizsgálatának problémáját a [18] dolgozatukat lezáró *nyitott problémák* fejezetben. Itt számtani közép helyett integrálás segítségével mérjük az átlagos távolságot. Integrálközelítő összegeket véve, ebben az esetben a kapott alakzatok tetszőleges pontossággal közelíthetők multifokális ellipszisekkel.

A disszertációban az általánosított kúpszeletek egy differenciálgeometriai és egy tomográfiai alkalmazását mutatjuk be. A **differenciálgeometriai alkalmazásra** az ún. általánosított Berwald-terek elméletének keretein belül kerül sor. Az általánosított Berwald-tér fogalmát V.V. Wagner vezette be 1943-ban. A Finsler-terek egy speciális osztályáról van szó. A Finsler-geometriában az alapsokaságon adott görbék ívhosszát a szokásos integrálformula segítségével mérjük, csak hogy az érintővektorok hossza nem csupán a hely, hanem az irány függvénye is. A Finsler-sokaság általánosított Berwald-sokasággá válik, ha megadható egy lineáris konnexió az alapsokaságon úgy, hogy az általa indukált párhuzamos eltolások megőrzik az érintővektorok Finsler-féle hosszát. Ha a lineáris konnexió torziómentes, akkor a klasszikus Berwald-sokaságokat kapjuk. Ezek osztályozásával Szabó Zoltán [38] munkája foglalkozik. Az osztályozási tételhez vezető eredmények egyike, hogy a Berwald-terek kitüntetett (lineáris) konnexiója Riemann-metrizálható, azaz megadható olyan Riemann-féle metrikus tenzor az alapsokaságon, melynek Lévi-Civita konnexiója egybeesik a Berwald-tér kanonikus konnexiójával. A bizonyítás során használt eszközök szorosan kapcsolódnak a Lie-csoportok,

Lie-algebrák és a szimmetrikus terek elméletéhez, különös tekintettel J. Simons [37] eredményeire. A probléma egy másik megközelítése Vincze Csaba [39] dolgozatában található, ahol a Finsler-sokaság érintőtereinek egységömbjein integrálva a Riemann-Finsler metrikát (mely szintén a pont és az irány függvénye) egy csatolt Riemann-féle metrikus tenzor kerül bevezetésre – ez természetesen nem csupán speciális Finsler terek esetén, hanem teljes általánosságban lehetséges. Alapvető eredmény, hogy ha megadható egy lineáris konnexió az alapsokaságon úgy, hogy az általa indukált párhuzamos eltolások megőrzik az érintővektorok Finsler-féle hosszát, akkor ez a konnexió szükségképpen metrikus az átlagolt Riemann-Finsler metrikára, azaz a csatolt Riemann-féle metrikus tenzorra nézve. M. Crampin [10] a csatolt Riemann-féle metrikus tenzort, illetve az átlagolási technikát illetően, kiindulópontként hivatkozik a [39] dolgozatra. Hasonló értelemben idézi a dolgozatot V. S. Matveev és M. Troyanov [24]: „Several such constructions have been proposed in recent years. One of the oldest constructions seems to be that of Cs. Vincze ...”. A módszer több szerző (M. Crampin, R. J. Torrome, V.V. Matveev et al., T. Aikou) érdeklődését felkeltette, akik további eredményekkel gazdagították a témakört az elmúlt években.

A probléma megfordítása a következő: tekintsünk egy Riemann-sokaságot és egy a sokaságon adott metrikus (nem feltétlenül torziómentes) ∇ lineáris konnexiót. Milyen feltételek mellett garantálható olyan nem Riemann általánosított Berwald-sokaság létezése, melynek (egyik) kitüntetett konnexiója éppen ∇ ? A kérdésre a válasz az, hogy amennyiben a sokaság egy adott $p \in M$ pontjában vett euklideszi egységvektornak a holonómiacsoportra nézve vett pályája nem sűrű az (euklideszi) egységömbön, akkor a konnexió szigorú értelemben Berwald-metrizálható, azaz konstruálható olyan nem Riemann általánosított Berwald-sokaság, hogy a ∇ által indukált párhuzamos eltolások megőrzik az érintővektorok Finsler-féle hosszát. Szabó Zoltán ötletét átvéve, a feladat egy az origót a belsejében tartalmazó konvex test (egységömbtest) konstrukciója a

pont fölötti érintőtérben, mely a holonómiacsoporttal szemben invariáns és a határa nem kvadratikusan sima hiperfelület. Ezt a testet párhuzamos eltolással juttathatjuk el az (összefüggő) sokaság bármely pontjába. Az új egységgömbsereggel ellátva pedig a sokaság általánosított Berwald-sokasággá válik: „Finsler geometry is a non-Riemannian geometry in a finite number of dimensions. The differentiable structure is the same as the Riemannian one but distance is not uniform in all directions. Instead of the Euclidean spheres in the tangent spaces, the unit vectors form the boundary of general convex sets containing the origin in their interiors”. M. Berger

Mivel a párhuzamos eltolástól eltekintve a problémát egy adott pont fölötti érintőtérben kell megoldani, a következőképpen fogalmazhatjuk át: Tekintsük az \mathbb{R}^N euklideszi koordinátatér lineáris izometriacsoportjának egy G részcsoportját. Tegyük fel, hogy valamely euklideszi egységvektor G csoportra nézve vett pályája nem sűrű az (euklideszi) egységgömbön. A cél olyan nem euklideszi Minkowski-funkcionál megadása a vektortéren, melyre nézve G elemei még izometriák maradnak. A Minkowski-funkcionálokkal szemben megkövetelt pozitív homogenitási tulajdonságra tekintettel (2.4 alfejezet) elegendő egy olyan G -invariáns, az origót a belsejében tartalmazó konvex testet konstruálni, melynek határa nem kvadratikusan sima hiperfelület. A konstruált test, mint egységgömb, éppen a kívánt metrikus struktúrát származtatja. A Minkowski-geometria tehát az euklideszi geometria alternatívája a G csoport számára. A fő eredmény az, hogy az invariáns test mindig megadható általánosított kúpszeletként alkalmas G -invariáns fókuszszereg fölött integrálva (azaz átlagolva) az euklideszi távolságfüggvényt. Riemann-sokaságok esetében a pontról pontra kapott egységgömbök serege egy Finsler-teret ad, mint a Riemann-geometria alternatíváját a holonómiacsoport, illetve a lineáris konnexió számára [27], ld. még [28]. Ennélfogva az általánosított Berwald-terek kitüntetett (lineáris) konnexiói egyrészt mindig Riemann-metrizálhatók, másrészt pedig átmetrizálhatók nem Riemann értelem-

ben úgy, hogy az egységgömbök általánosított kúpszeletek, szemben a Riemann-geometria klasszikus kúpszeleteivel.

A multifokális ellipszisek például alkalmasak olyan lineáris konnexiók átmetrizálására, melyek holonómiacsoportja invariánsan hat a fókuszok (véges) halmazán. Véges invariáns rendszer létezése azonban túlságosan erős megszorítás a holonómiacsoporra nézve – leginkább speciális esetekben fordul elő (2-dimenziós eset, zéró görbületű, lineáris konnexiók esete). Ezért tulajdonképpen természetes módon vetődik fel egy olyan kúpszeletfogalom kidolgozásának igénye, melynél a fókuszok nem véges, de geometriai/differenciál-geometriai szempontból kezelhető halmazt (görbét, felületet stb.) alkotnak, az átlagos euklideszi távolságot pedig integrálással határozzuk meg. Ezek elmélete még fejlesztés alatt áll, ugyanis - általánosságban szólva - gyökös kifejezések integrálása a feladat, melyek már a legegyszerűbb görbék, illetve felületek (körök, illetve gömbök) esetében is elliptikus integrálokat adnak. Valószínűleg ennek a komoly technikai problémának köszönhető, hogy ez a kúpszeletfogalom, amit Gross és Stempel a már említett [18] dolgozat *open problems* címszava alatt szerepeltet, mint lehetséges általánosítást, sokáig kiaknázatlan maradt. Történt azonban az évek során néhány áttörés: 2004-ben, illetve 2005-ben cikkek jelentek meg H. Alzer és S-L. Qiu [4], illetve K. C. Richards [35] szerzőktől elliptikus integrálokra, illetve a Gauss-féle hipergeometrikus függvényre vonatkozó becslésekről. Segítségükkel sikerült ezt a kúpszeletfajtát beépíteni az általánosított Berwald-sokaságok elméletébe [28]. Az érintőterekben általánosított kúpszeletek szerepelnek, mint az origót a belsejükben tartalmazó konvex hiperfelületek (Finsler-struktúra) és az indukált Finsler-féle alapfüggvény a Riemann-struktúrára nézve metrikus lineáris konnexiót nem Riemann-féle értelemben átmetrizálja. A reducibilis esetben az invariáns altér által a gömbből kimetszett alacsonyabb dimenziós gömböket szerepeltethetjük, mint fókuszcsaládot, irreducibilis esetben pedig az orbitok konvex burkát. Mindkét szituációban az alapvető kérdés, hogy a fókuszoktól

mért átlagos euklideszi távolság állandóságával definiált hiperfelületek nem euklideszi geometriát származtatnak-e (ellipszoid-probléma). Ennek eldöntésére (reducibilis esetben) az elliptikus integrálokra, illetve a Gauss-féle hipergeometrikus függvényre vonatkozó becsléseket használtuk fel, irreducibilis esetben pedig az alternatívák tételét, ami az általánosított kúpszeletfogalom továbbfejlesztését is kikényszeríti (ld. 2.4 és 2.5 alfejezetek).

Ha az euklideszi távolság helyett az ún. taxicab/Manhattan normából származó távolságfüggvényt használjuk, akkor az átlagos távolságot mérő függvénynek és színhalmazainak (az általánosított kúpszeleteknek) a **geometriai tomográfiában** vehetjük hasznát [29], [30], és [31]. Ezt készíti elő a röntgenfüggvényekkel (halmazok speciális - például adott iránnyal párhuzamos - szeleteinek a mértékét megadó függvényekkel) kapcsolatos 3. fejezet.

A geometriai tomográfia célja, hogy információt szerezzünk olyan geometriai alakzatokról, amelyeknek csak metszeteit vagy vetületeit (esetleg mindkettőt) ismerjük. A geometriai szó itt arra utal, hogy a vizsgált objektum homogénnek tekinthető, ezért nem egy sűrűségfüggvényt kell visszaállítanunk, hanem csak az alakzat formája érdekel bennünket. A (párhuzamos) röntgenfüggvények olyan valós függvények, amelyek \mathbb{R}^N egy korlátos, mérhető részhalmazának egy rögzített $N - 1$ -dimenziós altérrel való metszeteinek mértékét szolgáltatja. A röntgenfüggvényekhez kapcsolódó rekonstrukciós feladat az, hogy találjuk meg \mathbb{R}^N egy kompakt részhalmazát, amelynek csak néhány irányban vett röntgenfüggvénye adott. Mivel ez a probléma gyakran nehéznek bizonyul, ezért legtöbbször az is elegendő, ha tudunk mutatni egy olyan halmazzorozatot, amely a rekonstruálandó halmazhoz konvergál valamilyen metrikára nézve (ez a metrika általában a kompakt halmazok Hausdorff-távolsága).

A probléma megoldásához természetesen használhatók az általánosabb inhomogén alakzatok visszaállítására kidolgozott eljárások (lásd [6], [19],[20]), de ezek nem használják ki a homogenitásból adódó speciális

tulajdonságokat és ezért indokolatlanul sok bemeneti adatra támaszkodnak (azaz túl sok vetületet használnak). Más esetekben próbálkozhatunk a probléma diszkretizálásával és diszkrét tomográfiai módszerekkel keresni a probléma megoldását [21], ezt azonban csak akkor tehetjük meg, ha a vizsgált objektum jól közelíthető diszkrét alakzatokkal. Továbbá, ha minimálisra szeretnénk csökkenteni a rekonstrukcióhoz szükséges irányok számát, illetve a megoldás egyértelműségére vonatkozó állításokat szeretnénk megfogalmazni, szükség van a vizsgált alakzatok körének szűkítésére. Tekinthetjük például a konvex, kompakt halmazok családját, amely esetben elegendő négy megfelelően választott irány a megoldás egyértelműségéhez ([15],[13]). Ezen eredmény felhasználásával 2007-ben Gadner és Kiderlen egy a röntgenfüggvények közvetlen összehasonlításán alapuló, konvex síkidomok rekonstrukciójára alkalmas eljárást adtak meg [14]. Sőt azt is sikerült bizonyítaniuk, hogy az eljárás akkor is megfelelő eredményt szolgáltat, ha a bemeneti adatok mérési hibával terheltek. Az algoritmus hátránya azonban, hogy csak konvex alakzatok esetén alkalmazható és az eljárás során egy nehezen kezelhető nemlineáris programozási feladatot kell megoldani, ami miatt a gyakorlati implementálást csak 2014-re sikerült megoldani [3]. Ezzel szemben nekünk sikerült egy a konvex halmazoknál valamivel általánosabb, horizontálisan és vertikálisan konvex (azaz hv-konvex) halmazok rekonstrukcióját lehetővé tevő algoritmus megalkotni.

A disszertáció 4. fejezete a sík hv-konvex halmazainak rekonstrukciójára alkalmas algoritmust mutat be a konvexitási irányoknak megfelelő röntgenfüggvényekből kiindulva (4.2 alfejezet). Az algoritmus bizonyítottan konvergens (4.3 alfejezet), a gyakorlatban pedig egy 0-1 változós lineáris programozási feladat megoldására vezet (4.4 alfejezet). Az algoritmust a MAPLE segítségével futtattuk is konkrét esetekben.

Legyen K egy kompakt síkidom (azaz tegyük fel, hogy nemüres, összefüggő és belsejének lezártja maga a K halmaz). Ha az f_K függvény értéke

a sík P pontjában

$$f_K(P) = \int_K d_1(X, P) dX,$$

azaz a $d_1(P, X)$ taxicab távolság integrálja K fölött, akkor az egyes változók szerinti másodrendű parciális deriváltak a megfelelő koordinátairányra merőleges metszet mértékét adják (majdnem mindenütt) konstans szorzótól eltekintve. A [16] dolgozatban igazolást nyert, hogy $f_K = f_L$ akkor és csak akkor, ha a koordináta-irányokban vett röntgenfüggvények majdnem mindenütt egybeesnek. Az is igaz, hogy a K halmaz koordinátairányokban vett röntgenfüggvényei segítségével az f_K függvény explicite kiszámítható. Ez azt jelenti, hogy a két információ gyakorlatilag (a rekonstrukciós algoritmus futtatása szempontjából a szoros értelmében véve), elméleti szempontból pedig egy nullmértékű halmaz pontjaitól eltekintve, egyenértékű. A csatolt f_K függvényen keresztül alkalmazhatjuk a konvex analízis és optimalizálás eszközeit tomográfiai problémák megoldására. Ezek egyike a halmaz rekonstrukciója a koordinátairányokban vett röntgenfüggvények alapján. Az elméleti háttérrel a $K \mapsto f_K$ kúpszelet függvény-hozzárendelés folytonossága biztosítja bizonyos halmazosztályok (összefüggő hv-konvex halmazok osztálya, konvex halmazok osztálya) fölött; ld. 4.1.1-4.1.3 alfejezetek. A röntgenfüggvények hozzárendelése a K halmazhoz, mint leképezés, nem rendelkezik ilyen folytonossági tulajdonsággal, kivéve speciális halmazosztályokat (konvex halmazok osztálya), vagy a Hausdorff távolság szerinti konvergenciánál erősebb feltételeket előírva (X -regularitás, 3.2 alfejezet). A folytonossági tulajdonság alapján adódik, hogy amennyiben $f_L \approx f_K$, azaz f_L „elég közel” van az f_K függvényhez, akkor $L \approx K^*$, azaz L „elég közel” van egy olyan K^* halmazhoz, melyre $f_K = f_{K^*}$. Ez azt jelenti - korábban idézett eredményünk szerint -, hogy K és K^* koordináta-röntgenfüggvényei egybeesnek (majdnem mindenütt). Néhány konkrét futtatási eredményt szerepeltetünk a 4.... alfejezetben.

A dolgozat további részében jelölje \mathbb{R}^N az N -dimenziós valós koordinátateret ($N \in \mathbb{N}$, $N \neq 0$) ellátva az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_N)$ kanonikus bázissal. \mathbb{R}^N elemeit egyaránt nevezhetjük pontoknak vagy vektoroknak és $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ módon jelöljük. Továbbá \mathbb{R}^N el van látva a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kanonikus belső szorzással, ahol

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{i=1}^N x_i y_i.$$

Ha $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$, akkor \underline{x}^\perp jelöli a \underline{x} ortogonális komplementumát a kanonikus belső szorzásra nézve. Tetszőleges $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$ és $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ esetén $\|\underline{x}\|_p$ jelöli az \underline{x} p -normáját és d_p a p -normából származó távolságfüggvényt:

$$\|\underline{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^N |x_i|^p}, \quad d_p(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|_p.$$

Jelölje továbbá $m \in \{1, \dots, N\}$ esetén λ_m az m -dimenziós Lebesgue-mértéket.

1.0.1. Definíció. Legyen adott egy $d: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ metrika és egy μ mérték a $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmazon úgy, hogy $0 < \mu(K) < +\infty$. A K halmazhoz tartozó (súlyozatlan) általánosított kúpszeletfüggvényen az

$$f_K: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{x} \mapsto f_K(\underline{x}) := \int_K g(d(\underline{x}, \underline{y})) d_{\mu} \underline{y}, \quad (1.1)$$

leképezést értjük, ahol $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton növekvő, konvex függvény, amelyre $g(0) = 0$. A K halmaz pontjait fókuszoknak nevezzük, a g függvényt pedig magfüggvénynek.

A K halmazhoz tartozó súlyozott általánosított kúpszeletfüggvényen az

$$F_K: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{x} \mapsto F_K(\underline{x}) := \frac{1}{\mu(K)} f_K(\underline{x})$$

leképezést értjük. A $C_K = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid f_K(\underline{x}) \leq c\}$ alakú szinthalmazokat általánosított kúpszeleteknek nevezzük.

Legyen \mathcal{E} az $\underline{a}_1, \underline{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ fókuszokkal rendelkező ellipszis. Tekintsük a $K = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ kételemű fókuszalmazt és jelentse μ a számláló mértéket a K halmazon, d pedig az euklideszi távolságot a síkon. Ekkor \mathcal{E} olyan K fókuszalmazú általánosított kúpszeletnek a határa, amelynek magfüggvénye $g(t) = t$.

Látható tehát, hogy a klasszikus ellipszisek általánosított kúpszeletek a fenti értelemben és ugyanígy látható ez a multifokális ellipszisek esetén. Ugyanakkor, ha hiperbolákat és parabolákat is szeretnénk az általánosított kúpszeletek közé sorolni, akkor általánosabb magfüggvényre lenne szükségünk és megengedni, hogy a fókuszalmazban pontokon kívül más alakzatok (egyenesek) is szerepelhessenek. A fenti definíció azonban elegendő lesz számunkra mind a differenciálgeometriai, mind a geometriai tomográfiai alkalmazások szempontjából és megfelel a C. Gross és T.-K. Strepel által felvetett nem véges fókuszalmazmal rendelkező általánosított kúpszeletfogalomnak.

2 Kúpszeletek alkalmazása a differenciálgeometriában

2.1. Az általánosított kúpszeletfüggvény

Az általánosított kúpszeletek egy fontos alkalmazására bukkanunk, ha a definícióban szereplő K halmazt differenciálható struktúrával látjuk el.

L. Bieberbach igazolta, hogy egy zérus görbületű, kompakt Riemann-sokaság holonómiacsoportja véges. Tekintsük egy nemzérus elemnek a H holonómia csoportra nézve vett pályáját a p pont fölötti érintőtérben. Ez egy véges fókuszszereget ad, melyre nézve vett bármely multifokális ellipszis/ellipszoid is nyilvánvalóan invariáns a H csoporttal szemben. Párhuzamos eltolással az invariáns multifokális ellipszoid bármely pontba eljuttatható. Ez az egységgömbcsereg egy Finsler-sokaságot határoz meg, mint a Riemann-geometria alternatíváját a Lévi-Civita konnexió számára.

A holonómiacsoport azonban általában nem véges. Éppen ezért szükségünk van a multifokális ellipszisek helyett olyan alakzatokat tekinteni, amelyek pontjainak egy nem véges fókuszszeregtől mért átlagos távolsága állandó. Így jutunk el az általánosított kúpszeletek egy fontos differenciálgeometriai alkalmazásához. Az általánosított kúpszeletek olyan konvex testet szolgáltatnak, amelyek invariánsak a p -beli holonómia csoport elemeivel szemben, továbbá olyan L_p Minkowski-funkcionált származtat az érintőtéren, amelyre nézve a holonómiacsoport elemei lineáris izometriák. Ezután párhuzamos eltolások segítségével ezt a funkcionált kiter-

jesztve a teljes sokaságra a funkcionálok egy olyan sima gyűjteményét kapjuk, amely invariáns a Lévi-Civita konnexió által származtatott párhuzamos eltolásokkal szemben. Mindehhez az általánosított kúpszeletek definíciójában szereplő K halmazt Riemann-struktúrával látjuk el és az integrálás során az indukált Riemann-féle térfogati formát vesszük alapul.

2.1.1. Definíció. *Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ olyan korlátos, irányítható részsokaság, amelyre $\text{Vol } \Gamma < \infty$ az indukált Riemann-térfogatra nézve. Ekkor a Γ -hoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvényen az*

$$F_\Gamma(\underline{x}) := \frac{1}{\text{Vol } \Gamma} \int_\Gamma \gamma \mapsto d(\underline{x}, \gamma) d\gamma \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^N)$$

leképezést értjük. Továbbá az

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid F_\Gamma(\underline{x}) = c, c \in \mathbb{R}^+\}$$

alakú halmazokat **általánosított kúpszeleteknek** nevezzük, amelynek fókuszhalma Γ .

2.1.1. Lemma. *Tetszőleges Γ fókuszhalma esetén az F_Γ általánosított kúpszeletfüggvény konvex és eleget tesz a*

$$\liminf_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty} \frac{F_\Gamma(\underline{x})}{\|\underline{x}\|} > 0$$

növekedési feltételnek, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma \mathbb{R}^N -en.

Bizonyítás: Világos, hogy rögzített $\gamma \in \Gamma$ -ra a

$$d(\cdot, \gamma): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{x} \mapsto d(\underline{x}, \gamma)$$

leképezés konvex, ezért tetszőleges $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^N$ és $\lambda \in [0, 1]$ esetén

$$\begin{aligned} F(\lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{y}) &= \int_{\Gamma} d(\lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{y}, \gamma) d\gamma \leq \\ &\leq \int_{\Gamma} \lambda d(\underline{x}, \gamma) + (1 - \lambda) d(\underline{y}, \gamma) d\gamma = \\ &= \lambda \int_{\Gamma} d(\underline{x}, \gamma) d\gamma + (1 - \lambda) \int_{\Gamma} d(\underline{y}, \gamma) d\gamma = \lambda F(\underline{x}) + (1 - \lambda) F(\underline{y}) \end{aligned}$$

adódik, ami épp azt jelenti, hogy F konvex függvény.

Mivel Γ korlátos, így létezik a $K := \sup_{\gamma \in \Gamma} \|\gamma\|$ valós szám. Ekkor

$$\frac{d(\underline{x}, \gamma)}{\|\underline{x}\|} \geq \frac{\|\underline{x}\| - \|\gamma\|}{\|\underline{x}\|} \geq 1 - \frac{K}{\|\underline{x}\|} \geq 1 - \frac{1}{n}$$

teljesül az $\|\underline{x}\| > nK$ feltételt kielégítő pontokra. Következésképp

$$\liminf_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty} \frac{F(\underline{x})}{\|\underline{x}\|} \geq 1 > 0.$$

■

2.1.1. Tétel. *Az F általánosított kúpszeletfüggvény szinthalmazai konvex, kompakt halmazok.*

Bizonyítás: Legyen $c \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és tekintsük az

$$M := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid F(\underline{x}) \leq c\}$$

szinthalmazt. Ha $\underline{x}, \underline{y} \in M$ és $\lambda \in [0, 1]$ tetszőlegesek, akkor F konvexitása alapján

$$F(\lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{y}) \leq \lambda F(\underline{x}) + (1 - \lambda) F(\underline{y}) \leq \lambda c + (1 - \lambda) c = c,$$

így $\lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{y} \in M$ is teljesül, azaz M konvex.

Másrészt ismert, hogy minden konvex függvény folytonos értelmezési tartományának belső pontjaiban, így F folytonos az egész \mathbb{R}^N téren. Mivel minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ esetén $F(\underline{x}) \geq 0$, ezért M nem más, mint a $[0, c]$ zárt intervallum F általi ősképe, ami F folytonossága miatt zárt halmaz.

Ezután már csak azt kell megmutatnunk, hogy M korlátos, hiszen \mathbb{R}^N minden korlátos, zárt részhalmaza kompakt. Indirekt módon tegyük fel, hogy M nem korlátos. Ekkor létezik olyan $(\underline{x}_n)_{n=0}^\infty$ pontsorozat, hogy

$$\underline{x}_n \in M \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\underline{x}_n\| = +\infty.$$

Így

$$\liminf_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty} \frac{F(\underline{x})}{\|\underline{x}\|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(\underline{x}_n)}{\|\underline{x}_n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{\|\underline{x}_n\|} = 0,$$

ami ellentmond az előző lemmában szereplő növekedési feltételnek. Tehát F szinthalmazai valóban korlátosak. ■

2.1.1. Következmény. *Az F általánosított kúpszeletfüggvénynek létezik globális minimumhelye.*

Bizonyítás: Weierstrass tétele [7] szerint ha \mathbb{R}^N egy nemüres, zárt részhalmazán értelmezett folytonos függvény szinthalmazai korlátosak, akkor annak a függvénynek létezik globális minimumhelye. ■

2.1.2. Tétel. *Ha $c > \sup_{\gamma \in \Gamma} \|\gamma\|$ ($c \in \mathbb{R}^+$), akkor az F általánosított kúpszeletfüggvény*

$$M := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid F(\underline{x}) \leq c\}$$

szinthalmazának az origó belső pontja.

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\underline{x} \in B_{\underline{0}}(\varepsilon)$, ahol

$$B_{\underline{0}}(\varepsilon) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid \|\underline{x}\| < \varepsilon\}$$

az origó középpontú ε sugarú nyílt gömb. Ekkor

$$F(\underline{x}) \leq \frac{1}{\text{Vol}\Gamma} \int_{\Gamma} \|\underline{x}\| + \|\gamma\| d\gamma < \frac{1}{\text{Vol}\Gamma} \int_{\Gamma} \varepsilon + K d\gamma = \varepsilon + K,$$

ahol $K := \sup_{\gamma \in \Gamma} \|\gamma\|$. Így ha $\varepsilon \in]0, c - K[$, akkor minden $\underline{x} \in B_{\underline{0}}(\varepsilon)$ esetén $F(\underline{x}) \leq c$, azaz $B_{\underline{0}}(\varepsilon) \subset M$. ■

2.1.3. Tétel. *Ha $\Phi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ olyan lineáris izometria, amelyre $\Phi(\Gamma) = \Gamma$, akkor a Γ -hoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvény minden M szint-halmazára $\Phi(M) = M$.*

Bizonyítás: Legyen $c \in \mathbb{R}^+$ és M az ehhez tartozó szint-halmaz. Tekintsünk továbbá egy tetszőleges $\underline{x} \in M$ pontot. Mivel Φ lineáris izometria, ezért J_{Φ} Jacobi-determinánsának abszolút értéke 1, továbbá minden $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^N$ esetén $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\Phi(\underline{x}), \Phi(\underline{y}))$. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} F(\Phi(\underline{x})) &= \frac{1}{\text{Vol}\Gamma} \int_{\Gamma} d(\Phi(\underline{x}), \gamma) d\gamma = \frac{1}{\text{Vol}\Gamma} \int_{\Phi(\Gamma)} d(\Phi(\underline{x}), \beta) d\beta = \\ &= \frac{1}{\text{Vol}\Gamma} \int_{\Phi(\Gamma)} d(\Phi(\underline{x}), \Phi(\gamma)) \cdot |J_{\Phi}| d\gamma = \frac{1}{\text{Vol}\Gamma} \int_{\Phi(\Gamma)} d(\Phi(\underline{x}), \Phi(\gamma)) d\gamma = \\ &= \frac{1}{\text{Vol}\Gamma} \int_{\Phi(\Gamma)} d(\underline{x}, \gamma) d\gamma = \frac{1}{\text{Vol}\Gamma} \int_{\Gamma} d(\underline{x}, \gamma) d\gamma = F(\underline{x}). \end{aligned}$$

Tehát azt kapjuk, hogy $F(\Phi(\underline{x})) = F(\underline{x})$, ezért $\underline{x} \in M$ pontosan akkor teljesül, ha $\Phi(\underline{x}) \in M$, azaz $\Phi(M) = M$ a Φ invertálhatósága miatt. ■

2.2. Elliptikus integrálok

Az előző szakaszban definiált általánosított kúpszeletfüggvénnyel végzett számolások során problémát okoz, hogy gyakran elliptikus integrálok lépnek fel. Éppen ezért szükséges az elliptikus integrálokról és a kapcsolódó becslésekről néhány szót ejteni ([1], [43], [35]).

2.2.1. Definíció ([1] 589. oldal). *Legyen R valós kétváltozós racionális törtfüggvény, amely a második változójának legalább egy páratlan kitevőjű hatványát tartalmazza, valamint legyen P egy harmad- vagy negyedfokú polinom, amelynek minden gyöke különböző és $c \in \mathbb{R}$ konstans. Ekkor az*

$$f(x) := \int_c^x R(t, \sqrt{P(t)}) dt$$

függvényt elliptikus integrálnak nevezzük.

