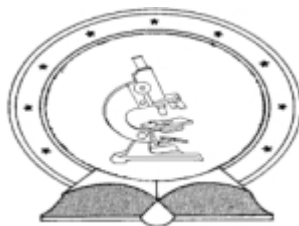


DE TTK



1949

FÜGGVÉNYEGYENLETEK HIPERCSONPORTOKON

Doktori (PhD) értekezés

A szerző neve: Orosz-Kaiser Ágota
A témavezető neve: Dr. Székelyhidi László

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2011

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Matematikai analízis, függvényegyenletek és egyenlőtlenségek programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2011. szeptember 5.

.....
a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Orosz-Kaiser Ágota doktorjelölt 2002-2005 között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematikai analízis, függvényegyenletek és egyenlőtlenségek programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2011. szeptember 5.

.....
a témavezető aláírása

FÜGGVÉNYEGYENLETEK HIPERC SOPORTOKON

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban.

Írta: Orosz-Kaiser Ágota okleveles matematikus.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori iskolája
(Matematikai analízis, függvényegyenletek és egyenlőtlenségek programja) keretében.

Témavezető: Dr. Székelyhidi László

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 20... ..

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 20... ..

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik segítettek abban, hogy ez a disszertáció elkészüljön.

Elsősorban témavezetőmnek, Dr. Székelyhidi Lászlónak, aki elindított a tudományos pályán és komoly támogatást nyújtott nekem mind a tanulmányaim, mind a kutatásaim során.

Köszönöm az Analízis Tanszék tagjainak, továbbá a Matematika Intézet és az Informatikai Kar minden oktatójának és dolgozójának a munkáját és segítségét.

Végül, de nem utolsó sorban köszönöm a férjemnek, szüleimnek, testvéremnek és barátaimnak azt, hogy támogattak, bíztattak és végig mellettem álltak.

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS	1
1 HIPERCSOPORTOK	4
1.1 JELÖLÉSEK, TERMINOLÓGIA	4
1.2 HIPERCSOPORTOK MÉRTÉKALGEBRÁJA	5
1.3 PÉLDÁK HIPERCSOPORTOKRA	10
2 FÜGGVÉNYEGYENLETEK POLINOMIÁLIS HIPERCSOPORTOKON	13
2.1 EGYVÁLTOZÓS POLINOMIÁLIS HIPERCSOPORTOK	13
2.2 MOMENTUM FÜGGVÉNYEK EGYENLETE	22
2.3 SZINUSZ ÉS KOSZINUSZ EGYENLET	28
2.4 LEVI–CIVITA-EGYENLET	34
2.5 DIFFERENCIAEGYENLETEK	40
2.6 TÖBBVÁLTOZÓS POLINOMIÁLIS HIPERCSOPORTOK	47
2.7 MOMENTUM FÜGGVÉNYEK TÖBBVÁLTOZÓS POLINOMIÁLIS HIPER- CSOPORTOKON	51
3 FÜGGVÉNYEGYENLETEK STURM–LIOUVILLE-HIPERCSOPORTOKON	55
3.1 STURM–LIOUVILLE-HIPERCSOPORTOK	55
3.2 MOMENTUM FÜGGVÉNYEK EGYENLETE	60
ÖSSZEFOGLALÓ	68
SUMMARY	77
IRODALOMJEGYZÉK	86

BEVEZETÉS

A függvényegyenletek témaköre napjaink egyik olyan kutatási irányzata, amelyben számos matematikus végez vizsgálatokat. Az első nagyszabású munkát Aczél János 1961-ben megjelent könyvében (lásd [Acz61], [Acz66]) találhatjuk, mely az addig elért legfontosabb eredmények áttekintése. Szintén jelentős, összefoglaló mű Marek Kuczma munkája (lásd [Kuc85]), melyből átfogó képet kaphatunk arról, hogy a Cauchy-féle alapegyenletből kiinduló vizsgálatoknak milyen sokféle iránya lehet, és hogy ezek a kutatások milyen messzire vezethetnek. 1991-ben jelent meg Székelyhidi László monográfiája a topologikus Abel-csoportokon értelmezett konvolúció-típusú függvényegyenletekről ([Sze91]). Mivel a hipercsoportok ezen struktúrák általánosításai, így ebben a könyvben sok olyan problémakör tárgyalására sor kerül, melyekhez hasonlóakkal a disszertáció is foglalkozik.

A hipercsoportok olyan lokálisan kompakt terek, amelyeken a korlátos Radon-mértékek Banach-algebrát alkotnak a mértékek közti konvolúcióval, azonban a hipercsoportok elemei között semmilyen hagyományos értelemben vett művelet nincsen értelmezve. Az általános elmélet kidolgozására az 1970-es években került sor (lásd [Dun73], [Jew75], [Spe75]), a témában végzett kutatások céljai többek között a harmonikus analízis, a valószínűségelmélet és a reprezentációelmélet eszközeinek és eredményeinek kiterjesztése hipercsoportokra.

Hipercsoportok esetén is meghatározó jelentősége van a függvényegyenletek vizsgálatának. Alapvető kérdés például, hogy melyek azok a függvények, amelyek kielégítik a Cauchy-féle exponenciális függvényegyenletet, hiszen ezek közül kerülnek ki a hipercsoport karakterei. Az értekezés célja a már ismert eredmények általánosítása, illetve további fontos függvényegyenletek megoldása speciális hipercsoportok esetén. A valószínűségelméletben játszott szerepük miatt nagy hangsúlyt kapnak a momentum függvényeket leíró egyenletek. A dolgozat az elmúlt évek során részben Székelyhidi Lászlóval közösen, részben pedig egyedül folytatott kutatásaim eredményeit tartalmazza.

A disszertáció három részből áll, az első fejezetben rögzítjük a jelöléseket, leírjuk a hipercsoportok definícióját és a velük kapcsolatos alapvető fogalmakat, majd röviden ismertetünk néhány egyszerű konkrét példát hipercsoportokra.

A második fejezet a diszkrét polinomiális hipercsoportokkal foglalkozik.

Az első alfejezet tartalmazza az egyváltozós polinomiális hipercsoportok definícióját, a már ismert eredmények közül azoknak az áttekintését, amelyeket a későbbiekben felhasználunk és két konkrét példa leírását. A 2.2, 2.3, 2.4 és a 2.5 alfejezetek az egyváltozós polinomiális hipercsoportokkal kapcsolatos saját eredményeket tartalmazzák. A 2.2 alfejezet alapját a Székelyhidi Lászlóval közösen írt [OrS05] cikk alkotja. Megadjuk benne, hogy pontosan melyek az általánosított momentum függvények, továbbá szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy egy másodrendű momentum függvény sorozat segítségével általánosított várható értéket és varianciát lehessen definiálni. A 2.3 alfejezet a szinusz és a koszinusz egyenlet megoldásait leíró tételeket és bizonyításait tartalmazza, az itt alkalmazott módszer a spektrálszintézisen alapszik, majd a következő alfejezetben megmutatjuk, hogy ez a módszer sokkal általánosabb körülmények között is használható. Megadjuk a Levi-Civita-egyenlet megoldásait olyan hipercsoportokon, amelyek rendelkeznek egy megfelelő exponenciális sereggel, és két polinomiális hipercsoporton értelmezett függvényegyenlet példáján keresztül szemléltetjük a tétel alkalmazhatóságát. A Levi-Civita-egyenlettel kapcsolatos eredmények még nem publikáltak, de a szinusz és koszinusz egyenletre vonatkozóak megtalálhatóak az [Oro06] cikkben. A 2.5 alfejezetben rámutatunk, hogy polinomiális hipercsoportok esetén kétféle módon is lehet konstans együtthatós lineáris differenciaegyenleteket értelmezni, és hogy ezek valójában nemkonstans együtthatós egyenleteknek felelnek meg. Mindkét lehetséges értelmezés esetén megadjuk a homogén differenciaegyenletek általános megoldását, és néhány konkrét példa esetén alkalmazzuk is a vonatkozó tételeket. Ezek az eredmények megtalálhatóak az [Oro06b] cikkben. A 2.6 alfejezetben a többváltozós polinomiális hipercsoportok ismertetésére kerül sor, és 2.7 tartalmazza Székelyhidi Lászlóval közös eredményünket az általánosított momentum függvények karakterizációjáról többváltozós polinomiális hipercsoportok esetén (lásd [OrS04]).

A harmadik fejezetben Sturm–Liouville-hipercsoportokkal kapcsolatos eredmények szerepelnek. Két részből áll, az elsőben a Sturm–Liouville-hipercsoportok definíciója mellett néhány ismert tételt és példát írunk le. A második alfejezetben kimondjuk az általánosított momentum függvényeket megadó tételt Sturm–Liouville-hipercsoportok esetén, és leírjuk a bizonyítását. Ez szintén Székelyhidi Lászlóval közösen publikált eredmény ([OrS08]).

1 HIPERC SOPORTOK

Ebben a fejezetben rögzítjük a dolgozatban használt jelöléseket és alapfogalmakat, megadjuk a hipercsoportok definícióját, röviden áttekintjük a harmonikus analízis hipercsoportokon használható elemeit, majd leírunk néhány konkrét példát.

1.1 JELÖLÉSEK, TERMINOLÓGIA

Legyen X egy lokálisan kompakt Hausdorff-tér, az X -en értelmezett folytonos komplex értékű függvények halmazát jelölje $\mathcal{C}(X)$. A kompakt tartójú folytonos függvények halmazát $\mathcal{C}_c(X)$ jelöli, és $\mathcal{C}_c(X)$ előáll a

$$\mathcal{C}_c(X, K) = \{f \in \mathcal{C}_c(X) \mid \text{supp } f \subset K\}$$

terek uniójaként, ahol a $K \subset X$ halmazok kompaktak. Ha ezeket a tereket ellátjuk az egyenletes konvergencia topológiájával, akkor $\mathcal{C}_c(X)$ -en természetes módon kapunk egy lokálisan konvex topológiát, ami a $\mathcal{C}_c(X, K)$ topologikus terek induktív limesze. Azt mondjuk, hogy μ egy *komplex Radon-mérték* X -en, ha μ folytonos lineáris funkcionál $\mathcal{C}_c(X)$ -en. Egy $f \in \mathcal{C}_c(X)$ függvény μ általi képére az alábbi jelöléseket használjuk:

$$\mu(f) = \int_X f(x) d\mu(x) = \int_X f d\mu.$$

X összes komplex Radon-mértékeinek halmazát $\mathcal{M}(X)$ -szel jelöljük, és ha $\mu \in \mathcal{M}(X)$, akkor legyen

$$\|\mu\| = \sup\{|\mu(f)| \mid f \in \mathcal{C}_c(X), \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

A $\mu \in \mathcal{M}(X)$ mérték *korlátos mérték*, ha $\|\mu\|$ véges és *valószínűségi mérték*, ha $\mu \geq 0$ és $\|\mu\| = 1$. X összes korlátos, illetve valószínűségi mértékeinek halmazát $\mathcal{M}^b(X)$, illetve $\mathcal{M}^1(X)$ jelöli. Azt a $\delta_x \in \mathcal{M}^1(X)$ mértéket, amire

$$\delta_x(f) = f(x) \quad (f \in \mathcal{C}_c(X)),$$

az $x \in X$ pontbeli *Dirac-mértéknek* vagy *pontmértéknek* nevezzük.

Jelölje $\mathcal{K}(X)$ az X halmaz nemüres kompakt részhalmazainak terét, és legyen

$$\mathcal{K}_A(B) = \{K \in \mathcal{K}(X) \mid K \cap A \neq \emptyset \text{ és } K \subset B\} \quad (A, B \subset X).$$

Ha $\mathcal{K}(X)$ -et ellátjuk az úgynevezett *Michael-topológiával* ([Mic55]), aminek egy szubbázisát adja a

$$\{\mathcal{K}_A(B) \mid A, B \text{ nyílt részhalmaza } X\text{-nek}\}$$

halmazrendszer, akkor $\mathcal{K}(X)$ lokálisan kompakt Hausdorff-tér lesz. Erre a topológiára teljesül, hogy ha X kompakt, akkor $\mathcal{K}(X)$ is az, és ha (X, ρ) metrikus tér, akkor a Michael-topológia ekvivalens a Hausdorff-topológiával ([KoS97]), amit a

$$\rho(A, B) = \inf\{r \mid A \subset V_r(B) \text{ és } B \subset V_r(A)\}$$

metrika generál, ahol

$$V_r(A) = \{y \in X \mid \exists x \in A : \rho(x, y) < r\}.$$

1.2 HIPERC SOPORTOK MÉRTÉKALGEBRÁJA

A hipercsoport kifejezés az 1930-as években jelent meg először, L. Marty és H. S. Wall algebrai definícióival ([Mar35],[Wal37]), azonban a század során számos, a mai hipercsoport konstrukciókhoz hasonló struktúrát tanulmányoztak más nyelvezetet és jelöléseket használva ([BeK95]). Charles Dunkl ([Dun73]), Robert Jewett ([Jew75]) és René Spector ([Spe75]) egymástól függetlenül adtak meg olyan axiómarendszereket, amelyek lokálisan kompakt hipercsoportokat definiálnak. Bár Jewett axiómái váltak széles körben használatossá, az irodalomban a DJS-hipercsoport elnevezés szerepel a leggyakrabban.

Legyen K egy lokálisan kompakt Hausdorff-tér, amelyre teljesülnek az alábbi axiómák:

- H1 Az $\mathcal{M}^b(K)$ vektortéren adott egy $*$ bináris művelet, amellyel $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ algebra.
- H2 Ha $x, y \in K$, akkor $\delta_x * \delta_y \in \mathcal{M}^1(K)$ és $\text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ kompakt.
- H3 Az $(x, y) \mapsto \delta_x * \delta_y$ leképezés folytonos, ahol $\mathcal{M}^1(K)$ topológiája a $\mathcal{C}_c(K)$ szerinti gyenge topológia.
- H4 Az $(x, y) \mapsto \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ leképezés folytonos, ahol $\mathcal{K}(K)$ topológiája a Michael-topológia.
- H5 Egyértelműen létezik egy olyan $e \in K$ elem, amelyre $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x$ teljesül minden $x \in K$ esetén.

- H6 Létezik egy ${}^\vee : K \rightarrow K$ homeomorfizmus, amelyre minden $x \in K$ esetén fennáll, hogy $(x^\vee)^\vee = x$, és valamely $x, y \in K$ elemekre $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ pontosan akkor teljesül, ha $x = y^\vee$.
- H7 Bármely $x, y \in K$ elemekre $(\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee}$ teljesül, ahol egy tetszőleges $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$ mérték esetén $\mu^\vee$ az alábbi módon definiált:

$$\int_K f(x) d\mu^\vee(x) = \int_K f(x^\vee) d\mu(x) \quad (f \in \mathcal{C}_c(K)).$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $(K, *, {}^\vee)$ *hipercsoport* és a $*$ műveletet *konvolúciónak*, a ${}^\vee$ leképezést pedig *involúciónak* nevezzük. A $(K, *, {}^\vee)$ hipercsoportra gyakran hivatkozunk a rövidebb $(K, *)$ illetve K jelölésekkel. Fontos megjegyezni, hogy a K halmaznak önmagában nincs semmilyen algebrai struktúrája, minden tulajdonságot a mértékalgebrán keresztül örököl azáltal, hogy a K halmaz elemeit azonosítjuk a hozzájuk tartozó Dirac-mértékekkel.

A véges tartójú mértékek halmaza sűrű az $\mathcal{M}^b(K)$ térben, így a konvolúció folytonossága miatt minden $\mu, \nu \in \mathcal{M}^b(K)$ esetén

$$(\mu * \nu)(f) = \int_K \int_K \left(\int_K f(z) d(\delta_x * \delta_y)(z) \right) d\mu(x) d\nu(y),$$

tehát a pontmértékek konvolúciója meghatározza a teljes hipercsoportot, így az axiómákat elegendő ezekre ellenőrizni. Például, ha K egy lokálisan kompakt topologikus csoport, $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$ és $x^\vee = x^{-1}$, akkor $(K, *, {}^\vee)$ hipercsoport. Valóban, a csoportművelet asszociativitása miatt H1 teljesül, a csoport egységeleme a hipercsoportnak is egységeleme és $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_y) = \{xy\}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = y^{-1}$, továbbá

$$(\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{(xy)^{-1}} = \delta_{y^{-1}x^{-1}} = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee}.$$

A hipercsoportok tehát tekinthetők a lokálisan kompakt csoportok általánosításának, ahol a korlátos mértékek konvolúciója hasonlóan működik mint a mértékek Banach-algebrája csoportok esetén.

A K hipercsoportot *kommutatívnak* nevezzük, ha $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ kommutatív algebra. Az olyan hipercsoportot, amelyen az involúció az identikus leképezés, *Hermite-típusúnak* nevezzük. Az Hermite-típusú hipercsoportok szükségképpen kommutatívak, hiszen

$$\delta_x * \delta_y = (\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee} = \delta_y * \delta_x.$$

Ha K egy diszkrét Hermite típusú hipercsoport, akkor az axiómarendszer az alábbi, egyszerűbb alakba írható:

H1* Az $\mathcal{M}^b(K)$ vektortéren adott egy $*$ bináris művelet, amellyel $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ algebra.

H2* Ha $x, y \in K$, akkor $\delta_x * \delta_y \in \mathcal{M}^1(K)$.

H3* Egyértelműen létezik egy olyan $e \in K$ elem, amelyre $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x$ teljesül minden $x \in K$ esetén.

H4* $\text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ véges minden $x, y \in K$ esetén.

H5* Az $x, y \in K$ elemekre $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ pontosan akkor teljesül, ha $x = y$.

A konvolúció operátor segítségével hipercsoportokra is általánosíthatjuk a csoportok esetén természetes módon létező transzláció fogalmát. Tekintsünk egy $f \in \mathcal{C}(K)$ függvényt, és legyen $x, y \in K$. Ekkor az f függvény x -szel való bal- illetve jobb-eltoltja az y pontban

$$\mathcal{T}^x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_x * \delta_y)(z), \quad \mathcal{T}_x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_y * \delta_x)(z).$$

A csoportoknál használható $f(xy)$ kifejezés analógiájaként bevezetjük a $\mathcal{T}$ eltolás operátorral, vagy transzláció operátorral kapcsolatban az

$$f(x * y) = \mathcal{T}^x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_x * \delta_y)(z)$$

jelölést, habár $x * y$ önmagában nem értelmezhető.

Az $f \in \mathcal{C}(K)$ függvény és a $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$ mérték konvolúcióját az alábbi összefüggések definiálják:

$$(f * \mu)(x) = \int_K f(x * y^\vee) d\mu(y) \quad (x \in K),$$

illetve

$$(\mu * f)(x) = \int_K f(y^\vee * x) d\mu(y) \quad (x \in K).$$

Azt mondjuk, hogy az ω pozitív mérték bal-invariáns vagy bal Haar-mérték, ha minden $f \in \mathcal{C}_c(K)$ függvény esetén

$$\int_K \mathcal{T}^y f(x) d\omega(x) = \int_K f(x) d\omega(x) \quad (y \in K),$$

azaz $\omega(\delta_y * f) = \omega(f)$ minden $y \in K$ esetén. Hasonlóan definiálható a *jobb-invariáns* mérték fogalma, és azokat a mértékeket amelyek jobb- és bal-invariánsak is *invariáns*- vagy *Haar-mértékeknek* nevezzük. Habár egyelőre nem ismert, hogy van-e minden DJS-hipercsoporton (bal) invariáns-mérték, de fontos speciális esetekben már bizonyították a létezését. Ha létezik Haar-mérték, akkor az konstans szorzótól eltekintve egyértelmű ([Jew75]). Minden kommutatív hipercsoporton létezik Haar-mérték ([Spe78]). Minden kompakt hipercsoporton létezik bal Haar-mérték és ez egyben jobb-invariáns is ([Jew75]), az ilyen hipercsoportokat *unimodulárisnak* nevezzük. Diszkrét hipercsoportokon létezik bal-invariáns mérték ([Jew75]), de a csoport-esettel ellentétben nem minden diszkrét hipercsoport unimoduláris ([KaW94]). Invariáns mértékekről részletes leírást ad [BIH95], mi csak egy tételt emelünk ki:

1.2.1. TÉTEL. *Ha K egy diszkrét hipercsoport, akkor létezik rajta bal-invariáns mérték, és az $\omega_K(\{e\}) = 1$ normalizációs feltételnek eleget tevő bal Haar-mérték pedig*

$$\omega_K(\{x\}) = \frac{1}{(\delta_{x^\vee} * \delta_x)(\{e\})} \quad (x \in K).$$

B i z o n y í t á s. Az egyszerűség kedvéért az egyelemű halmazokat jelölő kapcsos zárójeleket elhagyjuk. Legyen $x, y, z \in K$. A konvolúció asszociativitása miatt

$$(\delta_x * (\delta_y * \delta_z))(e) = ((\delta_x * \delta_y) * \delta_z)(e),$$

azaz

$$\sum_{t \in K} (\delta_x * \delta_t)(e)(\delta_y * \delta_z)(t) = \sum_{t \in K} (\delta_x * \delta_y)(t)(\delta_t * \delta_z)(e).$$

Mivel a H6 axióma szerint $(\delta_x * \delta_y)(e) > 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = y^\vee$, így

$$(\delta_x * \delta_{x^\vee})(e)(\delta_y * \delta_z)(x^\vee) = (\delta_x * \delta_y)(z^\vee)(\delta_{z^\vee} * \delta_z)(e). \quad (1.1)$$

Ha

$$\omega_K = \sum_{x \in K} \frac{\delta_x}{(\delta_{x^\vee} * \delta_x)(e)},$$

akkor

$$(\delta_y * \omega_K)(x^\vee) = \sum_{z \in K} \frac{(\delta_y * \delta_z)(x^\vee)}{(\delta_{z^\vee} * \delta_z)(e)}.$$

Az (1.1) egyenlőséget felhasználva

$$(\delta_y * \omega_K)(x^\vee) = \sum_{z \in K} \frac{(\delta_x * \delta_y)(z^\vee)}{(\delta_x * \delta_{x^\vee})(e)} = \frac{1}{(\delta_x * \delta_{x^\vee})(e)} = \omega_K(x^\vee).$$

□

Ha egy hipercsoporton létezik ω invariáns mérték, akkor definiálhatjuk az $f, g \in \mathcal{C}(K)$, ω -szerint integrálható függvények konvolúcióját az

$$(f * g)(x) = \int_K \mathcal{T}_x f(y) g(y^\vee) d\omega(y) \quad (x \in K)$$

formulával.

Azt mondjuk, hogy a $\chi \in \mathcal{C}(K)$ függvény *szemikarakter* a $(K, *, {}^\vee)$ kommutatív hipercsoporton, ha nem azonosan nulla és

$$\chi(x * y) = \chi(x)\chi(y), \quad \chi(x^\vee) = \overline{\chi(x)} \quad (x, y \in K)$$

teljesül. A K hipercsoport összes korlátos szemikaraktereinek, azaz *karaktereinek* halmazát $K^\wedge$ jelöli. A $\mu \in \mathcal{M}_b(K)$ mérték *Fourier-transzformáltja* az a $\hat{\mu} : K^\wedge \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, amelyre tetszőleges $\chi \in K^\wedge$ esetén

$$\hat{\mu}(\chi) = \int_K \overline{\chi(x)} d\mu(x).$$

Bármely $\mu, \nu \in \mathcal{M}_b(K)$ esetén teljesül, hogy

$$(\mu * \nu)^\wedge(\chi) = \hat{\mu}(\chi) \hat{\nu}(\chi) \quad (\chi \in K^\wedge).$$

Kompakt tartójú mértékek esetén a Fourier-transzformáció kiterjeszthető a szemikarakterek halmazára, ezt *Fourier-Laplace-transzformációnak* nevezzük.

Az ω Haar-mérték szerint integrálható f függvény *Fourier-transzformáltja* $\hat{f} : K^\wedge \rightarrow \mathbb{C}$, ahol

$$\hat{f}(\chi) = \int_K f(x) \overline{\chi(x)} d\omega(x) \quad (\chi \in K^\wedge),$$

és ha az f, g függvények ω szerint integrálhatóak, akkor

$$(f * g)^\wedge(\chi) = \hat{f}(\chi) \hat{g}(\chi) \quad (\chi \in K^\wedge).$$

A harmonikus analízis hipercsoportokra való általánosításának témakörében lásd [Jew75], [BIH82] és [BIH95].

1.3 PÉLDÁK HIPERC SOPORTOKRA

A dolgozat későbbi fejezeteiben szereplő eredmények olyan függvényegyenletekre vonatkoznak, amelyek diszkrét polinomiális, illetve Sturm–Liouville-hipercsoporthoz tartoznak, amelyek értelmezve. Ezen speciális hipercsoporthoz tartoznak részletes leírására a megfelelő helyen sort kerítünk, azonban ezeken kívül még számos érdekes hipercsoporthoz tartoznak típus létezik. Most a teljesség igénye nélkül felsorolunk néhány egyszerűbb példát ezek közül.

1.3.1. PÉLDA. *Kételemű hipercsoporthoz tartoznak.* Legyen $\theta \in (0, 1]$ és $K = \{0, 1\}$, ahol a 0 a hipercsoporthoz tartozó egységelem lesz. Ekkor természetesen $\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, $\delta_0 * \delta_1 = \delta_1 * \delta_0 = \delta_1$, és az egyetlen nemtriviális konvolúció pedig

$$\delta_1 * \delta_1 = \theta \delta_0 + (1 - \theta) \delta_1.$$

Könnyen látható, hogy ha az involúció az identikus leképezés, akkor $(K, *)$ hipercsoporthoz tartozik, és ha $\theta = 1$, akkor a $\mathbb{Z}_2$ kételemű csoportot kapjuk. A $\theta = 0$ esetet a H5* axióma miatt kell kizárni. Az 1.2.1. Tétel alapján $\omega(0) = 1$, $\omega(1) = 1/\theta$ invariáns mérték.

1.3.2. PÉLDA. *Véges osztály hipercsoporthoz tartoznak.* Legyen G egy tetszőleges véges csoport, melynek konjugált osztályai $C_0 = \{e\}, C_1, \dots, C_n$, és tekintsük a $\mathbb{C}G$ csoportalgebra $c'_i = \sum_{g \in C_i} g$, $i = 1, \dots, n$ elemeit. Ekkor léteznek olyan N_{ij}^k nemnegatív egészek, amelyekre fennállnak az alábbi struktúra egyenletek:

$$c'_i c'_j = \sum_{k=1}^n N_{ij}^k c'_k \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}). \quad (1.2)$$

Ha pedig $c_i = c'_i/|C_i|$, $i = 1, \dots, n$ esetén, akkor (1.2) az alábbi alakba írható:

$$c_i c_j = \sum_{k=1}^n n_{ij}^k c_k,$$

ahol

$$n_{ij}^k = \frac{N_{ij}^k |C_k|}{|C_i| |C_j|}.$$

Ekkor a következő összefüggések kommutatív hipercsoporthoz tartozó struktúrát definiálnak a $\{c_0, \dots, c_n\}$ halmazon:

$$\delta_{c_i} * \delta_{c_j} = \sum_{k=1}^n n_{ij}^k \delta_{c_k} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}),$$

$$c_i^\vee = \frac{1}{|C_i|} \sum_{g \in C_i} g^{-1} \quad (i \in \{1, \dots, n\}).$$

Az S_3 szimmetrikus csoport esetén például

$$C_0 = \{e\}, \quad C_1 = \{(12), (23), (13)\}, \quad C_2 = \{(123), (132)\},$$

és a struktúra egyenletekből adódóan

$$\begin{aligned} \delta_{c_1} * \delta_{c_1} &= \frac{1}{3} \delta_{c_0} + \frac{2}{3} \delta_{c_2}, \\ \delta_{c_1} * \delta_{c_2} &= \delta_{c_1}, \\ \delta_{c_2} * \delta_{c_2} &= \frac{1}{2} \delta_{c_0} + \frac{1}{2} \delta_{c_2}. \end{aligned}$$

Véges hipercsoportokkal kapcsolatos eredményeket találhatunk többek között az alábbi cikkekben: [SuW03], [HJK05], és algebrai vonatkozású hipercsoport konstrukciók témájában lásd például [BIH95], [CDG04].

1.3.3. PÉLDA. *Folytonos polinomiális hipercsoportok.* Legyen $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy Jacobi-típusú polinom rendszer, vagyis az $I = [-1, 1]$ intervallumon az $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ súlyfüggvényre nézve ortogonális rendszer, és tegyük fel, hogy $\alpha \geq \beta > -1$, és $\beta \geq -1/2$ vagy $\alpha + \beta \geq 0$. Ekkor $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -nek létezik az úgynevezett szorzat formulája ([Gas70]), azaz bármely $x, y \in I$ esetén létezik olyan $\delta_{x,y} \in \mathcal{M}^1(I)$ mérték, amelyre

$$P_n(x)P_n(y) = \int_I P_n(z) d\delta_{x,y}(z) \quad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül, továbbá $e = 1$ esetén $\delta_{e,x} = \delta_x$. Belátható, hogy ekkor $(I, *)$ hipercsoport a $\delta_x * \delta_y = \delta_{x,y}$ konvolúcióval ([CoS95]), tehát ekkor

$$f(x * y) = \int_I f(z) d\delta_{x,y}(z).$$

A hipercsoport karakterei éppen a P_n polinomok $n \in \mathbb{N}$ esetén. Az ilyen hipercsoportok bizonyos értelemben véve duálisai a megfelelő diszkrét polinomiális hipercsoportoknak, amelyekről a következő fejezetben lesz szó.

2 FÜGGVÉNYEGYENLETEK POLINOMIÁLIS HIPERCSONPORTOKON

Az ortogonális polinomrendszerek linearizációs, illetve szorzat formuláinak segítségével bizonyos esetekben mértékalgebrák konstruálhatók, ezek a diszkrét polinomiális, illetve folytonos polinomiális hipercsoportok. Első alkalommal I. I. Hirschman mutatott rá arra, hogy a harmonikus analízis eszköz- és fogalomrendszere kialakítható olyan környezetekben is, ahol az exponenciális függvények szerepét ortogonális polinomok veszik át ([Hir56a], [Hir56b]). Később R. Lasser és M. Voit dolgozta ki a polinomiális hipercsoportok definícióját és elméletét ([Voi90], [Las83]). Ebben a fejezetben a diszkrét polinomiális hipercsoportok (röviden: polinomiális hipercsoportok) legfontosabb tulajdonságainak áttekintése után ilyen hipercsoportokon értelmezett függvényegyenleteket fogunk vizsgálni.

2.1 EGYVÁLTOZÓS POLINOMIÁLIS HIPERCSONPORTOK

Legyenek $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan valós sorozatok, amelyekre fennállnak az alábbi tulajdonságok:

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad \gamma_n > 0, \quad \beta_n \geq 0, \quad \alpha_{n+1} > 0 \quad \text{és} \quad \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$$

minden n természetes szám esetén. Definiáljuk a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sorozatot úgy, hogy $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ és

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n-1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n+1}(x) \quad (2.1)$$

minden $n \geq 1$ egész és x valós szám esetén. Ekkor létezik olyan kompakt tartójú π mérték, melyre nézve $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortogonális polinom rendszer ([Fav35]), azaz

$$\int x^t P_n(x) d\pi(x) = 0$$

minden $n \in \mathbb{N}$ és $t = 0, 1, \dots, n-1$ esetén. Minden ortogonális polinom rendszernek van *linearizációs formulája*, azaz léteznek olyan $c(n, m, k)$ konstansok minden n, m, k természetes szám esetén, hogy

$$P_n P_m = \sum_{k=0}^{n+m} c(n, m, k) P_k \quad (2.2)$$

fennáll bármely $n, m \in \mathbb{N}$ esetén, ahol

$$c(n, m, k) = \frac{\int P_k(x) P_n(x) P_m(x) d\pi(x)}{\int P_k^2(x) d\pi(x)}, \quad (2.3)$$

ezek az úgynevezett *linearizációs együtthatók*. A $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom rendszer ortogonalitása miatt $c(n, m, k) = 0$, ha $n > m + k$ vagy $m > n + k$, ezért (2.2) átírható:

$$P_n P_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k) P_k. \quad (2.4)$$

Könnyen belátható, hogy $P_n(1) = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért

$$\sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k) = 1. \quad (2.5)$$

2.1.1. TÉTEL. Legyen $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a (2.1) rekurzív összefüggéssel definiált polinom rendszer, és tegyük fel, hogy a linearizációs együtthatók nemnegatívak, azaz $c(n, m, k) \geq 0$ minden $n, m, k \in \mathbb{N}$ esetén. Ha $\delta_n^\vee = \delta_n$ és

$$\delta_n * \delta_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k) \delta_k, \quad (2.6)$$

ahol $n, m \in \mathbb{N}$, akkor $K = (\mathbb{N}, *,^\vee)$ hipercsoport.

B i z o n y í t á s. Ellenőriznünk kell a diszkrét Hermite-típusú hipercsoportokra vonatkozó axiómák teljesülését.

H1* $(\mathcal{M}^b(\mathbb{N}), +, *)$ Banach-algebra, hiszen a konvolúció kiterjeszthető (2.6) alapján tetszőleges $\mu, \nu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{N}) = l^1$ mértékekre:

$$(\mu * \nu)(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c(n, m, k) \mu(n) \nu(m),$$

és $c(n, m, k) \geq 0$ illetve (2.5) miatt $\mu * \nu \in \mathcal{M}^b(\mathbb{N})$. Az asszociativitás (2.4) következménye:

$$P_n P_m P_l = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k) P_k P_l = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} \sum_{t=|k-l|}^{k+l} c(n, m, k) c(k, l, t) P_t,$$

így

$$(\delta_n * \delta_m) * \delta_l = \delta_n * (\delta_m * \delta_l) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} \sum_{t=|k-l|}^{k+l} c(n, m, k) c(k, l, t) \delta_t.$$

H2* Ha $n, m \in \mathbb{N}$, akkor (2.5) miatt $\delta_n * \delta_m \in \mathcal{M}^1(\mathbb{N})$.

H3* Egyértelműen létezik $e \in \mathbb{N}$ egységelem, mégpedig $e = 0$, ekkor ugyanis tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\delta_0 * \delta_n = \delta_n * \delta_0 = \sum_{k=|n-0|}^{n+0} c(n, 0, k) \delta_k = c(n, 0, n) \delta_n = \delta_n.$$

H4* Tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén $\text{supp}(\delta_n * \delta_m)$ véges halmaz:

$$\text{supp}(\delta_n * \delta_m) = \{|n - m|, \dots, n + m\}.$$

H5* Ha $e = 0 \in \text{supp}(\delta_n * \delta_m)$ akkor $n = m$.

□

A $K = (\mathbb{N}, *, {}^\vee)$, vagy röviden $K = (\mathbb{N}, *)$ hipercsoportot a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sorozat által generált (diszkrét) *polinomiális hipercsoportnak* nevezzük.

2.1.2. LEMMA. *Legyenek $n, m, k \in \mathbb{N}$, $|n - m| \leq k \leq n + m$ esetén $c(n, m, k)$ a $K = (\mathbb{N}, *)$ polinomiális hipercsoport linearizációs együtthatói. Ekkor*

1. $c(n, m, k) = c(m, n, k)$,
2. $c(0, n, n) = 1$,
3. $c(1, n, n + 1) = \gamma_n$, $c(1, n, n) = \beta_n$, $c(1, n, n - 1) = \alpha_n$ ($n \in \mathbb{N}^+$),
4. $c(n, m, m - n) = c(n - 1, m, m - n + 1) \frac{\alpha_{m-n+1}}{\gamma_{n-1}}$ ($m \geq n \geq 1$).

B i z o n y í t á s. Az első két állítás (2.4) következménye, ha pedig az $m = 1$ helyettesítés után ezt összevetjük a (2.1) egyenlőséggel, akkor megkapjuk a harmadik állítást. Legyen most $m \geq n \geq 1$, tekintsük (2.1)-et $n - 1$ esetén, és sorozzuk meg P_m -mel:

$$P_1 P_{n-1} P_m = \alpha_{n-1} P_{n-2} P_m + \beta_{n-1} P_{n-1} P_m + \gamma_{n-1} P_n P_m,$$

azaz

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m-n+1}^{m+n-1} c(n-1, m, k) \sum_{l=|k-1|}^{k+1} c(1, k, l) P_l &= \\
&= \alpha_{n-1} \sum_{k=m-n+2}^{m+n-2} c(n-2, m, k) P_k + \beta_{n-1} \sum_{k=m-n+1}^{m+n-1} c(n-1, m, k) P_k \\
&\quad + \gamma_{n-1} \sum_{k=m-n}^{m+n} c(n, m, k) P_k.
\end{aligned}$$

Összevetve P_{m-n} együtthatóját a bal- és a jobboldalon, az adódik, hogy

$$c(n-1, m, m-n+1)c(1, m-n+1, m-n) = \gamma_{n-1}c(n, m, m-n).$$

Mivel a harmadik állítás szerint $c(1, m-n+1, m-n) = \alpha_{m-n+1}$, így a negyedik állítás is teljesül. $\square$

2.1.3. TÉTEL. A $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sorozat által generált $K = (\mathbb{N}, *)$ hipercsoporton a Haar-mérték $\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \omega(n) \delta_n$, ahol $\omega(0) = 1$,

$$\omega(n) = \frac{\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \quad (n \geq 1),$$

és $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a (2.1) rekurzív összefüggésben szereplő sorozatok.

B i z o n y í t á s. Az 1.2.1. Tétel alapján

$$\omega(n) = \frac{1}{(\delta_n * \delta_n)(0)} = \frac{1}{c(n, n, 0)},$$

és alkalmazva a 2.1.2. Lemma negyedik állítását:

$$\begin{aligned}
c(n, n, 0) &= c(n-1, n, 1) \frac{\alpha_1}{\gamma_{n-1}} = c(n-2, n, 2) \frac{\alpha_2}{\gamma_{n-2}} \frac{\alpha_1}{\gamma_{n-1}} = \\
&= \cdots = c(1, n, n-1) \frac{\alpha_{n-1} \cdots \alpha_1}{\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1}} = \frac{\alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1}{\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Kommutatív csoportok esetén az exponenciális polinomoknak fontos szerepük van számos függvényegyenletekkel kapcsolatos probléma megoldásánál ([Sze91]). Mivel az exponenciális polinomok fogalma az additív és az exponenciális függvényekre épül, az eltolás operátorok lehetővé teszik ezen alapvető függvények definiálását hipercsoportok esetén is.