2.2.2. Definíció. *Legyenek $k \in]0, 1[$ és $n \in \mathbb{R}$ valós konstansok. Ekkor az*

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta$$

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$\Pi(n; \phi, k) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - n \sin^2 \theta}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta$$

függvényeket rendre első-, másod- és harmadfajú elliptikus integráloknak nevezzük.

A fenti függvények $t = \sin \theta$ és $x = \sin \phi$ helyettesítéssel a következő alakra hozhatók:

$$F(x; k) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} dt$$

$$E(x; k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\Pi(n; \phi|m) = \int_0^{\sin \phi} \frac{1}{\sqrt{1-nt^2}} \frac{1}{(1-mt^2)\sqrt{1-t^2}} dt$$

A megfelelő redukciónak alkalmazásával látható, hogy minden elliptikus integrál kifejezhető racionális törtfüggvények integráljainak és első-, másod- vagy harmadfajú elliptikus integrálok segítségével.

2.2.3. Definíció. Az előző definícióban szereplő elliptikus integrálok $\phi = \pi/2$ -ben felvett értékeit teljes elliptikus integráloknak nevezzük. Ennek megfelelően a

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} dt$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\Pi(n, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-n \sin^2 \theta}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta$$

függvényeket rendre teljes első-, másod- és harmadfajú elliptikus integráloknak nevezzük.

2.2.1. Állítás. *Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyanok, amelyek különböznek minden nem pozitív egész számtól. Ekkor a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\bar{n}} b^{\bar{n}}}{c^{\bar{n}} n!} z^n$$

hatványsor konvergenciasugara 1, ahol $a^{\bar{n}}$ az a szám n -edik emelkedő faktoriálisát jelöli, azaz

$$a^{\bar{n}} = a(a+1)(a+2) \cdot \dots \cdot (a+n-1).$$

Bizonyítás: Tekintsük az $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatot, ahol

$$a_n := \frac{a^{\bar{n}} b^{\bar{n}}}{c^{\bar{n}} n!} z^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha $z = 0$, akkor világos, hogy az állításbeli hatványsor konvergens. Egyébként tetszőleges $n \geq 1$ esetén képezhető a következő hányados:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a^{\overline{n+1}} b^{\overline{n+1}}}{c^{\overline{n+1}} (n+1)!} z^{n+1}}{\frac{a^{\bar{n}} b^{\bar{n}}}{c^{\bar{n}} n!} z^n} = \frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)} z = \frac{n^2 + (a+b)n + ab}{n^2 + (c+1)n + c} z.$$

Így

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |z|.$$

A D'Alembert-féle hányadoskritérium szerint $|z| < 1$ esetén az állításban szereplő hatványsor abszolút konvergens, míg $|z| > 1$ esetén divergens. Ez épp azt jelenti, hogy konvergenciasugár 1. ■

2.2.4. Definíció. Ha $a, b, c, z \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy c különbözik minden nem pozitív egész számtól és $|z| < 1$, akkor az

$${}_2F_1(a, b; c; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\bar{n}} b^{\bar{n}}}{c^{\bar{n}}} \frac{z^n}{n!}$$

függvényt Gauss-féle hipergeometrikus függvénynek nevezzük.

A fenti definíció értelmes, hiszen ha a és b egyike sem 0 vagy negatív egész, akkor az előző állítás garantálja a jobboldali hatványsor konvergenciáját, egyébként pedig látható, hogy a részletösszegek sorozata egy bizonyos indextől kezdve konstanssá válik.

2.2.2. Állítás. Legyenek $a, b, c, z \in \mathbb{R}$ olyanok, mint az előző definícióban. Ekkor

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(b-c)}{\Gamma(c)} \cdot {}_2F_1(a, b; c; z) = \int_0^1 (1-tz)^{-a} t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} dt.$$

2.2.3. Állítás. A teljes első- és másodfajú teljes elliptikus integrálok kifejezhetők a Gauss-féle hipergeometrikus függvény segítségével a következő módon:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right),$$

$$E(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right).$$

2.2.5. Definíció. Tetszőleges $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, $\lambda \in [0, 1]$ és $r \in]0, 1[$ esetén az

$$M_p(\lambda, r) := ((1-\lambda) + \lambda(1-r)^p)^{1/p}$$

valós számot p -edik hatványközépnak nevezzük.

2.2.1. Tétel (Richards [35]). Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $b > 0$, $a \leq 1$ és $\max\{-a, b\} \leq c$ teljesül. Ha $c \geq \max\{1 - 2a, 2b\}$, akkor

$$\left({}_2F_1(-a, b; c; r)\right)^{1/a} \geq M_p \left(\frac{b}{c}, r\right) \quad (r \in]0, 1[)$$

pontosan akkor teljesül, ha $p \leq (a + c)/(1 + c)$.

2.2.1. Következmény. Az

$$E(k)^2 \geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 M_p \left(\frac{1}{2}, k^2\right)$$

egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül minden $k \in]0, 1[$ esetén, ha $p \leq 3/4$.

2.3. A köralapú kúpszeletek

2.3.1. Definíció. Legyen $(\underline{b}_i)_{i=1}^N$ olyan bázisa az \mathbb{R}^N térnek, amely ortogonális a kanonikus belső szorzásra nézve. Ekkor az

$$E := \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid \underline{x} = \sum_{i=1}^N x_i \underline{b}_i, x_1^2 + \dots + x_N^2 = 1 \right\}$$

alakú halmazt **N -dimenziós ellipszoidnak** nevezzük.

Az $N = 2$ esetben a kétdimenziós ellipszoid helyett az ellipszis elnevezés használatos. Vegyük továbbá észre, hogy ha a definícióban szereplő $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ pontot a $(\underline{b}_i)_{i=1}^N$ bázisban írjuk fel, ahol

$$\tilde{\underline{b}}_i := \frac{\underline{b}_i}{\sqrt{\langle \underline{b}_i, \underline{b}_i \rangle}}, \quad (i = 1, \dots, N)$$

akkor

$$E = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid \underline{x} = \sum_{i=1}^N x_i \tilde{\underline{b}}_i, \frac{x_1^2}{\langle \underline{b}_1, \underline{b}_1 \rangle} + \dots + \frac{x_n^2}{\langle \underline{b}_n, \underline{b}_n \rangle} = 1 \right\}.$$

Ekkor tehát megkapjuk az ellipszoidok klasszikus koordinátás felírását egy alkalmasan választott ortonormált bázisra vonatkozóan.

Legyen

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) := (\cos t, \sin t, 0)$$

az egységkörvonal az xy -koordinátasíkban és tekintsük a hozzá tartozó

$$F(x, y, z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{(x - \cos t)^2 + (y - \sin t)^2 + z^2} dt.$$

általánosított kúpszelet-függvényt. Ekkor az $F(x, y, z) = \frac{8}{2\pi}$ felület általánosított kúpszelet, amelynek fókuszalmaza S_1 . Világos, hogy ez egy az

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + (y - \sin t)^2 + z^2} dt = 8$$

yz -síkbeli görbe által meghatározott forgásfelület.

2.3.1. Tétel (Vincze, N. [28]). *Az $F(x, y, z) = \frac{8}{2\pi}$ egyenlet által meghatározott felület nem ellipszoid.*

Bizonyítás: Világos, hogy az állításbeli felület az

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + (y - \sin t)^2 + z^2} dt = 8$$

yz -síkbeli görbe által meghatározott forgásfelület, ezért elegendő megmutatni, hogy

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + (y - \sin t)^2 + z^2} dt = 8$$

nem egy ellipszis az yz -koordinátasíkban. Ha $y = 0$, akkor azt kapjuk, hogy

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2\pi}\right)^2 - 1}.$$

Másfelől ha $z = 0$, akkor az

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + (y - \sin t)^2} dt = 8$$

egyenlet megoldásai $y = \pm 1$, ezért az egyetlen lehetséges ellipszis a következő:

$$y(s) = \cos s \quad \text{és} \quad z(s) = \sqrt{\left(\frac{8}{2\pi}\right)^2 - 1} \sin s.$$

Tekintsük a következő segédfüggvényt:

$$v(s) := \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + (y(s) - \sin t)^2 + z^2(s)} dt.$$

Elég annyit megmutatnunk, hogy ez nem konstans függvény. Továbbalakítva

$$v(s) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + y(s)^2 + z^2(s) - 2y(s) \sin t} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + y(s)^2 + z^2(s) + 2y(s) \cos(t + \frac{\pi}{2})} dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + y(s)^2 + z^2(s) + 2y(s) \cos t} dt = \\
&= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{1 + y(s)^2 + z^2(s) + 2y(s) \cos(2t)} dt = \\
&= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{1 + y(s)^2 + z^2(s) + 2y(s)(1 - 2 \sin^2 t)} dt = \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 + y(s))^2 + z^2(s) - 4y(s) \sin^2 t} dt.
\end{aligned}$$

Legyenek

$$h(s) := \sqrt{(1 + y(s))^2 + z^2(s)} \quad \text{és} \quad r^2(s) := 4 \frac{y(s)}{h^2(s)}.$$

Ekkor $v(s)$ a következő alakban írható

$$v(s) = 4h(s) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - r^2(s) \sin^2 t} dt = 4h(s)E(r(s)),$$

ahol $E(k)$ a teljes másodfajú elliptikus integrál. Alkalmazva Richards tételének 2.2.1 következményét

$$v(s) \geq 2\pi h(s) \sqrt{M_p\left(\frac{1}{2}, r^2(s)\right)}$$

adódik $p = \frac{3}{4}$ választással. Megmutatjuk, hogy a

$$g(s) := 2\pi h(s) \sqrt{M_p\left(\frac{1}{2}, r^2(s)\right)} \quad (0 \leq s \leq 2\pi)$$

függvénynek szigorú lokális minimuma van az $s = \pi/2$ helyen. Egyszerű számolással adódik, hogy $g(\pi/2) = 8 > 0$, ezért elegendő belátni, hogy a g^2 függvénynek szigorú lokális minimuma van $s = \pi/2$ -ben, ugyanis a négyzetgyökfüggvény szigorúan monoton növekvő. Nézzük az s -szerinti első és második deriváltakat $\pi/2$ -ben:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1; \quad y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$z^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{8}{2\pi}\right)^2 - 1; \quad (z^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad (z^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - 2\left(\frac{8}{2\pi}\right)^2$$

$$h^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{8}{2\pi}\right)^2$$

$$(h^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(1 + y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)y'\left(\frac{\pi}{2}\right) + (z^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

$$(h^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 + 2\left(1 + y\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)y''\left(\frac{\pi}{2}\right) + (z^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - 2\left(\frac{8}{2\pi}\right)^2$$

$$r^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\frac{y\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0$$

$$(r^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\frac{y'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} - 4y\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{(h^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h^4\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -4\left(\frac{2\pi}{8}\right)^2$$

$$(r^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\frac{y''\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} - 8y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{(h^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h^4\left(\frac{\pi}{2}\right)} - 4y\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{(h^2)'}{h^4}\right)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -16\left(\frac{2\pi}{8}\right)^4$$

$$M_p\left(\frac{1}{2}, r^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - r^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^p\right)^{1/p} = 1$$

$$\begin{aligned}
& \left(M_p \left(\frac{1}{2}, r^2 \right) \right)' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \\
& = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - r^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}-1} \frac{p}{2} \left(1 - r^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^{p-1} \left(- (r^2)' \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = 2 \left(\frac{2\pi}{8} \right)^2 \\
& \left(M_p \left(\frac{1}{2}, r^2 \right) \right)'' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \\
& = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - r^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}-2} \left(\frac{p}{2} \left(1 - r^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^{p-1} \left((r^2)' \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \right)^2 + \\
& \quad + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - r^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}-1} \frac{p(p-1)}{2} \left((r^2)' \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^2 + \\
& \quad + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - r^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}-1} \frac{p}{2} \left(1 - r^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^{p-1} \left(- (r^2)'' \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = \\
& \quad = 4(p+1) \left(\frac{2\pi}{8} \right)^4 = 7 \left(\frac{2\pi}{8} \right)^4
\end{aligned}$$

$$g^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = 4\pi^2 (h^2) \left(\frac{\pi}{2} \right) M_p \left(\frac{1}{2}, r^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = 64$$

$$(g^2)' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 4\pi^2 (h^2)' \left(\frac{\pi}{2} \right) M_p \left(\frac{1}{2}, r^2 \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) + 4\pi^2 h^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(M_p \left(\frac{1}{2}, r^2 \right) \right)' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
(g^2)'' \left(\frac{\pi}{2} \right) &= 4\pi^2 (h^2)'' \left(\frac{\pi}{2} \right) M_p \left(\frac{1}{2}, r^2 \right) \left(\frac{\pi}{2} \right) + 8\pi^2 (h^2)' \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(M_p \left(\frac{1}{2}, r^2 \right) \right)' \left(\frac{\pi}{2} \right) + \\
& \quad + 8\pi^2 h^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(M_p \left(\frac{1}{2}, r^2 \right) \right)'' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 16\pi^2 - 128 - \frac{\pi^4}{4} > 0
\end{aligned}$$

Tehát a g^2 függvénynek és így g -nek is szigorú lokális minimuma van $\pi/2$ -ben. Ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan $0 < s^* < \frac{\pi}{2}$ paraméter, hogy

$$8 = g \left(\frac{\pi}{2} \right) < g(s^*) \leq v(s^*)$$

következésképp $v(s)$ nem lehet konstansfüggvény. ■

2.4. Minkowski-funkcionálok

2.4.1. Definíció. Egy $A \subset \mathbb{R}^N$ halmazt **elnyelőnek** nevezünk, ha minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ pont benne van valamely tA alakú halmazban, ahol $t \in \mathbb{R}$ pozitív valós szám, azaz ha

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} tA$$

2.4.2. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}^N$ konvex, elnyelő halmaz. Ekkor az A halmaz **Minkowski-funkcionálján** az

$$L_A: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \underline{x} \mapsto L_A(\underline{x}) := \inf \{t \in \mathbb{R}^+ \mid \underline{x} \in tA\}$$

függvényt értjük.

2.4.3. Definíció. Egy $A \subset \mathbb{R}^N$ halmazt **körszerűnek** nevezünk, ha $\lambda A \subset A$ minden $\lambda \in [-1, 1]$ esetén.

2.4.1. Állítás. Ha L_A az A konvex elnyelő halmaz Minkowski-funkcionálja, akkor L_A

1. szubadditív, azaz

$$L_A(\underline{x} + \underline{y}) \leq L_A(\underline{x}) + L_A(\underline{y}); \quad (\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^N)$$

2. elsőfokú pozitív homogén, azaz

$$L_A(\lambda \underline{x}) = \lambda L_A(\underline{x}); \quad (\lambda \in \mathbb{R}^+, \underline{x} \in \mathbb{R}^N)$$

3. elsőfokú abszolút homogén, amennyiben A körszerű, azaz

$$L_A(\lambda \underline{x}) = |\lambda| L_A(\underline{x}); \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \underline{x} \in \mathbb{R}^N)$$

2.4.2. Állítás. *Ha $A \subset \mathbb{R}^N$ olyan konvex, kompakt halmaz, amely szimmetrikus az origóra nézve és belsejében tartalmazza az origót, akkor a hozzá tartozó Minkowski-funkcionál norma \mathbb{R}^N számára, amelyre nézve B a zárt egységgömb és $\text{bd } B$ az egységgömb-felület.*

A fenti tételben szereplő halmaz Minkowski-funkcionálja értelmezve van, hiszen \mathbb{R}^N -ben az origó minden környezete elnyelő, így minden olyan halmaz is az, amelynek az origó belső pontja.

2.4.4. Definíció. *Egy $A \subset \mathbb{R}^N$ elnyelő halmaz Minkowski-funkcionálját euklideszinek nevezzük, ha olyan norma \mathbb{R}^N számára, amely belső szorzatból származik.*

2.4.1. Tétel. *Ha egy norma \mathbb{R}^N -en belső szorzatból származik, akkor az ezen normához tartozó egységgömb-felület ellipszoid.*

Bizonyítás: Legyen $g: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ az a belső szorzat, amelyből a norma származik és jelölje M az ebből származó norma egységgömbjét, azaz

$$M := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid g(\underline{x}, \underline{x}) \leq 1 \}.$$

Tetszőleges $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ esetén a $\underline{y} \mapsto \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ leképezés egy lineáris funkcionál, így létezik egy egyértelműen meghatározott $T\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, hogy

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = g(T\underline{x}, \underline{y}) \quad \text{minden } \underline{y}\text{-ra.}$$

Könnyen látható, hogy

$$T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \underline{x} \mapsto T\underline{x}$$

egy lineáris transzformáció, továbbá

$$g(T\underline{x}, \underline{y}) = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle = g(T\underline{y}, \underline{x}) = g(\underline{x}, T\underline{y}),$$

így T önadjungált a g -re nézve. Következésképp létezik T sajátvektorai-
ból álló $(\underline{v}_i)_{i=1}^N$ g -re nézve ortonormált bázis. Jelöljük a megfelelő saját-
értékeket $(\lambda_i)_{i=1}^N$. Ekkor

$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = g(T\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \lambda_i g(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \begin{cases} \lambda_i, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$$

Tehát a $(\underline{v}_i)_{i=1}^N$ bázis ortogonális a kanonikus belső szorzatra nézve is.
Így a g -ből származó norma egységgömbfelülete:

$$\text{bd } M = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid g(\underline{x}, \underline{x}) = 1 \} = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid \underline{x} = \sum_{i=1}^N x_i \underline{v}_i, x_1^2 + \dots + x_N^2 = 1 \right\},$$

azaz M valóban ellipszoid a 2.3.1 definíció értelmében. ■

2.4.1. Következmény. Legyen

$$F(x, y, z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{(x - \cos t)^2 + (y - \sin t)^2 + z^2} dt.$$

Ekkor az

$$M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) \leq \frac{8}{2\pi} \right\}$$

halmaz Minkowski-funkcionálja nem euklideszi.

Bizonyítás: Korábban láttuk, hogy az F általánosított kúpszeletfügg-
vény színhalmazai konvex kompakt halmazok. Másrészt az állításbeli
általánosított kúpszeletfüggvény fókuszhalma az S_1 egység-körvonal,
amelyre

$$\sup_{\gamma \in S_1} \|\gamma\| = 1 < \frac{8}{2\pi},$$

így az 2.1.2 tétel szerint M az origót a belsejében tartalmazza. Továbbá S_1 szimmetrikus az origóra nézve, amiből az 2.1.3 tétel alapján következik, hogy az M színhalmaz is ilyen. Ekkor a 2.4.2 állítás szerint M Minkowski-funkcionálja, L_M norma \mathbb{R}^3 számára, amelyre nézve

$$\text{bd } M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = \frac{8}{2\pi} \right\}$$

az egységgömb-felület. A 2.3.1 tétel szerint azonban $\text{bd } M$ nem ellipszoid, így a fenti tétel alapján nem származhat belső szorzatból. ■

2.4.5. Definíció. *Tetszőleges L_A Minkowski-funkcionál lineáris izometriáján olyan $\Phi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ lineáris leképezést értünk, amelyre $L_A \circ \Phi = L_A$ teljesül.*

2.4.2. Tétel. *Ha $\Phi: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ olyan lineáris izometria, amelyre $\Phi(\Gamma) = \Gamma$, és M a Γ -hoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvény olyan színhalmaza, amely az origót a belsejében tartalmazza. Ekkor Φ lineáris izometria az L_M Minkowski-funkcionálra nézve.*

Bizonyítás: Az 2.1.3 tétel szerint $\Phi(M) = M$. Legyen ezután $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ és jelölje e_x az origóból induló \underline{x} -re illeszkedő félegyenest. Mivel M konvex és az origó belső pontja, ezért e_x legfeljebb egy pontban metszi $\text{bd } M$ -t, ugyanakkor M korlátossága miatt legalább egy pontban metszi. Legyen $\underline{p} := e_x \cap (\text{bd } M)$. Világos, hogy ekkor

$$L_M(\underline{x}) = \frac{\|\underline{x}\|}{\|\underline{p}\|}.$$

Felhasználva, hogy Φ lineáris izometria és $\Phi(M) = M$

$$L_M(\Phi(\underline{x})) = L_{\Phi(M)}(\Phi(\underline{x})) = \frac{\|\Phi(\underline{x})\|}{\|\Phi(\underline{p})\|} = \frac{\|\underline{x}\|}{\|\underline{p}\|} = L_M(\underline{x}).$$

Mivel \underline{x} -et tetszőlegesen választottuk adódik, hogy $L_M \circ \Phi = L_M$. ■

A nem-euklideszi Minkowski-funkcionálok lineáris izometria-csoportja legtöbb esetben triviális, ugyanakkor euklideszi esetben a teljes ortogonális csoporttal egyezik meg. A következőkben ezért szeretnénk olyan Minkowski-funkcionálokat megadni, amelyek lineáris izometria-csoportja tartalmazza az ortogonális csoport egy előre rögzített G valódi részcsoportját, de nem euklidesziek. Ebben lesznek segítségünkre az általánosított kúpszeletek.

2.5. A reducibilis részcsoportok esete

Legyen $G \subset O(N)$ egy valódi részcsoportja az \mathbb{R}^N (euklideszi) tér ortogonális csoportjának. Ha G reducibilis és $N = 2$, akkor mindig található egy olyan $\Gamma = \{\pm x_1, \pm x_2\}$ véges ponthalmaz, amely invariáns G elemeire nézve. Ez azért igaz, mert $N = 2$ miatt az invariáns altér 1-dimenziós, azaz egy origóra illeszkedő egyenes, akárcsak annak ortogonális komplementuma. Ezen egyenesek egység-irányvektoraik és azok ellentettjei alkotják a Γ halmazt. Így minden olyan multifokális ellipszis, amelynek fókuszhalma Γ olyan Minkowski-funkcionált indukál, amelynek lineáris izometria-csoportja tartalmazza G -t. Amennyiben a dimenzió legalább 3, akkor G reducibilitása miatt tekinthetjük az

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{N-2}$$

euklideszi egységgömbök valamelyikét, mint a G elemeire nézve invariáns halmazt (egydimenziós invariáns altér esetén térjünk át annak ortogonális komplementumára). Ha S_{N-1} -et választjuk fókuszhalmaznak, akkor olyan általánosított kúpszeletet kapunk, amely a teljes ortogonális csoport minden elemére nézve invariáns, hiszen maga S_{N-1} is ilyen. Következésképp a kapott általánosított kúpszelet $(N - 1)$ -dimenziós gömb.

Ugyanakkor a 2.4.1 következmény és 2.4.2 tétel szerint S_1 esetén megadható olyan nem-euklideszi Minkowski-funkcionál, amelynek lineáris izometria-csoportja tartalmazza G -t. Továbbiakban megvizsgáljuk, mit állíthatunk, ha S_k az invariáns halmaz, ahol $2 \leq k \leq N - 2$.

Legyenek tehát $N \geq 4$ és $2 \leq k \leq N - 2$ rögzített egész számok. $S_k \subset \mathbb{R}^N$ megadásához tekintsük a

$$\rho_{k-1}: H \rightarrow S_{k-1} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}, \quad \text{ahol } H \subset \mathbb{R}^{k-1} \text{ és } \rho_{k-1}(\underline{u}) = (\rho(\underline{u}), 0)$$

leképezést, amely az S_{k-1} gömb pontjait adja meg. Ekkor

$$\rho_k: H \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow S_k \subset \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{N-(k+1)}, \quad \rho_k(\underline{u}, v) = (\rho(\underline{u}) \cos(v), \sin(v), 0).$$

Mivel S_{k-1} és S_k első alapformáinak determinánsaira a

$$\det g_{ij}(\underline{u}, v) = (\cos^2(v))^{k-1} \det h_{ij}(\underline{u})$$

összefüggés teljesül, így minden $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ esetén

$$\int_{S_k} d(\underline{x}, \gamma) d\gamma = \int_{S_{k-1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{D(\underline{x}, \gamma, v)} \cos^{k-1}(v) dv d\gamma,$$

ahol

$$D(\underline{x}, \gamma, v) := \sum_{i=1}^k (x_i - \gamma_i \cos(v))^2 + (x_{k+1} - \sin(v))^2 + (x_{k+2})^2 + \dots + (x_N)^2.$$

Legyen

$$F_k(\underline{x}) := \frac{1}{\text{Vol } S_k} \int_{S_k} d(\underline{x}, \gamma) d\gamma$$

és tekintsük az $F_k(\underline{x}) = c$ alakú általánosított kúpszeletek metszeteit az

$$x_1 = \dots = x_k = 0 \text{ és } x_{k+3} = \dots = x_N = 0$$

egyenletű síkokkal. Ezek nem mások, mint az

$$f_k(y, z) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + y^2 + z^2 - 2y \sin t} \cos^{k-1} t \, dt$$

függvény szinthalmozai az $y := x_{k+1}$ és $z := x_{k+2}$ jelölések bevezetésével. Az egyszerűség kedvéért legyen $l := k - 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} f_k(1, 0) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2(1 - \sin t)} \cos^l t \, dt = \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) \cos^l t \, dt = \\ &= \sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2} \right)^l \, dt = \\ &= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos x - \sin x) (\cos^2 x - \sin^2 x)^l \, dx = \\ &= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)^l \, dx = 2\sqrt{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x (1 - 2\sin^2 x)^l \, dx. \end{aligned}$$

Itt

$$\int \cos x (1 - 2\sin^2 x)^l \, dx = \int \cos x \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (-2)^{l-i} (\sin x)^{2(l-i)} \, dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} (-2)^{l-i} \int \cos x (\sin x)^{2(l-i)} dx = \\
&= \sum_{i=0}^l \frac{1}{2(l-i)+1} \binom{l}{i} (-2)^{l-i} (\sin x)^{2(l-i)+1} = \\
&= \sin x \sum_{i=0}^l \frac{1}{2l+1-2i} \binom{l}{i} (-2 \sin^2 x)^{l-i}.
\end{aligned}$$

Következésképp

$$f_k(1, 0) = 4 \sum_{i=0}^l \frac{1}{2l+1-2i} \binom{l}{i} (-1)^{l-i}.$$

Tetszőleges $t > 0$ egész szám esetén

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^t \frac{1}{2t+1-2i} \binom{t}{i} (-1)^{t-i} = \\
&= \frac{1}{2t+1} \sum_{i=0}^t \frac{2t+1}{2t+1-2i} \binom{t}{i} (-1)^{t-i} = \\
&= \frac{1}{2t+1} \sum_{i=0}^t \binom{t}{i} (-1)^{t-i} + \frac{1}{2t+1} \sum_{i=0}^t \frac{2i}{2t+1-2i} \binom{t}{i} (-1)^{t-i} = \\
&= \frac{2}{2t+1} \sum_{i=1}^t \frac{i}{2t+1-2i} \frac{t!}{i!(t-i)!} (-1)^{t-i} = \\
&= \frac{2t}{2t+1} \sum_{i=1}^t \frac{1}{2t+1-2i} \frac{(t-1)!}{(i-1)!(t-i)!} (-1)^{t-i} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2t}{2t+1} \sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{2t+1-2i-2} \binom{t-1}{i} (-1)^{t-1-i},$$

így az adódik, hogy

$$f_k(1, 0) = \frac{2^{l+2} \cdot l!}{(2l+1)!!}.$$

2.5.1. Tétel (Vincze, N. [28]). Az $F_k(x) = \frac{c(l)}{\text{Vol } S_k}$ felület nem ellipsoid, ahol

$$c(l) := \frac{2^{l+2} \cdot l!}{(2l+1)!!} \quad \text{és} \quad l := k-1.$$

Bizonyítás: Elegendő belátni, hogy az

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+y^2+z^2-2y \sin t} \cos^l t \, dt = c(l)$$

görbe nem ellipszis az yz -koordinátasíkban. Ha $y=0$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{1+z^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^l t \, dt = c(l).$$

Itt ha l páratlan (azaz k páros), akkor

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^l t \, dt = 2 \frac{(l-1)!!}{l!!},$$

egyébként pedig

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^l t \, dt = \pi \frac{(l-1)!!}{l!!}.$$

Tehát az egyetlen lehetséges ellipszis

$$y(s) = \cos s \quad \text{és} \quad z(s) = b(l) \sin s,$$

ahol

$$b(l) := \begin{cases} \sqrt{\frac{c^2(l)l!!^2}{4(l-1)!!^2} - 1}, & \text{ha } l \text{ páratlan,} \\ \sqrt{\frac{c^2(l)l!!^2}{\pi^2(l-1)!!^2} - 1}, & \text{ha } l \text{ páros.} \end{cases}$$

Tekintsük a

$$v_l(s) := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 + y^2(s) + z^2(s) - 2y(s) \sin t \cos^l t} dt$$

segédfüggvényt. A 2.2.2 állítás szerint

$$v_l(s) = 2^l h(s) \frac{\Gamma^2\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma(l+1)} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{l+1}{2}, l+1, r^2(s)\right),$$

ahol

$$h(s) := \sqrt{(1 + y(s))^2 + z^2(s)} \quad \text{és} \quad \frac{1}{4}r^2(s) := \frac{y(s)}{h^2(s)}.$$

Alkalmazva a

$$\Gamma(m) = (m-1)!, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \text{és} \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

azonosságokat azt kapjuk, hogy

$$2^l \frac{\Gamma^2\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma(l+1)} = \frac{c(l)}{\sqrt{b^2(l) + 1}},$$

így Richards tétele alapján $p = \frac{2l+3}{2(l+2)}$ választással

$$v_l(s) \geq h(s) \frac{c(l)}{\sqrt{b^2(l)+1}} \sqrt{M_p \left(\frac{1}{2}, r^2(s) \right)}$$

adódik minden $-\pi/2 < s < \pi/2$ esetén. Legyen

$$g(s) := h(s) \frac{c(l)}{\sqrt{b^2(l)+1}} \sqrt{M_p \left(\frac{1}{2}, r^2(s) \right)}.$$