A $(K, *, {}^\vee)$ hipercsoporton az $a : K \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvényt *additív függvénynek* nevezzük, ha

$$\mathcal{T}_y a(x) = a(x) + a(y) \quad (x, y \in K), \quad (2.7)$$

ami részletesebben azt jelenti, hogy

$$\int_K a(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = a(x * y) = a(x) + a(y)$$

fennáll minden $x, y \in K$ esetén. Az $m : K \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvényt *multiplikatív függvénynek* vagy *exponenciális függvénynek* nevezzük, ha nem azonosan nulla és

$$\mathcal{T}_y m(x) = m(x)m(y) \quad (x, y \in K), \quad (2.8)$$

más szóval m teljesíti az alábbi függvényegyenletet:

$$\int_K m(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = m(x * y) = m(x)m(y).$$

Világos, hogy additív függvények lineáris kombinációja szintén additív, viszont a csoport-esettel ellentétben exponenciális függvények szorzata nem feltétlenül exponenciális. A definícióból közvetlenül adódik, hogy ha e a hipercsoport egységeleme, akkor $a(e) = 0$ minden a additív és $m(e) = 1$ minden m exponenciális függvény esetén. A következőkben felidézünk két ismert állítást, amelyek megadják a polinomiális hipercsoportok additív illetve exponenciális függvényeit.

2.1.4. TÉTEL. Legyen $K = (\mathbb{N}, *)$ a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sorozat által generált polinomiális hipercsoport. Az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény akkor és csak akkor additív K -n, ha

$$a(n) = cP'_n(1) \quad (n \in \mathbb{N})$$

fennáll valamely c komplex szám esetén.

B i z o n y í t á s. Ha $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ additív függvény, akkor minden n pozitív egész szám esetén fennáll, hogy

$$\begin{aligned} a(n) + a(1) &= \mathcal{T}_1 a(n) = a(n * 1) = \sum_{k=n-1}^{n+1} c(n, 1, k) a(k) = \\ &= c(n, 1, n-1) a(n-1) + c(n, 1, n) a(n) + c(n, 1, n+1) a(n+1). \end{aligned}$$

Másrészt, minden n pozitív egész és x valós szám esetén (2.4) alapján

$$xP(x) = c(n, 1, n-1)P_{n-1}(x) + c(n, 1, n)P_n(x) + c(n, 1, n+1)P_{n+1}(x).$$

Ha az egyenletet x szerint deriváljuk, majd $x = 1$ -et helyettesítünk, azt kapjuk, hogy

$$1 + P'_n(1) = c(n, 1, n-1)P'_{n-1}(1) + c(n, 1, n)P'_n(1) + c(n, 1, n+1)P'_{n+1}(1).$$

Ha mindkét oldat megszorozzuk $a(1)$ -gyel, akkor látható, hogy az $n \mapsto a(n)$ és az $n \mapsto a(1)P'_n(1)$ függvény is eleget tesz ugyanannak a rekurzív összefüggésnek, továbbá $a(0) = P'_0(1)$ és $a(1) = a(1)P'_1(1)$, tehát $a(n) = a(1)P'_n(1)$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

A fordított állítás bizonyításához differenciáljuk a (2.4) linearizációs formulát, majd végezzük el az $x = 1$ helyettesítést:

$$P_n(1)P'_m(1) + P'_n(1)P_m(1) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k)P'_k(1) \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Mivel $P_n(1) = P_m(1) = 1$ minden n, m természetes szám esetén, így $n \mapsto P'_n(1)$ valóban additív függvény, ahogyan $n \mapsto cP'_n(1)$ is az minden c komplex szám esetén. $\square$

2.1.5. TÉTEL. Legyen $K = (\mathbb{N}, *)$ a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sorozat által generált polinomiális hipercsoport. Az $m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény akkor és csak akkor exponenciális függvény K -n, ha létezik olyan λ komplex szám, amelyre

$$m(n) = P_n(\lambda) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

B i z o n y í t á s. Tegyük fel, hogy m egy exponenciális függvény K -n, és legyen $\lambda = m(1)$. Ekkor

$$\begin{aligned}\lambda m(n) &= m(1)m(n) = m(1 * n) = \sum_{k=n-1}^{n+1} c(n, 1, k)m(k) = \\ &= c(n, 1, n-1)m(n-1) + c(n, 1, n)m(n) + c(n, 1, n+1)m(n+1).\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ha a

$$P_n(x)P_m(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c(n, m, k)P_k(x)$$

összefüggés minden x valós szám esetén fennáll, akkor minden komplex szám esetén is. Mivel ugyanez a rekurzió teljesül az $n \mapsto P_n(\lambda)$ függvényre mint az $n \mapsto m(n)$ függvényre, továbbá $m(0) = 1 = P_0(\lambda)$ és $m(1) = \lambda = P_1(\lambda)$, így $m(n) = P_n(\lambda)$.

Megfordítva, ha $m(n) = P_n(\lambda)$, akkor

$$\begin{aligned}m(n * m) &= \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k)m(k) = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k)P_k(\lambda) = \\ &= P_n(\lambda)P_m(\lambda) = m(n)m(m).\end{aligned}$$

□

A spektrálszintézis topologikus csoportok eltolásinvariáns függvénytereivel foglalkozik ([Scz47], [Lef58], [Sze91]). Legyen adott egy kommutatív topologikus csoport összes folytonos komplex értékű függvényeinek tere a pontonkénti vektortér műveletekkel és a kompakt halmazokon egyenletes konvergencia topológiájával. A spektrálanalízis kérdése azt jelenti, hogy tartalmaz-e minden varietás exponenciális függvényt. A spektrálszintézis pedig azt vizsgálja, hogy igaz-e minden varietásra, hogy benne az exponenciális monomok lineáris burka sűrű, ahol az exponenciális monomok additív és exponenciális függvények szorzatai. Polinomiális hipercsoportok esetén a fenti problémákat Székelyhidi László vizsgálta ([Sze02]), a következőkben röviden összefoglaljuk főbb eredményeit.

Legyen K egy kommutatív hipercsoport. A K -n értelmezett folytonos függvények $\mathcal{C}(K)$ lineáris terének egy H alterét *eltolásinvariánsnak* nevezzük,

ha minden $f \in H$ és $y \in K$ esetén $\mathcal{T}_y f \in H$. A $V \subset \mathcal{C}(K)$ halmazt *varietásnak* nevezzük, ha nemüres, zárt, eltolásinvariáns altér, és jelölje $\tau(f_1, \dots, f_n)$ az $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}(K)$ függvények összes eltoltjai által generált varietást. Világos, hogy ha m egy exponenciális függvény, akkor $\tau(m)$ 1-dimenziós, és megfordítva, tetszőleges nemüres, zárt, eltolásinvariáns alteret szükségképpen egy exponenciális függvény generál, így a spektrálanalízis kérdése természetes módon általánosítható. Azt mondjuk, hogy a *spektrálanalízis teljesül K -n*, ha K minden varietása tartalmaz egy exponenciális függvényt, azaz egy minimális (1-dimenziós) varietást. A spektrálszintézis kérdése is megfogalmazható általánosan: akkor mondjuk, hogy a *spektrálszintézis teljesül K -n*, ha K minden varietása előáll véges dimenziós varietások összegeként. Láttuk azonban, hogy exponenciális függvények szorzata nem feltétlenül exponenciális, így nem világos, hogy egy általános hipercsoport esetén milyen függvények vehetik át az exponenciális monomok szerepét. Speciálisan, polinomiális hipercsoportok esetén az alábbi definíció lesz célravezető: azt mondjuk, hogy $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ egy *exponenciális monom* a $K = (\mathbb{N}, *)$ polinomiális hipercsoporton, ha

$$\varphi(n) = \sum_{j=0}^k c_j P_n^{(j)}(\lambda) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol k egy nemnegatív egész és $\lambda, c_0, c_1, \dots, c_k$ komplex számok. Az exponenciális monomok összegeként előálló függvényeket *exponenciális polinomoknak* nevezzük. Ilyen típusú függvényekre teljesül az alábbi állítás:

2.1.6. TÉTEL. *Legyen V egy varietása a $K = (\mathbb{N}, *)$ polinomiális hipercsoportnak, k egy pozitív egész, és legyenek $m_1, \dots, m_k$ természetes számok, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ különböző komplex számok és $c_{i,j}$ komplex számok, ahol $i = 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, m_i$. Ha a*

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{m_i} c_{i,j} P_n^{(j)}(\lambda_i) \quad (n \in \mathbb{N})$$

exponenciális polinom eleme V -nek, akkor az $n \mapsto P_n^{(j)}(\lambda_i)$ függvények is elemei V -nek minden $i = 1, \dots, k$ és $j = 0, 1, \dots, m_i$ esetén.

Ezen kívül polinomiális hipercsoportok esetén igaz az is, hogy minden varietás véges dimenziós, és tartalmaz legalább egy exponenciális függvényt, tehát összefoglalásként megfogalmazhatjuk az alábbi tételt:

2.1.7. TÉTEL. Legyen $K = (\mathbb{N}, *)$ a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sorozat által generált polinomiális hipercsoport. Ekkor K -ra teljesül a spektrálszintézis és a spektrálanalízis, továbbá ha V egy n -dimenziós varietás K felett, akkor léteznek olyan $m_1, \dots, m_k$ természetes számok és $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ különböző komplex számok, hogy $m_1 + \dots + m_k = n$, és V -nek egy bázisát adják az $n \mapsto P_n^{(j)}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$ függvények.

Végezetül felsorolunk néhány olyan konkrét példát diszkrét polinomiális hipercsoportokra, melyekben jól ismert ortogonális polinom rendszerek játszik a generáló polinomok szerepét.

2.1.8. PÉLDA. *Csebisev-hipercsoport:* A $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ elsőfajú Csebisev-polinomok a $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ súlyfüggvényre vonatkozóan ortogonális rendszert alkotnak a $[-1, 1]$ intervallumban, ahol

$$T_n(x) = x^n - \binom{n}{2} x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4} x^{n-4}(1-x^2)^2 - \dots$$

Ebben az esetben a (2.1) háromtagú rekurzióban $\beta_n = 0$, $\alpha_n = \gamma_n = 1/2$ minden n pozitív egészre, és $n > 1$ esetén

$$xT_n(x) = \frac{1}{2}T_{n+1}(x) + \frac{1}{2}T_{|n-1|}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Teljes indukcióval megkapható a

$$T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}(T_{n+m}(x) + T_{|n-m|}(x))$$

linearizációs formula, tehát egy $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény esetén

$$f(m * n) = \frac{1}{2}(f(m+n) + f(|m-n|)).$$

Az exponenciális függvények a 2.1.5. Tétel alapján $m(n) = T_n(\lambda)$, az additív függvények pedig a 2.1.4. Tétel szerint $a(n) = cn^2$ alakúak, ahol λ illetve c tetszőleges komplex számok.

2.1.9. PÉLDA. *Legendre-hipercsoport:* A $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ polinomok ortogonális rendszert alkotnak a $[-1, 1]$ intervallumban, ahol

$$P_n(x) = \frac{1}{2n!!} ((x^2 - 1)^n)^{(n)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A háromtagú rekurzió

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakú, ahol $P_0(x) = 1$ és $P_1(x) = x$. Az exponenciális függvények a 2.1.5. Tétel alapján $m(n) = P_n(\lambda)$, az additív függvények pedig a 2.1.4. Tétel szerint $a(n) = c \frac{n(n+1)}{2}$ alakúak, ahol λ illetve c tetszőleges komplex számok.

2.2 MOMENTUM FÜGGVÉNYEK EGYENLETE

Ebben az alfejezetben leírjuk a momentum függvények egyenletének megoldásait polinomiális hipercsoportokon, vázoljuk annak a lehetőségét, hogy az így kapott általánosított másodrendű momentum sorozatok segítségével is definiálhatunk várható értéket és varianciát, végül szükséges és elégséges feltételt adunk polinomiális hipercsoporton általánosított másodrendű momentum sorozat létezésére.

A klasszikus valószínűségszámításban egy μ valószínűségeloszláshoz tartozó k -adik momentum $k = 0, 1, \dots$ esetén

$$m_k(\mu) = \int x^k d\mu(x),$$

és a binomiális tétel következményeként a μ, ν valószínűségeloszlásokra, ha a megfelelő integrálok léteznek, teljesül az alábbi összefüggés:

$$\begin{aligned} m_k(\mu * \nu) &= \int x^k d(\mu * \nu)(x) = \\ &= \int (x + y)^k d\mu(x) d\nu(y) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} m_j(\mu) m_{k-j}(\nu). \end{aligned}$$

Speciálisan,

$$\begin{aligned} m_0(\mu * \nu) &= m_0(\mu) m_0(\nu) = 1, \\ m_1(\mu * \nu) &= m_0(\mu) m_1(\nu) + m_1(\mu) m_0(\nu) = m_1(\nu) + m_1(\mu), \\ m_2(\mu * \nu) &= m_0(\mu) m_2(\nu) + 2m_1(\mu) m_1(\nu) + m_2(\mu) m_0(\nu) = \\ &= m_2(\nu) + 2m_1(\mu) m_1(\nu) + m_2(\mu). \end{aligned}$$

Az első és a második momentum függvény meghatározza a várható értéket és a varianciát:

$$\mathbb{E}(\nu) = m_1(\nu), \quad \mathbb{V}(\nu) = m_2(\nu) - m_1^2(\nu). \quad (2.9)$$

Hipercsoportokon a variancia klasszikus definíciója nem értelmezhető, viszont a momentum függvények segítségével (2.9) alapján mégis lehet definiálni hasonló fogalmat (lásd [Zeu89], [Voi90], [Zeu92b]). A momentum függvények létezése és megadása az egyes hipercsoportokon ennél fogva kiemelkedő fontosságú kérdés. Ebben a fejezetben megadjuk a polinomiális hipercsoportok általánosított momentum függvény sorozatait, ekkor nem követeljük meg, hogy $m_0 = 1$ teljesüljön, csak azt, hogy m_0 exponenciális függvény legyen.

Legyen $(K, *)$ egy hipercsoport és N egy természetes szám. A $\varphi : K \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt *N -ed rendű momentum függvénynek* nevezzük, ha léteznek olyan $\varphi_k : K \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, N$ folytonos függvények, amelyekre $\varphi_0 = 1$, $\varphi_N = \varphi$, és

$$\varphi_k(\delta_x * \delta_y) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varphi_j(x) \varphi_{k-j}(y) \quad (2.10)$$

fennáll $k = 0, 1, \dots, N$ és $x, y \in K$ esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy a φ_k , $k = 0, 1, \dots, N$ függvények egy *N -edrendű momentum sorozatot* alkotnak.

Az első és másodrendű momentum függvények általános alakját polinomiális hipercsoportok esetén L. Gallardo határozta meg ([Gal98]), ezen eredményeket fogjuk általánosítani a $\varphi_0 = 1$ feltétel elhagyásával. Tehát a φ_k , $k = 0, 1, \dots, N$ függvények a φ_0 által generált általánosított *N -ed rendű momentum sorozatot* alkotnak, ha kielégítik a (2.10) egyenletrendszert, ekkor $\varphi = \varphi_N$ *általánosított N -ed rendű momentum függvény*. Például az $N = 1$ rendű momentum függvények éppen az additív függvények, és az $N = 1$ rendű általánosított momentum függvények a φ_0 függvénnyel kielégítik a szinusz egyenletet (lásd 2.3 alfejezet):

$$\varphi_1(x * y) = \varphi_0(x) \varphi_1(y) + \varphi_0(y) \varphi_1(x) \quad (x, y \in K).$$

Megjegyezzünk, hogy hasonló függvényegyenlet rendszert vizsgált Aczél János grupoidokon ([Acz77]). A következő tétel megadja az általánosított momentum függvényeket polinomiális hipercsoportokon.

2.2.1. TÉTEL. *Legyen $(\mathbb{N}, *)$ a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom rendszer által generált polinomiális hipercsoport és λ tetszőleges komplex szám. A $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N : K \rightarrow \mathbb{C}$*

*függvények akkor és csak akkor alkotnak a $\varphi_0(n) = P_n(\lambda)$ exponenciális függvény által generált általánosított N -ed rendű momentum sorozatot $(\mathbb{N}, *)$ -on, ha*

$$\varphi_k(n) = (P_n \circ f)^{(k)}(0) \quad (2.11)$$

fennáll mined $n \in \mathbb{N}$ és $k = 0, 1, \dots, N$ esetén, ahol

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!} x^j \quad (x \in \mathbb{C}), \quad (2.12)$$

$c_0 = \lambda$ és $c_j, j = 1, 2, \dots$ tetszőleges komplex számok.

B i z o n y í t á s. Ha $\varphi_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, k = 0, \dots, N$ egy általánosított momentum sorozat, akkor $\varphi_0(0) = P_0(\lambda) = 1$ és

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(0 * 0) = P_0(\lambda)\varphi_1(0) + P_0(\lambda)\varphi_1(0) = 2\varphi_1(0).$$

Tehát $\varphi_1(0) = 0$, és teljes indukcióval $\varphi_k(0) = 0$ adódik $k = 1, \dots, N$ esetén. Definíció szerint minden n pozitív egész esetén

$$\begin{aligned} P_n(\lambda)\varphi_1(1) + \lambda\varphi_1(n) &= \varphi_1(n * 1) = \\ &= c(n, 1, n-1)\varphi_1(n-1) + c(n, 1, n)\varphi_1(n) + \\ &+ c(n, 1, n+1)\varphi_1(n+1), \end{aligned}$$

másrészt a linearizációs formula alapján

$$xP_n(x) = c(n, 1, n-1)P_{n-1}(x) + c(n, 1, n)P_n(x) + c(n, 1, n+1)P_{n+1}(x).$$

Ha a fenti egyenlőséget x -szerint deriváljuk, megszorozzuk $\varphi_1(1)$ -gyel majd alkalmazzuk az $x = \lambda$ helyettesítést, akkor a következő összefüggést kapjuk:

$$\begin{aligned} P'_n(\lambda)\varphi_1(1) + \lambda P'_n(\lambda)\varphi_1(1) &= c(n, 1, n-1)\varphi_1(1)P'_{n-1}(\lambda) + \\ &+ c(n, 1, n)\varphi_1(1)P'_n(\lambda) + \\ &+ c(n, 1, n+1)\varphi_1(1)P'_{n+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Mivel $n \mapsto \varphi_1(n)$ és $n \mapsto P'_n(\lambda)\varphi_1(1)$ ugyanazt a rekurzív összefüggést elégíti ki, továbbá $\varphi_1(0) = 0 = P'_0(\lambda)\varphi_1(1)$ és $\varphi_1(1) = P'_1(\lambda)\varphi_1(1)$, így

$$\varphi_1(n) = P'_n(\lambda)\varphi_1(1) = (P_n \circ f)'(0).$$

Ezután tegyük fel, hogy $\varphi_k(n) = (P_n \circ f)^{(k)}(0)$ fennáll minden $0 \leq k \leq N-1$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned}\varphi_N(n * 1) &= P_1(\lambda)\varphi_N(n) + \varphi_N(1)P_n(\lambda) + \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k(1)\varphi_{N-k}(n) = \\ &= c(n, 1, n-1)\varphi_N(n-1) + c(n, 1, n)\varphi_N(n) + \\ &+ c(n, 1, n+1)\varphi_N(n+1).\end{aligned}$$

Másrészt, ha N -szer deriváljuk az

$$f(x)(P_n \circ f)(x) = \sum_{i=n-1}^{n+1} c(n, 1, i)(P_i \circ f)(x)$$

egyenlőséget, akkor az $x = 0$ helyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}[f(P_n \circ f)]^{(N)}(0) &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} f^{(k)}(0)(P_n \circ f)^{(N-k)}(0) = \\ &= \lambda(P_n \circ f)^{(N)}(0) + \varphi_N(1)P_n(\lambda) + \sum_{k=1}^{N-1} \binom{N}{k} \varphi_k(1)\varphi_{N-k}(n) \\ &= c(n, 1, n-1)(P_{n-1} \circ f)^{(N)}(0) + \\ &+ c(n, 1, n)(P_n \circ f)^{(N)}(0) + c(n, 1, n+1)(P_{n+1} \circ f)^{(N)}(0).\end{aligned}$$

Mivel $n \mapsto \varphi_N(n)$ és $n \mapsto (P_n \circ f)^{(N)}(0)$ kielégítik ugyanazt a rekurzív összefüggést, és $\varphi_N(0) = 0 = (P_0 \circ f)^{(N)}(0)$ illetve $\varphi_N(1) = (P_1 \circ f)^{(N)}(0)$, így

$$\varphi_k(n) = (P_n \circ f)^{(k)}(0)$$

minden $0 \leq k \leq N$ esetén.