A 2.3.1 tétel bizonyításában látottakhoz hasonlóan látható, hogy

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0, \quad (g^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{és}$$

$$\begin{aligned} (g^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{b^2(l)+1} \left((h^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right) - (4-2p)h^{-2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{2}{b^2(l)+1} \left(1 - b^2(l) - \frac{1}{l+2} \frac{1}{1+b^2(l)} \right). \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy

$$1 - b^2(l) - \frac{1}{l+2} \frac{1}{1+b^2(l)} > 0. \quad (2.1)$$

Ez az egyenlőtlenség a következő alakúra hozható

$$(2 - (b^2(l) + 1))(b^2(l) + 1)(l + 2) > 1,$$

amelyről könnyen látható, hogy $l = 1, 2$ esetén teljesül. Indirekt módon tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség nem teljesül valamely $l \in \mathbb{N}$ -re és legyen l a legkisebb ilyen. Ekkor $l \geq 3$ és

$$(2 - (b^2(l) + 1))(b^2(l) + 1)(l + 2) \leq 1,$$

valamint

$$(2 - (b^2(l-2) + 1))(b^2(l-2) + 1)l > 1,$$

ezért

$$\frac{(2 - (b^2(l) + 1))(b^2(l) + 1)(l + 2)}{(2 - (b^2(l-2) + 1))(b^2(l-2) + 1)l} \leq 1.$$

Tehát ahhoz, hogy ellentmondásba kerüljünk elegendő megmutatni, hogy

$$\frac{(2 - (b^2(l+2) + 1))(b^2(l+2) + 1)(l + 4)}{(2 - (b^2(l) + 1))(b^2(l) + 1)(l + 2)} > 1 \quad (2.2)$$

teljesül minden $l > 0$ egész esetén. Itt

$$\frac{b^2(l+2) + 1}{b^2(l) + 1} = \frac{c^2(l+2)}{c^2(l)} \left(\frac{l+2}{l+1} \right)^2 = \frac{2^4(l+2)^2(l+2)^2}{(2l+3)^2(2l+5)^2} = \frac{(2l+4)^4}{((2l+4)^2 - 1)^2},$$

így az egyenlőtlenség

$$(2 - (b^2(l+2) + 1))(2l+4)^4(l+4) > (2 - (b^2(l) + 1))((2l+4)^2 - 1)^2(l+2),$$

azaz

$$\begin{aligned} & 2(2l+4)^4(l+4) - (b^2(l+2) + 1)(2l+4)^4(l+4) > \\ & > 2((2l+4)^2 - 1)^2(l+2) - (b^2(l) + 1)((2l+4)^2 - 1)^2(l+2), \end{aligned}$$

következésképp

$$\begin{aligned} & 2(2l+4)^4(l+4) - 2((2l+4)^2 - 1)^2(l+2) - (b^2(l+2) + 1)(2l+4)^4(l+4) > \\ & > - (b^2(l) + 1)((2l+4)^2 - 1)^2(l+2). \end{aligned}$$

Ebből

$$\frac{(b^2(l+2) + 1)(2l+4)^4(l+4)}{(b^2(l) + 1)((2l+4)^2 - 1)^2(l+2)} - 2 \frac{(2l+4)^4(l+4) - ((2l+4)^2 - 1)^2(l+2)}{(b^2(l) + 1)((2l+4)^2 - 1)^2(l+2)} < 1,$$

azaz

$$2 \frac{(2l+4)^4(l+4) - ((2l+4)^2 - 1)^2(l+2)}{(b^2(l) + 1)((2l+4)^2 - 1)^2(l+2)} > \frac{(2l+4)^8(l+4) - ((2l+4)^2 - 1)^4(l+2)}{((2l+4)^2 - 1)^4(l+2)},$$

és így

$$2((2l+4)^2-1)^2 \frac{(2l+4)^4(l+4) - ((2l+4)^2-1)^2(l+2)}{(2l+4)^8(l+4) - ((2l+4)^2-1)^4(l+2)} > b^2(l)+1. \quad (2.3)$$

Ennek igazolásához alkalmazzunk teljes indukciót l -re. Az $l=1, 2$ esetek közvetlen számolással ellenőrizhetők. Tegyük fel ezután, hogy az egyenlőtlenség teljesül minden $l-1$ -nél kisebb egész számra, ahol $l \geq 4$, azaz

$$2((2l)^2-1)^2 \frac{(2l)^4(l+2) - ((2l)^2-1)^2l}{(2l)^8(l+2) - ((2l)^2-1)^4l} > b^2(l-2)+1.$$

Megszorozva mindkét oldalt a $\frac{(2l)^4}{((2l)^2-1)^2}$ kifejezéssel

$$2(2l)^4 \frac{(2l)^4(l+2) - ((2l)^2-1)^2l}{(2l)^8(l+2) - ((2l)^2-1)^4l} > b^2(l)+1$$

adódik, így elegendő belátni, hogy

$$\begin{aligned} 2((2l+4)^2-1)^2 \frac{(2l+4)^4(l+4) - ((2l+4)^2-1)^2(l+2)}{(2l+4)^8(l+4) - ((2l+4)^2-1)^4(l+2)} > \\ > 2(2l)^4 \frac{(2l)^4(l+2) - ((2l)^2-1)^2l}{(2l)^8(l+2) - ((2l)^2-1)^4l}, \end{aligned}$$

ami ekvivalens a $p(l) > 0$ egyenlőtlenség teljesülésével, ahol

$$\begin{aligned} p(x) := & 327680x^{12} + 3571712x^{11} + 15024128x^{10} + 27283456x^9 + 4449280x^8 - \\ & - 64296448x^7 - 101394944x^6 - 51257536x^5 + 9134912x^4 + 14982848x^3 + \\ & + 2259712x^2 - 1054590x - 258300. \end{aligned}$$

Mivel $p(2) > 0$ és

$$p'(2) > 0, p''(2) > 0, \dots, p^{(6)}(2) > 0, p^{(7)}(2) > 0,$$

ezért a $p(l) > 0$ egyenlőtlenség valóban teljesül minden $l \geq 2$ egész esetén, következésképp az (2.1) egyenlőtlenség is fennáll. Ebből viszont az adódik, hogy $(g^2)''(\frac{\pi}{2}) > 0$, ami $(g^2)'(\frac{\pi}{2}) = 0$ -val együtt azt jelenti, hogy a g^2 függvénynek $\pi/2$ -ben szigorú lokális minimuma van. Mivel $g(\pi/2) > 0$ és a négyzetgyökfüggvény szigorúan monoton növekvő, így a g függvénynek is szigorú lokális minimuma van $\pi/2$ -ben, amiből következik, hogy létezik olyan $0 < s_* < \pi/2$ paraméter, amelyre

$$1 < g(s_*) \leq \frac{v(s_*)}{c(l)},$$

következésképp $v(s)$ nem konstans függvény. ■

2.6. Az irreducibilis részcsoportok esete

2.6.1. Lemma. *Az ortogonális csoport bármely zárt irreducibilis G részcsoportja esetén az origó belső pontja a nem triviális pályák konvex burkának.*

Bizonyítás: Először is vegyük észre, hogy a pályák konvex burkai invariánsak G -re nézve és mindegyik zárt, amiből adódóan kompakt részhalmazok. Ha az origó nem eleme a konvex buroknak, akkor tekintve a konvex burok (egyértelműen meghatározott) origóhoz legközelebb eső pontját könnyen látható, hogy ez a pont fixpontja G minden elemének, így G nem lehet irreducibilis. Ha az origó része a konvex buroknak, de nem belső pontja annak, akkor tekinthetjük origóra illeszkedő támaszhipersíkok H metszetét. Ez nem üres halmaz, hiszen az origó nem része egyetlen nem triviális pályának sem és így a Krein-Mil'mann tétel alapján nem lehet extrémális pontja a konvex buroknak. H nyilvánvalóan egy G -re nézve invariáns lineáris altér, így G ismét nem lehet irreducibilis. ■

2.6.1. Következmény. *Ha G nem tranzitív, zárt és irreducibilis, akkor bármely nem triviális pálya konvex burka olyan nem-euklideszi Minkowski-funkcionált indukál, amelynek lineáris izometria csoportja tartalmazza G -t.*

Bizonyítás: Legyen G zárt és irreducibilis. Ha egy nem triviális pálya konvex burka egy origó középpontú ellipszoid, akkor annak G irreducibilitása miatt egy euklideszi értelemben vett gömbnek kell lennie. Így G tranzitív és minden lehetséges Minkowski-funkcionál euklideszi. ■

A következő példa illusztrálja, hogy integrálással hogyan lehet kiküszöbölni a szingularitásokat. Tekintsük a

$$[-1, 1] \times [-1, 1]$$

négyzet szimmetriacsoportját az euklideszi síkban. Ekkor minden nem triviális pálya konvex poligon, azaz a konvex burkuk határa mindig tartalmaz szingularitásokat. A

$$\Gamma = \{(-1, -1), (1, -1), (1, 1), (-1, 1)\}$$

pálya éppen a szuprémum-normát indukálja:

$$|(x, y)| := \frac{1}{\sqrt{2}} \max \{|x|, |y|\}$$

A szingularitások kiküszöböléséhez tekintsük az

$$F(x, y) := \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sqrt{(x-t)^2 + (y-s)^2} ds dt$$

függvényt. Itt az $F(x, y) = \text{const.}$ alakú görbék conv Γ -fókuszú általánosított kúpszeletek.

A következő számolás azt mutatja, hogy ezek legalább egyike nem kör. Az x , t és y , s változók szerepének szimmetriáját felhasználva a gradiens vektormező koordinátái:

$$D_1F(x, y) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x-t}{\sqrt{(x-t)^2 + (y-s)^2}} ds dt$$

$$D_2F(x, y) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{y-s}{\sqrt{(x-t)^2 + (y-s)^2}} ds dt$$

Itt

$$\begin{aligned} D_1F(x, y) = & -\frac{1}{8} \left[(s-y)\sqrt{(x-1)^2 + (y-s)^2} + \right. \\ & + (x-1)^2 \ln \left((s-y) + \sqrt{(x-1)^2 + (y-s)^2} \right) + (s-y)\sqrt{(x+1)^2 + (y-s)^2} + \\ & \left. + (x+1)^2 \ln \left((s-y) + \sqrt{(x+1)^2 + (y-s)^2} \right) \right]_{-1}^1 \end{aligned}$$

valamint

$$D_2F(x, y) = D_1F(y, x)$$

Ezek felhasználásával tekintsük a

$$v(x, y) := yD_1F(x, y) - xD_2F(x, y)$$

függvényt annak mérésére, hogy az általánosított kúpszeletek és körök gradiensvektorai mennyire térnek el. Ekkor

$$\begin{aligned} v(2, 1) = & -2\sqrt{13} + \frac{9}{2} \ln 3 - \frac{9}{2} \ln(-2 + \sqrt{13}) + \frac{1}{2} \ln(-2 + \sqrt{5}) - 8 \ln 2 + \\ & + 4 \ln(-3 + \sqrt{13}) + 4 \ln(\sqrt{5} + 1) + 8 \end{aligned}$$

amiről látható, hogy különbözik nullától.

2.6.1. Definíció. Legyen G az ortogonális csoport zárt részcsoportja, $\underline{z} \in S_{N-1}$ rögzített pont és tekintsük \underline{z} pályáját $\Gamma_{\underline{z}}$ -t. Ha $\underline{z}_* \in S_{N-1}$ olyan pont, amelynél az

$$a := \min_{\|\underline{y}\|=1} \left(\max_{\gamma \in \text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} d(\underline{y}, \gamma) \right)$$

minimum fellép, akkor \underline{z}_* -ot a $\Gamma_{\underline{z}}$ pálya **minimax pontjának** nevezzük.

Tekintsük a

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) := \begin{cases} 0 & \text{ha } t \leq a \\ (t-a)e^{-\frac{1}{t-a}} & \text{ha } t > a. \end{cases}$$

függvényt. Standard kalkulus segítségével látható, hogy ez egy sima, konvex valós függvény. Legyen

$$g(t) := t + f(t)$$

és nézzük az

$$F(x) := \int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} d(x, \gamma) d\gamma \quad \text{és} \quad \tilde{F}(x) := \int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} g(d(x, \gamma)) d\gamma$$

függvényeket. Világos, hogy

$$F(\underline{z}_*) = \tilde{F}(\underline{z}_*) =: c$$

ahol \underline{z}_* a $\Gamma_{\underline{z}}$ pálya minimax pontját jelöli. Másrészt az

$$F(\underline{x}) = c \quad \text{és} \quad \tilde{F}(\underline{x}) = c$$

szinthalmozok különböznek a gömbtől kivéve, ha a

$$\underline{y} \in S_{N-1} \mapsto \max_{\gamma \in \text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} d(\underline{y}, \gamma)$$

leképezés állandó. Mivel $\Gamma_{\underline{z}} \subset S_{N-1}$ ez csak úgy lehetséges, ha $\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}$ maga az egységgömb és így G tranzitív.

2.6.1. Tétel (Vincze, N. [28]). *Ha G olyan zárt, irreducibilis részcsoportha az ortogonális csoportnak, amely nem tranzitív az egységgömbön, akkor a*

$$\int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} d(\underline{x}, \gamma) d\gamma = c \quad \text{és} \quad \int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} g(d(\underline{x}, \gamma)) d\gamma = c$$

hiperfelületek legalább egyike olyan nem euklideszi Minkowski-funkcionált indukál, amelynek lineáris izometria csoportja tartalmazza G -t.

A következő táblázatban összefoglaljuk mindazon kompakt Lie-részcsoportokat, amelyek tranzitívak az S_{N-1} euklideszi egységgömbön [17].

$SO(N)$	$SO(N)$	$SO(N)$	$SO(7)$	$SO(8)$	$SO(16)$
–	$U(2k+1)$	$U(2k)$	–	$U(4)$	$U(8)$
–	$SU(2k+1)$	$SU(2k)$	–	$SU(4)$	$SU(8)$
–	–	$Sp(k)$	–	$Sp(2)$	$Sp(4)$
–	–	$Sp(k) \cdot SO(2)$	–	$Sp(2) \cdot SO(2)$	$Sp(4) \cdot SO(2)$
–	–	$Sp(k) \cdot Sp(1)$	–	$Sp(2) \cdot Sp(1)$	$Sp(4) \cdot Sp(1)$
–	–	–	G_2	$Spin(7)$	$Spin(9)$
$N=2k+1 \neq 7$	$N=2(2k+1)$	$N=4k \neq 8, 16$	$N=7$	$N=8$	$N=16$

2.7. Alkalmazások

I. Legyen most (M, γ) egy összefüggő Riemann-sokaság, amelyen adott a $p \in M$ pont. Ha a p pontbeli holonómiacsoport lezártja nem tranzitív a $T_p M$ érintőtér egységömbjén, akkor a fenti tételek szerint megadhatunk egy olyan konvex testet, amely az origót a belsejében tartalmazza, invariáns a p -beli holonómiacsoport elemeivel szemben, továbbá olyan nem euklideszi L_p Minkowski-funkcionált származtat az érintőtéren, amelyre nézve a holonómiacsoport elemei lineáris izometriák. Ezután párhuzamos eltolások segítségével ezt a funkcionált kiterjesztve a teljes sokaságra a funkcionálok egy olyan sima gyűjteményét kapjuk, amely invariáns a Lévi-Civita-konnxio által származtatott párhuzamos eltolásokkal szemben. Az ilyen struktúrával ellátott sokaságokat (nem Riemann) Berwald-sokaságoknak nevezzük, amelyek a Finsler-sokaságok egy speciális osztályát képviselik.

2.7.1. Tétel. *Ha egy összefüggő Riemann-sokaság holonómiacsoportjának lezártja nem tranzitív a az érintőtér egységömbjén, akkor a Lévi-Civita-konnxio (szigorú értelemben) Berwald-metrizálható általánosított kúpszeletek segítségével.*

Borel and Lichnerowicz tétele szerint a leszűkített holonómiacsoport (az egységelemet tartalmazó maximális összefüggő részcsoport) zárt részcsoportja az ortogonális csoportnak. Mivel a holonómiacsoport megszámlálható sok komponensből áll, ezért a zártság csak a komponensek számától függ (véges vagy végtelen). Simons [37] bebizonyította, hogy ha egy lokálisan irreducibilis Riemann-sokaság holonómiacsoportja nem tranzitív az egységömbön, akkor az egy 2 rangú lokálisan szimmetrikus tér. Így holonómiacsoportot tartalmazza az a G csoport, amely a görbületi tenzort a sokaság egy pontjában invariánsan hagyó ortogonális transzformációkból áll. Ez a G csoport nyilvánvalóan zárt és ha a görbületi tenzor

nem tűnik el, akkor az egységelemet tartalmazó maximális összefüggő részcsoport megegyezik a leszűkített holonómiacsoporttal [37]. Következésképp a holonómiacsoportnak legfeljebb annyi komponense lehet, mint G -nek, és mindemellett zárt részcsoport [38].

II. A következő lépésben általánosítjuk a 2.7.1 tételt.

2.7.1. Definíció. *Legyen M egy összefüggő differenciálható sokaság az érintőtereken ellátva sima Minkowski funkcionáloknak egy*

$$p \mapsto L_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

sima családjával¹ úgy, hogy bármely $p \in M$ pont és $v \in T_p M$ nemzérus vektor esetén a

$$g_v: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_v(w, z) := \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \left((s, t) \mapsto \frac{1}{2} L_p^2(v + tw + sz) \right)_{t=0, s=0}$$

leképezés pozitív definit bilineáris forma. Az

$$L: TM \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(v) := L_p(v)$$

*leképezést alapfüggvénynek és az (M, L) párt Finsler-sokaságnak nevez-
zük, amíg g Riemann-Finsler metrika.*

2.7.2. Definíció. *Ha az alapfüggvény invariáns valamely ∇ lineáris kon-
nexió által indukált párhuzamos eltolásokkal szemben, akkor ∇ -ra nézve
általánosított Berwald-sokaságot kapunk.*

Az általánosított Berwald-sokaságok legfontosabb speciális osztályai a következők:

¹Sima családon azt értjük, hogy bármely a sokaságon adott reguláris $c: [0, 1] \rightarrow M$ görbe esetén a $t \mapsto L_{c(t)}(\dot{c}(t))$ leképezés sima.

- lokálisan Minkowski-sokaságok (∇ zérus torziójú és a görbületi tenzor eltűnik)
- Berwald-sokaságok (∇ zérus torziójú)
- (egzakt) Wagner-sokaságok [40], ahol a torzió

$$T = \frac{1}{2} \left(1 \otimes d\alpha - d\alpha \otimes 1 \right)$$

valamely $\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}$ sima függvénnyel [41].

A torziótól függetlenül egy ilyen lineáris konnexió mindig Riemann-metrizálható [2] és így a holonómiacsoportja $O(n)$ részcsoportjának tekinthető, ahol $n = \dim M$. Követezésképp a lezártja nem lehet tranzitív az érintőtér egységömbjén, amennyiben nem Riemann-féle általánosított Berwald-sokaság adott. Megfordítva, ha M egy olyan összefüggő Riemann-sokaság egy ∇ metrikus konnexióval, amelynek holonómiacsoportja nem tranzitív az egységömbön, akkor megadva egy L_p nem euklideszi Minkowski funkcionált a sokaság egy p pontjában, a ∇ által indukált párhuzamos eltolásokkal kiterjeszthetjük ezt a funkcionált az egész sokaságra. Egy ilyen L_p funkcionál konstrukciója világos a fenti tételek alapján és így a 2.7.1 tétel következő általánosításához jutunk.

2.7.2. Tétel (Vincze, N. [28]). *Legyen M egy összefüggő Riemann-sokaság. Ha egy metrikus (de nem feltétlenül torziómentes) ∇ lineáris konnexió holonómiacsoportjának lezártja nem tranzitív az érintőterek egységömbjein, akkor ∇ (szigorú értelemben) Berwald-metrizálható általánosított kúpszeletek segítségével.*

3 Geometriai tomográfia

A geometriai tomográfia a matematika egy, a mai napig aktívan kutatott területe. Célja, hogy információt szerezzünk olyan geometria alakzatokról, amelyeknek csak metszeteit, vetületeit, vagy esetleg ezeket együttesen ismerjük. Maga a tomográfia szó a görög *tomos* és *graphein* szavak összetételéből származik, amelyek jelentése szelet és írni.

A számítógépes tomográfia, vagy ahogy az angol rövidítése alapján legtöbbször ismerik CT (Computed Tomography), az orvostudományban gyakran alkalmazott radiológiai eljárás. Ennek során a vizsgált személyről különböző irányokban röntgenfelvételeket készítenek, amelyek segítségével rekonstruálják a térbeli képet. Ez matematikailag nem jelent mást, mint egy sűrűségfüggvény visszaállítását az alapján, hogy ismerjük az értelmezési tartomány különböző irányokkal párhuzamos metszetei feletti integrálokat. Tudvalévő azonban, hogy függetlenül attól milyen (véges) sok irányban állnak rendelkezésünkre ezek a metszetek a megoldás általában nem egyértelmű, ezért a visszaállított kép mindig egy közelítés eredménye. Ugyanakkor, ha feltesszük, hogy a vizsgált objektum kellően homogén, akkor a keresett sűrűségfüggvény egy alkalmas halmaz karakterisztikus függvényével helyettesíthető. Ekkor a megfelelő integrálértékek nem fejeznek ki mást, mint az említett halmaz metszeteinek mértékeit. Így jutunk el a geometriai tomográfiához, mint a számítógépes tomográfia speciális esetéhez. Itt már megszabadulva a sűrűség kiszámíthatatlanságától elérhető, hogy bizonyos feltételek mellett egyértelmű megoldásokat kapjunk.

A geometriai tomográfia központi kérdése, hogy milyen feltételek mel-

lett garantálható, hogy a geometriai alakzatokat bizonyos irányban vett metszeteik és/vagy vetületeik egyértelműen meghatározzák. A téma kiváló áttekintését nyújtja Richard Gardner *Geometric Tomography* című könyve [12], amely számos erre vonatkozó eredményt tartalmaz. Jelen fejezetben a geometriai tomográfiában meghatározó szerepű röntgenfüggvények vizsgálatával foglalkozunk, a szereplő alakzatok konvexitásának feltételezése nélkül. Először fényt derítünk arra, hogy a milyen konvergencia-tulajdonságoknak tesznek eleget. Ezután pedig megvizsgáljuk, hogyan lehet a különböző irányokban vett röntgenfüggvények által hordozott információt egyetlen függvénybe sűríteni.

Emlékeztetünk, hogy tetszőleges $m \in \{1, \dots, N\}$ esetén λ_m az m -dimenziós Lebesgue-mértéket. Azt mondjuk, hogy az \mathbb{R}^m téren értelmezett f_1, f_2 λ_m -mérhető függvények majdnem mindenütt megegyeznek, ha az $f_1 - f_2$ függvény egy λ_m szerint nullmértékű halmaztól eltekintve minden pontban zérus. Ezt $f_1 \simeq f_2$ módon jelöljük. Hasonlóan tetszőleges $E_1, E_2 \in \mathbb{R}^m$ λ_m -mérhető halmazok esetén $E_1 \simeq E_2$ jelentse azt, hogy az E_1 és E_2 halmazok szimmetrikus differenciája, $E_1 \Delta E_2$ a λ_m mérték szerint nullmértékű. Szükségünk van továbbá a halmazok távolságának mérésére.

3.0.3. Definíció. Ha $K, L \in \mathbb{R}^N$ nemüres, kompakt halmazok, akkor a

$$d_H(K, L) := \max \left\{ \max_{x \in K} d(x, L), \max_{y \in L} d(y, K) \right\}$$

valós számot a K és L halmazok **Hausdorff-távolságának** nevezzük. Továbbá azt mondjuk, hogy a K_n ($n \in \mathbb{N}$) kompakt halmazokból álló sorozat a K kompakt halmazhoz **konvergál Hausdorff-értelemben**, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n > n_0$ esetén $d_H(K_n, K) < \varepsilon$. Jel: $K_n \xrightarrow{H} K$.

Megmutatható, hogy az \mathbb{R}^N -beli nemüres, kompakt halmazok a Hausdorff-távolsággal teljes metrikus teret alkotnak, amelyet \mathcal{K}^N módon jelö-

lünk. Ennek bizonyítása és a \mathcal{K}^N -tér alapvető tulajdonságainak vizsgálata megtalálható [22] 14. fejezetében illetve [36] 1.8 fejezetében. A fenti definíció nem túl szemléletes, ezért tekintsük a következőt:

3.0.4. Definíció. *Legyen $A \in \mathbb{R}^N$ nemüres halmaz és $\varepsilon > 0$. Ekkor az*

$$A_\varepsilon = A + \overline{B_0(\varepsilon)} = \bigcup_{a \in A} \overline{B_a(\varepsilon)}$$

halmazt az A külső ε -párhuzamos halmazának nevezzük, ahol $\overline{B_p(\varepsilon)}$ a $p \in \mathbb{R}^N$ pont körüli ε sugarú zárt gömböt jelöli.

Látható, hogy ha A zárt, akkor A_ε nem más, mint azon pontok halmaza \mathbb{R}^N -ben, amelyek A -tól mért távolsága legfeljebb ε [36, 48. oldal]. Így kompakt halmazok Hausdorff-távolságára a következő alternatív definíció adható:

$$d_H(K, L) := \min \{ \varepsilon > 0 \mid K \subset L_\varepsilon, L \subset K_\varepsilon \}$$

Egy $K \subset \mathbb{R}^N$ nemüres, kompakt, összefüggő halmazt testnek nevezünk, amennyiben $\text{cl int}(K) = K$, azaz a K halmaz belsejének a lezártja megegyezik a K halmazzal. A síkban, azaz ha $N = 2$, a testeket síkidomoknak nevezzük. Nem nehéz belátni, hogy egy nemüres, kompakt, konvex halmaz pontosan akkor test, ha belseje nemüres. Jelölje \mathcal{K}_0^N a kompakt, konvex testek terét ellátva a Hausdorff-távolsággal.

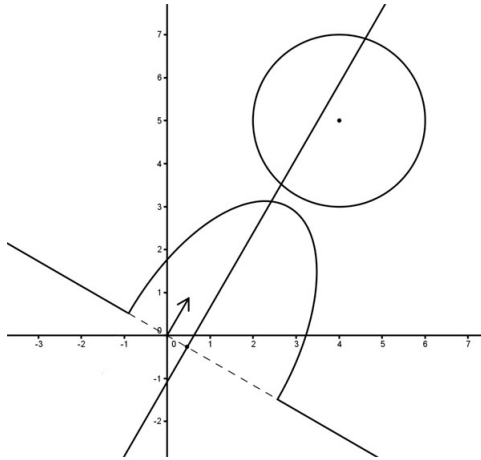
3.1. Röntgenfüggvények

Ebben az alfejezetben megismerkedünk a geometriai tomográfiában meghatározó szerepű röntgenfüggvények fogalmával, majd áttekintjük az ezekre vonatkozó legfontosabb eredményeket.

3.1.1. Definíció. Legyen $E \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) egy korlátos, mérhető halmaz továbbá \mathcal{H} egy $N - 1$ dimenziós altér \mathbb{R}^N -ben, amelynek egy ortonormált bázisa $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N-1})$. Ekkor az E halmaznak a \mathcal{H} altérrel párhuzamos **röntgenfüggvényének** nevezzük az

$$X_{\mathcal{H}}E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \lambda_1((t\underline{w} + \mathcal{H}) \cap E)$$

leképezést, ahol $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N-1}, \underline{w})$ ugyanolyan irányítású ortonormált bázisa \mathbb{R}^N -nek, mint az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_N)$ kanonikus bázis. (3.1 ábra)



3.1. ábra. Az $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 \leq 4$ egyenletű körlap $(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))$ irányú röntgenfüggvénye

Az $\underline{e}_1^\perp, \dots, \underline{e}_N^\perp$ alterekkel párhuzamos röntgenfüggvényeket koordináta-röntgenfüggvényeknek nevezzük és a következő módon jelöljük:

$$X_i K = X_{\underline{e}_i^\perp} K, \quad (i = 1, \dots, N).$$

Ha $N = 2$, akkor bármely $N - 1$ -dimenziós altér ortonormált bázisa egyetlen \underline{v} egységvektorból áll, így ebben az esetben \underline{v} -irányú röntgenfüggvényről beszélhetünk.

Tetszőleges korlátos, mérhető E halmaz esetén Fubini tétele biztosítja, hogy $X_v E$ a λ_{k-1} mértékre nézve majdnem mindenütt jól definiált mérhető, sőt integrálható függvény v^\perp -n. Ha azonban E egy Borel-halmaz, akkor ennél több is igaz.