Megfordítva, ha $\varphi_k(n) = (P_n \circ f)^{(k)}$, ahol $k = 0, 1, \dots, N$, akkor a linearizációs formula N -szeri differenciálásával a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} P_n^{(k-j)}(x) P_m^{(j)}(x) = \sum_{l=|n-m|}^{|n+m|} c(n, m, l) P_l^{(k)}(x),$$

tehát

$$\begin{aligned}\varphi_k(n * m) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (P_n \circ f)^{(k-j)}(0) (P_m \circ f)^{(j)}(0) = \\ &= \sum_{l=|n-m|}^{|n+m|} c(n, m, l) (P_l \circ f)^{(k)}(0)\end{aligned}$$

teljesül minden $0 \leq k \leq N$ esetén, így $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N$ valóban egy általánosított momentum sorozat. $\square$

Valószínűségszámításbeli alkalmazásoknál, ha m_1 és m_2 első illetve másodrendű momentum függvények a $(K, *)$ hipercsoporton, akkor fel kell még tételeznünk, hogy valós értékűek és eleget tesznek az

$$m_1^2(x) \leq m_2(x) \quad (x \in K)$$

összefüggésnek, lásd a (2.9) második egyenlőségét. Ezen feltételek garantálják, hogy ha $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ és $m_2(\mu) < \infty$, akkor az

$$\mathbb{E}_*(\mu) = m_1(\mu), \quad \mathbb{V}_*(\mu) = m_2(\mu) - m_1^2(\mu)$$

várható érték és variancia esetén teljesül az additivitás. Felmerül a kérdés, hogy ha m_0, m_1, m_2 egy általánosított másodrendű momentum sorozat a K hipercsoporton, akkor lehet-e a segítségükkel várható értéket és varianciát definiálni.

Legyen $(K, *)$ egy hipercsoport és μ egy valószínűségi mérték K -n. Azt mondjuk, hogy az m exponenciális függvény nincs μ spektrumában, ha m integrálható μ szerint és $\int_K m d\mu \neq 0$. Ebben az értelemben μ *spektruma* tartalmazza K azon exponenciális függvényeit, amelyek vagy nem integrálhatóak μ szerint vagy teljesül rájuk, hogy $\int_K m d\mu = 0$. Speciálisan, ha K Hermite-féle hipercsoport és μ kompakt tartójú, akkor spektruma a Fourier-Laplace-transzformáltjának zérushelyeiből áll.

Tegyük fel, hogy $m_2 \geq 0$, m_0, m_1, m_2 valós értékű általánosított momentum sorozat K -n, amelyet az m_0 exponenciális függvény generál, és hogy

$$m_1^2(x) \leq m_0(x)m_2(x) \tag{2.13}$$

fennáll minden x eleme K esetén. Ha az m_0 exponenciális függvény nem tartozik bele μ spektrumába és m_2 integrálható μ szerint, akkor μ *általánosított várható*

értéke, illetve általánosított varianciája legyen a következő:

$$\mathbb{E}_{m_0}(\mu) = \frac{m_1(\mu)}{m_0(\mu)}, \quad \mathbb{V}_{m_0}(\mu) = \frac{m_2(\mu)}{m_0(\mu)} - \left(\frac{m_1(\mu)}{m_0(\mu)} \right)^2.$$

A következő tétel mutatja, hogy az így definiált értékek is rendelkeznek az additivitás tulajdonságával.

2.2.2. TÉTEL. *Legyen $(K, *)$ egy Hermite-féle hipercsoport és m_0, m_1, m_2 valós értékű folytonos függvényekből álló általánosított momentum sorozat, ahol m_2 nemnegatív és minden $x \in K$ esetén*

$$m_1^2(x) \leq m_0(x)m_2(x).$$

Ha μ, ν olyan valószínűségi mértékek K -n, amelyeknek m_0 nincs a spektrumában és $m_2(\mu), m_2(\nu) < \infty$, akkor létezik μ és ν általánosított várható értéke és varianciája, továbbá

$$\mathbb{E}_{m_0}(\mu * \nu) = \mathbb{E}_{m_0}(\mu) + \mathbb{E}_{m_0}(\nu), \quad \mathbb{V}_{m_0}(\mu * \nu) = \mathbb{V}_{m_0}(\mu) + \mathbb{V}_{m_0}(\nu).$$

B i z o n y í t á s. A Fubini-tétel és a

$$(\mu * \nu)^\wedge = \mu^\wedge * \nu^\wedge$$

konvolúciós-formula alapján m_0 nem tarozik $\mu * \nu$ spektrumához. A μ, ν és $\mu * \nu$ mértékek általánosított várható értékének és varianciájának létezése a Cauchy–Schwartz-egyenlőtlenség és a (2.13) egyenlőtlenség következménye. Másrészt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{m_0}(\mu * \nu) &= \frac{\int m_1 d(\mu * \nu)}{\int m_0 d(\mu * \nu)} = \frac{\int \int m_1(x * y) d\mu(x) d\nu(y)}{\int \int m_0(x * y) d\mu(x) d\nu(y)} = \\ &= \frac{\int \int m_1(x)m_0(y) d\mu(x) d\nu(y) + \int \int m_1(y)m_0(x) d\mu(x) d\nu(y)}{\int \int m_0(x)m_0(y) d\mu(x) d\nu(y)} = \\ &= \mathbb{E}_{m_0}(\mu) + \mathbb{E}_{m_0}(\nu). \end{aligned}$$

Hasonló számítás adja a $\mathbb{V}_{m_0}$ -ra vonatkozó formulát. □

A 2.2.1. Tétel tétel felhasználásával kapjuk a következő eredményt (vö: [Gal98], 4.2.10. Következmény).

2.2.3. TÉTEL. *A $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom rendszer által generált hipercsoporton pontosan akkor létezik egy olyan m_0, m_1, m_2 nem triviális, valós értékű általánosított*

momentum sorozat, amelyre $m_0(n) = P_n(\lambda)$, λ valós szám, m_2 nemnegatív és teljesül (2.13), ha

$$\sup_{n>0} \frac{(P'_n(\lambda))^2 - P''_n(\lambda) \cdot P_n(\lambda)}{P'_n(\lambda) \cdot P_n(\lambda)} < \infty. \quad (2.14)$$

B i z o n y í t á s. A 2.2.1. Tétel alapján m_0, m_1, m_2 pontosan akkor általánosított momentum sorozat, ha valamely c_0, c_1, c_2 számokra

$$\begin{aligned} m_0(n) &= P_n(c_0), \\ m_1(n) &= c_1 P'_n(c_0), \\ m_2(n) &= c_1^2 P''_n(c_0) + c_2 P'_n(c_0). \end{aligned}$$

Ha $\lambda = c_0$ és a tétel feltételei teljesülnek, akkor

$$c_1^2 (P'_n(\lambda))^2 \leq P_n(\lambda) (c_1^2 P''_n(\lambda) + c_2 P'_n(\lambda)),$$

azaz

$$\frac{c_1^2 \left((P'_n(\lambda))^2 - P''_n(\lambda) \cdot P_n(\lambda) \right)}{P'_n(\lambda) \cdot P_n(\lambda)} \leq c_2,$$

és (2.14) fennáll.

Megfordítva, ha (2.14) teljesül, akkor léteznek olyan c_1, c_2 valós számok, amikkel a fenti momentum függvény sorozat teljesíti a tétel követelményeit. $\square$

2.3 SZINUSZ ÉS KOSZINUSZ EGYENLET

Ebben az alfejezetben megadjuk a szinusz és a koszinusz egyenlet megoldásait polinomiális hipercsoportokon. A módszer a spektrálanalízisen alapszik.

Tekintsük valamely $(\mathbb{N}, *)$ polinomiális hipercsoporton az

$$f(n * m) = f(n)g(m) + f(m)g(n) \quad (n, m \in \mathbb{N}) \quad (2.15)$$

szinusz egyenletet, illetve az

$$f(n * m) = f(n)f(m) - g(n)g(m) \quad (n, m \in \mathbb{N}) \quad (2.16)$$

koszinusz egyenletet. Ezeket az egyenleteket számos matematikus vizsgálta különböző algebrai struktúrákon, lásd [Acz66], [CKN85], [Cor77], [Hos69], [RoS60], [Seg63]. Egy adott polinomiális hipercsoporton (2.15) és (2.16) nemállandó együtthatós differenciaegyenletekké transzformálódnak, míg például a 2.1.8. Példában szereplő elsőfajú Csebisev-polinomokhoz tartozó $(\mathbb{N}, *)$ hipercsoport esetén a szinusz egyenlet a következő alakba írható:

$$f(n+m) + f(|n-m|) = 2f(n)g(m) + 2f(m)g(n),$$

ahol $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ismeretlen függvények. Ez a függvényegyenlet közeli kapcsolatban áll a d'Alembert-egyenlet Wilson-féle általánosításához (lásd [Acz66]), de az $|n-m|$ tényező technikai problémákat okozhat a megoldás során. Ha azonban a 2.1.7. Tételben ismertetett spektrálanalízis eszközeit felhasználjuk, akkor egy általános polinomiális hipercsoporton is meg tudjuk vizsgálni az egyenleteket. Először a szinusz egyenlet megoldásait adjuk meg.

2.3.1. TÉTEL. *Legyen $(\mathbb{N}, *)$ a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom rendszer által generált hipercsoport és legyenek $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények, ahol f nem azonosan nulla. Az f és g függvények pontosan akkor elégítik ki a (2.15) egyenletet, ha felírhatóak az alábbi alakok valamelyikébe:*

$$I. \quad f(n) = aP_n(\lambda), \quad g(n) = P_n(\lambda)/2,$$

$$II. \quad f(n) = a(P_n(\lambda_1) - P_n(\lambda_2)), \quad g(n) = (P_n(\lambda_1) + P_n(\lambda_2))/2,$$

$$III. \quad f(n) = bP'_n(\lambda), \quad g(n) = P_n(\lambda),$$

ahol a, b, λ, λ_1 és λ_2 tetszőleges komplex számok.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f és g kielégíti a szinusz egyenletet, és jelölje $\tau(f)$ az f által generált eltolásinvariáns alteret. Az egyenletből következik, hogy f összes eltoltja előáll mint f és g lineáris kombinációja, így $\tau(f)$ dimenziója legfeljebb 2. A spektrálszintézis és spektrálanalízis polinomiális hipercsoportokra vonatkozó 2.1.7. Tétele alapján (lásd [Sze02]) a $\tau(f)$ alteret egy vagy két exponenciális monom generálja. Három különböző eset lehetséges: ha $\tau(f)$ egydimenziós, akkor szükségképpen egy exponenciális függvény generálja, ha pedig kétdimenziós, akkor vagy két különböző exponenciális függvény, vagy $n \mapsto P_n(\lambda)$ és $n \mapsto P'_n(\lambda)$ alakú függvények generálják, ahol λ egy komplex szám.

Az első esetben f és g egy rögzített exponenciális függvény skalárszorosai:

$$f(n) = aP_n(\lambda), \quad g(n) = bP_n(\lambda),$$

ahol a, b és λ komplex számok. Behelyettesítve a (2.15) egyenletbe

$$f(n * m) = aP_n(\lambda)bP_m(\lambda) + aP_m(\lambda)bP_n(\lambda) = 2abP_n(\lambda)P_m(\lambda)$$

adódik, másrészt

$$f(n * m) = aP_n(\lambda)P_m(\lambda),$$

innen $b = 1/2$ és a tetszőleges komplex szám, ez a tétel I. esetét adja.

Ha két különböző exponenciális függvény generálja az alteret, akkor valamely a, b, c, d és $\lambda_1 \neq \lambda_2$ komplex számok esetén

$$f(n) = aP_n(\lambda_1) + bP_n(\lambda_2), \quad g(n) = cP_n(\lambda_1) + dP_n(\lambda_2).$$

Ekkor $f(0) = a + b$, $g(0) = c + d$ és a (2.15) egyenletből az $m = 0$ helyettesítéssel

$$f(n) = f(n)(c + d) + (a + b)g(n),$$

és

$$[aP_n(\lambda_1) + bP_n(\lambda_2)](1 - (c + d)) = (a + b)[cP_n(\lambda_1) + dP_n(\lambda_2)].$$

Mivel $n \mapsto P_n(\lambda_1)$ és $n \mapsto P_n(\lambda_2)$ lineárisan függetlenek, ezért az együtthatóik a bal- illetve a jobboldalon megegyeznek: $a - ac - ad = ac + bc$ azaz $ad + bc = a(1 - 2c)$ és hasonlóan $ad + bc = b(1 - 2d)$. Ha most $m = 1$ -et helyettesítünk (2.15)-be, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(n * 1) &= 2acP_n(\lambda_1)\lambda_1 + 2bdP_n(\lambda_2)\lambda_2 + (ad + bc)[P_n(\lambda_2)\lambda_1 + P_n(\lambda_1)\lambda_2] = \\ &= P_n(\lambda_1)[2ac\lambda_1 + (ad + bc)\lambda_2] + P_n(\lambda_2)[2bd\lambda_2 + (ad + bc)\lambda_1], \end{aligned}$$

másrészt $n \mapsto P_n(\lambda)$ multiplikativitását használva

$$f(n * 1) = aP_{n*1}(\lambda_1) + bP_{n*1}(\lambda_2) = aP_n(\lambda_1)\lambda_1 + bP_n(\lambda_2)\lambda_2.$$

Itt az egyszerűség kedvéért $P_{n*1}(\lambda_1)$ jelöli az $n \mapsto \varphi(n * 1)$ függvényt, ahol $\varphi(n) = P_n(\lambda_1)$. Összevetve az előző egyenlőségeket:

$$2ac\lambda_1 + (ad + bc)\lambda_2 = a\lambda_1,$$

$$2bd\lambda_2 + (ad + bc)\lambda_1 = b\lambda_2,$$

majd felhasználva az $ad + bc = a(1 - 2c) = b(1 - 2d)$ összefüggést:

$$a(1 - 2c)(\lambda_2 - \lambda_1) = 0,$$

$$b(1 - 2d)(\lambda_2 - \lambda_1) = 0.$$

Mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ezért $c = d = 1/2$. A szinusz egyenletbe $m = n = 0$ -t írva $(a + b) = 2(a + b)(c + d)$ adódik, azaz $b = -a$. Tehát

$$f(n) = a(P_n(\lambda_1) - P_n(\lambda_2)), \quad g(n) = \frac{1}{2}(P_n(\lambda_1) + P_n(\lambda_2)),$$

ami éppen a II. eset

Végül, ha a $\tau(f)$ alteret a $P_n(\lambda)$ és a $P'_n(\lambda)$ függvények generálják, ahol λ egy komplex szám, akkor

$$f(n) = aP_n(\lambda) + bP'_n(\lambda) \quad \text{és} \quad g(n) = cP_n(\lambda) + dP'_n(\lambda)$$

valamely a, b, c, d komplex számok esetén. Ekkor $f(0) = a$, $g(0) = c$, $f(1) = a\lambda + b$, $g(1) = c\lambda + d$ és

$$f(n * 0) = f(n)g(0) + f(0)g(n),$$

azaz

$$f(n)(1 - c) = ag(n),$$

tehát

$$[aP_n(\lambda) + bP'_n(\lambda)](1 - c) = acP_n(\lambda) + adP'_n(\lambda).$$

Innen $a = 2ac$ és $b - bc = ad$, majd az $m = 1$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(n * 1) &= f(n)g(1) + f(1)g(n) = \\ &= [aP_n(\lambda) + bP'_n(\lambda)](c\lambda + d) + (a\lambda + b)[cP_n(\lambda) + dP'_n(\lambda)] = \\ &= P_n(\lambda)[a(c\lambda + d) + c(a\lambda + b)] + P'_n(\lambda)[b(c\lambda + d) + d(a\lambda + b)]. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} f(n * 1) &= aP_{n*1}(\lambda) + b(P_{n*1}(\lambda))' = aP_n(\lambda)\lambda + bP'_n(\lambda)\lambda + bP_n(\lambda) = \\ &= P_n(\lambda)(a\lambda + b) + b\lambda P'_n(\lambda), \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} a\lambda + b &= 2ac\lambda + ad + cb, \\ b\lambda &= bc\lambda + ad\lambda + 2bd. \end{aligned}$$

A szinusz egyenletbe $m = 0$ -t helyettesítve adódik, hogy $a = 0$, vagy $c = 1/2$ és $b = 2ad$. Előbbi esetben $b = cb$ és $b \neq 0$, tehát $c = 1$, ekkor $b\lambda = b\lambda + 2bd$,

ezért $d = 0$. Az utóbbi esetben $b\lambda = b\lambda + 2bd$ miatt vagy $b = d = 0$, amit már lefedett az I. eset, vagy $a = b = 0$, ami ellentmond annak, hogy f nem azonosan nulla. Tehát

$$f(n) = bP'_n(\lambda), \quad g(n) = P_n(\lambda).$$

Megfordítva, könnyen ellenőrizhető, hogy az I.–III. esetekben szereplő függvények valóban megoldásai a (2.15) egyenletnek. $\square$

A következő tétel a koszinusz egyenlet általános megoldását adja meg polinomiális hipercsoporthoz.

2.3.2. TÉTEL. *Legyen $(\mathbb{N}, *)$ a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom rendszer által generált hipercsoporthoz és legyenek $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények, ahol f nem azonosan nulla. Az f és g függvények pontosan akkor elégítik ki a (2.16) egyenletet, ha felírhatók az alábbi alakok valamelyikébe:*

$$I. \quad f(n) = aP_n(\lambda), \quad g(n) = \sqrt{a^2 - a} P_n(\lambda),$$

$$II. \quad f(n) = aP_n(\lambda_1) + (1 - a)P_n(\lambda_2), \quad g(n) = \sqrt{a^2 - a} (P_n(\lambda_1) - P_n(\lambda_2)),$$

$$III. \quad f(n) = P_n(\lambda) + bP'_n(\lambda), \quad g(n) = \pm bP'_n(\lambda),$$

ahol a, b, λ, λ_1 és λ_2 tetszőleges komplex számok.

Bizonyítás. A 2.3.1. Tétel bizonyításában használt módszert alkalmazzuk.

Az első esetben f és g az alábbi alakba írható:

$$f(n) = aP_n(\lambda), \quad g(n) = bP_n(\lambda)$$

valamely a, b, λ komplex számok esetén, tehát

$$f(n * m) = a^2 P_n(\lambda) P_m(\lambda) - b^2 P_m(\lambda) P_n(\lambda) = (a^2 - b^2) P_n(\lambda) P_m(\lambda),$$

és

$$f(n * m) = aP_n(\lambda) P_m(\lambda).$$

Ekkor $a = a^2 - b^2$, és az I. esetben szereplő függvények adódnak megoldásként.