3.1.1. Állítás. *Minden $B \subset \mathbb{R}^k$ korlátos Borel-halmaz és \mathcal{H} $N - 1$ -dimenziós altér esetén $X_{\mathcal{H}} B$ jól definiált \mathbb{R} minden pontjában.*

Bizonyítás: Legyen $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N-1})$ a \mathcal{H} altér egy ortonormált bázisa, továbbá $\underline{w} \in \mathbb{R}^N$ ugyanolyan egységvektor, mint amilyen a röntgenfüggvények definíciójában szerepel és tekintsük az $r := 1 + \sup \{ \|p\| \mid p \in B \}$ valós számot. Ekkor $B_{\underline{0}}(r)$, a $\underline{0}$ körüli r -sugarú nyílt gömb tartalmazza B -t. Jelölje \mathcal{B}_r \mathbb{R}^N Borel-algebrájának leszűkítését a $B_{\underline{0}}(r)$ halmazra, azaz azt a halmazcsaládot, amelynek minden tagja egy Borel-halmaz és $B_{\underline{0}}(r)$ metszeteként áll elő. Világos, hogy \mathcal{B}_r nem más, mint a $B_{\underline{0}}(r)$ -beli nyílt halmazok által generált σ -algebra. Legyen ezután \mathcal{C} azon $B_{\underline{0}}(r)$ -beli halmazok családja, amelynek minden C tagjára tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén a $C \cap (t\underline{w} + \mathcal{H})$ halmaz λ_1 -mérhető. Mivel a $B_{\underline{0}}(r) \cap (t\underline{w} + \mathcal{H})$ halmaz mindig λ_1 -mérhető és $B_{\underline{0}}(r)$ korlátos, így minden $C \in \mathcal{C}$ halmaz esetén $\lambda_1(C \cap (t\underline{w} + \mathcal{H}))$ véges. Következésképp tetszőleges $C \in \mathcal{C}$ halmaz esetén $X_{\mathcal{H}} C$ jól definiált az egész \mathbb{R} -en. Könnyű átgondolni, hogy \mathcal{C} egy σ -algebra (ez visszavezethető a λ_1 mérték megfelelő tulajdonságaira). Másrészt minden $B_{\underline{0}}(r)$ -beli nyílt halmaz eleme \mathcal{C} -nek, hiszen egy nyílt halmaz metszete egy egyenessel az egyenes egy nyílt halmazát adja, amely λ_1 -mérhető. A fentiek alapján ez nem jelent mást, mint hogy $\mathcal{B}_r \subset \mathcal{C}$. Így $B \in \mathcal{B}_r$ miatt $B \in \mathcal{C}$ következik, azaz $X_{\mathcal{H}} B$ jól definiált minden $t \in \mathbb{R}$ pontban. ■

Speciálisan a kompakt halmazok is Borel-halmazok \mathbb{R}^N -ben, így a kompakt halmazok röntgenfüggvényei jól definiáltak. Könnyen igazol-

ható továbbá, hogy bármely $E \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmaz és \mathcal{H} $N - 1$ -dimenziós altér esetén az $X_{\mathcal{H}}B$ röntgenfüggvény nem negatív, kompakt tartójú, korlátos, integrálható függvény.

Nem nehéz példát mutatni olyan különböző korlátos, mérhető halmazokra, amelyek egy vagy esetleg több irányban vett röntgenfüggvényei megegyeznek.

3.1.1. Példa. Tekintsük a

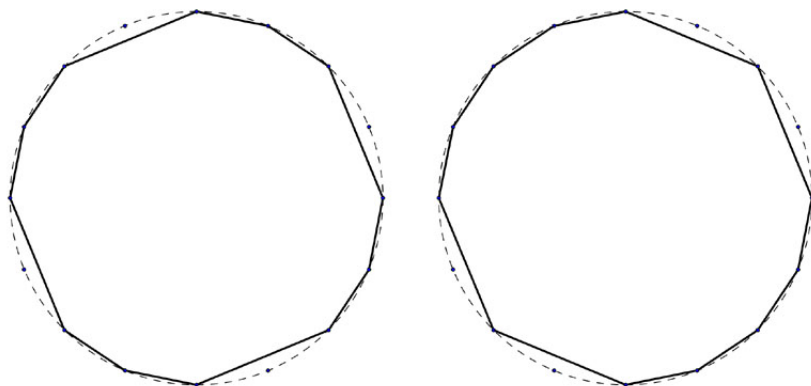
$$K_1 = \text{conv} \left\{ \left(\cos \frac{k\pi}{8}, \sin \frac{k\pi}{8} \right) \mid k = 0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15 \right\}$$

$$K_2 = \text{conv} \left\{ \left(\cos \frac{k\pi}{8}, \sin \frac{k\pi}{8} \right) \mid k = 0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15 \right\}$$

kompakt, konvex halmazokat. (3.1 ábra) Világos, hogy ekkor K_1 és K_2 nem egybevágók és az is könnyen ellenőrizhető, hogy a koordináta-irányokban vett röntgenfüggvényeik megegyeznek.

3.1.2. Definíció. Legyen \mathcal{E} korlátos, mérhető halmazok egy családja és \mathcal{S} altereknek egy rögzített halmaza \mathbb{R}^N -ben. Ekkor azt mondjuk, hogy az \mathcal{S} -beli alterekkel párhuzamos röntgenfüggvényei **meghatározzák** az $E \in \mathcal{E}$ halmazt, ha bármely $E' \in \mathcal{E}$ esetén $X_{\mathcal{H}}E \simeq X_{\mathcal{H}}E'$ ($\mathcal{H} \in \mathcal{S}$) maga után vonja, hogy $E \simeq E'$, azaz E és E' szimmetrikus differenciája nullmértékű.

A geometriai tomográfia központi kérdése, hogy hány irányt és hogyan kell megválasztanunk ahhoz, hogy tetszőleges korlátos mérhető halmaz meghatározható legyen az ezen irányokban vett röntgenfüggvényeiből. Ezen kérdés vizsgálata lényegesen egyszerűbbé válik, ha a vizsgált geometriai objektumok körét a konvex, kompakt halmazokra szűkítjük, éppen ezért a geometriai tomográfiában elért eredmények jelentős része ilyen halmazokra vonatkozik.



3.2. ábra. Nem egybevágó konvex sokszögek megegyező koordináta röntgenfüggvényekkel

3.1.1. Tétel (Gardner, McMullen [15]). \mathbb{R}^2 -ben megadható négy olyan irány, hogy bármely konvex (síkbeli) testet meghatározzák az ezen irányokkal párhuzamos röntgenfüggvényei, de semelyik három irány nem rendelkezik ugyanezzel a tulajdonsággal.

Később Gardner és Gritzman [13] sikeresen bizonyította, hogy pontosan azok az iránynégyesek rendelkeznek a fenti tulajdonsággal, amelyek meredekségeiből növekvő sorrendben képzett kettősviszony értéke olyan racionális szám, amely nem a következők valamelyike: $3/2$, $4/3$, 2 , 3 , 4 .

3.1.2. Tétel. Legyenek $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges lineárisan független irányok és jelölje \mathcal{D} azon \mathbb{R}^2 -beli konvex testek halmazát, amelyek egyértelműen meghatározottak az ezen irányokkal párhuzamos röntgenfüggvényeik által. Ekkor \mathcal{D} második kategóriájú halmaz \mathcal{K}_0^N térben.

Ezzel szemben, ha mellőzzük a konvexitást, számos nehézségbe ütközünk. A legszembetűnőbb példája ennek a következő tétel, amely lehetetlenné teszi a fentiekhez hasonló eredmények elérését az általános korlátos, mérhető halmazok esetén.

3.1.3. Tétel. *Nem adható meg véges sok irány \mathbb{R}^2 -ben úgy, hogy bármely korlátos, mérhető (vagy akár kompakt) testet meghatározzák az ezen irányokkal párhuzamos röntgen-függvényei.*

A nemkonvex geometriai tomográfiában ezért leginkább csak speciális korlátos, mérhető illetve kompakt halmazokkal foglalkoznak. Ilyen jellegű vizsgálatok megtalálhatók [12] 2. fejezetében.

3.2. A röntgenfüggvények konvergenciája

Az előző alfejezetben láthattuk, hogy bizonyos halmazosztályok (pl. síkbeli, konvex, kompakt halmazok) elemei az osztályon belül egyértelműen meghatározottak véges sok röntgenfüggvényük által. Ugyanakkor, ha adottak is számunkra ezen röntgenfüggvények, az még nem világos, hogy hogyan tudjuk rekonstruálni ezen adatokból magát a halmazt. Ez egy sokkal nehezebb probléma, amelyet a síkbeli, konvex, kompakt halmazok esetében R. Gardner és M. Kiderlen oldották meg teljesen 2007-ben [14]. A probléma megoldásához lényegében annak bizonyítására van szükség, hogy a síkbeli, konvex, kompakt halmazokhoz adott irányú röntgenfüggvényüket rendelő leképezés folytonos (megfelelő függvényteret tekintve). Célunk egy olyan rekonstrukciós algoritmus megadása, amely a konvex, kompakt halmazoknál bővebb halmazosztály esetén alkalmazható. Ehhez először megvizsgáljuk, hogy a röntgenfüggvények milyen konvergencia tulajdonságoknak tesznek eleget az alakzatok konvexitásának feltételezése nélkül. Más szavakkal megvizsgáljuk, hogy ha egy halmazsorozat

valamilyen értelemben konvergál egy rögzített E korlátos, mérhető halmazhoz, akkor a röntgenfüggvények is konvergálnak-e valamilyen értelemben az E halmaz röntgenfüggvényéhez. A halmzsorozatok számos különböző értelemben lehetnek konvergensek. Az egyik kézenfekvő értelmezési lehetőség a mértékbeli konvergencia.

3.2.1. Definíció. *Legyen $E \subset \mathbb{R}^N$ korlátos, mérhető halmaz. Azt mondjuk, hogy az $E_n \subset \mathbb{R}^N$ ($n \in \mathbb{N}$) korlátos, mérhető halmazokból álló sorozat E -hez **konvergál mértékben**, ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_N(E \Delta E_n) = 0$$

azaz, ha a szimmetrikus differenciák λ_N mértéke nullához tart.

Kompakt halmazokat tekintve pedig rendelkezésünkre áll egy másik jól ismert konvergencia-fogalom, a Hausdorff-konvergencia. Mielőtt rátérnénk ezeknek a röntgenfüggvényekkel való kapcsolatának vizsgálatára, nézzük meg hogyan viszonyulnak egymáshoz.

Világos, hogy a halmazok mértékbeli konvergenciájából nem következik a Hausdorff-konvergencia. Ehhez elég tekintenünk egy $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmazt és egy olyan K_n halmzsorozatot, amelynek minden tagja a K és egy K -n kívüli rögzített p pont uniójaként áll elő. Ekkor a $K \Delta K_n$ szimmetrikus differencia mindig egyetlen pontból áll, így a mértéke 0. Másrészt a p pont K -tól mért (euklideszi) távolsága pozitív, és definíció szerint a Hausdorff-távolsága nem lehet ennél kisebb. A következő példa azonban megmutatja, hogy a Hausdorff-konvergencia sem garantálja a halmazok mértékbeli konvergenciáját.

3.2.1. Példa (Vincze, N. [29]). Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ a $(0, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ pontok konvex burkaként előálló téglalap. Továbbá tetsző-

leges $n \in \mathbb{N}$, esetén legyen

$$L_n := \bigcup_{i=0}^{\lceil n/2 \rceil - 1} \text{conv} \left\{ \left(\frac{2i}{n}, 0 \right), \left(\frac{2i+1}{n}, 0 \right), \left(\frac{2i}{n}, 1 \right), \left(\frac{2i+1}{n}, 1 \right) \right\},$$

ahol $\lceil n/2 \rceil$ az $n/2$ felső egész részét jelöli. Tekintsük a

$$K_n := \overline{K \setminus L_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

halmazzorozatot (3.2 ábra). Ekkor nyilvánvalóan $K_n \subset K \subset K_\varepsilon$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Továbbá bármely $p \in L_n$ pontra

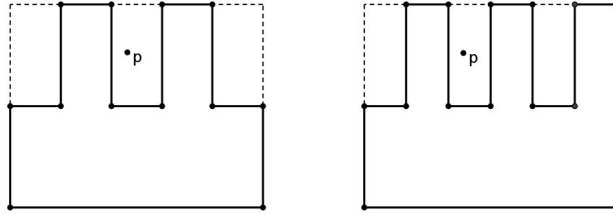
$$d(p, K_n) := \inf \{d(p, q) \mid q \in K_n\} < \frac{1}{n},$$

így ha $1/n < \varepsilon$, akkor $L_n \subset (K_n)_\varepsilon$ és következésképp $K \subset (K_n)_\varepsilon$. Világos, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n > n_0$ esetén $1/n < \varepsilon$ és ekkor $K \subset (K_n)_\varepsilon$ következik. Ez $K_n \subset K_\varepsilon$ alapján épp azt jelenti, hogy $K_n \xrightarrow{H} K$. Másrészt

$$\lambda_2(K \Delta K_n) = \lambda_2(K) - \lambda_2(K_n) = \lambda_2(L_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow \frac{1}{2},$$

ezért K_n nem konvergálhat mértékben K -hoz.

Fubini tétele alapján tudjuk, hogy ha $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^N$ olyan kompakt halmazok, hogy $X_{\mathcal{H}}K_1 \simeq X_{\mathcal{H}}K_2$ (azaz majdnem mindenütt egyenlők) valamely $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^N$ $N-1$ -dimenziós altérre, akkor $\lambda_N(K_1) = \lambda_N(K_2)$. Így a fenti példa egyúttal azt is mutatja, hogy a Hausdorff-konvergenciából még csak majdnem mindenütt sem következik a röntgenfüggvények konvergenciája. Sőt a következő példa alapján megállapítható, hogy a mértékbeli és a Hausdorff-konvergencia együttesen sem eredményezi a röntgenfüggvények majdnem mindenütti konvergenciáját.



3.3. ábra. A K_5 és K_6 halmazok a példában szereplő p ponttal

3.2.2. Példa (Vincze, N. [29]). Legyen K a $(0, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ pontok konvex burkaként előálló téglalap. Továbbá tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, esetén legyen k_n az a legkisebb természetes szám, amelyre

$$\sum_{i=0}^{k_n} i = \frac{k_n(k_n + 1)}{2} \geq n$$

és definiáljuk a d_n számot a következőképp

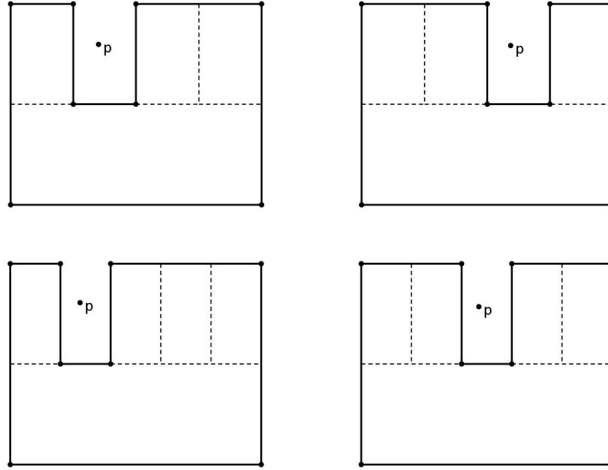
$$d_n := \sum_{i=0}^{k_n-1} i = \frac{(k_n - 1)k_n}{2}.$$

Ezután

$$L_n := \text{conv} \left\{ \left(\frac{n - d_n - 1}{k_n}, 0 \right), \left(\frac{n - d_n}{k_n}, 0 \right), \left(\frac{n - d_n - 1}{k_n}, 1 \right), \left(\frac{n - d_n}{k_n}, 1 \right) \right\}.$$

Végül

$$K_n := \text{cl}(K \setminus L_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$



3.4. ábra. A K_8 , K_9 (fent), illetve a K_{12} és K_{13} halmazok (lent) a példában szereplő p ponttal

Ekkor nyilvánvalóan $K_n \subset K \subset K_\varepsilon$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Továbbá bármely $p \in L_n$ pontra

$$d(p, \partial L_n) < \frac{1}{k_n},$$

így ha $1/k_n < \varepsilon$, akkor $L_n \subset (K_n)_\varepsilon$ és következésképp $K \subset (K_n)_\varepsilon$. Világos, hogy a k_n \mathbb{N} -beli sorozat monoton növekvő, sőt bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $n > n_0$ esetén $1/k_n < \varepsilon$ és ekkor $K \subset (K_n)_\varepsilon$ következik. Ez a fentiek alapján épp azt jelenti, hogy $K_n \xrightarrow{H} K$. Másrészt

$$\lambda_2(K_n) = \lambda_2(K) - \lambda_2(L_n) = \lambda_2(K) - \frac{1}{k_n},$$

amiből $1/k_n \rightarrow 0$ alapján adódik, hogy $\lambda_2(K_n) \rightarrow \lambda_2(K)$.

Most megmutatjuk, hogy a $v = (0, 1)$ irány esetén $X_v K_n(x) \not\rightarrow X_v K(x)$ egy a λ_1 mértékre nézve pozitív mértékű halmazon. Tekintsünk egy tetszőleges $x \in]0, 1[$ irracionális számot. A K_n halmazzsorozat konstrukciójából adódóan bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén ha $X_v K_n(x) = 1$, akkor $X_v K_{n+1}(x) = 2$, továbbá ha $X_v K_n(x) = 2$ akkor létezik $m \in \mathbb{N}$ $n < m \leq n + d_{n+1} - d_n + 1$, hogy $X_v K_m(x) = 2$. Mivel az $X_v K_n(x)$ sorozat értékkészlete az $\{1, 2\}$ halmaz, a sorozat csak úgy lehet konvergens, ha $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$ esetén $X_v K_n(x) = 1$ vagy minden $n > n_0$ esetén $X_v K_n(x) = 2$ teljesül. Ez azonban a fentiek alapján nem lehetséges. Továbbá jól ismert, hogy a $]0, 1[$ intervallum irracionális pontjaiból álló halmaz Lebesgue szerint pozitív mértékű, így megmutattuk, hogy az $X_v K_n(x)$ röntgenfüggvények divergensek egy pozitív mértékű halmazon.

Miután két már jól ismert konvergencia típusról is kiderült, hogy nem garantálják a röntgenfüggvények konvergenciáját, más eszközökhöz kell folyamodnunk. Definiáljuk egy új konvergencia-fogalmat.

3.2.2. Definíció. Legyen $E \subset \mathbb{R}^N$ korlátos, mérhető halmaz. Ekkor azt mondjuk, hogy az $E_n \subset \mathbb{R}^N$ ($n \in \mathbb{N}$) korlátos, mérhető halmazokból álló sorozat **X -regulárisan konvergál** az E halmazhoz, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_N(E_n^1) = \lambda_N(E) \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_N(E_n^2) = \lambda_N(E)$$

teljesül, ahol

$$E_n^1 := \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \cup E \quad E_n^2 := \bigcap_{i=n}^{\infty} E_i \cap E$$

Jel: $E_n \xrightarrow{X} E$.

3.2.1. Tétel. Legyen $E \subset \mathbb{R}^N$ korlátos, mérhető, és legyenek E_n ($n \in \mathbb{N}$) olyan korlátos, mérhető halmazok, amelyekre $E_n \xrightarrow{X} E$. Ekkor tetsző-

leges $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^N$ $N - 1$ -dimenziós altér esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\mathcal{H}} E_n \simeq X_{\mathcal{H}} E$$

azaz az $X_{\mathcal{H}} E_n$ függvénysorozat λ_1 -re nézve majdnem minden pontban konvergens és határfüggvénye $X_{\mathcal{H}} E$.

Bizonyítás: Elsőként megmutatjuk, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\lambda_N(E_n^1)$ véges. Ehhez indirekt módon tegyük fel ennek ellenkezőjét. A reguláris konvergencia miatt létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$ esetén $\lambda_N(E_n^1) - \lambda_N(E) < 1$, ezért csak véges sok $n \in \mathbb{N}$ -re lehet $\lambda_N(E_n^1)$ végtelen. Legyen N^* a legnagyobb ilyen index. Ekkor azonban a mérték szubadditivitása miatt $\lambda_N(E_{N^*}^1) \leq \lambda_N(E_{N^*} \cup E) + \lambda_N(E_{N^*+1}^1)$, ami nyilvánvalóan ellentmondás, hiszen a jobboldalon egy véges összeg áll.

Tehát $\lambda_N(E_n^1)$ valóban véges minden $n \in \mathbb{N}$ -re. Ez Fubini tétele alapján azt eredményezi, hogy az $X_{\mathcal{H}} E_n^1$ röntgen-függvények integrálhatók. A feltétel szerint

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_N(E_n^1) - \lambda_N(E)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (X_{\mathcal{H}} E_n^1(x) - X_{\mathcal{H}} E(x)) dx$$

Az E_n^1 halmazok monoton csökkenő sorozatot alkotnak, így a röntgen-függvények definíciójából adódóan az $X_{\mathcal{H}} E_n^1$ függvénysorozat monoton csökkenő. Másrészt ezek a függvények közös alsó korláttal rendelkeznek, hiszen $E \subset E_n^1$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re, ezért λ_1 -majdnem mindenütt konvergálnak valamely határfüggvényhez. Sőt ezek a függvények integrálhatók és a monoton csökkenés miatt egy közös integrálható függvény, $X_{\mathcal{H}} E_1^1$ alatt maradnak, így alkalmazható Lebesgue tétele, amely szerint az integrálás és a határátmenet sorrendje felcserélhető. Tehát azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\mathcal{H}} E_n^1(x) - X_{\mathcal{H}} E(x) \right) dx = 0$$

amiből

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\mathcal{H}} E_n^1 \simeq X_{\mathcal{H}} E$$

adódik. Ismét a reguláris konvergenciából adódóan

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_N(E) - \lambda_k(E_n^2)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (X_{\mathcal{H}} E(x) - X_{\mathcal{H}} E_n^2(x)) dx$$

Itt az E_n^2 halmazok sorozata monoton növekvő, így az $X_{\mathcal{H}} E_n^2$ függvény-sorozat is monoton növekvő. Másrészt ezek a függvények közös felső korláttal rendelkeznek, hiszen $E_n^2 \subset E$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re, ezért majdnem mindenütt konvergálnak valamely határfüggvényhez. Sőt integrálhatók és egy közös integrálható függvény, $X_{\mathcal{H}} E$ alatt maradnak, így ismét Lebesgue tétele alapján az integrálás és a határátmenet sorrendje felcserélhető. Azt kapjuk tehát, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (X_{\mathcal{H}} E_n^2(x) - X_{\mathcal{H}} E(x)) dx = 0$$

amiből

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\mathcal{H}} E_n^2 \simeq X_{\mathcal{H}} E$$

Végül vegyük észre, hogy $E_n^2 \subset E_n \subset E_n^1$ miatt

$$X_{\mathcal{H}} E_n^2 \leq X_{\mathcal{H}} E_n \leq X_{\mathcal{H}} E_n^1$$

ezért a rendőr elv alkalmazásával

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\mathcal{H}} E_n \simeq X_{\mathcal{H}} E$$

adódik. ■

Tehát a fenti tétel szerint az X -reguláris konvergencia elegendő feltétel a korlátos, mérhető halmazok röntgenfüggvényeinek majdnem mindenütti konvergenciájához. Felvetődik a kérdés, hogy a reguláris konvergencia hogyan hozható kapcsolatba a jól ismert mértékbeli, illetve Hausdorff-konvergenciával. Az világos, hogy ez utóbbiak együttes fennállásából sem következtethetünk a reguláris konvergenciára, különben a röntgenfüggvények (majdnem mindenütt) egybeesnének, ami a korábbi példák szerint nem lehetséges. Ugyanakkor

$$E\Delta E_n = (E \cup E_n) \setminus (E \cap E_n) \subset E_n^1 \setminus E_n^2$$

alapján látható, hogy a reguláris konvergencia maga után vonja a mértékbeli konvergenciát. A most következő példa azonban megmutatja, hogy a Hausdorff-konvergenciát nem.

3.2.3. Példa (Vincze, N. [29]). Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ a $(0, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 0)$ pontok konvex burkaként előálló téglalap. Továbbá tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, esetén legyen

$$K_n = K \cup \text{conv} \left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{n}, 0 \right), \left(\frac{1}{n}, 1 \right), (0, 1) \right\}$$

Mivel $K \subset K_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re és a K_n halmazok monoton csökkenő sorozatot alkotnak, így $K_n^1 = K_n$ és $K_n^2 = K$. Világos, hogy

$$\lambda_2(K_n) = \lambda_2(K) + 1/n \rightarrow \lambda_2(K)$$

Ezek alapján tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(K_n^1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(K_n) = \lambda_2(K)$$

valamint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(K_n^2) = \lambda_2(K)$$

Ugyanakkor $(0, 1) \in K_n$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért $\varepsilon = 1/2$ választással $K_n \not\subset K_\varepsilon$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re, következésképp $K_n \not\xrightarrow{H} K$.

Tehát megállapítható, hogy a reguláris és a Hausdorff-konvergencia közül egyik sem erősebb kitétel a másikonál abban az értelemben, hogy egyik fennállása esetén sem következik a másik. A következőkben megmutatjuk, hogy mindezek ellenére Hausdorff-konvergencia bizonyos további feltételekkel hasznos a röntgenfüggvények konvergenciájának vizsgálata során.

3.2.1. Lemma. *Ha K_ε a $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmaz külső párhuzamos halmaza, akkor K_ε λ_N -mérhető és*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lambda_N(K_\varepsilon) = \lambda_N(K)$$

Bizonyítás: Könnyen látható, hogy K kompaktsága miatt a K_ε halmaz zárt, következésképp mérhető [36, 48. oldal]. Legyen $r_n \rightarrow 0^+$ és tekintsük az

$$x_n := \sup\{r_m \mid m \geq n\}$$

sorozatot. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

A külső párhuzamos halmazokra

$$K \subset K_{r_n} \subset K_{x_n} \tag{3.1}$$

amiből adódik, hogy

$$\lambda_N(K) \leq \lambda_N(K_{r_n}) \leq \lambda_N(K_{x_n})$$

Másrészt

$$K_{x_1} \supset K_{x_2} \supset \dots \supset K_{x_n} \supset \dots \quad \text{és} \quad K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{x_n} \tag{3.2}$$

ezért a mérték folytonossága alapján $\lambda_N(K_{x_n}) \rightarrow \lambda_N(K)$, következtetés-képp

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_N(K_{r_n}) = \lambda_N(K)$$

■

3.2.2. Tétel. *Legyen $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt, és legyenek K_n ($n \in \mathbb{N}$) olyan kompakt halmazok, amelyekre $K_n \xrightarrow{H} K$ teljesül. Ekkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_N \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} K_i \cup K \right) = \lambda_N(K)$$

Bizonyítás: Világos, hogy $K_n \xrightarrow{H} K$ esetén $K_n \cup K \xrightarrow{H} K$ is teljesül, hiszen ha $K_n \subset K_\varepsilon$, akkor $(K_n \cup K) \subset K_\varepsilon$, továbbá $K \subset K_n \cup K \subset (K_n \cup K)_\varepsilon$. Legyen $\delta > 0$ tetszőleges. Ekkor $\lambda_N(K_\varepsilon) \rightarrow \lambda_N(K)$, ezért $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\lambda_N(K_\varepsilon) - \lambda_N(K) < \delta$. Továbbá $K_n \cup K \xrightarrow{H} K$ miatt $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, amelyre $\forall n > n_0$ esetén $K \subset K_n \cup K \subset K_\varepsilon$ teljesül. Így nyilvánvalóan

$$K \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} K_i \cup K \subset K_\varepsilon$$

is fennáll, amiből $\lambda_k(K_\varepsilon) - \lambda_k(K) < \delta$ szerint

$$\lambda_N \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} K_i \cup K \right) - \lambda_N(K) < \delta$$

következik. Mivel $\delta > 0$ tetszőleges volt, ezért adódik az állítás. ■

3.2.1. Következmény. *Ha $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt, és $K_n \supset K$ ($n \in \mathbb{N}$) olyan kompakt halmazok, amelyekre $K_n \xrightarrow{H} K$ teljesül, akkor tetszőleges $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^N$ $N - 1$ -dimenziós altér esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_{\mathcal{H}} K_n \simeq X_{\mathcal{H}} K$$

4 Kúpszeletek alkalmazása a geometriai tomográfiában

4.1. Röntgenfüggvények és kúpszeletek

Ebben a szakaszban utána járunk annak a kérdésnek, hogy leírható-e egyetlen függvény segítségével mindaz az információ egy kompakt halmazról, amelyhez a különböző irányokban vett röntgenfüggvényei által jutunk. Kiderül, hogy \mathbb{R}^N -ben minden K kompakt test esetén egy megfelelően választott általánosított kúpszeletfüggvény második parciális deriváltjai magukban hordozzák mindazt az információt, amelyet a K testnek a koordináta-röntgenfüggvényei által hordoznak. Ráadásul ez az általánosított kúpszeletfüggvény szép viselkedést mutat a Hausdorff-konvergenciával. Általánosított kúpszeletfüggvényen ebben fejezetben a következőt értjük:

4.1.1. Definíció. *A $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmazhoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvényen az*

$$f_K: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{x} \mapsto f_K(\underline{x}) := \int_K d_1(\underline{x}, \underline{y}) \, d\underline{y}$$

leképezést értjük.

Világos, hogy így egy általánosított kúpszeletfüggvényt definiálunk a bevezető fejezetben szereplő 1.0.1 definíciónak értelmében a Lebesgue-mértékkel, a d_1 távolságfüggvénnyel és a $g(t) = t$ magfüggvénnyel.

4.1.1. Tétel. Az f_K általánosított kúpszeletfüggvény konvex és eleget tesz a

$$\liminf_{\|\underline{x}\|_2 \rightarrow \infty} \frac{f_K(\underline{x})}{\|\underline{x}\|_2} > 0$$

növekedési feltételnek és így az általánosított kúpszeletek kompakt részhalmazai az \mathbb{R}^N térnek.