Ha a $\tau(f)$ alteret két különböző exponenciális függvény generálja, akkor

$$f(n) = aP_n(\lambda_1) + bP_n(\lambda_2), \quad g(n) = cP_n(\lambda_1) + dP_n(\lambda_2)$$

valamely a, b, c, d és $\lambda_1 \neq \lambda_2$ komplex számok esetén. Világos, hogy ekkor $f(0) = a + b$ és $g(0) = c + d$. A (2.16) egyenletbe helyettesítve $m = 0$ -t, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} aP_n(\lambda_1) + bP_n(\lambda_2) &= \\ &= (a + b)(aP_n(\lambda_1) + bP_n(\lambda_2)) - (c + d)(cP_n(\lambda_1) + dP_n(\lambda_2)) = \\ &= (a^2 - c^2)P_n(\lambda_1) + (b^2 - d^2)P_n(\lambda_2) + (ab - cd)(P_n(\lambda_1) + P_n(\lambda_2)). \end{aligned}$$

Itt $n \mapsto P_n(\lambda_1)$ és $n \mapsto P_n(\lambda_2)$ lineárisan függetlenek, így

$$a - a^2 + c^2 = b - b^2 + d^2 = ab - cd. \quad (2.17)$$

Ha $m = 1$ -et helyettesítünk a (2.16) egyenletbe, akkor pedig

$$f(n * 1) = [aP_n(\lambda_1) + bP_n(\lambda_2)](a\lambda_1 + b\lambda_2) - [cP_n(\lambda_1) + dP_n(\lambda_2)](c\lambda_1 + d\lambda_2)$$

és

$$f(n * 1) = aP_{n*1}(\lambda_1) + bP_{n*1}(\lambda_2) = aP_n(\lambda_1)\lambda_1 + bP_n(\lambda_2)\lambda_2.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} (a - a^2 + c^2)\lambda_1 &= (ab - cd)\lambda_2, \\ (b - b^2 + d^2)\lambda_2 &= (ab - cd)\lambda_1, \end{aligned}$$

és felhasználva a (2.17) egyenletet $ab - cd = 0$, $c = \sqrt{a^2 - a}$, $d = \sqrt{b^2 - b}$ és

$$ab = cd = \sqrt{a^2 - a} \sqrt{b^2 - b}.$$

Négyzetre emeléssel $a + b = 1$ adódik, mert az $a = 0$ vagy $b = 0$ eseteket már tárgyaltuk. Tehát

$$f(n) = aP_n(\lambda_1) + (1 - a)P_n(\lambda_2), \quad g(n) = \sqrt{a^2 - a}(P_n(\lambda_1) - P_n(\lambda_2)),$$

és ez éppen a II. eset.

Most tegyük fel, hogy a $\tau(f)$ alteret az $n \mapsto P_n(\lambda)$ és $n \mapsto P'_n(\lambda)$ függvények generálják valamely λ komplex szám esetén, ekkor

$$f(n) = aP_n(\lambda) + bP'_n(\lambda), \quad g(n) = cP_n(\lambda) + dP'_n(\lambda).$$

Nyilvánvaló, hogy $f(0) = a$, $g(0) = c$, $f(1) = a\lambda + b$ és $g(1) = c\lambda + d$, majd az $m = 0$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} f(n) &= aP_n(\lambda) + bP'_n(\lambda) = a[aP_n(\lambda) + bP'_n(\lambda)] - c[cP_n(\lambda) + dP'_n(\lambda)] = \\ &= (a^2 - c^2)P_n(\lambda) + (ab - cd)P'_n(\lambda), \end{aligned}$$

azaz $a = a^2 - c^2$ és $b = ab - cd$. Most végezzük el az $m = 1$ helyettesítést, innen

$$\begin{aligned} f(n * 1) &= f(n)f(1) - g(1)g(n) = \\ &= [aP_n(\lambda) + bP'_n(\lambda)](a\lambda + b) - (c\lambda + d)[cP_n(\lambda) + dP'_n(\lambda)] = \\ &= (\lambda(a^2 - c^2) + ab - cd)P_n(\lambda) + (b^2 - d^2 + \lambda(ab - cd))P'_n(\lambda). \end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} f(n * 1) &= aP_{n*1}(\lambda) + b(P_{n*1}(\lambda))' = \\ &= aP_n(\lambda)\lambda + bP'_n(\lambda)\lambda + P_n(\lambda)b = \\ &= P_n(\lambda)(a\lambda + b) + b\lambda P'_n(\lambda), \end{aligned}$$

azaz

$$b\lambda = b^2 - d^2 + \lambda(ab - cd).$$

Felhasználva, hogy $ab - cd = b$, azt kapjuk, hogy $b^2 = d^2$, és $a = a^2 - c^2$ miatt $a = 1$ és $c = 0$. Ekkor

$$f(n) = P_n(\lambda) + bP'_n(\lambda), \quad g(n) = \pm bP'_n(\lambda),$$

ami a tételben szereplő III. eset.

Közvetlen behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ezek a függvények valóban kielégítik a (2.16) egyenletet. $\square$

2.4 LEVI-CIVITA-EGYENLET

Az előző, 2.3 alfejezetben használt eljárás kapcsán felmerül a kérdés, hogy milyen általánosabb függvényegyenletekre lehet alkalmazni ezt a módszert, illetve, hogy milyen feltételek mellett lehet más hipercsoportokon is érvényes tételeket megfogalmazni. Ebben a fejezetben a Levi-Civita-függvényegyenletet fogjuk vizsgálni olyan hipercsoportokon, amelyeken a véges dimenziós eltolásinvariáns altereket olyan lineárisan független exponenciális monomok generálják, amelyek előállnak egy egyparaméteres exponenciális függvénysereg tagjainak deriváltjaiként. A kapcsolódó példákban polinomiális hipercsoportokon értelmezett függvényegyenleteket fogunk tekinteni, de a megoldások megadhatóak más olyan hipercsoporton is, amely rendelkezik a megfelelő exponenciális sereggel, például Sturm-Liouville-hipercsoportokon (lásd 3.1 alfejezet

és [SzV10]). A Levi–Civita-függvényegyenlettel számos írás foglalkozik, többek között [Lev13], [Sta13], [Vin62], [Acz66], [Mck77], míg Abel-csoportok esetén az általános megoldás leírása megtalálható [Sze91]-ben.

Legyen $(K, *)$ egy kommutatív hipercsoport, és tegyük fel, hogy léteznek olyan $\Phi : K \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények, amelyek rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal:

1. az $x \mapsto \Phi(x, \lambda)$ függvény minden $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén exponenciális függvény;
2. ha m egy exponenciális függvény K -n, akkor létezik egy λ komplex szám, melyre $m(x) = \Phi(x, \lambda)$;
3. a $\lambda \mapsto \Phi(x, \lambda)$ függvény minden $x \in K$ esetén végtelen sokszor folytonosan differenciálható.

Ekkor azt mondjuk, hogy K -n *létezik egy exponenciális sereg*, amelyet a Φ *függvény reprezentál*. Most tegyük fel, hogy K minden n -dimenziós eltolásinvariáns altere generálható olyan függvényekkel, amelyek az alábbi alakba írhatóak:

$$x \mapsto \Phi^{(j)}(x, \lambda_l) \quad (l = 1, 2, \dots, k), \quad (j = 0, 1, \dots, n_l - 1),$$

ahol k és $n_1, n_2, \dots, n_k$ természetes számok, továbbá $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Tekintsük az alábbi, úgynevezett *Levi–Civita-függvényegyenletet*:

$$f(x * y) = \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(y) \quad (x \in K), \quad (2.18)$$

ahol f, g_i és h_i ismeretlen komplex értékű függvények K -n $i = 1, \dots, n$ esetén, és ezen kívül feltesszük még, hogy a $\{g_1, \dots, g_n\}$ és $\{h_1, \dots, h_n\}$ függvényrendszerek lineárisan függetlenek. Ekkor az f eltoltjai által generált $\tau(f)$ n -dimenziós altér tartalmazza a g_i és a h_i függvényeket $i = 1, \dots, n$ esetén, tehát léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ komplex számok úgy, hogy a $\tau(f)$ alteret generálják az $x \mapsto \Phi^{(j)}(x, \lambda_l)$ függvények $l = 1, 2, \dots, k$ és $j = 0, 1, \dots, n_l - 1$ esetén, ahol $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Az ismeretlen függvényeket így komplex együtthatók segítségével a következő formába írhatjuk:

$$f(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} F_{lj} \Phi^{(j)}(x, \lambda_l), \quad (2.19)$$

$$g_i(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} G_{l_j}^i \Phi^{(j)}(x, \lambda_l), \quad h_i(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} H_{l_j}^i \Phi^{(j)}(x, \lambda_l).$$

Jelölje G és H azokat az $n \times n$ típusú mátrixokat, amelyek a g_i és h_i függvényekhez tartozó (2.19)-ben szereplő együtthatók alkotnak: ha $t \in \{1, \dots, n\}$ és $t = n_1 + \dots + n_{l-1} + (j+1)$, akkor

$$G_{it} = G_{l_j}^i, \quad H_{it} = H_{l_j}^i. \quad (2.20)$$

A következő tétel megadja a Levi–Civita-egyenlet megoldásait olyan K hiper-csoportokon, amelyek rendelkeznek a fent leírt tulajdonságokkal.

2.4.1. TÉTEL. *Az $f, g_i, h_i : K \rightarrow \mathbb{C}$ függvények akkor és csak akkor elégítik ki a (2.18) egyenletet, ha*

$$H^\top \cdot G = F,$$

ahol G és H a (2.20)-ban szereplő mátrixok és

$$F = \begin{pmatrix} B^1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & B^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & B^k \end{pmatrix},$$

ahol a B^l blokkmátrix $l = 1, \dots, k$ esetén az alábbi $n_l \times n_l$ típusú mátrix:

$$B_{ts}^l = \begin{cases} \binom{(t-1)+(s-1)}{s-1} F_{l_{(t-1)}}, & \text{ha } (t-1) + (s-1) < n_l \\ 0, & \text{ha } (t-1) + (s-1) \geq n_l \end{cases}$$

és F minden más eleme zérus.

B i z o n y í t á s. Tegyük fel, hogy az f, g_i és h_i függvények $i = 1, \dots, n$ esetén kielégítik a (2.18) egyenletet. A Φ függvény multiplikativitását használva egyrészt

$$\begin{aligned} f(x * y) &= \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} F_{l_j} \Phi^{(j)}(x * y, \lambda_l) = \\ &= \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} F_{l_j} \sum_{t=0}^j \binom{j}{t} \Phi^{(t)}(x, \lambda_l) \Phi^{(j-t)}(y, \lambda_l), \end{aligned}$$

másrészt

$$\sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(y) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^k \sum_{r=0}^{n_s-1} H_{s_r}^i G_{l_j}^i \Phi^{(r)}(y, \lambda_s) \right) \Phi^{(j)}(x, \lambda_l).$$

Rögzített l és j esetén $\Phi^{(j)}(x, \lambda_l)$ együtthatói a fenti egyenlőségekben szükségképpen megegyeznek, tehát

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^k \sum_{r=0}^{n_s-1} \left(\sum_{i=1}^n H_{s_r}^i G_{l_j}^i \right) \Phi^{(r)}(y, \lambda_s) &= \sum_{t=j}^{n_l-1} \binom{t}{j} F_{l_t} \Phi^{(t-j)}(y, \lambda_l) = \\ &= \sum_{r=0}^{n_l-1-j} \binom{r+j}{j} F_{l_{(j+r)}} \Phi^{(r)}(y, \lambda_l), \end{aligned}$$

és ha $s \neq l$ akkor $\sum_{i=1}^n H_{s_r}^i G_{l_j}^i = 0$ minden $r = 0, \dots, n_s - 1$ esetén. Ha $l = s$, akkor pedig

$$\sum_{i=1}^n H_{l_r}^i G_{l_j}^i = \begin{cases} \binom{r+j}{j} F_{l_{(r+j)}}, & \text{ha } r+j < n_l \\ 0, & \text{ha } r+j \geq n_l \end{cases},$$

ami ekvivalens a tételben szereplő $H^\top \cdot G = F$ kifejezéssel. Könnyen ellenőrizhető, hogy a fordított állítás is teljesül. $\square$

2.4.2. PÉLDA. Tekintsük az

$$f(n * m) = g(n)h(m) + k(n) + l(m) \quad (2.21)$$

függvényegyenletet egy diszkrét polinomiális hipercsoporton, amelyet a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinomok generálnak. A (2.18)-ban szereplő jelöléseket használva

$$f(n * m) = \sum_{i=1}^3 g_i(n) h_i(m),$$

ahol

$$g_1 = g, \quad h_1 = h, \quad g_2 = k, \quad h_2 = 1, \quad g_3 = 1, \quad h_3 = l.$$

Feltéve, hogy a $\{g_1, g_2, g_3\}$ és a $\{h_1, h_2, h_3\}$ függvényrendszerek lineárisan függetlenek, a $\tau(f)$ altér háromdimenziós. Mivel az azonosan 1 függvény egyike a generáló exponenciális monomoknak, két eset lehetséges:

1. $3 = 1 + 1 + 1$, azaz a $\tau(f)$ alteret a $P_n(\lambda_1)$, $P_n(\lambda_2)$ és az 1 függvények generálják, ahol $\lambda_1 \neq \lambda_2$ komplex számok;
2. $3 = 2 + 1$, azaz a $\tau(f)$ alteret a $P_n(\lambda)$, $P'_n(\lambda)$ és az 1 függvények generálják, ahol λ egy komplex szám.

Az első esetben

$$\begin{aligned} g_1(n) &= G_{1_0}^1 P_n(\lambda_1) + G_{2_0}^1 P_n(\lambda_2) + G_{3_0}^1, \quad h_1(n) = H_{1_0}^1 P_n(\lambda_1) + H_{2_0}^1 P_n(\lambda_2) + H_{3_0}^1, \\ g_2(n) &= G_{1_0}^2 P_n(\lambda_1) + G_{2_0}^2 P_n(\lambda_2) + G_{3_0}^2, \quad h_3(n) = H_{1_0}^3 P_n(\lambda_1) + H_{2_0}^3 P_n(\lambda_2) + H_{3_0}^3, \\ \text{és } H_{1_0}^2 &= H_{2_0}^2 = G_{1_0}^3 = G_{3_0}^3 = 0, \quad H_{3_0}^2 = G_{3_0}^2 = 1. \end{aligned}$$

Alkalmazva a 2.4.1. Tételt a következő feltételeket kapjuk:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_{1_0} & 0 & 0 \\ 0 & F_{2_0} & 0 \\ 0 & 0 & F_{3_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H_{1_0}^1 & 0 & H_{1_0}^3 \\ H_{2_0}^1 & 0 & H_{2_0}^3 \\ H_{3_0}^1 & 1 & H_{3_0}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{1_0}^1 & G_{2_0}^1 & G_{3_0}^1 \\ G_{1_0}^2 & G_{2_0}^2 & G_{3_0}^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} H_{1_0}^1 G_{1_0}^1 & H_{1_0}^1 G_{2_0}^1 & H_{1_0}^1 G_{3_0}^1 + H_{1_0}^3 \\ H_{2_0}^1 G_{1_0}^1 & H_{2_0}^1 G_{2_0}^1 & H_{2_0}^1 G_{3_0}^1 + H_{2_0}^3 \\ H_{3_0}^1 G_{1_0}^1 + G_{1_0}^2 & H_{3_0}^1 G_{2_0}^1 + G_{2_0}^2 & H_{3_0}^1 G_{3_0}^1 + G_{3_0}^2 + H_{3_0}^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A második esetben

$$\begin{aligned} g_1(n) &= G_{1_0}^1 P_n(\lambda) + G_{1_1}^1 P'_n(\lambda) + G_{2_0}^1, \quad h_1(n) = H_{1_0}^1 P_n(\lambda) + H_{1_1}^1 P'_n(\lambda) + H_{2_0}^1, \\ g_2(n) &= G_{1_0}^2 P_n(\lambda) + G_{1_1}^2 P'_n(\lambda) + G_{2_0}^2, \quad h_3(n) = H_{1_0}^3 P_n(\lambda) + H_{1_1}^3 P'_n(\lambda) + H_{2_0}^3, \\ \text{és } H_{1_0}^2 &= H_{1_1}^2 = G_{1_0}^3 = G_{1_1}^3 = 0, \quad H_{3_0}^2 = G_{3_0}^2 = 1, \text{ ekkor} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} F_{1_0} & F_{1_1} & 0 \\ F_{1_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{2_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{1_0}^1 G_{1_0}^1 & H_{1_0}^1 G_{1_1}^1 & H_{1_0}^1 G_{2_0}^1 + H_{1_0}^3 \\ H_{1_1}^1 G_{1_0}^1 & H_{1_1}^1 G_{1_1}^1 & H_{1_1}^1 G_{2_0}^1 + H_{1_1}^3 \\ H_{2_0}^1 G_{1_0}^1 + G_{1_0}^2 & H_{2_0}^1 G_{1_1}^1 + G_{1_1}^2 & H_{2_0}^1 G_{2_0}^1 + G_{2_0}^2 + H_{2_0}^3 \end{pmatrix}.$$

Összevetve ezeket az egyenlőségeket, az alábbi megoldások adódnak a (2.21) egyenletre, itt $\{g, k\}$ és $\{h, l\}$ szerepe felcserélhető, a konstansok pedig tetszőlegesen választhatóak:

$$\begin{aligned} f(n) &= G_{3_0}^1 H_{3_0}^1 + G_{3_0}^2 + H_{3_0}^3, \\ g(n) &= G_{1_0}^1 P_n(\lambda_1) + G_{2_0}^1 P_n(\lambda_2) + G_{3_0}^1, \\ h(n) &= H_{3_0}^1, \\ k(n) &= (-G_{1_0}^1 H_{3_0}^1) P_n(\lambda_1) + (-G_{2_0}^1 H_{3_0}^1) P_n(\lambda_2) + G_{3_0}^2, \\ l(n) &= H_{3_0}^3, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} f(n) &= G_{1_0}^1 H_{1_0}^1 P_n(\lambda) + (G_{2_0}^1 H_{2_0}^1 + H_{2_0}^3 + G_{2_0}^2), \\ g(n) &= G_{1_0}^1 P_n(\lambda) + G_{1_1}^1 P'_n(\lambda) + G_{2_0}^1, \\ h(n) &= H_{1_0}^1 P_n(\lambda) + H_{2_0}^1, \\ k(n) &= (-G_{1_0}^1 H_{2_0}^1) P_n(\lambda) + (-G_{1_1}^1 H_{2_0}^1) P'_n(\lambda) + G_{2_0}^2, \\ l(n) &= (-G_{2_0}^1 H_{1_0}^1) P_n(\lambda) + H_{2_0}^3. \end{aligned}$$

2.4.3. PÉLDA. Tekintsük most a (2.15) szinusz egyenletet, amelynek általános megoldását polinomiális hipercsoportok esetén a 2.3.1. Tételben adtuk meg. Ez az egyenlet azonban speciális esete (2.18)-nak, így a 2.4.1. Tételt alkalmazva könnyen megkaphatjuk a lineárisan független megoldásokat. Ha (2.18) jelölését használjuk, akkor az egyenlet $f(n * m) = \sum_{i=1}^2 g_i(n) h_i(m)$ alakú, ahol

$$g_1 = h_2 = f, \quad g_2 = h_1 = g.$$

Feltételezve a lineáris függetlenséget $\tau(f)$ kétdimenziós, és két eset adódik:

1. $2 = 1 + 1$, azaz a generáló függvények $P_n(\lambda_1)$ és $P_n(\lambda_2)$ valamely $\lambda_1 \neq \lambda_2$ komplex számok esetén;
2. $2 = 2$, azaz a generáló függvények $P_n(\lambda)$ és $P'_n(\lambda)$, ahol λ egy komplex szám.

Az első esetben

$$\begin{aligned} g_1(n) &= F_{1_0} P_n(\lambda_1) + F_{2_0} P_n(\lambda_2), \quad h_1(n) = G_{1_0}^2 P_n(\lambda_1) + G_{2_0}^2 P_n(\lambda_2), \\ g_2(n) &= G_{1_0}^2 P_n(\lambda_1) + G_{2_0}^2 P_n(\lambda_2), \quad h_2(n) = F_{1_0} P_n(\lambda_1) + F_{2_0} P_n(\lambda_2), \end{aligned}$$

és

$$\begin{pmatrix} F_{1_0} & 0 \\ 0 & F_{2_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{1_0}^2 & F_{1_0} \\ G_{2_0}^2 & F_{2_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1_0} & F_{2_0} \\ G_{1_0}^2 & G_{2_0}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2G_{1_0}^2 F_{1_0} & G_{1_0}^2 F_{2_0} + G_{2_0}^2 F_{1_0} \\ G_{1_0}^2 F_{2_0} + G_{2_0}^2 F_{1_0} & 2G_{2_0}^2 F_{2_0} \end{pmatrix}.$$

A második esetben

$$\begin{aligned} g_1(n) &= F_{1_0} P_n(\lambda) + F_{1_1} P'_n(\lambda), \quad h_1(n) = G_{1_0}^2 P_n(\lambda) + G_{1_1}^2 P'_n(\lambda), \\ g_2(n) &= G_{1_0}^2 P_n(\lambda) + G_{1_1}^2 P'_n(\lambda), \quad h_2(n) = F_{1_0} P_n(\lambda) + F_{1_1} P'_n(\lambda), \end{aligned}$$

és

$$\begin{pmatrix} F_{1_0} & F_{1_1} \\ F_{1_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{1_0}^2 & F_{1_0} \\ G_{1_1}^2 & F_{1_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{1_0} & F_{1_1} \\ G_{1_0}^2 & G_{1_1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2F_{1_0} G_{1_0}^2 & G_{1_0}^2 F_{1_1} + G_{1_1}^2 F_{1_0} \\ G_{1_0}^2 F_{1_1} + G_{1_1}^2 F_{1_0} & 2G_{1_1}^2 F_{1_1} \end{pmatrix}.$$

A fentiek alapján a szinusz egyenletre az alábbi megoldásokat kapjuk:

$$f(n) = F_{1_0}(P_n(\lambda_1) - P_n(\lambda)), \quad g(n) = \frac{1}{2}(P_n(\lambda_1) + P_n(\lambda)),$$

és

$$f(n) = F_{1_1}P'_n(\lambda), \quad g(n) = P_n(\lambda),$$

ahol F_{1_0} és F_{1_1} tetszőleges komplex számok. Megjegyezzük, hogy a lineárisan függő $f(n) = F_{1_0}P_n(\lambda)$ és $g(n) = \frac{1}{2}P_n(\lambda)$ függvények szintén kielégítik az egyenletet.

2.5 DIFFERENCIAEGYENLETEK

Ebben a fejezetben a konstans együtthatós lineáris differenciaegyenletek megoldására alkalmazott módszerek egy részét általánosítani fogjuk polinomiális hipercsoportokra.

Legyen N egy rögzített természetes szám, és legyenek adottak az $a_0, a_1, \dots, a_N, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények, ahol a_N nem azonosan nulla. Az

$$a_N(n)f_{n+N} + a_{N-1}(n)f_{n+N-1} + \dots + a_1(n)f_{n+1} + a_0(n)f_n = g_n$$

egyenletet *nemállandó együtthatós lineáris differenciaegyenletnek* nevezzük, ahol $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ vagy $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ valamilyen ismeretlen függvény. A továbbiakban mi az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ esettel fogunk foglalkozni, és az $f(m)$ illetve $g(m)$ jelölést fogjuk használni f_m és g_m helyett. A differenciaegyenletek klasszikus elmélete alapján a fenti egyenlet teljes megoldása leírható a *konstans együtthatós esetben*, azaz, ha az $a_0, a_1, \dots, a_N$ függvények állandók. Ekkor a megoldások terét olyan exponenciális monomok generálják, amelyeket az egyenlethez tartozó karakterisztikus polinom gyökeinek segítségével kaphatunk meg. Jóval kevesebbet tudunk azonban mondani a nemállandó együtthatós esetben, és mint látni fogjuk, a polinomiális hipercsoportokon értelmezett konstans együtthatós differenciaegyenletek valójában nemállandó együtthatós egyenleteket adnak.

A differenciaegyenletek elméletében egy függvény n -nel való eltoltja és az n -szer való eltolása 1-gyel ugyanazt az eredményt adja minden n természetes szám esetén. Hipercsoportoknál azonban két lehetőség adódik differenciaegyenletek definiálására ezen két különböző értelmezés alapján. Az utóbbi eset vizsgálatát végezzük el először.

Legyen $(\mathbb{N}, *)$ a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom rendszer által generált hipercsoport és vezessük be a

$$\mathcal{T}f(n) = \mathcal{T}_1f(n) = f(n * 1)$$

jelölést minden $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá legyen $\mathcal{T}^0 f = f$ és

$$\mathcal{T}^N f = \mathcal{T}(\mathcal{T}^{N-1} f)$$

minden $N > 1$ egész számra. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{T}$ lineáris operátor az $\mathbb{N}$ -en értelmezett komplex értékű függvények $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vektorterében. Egy Q komplex együtthatós polinom esetén természetes módon adódik a $Q(\mathcal{T})$ operátor jelentése. Legyen N egy pozitív egész, $a_0, \dots, a_N$ komplex számok és tegyük fel, hogy $a_N \neq 0$. Tekintsük $(\mathbb{N}, *)$ -on az alábbi függvényegyenletet:

$$Q(\mathcal{T})f = a_N \mathcal{T}^N f(n) + a_{N-1} \mathcal{T}^{N-1} f(n) + \dots + a_0 f(n) = 0, \quad (2.22)$$

amelyet az $(\mathbb{N}, *)$ hipercsoporton adott Q -hoz tartozó N -ed rendű konstans együtthatós homogén lineáris differenciaegyenletnek nevezünk. A Q polinomot a (2.22) egyenlet *karakterisztikus polinomjának* nevezzük. A (2.22) egyenlet megoldástere a $Q(\mathcal{T})$ lineáris operátor nulltere, tehát egy lineáris altér $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ -ben. Ezen felül a megoldástér eltolásinvariáns abban az értelemben, hogy ha f egy megoldás, akkor $\mathcal{T}f$ szintén az.

2.5.1. LEMMA. *Ha Q egy N -edfokú komplex polinom, ahol $N \geq 1$, akkor (2.22) megoldástere N dimenziós.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény egy megoldása az egyenletnek. Mivel $f(0 * 1) = f(1)$ és $n \geq 1$ esetén

$$f(n * 1) = \sum_{k=n-1}^{n+1} c(n, 1, k) f(k) = \alpha_n f(n-1) + \beta_n f(n) + \gamma_n f(n+1),$$

ahol $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a polinomiális hipercsoportok definíciójában szereplő sorozatok, lásd (2.1). A (2.22) egyenletet $n = 0$ esetén az

$$a_N \gamma_{N-1} \cdots \gamma_1 \gamma_0 f(N) + \sum_{i=0}^{N-1} k_{N,i} f(i) = 0$$

alakba írható valamely $k_{N,i}$ komplex számok esetén, ahol $i = 0, \dots, N-1$. Mivel $a_N \gamma_{N-1} \cdots \gamma_0 \neq 0$, így $f(N)$ értékét meghatározzák az $f(0), \dots, f(N-1)$ számok, és teljes indukcióval könnyen belátható, hogy minden $n \geq N$ egészre $f(n)$ egyértelműen meghatározott az $f(0), \dots, f(N-1)$ értékek által. $\square$

2.5.2. LEMMA. *Ha a λ komplex szám m multiplicitású gyöke a (2.22) egyenlet karakterisztikus polinomjának, akkor az $n \mapsto P_n^{(k)}(\lambda)$ függvény megoldása (2.22)-nek minden $k = 0, 1, \dots, m - 1$ esetén.*

Bizonyítás. Az $n \mapsto P_n(\lambda)$ függvény exponenciális tulajdonságának következtében

$$\mathcal{T}P_n(\lambda) = P_n(\lambda)P_1(\lambda) = \lambda P_n(\lambda), \quad \mathcal{T}^t P_n(\lambda) = \lambda^t P_n(\lambda),$$

így azonnal adódik, hogy ez a függvény megoldása az egyenletnek:

$$Q(\mathcal{T})P_n(\lambda) = (\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)P_n(\lambda) = 0.$$

Annak bizonyításához, hogy az $n \mapsto P_n^{(k)}(\lambda)$ függvény $1 \leq k \leq m$ esetén szintén megoldás, szükségünk van $P_n^{(k)}(\lambda)$ eltoltojaira. Némi számolás után azt kapjuk, hogy $r \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathcal{T}^r P_n^{(k)}(\lambda) = \sum_{t=0}^{\min(r,k)} \binom{r}{t} \lambda^{r-t} \frac{k!}{(k-t)!} P_n^{(k-t)}(\lambda),$$

tehát

$$\begin{aligned} Q(\mathcal{T})P_n^{(k)}(\lambda) &= \sum_{r=0}^N a_r \mathcal{T}^r P_n^{(k)}(\lambda) = \\ &= \sum_{r=0}^N a_r \left(\sum_{t=0}^{\min(r,k)} \binom{r}{t} \lambda^{r-t} \frac{k!}{(k-t)!} P_n^{(k-t)}(\lambda) \right) = \\ &= \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} \left(\sum_{r=t}^N a_r \frac{r!}{(r-t)!} \lambda^{r-t} \right) P_n^{(k-t)}(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

mivel $0 \leq t \leq m - 1$ esetén a karakterisztikus polinom t -edik deriváltja a λ helyen zérus. $\square$

A következő tétel megadja a (2.22) egyenlet összes megoldását.

2.5.3. TÉTEL. *Legyen Q egy $N \geq 1$ fokú komplex polinom, melynek gyökei a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ különböző komplex számok, λ_j multiplicitása l_j $j = 1, 2, \dots, k$ esetén és $l_1 + \dots + l_k = N$. Ekkor az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor megoldása a (2.22) egyenletnek, ha előáll az*

$$n \mapsto P_n^{(i)}(\lambda_j) \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad i = 0, 1, \dots, l_j - 1$$

függvények lineáris kombinációjaként.

B i z o n y í t á s. Az állítás közvetlenül adódik a 2.5.1. Lemma, a 2.5.2. Lemma és annak felhasználásával, hogy a 2.1.7. Tétel szerint a $P_n^{(i)}(\lambda_j)$ függvények lineárisan függetlenek. $\square$

Ezután térjünk rá a következő alakú differenciaegyenletek vizsgálatára:

$$a_N \mathcal{T}_N f(n) + a_{N-1} \mathcal{T}_{N-1} f(n) + \cdots + a_0 f(n) = 0, \quad (2.23)$$

ahol $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ismeretlen függvény, N egy pozitív egész és $a_N, \dots, a_0$ komplex számok. Megjegyezzük, hogy (2.23) az alábbi formába is írható:

$$a_N f(n * N) + a_{N-1} f(n * (N - 1)) + \cdots + a_0 f(n) = 0.$$

Könnyen belátható, hogy (2.23) megoldástere egy N dimenziós altér $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ -ben. A következő tétel megmutatja, hogy a megoldásteret hasonló függvények generálják, mint a (2.22) egyenlet esetén, de itt a hipercsoportot generáló polinomoktól is függeni fog a karakterisztikus polinom.

2.5.4. TÉTEL. *Az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény akkor és csak akkor megoldása a (2.23) egyenletnek, ha előáll az*

$$n \mapsto P_n^{(i)}(\lambda_j) \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad i = 0, 1, \dots, l_j - 1$$

függvények lineáris kombinációjaként, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ különböző komplex gyökei a

$$\lambda \mapsto a_N P_N(\lambda) + a_{N-1} P_{N-1}(\lambda) + \cdots + a_1 P_1(\lambda) + a_0 \quad (2.24)$$

egyenletnek, és λ_j multiplicitása l_j minden $j = 1, 2, \dots, k$ esetén.

B i z o n y í t á s. Elegendő megmutatni, hogy az $n \mapsto P_n^{(i)}(\lambda_j)$ függvények megoldások $j = 1, 2, \dots, k$ és $i = 0, 1, \dots, l_j - 1$ esetén. Mivel

$$\mathcal{T}_m(P_n^{(i)}(\lambda)) = \sum_{t=0}^i \binom{i}{t} P_m^{(t)}(\lambda) P_n^{(i-t)}(\lambda)$$

minden $m \in \mathbb{N}$ esetén, ezért ha a (2.23) egyenletbe $f(n)$ helyére a $P_n^{(i)}(\lambda)$ függvényt írjuk, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N a_m \mathcal{T}_m(P_n^{(i)}(\lambda)) &= \sum_{m=0}^N a_m \sum_{t=0}^i \binom{i}{t} P_m^{(t)}(\lambda) P_n^{(i-t)}(\lambda) = \\ &= \sum_{t=0}^i \binom{i}{t} P_n^{(i-t)}(\lambda) \left(\sum_{m=0}^N a_m P_m^{(t)}(\lambda) \right) = 0, \end{aligned}$$

ami abban az esetben igaz, ha λ az i -nél magasabb multiplicitású gyöke (2.24)-nek. $\square$

A következőkben néhány egyszerűbb differenciaegyenletet fogunk megvizsgálni különböző polinomiális hipercsoportokon.

2.5.5. PÉLDA. Tekintsük az alábbi egyenletet:

$$\mathcal{T}f = 0. \quad (2.25)$$

Csebisev-hipercsoporton

$$\mathcal{T}f(n) = \frac{1}{2}(f(n+1) + f(|n-1|)),$$

tehát (2.25) az

$$f(n+1) + f(|n-1|) = 0$$

alakba írható, ahol $n = 0, 1, \dots$. Az $n = 0$ esetből $f(1) = 0$ és $f(n+2) + f(n) = 0$ minden $n \geq 0$ esetén, azaz $f(2n+1) = 0$ és $f(2n) = (-1)^n f(0)$. Legendre-hipercsoport esetén

$$\mathcal{T}f(n) = \frac{n+1}{2n+1}f(n+1) + \frac{n}{2n+1}f(|n-1|),$$

tehát az egyenletre

$$(n+1)f(n+1) + nf(|n-1|) = 0$$

adódik minden $n \geq 0$ esetén. Ekkor $f(1) = 0$, és $n \geq 0$ esetén $(n+2)f(n+2) + (n+1)f(n) = 0$, innen $f(2n+1) = 0$ és $f(2n) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} f(0)$. (Itt $n!!$ n szemifaktoriálisát jelenti.) Vegyük észre, hogy az első esetben $f(n) = f(0) \cdot T_n(0)$ és a második esetben $f(n) = f(0) \cdot P_n(0)$, ahol T_n és P_n jelöli az n -edik Csebisev-polinomot illetve az n -edik Legendre-polinomot. Ez egyszerű következménye korábbi eredményeinknek, hiszen az egyenlet $Q(\lambda) = \lambda$ karakterisztikus polinomjának egyetlen megoldása $\lambda = 0$, így tetszőleges polinomiális hipercsoporton a 2.5.3. Tétel alapján a (2.25) egyenlet megoldásai $f(n) = f(0) \cdot P_n(0)$, ahol $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a generáló polinomok rendszere.

Most tekintsük a következő feladatot: keressük az összes $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ megoldását az

$$(n+2)f(n+2) - (2n+3)f(n+1) + (n+1)f(n) = 0 \quad (2.26)$$

differenceciaegyenletnek az $f(0) = f(1)$ feltétel mellett. Ha

$$g(n) = (n+1)f(n+1) - (n+1)f(n),$$

akkor $g(n+1) - g(n) = 0$ alakra redukálódik az egyenlet, ami azt jelenti, hogy g konstans és $g(0) = f(1) - f(0) = 0$. Ekkor $(n+1)f(n+1) - (n+1)f(n) = 0$, amiből az következik, hogy f is konstans: $f(n) = f(0)$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Másképpen, figyeljük meg, hogy (2.26) nem más, mint a

$$\mathcal{T}f = f \tag{2.27}$$

egyenlet Legendre-hipercsoportokon, ami egy igen speciális esete (2.23)-nak. A karakterisztikus polinom $Q(\lambda) = \lambda - 1$, ennek egyetlen gyöke $\lambda = 1$, tehát az általános megoldás $f(n) = f(0) \cdot P_n(1)$ alakú. Mivel $P_n(1) = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért az összes megoldás konstans.

Módosítsuk a (2.27) egyenletet:

$$\mathcal{T}f = c \cdot f,$$

ahol c egy komplex paraméter. Ez a transzláció operátorhoz tartozó sajátérték probléma, itt a karakterisztikus polinom $Q(\lambda) = \lambda - c$, amelynek egyetlen gyöke c . Ha tehát a hipercsoportot a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinomok generálják, akkor a $\mathcal{T}$ operátornak minden c komplex szám sajátértéke, a hozzá tartozó sajátfüggvények pedig $n \mapsto f(0) \cdot P_n(c)$.

2.5.6. PÉLDA. Tekintsük a

$$\Delta^N f = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} (-1)^n \mathcal{T}^{N-n} f = 0 \tag{2.28}$$

N -ed rendű monom egyenletet a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom rendszer által generált hipercsoporton, ahol $\Delta = \mathcal{T} - I$, és I jelöli az identikus operátort. A (2.28) egyenlet karakterisztikus polinomja $Q(\lambda) = (\lambda - 1)^N$, ennek $\lambda = 1$ N -szeres gyöke. A 2.5.3. Tétel tétel alapján az egyenlet általános megoldása

$$f(n) = c_0 P_n(1) + c_1 P'_n(1) + \dots + c_N P_n^{(N-1)}(1),$$

ahol $c_0, \dots, c_N$ tetszőleges komplex számok. Például $N = 2$ esetén

$$f(n) = c_0 P_n(1) + c_1 P'_n(1) = c_0 + c_1 P'_n(1),$$

és 2.1.4. Tétel alapján a $c_1 P'_n(1)$ függvények additívok. Ezek szerint (2.28) az $N = 2$ esetben tekinthető az affin függvények karakterizációjának, éppen mint csoport esetben.

2.5.7. PÉLDA. A 2.5.4. Tétel alkalmazásának szemléltetésére tekintsük a

$$\mathcal{T}_2 f - 2\mathcal{T}_1 f + f = 0 \quad (2.29)$$

differencegyenletet azon a polinomiális hipercsoporton, aminek $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ generáló polinomjait az $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok definiálják. A 2.5.4. Tétel alapján az általános megoldás leírható a

$$\lambda \mapsto P_2(\lambda) - 2P_1(\lambda) + 1$$

polinom gyökeinek segítségével. Ha felhasználjuk a (2.1) rekurziós formulát az $n = 1$ esetben és figyelembe vesszük, hogy $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\gamma_1(P_2(\lambda) - 2P_1(\lambda) + 1) = (\lambda - 1)(\lambda - (\gamma_1 - \alpha_1)),$$

tehát a megoldások a következő alakúak:

$$f(n) = AP_n(1) + BP_n(\gamma_1 - \alpha_1) = A + BP_n(\gamma_1 - \alpha_1), \quad (2.30)$$

ahol A, B tetszőleges komplex számok. Csebisev-polinomok esetén

$$\lambda T_n(\lambda) = \frac{1}{2} T_{n+1}(\lambda) + \frac{1}{2} T_{|n-1|}(\lambda),$$

ahol $T_0(\lambda) = 1$ és $T_1(\lambda) = \lambda$, ekkor a fenti egyenlet

$$f(n+4) - 2f(n+3) + 2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0$$

alakú az

$$f(2) = 2f(1) - f(0) \quad \text{és} \quad f(3) = f(1)$$

kezdeti feltételekkel. Az általános megoldás

$$f(n) = A + B \cdot T_n(0),$$

ahol A, B tetszőleges számok, vagy pontosabban $f(2n) = A + B(-1)^n$ és $f(2n+1) = 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel ebben az esetben a probléma konstans együtthatós differencegyenletre redukálódott, ugyanez az eredmény megkapható a hagyományos eszközök segítségével is. Legendre-hipercsoport esetén viszont az adódó egyenlet nem konstans együtthatós, mégis meg tudjuk adni a megoldásokat (2.30) alapján:

$$f(n) = A + B \cdot P_n(1/3)$$

ahol P_n jelöli az n -edik Legendre-polinomot.