Bizonyítás: A konvexitás nyilvánvaló következménye a távolságfüggvény konvexitásának az első változóban. Másfelől

$$f_K(\underline{x}) \geq \int_K d_2(\underline{x}, \underline{y}) \, d\underline{y},$$

és így

$$\frac{f_K(\underline{x})}{\|\underline{x}\|_2} \geq \int_K 1 + \frac{d_2(\underline{x}, \underline{y}) - \|\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \, d\underline{y}.$$

A háromszög egyenlőtlenség alapján

$$\|\underline{x}\|_2 \leq \|\underline{y}\|_2 + d_2(\underline{x}, \underline{y}),$$

ami mutatja, hogy

$$\frac{f_K(\underline{x})}{\|\underline{x}\|_2} \geq \int_K 1 - \frac{\|\underline{y}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \, d\underline{y}$$

Továbbá

$$\int_K 1 - \frac{\|\underline{y}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} \, d\underline{y} \geq \lambda_N(K) \left(1 - \frac{1}{\|\underline{x}\|_2} \sup_{\underline{y} \in K} \|\underline{y}\|_2 \right)$$

ezért a növekedési feltétel $\lambda_N(K)$ és $\sup_{\underline{y} \in K} \|\underline{y}\|_2$ végeességéből következik.

Végül ha egy $f_K \leq c$ szinthalmaz nem lenne korlátos, akkor egy olyan \underline{x}_n sorozatot tekintve, amelyre $\|\underline{x}_n\|_2 \rightarrow \infty$ a következő adódna:

$$0 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_K(\underline{x}_n)}{\|\underline{x}_n\|_2} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{\|\underline{x}_n\|_2} = 0$$

ami ellentmond a növekedési feltételnek. ■

A továbbiakban alkalmazzuk az alábbi jelöléseket:

$$c <_i K := \{\underline{x} \in K \mid c < x_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$K <_i c := \{\underline{x} \in K \mid x_i < c\} \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$c =_i K := \{\underline{x} \in K \mid c = x_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

4.1.1. Lemma. *Az f_K általánosított kúpszeletfüggvénynek léteznek az első parciális deriváltjai és a következőképpen számíthatók ki:*

$$D_i f_K(\underline{x}) = \lambda_N(K <_i x_i) - \lambda_N(x_i <_i K) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Bizonyítás: Legyen h tetszőleges pozitív valós szám. Ekkor

$$\begin{aligned} & \frac{f_K(\underline{x} + h\underline{e}_i) - f_K(\underline{x})}{h} = \\ & = \frac{1}{h} \left(\int_K \sum_{j=1}^n |x_j - y_j + h\delta_j^i| - |x_j - y_j| d\underline{y} \right) = \\ & = \int_K \frac{|x_i + h - y_i| - |x_i - y_i|}{h} d\underline{y} = \int_{K <_i x_i} \frac{|x_i + h - y_i| - |x_i - y_i|}{h} d\underline{y} + \\ & + \int_{x_i <_i K <_i x_i + h} \frac{|x_i + h - y_i| - |x_i - y_i|}{h} d\underline{y} + \int_{x_i + h <_i K} \frac{|x_i + h - y_i| - |x_i - y_i|}{h} d\underline{y} = \end{aligned}$$

$$= \lambda_N(K <_i x_i) - \lambda_N(x_i + h <_i K) + \int_{x_i <_i K <_i x_i + h} \frac{|x_i + h - y_i| - |x_i - y_i|}{h} d\underline{y}$$

Az integrandus korlátos, hiszen

$$\left| \frac{|x_i + h - y_i| - |x_i - y_i|}{h} \right| \leq 1,$$

továbbá

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \lambda_N(x_i < K < x_i + h) = 0.$$

Következésképp

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f_K(\underline{x} + h\underline{e}_i) - f_K(\underline{x})}{h} = \lambda_N(K <_i x_i) - \lambda_N(x_i <_i K).$$

Hasonlóan, ha h egy tetszőleges negatív valós szám, akkor

$$\begin{aligned} \frac{f_K(\underline{x} + h\underline{e}_i) - f_K(\underline{x})}{h} &= \lambda_N(K <_i x_i + h) - \lambda_N(x_i <_i K) + \\ &+ \int_{x_i + h <_i K <_i x_i} \frac{|x_i + h - y_i| - |x_i - y_i|}{h} d\underline{y}. \end{aligned}$$

A $h \rightarrow 0^-$ határátmenetet képezve pedig

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f_K(\underline{x} + h\underline{e}_i) - f_K(\underline{x})}{h} = \lambda_N(K <_i x_i) - \lambda_N(x_i <_i K).$$

■

4.1.1. Következmény. *Egy pont pontosan, akkor globális minimumhelye az f_K általánosított kúpszeletfüggvénynek, ha az erre a pontra illeszkedő és a koordinátairányokra merőleges hipersíkok mindegyike két egyenlő λ_N -mértékű részre osztja a K halmazt.*

A globális minimumhely fenti jellemzését felhasználva egy sztochasztikus algoritmus adható a globális minimumhely megkeresésére, amelynek részletei megtalálhatók a [5] dolgozatban.

4.1.2. Tétel (Vincze, N. [29]). *Tetszőleges $K, K^* \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmazok esetén pontosan akkor teljesül $f_K = f_{K^*}$, ha minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén $X_i K = X_i K^*$ majdnem mindenütt.*

Bizonyítás: A Cavalieri-elv [8] szerint

$$\lambda_N(K <_i x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} X_i K(t) dt \quad \lambda_N(x_i <_i K) = \int_{x_i}^{\infty} X_i K(t) dt$$

Így a 4.1.1 lemma és Lebesgue differenciálás tétele alapján

$$D_i D_i f_K(\underline{x}) = 2X_i K(x_i)$$

majdnem mindenütt. Hasonló számolással a K^* halmaz esetén azt kapjuk, hogy $f_K = f_{K^*}$ esetén

$$X_i K(x_i) = X_i K^*(x_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

egy nullmértékű halmaztól eltekintve. Másfelől

$$\begin{aligned} f_K(\underline{x}) &= \int_K \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| d\underline{y} = \sum_{i=1}^n \int_K |x_i - y_i| d\underline{y} = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |x_i - y_i| \lambda_{N-1}(y_i =_i K) dy_i = \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |x_i - y_i| X_i K(y_i) dy_i \end{aligned}$$

Ez alapján látható, hogy ha $X_i K = X_i K^*$ majdnem mindenütt teljesül minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén, akkor $f_K = f_{K^*}$ pontonként. ■

Súlyozott általánosított kúpszeletek esetén az állítás a következőképp módosul: tetszőleges $K, K^* \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmazok esetén pontosan akkor teljesül $F_K = F_{K^*}$, ha minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén

$$X_i K(x_i) = \frac{\mu_n(K)}{\mu_n(K^*)} X_i K^*(x_i) \quad (i = 1, \dots, n)$$

majdnem mindenütt.

Látható tehát, hogy a koordináta-röntgenfüggvények helyettesíthetők az általánosított kúpszeletfüggvénnyel, amely a teljes \mathbb{R}^N téren értelmezett konvex (és ezért folytonos) függvény, szemben a koordináta-röntgenfüggvényekkel, amelyeknek akár végtelen sok szakadási helye lehet. Ehhez tekintsük a következő példát:

4.1.1. Példa. Legyen (a_n) egy olyan pozitív valós számokból álló sorozat, amelyből képzett $\sum a_n$ sor konvergens. Mivel a racionális számok halmaza megszámlálható, ezért létezik egy $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ szürjektív leképezés. Tetszőleges $x \in [0, 1]$ esetén értelmezhetjük az $N_x = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq \varphi(n) \leq x\}$ halmazt. Tekintsük ezután az

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n \in N_x} a_n$$

függvényt. Ekkor f egy olyan szigorúan monoton növekvő függvény, amelynek $[0, 1]$ minden racionális pontjában szakadási helye van, de folytonos az irracionális pontokban. A síknak az f függvény grafikonja és az első koordináta tengely közé eső pontjai egy olyan kompakt halmazt határoznak meg, amelynek egyik koordináta-röntgenfüggvénye éppen f .

Most pedig megmutatjuk, hogy a mértékbeli és a Hausdorff-konvergencia együttesen elegendő feltételnek bizonyul az általánosított kúpszeletfüggvények konvergenciájához.

4.1.3. Tétel. Legyen $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmaz, és tegyük fel, hogy $K_n \subset \mathbb{R}^N$ ($n \in \mathbb{N}$) olyanok, hogy $K_n \xrightarrow{H} K$ és $\lambda_N(K_n) \rightarrow \lambda_N(K)$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{K_n}(\underline{x}) = f_K(\underline{x}).$$

Bizonyítás: Legyen $r_n := d_H(K_n, K)$; ekkor

$$\begin{aligned} f_K(\underline{x}) &\leq f_{(K_n)_{r_n}}(\underline{x}) = f_n(\underline{x}) + \\ &+ \int_{(K_n)_{r_n} \setminus K_n} d_1(\underline{x}, \underline{y}) \, d\underline{y}. \end{aligned}$$

Mivel

$$(K_n)_{r_n} \subset (K_{r_n})_{r_n} \subset K_{2r_n}$$

következik, hogy

$$f_K(\underline{x}) \leq f_n(\underline{x}) + M(\underline{x}, 2r_n)(\lambda_N(K_{2r_n}) - \lambda_N(K_n)),$$

ahol

$$M(\underline{x}, \varepsilon) := \max\{d_1(\underline{x}, \underline{y}) \mid \underline{y} \in K_\varepsilon\},$$

amely az $\underline{y}_\varepsilon \in K_\varepsilon$ pontban lép fel. A külső párhuzamos halmaz definíciója szerint létezik olyan $\underline{y} \in K$, hogy

$$d_2(\underline{y}, \underline{y}_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

és így

$$\begin{aligned} d_1(\underline{x}, \underline{y}_\varepsilon) &\leq d_1(\underline{x}, \underline{y}) + d_1(\underline{y}, \underline{y}_\varepsilon) \leq \\ &\leq M(\underline{x}, 0) + \sqrt{2} \varepsilon. \end{aligned}$$

Következésképp

$$f_K(\underline{x}) \leq f_{K_n}(\underline{x}) + (M(\underline{x}, 0) + 2\sqrt{2} r_n)(\lambda_N(K_{2r_n}) - \lambda_N(K_n)).$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$f_{K_n}(\underline{x}) \leq f_K(\underline{x}) + (M(\underline{x}, 0) + \sqrt{2} r_n)(\lambda_N(K_{r_n}) - \lambda_N(K_n)).$$

Ezután az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet véve a fenti egyenlőtlenségek alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{K_n}(\underline{x}) = f_K(\underline{x}),$$

amit bizonyítani akartunk. ■

4.1.2. Következmény. Legyen $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmaz, legyenek $K_n \subset \mathbb{R}^N$ ($n \in \mathbb{N}$) olyan kompakt halmazok, hogy $K_n \xrightarrow{H} K$ és $\lambda_N(K_n) \rightarrow \lambda_N(K)$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{K_n}(\underline{x}) = F_K(\underline{x}).$$

Végül ráadásként az is megmutatható, hogy a súlyozatlan általánosított kúpszeletfüggvények első parciális deriváltjainak konvergenciájához is elegendő a mértékbeli és Hausdorff-konvergencia együttes fennállása. Hasonló állítás nem mondható ki a második parciális deriváltakra, hiszen ekkor a koordinátairányokban vett röntgenfüggvények egybeesése következne, ami ellentmondana egy korábbi példának.

4.1.4. Tétel. $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmaz, legyenek $K_n \subset \mathbb{R}^N$ ($n \in \mathbb{N}$) olyan kompakt halmazok, hogy $K_n \xrightarrow{H} K$ és $\lambda_N(K_n) \rightarrow \lambda_N(K)$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_i f_n(\underline{x}) = D_i f_K(\underline{x}), \quad (i = 1, \dots, N).$$

Bizonyítás: Tetszőleges $K, L \subset \mathbb{R}^N$ halmazok esetén jelölje $K\Delta L$ a K és L halmazok szimmetrikus differenciáját. Mivel tetszőleges $i \in \{1, \dots, N\}$ és $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ esetén

$$(K <_i x_i) \cup (L <_i x_i) = (K \cup L) <_i x_i$$

és

$$(K <_i x_i) \cap (L <_i x_i) = (K \cap L) <_i x_i,$$

ezért

$$\lambda_N(K_n <_i x_i \Delta K <_i x_i) = \lambda_N((K_n \Delta K) <_i x_i) \leq \lambda_N(K_n \Delta K) \rightarrow 0,$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_N(K_n <_i x_i) = \lambda_N(K <_i x_i).$$

Hasonlóan kapható, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_N(x_i <_i K_n) = \lambda_N(x_i <_i K).$$

Ezután a 4.1.1 lemmából közvetlenül adódik az állítás. ■

4.1.1. A kúpszeletfüggvény leképezés folytonossága

Ebben a fejezetben \mathbb{R}^N tér helyett a jóval speciálisabb \mathbb{R}^2 sík kompakt részhalmazait vesszük vizsgált alá. Jelölje továbbra is \mathcal{K}^2 a síkbeli nem-üres, kompakt halmazok metrikus terét a Hausdorff-távolsággal. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy az értelmezési tartományt \mathcal{K}^2 egy alkalmas kompakt részhalmazára megszorítva a kompakt halmazokhoz a hozzá tartozó általánosított kúpszeletet rendelő leképezés folytonos. Legyenek pr_1 és pr_2 a koordináta-tengelyekre való merőleges vetítések és tekintsünk egy B téglalapot, amelynek oldali párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel. A $\text{pr}_1 \times \text{pr}_2$ leképezésnek a B -hez tartozó színhalmaza

$$\mathcal{L}_B = \{L \in \mathcal{K}^2 \mid \text{pr}_1(L) \times \text{pr}_2(L) = B\}.$$

A B -hez tartozó alsó színhalmazon pedig a következőt értjük:

$$\mathcal{M}_B = \bigcup_{B^* \subset B} \mathcal{L}_{B^*}$$

ahol az uniót mindazon B^* téglalapokra vesszük, amelyek oldalai párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel és benne vannak a B téglalapban.

4.1.1. Állítás. *Az \mathcal{L}_B and \mathcal{M}_B halmazok kompaktak a Hausdorff-távolságra nézve.*

Bizonyítás: Mivel \mathbb{R}^2 teljes, így \mathcal{K}^2 is teljes. Hausdorff tétele szerint egy teljes metrikus tér bármely zárt és teljesen korlátos részhalmaza kompakt. Az hogy az \mathcal{L}_B és \mathcal{M}_B halmazok teljesen korlátosak következik Blaschke szelekciós tételéből kompakt halmazokra [36] [1.8.4 Tétel]. A zártságot a

$$L \mapsto \text{pr}_1(L) \times \text{pr}_2(L),$$

leképezés folytonossága biztosítja. A merőleges vetítések pedig nyilvánvalóan folytonos leképezések a Hausdorff-távolságra nézve, hiszen bármely zárt gömb merőleges vetülete egy alacsonyabb dimenziós zárt gömb. Tehát külső párhuzamos halmaz vetülete megegyezik a vetület (ugyanolyan sugarú) külső párhuzamos halmazával. ■

4.1.2. Állítás. *Az \mathcal{L}_B és \mathcal{M}_B halmazok konvexek abban az értelemben, hogy ha $L_1 \in \mathcal{L}_B/\mathcal{M}_B$ és $L_2 \in \mathcal{L}_B/\mathcal{M}_B$, akkor $tL_1+(1-t)L_2 \in \mathcal{L}_B/\mathcal{M}_B$ bármely $0 \leq t \leq 1$ esetén.*

Bizonyítás: Mivel a merőleges vetítések megőrzik a konvex kombinációkat, így az állítás közvetlenül adódik az $\mathcal{L}_B/\mathcal{M}_B$ halmazok definíciója alapján. ■

4.1.5. Tétel. *A $\Phi: L \in \mathcal{L}_B \rightarrow f_L$ leképezés konkáv abban az értelemben, hogy bármely $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_B$ és $0 \leq t \leq 1$ valamint $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén*

$$f_{tL_1+(1-t)L_2}(x, y) \geq tf_{L_1}(x, y) + (1-t)f_{L_2}(x, y).$$

Bizonyítás: Legyen $(\alpha, \beta) \in B$ rögzített. Ekkor

$$(\alpha =_1 (tL_1 + (1-t)L_2)) \supset (t\alpha =_1 tL_1) + ((1-t)\alpha =_1 (1-t)L_2),$$

$$(\beta =_2 (tL_1 + (1-t)L_2)) \supset (t\beta =_2 tL_1) + ((1-t)\beta =_2 (1-t)L_2).$$

Mivel az $\alpha =_1 L_i$ ($i = 1, 2$) halmazok egyike sem üres, így a

$$c_1 := \inf\{y \mid (t\alpha, y) \in tL_1\} = t \inf\{y \mid (\alpha, y) \in L_1\},$$

$$d_1 := \sup\{y \mid (t\alpha, y) \in tL_1\} = t \sup\{y \mid (\alpha, y) \in L_1\}$$

és

$$c_2 := \inf\{y \mid ((1-t)\alpha, y) \in (1-t)L_2\} = (1-t) \inf\{y \mid (\alpha, y) \in L_2\},$$

$$d_2 := \sup\{y \mid ((1-t)\alpha, y) \in (1-t)L_2\} = (1-t) \sup\{y \mid (\alpha, y) \in L_2\}$$

számok végesek. Tekintsük a

$$P := (t\alpha, c_1) + (1-t)(\alpha =_1 L_2) \subset \text{conv} \{(\alpha, c_1 + c_2), (\alpha, c_1 + d_2)\}$$

és

$$Q := ((1-t)\alpha, d_2) + t(\alpha =_1 L_1) \subset \text{conv} \{(\alpha, d_2 + c_1), (\alpha, d_2 + d_1)\}$$

halmazokat. Ekkor

$$P \cup Q \subset (\alpha =_1 tL_1 + (1-t)L_2)$$

és ebből adódóan

$$Y_{tL_1+(1-t)L_2}(\alpha) \geq \lambda(P \cup Q) = \lambda_1(P) + \lambda_1(Q).$$

Következésképp

$$Y_{tL_1+(1-t)L_2}(\alpha) \geq tY_{L_1}(\alpha) + (1-t)Y_{L_2}(\alpha) \quad (4.1)$$

és hasonlóan

$$X_{tL_1+(1-t)L_2}(\beta) \geq tX_{L_1}(\beta) + (1-t)X_{L_2}(\beta). \quad (4.2)$$

Ezután

$$f_{tL_1+(1-t)L_2}(x, y) \geq tf_{L_1}(x, y) + (1-t)f_{L_2}(x, y) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (4.3)$$

teljesül bármely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén. ■

A fent leírtak alapján integrálással adódik, hogy

$$\lambda_2(tL_1 + (1-t)L_2) \geq t\lambda_2(L_1) + (1-t)\lambda_2(L_2).$$

A fenti tétel nem igaz abban az esetben, ha megengedjük, hogy a halmazok különböző határoló téglalapokkal rendelkezzenek, mint ahogy ezt a következő példa mutatja:

$$L_1 := [-3, 3] \times [-3, 3], \quad L_2 = [-1, 1] \times [-1, 1],$$

$$\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2 = [-2, 2] \times [-2, 2]$$

és

$$\lambda_2\left(\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}L_2\right) = 16, \quad \frac{1}{2}\lambda_2(L_1) + \frac{1}{2}\lambda_2(L_2) = \frac{1}{2}36 + \frac{1}{2}4 = 20.$$

A közös határoló téglalap miatt az $\alpha =_1 L_i$ ($i = 1, 2$) halmazok egyike sem üres, hiszen $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_B$.

Mivel az általánosított kúpszeletfüggvényeket a fókuszhalmoz feletti integrálként értelmezzük, ezért a Φ leképezés természetes módon megőrzi a halmazok tartalmazásával kapott rendezést. Ebből a pedig azonnal adódik Φ felülről félig folytonossága pontonként, azaz bármely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_{L_n}(x, y) \leq f_L(x, y),$$

ahol az L_n sorozat az $L \in \mathcal{K}^2$ halmazhoz konvergál a Hausdorff-távolságra nézve.

A továbbiakban jelölje \mathcal{K}_{hv}^2 a síkbeli, nemüres, kompakt, **hv-konvex** halmazok metrikus terét a Hausdorff-távolsággal. Legyen $B = [a, b] \times [c, d]$ és \mathcal{L}_B azon síkbeli nemüres kompakt L halmazok családja, amelyekre

$$\text{pr}_1(L) \times \text{pr}_2(L) = B. \quad (4.4)$$

Tetszőleges $L \in \mathbb{R}^2$ nemüres, összefüggő, kompakt, hv-konvex halmaz esetén értelmezhetjük a felső illetve alsó határoló függvényeket:

$$h_L(s) := \sup \{t \mid (s, t) \in L\} \quad \text{és} \quad g_L(s) := \inf \{t \mid (s, t) \in L\} \quad (4.5)$$

Könnyű megmutatni, hogy ekkor

$$L = \{(s, t) \mid a \leq s \leq b \text{ and } g_L(s) \leq t \leq h_L(s)\}.$$

Másfelől

$$X_1L(s) = h_L(s) - g_L(s) \quad (s \in \mathbb{R})$$

és tetszőleges $s_n \rightarrow s$ sorozat esetén

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_1L(s_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} h_L(s_n) - \liminf_{n \rightarrow \infty} g_L(s_n) \leq h_L(s) - g_L(s) = X_1K(s),$$

ami azt jelenti, hogy az X_1L koordináta röntgenfüggvény felülről félig folytonos. Hasonló gondolatmenet alapján kapható X_2L felülről félig folytonossága is.

4.1.2. Lemma. *Az alábbi*

$$\mathcal{L}_B^{hv} = \mathcal{L}_B \cap \mathcal{K}_{hv}^2 \quad (4.6)$$

halmaz mindazon nemüres, összefüggő, kompakt, hv-konvex halmazok összessége, amelyek határoló téglalapja B . Továbbá az

$$\mathcal{M}_B^{hv} = \mathcal{M}_B \cap \mathcal{K}_{hv}^2 \quad (4.7)$$

mindazon nemüres, összefüggő, kompakt, hv-konvex halmazok összessége, amelyek határoló téglalapját tartalmazza B .

Bizonyítás: Legyen L egy nemüres, kompakt, hv-konvex halmaz, amely eleget tesz a (4.4) feltételnek és indirekt módon tegyük fel, hogy L nem összefüggő. Ekkor létezik olyan $f: L \rightarrow \{0, 1\}$ folytonos függvény, amely nem konstans. Mivel L hv-konvex, így az f függvény konstans minden L -ben haladó függőleges és vízszintes szakasz mentén. Következésképp megadható olyan $\tilde{f}: \text{pr}_1(L) \rightarrow \{0, 1\}$ folytonos függvény, amellyel a

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & \{0, 1\} \\ \text{pr}_1 \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ & \text{pr}_1(L) & \end{array}$$

diagram kommutatív. Ez azonban ellentmond $\text{pr}_1(L) = [a, b]$ összefüggőségének. ■

4.1.3. Lemma. *Bármely L nemüres, összefüggő, kompakt, hv-konvex halmaz és $\varepsilon > 0$ esetén az L^ε külső párhuzamos halmaz szintén összefüggő és hv-konvex.*

Bizonyítás: Először tegyük fel indirekt módon, hogy L^ε nem hv-konvex. Az általánosság sérelme nélkül feltehető, hogy ekkor van egy olyan $Q_1 = (0, 0)$ és egy $Q_2 = (0, m)$ pont az L^ε halmazban, amelyeket összekötő szakasz tartalmaz egy a halmazhoz nem tartozó $Q = (0, y)$ pontot, ahol $0 < y < m$. A külső párhuzamos halmaz definíciója szerint léteznek $P_1 = (x_1, y_1)$ és $P_2 = (x_2, y_2)$ pont az L halmazban, amelyek rendre elemei a Q_1 illetve Q_2 pontok körüli ε sugarú zárt körlapoknak. Továbbá az L halmaz diszjunkt a Q pont körüli ε sugarú zárt D körlaphoz. Ekkor nyilvánvalóan $y_1 < y < y_2$. Másfelől $x_1 \neq x_2$, különben a függőleges irányú konvexitás miatt L metszené a D körlapot. Tegyük fel, hogy például

$x_1 < x_2$ teljesül. Jelölje h_L az L halmaz felső határoló függvényét, míg g_L az alsó határoló függvényt (4.5). A definíció alapján világos, hogy $h_L(x_2) \geq y_2 > y$, ugyanakkor $y_1 \leq h_L(x_1) < y$, hiszen ellenkező esetben a $P_1 = (x_1, y_1)$ és $(x_1, h_L(x_1))$ pontokat összekötő függőleges egyenes metszené a D körlapot. Tekintsük ezután a következő s valós számot:

$$0 \leq s := \sup\{t \geq 0 \mid h_L(x) < y \text{ bármely } x \in [x_1, x_1+t] \text{ esetén}\} \leq x_2 - x_1.$$

Ekkor kiválaszthatunk egy olyan $s_n^+ \rightarrow s$ sorozatot, amelynek elemeire $h_L(s_n^+) \geq y$ teljesül. Mivel a h_L felső határoló függvény felülről félig folytonos, ezért

$$y \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} h_L(s_n^+) \leq h_L(s).$$

következik. Ugyanakkor kiválaszthatunk egy másik $s_n^- \rightarrow s$ sorozatot is, amelynek elemeire $g_L(s_n^-) \leq h_L(s_n^-) < y$. Itt az alsó határoló függvény alulról félig folytonossága miatt

$$y \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} g_L(s_n^-) \geq g_L(s).$$

adódik. Így azonban az $(s, g_L(s))$ és $(s, h_L(s))$ pontokat összekötő szakasznak metszenie kell a D körlemezt, ami ellentmondás. Azt kapjuk tehát, hogy az L^ε külső párhuzamos halmaz is hv-konvex.

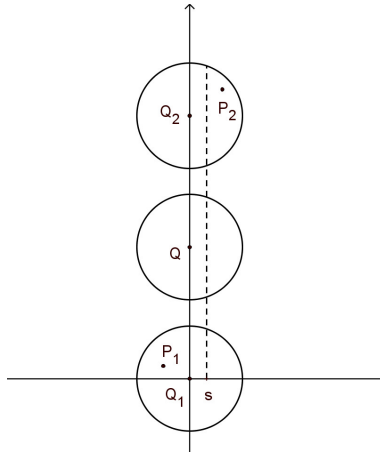
Mivel L kompakt, összefüggő és hv-konvex, ezért a 4.1.2 lemma szerint

$$\text{pr}_1(L) \times \text{pr}_2(L) = B,$$

ahol $B = [a, b] \times [c, d]$ az L határoló téglalapja. Következésképp

$$\text{pr}_1(L^\varepsilon) \times \text{pr}_2(L^\varepsilon) = [a - \varepsilon, b + \varepsilon] \times [c - \varepsilon, d + \varepsilon]$$

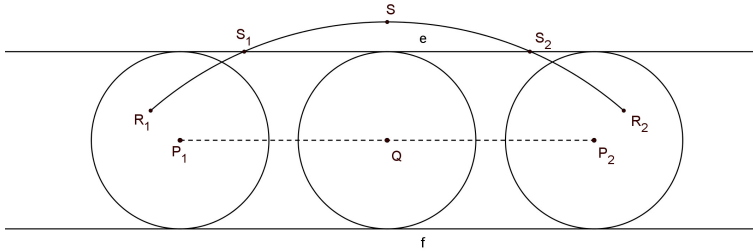
és így a 4.1.2 lemma alapján adódik az összefüggőség. ■



4.1. ábra.

4.1.4. Lemma. *Legyen (L_n) kompakt, összefüggő, hv-konvex halmazoknak egy olyan sorozata, amelyre $L_n \rightarrow L$ a Hausdorff-távolságra nézve. Ekkor az L halmaz szintén hv-konvex és összefüggő.*

Bizonyítás: A vízszintes irányú konvexitást bizonyítjuk (a függőleges irányú konvexitás hasonlóan igazolható). Indirekt módon tegyük fel, hogy léteznek olyan $P_1 = (x_1, y) \in L$, és $P_2 = (x_2, y) \in L$ pontok, amelyek összekötő szakasz tartalmaz egy olyan $Q = (x, y)$ pontot, amely nem eleme az L halmaznak. Mivel a Q pont euklideszi távolsága az L halmaztól nem nulla, ezért megadható olyan $\varepsilon > 0$ pozitív valós szám, amelyre az $L^{2\varepsilon}$ külső párhuzamos halmaz diszjunkt a Q pont körüli ε sugarú zárt D körlaphoz. Az $L_n \rightarrow L$ konvergencia miatt van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $L_n \subset L^\varepsilon$ és $L \subset L_n^\varepsilon$ teljesül. Ekkor a P_1 illetve P_2 pontok körüli $\varepsilon > 0$ sugarú zárt D_1 illetve D_2 körlapok rendre tartalmazzanak egy-egy R_1 illetve R_2 pontot az L_n halmazból. Mivel $L_n^\varepsilon \subset (L^\varepsilon)^\varepsilon \subset L^{2\varepsilon}$, így L_n^ε



4.2. ábra.

diszjunkt a D körlaphoz.

Tekintsük ezután a D_1 és D_2 körlemezek közös külső érintő egyeneseit: e és f . A 4.1.3 lemma szerint az L_n^ε külső párhuzamos halmaz szintén hv-konvex és belseje összefüggő, amely tartalmazza az L_n halmazt. Következésképp $\text{int } L_n^\varepsilon$ ívszerűen is összefüggő, és így létezik egy az R_1 és R_2 pontokat összekötő $\gamma \subset \text{int } L_n^\varepsilon$ folytonos ív. Ugyanakkor L_n^ε a γ ívvel együtt diszjunkt a D körlaphoz. Könnyen látható, hogy ez csak úgy lehetséges, ha γ metszi az e és f pontok valamelyikét egy S_1 és egy S_2 pontban. Ekkor azonban az S_1 és S_2 pontokat összekötő vízszintes szakasz metszi a D körlapot, ami L_n^ε hv-konvexitása miatt ellentmondáshoz vezet.