2.6 TÖBBVÁLTOZÓS POLINOMIÁLIS HIPERC SOPORTOK

Ebben a részben a 2.1 fejezetben definiált polinomiális hipercsoportok többváltozós polinomokra épülő általánosítását írjuk le, és megadjuk ezen hipercsoportok additív és exponenciális függvényeit. A többváltozós polinomiális hipercsoportok elméletét H. Zeuner alapozta meg ([Zeu92a]).

Legyen K egy megszámlálható halmaz a diszkrét topológiával ellátva, d egy pozitív egész és tekintsük a d -változós komplex polinomok $(Q_x)_{x \in K}$ halmazát. Vezessük be az alábbi jelölést minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$K_n = \{x \in K \mid \deg Q_x \leq n\},$$

tehát K_n azon K -beli x elemek halmaza, amelyekre Q_x legfeljebb n -edfokú. Tegyük fel, hogy $\{Q_x \mid x \in K_n\}$ egy bázisa a legfeljebb n -edfokú d -változós komplex polinomok terének. Ekkor minden $x, y \in K$ esetén a $Q_x Q_y$ szorzat egyértelműen felírható a

$$Q_x Q_y = \sum_{w \in K} c(x, y, w) Q_w \quad (2.31)$$

alakban, ahol $c(x, y, w)$ komplex számok. Egy $(K, *)$ hipercsoportot akkor nevezünk *d -változós polinomiális hipercsoportnak*, ha létezik d -változós polinomoknak olyan $(Q_x)_{x \in K}$ halmaza, amelyre teljesül az előbbi tulajdonság, és a konvolúció K -n az alábbi módon definiált:

$$\delta_x * \delta_y(\{w\}) = c(x, y, w) \quad (x, y, w \in K).$$

Világos, hogy az egyváltozós polinomiális hipercsoportok speciális esetét adják a fenti hipercsoportoknak, hiszen a (2.1) által adott $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom rendszer esetén P_n foka éppen n , és (2.31) a (2.2) linearizációs formula általánosítása.

A $(Q_x)_{x \in K}$ polinom rendszerre vonatkozó feltételekből következik, hogy egyértelműen létezik egy $e \in K$ elem, melyre Q_e egy nem nulla konstans, és e szükségképpen a hipercsoport egységeleme, így $Q_e = 1$. Az egyszerűség kedvéért a K hipercsoport egy x elemét gyakran azonosítjuk a Q_x polinommal. Világos, hogy K pontosan d darab lineárisan független elsőfokú polinomot tartalmaz, ha pedig $Q_x(z_1, \dots, z_d) = z_j$ valamely $j = 1, \dots, d$ esetén, akkor az mondjuk, hogy K tartalmazza z_j -t. Megjegyezzük, hogy ha L jelöli a $z \mapsto Az + c$ affin transzformációt, ahol $A \in \mathcal{GL}(d, \mathbb{C})$ és $c \in \mathbb{C}^d$, akkor a $Q_x^* := Q_x \circ L$ polinom rendszer

az eredetivel megegyező hipercsoport struktúrát definiál, így az elsőfokú polinomok akár tetszőlegesen is választhatóak, természetesen a lineáris függetlenség megtartásával.

A következő tétel megadja a többváltozós polinomiális hipercsoportok exponenciális függvényeit (lásd [BIH95]).

2.6.1. TÉTEL. *Legyen $(K, *)$ a $(Q_x)_{x \in K}$ polinom rendszer által generált d -változós polinomiális hipercsoport. Az $m : K \rightarrow \mathbb{C}$ függvény akkor és csak akkor exponenciális függvény K -n, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{C}^d$, amelyre*

$$m(x) = Q_x(\lambda) \quad (x \in K). \quad (2.32)$$

Bizonyítás. A (2.31) linearizációs formula és a konvolúció definíciója alapján, ha m a (2.32) alakba írható, akkor exponenciális függvény K -n:

$$Q_x(\lambda)Q_y(\lambda) = \sum_{w \in K} c(x, y, w)Q_w(\lambda) = \sum_{w \in K} (\delta_x * \delta_y)(\{w\})Q_w(\lambda).$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy m exponenciális függvény K -n. Mivel a $\{Q_x | x \in K_1\}$ polinomok bázisát adják a d változós lineáris polinomoknak, így egyértelműen létezik olyan $\lambda \in K$, amire (2.32) fennáll minden $x \in K_1$ esetén. A Q_x polinomok fokszáma szerinti indukcióval fogjuk bizonyítani, hogy ez minden $x \in K$ esetén fennáll. Tegyük fel tehát, hogy (2.32) teljesül minden $x \in K_n$ esetén, és legyen $x \in K_{n+1}$. A $(Q_x)_{x \in K}$ polinomokra tett feltételek miatt valamely s pozitív egész esetén léteznek olyan a_j komplex számok és $x_j \in K_1$, $y_j \in K_n$ elemek, ahol $j = 1, \dots, s$, hogy Q_x felírható a következő alakba:

$$Q_x(z) = \sum_{j=1}^s a_j Q_{x_j}(z) Q_{y_j}(z) \quad (z \in \mathbb{C}^d). \quad (2.33)$$

A hipercsoport struktúra definíciója alapján ez azt jelenti, hogy

$$\delta_x = \sum_{j=1}^s a_j \delta_{x_j} * \delta_{y_j},$$

így

$$\begin{aligned} m(x) &= \int_K m d\delta_x = \sum_{j=1}^s a_j \int_K m d(\delta_{x_j} * \delta_{y_j}) = \\ &= \sum_{j=1}^s a_j m(x_j) m(y_j) = \sum_{j=1}^s a_j Q_{x_j}(\lambda) Q_{y_j}(\lambda) = Q_x(\lambda). \end{aligned}$$

□

2.6.2. KÖVETKEZMÉNY. Minden d -változós polinomiális hipercsoport esetén létezik egy olyan $\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$ normalizáló pont, amelyre

$$Q_x(\lambda_0) = 1 \quad (x \in K)$$

fennáll, ahol $(Q_x)_{x \in K}$ a generáló polinomok rendszere.

B i z o n y í t á s. Amint a 2.6.1. Tétel mutatja, a d -változós polinomiális hipercsoportok exponenciális függvényeinek halmaza azonosítható a $\mathbb{C}^d$ halmazzal, így az azonosan 1 exponenciális függvényhez létezik egy olyan $\lambda_0 \in \mathbb{C}^d$, amelyre $Q_x(\lambda_0) = 1$ minden K -beli x esetén. □

A következő tétel a többváltozós polinomiális hipercsoportok additív függvényeit írja le.

2.6.3. TÉTEL. Legyen $(K, *)$ a $(Q_x)_{x \in K}$ polinomok által generált d -változós polinomiális hipercsoport, melynek normalizáló pontja λ_0 . Egy $a : K \rightarrow \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor additív függvény K -n, ha léteznek olyan c_j komplex számok $j = 1, \dots, d$ esetén, amelyekre

$$a(x) = \sum_{i=1}^d c_i \partial_i Q_x(\lambda_0) \quad (2.34)$$

fennáll minden K -beli x esetén.

B i z o n y í t á s. A (2.31) linearizációs formula alapján

$$Q_x(\lambda) Q_y(\lambda) = \sum_{w \in K} c(x, y, w) Q_w(\lambda)$$

fennáll minden $x, y \in K$ és $\lambda \in \mathbb{C}^d$ esetén. Véve mindkét oldal i -edik változó szerinti parciális deriváltját, majd alkalmazva a $\lambda = \lambda_0$ helyettesítést, azt kapjuk, hogy

$$\partial_i Q_x(\lambda_0) + \partial_i Q_y(\lambda_0) = \sum_{w \in K} c(x, y, w) \partial_i Q_w(\lambda_0)$$

teljesül $i = 1, \dots, d$ esetén. Ez azt jelenti, hogy az $x \mapsto \partial_i Q_x(\lambda_0)$ függvények additívak minden $i = 1, \dots, d$ esetén, tehát a (2.34)-ben szereplő a függvény tetszőleges $c_1, \dots, c_d$ komplex számok esetén szintén additív.

A fordított állítás igazolásához először vegyük észre, hogy a

$$\left(\partial_1 Q_x(\lambda_0), \partial_2 Q_x(\lambda_0), \dots, \partial_d Q_x(\lambda_0) \right) \quad (2.35)$$

vektorok $x \in K_1$ és $x \neq e$ esetén lineárisan függetlenek, hiszen a $\{Q_x \mid x \in K_1\}$ polinomok bázisát adják a d -változós lineáris polinomok terének. Ebből következik, hogy ha $a : K \rightarrow \mathbb{C}$ egy additív függvény, akkor az

$$a(x) = \sum_{i=1}^d c_i \partial_i Q_x(\lambda_0) \quad (2.36)$$

lineáris egyenletrendszernek egyértelműen létezik $c_1, \dots, c_d$ megoldása minden $x \in K_1$ és $x \neq e$ esetén, továbbá (2.36) akkor is fennáll, ha $x = e$. Alkalmazzunk teljes indukciót, és tegyük fel hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ -re (2.36) fennáll minden $x \in K_n$ esetén, és legyen $x \in K_{n+1}$. Az előző tétel bizonyításához hasonlóan, Q_x felírható a (2.33)-ban szereplő alakban valamilyen a_j komplex számok és $x_j \in K_1$, $y_j \in K_n$ elemek esetén, ahol $j = 1, \dots, s$ és s egy pozitív egész. Ekkor egyrészt

$$\delta_x = \sum_{j=1}^s a_j \delta_{x_j} * \delta_{y_j},$$

másrészt véve a (2.33) egyenlőség i -edik parciális deriváltját és ezután elvégezve a $\lambda = \lambda_0$ helyettesítést, azt kapjuk, hogy $i = 1, \dots, d$ esetén

$$\partial_i Q_x(\lambda_0) = \sum_{j=1}^s a_j (\partial_i Q_{x_j}(\lambda_0) + \partial_i Q_{y_j}(\lambda_0)).$$

Innen

$$\begin{aligned} a(x) &= \int_K a d\delta_x = \sum_{j=1}^s a_j \int_K a(t) d(\delta_{x_j} * \delta_{y_j})(t) = \\ &= \sum_{j=1}^s a_j (a(x_j) + a(y_j)) = \sum_{j=1}^s a_j \sum_{i=1}^d c_i (\partial_i Q_{x_j}(\lambda_0) + \partial_i Q_{y_j}(\lambda_0)) = \\ &= \sum_{i=1}^d c_i \sum_{j=1}^s a_j (\partial_i Q_{x_j}(\lambda_0) + \partial_i Q_{y_j}(\lambda_0)) = \sum_{i=1}^d c_i \partial_i Q_x(\lambda_0), \end{aligned}$$

tehát (2.36) fennáll minden $x \in K$ esetén. □

2.7 MOMENTUM FÜGGVÉNYEK TÖBBVÁLTOZÓS POLINOMIÁLIS HIPERC SOPORTOKON

Ebben a részben általánosítjuk a 2.2 Fejezetben szereplő momentum függvényekre vonatkozó eredményt többváltozós polinomiális hipercsoportokra.

2.7.1. TÉTEL. *Legyen $(K, *)$ a $(Q_x)_{x \in K}$ polinomok által generált d -változós polinomiális hipercsoport. A $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N : K \rightarrow \mathbb{C}$ függvények akkor és csak akkor alkotnak egy általánosított N -ed rendű momentum függvény sorozatot K -n, ha*

$$\varphi_k(x) = (Q_x \circ f)^{(k)}(0) \quad (2.37)$$

fennáll minden $n \in \mathbb{N}$ és $k = 0, 1, \dots, N$ esetén, ahol $f = (f_1, \dots, f_d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^d$ és f_i legfeljebb N -ed fokú polinom $i = 1, \dots, d$ esetén.

Bizonyítás. Jelölje φ_k a (2.37)-ben definiált függvényt $k = 0, 1, \dots, N$ esetén. A linearizációs formula alapján minden $t \in \mathbb{C}$ és $x, y \in K$ esetén

$$(Q_x \circ f)(t)(Q_y \circ f)(t) = \sum_{w \in K} c(x, y, w)(Q_w \circ f)(t).$$

Ha a fenti egyenlőség mindkét oldalát k -szor differenciáljuk t szerint, majd elvégezzük a $t = 0$ helyettesítést, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varphi_j(x) \varphi_{k-j}(y) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (Q_x \circ f)^{(j)}(0) (Q_y \circ f)^{(k-j)}(0) = \\ &= \sum_{w \in K} c(x, y, w) (Q_w \circ f)^{(k)}(0) = \\ &= \sum_{w \in K} c(x, y, w) \varphi_k(w) = \varphi_k(x * y), \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy a $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N : K \rightarrow \mathbb{C}$ függvények általánosított N -ed rendű momentum függvény sorozatot alkotnak K -n.

A fordított állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N : K \rightarrow \mathbb{C}$ egy általánosított N -ed rendű momentum függvény sorozat K -n. Mivel φ_0 exponenciális függvény, így a 2.6.1. Tétel alapján $\varphi_0(x) = Q_x(\lambda)$ valamilyen $\lambda = (c_{10}, c_{20}, \dots, c_{d0}) \in \mathbb{C}^d$ esetén. A 2.6.3. Tétel bizonyításában láttuk, hogy a

$$\left(\partial_1 Q_x(\lambda), \partial_2 Q_x(\lambda), \dots, \partial_d Q_x(\lambda) \right)$$

vektorok lineárisan függetlenek $x \in K_1$ és $x \neq e$ esetén, így bármely rögzített $j = 1, \dots, N$ esetén a

$$\varphi_j(x) = \sum_{i=1}^d c_{ij} \partial_i Q_x(\lambda)$$

lineáris egyenletrendszernek egyértelműen létezik c_{ij} , $i = 1, \dots, d$ megoldása minden $x \in K_1$ és $x \neq e$ esetén. Ezután definiáljuk az f_i függvényt $i = 1, \dots, d$ esetén a következőképpen:

$$f_i(t) = \sum_{j=0}^N \frac{c_{ij}}{j!} t^j \quad (t \in \mathbb{C}),$$

és legyen $k = 0, 1, \dots, N$ esetén

$$\psi_k(x) = \varphi_k(x) - (Q_x \circ f)^{(k)}(0) \quad (x \in K).$$

Megmutatjuk, hogy $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N$ azonosan nulla függvények. Mivel $f(0) = \lambda$, így λ választása miatt $\varphi_0(x) = Q_x(f(0))$, tehát $\psi_0(x) = \varphi_0(x) - Q_x(f(0)) = 0$ minden $x \in K$ esetén. A momentum függvények egyenletéből k -szerinti teljes indukcióval azonnal következik, hogy $\varphi_k(e) = 0$ minden $k = 0, 1, \dots, N$ esetén. Ha pedig $x \in K_1$ és $x \neq e$, akkor Q_x lineáris, így

$$(Q_x \circ f)^{(k)}(0) = \sum_{i=1}^d \partial_i Q_x(f(0)) f_i^{(k)}(0) = \sum_{i=1}^d \partial_i Q_x(\lambda) c_{ik} = \varphi_k(x)$$

fennáll $k = 1, \dots, N$ esetén. Ezek szerint $\psi_k(x) = 0$ teljesül, ha $x \in K_1$ és $k = 0, 1, \dots, N$.

A bizonyítást teljes indukcióval folytatjuk. Tegyük fel, hogy $\psi_k(x) = 0$ teljesül minden $k = 0, 1, \dots, N$ és $x \in K_n$ esetén, és legyen $x \in K_{n+1}$ tetszőleges. A (2.33) formula alapján

$$\delta_x = \sum_{j=1}^s a_j \delta_{x_j} * \delta_{y_j}$$

valamely a_j komplex számok és $x_j \in K_1$, $y_j \in K_n$ elemek esetén, ahol s egy pozitív egész és $j = 1, \dots, s$. Ebből következik, hogy

$$\varphi_k(x) = \sum_{j=1}^s a_j \varphi_k(x_j * y_j)$$

minden $k = 1, \dots, N$ esetén. Másrészt, k -szor differenciálva a (2.33) egyenletet majd használva a $t = 0$ helyettesítést, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 (Q_x \circ f)^{(k)}(0) &= \sum_{j=1}^s a_j \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (Q_{x_j} \circ f)^{(l)}(0) (Q_{y_j} \circ f)^{(k-l)}(0) = \\
 &= \sum_{j=1}^s a_j \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \varphi_l(x_j) \varphi_{k-l}(y_j) = \\
 &= \sum_{j=1}^s a_j \varphi_k(x_j * y_j) = \varphi_k(x).
 \end{aligned}$$

Tehát $\psi_k(x) = 0$ teljesül minden $x \in K$ és $k = 0, 1, \dots, N$ esetén. □

3 FÜGGVÉNYEGYENLETEK STURM–LIOUVILLE-HIPERC- CSOPORTOKON

3.1 STURM–LIOUVILLE-HIPERC SOPORTOK

A Sturm–Liouville-hipercsoportok egy széles osztályt alkotnak a hipercsoportokon belül, nevüket a definiálásukhoz használt Sturm–Liouville-operátorról kapták, illetve onnan, hogy az ilyen hipercsoportok exponenciális függvényei egy Sturm–Liouville-féle peremérték probléma megoldásai. Az összes eddig ismert példa, amely a nemnegatív valós számok $\mathbb{R}_0$ halmazán definiál hipercsoportot, valójában ebbe az osztályba tartozik. A Sturm–Liouville-hipercsoportok eredete J. Delsarte munkájáig nyúlik vissza, aki általánosított eltolásoperátort definiált a Taylor-formula kiterjesztésével ([Del38]). Ezt a gondolatmenetet általánosította B. Levitan, majd a hiperkomplex rendszerek bevezetésével Y. M. Berezanskii ([Lev45], [Ber53]). Differenciáloperátorokkal kapcsolatos konvolúció struktúrák tanulmányozásával jutott el H. Chébli a Sturm–Liouville-hipercsoportokig, de voltak más irányban történt kutatások is, amik ugyan- ehhez a fogalomhoz vezettek ([Che72], [Boc56], [CoS90], [Zeu92b]). Ebben a fejezetben a fontosabb tulajdonságok ismertetése mellett leírjuk az additív és az exponenciális függvényeket is.

Egy $A : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt *Sturm–Liouville-függvénynek* nevezünk, ha a pozitív valós számok $\mathbb{R}_+$ halmazán pozitív és folytonosan differenciálható. Az A függvényhez tartozó L_A *Sturm–Liouville-operátor*

$$L_A f = -f'' - \frac{A'}{A} f',$$

ahol $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény. Ezek után bevezetjük az l differenciáloperátort az alábbi módon:

$$\begin{aligned} l[u](x, y) &= (L_A)_x u(x, y) - (L_A)_y u(x, y) = \\ &= -\partial_1^2 u(x, y) - \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_1 u(x, y) + \partial_2^2 u(x, y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \partial_2 u(x, y), \end{aligned}$$

ahol $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.