Az L összefüggősége egyszerűen adódik a 4.1.2 lemmából, hiszen

$$B = \text{pr}_1(L) \times \text{pr}_2(L)$$

nem más, mint a $B_n = \text{pr}_1(L_n) \times \text{pr}_2(L_n)$ téglalapok sorozatának határértéke a Hausdorff-távolságra nézve. ■

4.1.3. Következmény. Az \mathcal{L}_B^{hv} és \mathcal{M}_B^{hv} metrikus terek ellátva a Hausdorff-távolsággal kompaktak.

4.1.5. Lemma. *Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és tekintsük egy \mathcal{P} véges egyszerű töröttvonalat a síkban. Ekkor*

$$\lambda_2(\mathcal{P}^\varepsilon) \leq 2l\varepsilon + \varepsilon^2\pi, \quad (4.8)$$

ahol l jelöli a \mathcal{P} töröttvonal hosszát. Továbbá ha \mathcal{P} zárt, akkor

$$\lambda_2(\mathcal{P}^\varepsilon) \leq 2l\varepsilon. \quad (4.9)$$

Bizonyítás: Alkalmazzunk $m \in \mathbb{N}$ szerinti teljes indukciót, ahol m a töröttvonalat alkotó egyenes szakaszok száma. Ha \mathcal{P} egyetlen egyenes szakaszból áll, akkor nyilvánvaló, hogy a (4.8) egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Tegyük fel, hogy a (4.8) egyenlőtlenség minden legfeljebb m egyenes szakaszt tartalmazó töröttvonal esetén teljesül. Tekintsünk ezután egy tetszőleges $m + 1$ egyenes szakaszt tartalmazó \mathcal{P}_{m+1} töröttvonalat, amelynek osztópontjai és végpontjai rendre $P_1, \dots, P_{m+1}, P_{m+2}$. Tekintettel arra, hogy

$$\mathcal{P}_{m+1} = \mathcal{P}_m \cup P_{m+1}P_{m+2}$$

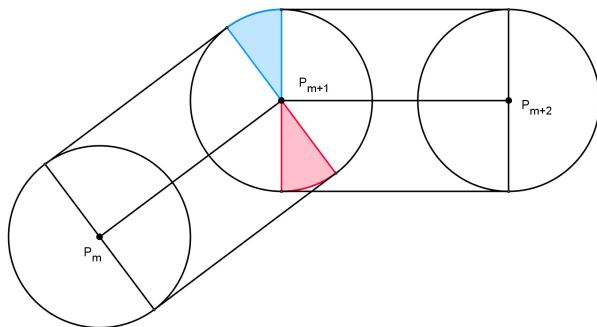
látható, hogy a $\mathcal{P}_{m+1}^\varepsilon$ külső párhuzamos halmaz nem más, mint $\mathcal{P}_m^\varepsilon$ valamint a P_{m+1} és P_{m+2} pontokat összekötő egyenes szakasz külső párhuzamos halmazának uniója.

Ekkor a P_{m+1} körül írt ε sugarú zárt körlap legfeljebb annyival járul hozzá a $\mathcal{P}_{m+1}^\varepsilon$ külső párhuzamos halmaz területéhez, mint amekkora területű részt a P_m és P_{m+1} illetve a P_{m+1} és P_{m+2} pontokat összekötő szakaszok külső párhuzamos halmazainak uniója kétszeresen lefed belőle (4.1.1 ábra). Következésképp

$$\lambda_2(\mathcal{P}_{m+1}^\varepsilon) \leq \lambda_2(\mathcal{P}_m^\varepsilon) + \lambda_2((P_{m+1}P_{m+2})^\varepsilon) - \varepsilon^2\pi,$$

ahol a P_{m+1} és P_{m+2} pontokat összekötő egyenes szakasz külső párhuzamos halmazának mértéke

$$\lambda_2((P_{m+1}P_{m+2})^\varepsilon) = 2\varepsilon \cdot d_2(P_{m+1}, P_{m+2}) + \varepsilon^2\pi.$$



4.3. ábra.

Így

$$\lambda_2(\mathcal{P}_{m+1}^\varepsilon) \leq \lambda_2(\mathcal{P}_m^\varepsilon) + 2\varepsilon \cdot d_2(P_{m+1}, P_{m+2})$$

és az indukciós feltevés a kívánt egyenlőtlenséget adja

$$\lambda_2(\mathcal{P}_{m+1}^\varepsilon) \leq 2l\varepsilon + \varepsilon^2\pi.$$

Az (4.9) egyenlőtlenség a (4.8) egyenlőtlenségből adódik úgy, hogy kivonjuk a P_{m+1} és $P_{m+2} = P_1$ köré írt körlapok által létrejött kétszeresen lefedett rész területét. ■

4.1.6. Tétel (Vincze, N. [31]). *Legyen $L \subset \mathbb{R}^2$ nemüres, összefüggő, kompakt hv-konvex halmaz, amelyet a $B = [a, b] \times [c, d]$ téglalap határol. Ekkor*

$$\lambda_2(L^\varepsilon) - \lambda_2(L) \leq 2k\varepsilon,$$

ahol $k = 2(b - a) + 2(d - c)$ a B téglalap kerülete.

Bizonyítás: Legyen $r_n \rightarrow 0^+$ tetszőleges sorozat és $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ olyan felosztások, amelyekre

diam $B_{ij}^n < r_n$ teljesül. Tekintsük továbbá a

$$B_{ij}^n := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \quad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

téglalapokat és legyen

$$L_n := \bigcup_{B_{ij}^n \cap L \neq \emptyset} B_{ij}^n$$

az L halmaz minimális lefedése a B_{ij}^n téglalapokkal. Ekkor $H(L_n, L) \leq r_n$, és így az L_n sorozat tart L -hez a Hausdorff-távolságra nézve. Másfelől $\lambda_2(L_n) \rightarrow \lambda_2(L)$ hiszen $L \subset L_n \subset L^{r_n}$. Így bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lambda_2(L^\varepsilon) - \lambda_2(L) = \lambda_2(L^\varepsilon) - \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(L_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_2(L^\varepsilon) - \lambda_2(L_n))$$

amiből

$$\lambda_2(L^\varepsilon) - \lambda_2(L) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_2(L_n^\varepsilon) - \lambda_2(L_n))$$

felhasználva, hogy $L \subset L_n$. Megmutatjuk, hogy L_n hv-konvex.

A horizontális konvexitást bizonyítjuk (a vertikális konvexitás hasonlóan igazolható). Indirekt módon tegyük fel, hogy léteznek olyan $P_1(x_1, y)$, $P_2(x_2, y) \in L_n$ pontok, amelyekre a P_1P_2 szakasz tartalmaz egy $Q = (x, y) \notin L_n$ pontot. Ez azt jelenti, hogy P_1 és P_2 két diszjunkt $B_{i_1j_1}^n$ és $B_{i_2j_2}^n$ téglalapba esik. Az L_n minimális definíciója alapján ezek a téglalapok tartalmaznak egy R_1 és egy R_2 pontot az L halmazból, de a Q pontot tartalmazó $B_{i_3j_3}^n$ téglalap diszjunkt L -hez. Mivel L kompakt, ezért van olyan $0 < \delta$, amelyre $L^\delta \cap B_{i_3j_3}^n = \emptyset$. A 4.1.3 lemma szerint L^δ összefüggő, akárcsak a belseje. Következésképp $(\text{int } L)^\delta$ ívszerűen is összefüggő, tehát az R_1, R_2 pontok összeköthetők egy folytonos görbével, amely L^δ belsejében halad. Ezután az érvelés hasonlóan folytatható, mint a 4.1.4 lemma bizonyításában (a körlemezeket téglalapokkal helyettesítve).

Mivel

$$\text{pr}_1(L_n) \times \text{pr}_2(L_n) = B,$$

ezért a 4.1.3 lemma szerint L_n összefüggő. Ugyanakkor L_n határa egy véges egyszerű zárt töröttvonal \mathcal{P}_n , amelynek hossza \mathcal{P}_n éppen a B téglalap kerületével egyenlő. Mivel $L_n^\varepsilon \setminus L_n \subset \mathcal{P}_n^\varepsilon$ így a 4.1.5 lemma szerint

$$\lambda_2(L_n^\varepsilon) - \lambda_2(L_n) = \lambda_2(L_n^\varepsilon \setminus L_n) \leq \lambda_2(\mathcal{P}_n^\varepsilon) \leq 2k\varepsilon$$

és következésképp

$$\lambda_2(L^\varepsilon) - \lambda_2(L) \leq 2k\varepsilon.$$

■

4.1.7. Tétel (Vincze, N. [31]). *Jelölje $C(B)$ a $B = [a, b] \times [c, d]$ téglalapon értelmezett kétváltozós folytonos függvények terét ellátva a*

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{(x_1, x_2) \in B} |f_L(x_1, x_2)|$$

normával. Ekkor a $\Phi: \mathcal{M}_B^{hv} \rightarrow C(B), L \mapsto f_L$ leképezés folytonos, ahol f_L az L halmazhoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvénynek a B téglalpra való leszűkítését jelöli.

Bizonyítás: Legyen (L_n) \mathcal{M}_B^{hv} -beli halmazok olyan sorozata, amelyre $L_n \rightarrow L$ a Hausdorff-távolságra nézve. Jelölje r_n az L_n és L halmazok Hausdorff-távolságát. Ekkor az általánosított kúpszeletfüggvények definíciója alapján látható, hogy tetszőleges $\underline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$f_{L_n}(\underline{x}) \leq f_{L^{r_n}}(\underline{x}) = f_L(\underline{x}) + \int_{L^{r_n} \setminus L} |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| dy_1 dy_2, \quad (4.10)$$

ahol L^{r_n} az L halmaz r_n sugarú külső párhuzamos halmaza. Világos, hogy $L^{r_n} \subset B^{r_n}$ és $L \subset B$, továbbá bármely $\underline{x} \in B^{r_n} \setminus B$ és $\underline{y} \in B$ pontok esetén $d_1(\underline{x}, \underline{y}) \leq 2r_n$. Az is nyilvánvaló, hogy B bármely két

pontjának d_1 -távolsága legfeljebb a $k = 2(b - a) + 2(d - c)$ kerület fele, így tetszőleges $\underline{x} \in B$ és $\underline{y} \in L^{r_n} \setminus L$ pontok esetén

$$d_1(\underline{x}, \underline{y}) \leq \frac{k}{2} + 2r_n \quad (4.11)$$

Következésképp

$$\begin{aligned} f_{L_n}(\underline{x}) &\leq f_L(\underline{x}) + \left(\frac{k}{2} + 2r_n\right) (\lambda_2(L^{r_n}) - \lambda_2(L)) \leq \\ &f_L(\underline{x}) + \left(\frac{k}{2} + 2r_n\right) 2kr_n \end{aligned}$$

adódik, felhasználva a 4.1.6 tétel eredményét. Másfelől

$$f_L(\underline{x}) \leq f_{L_n^{r_n}}(\underline{x}) = f_{L_n}(\underline{x}) + \int_{L_n^{r_n} \setminus L_n} |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| dy_1 dy_2.$$

Itt az előzőhöz hasonló becslést alkalmazva ismét a 4.1.6 tétel alapján

$$\begin{aligned} f_L(\underline{x}) &\leq f_{L_n}(\underline{x}) + \left(\frac{k}{2} + 2r_n\right) (\lambda_2(L_n^{r_n}) - \lambda_2(L_n)) \leq \\ &f_{L_n}(\underline{x}) + \left(\frac{k}{2} + 2r_n\right) 2kr_n. \end{aligned}$$

Mindezek alapján a

$$|f_L(\underline{x}) - f_{L_n}(\underline{x})| \leq \left(\frac{k}{2} + 2r_n\right) 2kr_n, \quad (4.12)$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ahol a jobb oldalon álló kifejezés az L és L_n halmazok Hausdorff-távolságának egy másodfokú polinomja, amely független az $\underline{x} \in B$ pont választásától. Tehát a $f_{L_n} \rightarrow f_L$ konvergencia egyenletes a B téglalapon, amiből következik a tétel állítása. ■

4.1.4. Következmény. Jelölje $L^1(B)$ a $B = [a, b] \times [c, d]$ téglalapon értelmezett kétváltozós integrálható függvények terét ellátva az

$$\|f\|_1 := \int_B |f_L(x_1, x_2)| dx_1 dx_2$$

normával. Ekkor a $\Phi: \mathcal{M}_B^{hv} \rightarrow L^1(B), K \mapsto f_K$ leképezés folytonos, ahol f_K a K halmazhoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvénynek a B téglalpra való leszűkítését jelöli.

A fenti tétel bizonyítása alapján látható, hogy a Φ leképezés akkor is folytonos, ha az \mathcal{M}_B^{hv} tér helyett az \mathcal{L}_B^{hv} téren értelmezzük.

4.1.5. Következmény. Ha (L_n) egy olyan nemüres, kompakt, összefüggő, hv-konvex halmazokból álló sorozat, amely konvergál valamely $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ halmazhoz a Hausdorff-távolságra nézve, akkor tetszőleges $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ pont esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{L_n}(x_1, x_2) = f_L(x_1, x_2). \quad (4.13)$$

Bizonyítás: A 4.1.4 lemma szerint L szintén összefüggő és hv-konvex és így a 4.1.7 tételt egy megfelelő méretű B téglalpra alkalmazva kapjuk az állítást. ■

4.1.8. Tétel (Vincze, N. [31]). Legyen $K \in \mathcal{M}_B^{hv}$ és (L_n) nemüres, kompakt, összefüggő, hv-konvex halmazoknak egy olyan sorozata, amelynek minden tagja részhalmaza a $B = [a, b] \times [c, d]$ téglalaprak. Ha $f_{L_n} \rightarrow f_K$ a $C(B)$ vagy az $L^1(B)$ függvényterek valamelyikében, akkor (L_n) bármely konvergens részsorozata konvergál egy olyan $K' \in \mathcal{M}_B^{hv}$ halmazhoz, amelynek koordináta-röntgenfüggvényei majdnem mindenütt megegyeznek K koordináta-röntgenfüggvényeivel. Továbbá, ha a K halmaz egyértelműen meghatározott a koordináta-röntgenfüggvényei által, akkor K' legfeljebb nullmértékű halmaztól eltekintve megegyezik K -val.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $f_{L_n} \rightarrow f_K$ a $C(B)$ függvényterben és tekintsük az L_{n_k} részsorozatot, amelynek határértéke K' . Ekkor

$$\|f_{K'} - f_K\|_{\infty, B} \leq \|f_{K'} - f_{L_{n_k}}\|_{\infty, B} + \|f_{L_{n_k}} - f_K\|_{\infty, B},$$

ahol a 4.1.7 tétel szerint az első tag nulla, akárcsak a második tag a $f_{L_n} \rightarrow f_K$ konvergencia miatt. Ezután a $k \rightarrow \infty$ határátmenetet véve

$$\|f_{K'} - f_K\|_{\text{sup}} = 0,$$

ami azt jelenti, hogy tetszőleges $(x_1, x_2) \in B$ pont esetén $f_K(x_1, x_2) = f_{K'}(x_1, x_2)$, hiszen az általánosított kúpszeletfüggvények folytonosak. Következésképp K' és K koordináta-röntgenfüggvényei majdnem mindenütt megegyeznek. ■

A fenti állítások a következőképpen is megfogalmazhatók: Bármely $K \in \mathcal{M}_B^{hv}$ halmaz és $\varepsilon > 0$ esetén léteznek $\delta_{\text{sup}} > 0$ és $\delta_1 > 0$ valós számok azzal a tulajdonsággal, hogy ha egy $L \in \mathcal{M}_B^{hv}$ halmaz esetén

$$\|f_L - f_K\|_{\text{sup}} < \delta_{\infty} \quad \text{vagy} \quad \|f_L - f_K\|_1 < \delta_1$$

teljesül, akkor $H(L, K') < \varepsilon$ valamely $K' \in \mathcal{M}_B^{hv}$ halmazzal, amelynek koordináta-röntgenfüggvényei majdnem mindenütt megegyeznek K koordináta-röntgenfüggvényeivel.

Ez azt fejezi ki, hogy ha az f_L és f_K általánosított kúpszeletfüggvények elég közel vannak egymáshoz egy megfelelő függvényterben, akkor az L halmaz is közel van $\Phi^{-1}(f_K)$ halmaznak legalább az egyik eleméhez a Hausdorff-távolságra nézve.

4.2. Rekonstrukciós algoritmus

Bemenet: $n \in \mathbb{N}$, és X_1K, X_2K , azaz a koordináta-röntgenfüggvényei egy K hv-konvex síkidomnak.

Az eljárás a következő lépésekből áll:

1. lépés: Meghatározzuk K határoló téglalapját a koordináta-röntgenfüggvények segítségével:

$$B = [a, b] \times [c, d] = \text{supp } X_1K \times \text{supp } X_2K,$$

ami a $K = \text{cl}(\text{int } K)$ tulajdonság és az összefüggőség miatt lehetséges.

2. lépés: Legyenek $t_i \in [a, b]$ és $s_i \in [c, d]$, ($i = 0, \dots, n$) egymástól egyenlő távolságokra lévő osztópontok úgy, hogy $t_0 = a$, $t_n = b$ és $s_0 = c$, $s_n = d$. Tehát

$$t_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad s_i = c + i \frac{d-c}{n} \quad (i = 0, \dots, n)$$

3. lépés: Tekintsük ezután a $B_{ij}^n = [t_{j-1}, t_j] \times [s_{i-1}, s_i]$ ($i, j = 1, \dots, n$) téglalapokat.

4. lépés: Jelöljük ki ezután az ellenőrzési pontok G_K^n halmazát a következőképp:

$$G_K^n := \left\{ \underline{y}_{ij} \in B_K \mid i, j = 1, \dots, n \right\},$$

ahol

$$\underline{y}_{ij} = \left(\frac{t_{j-1} + t_j}{2}, \frac{s_{i-1} + s_i}{2} \right) = \left(a + \frac{2j-1}{2n}(b-a), c + \frac{2i-1}{2n}(d-c) \right).$$

5. lépés: Számítsuk ki az f_K általánosított kúpszeletfüggvény értékeit az ellenőrzési pontokban a koordináta-röntgenfüggvények segítségével (lásd 4.1.2 tétel).

$$f_K(x_1, x_2) = \int_a^b |x_1 - t| X_1K(t) dt + \int_c^d |x_2 - t| X_2K(t) dt$$

6. lépés: Legyen \mathcal{H} azon $L \in \mathcal{L}_B^{hv}$ halmazok gyűjteménye, amelyek előállnak valamely B_{ij}^n téglalapok uniójaként, továbbá eleget tesznek a

$$f_L(\underline{y}_{ij}) \geq f_K(\underline{y}_{ij}) \quad (\underline{y}_{ij} \in G_K^n)$$

feltételnek.

7. lépés: Válasszuk azt az L_n halmazt \mathcal{H} -ből, amelyre az

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{f_{L_n}(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij})}{n^2}$$

kifejezés értéke minimális.

Az utolsó lépés lehetséges alternatívája:

7.* lépés: Válasszuk azt az L_n halmazt \mathcal{H} -ből, amelyre a

$$\max_{\underline{y}_{ij} \in G_K^n} \left(f_{L_n}(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij}) \right).$$

kifejezés értéke minimális.

Kimenet: L_n

4.2.1. A konvergencia bizonyítása

A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy az algoritmus kimeneteként kapott L_n halmazokból képzett (L_n) halmzsorozat bármely konvergens részsozrata egy olyan K^* kompakt, összefüggő, hv-konvex halmazhoz konvergál, amelyre $f_K = f_{K^*}$ és így K^* koordináta-röntgenfüggvényei majdnem mindenütt megegyeznek K koordináta-röntgenfüggvényeivel a 4.1.2 tétel értelmében. Abban az esetben, ha K egyértelműen meghatározott a röntgenfüggvényei által, akkor $L_n \rightarrow K^*$ a Hausdorff-távolságra nézve és $\lambda_2(K \triangle K^*) = 0$. A bizonyítást egy egyszerű, de fontos észrevétellel kezdjük.

4.2.1. Lemma. *Bármely $K \subset B = [a, b] \times [c, d]$ kompakt halmaz és $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$ pontok esetén*

$$|f_K(\underline{x}) - f_K(\underline{y})| \leq \|\underline{x} - \underline{y}\|_1 \mu_2(K)$$

Bizonyítás: Válasszuk a $\underline{z} = (z_1, z_2) \in B$ pontot úgy, hogy $z_1 = x_1$ valamint $z_2 = y_2$ és tekintsük az

$$f_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto f_K(\underline{x} + s(\underline{z} - \underline{x}))$$

illetve

$$f_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f_K(\underline{z} + t(\underline{y} - \underline{z}))$$

függvényeket. Ekkor

$$f_1'(s) = (z_2 - x_2)D_1f_K(\underline{x} + s(\underline{z} - \underline{x}))$$

és

$$f_2'(t) = (y_1 - z_1)D_2f_K(\underline{z} + t(\underline{y} - \underline{z})),$$

továbbá a 4.1.1 lemma szerint

$$\sup_{\underline{x} \in B} |D_1f_K(\underline{x})| = \sup_{\underline{x} \in B} |D_2f_K(\underline{x})| = \lambda_2(K).$$

Másfelől

$$f_1(1) \leq f_1(0) + (1-0) \cdot \sup_{s \in]0,1[} f_1'(s), \quad f_2(1) \leq f_2(0) + (1-0) \cdot \sup_{t \in]0,1[} f_2'(t)$$

a Lagrange-féle középértéktétel szerint. Így tehát

$$f_K(\underline{z}) \leq f_K(\underline{x}) + |z_2 - x_2| \lambda_2(K), \quad f_K(\underline{y}) \leq f_K(\underline{z}) + |y_1 - z_1| \lambda_2(K)$$

és ekkor

$$f_K(\underline{y}) \leq f_K(\underline{x}) + (|y_1 - z_1| + |z_2 - x_2|) \lambda_2(K) = f_K(\underline{x}) + \|\underline{y} - \underline{x}\|_1 \lambda_2(K).$$

Ezután \underline{x} és \underline{y} szerepét felcserélve hasonló gondolatmenettel adódik az állítás. ■

4.2.1. Tétel (Vincze, N. [30]). Legyen $K \subset \mathbb{R}^2$ egy hv-konvex síkidom és jelölje (L_n) az algoritmus kimeneteként kapott L_n halmazokból képzett halmazsorozatot. Ekkor (L_n) bármely konvergens részsorozata egy olyan K^* kompakt, összefüggő, hv-konvex halmazhoz konvergál, amelynek koordináta-röntgenfüggvényei majdnem mindenütt megegyeznek a K röntgenfüggvényeivel.

A fenti tétel úgy is megfogalmazható, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén található $n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $H(L_n, K^*) < \varepsilon$ valamely $K^* \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, összefüggő, hv-konvex halmazzal, amelynek koordináta-röntgenfüggvényei majdnem mindenütt megegyeznek a K röntgenfüggvényeivel.

Bizonyítás: Először az algoritmus 7. lépésben szereplő célfüggvényt alapul véve végezzük el a bizonyítást. Az integrálás első középérték tételének felhasználásával

$$\int_B |f_{L_n}(\underline{x}) - f_K(\underline{x})| d\underline{x} = \sum_{i,j=1}^n \int_{B_{ij}^n} |f_{L_n}(\underline{x}) - f_K(\underline{x})| d\underline{x} =$$

$$\lambda_2(B) \sum_{i,j=1}^n \frac{|f_{L_n}(\underline{x}_{ij}) - f_K(\underline{x}_{ij})|}{n^2}$$

valamely $\underline{x}_{ij} \in B_{ij}^n$ pontokkal. Az \underline{y}_{ij} ellenőrzési pontok segítségével a következő egyenlőtlenséget írjuk fel:

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{|f_{L_n}(\underline{x}_{ij}) - f_K(\underline{x}_{ij})|}{n^2} \leq \sum_{i,j=1}^n \frac{|f_{L_n}(\underline{x}_{ij}) - f_{L_n}(\underline{y}_{ij})|}{n^2} +$$

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{|f_{L_n}(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij})|}{n^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{|f_K(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{x}_{ij})|}{n^2}.$$

Így a 4.2.1 lemma alapján

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{|f_{L_n}(\underline{x}_{ij}) - f_K(\underline{x}_{ij})|}{n^2} \leq 2\lambda_2(B) \sum_{i,j=1}^n \frac{\|\underline{x}_{ij} - \underline{y}_{ij}\|_1}{n^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{|f_{L_n}(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij})|}{n^2}.$$

Itt egyrészt

$$\|\underline{x}_{ij} - \underline{y}_{ij}\|_1 \leq \frac{k}{4n} < \frac{k}{2n},$$

ahol $k = 2(b-a) + 2(d-c)$ a B téglalap kerülete, másrészt L_n minimalizálja a második tagot a \mathcal{H} -beli halmazok körében, ezért

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{|f_{L_n}(\underline{x}_{ij}) - f_K(\underline{x}_{ij})|}{n^2} \leq \lambda_2(B) \sum_{i,j=1}^n \frac{k}{n^3} + \sum_{i,j=1}^n \frac{|f_{L_n^*}(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij})|}{n^2},$$

ahol

$$L_n^* := \bigcup_{B_{ij}^n \cap K \neq \emptyset} B_{ij}^n$$

a K halmaz minimális lefedése¹. Bármely $\underline{y}_{ij} \in G_K^n$ esetén

$$|f_{L_n^*}(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij})| = f_{L_n^*}(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij}) = \int_{L_n^* \setminus K} d_1(\underline{y}_{ij}, \underline{x}) d\underline{x} \leq \frac{k}{2} \lambda_2(L_n^* \setminus K),$$

ahol a B téglalap kerületének fele éppen a B átmérője az 1-normára nézve. A minimális lefedések (L_n^*) sorozata nyilvánvalóan konvergál K -hoz a Hausdorff-távolságra nézve, továbbá $K \subset L_n^*$ is teljesül, ezért a konvergencia reguláris abban az értelemben, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(L_n^* \setminus K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(L_n^*) - \lambda_2(K) = 0.$$

¹Az L_n^* minimális lefedés mindig eleme \mathcal{H} -nak.

Következésképp

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{|f_{L_n}(\underline{x}_{ij}) - f_K(\underline{x}_{ij})|}{n^2} &\leq \lambda_2(B) \sum_{i,j=1}^n \frac{k}{n^3} + \sum_{i,j=1}^n \frac{|f_{L_n^*}(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij})|}{n^2} \leq \\ &\lambda_2(B) \sum_{i,j=1}^n \frac{k}{n^3} + c_n \sum_{i,j=1}^n \frac{k}{2n^2}, \end{aligned}$$

ahol a $c_n := \lambda_2(L_n^*) - \lambda_2(K)$ valós számokból képzett sorozat nullához tart. Végül tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^n \frac{|f_{L_n}(\underline{x}_{ij}) - f_K(\underline{x}_{ij})|}{n^2} \leq \lambda_2(B) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} + \frac{k}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0,$$

ami azt eredményezi, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B |f_{L_n}(\underline{x}) - f_K(\underline{x})| d\underline{x} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy f_{L_n} konvergál az f_K általánosított kúpszeletfüggvényhez az $L^1(B)$ függvényterben így az állítás a 4.1.8 tétel közvetlen következménye.

Abban az esetben, ha az algoritmus **7.*** lépésben szereplő célfüggvényt minimalizáljuk a bizonyítás a következőképpen alakul: Mivel az általánosított kúpszeletfüggvény teljes \mathbb{R}^2 -n értelmezett konvex függvény, ezért folytonos is és így létezik olyan $\underline{x}^* \in B$ pont, amelyre

$$\sup_{\underline{x} \in B} |f_{L_n}(\underline{x}) - f_K(\underline{x})| = |f_{L_n}(\underline{x}^*) - f_K(\underline{x}^*)|.$$

Legyen \underline{y}^* az \underline{x}^* pontot tartalmazó B_{ij}^n résztéglalap középpontja. Ekkor a 4.2.1 lemma felhasználásával adódik, hogy

$$|f_{L_n}(\underline{x}^*) - f_K(\underline{x}^*)| \leq$$

$$|f_{L_n}(\underline{x}^*) - f_{L_n}(\underline{y}^*)| + |f_{L_n}(\underline{y}^*) - f_K(\underline{y}^*)| + |f_K(\underline{y}^*) - f_K(\underline{x}^*)| \leq$$

$$2\lambda_2(B) \|\underline{x}^* - \underline{y}^*\|_1 + |f_{L_n}(\underline{y}^*) - f_K(\underline{y}^*)|.$$

Mivel \underline{y}^* része az ellenőrzési pontok halmazának, ezért

$$|f_{L_n}(\underline{x}^*) - f_K(\underline{x}^*)| \leq \lambda_2(B) \frac{k}{n} + \sup_{\underline{y}_{ij} \in G_K^n} |f_{L_n}(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij})|.$$

Végül az L_n^* minimális lefedés segítségével az előző részhez hasonlóan fejezhető be a bizonyítás:

$$|f_{L_n}(\underline{x}^*) - f_K(\underline{x}^*)| \leq \lambda_2(B) \frac{k}{n} + \sup_{\underline{y}_{ij} \in G_K^n} |f_{L_n^*}(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij})| \leq$$

$$\lambda_2(B) \frac{k}{n} + \frac{k}{2} \lambda_2(L_n^* \setminus K) = \lambda_2(B) \frac{k}{n} + \frac{k}{2} c_n.$$

A határátmenetet véve adódik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} |f_{L_n}(\underline{x}) - f_K(\underline{x})| = 0.$$

■

A konvergencia sebességének megállapításához a $c_n = \lambda_2(L_n^*) - \lambda_2(K)$ valós számsorozatot kell vizsgálnunk. Ha r_n jelöli a B_{ij}^n résztéglalapok (közös) átmérőjét az n -edik lépésben, akkor nyilvánvalóan

$$c_n = \lambda_2(L_n^*) - \lambda_2(K) \leq \lambda_2(K^{r_n}) - \lambda_2(K).$$

Itt

$$r_n = \frac{d}{n},$$

a B határoló téglalap d átmérőjével. Így a 4.1.6 tétel szerint

$$c_n \leq \lambda_2(K^{r_n}) - \lambda_2(K) \leq 2k \frac{d}{n},$$

ahol $k = 2(b-a) + 2(d-c)$ a B téglalap kerülete.

4.2.2. Linearizálás és egészértékű programozás

Legyen a továbbiakban $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Az algoritmus 7. lépésében lényegében a következő feladatot kell megoldani:

$$\text{Min: } \sum_{\underline{y}_{ij} \in G_K^n} \left(f_L(\underline{y}_{ij}) - f_K(\underline{y}_{ij}) \right),$$

ahol $L \in \mathcal{H}$.

A K halmaz koordináta-röntgenfüggvényei adottak, és ezért az f_K függvény értékei is, így

$$\sum_{\underline{y}_{ij} \in G_K^n} f_K(\underline{y}_{ij}) =: C_0.$$

egy rögzített konstans, ami miatt a fenti programozási feladat redukálható:

$$\text{Min: } \sum_{\underline{y}_{ij} \in G_K^n} f_L(\underline{y}_{ij}),$$

ahol $L \in \mathcal{H}$.

Rögzített $L \in \mathcal{H}$ halmaz esetén definiálhatjuk az

$$x_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{ha } B_{kl}^n \subset L \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (k, l = 1, \dots, n).$$

változókat. Ezek segítségével

$$f_L = \sum_{k,l=1}^n x_{kl} f_{B_{kl}^n}$$

és világos, hogy

$$\sum_{\underline{y}_{ij} \in G_K^n} f_L(\underline{y}_{ij}) = \sum_{\underline{y}_{ij} \in G_K^n} \sum_{k,l=1}^n x_{kl} f_{B_{kl}^n}(\underline{y}_{ij}) = \sum_{k,l=1}^n x_{kl} \sum_{\underline{y}_{ij} \in G_K^n} f_{B_{kl}^n}(\underline{y}_{ij}).$$

Itt tetszőleges $k, l \in \{1, \dots, n\}$ indexek esetén az

$$\sum_{\underline{y}_{ij} \in G_K^n} f_{B_{kl}^n}(\underline{y}_{ij}) =: F_{kl}$$

valós számok értékei szintén rögzítettek. Következésképp a megoldandó programozási feladat

$$\text{Min: } \sum_{k,l=1}^n x_{kl} F_{kl},$$

$$\text{ahol } L = \bigcup \{B_{kl}^n | x_{kl} = 1\} \in \mathcal{H}.$$

4.2.1. Definíció. Egy $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n)$ négyzetes mátrixot intervallum mátrixnak nevezünk, ha minden eleme 0 vagy 1, továbbá minden $i \in \{1, \dots, n\}$ sorindex esetén az i -edik sor minden eleme 0, vagy léteznek $j_1, j_2 \in \{1, \dots, n\}$, $j_1 \leq j_2$ indexek, amelyekkel

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } j_1 \leq j \leq j_2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Egy $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n)$ négyzetes mátrixot duplán intervallum mátrixnak nevezünk, ha intervallummátrix és a transzponáltja is intervallummátrix.

Könnyen látható, hogy egy $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n)$ 0 – 1-mátrix pontosan akkor duplán intervallum mátrix, ha valahányszor $a_{kl} = 0$, akkor igaz az alábbi két tulajdonság:

1. $a_{il} = 0$ minden $i \in \{1, \dots, k\}$, vagy minden $i \in \{k, \dots, n\}$ esetén,
2. $a_{kj} = 0$ minden $j \in \{1, \dots, l\}$, vagy minden $j \in \{l, \dots, n\}$ esetén.

Világos, hogy a fenti két tulajdonság a következőképpen is megfogalmazható:

1.

$$\prod_{i=1}^k (1 - a_{il}) + \prod_{i=k}^n (1 - a_{il}) \geq 1,$$

2.

$$\prod_{j=1}^l (1 - a_{kj}) + \prod_{j=l}^n (1 - a_{kj}) \geq 1.$$

Így adódik, hogy egy $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(n)$ 0 – 1-mátrix pontosan akkor duplán intervallum mátrix, ha tetszőleges $k, l \in \{1, \dots, n\}$ indexek esetén

$$\left(\prod_{j=1}^l (1 - a_{kj}) + \prod_{j=l}^n (1 - a_{kj}) \right) \left(\prod_{i=1}^k (1 - a_{il}) + \prod_{i=k}^n (1 - a_{il}) \right) \geq 1 - a_{kl}.$$

Vegyük észre, hogy a $a_{kl} = 1$ esetén a fenti egyenlőtlenség mindkét oldalán 0 szerepel.

4.2.2. Tétel. *Az $L = \bigcup \{B_{kl}^n \mid x_{kl} = 1\}$ kompakt halmaz pontosan akkor eleme a \mathcal{H} halmaznak, ha a következő egyenlőtlenségek teljesülnek:*

$$\sum_{i=1}^n x_{i1} \geq 1 \qquad \sum_{i=1}^n x_{in} \geq 1, \qquad (4.14)$$

$$\left(\prod_{j=1}^l (1 - x_{kj}) + \prod_{j=l}^n (1 - x_{kj}) \right) \left(\prod_{i=1}^k (1 - x_{il}) + \prod_{i=k}^n (1 - x_{il}) \right) \geq 1 - x_{kl}, \qquad (4.15)$$

$(k, l = 1, \dots, n)$

$$\sum_{j=2}^n x_{kj-1} x_{k+1j} + \sum_{j=1}^n x_{kj} x_{k+1j} + \sum_{j=1}^{n-1} x_{kj+1} x_{k+1j} \geq 1, \qquad (4.16)$$

$$(k = 1, \dots, n - 1)$$

$$\sum_{k,l=1}^n x_{kl} f_{B_{kl}^n}(\underline{y}_{ij}) \geq f_K(\underline{y}_{ij}) \quad (\underline{y}_{ij} \in G_K^n). \quad (4.17)$$

Bizonyítás: Az x_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) változók segítségével képezhetjük az $A = (x_{ij})$ mátrixot. Tegyük fel először, hogy $L \in \mathcal{H}$. Mivel L összefüggő és határoló téglalapja megegyezik a B téglalappal, ezért A minden sora és oszlopa tartalmaz legalább egy 1-est. A (4.14) egyenlőtlenségek bal oldalán az első illetve az utolsó oszlopban lévő elemek összege szerepel, így ezek az egyenlőtlenségek nyilvánvalóan fenn állnak. Továbbá a hv-konvexitás miatt az A mátrix duplán intervallum mátrix, ezért korábbi észrevételünk szerint a (4.15) egyenlőtlenségek is teljesülnek. Tekintsük ezután az A mátrix tetszőleges k -adik sorát ($k \in \{1, \dots, n - 1\}$). Az L összefüggősége miatt a következő sornak tartalmaznia kell egy olyan $x_{k+1j} = 1$ elemet, amellyel együtt az x_{kj-1} , x_{kj} és x_{kj+1} változók legalább egyike 1. Így a (4.16) egyenlőtlenségek mindegyikének bal oldalán a szereplő összeadandók közül legalább egy értéke 1 és ebből adódóan teljesülnek ezek az egyenlőtlenségek. Végül vegyünk észre, hogy a (4.17) egyenlőtlenségek mindegyike közvetlen következménye az $f_L(\underline{y}_{ij}) \geq f_K(\underline{y}_{ij})$ egyenlőtlenségeknek, ahol $\underline{y}_{ij} \in G_K^n$.

Tegyük most fel, hogy a (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) egyenlőtlenségek mindegyike teljesül. Korábbi észrevételünk szerint a (4.15) egyenlőtlenségek miatt A egy duplán intervallum mátrix. Másrészt (4.16) miatt az első kivételével a mátrix tetszőleges $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ esetén a $k+1$ -edik sora tartalmaz egy $x_{k+1j} = 1$ elemet (máskülönben az egyenlőtlenségek valamelyikének bal oldalán 0 szerepelne). Továbbá az ezt megelőző k -adik sorban az x_{kj-1} , x_{kj} és x_{kj+1} elemek közül legalább az egyik 1. Ez azt eredményezi, hogy a $k+1$ -edik sorban szereplő első 1-es oszlopindexe nem lehet legalább kettővel nagyobb, mint a k -adik sor utolsó 1-esének oszlopindexe. Ugyanígy a $k+1$ -edik sorban szereplő utolsó 1-es

oszlopindexe nem lehet legalább kettővel kisebb, mint a k -adik sor első 1-esének oszlopindexe. Tehát az L halmaz összefüggő kell, hogy legyen, továbbá az A halmaz első sora is tartalmaz 0-tól különböző elemet. Így az összefüggőséggel együtt abból, hogy A duplán intervallum mátrix, az L hv-konvexitására következtethetünk. A (4.14) egyenlőtlenségek mutatják, hogy A első és utolsó oszlopa is tartalmaz 0-tól különböző elemet, ami azzal együtt, hogy minden sorra is igaz ez a kijelentés azt jelenti, hogy az L halmaz határoló téglalapja B . Végül látható, hogy az (4.17) egyenlőtlenségek miatt $f_L(\underline{y}_{ij}) \geq f_K(\underline{y}_{ij})$ teljesül minden $\underline{y}_{ij} \in G_K^n$ esetén. ■

A 4.2.2 tétel értelmében a következő programozási feladatot fogalmazhatjuk meg:

$$\text{Min: } \sum_{k,l=1}^n x_{kl} F_{kl},$$

ahol $x_{kl} \in \{0, 1\}$ ($k, l = 1, \dots, n$) és teljesülnek a (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) egyenlőtlenségek.

Itt összesen n^2 változó, $n^2 + 2$ lineáris és $n^2 + n - 1$ nem lineáris egyenlőtlenség szerepel. Ez egy 0-1 változós polinomiális feltételekkel adott programozási feladat, amely feladattípus megoldására számos módszer létezik a szakirodalomban (lásd [23] 11. és 12. fejezet). Egyike ezen módszereknek egy linearizálási eljárás, amelyet a következő észrevétel tesz lehetővé, ha a célfüggvény lineáris.

4.2.3. Tétel (Li, Sun[23]). *Legyen adott a következő polinomiális egyenlőség*

$$y = \prod_{(i,j) \in S} x_{ij}^{r_{ij}}, \quad (4.18)$$

ahol $x_{ij} \in \{0, 1\}$ ($i, j = 1, \dots, n$), $S \subset \{(i, j) \mid i, j = 1, \dots, n\}$ és $r_{ij} \in \mathbb{N}^+$, $r = \sum_{(i,j) \in S} r_{ij}$. Ekkor a (4.18) egyenlőség pontosan akkor teljesül,

ha igazak a

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in S} r_{ij} x_{ij} - y &\leq r - 1, \\ - \sum_{(i,j) \in S} r_{ij} x_{ij} + ry &\leq 0. \end{aligned}$$

lineáris egyenlőtlenségek.

Lehetőségünk van tehát a polinomiális egyenlőtlenségekben minden egyes monomot egy új változóval helyettesíteni kettő lineáris egyenlőtlenség hozzáadásával. A módszer hátránya azonban az, hogy a páronként különböző monomok száma igen nagy lehet. Látható például, hogy a (4.15) egyenlőtlenségek bal oldalán a zárójeleket felbontva számtalan monom jelenik meg. Ez azonban szerencsére könnyen kiküszöbölhető, ha bevezetjük az új

$$z_{ij} := 1 - x_{ij}$$

változókat. Ekkor az (4.14) és (4.17) egyenlőtlenségek a következő alakot öltik:

$$n - \sum_{i=1}^n z_{i1} \geq 1 \qquad n - \sum_{i=1}^n z_{in} \geq 1, \quad (4.19)$$

$$f_{B_K}(\underline{y}_{ij}) - \sum_{k,l=1}^n z_{kl} f_{B_{kl}}(\underline{y}_{ij}) \geq f_K(\underline{y}_{ij}) \quad (\underline{y}_{ij} \in G_K^n), \quad (4.20)$$

Ugyanakkor (4.15) és (4.16) új alakja

$$\prod_{i=1}^k z_{il} \prod_{j=1}^l z_{kj} + \prod_{i=k}^n z_{il} \prod_{j=1}^l z_{kj} + \prod_{i=1}^k z_{il} \prod_{j=l}^n z_{kj} + \prod_{i=k}^n z_{il} \prod_{j=l}^n z_{kj} \geq z_{kl}, \quad (4.21)$$

$$(k, l = 1, \dots, n)$$

$$(3n-2) - \sum_{j=2}^n (z_{k,j-1} + z_{k+1,j}) - \sum_{j=1}^n (z_{k,j} + z_{k+1,j}) - \sum_{j=1}^{n-1} (z_{k,j+1} + z_{k+1,j}) + \sum_{j=2}^n z_{k,j-1} z_{k+1,j} + \sum_{j=1}^n z_{k,j} z_{k+1,j} + \sum_{j=1}^{n-1} z_{k,j+1} z_{k+1,j} \geq 1. \quad (4.22)$$

$$(k = 1, \dots, n-1)$$

A célfüggvény az újonnan bevezetett változókkal:

$$\sum_{k,l=1}^n (1 - z_{kl}) F_{kl} = \sum_{k,l=1}^n F_{kl} - \sum_{k,l=1}^n z_{kl} F_{kl}. \quad (4.23)$$

Ezen célfüggvény minimumhelyének megkeresése ekvivalens a

$$\sum_{k,l=1}^n z_{kl} F_{kl}.$$

célfüggvény maximumhelyének megtalálásával.

A linearizáláshoz szükséges új változókkal írjuk át a (4.21) egyenlőtlenségeket a következőképp:

$$u_{kl}^1 + u_{kl}^2 + u_{kl}^3 + u_{kl}^4 \geq z_{kl} \quad (k, l = 1, \dots, n), \quad (4.24)$$

ahol u_{kl}^h a (4.21) bal oldalán szereplő h -edik összeadandónak felel meg, $h \in \{1, \dots, 4\}$. Ezután a hozzáadjuk az egyenlőtlenség rendszerhez a

következő lineáris egyenlőtlenségeket a 4.2.3 tételnek megfelelően:

$$\sum_{i=1}^k z_{il} + \sum_{j=1}^l z_{kj} - u_{kl}^1 \leq k + l - 1 \quad (k, l = 1, \dots, n), \quad (4.25a)$$

$$\sum_{i=k}^n z_{il} + \sum_{j=1}^l z_{kj} - u_{kl}^2 \leq n - k + l \quad (k, l = 1, \dots, n), \quad (4.25b)$$

$$\sum_{i=1}^k z_{il} + \sum_{j=l}^n z_{kj} - u_{kl}^3 \leq n + k - l \quad (k, l = 1, \dots, n), \quad (4.25c)$$

$$\sum_{i=k}^n z_{il} + \sum_{j=l}^n z_{kj} - u_{kl}^4 \leq 2n - k - l + 1 \quad (k, l = 1, \dots, n), \quad (4.25d)$$

$$-\sum_{i=1}^k z_{il} - \sum_{j=1}^l z_{kj} + (k + l)u_{kl}^1 \leq 0 \quad (k, l = 1, \dots, n), \quad (4.26a)$$

$$-\sum_{i=k}^n z_{il} - \sum_{j=1}^l z_{kj} + (n - k + l + 1)u_{kl}^2 \leq 0 \quad (k, l = 1, \dots, n), \quad (4.26b)$$

$$-\sum_{i=1}^k z_{il} - \sum_{j=l}^n z_{kj} + (n + k - l + 1)u_{kl}^3 \leq 0 \quad (k, l = 1, \dots, n), \quad (4.26c)$$

$$-\sum_{i=k}^n z_{il} - \sum_{j=l}^n z_{kj} + (2n - k - l + 2)u_{kl}^4 \leq 0 \quad (k, l = 1, \dots, n). \quad (4.26d)$$

A (4.22) egyenlőtlenségekben a $z_{k,j-1}z_{k+1,j} = v_{kj}^1$, $z_{kj}z_{k+1,j} = v_{kj}^2$, és $z_{k,j+1}z_{k+1,j} = v_{kj}^3$ helyettesítést elvégezve:

$$(3n-2) - \sum_{j=2}^n (z_{k,j-1} + z_{k+1,j}) - \sum_{j=1}^n (z_{kj} + z_{k+1,j}) - \sum_{j=1}^{n-1} (z_{k,j+1} + z_{k+1,j}) + \sum_{j=2}^n v_{kj}^1 + \sum_{j=1}^n v_{kj}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} v_{kj}^3 \geq 1. \quad (4.27)$$

$$(k = 1, \dots, n-1)$$

Végül a 4.2.3 tételnek megfelelő egyenlőtlenségeket hozzáadjuk az egyenlőtlenség rendszerhez:

$$z_{k,j-1} + z_{k+1,j} - v_{kj}^1 \leq 1 \quad (j, k = 1, \dots, n; j \neq 1, k \neq n), \quad (4.28a)$$

$$z_{kj} + z_{k+1,j} - v_{kj}^2 \leq 1 \quad (j, k = 1, \dots, n; k \neq n), \quad (4.28b)$$

$$z_{k,j+1} + z_{k+1,j} - v_{kj}^3 \leq 1 \quad (j, k = 1, \dots, n-1), \quad (4.28c)$$

$$-z_{k,j-1} - z_{k+1,j} + 2v_{kj}^1 \leq 0 \quad (j, k = 1, \dots, n; j \neq 1, k \neq n), \quad (4.29a)$$

$$-z_{kj} - z_{k+1,j} + 2v_{kj}^2 \leq 0 \quad (j, k = 1, \dots, n; k \neq n), \quad (4.29b)$$

$$-z_{k,j+1} - z_{k+1,j} + 2v_{kj}^3 \leq 0 \quad (j, k = 1, \dots, n-1). \quad (4.29c)$$

4.2.4. Tétel (Vincze, N. [30]). *A rekonstrukciós algoritmus 7. lépésében szereplő programozási feladat ekvivalens a következő egészértékű lineáris programozási feladattal:*

$$Max: \sum_{k,l=1}^n z_{kl} F_{kl} \quad (4.30)$$

ahol

$$\begin{aligned}
z_{kl} &\in \{0, 1\} & (k, l = 1, \dots, n), \\
u_{kl}^i &\in \{0, 1\} & (k, l = 1, \dots, n), (i = 1, \dots, 4), \\
v_{k,j}^1 &\in \{0, 1\} & (j, k = 1, \dots, n; j \neq 1, k \neq n), \\
v_{k,j}^2 &\in \{0, 1\} & (j, k = 1, \dots, n; k \neq n), \\
v_{k,j}^3 &\in \{0, 1\} & (j, k = 1, \dots, n-1),
\end{aligned}$$

és teljesülnek a (4.19), (4.20), (4.24), (4.25), (4.26), (4.27), (4.28), (4.29) egyenlőtlenségek.

Itt összesen $n^2 + 4n^2 + (n-1)(3n-2) = 8n^2 - 5n + 2$ változó és $2 + n^2 + n^2 + 8n^2 + n - 1 + 2(n-1)(3n-2) = 16n^2 - 9n + 5$ lineáris egyenlőtlenség szerepel. A lineáris programozási feladatok megoldása során legtöbbször csupán egyetlen optimális megoldást keresünk meg. Itt azonban lehetőség van az összes optimális megoldás megkeresésére a következő módszer segítségével: ha a z_{ij}^* ($i, j = 1, \dots, n$) 0-1 értékű változók egy optimális megoldását adják a fenti problémának, akkor legyen I azon (ij) indexpárok halmaza, amelyre $z_{ij}^* = 1$ és legyen J azon (ij) indexpárok halmaza, amelyre $z_{ij}^* = 0$. Ezután adjuk hozzá az egyenlőtlenségrendszerhez a

$$\sum_{(ij) \in I} z_{ij} - \sum_{(ij) \in J} z_{ij} \leq |I| - 1$$

egyenlőtlenséget, ahol $|I|$ az I halmaz elemszámát jelöli. A z_{ij}^* változók nem tesznek eleget ennek az egyenlőtlenségnek, azonban ezen változók bármelyikét megváltoztatva már teljesül az egyenlőtlenség. Így az eredeti egyenlőtlenség-rendszernek eleget tevő megoldások köréből ki tudjuk zárni pontosan az általunk talált egy megoldást. Ezután megoldva az új programozási feladatot, ha a célfüggvény értéke változatlan, akkor

egy újabb megoldást találtunk, amit ismét egy új egyenlőtlenség hozzáadásával kizárhatunk. Ezt addig folytatjuk, amíg a célfüggvény értéke megváltozik, ekkor ugyanis már az eredeti programozási feladatnak egy nem optimális megoldását találjuk és a korábban megtalált optimális megoldásokon kívül, már nincs újabb.

Végül két példát szeretnénk mutatni az algoritmus által adott eredményekre. Sajnos az egészértékű programozási feladatokat általában nem lehet hatékonyan megoldani, ezért csak alacsony felbontás mellett sikerült az algoritmust kipróbálni. Lehetőség van azonban az alacsony felbontásra kapott optimális megoldásból kiindulva egyszerű mohó algoritlussal nagyobb elbontású megoldásokat keresni.

4.2.1. Példa. Legyen K az a halmaz, amelyet felülről az

$$f_1: [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \begin{cases} 7 - \frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (x-1)^2}, & \text{ha } x \in \left[1, \frac{5}{2}\right], \\ 7 - \frac{5}{6}\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - (x-7)^2}, & \text{ha } x \in \left]\frac{5}{2}, 7\right], \end{cases}$$

alulról pedig a

$$g_1: [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}, g_1(x) = \begin{cases} 1 + \frac{5}{3}\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 - (x-1)^2}, & \text{ha } x \in \left[1, \frac{13}{4}\right], \\ 1 + \frac{3}{5}\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - (x-7)^2}, & \text{ha } x \in \left]\frac{13}{4}, 7\right], \end{cases}$$

függvények határolnak, azaz

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 7, g_1(x) \leq y \leq f_1(x)\}.$$

Ekkor

$$X_1K(t) = \begin{cases} f_1(t) - g_1(t), & \text{ha } t \in [1, 7], \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$X_2K(t) = \begin{cases} f_2(t) - g_2(t), & \text{ha } t \in [1, 7], \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol

$$f_2: [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \begin{cases} 7 - \frac{5}{3}\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 - (x-1)^2}, & \text{ha } x \in \left[1, \frac{13}{4}\right], \\ 7 - \frac{6}{5}\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - (x-7)^2}, & \text{ha } x \in \left]\frac{13}{4}, 7\right], \end{cases}$$

$$g_2: [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}, g_2(x) = \begin{cases} 1 + \frac{3}{5}\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 - (x-1)^2}, & \text{ha } x \in \left[1, \frac{19}{4}\right], \\ 1 + \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2 - (x-7)^2}, & \text{ha } x \in \left]\frac{19}{4}, 7\right]. \end{cases}$$

Ezek felhasználásával az algoritmus a 4.4. ábrán balra látható kimenetet adja $n = 6$ felbontás mellett (pirossal). Mohó algoritmus segítségével ezt tovább finomítva $n = 48$ felbontására a végeredmény a 4.4. ábrán jobbra látható (pirossal).

4.2.2. Példa. Tekintsük a

$$D = \text{conv} \left\{ (0, 0), \left(2, \frac{4}{3}\right), (2, 2), \left(0, \frac{2}{3}\right) \right\}$$

paralelogrammát és tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ illetve $k \in \{0, 1, \dots, 3^{n-1} - 1\}$ esetén legyenek

$$T_{n,k,1} = \text{conv} \{P_{n,k,1}, P_{n,k,2}, P_{n,k,3}\}, \quad T_{n,k,2} = \text{conv} \{P_{n,k,4}, P_{n,k,5}, P_{n,k,6}\},$$

ahol

$$P_{n,k,1} = \left(\frac{2(3k+1)}{3^n}, \frac{4(3k+1)}{3^{n+1}} \right), \quad P_{n,k,2} = \left(\frac{2(3k+2)}{3^n}, \frac{4(3k+2)}{3^{n+1}} \right),$$

$$P_{n,k,3} = \left(\frac{2(3k+1)}{3^n}, \frac{4(3k+2)}{3^{n+1}} \right), \quad P_{n,k,4} = \left(\frac{2(3k+1)}{3^n}, \frac{2}{3} + \frac{4(3k+1)}{3^{n+1}} \right),$$

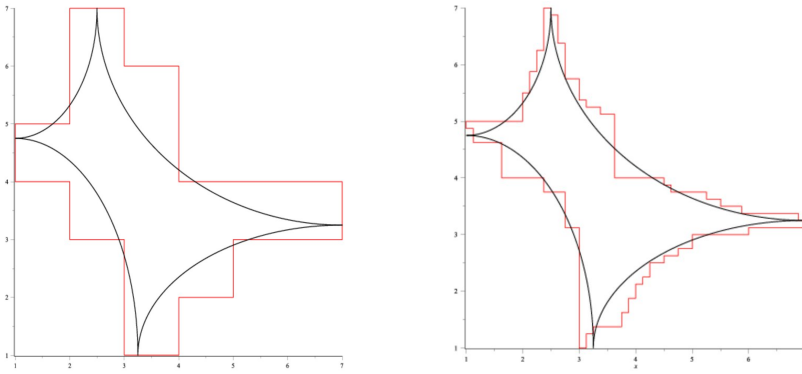
$$P_{n,k,5} = \left(\frac{2(3k+2)}{3^n}, \frac{2}{3} + \frac{4(3k+2)}{3^{n+1}} \right), \quad P_{n,k,6} = \left(\frac{2(3k+2)}{3^n}, \frac{2}{3} + \frac{4(3k+1)}{3^{n+1}} \right).$$

Képezzük a következő halmazt

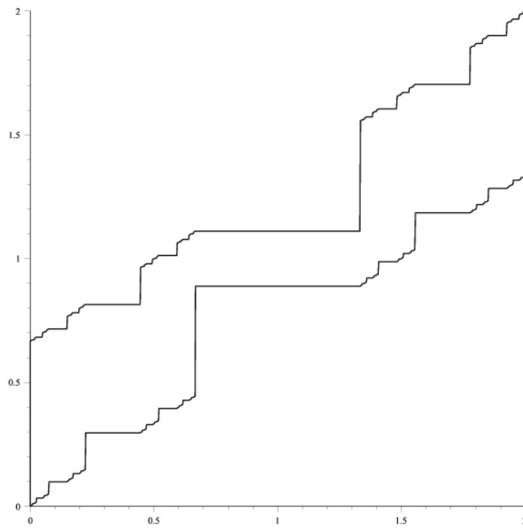
$$K = \text{cl} \left(D \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{m-1}-1} T_{n,k,1} \cup T_{n,k,2} \right) \right),$$

amelyet a 4.5. ábrán láthatunk. A koordináta-röntgenfüggvényeket a 4.6. ábra szemlélteti. Ezeket, mint bemeneti adatokat felhasználva az algoritmus $n = 6$ felbontás mellett a 4.7. látható megoldást adja (pirossal).

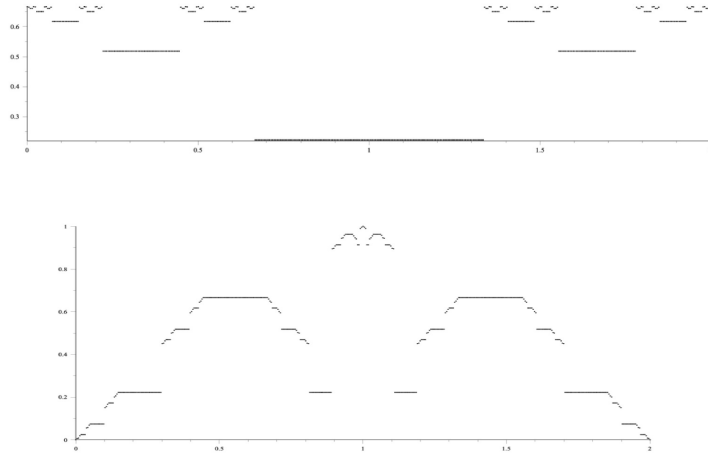
Látható, hogy mindkét példa esetén problémát okoz a K halmazhoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvény értékeinek meghatározása az ellenőrzési pontokban (ez az algoritmus 5. lépése). Az első példa esetén elliptikus integrálok lépnek fel, míg a második példa esetén már a röntgenfüggvény értékeinek a megadása is nehéz feladat. Valójában ebben az esetben nem is várhatjuk el, hogy a koordináta-röntgenfüggvények valamilyen egyszerű képlettel megadhatók legyenek, hanem csupán arra számíthatunk, hogy a röntgenfüggvény értékek állnak rendelkezésünkre egy kellően sűrű halmazon. Az is könnyen látható, hogy az elliptikus integrálok közelítő értékét úgy is kiszámíthatjuk, hogy bizonyos véges számú alappontban meghatározzuk az integrálandó függvény értékeit, majd ezen pontok között konstansnak tekintve a függvényt végezzük az integrálást, és végül az alappontok számának növelésével sűrítjük a felosztást. Szerencsére a [32] dolgozatban sikeresen bizonyítottuk, hogy a koordináta-röntgenfüggvények véges sok alappontban vett mérési adataiból megfelelő módon képzett fiktív röntgenfüggvényeket felírva az algoritmus kimeneteként kapott halmazsorozathoz tartozó kúpszeletfüggvények konvergálnak a K kúpszeletfüggvényéhez, amennyiben az alappontokat egyre sűrítjük. Sőt bizonyításra került, hogy a sztochasztikus konvergencia is fennáll, amennyiben a mérési adatok véletlen hibával terheltek.



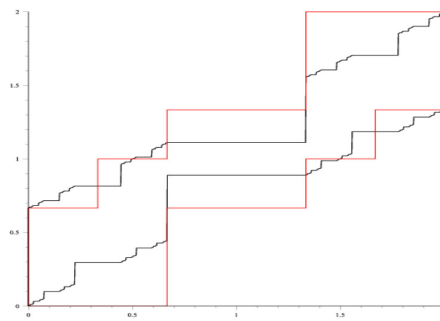
4.4. ábra.



4.5. ábra.



4.6. ábra.



4.7. ábra.

Összefoglalás

Általánosított kúpszeleten az N - dimenziós valós koordinátatér olyan alakzatát értjük, melynek pontjaira egy rögzített K halmaz pontjaitól mért átlagos távolság ugyanakkora. A K halmaz elemeit nevezzük *fókusznak*. A fókuszok nem feltétlenül véges számosságú ponthalmazt alkotnak, mint ahogy a távolságmérés során sem feltétlenül az euklideszi távolság játszik szerepet. Mindezekon túl az átlagolási eljárásra vonatkozóan is különbözőképpen járhatunk el: súlyozott (de véges) összegek, integrál stb. Ebbe a koncepcióba a szakirodalomban fellelhető általánosítások többsége beilleszthető, mint például a multifokális ellipszisek.

A disszertációban az általánosított kúpszeletek egy differenciálgeometriai és egy tomográfiai alkalmazását mutatjuk be. A **differenciálgeometriai** alkalmazáshoz a fókuszhalmazt sokaságstruktúrával ruházzuk fel és az általánosított kúpszeletek a következőképp definiáljuk.

1. Definíció. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ olyan korlátos, irányítható részsokaság, amelyre $\text{Vol } \Gamma < \infty$ az indukált Riemann-térfogatra nézve. Ekkor a Γ -hoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvényen az

$$F_{\Gamma}(\underline{x}) := \frac{1}{\text{Vol } \Gamma} \int_{\Gamma} \gamma \mapsto d(\underline{x}, \gamma) d\gamma \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^N)$$

leképezést értjük. Továbbá az

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid F_{\Gamma}(\underline{x}) = c, c \in \mathbb{R}^+\}$$

alakú halmazokat általánosított kúpszeleteknek nevezzük, amelynek fókuszalmaza Γ .

A Finsler-geometriában az alapsokaságon adott görbék ívhosszát a szokásos integrálformula segítségével mérjük, csak hogy az érintővektorok hossza nem csupán a hely, hanem az irány függvénye is. A Finsler-sokaság általánosított Berwald-sokasággá válik, ha megadható egy lineáris konnexió az alapsokaságon úgy, hogy az általa indukált párhuzamos eltolások megőrzik az érintővektorok Finsler-féle hosszát. Ha a lineáris konnexió torziómentes, akkor a klasszikus Berwald-sokaságokat kapjuk. Ezek osztályozásával Szabó Zoltán [38] munkája foglalkozik. Az osztályozási tételhez vezető eredmények egyike, hogy a Berwald-terek kitüntetett (lineáris) konnexiója Riemann-metrizálható, azaz megadható olyan Riemann-féle metrikus tenzor az alapsokaságon, melynek Lévi-Civita konnexiója egybeesik a Berwald-tér kanonikus konnexiójával.

A probléma megfordítása a következő: tekintsünk egy Riemann-sokaságot és egy a sokaságon adott metrikus (nem feltétlenül torziómentes) ∇ lineáris konnexiót. Milyen feltételek mellett garantálható olyan nem Riemann általánosított Berwald-sokaság létezése, melynek (egyik) kitüntetett konnexiója éppen ∇ ? A kérdésre a válasz az, hogy amennyiben a sokaság egy adott $p \in M$ pontjában vett euklideszi egységvektornak a holonómiacsoportha nézve vett pályája nem sűrű az (euklideszi) egységgömbön, akkor a konnexió szigorú értelemben Berwald-metrizálható, azaz konstruálható olyan nem Riemann általánosított Berwald-sokaság, hogy a ∇ által indukált párhuzamos eltolások megőrzik az érintővektorok Finsler-féle hosszát. Szabó Zoltán ötletét átvéve, a feladat egy az origót a belsejében tartalmazó konvex test (egységgömbtest) konstrukciója a pont fölötti érintőtérben, mely a holonómiacsoporthal szemben invariáns és a határa nem kvadratikusan sima hiperfelület. Ezt a testet párhuzamos eltolással juttathatjuk el az (összefüggő) sokaság bármely pontjába. Az új egységgömbsereggel ellátva pedig a sokaság általánosított Berwald-

sokasággá válik.

Tekintsük tehát az \mathbb{R}^N euklideszi koordinátatér lineáris izometriacsoportjának egy G részcsoportját. Tegyük fel, hogy valamely euklideszi egységvektor G csoportra nézve vett pályája nem sűrű az (euklideszi) egységgömbön. A cél olyan nem euklideszi Minkowski-funkcionál megadása a vektortéren, melyre nézve G elemei még izometriák maradnak. A Minkowski-funkcionálokkal szemben megkövetelt pozitív homogenitási tulajdonságra tekintettel elegendő egy olyan G -invariáns, az origót a belsejében tartalmazó konvex testet konstruálni, melynek határa nem kvadratikus, sima hiperfelület. A konstruált test, mint egységgömb, éppen a kívánt metrikus struktúrát származtatja. A fő eredmény az, hogy az invariáns test mindig megadható általánosított kúpszeletként.

A G csoport reducibilitása szerint két esetet különböztetünk meg. Reducibilis csoport esetén tekinthetjük az

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{N-2}$$

gömbök valamelyikét, mint a G elemeire nézve invariáns halmazt (a csoport reducibilitásának megfelelően).

1. Tétel (Vincze, N. [28]). *Az $F_{S_k}(x) = \frac{c(l)}{\text{Vol } S_k}$ egyenlettel definiált általánosított kúpszelet nem ellipszoid, ahol*

$$c(l) := \frac{2^{l+2} \cdot l!}{(2l+1)!!} \quad \text{és} \quad l := k-1.$$

Következésképp olyan nem euklideszi Minkowski-funkcionált indukál, amelynek lineáris izometria csoportja tartalmazza G -t.

Ha a G csoport irreducibilis, akkor tekintsük egy $\underline{z} \in S_{N-1}$ pont $\Gamma_{\underline{z}}$ orbitját. Egy megfelelően választott $c \in \mathbb{R}$ konstanssal és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő, konvex függvénnyel a következő tételt fogalmazhatjuk meg:

2. Tétel (Vincze, N. [28]). *Ha G olyan zárt, irreducibilis részcsoportha az ortogonális csoportnak, amely nem tranzitív az egységömbön, akkor*

$$\int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} d(\underline{x}, \gamma) d\gamma = c \quad \text{és} \quad \int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} g(d(\underline{x}, \gamma)) d\gamma = c$$

hiperfelületek legalább egyike olyan nem euklideszi Minkowski-funkcionált indukál, amelynek lineáris izometria csoportja tartalmazza G -t.

Ezen két tétel segítségével a fent leírt gondolatmenet alapján a következőt fogalmazhatjuk meg:

3. Tétel (Vincze, N. [28]). *Legyen M egy összefüggő Riemann-sokaság. Ha egy metrikus (de nem feltétlenül torziómentes) ∇ lineáris konnexió holonómia csoportjának lezártja nem tranzitív az érintőterek egységömbjein, akkor ∇ (szigorú értelemben) Berwald-metrizálható általánosított kúpszeletek segítségével.*

Ha az euklideszi távolság helyett az ún. taxicab/Manhattan normából származó távolságfüggvényt használjuk, akkor az átlagos távolságot mérő függvénynek és szinthalmozainak (az általánosított kúpszeleteknek) a **geometriai tomográfiában** vehetjük hasznát.

2. Definíció. *A $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmazhoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvényen az*

$$f_K: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{x} \mapsto f_K(\underline{x}) := \int_K d_1(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y}$$

leképezést értjük.

A geometriai tomográfia célja, hogy információt szerezzünk olyan geometriai alakzatokról, amelyeknek csak metszeteit vagy vetületeit (esetleg mindkettőt) ismerjük. A geometriai szó itt arra utal, hogy a vizsgált objektum homogénnek tekinthető, ezért nem egy sűrűségfüggvényt kell visszaállítanunk, hanem csak az alakzat formája érdekel bennünket. A (párhuzamos) röntgenfüggvények olyan valós függvények, amelyek \mathbb{R}^N egy korlátos, mérhető részhalmazának egy rögzített $N - 1$ -dimenziós altérrel való metszeteinek mértékét szolgáltatja.

3. Definíció. *Legyen $E \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) egy korlátos, mérhető halmaz továbbá \mathcal{H} egy $N - 1$ dimenziós altér \mathbb{R}^N -ben, amelynek egy ortonormált bázisa $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N-1})$. Ekkor az E halmaznak a \mathcal{H} altérrel párhuzamos röntgenfüggvényének nevezzük az*

$$X_{\mathcal{H}}E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \lambda_1((t\underline{w} + \mathcal{H}) \cap E)$$

leképezést, ahol $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N-1}, \underline{w})$ ugyanolyan irányítású ortonormált bázisa \mathbb{R}^N -nek, mint az $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_N)$ kanonikus bázis.

Az $\underline{e}_1^\perp, \dots, \underline{e}_N^\perp$ alterekkel párhuzamos röntgenfüggvényeket koordináta-röntgenfüggvényeknek nevezzük és a következő módon jelöljük:

$$X_i K = X_{\underline{e}_i^\perp} K, \quad (i = 1, \dots, N).$$

Ha $N = 2$, akkor bármely $N - 1$ -dimenziós altér ortonormált bázisa egyetlen \underline{v} egységvektorból áll, így ebben az esetben \underline{v} -irányú röntgenfüggvényről beszélhetünk.

A röntgenfüggvényekhez kapcsolódó rekonstrukciós feladat az, hogy találjuk meg az \mathbb{R}^N tér egy kompakt részhalmazát, amelynek csak néhány irányban vett röntgenfüggvénye adott. Mivel ez a probléma gyakran nehéznek bizonyul, ezért legtöbbször az is elegendő, ha tudunk mutatni egy olyan halmazzorozatot, amely a rekonstruálandó halmazhoz

konvergál valamilyen metrikára nézve (ez a metrika általában a kompakt halmazok Hausdorff-távolsága). A probléma nehézsége (többek között) abban áll, hogy egy kompakt halmaz röntgenfüggvényei általában nem folytonosak, sőt a szakadási helyek halmaza lehet megszámlálhatóan végtelen, sűrű részhalmaza a valós számoknak. A szakirodalomban ezért gyakran egy speciálisabb halmazosztály tagjainak rekonstrukcióját vizsgálják, mint például a konvex halmazok osztálya.

A következő tétel szerint bármely \mathbb{R}^N -beli kompakt halmaz koordináta-röntgenfüggvényei helyettesíthetők az általánosított kúpszeletfüggvény-nyel, amely a teljes \mathbb{R}^N téren értelmezett konvex (és ezért folytonos) függvény.

4. Tétel (Vincze, N. [29]). *Tetszőleges $K, K^* \subset \mathbb{R}^N$ kompakt halmazok esetén pontosan akkor teljesül $f_K = f_{K^*}$, ha minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén $X_i K = X_i K^*$ majdnem mindenütt.*

Ez a tétel lehetőséget ad számunkra, hogy a síkbeli konvex halmazoknál valamivel általánosabb hv-konvex (horizontálisan és vertikálisan konvex) halmazok rekonstrukciójára. Ehhez először egy lokalizációs tételre van szükségünk, amely konvergens halmazsorozatok esetén az általánosított kúpszeletfüggvények konvergenciáját biztosítja.

Tetszőleges $B = [a, b] \times [c, d]$ téglalap esetén legyen \mathcal{M}_B^{hv} mindazon síkbeli, nemüres, összefüggő, kompakt, hv-konvex halmazok összessége, amelyek határoló téglalapját tartalmazza B . Jelölje $C(B)$ a $B = [a, b] \times [c, d]$ téglalapon értelmezett kétváltozós folytonos függvények terét el látva a

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{(x_1, x_2) \in B} |f_L(x_1, x_2)|$$

normával.

5. Tétel (Vincze, N. [31]). *A $\Phi: \mathcal{M}_B^{hv} \rightarrow C(B), L \mapsto f_L$ leképezés*

folytonos, ahol f_L az L halmazhoz tartozó általánosított kúpszeletfüggvénynek a B téglalagra való leszűkítését jelöli.

Ennek közvetlen következménye a következő tétel.

6. Tétel (Vincze, N. [31]). *Ha $K \in \mathcal{M}_B^{hv}$ és $(L_n) \subset \mathcal{M}_B^{hv}$ olyan halmazzsorozat, amelyre $f_{L_n} \rightarrow f_K$ a $C(B)$ függvényterben, akkor (L_n) bármely konvergens részsorozata konvergál egy olyan $K' \in \mathcal{M}_B^{hv}$ halmazhoz (a Hausdorff-távolságra nézve), amelynek koordináta-röntgenfüggvényei majdnem mindenütt megegyeznek K koordináta-röntgenfüggvényeivel. Továbbá, ha a K halmaz egyértelműen meghatározott a koordináta-röntgenfüggvényei által, akkor K' legfeljebb nullmértékű halmaztól eltekintve megegyezik K -val.*

A fenti tétel segítségével egy elméleti algoritmus adható egy \mathcal{M}_B^{hv} -beli halmaz rekonstruálására a koordináta-röntgenfüggvényei alapján. Ez az algoritmus viszont megfogalmazható egy egészértékű lineáris programozási feladatként, amely megoldására számos módszer alkalmazható. [30]

Summary

Generalized conics are the level sets of functions measuring the average distance from a given set of points K in the Euclidean coordinate space \mathbb{R}^N . Elements of the set K are called foci. The set K is not necessarily finite and the distance may also be different from the Euclidean distance. Moreover we can choose different types of averaging processes like taking finite weighted sums or integration. Most generalizations of conics found in the literature (e.g. polyellipses) fit into this concept.

Applications of generalized conics in differential geometry and geometric tomography are presented in this PhD dissertation. For the application in **differential geometry** we consider the set of foci as manifolds and generalized conics are defined as follows.

Definition 1 *Let Γ be a bounded orientable submanifold in \mathbb{R}^N such that $\text{vol } \Gamma < \infty$ with respect to the induced Riemannian volume form $d\gamma$. The **generalized conic function** corresponding to Γ is the mapping*

$$F_{\Gamma}(\underline{x}) := \frac{1}{\text{Vol}\Gamma} \int_{\Gamma} \gamma \mapsto d(\underline{x}, \gamma) d\gamma \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^N).$$

Hypersurfaces of the form

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^N \mid F_{\Gamma}(\underline{x}) = c, c \in \mathbb{R}^+\}$$

*are called **generalized conics** with foci $\gamma \in \Gamma$.*

In Finsler geometry arc length of curves in the base manifold is measured via line integrals where the length of tangent vectors doesn't depend only on position but on the direction also. A Finslerian manifold is a generalized Berwald manifold if there is a linear connection on the base manifold such that parallel transport induced by the connection preserve the Finslerian length of tangent vectors. If this linear connection is torsion free, then we have (classical) Berwald manifold. Classification of Berwald manifolds is due to Zoltán Szabó [38]. One of the most important tools used for the classification is the fact that the Berwald connection of a Berwald manifold is Riemann-metrizable, i.e. there is a Riemannian metric on the manifold the Lévi-Civita connection is the Berwald connection.

The converse of this problem is the following: let M be a Riemannian manifold and let ∇ be a metrical (but not necessarily torsion free) linear connection on M . Under what conditions is there a non-Riemannian Finsler structure, such that the Berwald connection is ∇ ? The answer: if the orbit of a unit tangent vector in the point $p \in M$ with respect to the holonomy group is not dense in the (Euclidean) unit sphere, then the connection is strictly Berwald metrizable, i.e. there is a non-Riemannian generalized Berwald manifold with linear connection ∇ such that parallel transport induced by ∇ preserve the Finslerian length of tangent vectors. By a similar idea as Szabó's we must find a convex body in the tangent space containing the origin in its interior which is invariant under the elements of the holonomy group and has smooth boundary which is not a quadratic hypersurface. This induces a not Euclidean Minkowski functional in the tangent space having the elements of the holonomy group as linear isometries. Extending this functional by the help of the parallel transport with respect to the Riemannian structure we have a smooth collection of functionals such that it is invariant under the parallel transport with respect to the Lévi-Civita connection.

Consider now a closed subgroup G of the group of linear isometries in

the Euclidean space \mathbb{R}^N . Assume that the orbit of some unit vector under the elements of G is not dense on the unit sphere. Our goal is to find non-Euclidean Minkowski-functional in \mathbb{R}^N such that the elements of G remain isometries. Because of the positive homogeneity of Minkowski functionals it is enough to find a G -invariant convex body containing the origin in its interior which has smooth boundary different from any quadratic hypersurface. This is the indicatrix of the desired functional. The main result of this work is that this body can be represented as a generalized conic.

We have two different cases of the problem according to the reducibility of G . If G is reducible we can take one of the Euclidean unit spheres

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{N-2}$$

as the invariant set under the elements of G according to the reducibility.

If G is reducible we can take one of the Euclidean unit spheres

$$S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_{N-2}$$

as the invariant set under the elements of G according to the reducibility.

Theorem 1 (Vincze, N. [28]) / *The generalized conic defined by formula $F_{S_k}(x) = \frac{c(l)}{\text{Vol}_{S_k}}$, where*

$$c(l) := \frac{2^{l+2} \cdot l!}{(2l+1)!!} \quad \text{and} \quad l := k - 1$$

is not an ellipsoid. Consequently it induces a non-Euclidean Minkowski functional containing the elements of G as linear isometries.

If G is an irreducible group, then consider the orbit $\Gamma_{\underline{z}}$ of the element $\underline{z} \in S_{N-1}$. With the help of the proper right-hand-side constant $c \in \mathbb{R}$ and strictly monotone increasing, convex function $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ we can state the following theorem.

Theorem 2 (Vincze, N. [28]) / *If G is not transitive on the unit sphere, closed and irreducible then one of the hypersurfaces*

$$\int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} d(\underline{x}, \gamma) d\gamma = c \quad \text{and} \quad \int_{\text{conv } \Gamma_{\underline{z}}} g(d(\underline{x}, \gamma)) d\gamma = c$$

induces a not Euclidean Minkowski functional L such that G is the subgroup of the linear isometries with respect to L .

Finally we can state our main theorem.

Theorem 3 (Vincze, N. [28]) / *Let M be a connected Riemannian manifold; if the closure of the holonomy group of a metrical (but not necessarily torsion-free) linear connection ∇ is not transitive on the unit sphere in the tangent space then M can be changed into a non-Riemannian generalized Berwald manifold by generalized conics with respect to the Riemannian structure.*

If we use the distance function induced by the taxicab norm instead of the Euclidean distance, then we can find application of the average distance function and its level sets in **geometric tomography**.

Definition 2 *The generalized conic function corresponding to the compact set $K \subset \mathbb{R}^N$ is the mapping*

$$f_K: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \underline{x} \mapsto f_K(\underline{x}) := \int_K d_1(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y}.$$

Geometric tomography is the area of mathematics dealing with the retrieval of information about a geometric object from data about its intersections, or projections, or both. The word geometric is used here

because we assume that the object is homogeneous in contrast to tomography. In other words we are only interested in the shape of the object. Parallel X-rays are functions that measure the intersection of a given set with hyperplanes parallel to a fixed subspace of co-dimension 1 of \mathbb{R}^N .

Definition 3 *Let $E \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) be a bounded, measurable set and \mathcal{H} is a linear subspace of co-dimension 1 of \mathbb{R}^N with an orthonormal basis $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N-1})$. Then the **X-ray** of the set E parallel to \mathcal{H} is the mapping*

$$X_{\mathcal{H}}E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \lambda_1((t\underline{w} + \mathcal{H}) \cap E),$$

where $(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{N-1}, \underline{w})$ an orthonormal basis of \mathbb{R}^N with the same orientation as the standard basis $(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_N)$.

X-rays parallel to the subspaces $\underline{e}_1^\perp, \dots, \underline{e}_N^\perp$ are called coordinate X-rays and denoted by

$$X_i K = X_{\underline{e}_i^\perp} K, \quad (i = 1, \dots, N).$$

If $N = 2$, then subspaces of co-dimension 1 are 1-dimensional and any basis of such a subspace consist of only one vector \underline{v} . Thus we can say X-ray parallel to the direction \underline{v} when the dimension is two.

The reconstruction problem concerning parallel X-rays is to reconstruct a compact subset of \mathbb{R}^N if the parallel X-rays of this set into some directions are given. In many cases it is enough to construct a sequence of sets that converges to a compact set with respect to the Hausdorff distance, and has the given X-rays. This problem is hard in general, since X-rays of a compact set may be discontinuous, moreover, the set of discontinuities can form an infinite dense subset of \mathbb{R} . Therefore in the literature more specialized families of sets are investigated such as the collection of convex sets.

However, our following theorem states that the coordinate X-rays of any compact set $K \subset \mathbb{R}^N$ can be replaced by the generalized conic function

corresponding to K which is a convex (and consequently continuous) function on \mathbb{R}^N .

Theorem 4 (Vincze, N. [29]) / *For compact bodies K and K^* in \mathbb{R}^N $f_K = f_{K^*}$ if and only if $X_i K = X_i K^*$ for all $i \in \{1, \dots, N\}$ almost everywhere.*

This theorem allows us to obtain reconstruction result for a slightly wider class of sets than the convex sets in the plane, namely for the class of hv-convex (horizontally and vertically convex) sets. First of all we need a localization theorem providing the convergence of generalized conic functions of a convergent sequence of planar hv-convex sets.

If $B = [a, b] \times [c, d]$ is an arbitrary rectangle then let \mathcal{M}_B^{hv} denote the set of all non-empty, compact, connected, hv-convex subsets in the plane which are inside the rectangle B . Let $C(B)$ denote the set of all continuous functions of two variables defined on the rectangle $B = [a, b] \times [c, d]$ equipped with the norm

$$\|f\|_{\text{sup}} := \sup_{(x_1, x_2) \in B} |f_L(x_1, x_2)|.$$

Theorem 5 (Vincze, N. [31]) / *The mapping $\Phi: \mathcal{M}_B^{hv} \rightarrow C(B), L \mapsto f_L$ is continuous, where f_L is the generalized conics function corresponding to the set L restricted to the rectangle B .*

An immediate consequence of this theorem is the following:

Theorem 6 (Vincze, N. [31]) / *If $K \in \mathcal{M}_B^{hv}$ and $(L_n) \subset \mathcal{M}_B^{hv}$ is a sequence of sets such that $f_{L_n} \rightarrow f_K$ in $C(B)$, then any convergent subsequence of (L_n) converges to a set $K' \in \mathcal{M}_B^{hv}$ (with respect to the Hausdorff distance) with the same coordinate X -rays as K almost everywhere. If the set K is determined by its coordinate X -rays then K' differs from K at most of a set of measure zero.*

We can establish an algorithm for the reconstruction of any set in \mathcal{M}_B^{hv} by its coordinate X-rays with the help of the above theorem. This algorithm can be turned into the solution of a linear integer programming problem [30].

Irodalomjegyzék

- [1] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York, 1964.
- [2] I. Agricola, T. Friedrich, On the holonomy of connections with skew-symmetric torsion *Mathematische Annalen*, **328** (4), 711–748, (2004)
- [3] A. Alpers, R. J. Gardner, S. König, R. S. Pennington, C. B. Boothroyd, L. Houben, R. E. Dunin-Borkowski and K. J. Batenburg. Geometric reconstruction methods for electron tomography *Ultramicroscopy*, **128** 42–54, (2013)
- [4] H. Alzer, S.-L- Qui, Monotonicity theorems and inequalities for the complete elliptic integrals *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **172**, 289–312, (2004)
- [5] M. Barczy, Á. Nagy, Cs. Noszály, Cs. Vincze, a Robbins-Monro-type algorithm for computing global minimizer of generalized conic function *Optimization*, **64**, 1999–2020, (2015)
- [6] K. J. Batenburg, J. Sijbers, DART: a practical reconstruction algorithm for discrete tomography *IEEE Transactions on Image Processing*, **20** (9) 2542–2553, (2011)

- [7] J.M. Borwein, A. S. Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization*. CMS Books in Mathematics, Springer-Verlag, New York 2006.
- [8] D. L. Cohn, *Measure Theory* Birkhäuser, Boston, 1980.
- [9] W. A. Coppel, *Foundations of Convex Geometry*, Cambridge University Press, 1998.
- [10] M. Crampin, On the construction of Riemannian metrics from Bernal spaces by averaging *Houston Journal of Mathematics*, **40** (3), 737–750 (2014)
- [11] P. Erdős, I. Vincze, On the approximation of closed convex plane curves, *Mat. Lapok* **9**, 19–36 (1958), (in Hungarian, summaries in Russian and German)
- [12] R. J. Gardner, *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, New-York, 2006, second ed.
- [13] R. J. Gardner, P. Grizmann, Discrete tomography: Determination of finite sets by X-rays, *Transactions of the American Mathematical Society*, **349** 2271–2295, (1997)
- [14] R. J. Gardner, M. Kiderlen, A solution to Hammer’s X-ray reconstruction problem, *Advances in Mathematics*, **214**, 323–343, (2007)
- [15] R. J. Gardner, P. McMullen, On Hammer’s X-ray problem, *Journal of the London Mathematical Society*, **21** (2), 171–175, (1980)
- [16] S. Gueron, R. Tessler, The Fermat-Steiner problem *American Mathematical Monthly* **109** (5), 443–451, (2002)

- [17] A. Gray, P. S. Green, Sphere transitive structures and the triality automorphism *Pacific Journal of Mathematics*, **34** (1), 83–96, (1970)
- [18] C. Gross, T.-K. Strempel, On generalizations of conics and on a generalization of the Fermat-Toricelli problem *American Mathematical Monthly* **105** (8), 732–743 (1998)
- [19] G. T. Herman, *Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections* Springer, London, 2009.
- [20] A. C. Kak, M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging* Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2001.
- [21] D. Kölzow, A. Kuba and A. Volčič. An algorithm for reconstructing convex bodies from their projections. *Discrete and Computational Geometry*, **4** 205–237, (1989)
- [22] S. R. Lay, *Convex Sets and Their Applications* J. Wiley and Sons, New York, 1982.
- [23] D. Li, X. Sun, *Nonlinear Integer Programming* Springer, New-York, 2006.
- [24] V. S. Matveev, M. Troyanov, Completeness and incompleteness of the Binet-Legendre metric *European Journal of Mathematics* DOI 10.1007/s40879-015-0046-4
- [25] Z. A. Melzak and J. S. Forsyth, Polyconics 1. Polyellipses and optimization *Quarterly of Applied Mathematics* **35** (2), 239–255 (1977)

- [26] Á. Nagy, Zs. Rábai, Cs. Vincze, On a special class of generalized conics with infinitely many focal points *Teaching of Mathematics and Computer Science*, **7** (1), 87–99 (2009)
- [27] Á. Nagy and Cs. Vincze, Examples and notes on generalized conics and their applications *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, **26**, 359–375 (2010)
- [28] Á. Nagy, Cs. Vincze, An introduction to the theory of generalized conics and their applications *Journal of Geometry and Physics*, **61**, 815–828 (2011)
- [29] Á. Nagy, Cs. Vincze, On the theory of generalized conics with applications in geometric tomography *Journal of Approximation Theory*, **164** (3), 371–390 (2012)
- [30] Á. Nagy, Cs. Vincze, Reconstruction of hv-convex sets by their coordinate X-ray functions *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **49**, 569–582 (2014)
- [31] Á. Nagy, Cs. Vincze, Generalized conic functions of hv-convex planar sets: continuity properties and relations to X-rays *Aequationes mathematicae*, **89** (4), 1015–1030 (2015)
- [32] Á. Nagy, Cs. Vincze, An algorithm for the reconstruction hv-convex planar bodies by finitely many and noisy measurements of their coordinate X-rays *Fundamenta Informaticae*, **141**, 169–189 (2015)
- [33] M. Petrovic, B. Banjac and B. Malesevic, The geometry of trifocal curves with applications in architecture, urban and spatial planning accepted in SPATIUM International Review, arXiv:1312.1640v3

- [34] M. Ponce and P. Santibáñez, On equidistant sets and generalized conics: the old and the new *American Mathematical Monthly*, **121**(1), 18–32 (2014)
- [35] K. C. Richards, Sharp power mean bounds for the gaussian hypergeometric function *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **308** (1), 303–313, (2005)
- [36] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory* Cambridge University Press, 1993.
- [37] J. Simons, On the transitivity of holonomy systems *Annals of Mathematics*, **76** (2), 213–234 (1962)
- [38] Z. I. Szabó, Positive definite Berwald spaces *Tensor N. S.*, **35**, 25–39 (1981)
- [39] Cs. Vincze, A new proof of Szabó’s theorem on the Riemann-metrizability of Berwald manifolds *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, **21**, 199–204 (2005)
- [40] Cs. Vincze, On Berwald and Wagner manifolds *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, **24**, 169–178 (2008)
- [41] Cs. Vincze, On an existence theorem of Wagner manifolds *Indagationes Mathematicae N. S.*, **17** (1), 129–145 (2006)
- [42] Cs. Vincze, A. Varga, On a lower and upper bound for the curvature of ellipses with more than two foci *Expositiones Mathematicae* **26**, 55–77 (2008)
- [43] G. N. Watson, E. T. Whittaker, *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

- [44] E. Weiszfeld, Sur le point pour lequel la somme distances de n points donnés est minimum *Tôhoku Mathematical Journal* **43**(2), 355–386 (1937)