A $K = (\mathbb{R}_0, *)$ hipercsoportot *Sturm–Liouville-hipercsoportnak nevezzük*, ha létezik egy A Sturm–Liouville-függvény, amelyre teljesül, hogy minden olyan f függvény esetén, amely egy páros nemnegatív $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ -beli függvény megszorítása $\mathbb{R}_0$ -ra, az $u_f : \mathbb{R}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u_f(x, y) = \int_{\mathbb{R}_0} f d(\delta_x * \delta_y) = f(x * y)$$

függvény kétszer folytonosan differenciálható és kielégíti az alábbi parciális differenciálegyenletet:

$$l[u_f] = 0, \quad \partial_2 u_f(x, 0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Más szóval, u_f megoldása a

$$\begin{aligned} \partial_1^2 u(x, y) + \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_1 u(x, y) &= \partial_2^2 u(x, y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \partial_2 u(x, y), \\ \partial_2 u(x, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Cauchy-feladatnak, ahol $x, y \in \mathbb{R}_+$. A hipercsoportok tulajdonságaiból közvetlenül adódik, hogy $u_f(y, 0) = u_f(0, y) = f(y)$ és $\partial_1 u_f(0, y) = 0$ fennáll minden pozitív valós y esetén, így tehát u_f egyértelmű megoldása az

$$\begin{aligned} \partial_1^2 u(x, y) + \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_1 u(x, y) &= \partial_2^2 u(x, y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \partial_2 u(x, y), \\ \partial_1 u(0, y) &= 0, \quad \partial_2 u(x, 0) = 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u(0, y) = f(y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

peremérték feladatnak, ahol $x, y \in \mathbb{R}_+$. Mivel (3.1) minden f esetén egyértelműen meghatározza az u_f függvényt, így tekinthetjük a *Sturm–Liouville-hipercsoportot definiáló peremérték feladatnak*. Ha egy K Sturm–Liouville-hipercsoportot az A Sturm–Liouville-függvény segítségével adtuk meg, akkor használni fogjuk a $K = (\mathbb{R}_0, *A)$ jelölést. Megjegyezzük, hogy az A függvényre tett további kikötésekkel garantálni lehet, hogy a fenti konstrukció valóban hipercsoportot határozzon meg, lásd [Zeu92b].

3.1.1. PÉLDA. Ha az A Sturm–Liouville-függvényre teljesül, hogy

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{\alpha_0}{x} + \alpha_1(x) \quad (x \neq 0) \tag{3.2}$$

a 0 egy környezetében, ahol $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ páratlan függvény, továbbá A szigorúan monoton növekvő, $\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = \infty$ és A'/A nem-negatív szigorúan monoton csökkenő, akkor A -t *Chébli–Trimèche-függvénynek* és a $K = (\mathbb{R}_0, *A)$ hipercsoportot *Chébli–Trimèche-hipercsoportnak* nevezzük. Speciálisan, ha $A(0) = 0$, $\alpha > 0$ és

$$A(x) = x^\alpha \quad (x \in \mathbb{R}_+),$$

akkor a $K = (\mathbb{R}_+, *A)$ hipercsoportot *Bessel–Kingman-hipercsoportnak* nevezzük, ha pedig $A(0) = 0$, $\alpha > 0$ és

$$A(x) = \text{sh}^\alpha x \quad (x \in \mathbb{R}_+),$$

akkor *hiperbolikus hipercsoportnak*.

3.1.2. PÉLDA. Ha az A Sturm–Liouville-függvény kétszer folytonosan differenciálható $\mathbb{R}_+$ -on és (3.2) teljesül rá az $\alpha_0 = 0$ és $\alpha_1 \in C^1(\mathbb{R}_+)$ feltételekkel, akkor a $K = (\mathbb{R}_0, *A)$ hipercsoportot *Levitan-hipercsoportnak* nevezzük. Speciális esetei a *ch hipercsoport*:

$$A(x) = \text{ch}^2 x \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

és a *négyzetes hipercsoport*:

$$A(x) = (1 + x)^2 \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

A következő két tétel a Sturm–Liouville-hipercsoportok exponenciális illetve additív függvényeit adja meg.

3.1.3. TÉTEL. A $K = (\mathbb{R}_0, *A)$ Sturm–Liouville-hipercsoporton az $m : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor exponenciális függvény, ha létezik olyan λ komplex szám, amelyre

$$m''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} m'(x) = \lambda m(x), \quad m(0) = 1, \quad m'(0) = 0 \quad (3.3)$$

fennáll minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén.

B i z o n y í t á s. Ha $m : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ megoldása a (3.3) kezdetiérték feladatnak, akkor $(x, y) \mapsto m(x)m(y)$ megoldása a (3.1) peremérték feladatnak, hiszen

$$\begin{aligned} \partial_1^2(m(x)m(y)) + \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_1(m(x)m(y)) &= \left(m''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} m'(x) \right) m(y) = \\ &= \lambda m(x)m(y) = \left(m''(y) + \frac{A'(y)}{A(y)} m'(y) \right) m(x) = \\ &= \partial_2^2(m(x)m(y)) + \frac{A'(y)}{A(y)} \partial_2(m(x)m(y)), \end{aligned}$$

továbbá $\partial_1(m(x)m(y))|_{x=0} = m'(0)m(y) = 0$, hasonlóan $\partial_2(m(x)m(y))|_{y=0} = 0$ és $m(x)m(0) = m(x)$, $m(0)m(y) = m(y)$. Másrészt definíció szerint

$$m(x * y) = u_m(x, y) = \int_0^\infty m(t) d(\delta_x * \delta_y)(t)$$

szintén megoldása (3.1)-nek, így szükségképpen megegyeznek, és m valóban exponenciális.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $m : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ egy exponenciális függvény K -n. Ekkor m kétszer folytonosan differenciálható, és $u_m(x, y) = m(x)m(y)$ megoldása a hipercsoportot definiáló peremérték feladatnak:

$$\left(m''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} m'(x) \right) m(y) = \left(m''(y) + \frac{A'(y)}{A(y)} m'(y) \right) m(x)$$

minden $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén, így létezik olyan λ komplex szám, amelyre

$$m''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} m'(x) = \lambda m(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Mivel a hipercsoport egységeleme a nulla, így $m(0) = 1$ és $m'(0) = 0$. □

A 3.1.3. Tétel alapján minden exponenciális függvény egy sajátfüggvénye a hipercsoportoz tartozó Sturm–Liouville-operátornak, és minden komplex szám sajátérték. A komplex számok és az exponenciális függvények között tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, így a $\Phi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény egy exponenciális sereg K -n, ahol $x \mapsto \Phi(x, \lambda)$ jelöli egy rögzített λ komplex szám esetén a (3.3) kezdeti érték feladat megoldását. Például $\lambda = 0$ esetén az

$$m''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} m'(x) = 0, \quad m(0) = 1, \quad m'(0) = 0$$

feladatnak $m \equiv 1$ az egyértelmű megoldása, tehát $\Phi(x, 0) = 1$, ahol $x \in \mathbb{R}_0$.

3.1.4. PÉLDA. A 3.1.2. Példabeli négyzetes hipercsoport esetén az exponenciálisok pontosan az

$$m(x) = \frac{\sin(\lambda x) + \lambda \cos(\lambda x)}{\lambda(1 + x)} \quad (x \geq 0)$$

alakú függvények, ahol $\lambda \neq 0$, és az azonosan 1 függvény.

3.1.5. TÉTEL. *A $K = (\mathbb{R}_0, *A)$ Sturm–Liouville-hipercsoporton az $a : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor additív függvény, ha létezik olyan λ komplex szám, amelyre*

$$a''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} a'(x) = \lambda, \quad a(0) = 0, \quad a'(0) = 0 \quad (3.4)$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén.

B i z o n y í t á s. Az állítást az előző tétel bizonyításához hasonlóan lehet igazolni. Először tegyük fel, hogy $a : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ kielégíti a (3.4) kezdeti érték feladatot. Ekkor az $(x, y) \mapsto a(x) + a(y)$ függvény és az

$$a(x * y) = u_a(x, y) = \int_0^\infty a(t) d(\delta_x * \delta_y)(t)$$

függvény egyaránt kielégíti a hipercsoportot definiáló peremérték feladatot, így a két függvény megegyezik.

Megfordítva, ha $a : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ additív függvény, akkor az $u_a(x, y) = a(x) + a(y)$ függvény megoldása (3.1)-nek, tehát

$$a''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} a'(x) = a''(y) + \frac{A'(y)}{A(y)} a'(y)$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}_+$ esetén, és így létezik olyan $\lambda \in \mathbb{C}$, amelyre

$$a''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} a'(x) = \lambda \quad (x \in \mathbb{R}_+),$$

továbbá $a(0) = 0$ és $a'(0) = 0$. □

Világos, hogy ha a_λ jelöli a $\lambda \in \mathbb{C}$ számhoz tartozó egyértelmű megoldását (3.4)-nek, akkor $a_\lambda = \lambda a_1$, tehát valamennyi additív függvény konstansszorosa egy rögzített nem azonosan nulla additív függvénynek. Az a_1 függvényt az adott Sturm–Liouville-hipercsoport *generáló additív függvényének* nevezzük.

A (3.4) kezdeti érték probléma megoldásai explicit módon megadhatóak a lineáris differenciálegyenletek standard módszereinek segítségével, de az egyértelműség miatt akár közvetlenül is ellenőrizhetjük az alábbi tétel helyességét.

3.1.6. TÉTEL. *A $K = (\mathbb{R}_0, *A)$ Sturm–Liouville-hipercsoport generáló additív függvénye:*

$$a_1(x) = \int_0^x \int_0^y \frac{A(t)}{A(y)} dt dy \quad (x \in \mathbb{R}_+). \quad (3.5)$$

3.1.7. PÉLDA. A 3.1.1. Példabeli Bessel–Kingman-hipercsoportok esetén $A(x) = x^\alpha$, ahol $x \in \mathbb{R}_+$ és α egy pozitív szám, ekkor

$$a_1(x) = \int_0^x \int_0^y \frac{t^\alpha}{y^\alpha} dt dy = \frac{x^2}{2(\alpha + 1)}$$

és

$$a_\lambda(x) = \frac{\lambda x^2}{2(\alpha + 1)} \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

A négyzetes hipercsoport esetén, lásd 3.1.2. Példa, $A(x) = (1 + x)^2$ és

$$a_1(x) = \int_0^x \int_0^y \frac{(1+t)^2}{(1+y)^2} dt dy = \frac{x^3 + 3x^2}{6(x+1)} \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

3.2 MOMENTUM FÜGGVÉNYEK EGYENLETE

Ebben az alfejezetben megadjuk a Sturm–Liouville-hipercsoportok általánosított momentum függvényeit, vagyis azokat a függvényeket, amelyek kielégítik a (2.10) egyenletet. Sturm–Liouville-hipercsoportok első és másodrendű momentum függvényeire vonatkozó vizsgálatok vonatkozásában lásd [Gal97], [Voi90], [Zeu92b], és n -ed rendű momentum függvény sorozatokkal kapcsolatban lásd [ReV00].

3.2.1. TÉTEL. Legyen $K = (\mathbb{R}_0, *A)$ egy Sturm–Liouville-hipercsoport és N egy pozitív egész. A $\varphi_k : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, N$ függvények akkor és csak akkor alkotnak egy általánosított N -ed rendű momentum függvény sorozatot, ha léteznek olyan c_k komplex számok $k = 0, 1, \dots, N$ esetén, hogy

$$\varphi_0''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} \varphi_0'(x) = c_0 \varphi_0(x), \quad \varphi_0(0) = 1, \quad \varphi_0'(0) = 0$$

és

$$\varphi_k''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} \varphi_k'(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} c_j \varphi_{k-j}(x), \quad \varphi_k(0) = 0, \quad \varphi_k'(0) = 0$$

fennáll minden $x \in \mathbb{R}_+$ és $k = 1, 2, \dots, N$ esetén.

B i z o n y í t á s. Ha a $\varphi_k : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, N$ függvények eleget tesznek a tételben szereplő feltételeknek, akkor φ_0 egy exponenciális függvény, és így $\varphi_0(x*y) = \varphi_0(x)\varphi_0(y)$ teljesül minden nemnegatív x és y esetén. Megmutatjuk, hogy (2.10) teljesül minden $k = 1, \dots, N$ esetén, azaz a

$$h(x, y) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varphi_j(x) \varphi_{k-j}(y)$$

függvény megoldása a (3.1) parciális differenciálegyenletnek. Helyettesítés után

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varphi_j''(x) \varphi_{k-j}(y) + \frac{A'(x)}{A(x)} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varphi_j'(x) \varphi_{k-j}(y) = \\ = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varphi_j(x) \varphi_{k-j}''(y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varphi_j(x) \varphi_{k-j}'(y), \end{aligned}$$

adódik, ami egyenértékű azzal, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\varphi_j''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} \varphi_j'(x) \right) \varphi_{k-j}(y) = \\ = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\varphi_{k-j}''(y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \varphi_{k-j}'(y) \right) \varphi_j(x), \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\sum_{t=0}^j \binom{j}{t} c_t \varphi_{j-t}(x) \right) \varphi_{k-j}(y) = \\ = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\sum_{s=0}^{k-j} \binom{k-j}{s} c_s \varphi_{k-j-s}(y) \right) \varphi_j(x). \end{aligned}$$

Ez az egyenlőség pedig teljesül, mert az $l = j + s$ választással a jobboldal az alábbi formába írható:

$$\sum_{l=0}^k \sum_{s=0}^l \binom{k}{l-s} \binom{k-(l-s)}{s} c_s \varphi_{k-l}(y) \varphi_{l-s}(x),$$

ami valóban egyenlő a baloldallal. A peremérték feltételek szintén teljesülnek, mivel

$$\partial_1 h(0, y) = \sum_{j=0}^k \varphi'_j(0) \varphi_{k-j}(y) = 0,$$

$$h(0, y) = \sum_{j=0}^k \varphi_j(0) \varphi_{k-j}(y) = \varphi_k(y),$$

és hasonlóan, $\partial_2 h(x, 0) = 0$, $h(x, 0) = \varphi_k(x)$. Ezek alapján h az egyetlen megoldása a peremérték feladatnak, ami azt jelenti, hogy $h(x, y) = \varphi(x * y)$.

A fordított állítás igazolásához tegyük fel, hogy a $\varphi_k : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, N$ függvények N -ed rendű általánosított momentum függvény sorozatot alkotnak. Ekkor definíció szerint φ_0 egy exponenciális függvény, így a feltétel teljesül rá. Most alkalmazzunk teljes indukciót és tegyük fel, hogy az állítás teljesül a $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ függvényekre valamely $k < N$ esetén. Tudjuk, hogy

$$\varphi_{k+1}(x * y) = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \varphi_j(x) \varphi_{k+1-j}(y)$$

teljesül, és a hipercsoport definíciója szerint ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \varphi''_j(x) \varphi_{k+1-j}(y) + \frac{A'(x)}{A(x)} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \varphi'_j(x) \varphi_{k+1-j}(y) = \\ = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \varphi_j(x) \varphi''_{k+1-j}(y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \varphi_j(x) \varphi'_{k+1-j}(y). \end{aligned}$$

Átrendezve a tagokat és használva az indukciós feltevést azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 & \left(\varphi''_{k+1}(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} \varphi'_{k+1}(x) \right) \varphi_0(y) + \\
 & \quad + \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} \left(\sum_{t=0}^j \binom{j}{t} c_t \varphi_{j-t}(x) \right) \varphi_{k+1-j}(y) = \\
 & = \left(\varphi''_{k+1}(y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \varphi'_{k+1}(y) \right) \varphi_0(x) + \\
 & \quad + \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} \left(\sum_{t=0}^{k+1-j} \binom{k+1-j}{t} c_t \varphi_{k+1-j-t}(y) \right) \varphi_j(x),
 \end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned}
 & \left(\varphi''_{k+1}(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} \varphi'_{k+1}(x) \right) \varphi_0(y) + \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} c_j \varphi_0(x) \varphi_{k+1-j}(y) + \\
 & \quad + \sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} \left(\sum_{t=0}^{j-1} \binom{j}{t} c_t \varphi_{j-t}(x) \right) \varphi_{k+1-j}(y) = \\
 & = \left(\varphi''_{k+1}(y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \varphi'_{k+1}(y) \right) \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} c_{k+1-j} \varphi_0(y) \varphi_j(x) + \\
 & \quad + \sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} \left(\sum_{t=0}^{k-j} \binom{k-j}{t} c_t \varphi_{k+1-j-t}(y) \right) \varphi_j(x).
 \end{aligned}$$

Egyszerűen belátható, hogy az utolsó tagok a bal- és a jobboldalon megegyeznek:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} \left(\sum_{t=0}^{j-1} \binom{j}{t} c_t \varphi_{j-t}(x) \right) \varphi_{k+1-j}(y) &= \\
&= \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{s=1}^{k-t} \binom{k+1}{s} \binom{k+1-s}{t} c_t \varphi_{k+1-s-t}(x) \varphi_s(y) = \\
&= \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{s=1}^{k-t} \binom{k+1}{s+t} \binom{s+t}{t} c_t \varphi_s(y) \varphi_{k+1-s-t}(x) = \\
&= \sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} \left(\sum_{t=0}^{k-j} \binom{k+1-j}{t} c_t \varphi_{k+1-j-t}(y) \right) \varphi_j(x).
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned}
&\left(\varphi''_{k+1}(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} \varphi'_{k+1}(x) - \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} c_{k+1-j} \varphi_j(x) \right) \varphi_0(y) = \\
&= \left(\varphi''_{k+1}(y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \varphi'_{k+1}(y) - \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} c_j \varphi_{k+1-j}(y) \right) \varphi_0(x)
\end{aligned}$$

fennáll minden pozitív x és y esetén, tehát létezik olyan c_{k+1} komplex szám, amelyre

$$\varphi''_{k+1}(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} \varphi'_{k+1}(x) - \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} c_{k+1-j} \varphi_j(x) = c_{k+1} \varphi_0(x).$$

Következésképpen kapjuk azt is, hogy $\varphi_{k+1}(0) = 0$, ami összevetve a

$$0 = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \varphi_j(x) \varphi'_{k+1-j}(0) = \varphi_0(x) \varphi'_{k+1}(0),$$

egyenlőséggel azt adja, hogy $\varphi'_{k+1}(0) = 0$, tehát a tétel $(k+1)$ -re is igaz. $\square$

Ezután megadjuk a Sturm-Liouville-hipercsoportok általánosított momentum függvényeinek zárt alakját.

3.2.2. TÉTEL. Legyen $K = (\mathbb{R}_0, *A)$ egy Sturm–Liouville-hipercsoport és jelölje $\Phi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a hozzá tartozó exponenciális sereget. A $\varphi_k : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, N$ függvények pontosan akkor alkotnak egy N -ed rendű általánosított momentum függvény sorozatot K -n, ha léteznek olyan $c_0, c_1, \dots, c_N$ komplex számok, amelyekre

$$\varphi_k(x) = \partial_t^k \Phi(x, f(t))|_{t=0} \quad (x \in \mathbb{R}_0)$$

és

$$f(t) = \sum_{j=0}^N c_j \frac{t^j}{j!} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

B i z o n y í t á s. Tegyük fel, hogy a $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N$ függvények felírhatóak a tételben megadott alakban, és legyen $k \in \{0, 1, \dots, N\}$. A (3.3) egyenletben legyen $\lambda = f(t)$, majd a t -szerinti k -szoros differenciálás után azt kapjuk, hogy

$$\partial_x^2 \partial_t^k \Phi(x, f(t)) + \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_x \partial_t^k \Phi(x, f(t)) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)}(t) \partial_t^{k-j} \Phi(x, f(t)).$$

A $t = 0$ helyettesítés után a $\varphi_k(x) = \partial_t^k \Phi(x, f(t))|_{t=0}$ egyenlőségre az adódik, hogy

$$\varphi_k''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} \varphi_k'(x) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} c_j \varphi_{k-j}(x),$$

továbbá $\varphi_0(0) = 1$, $\varphi_0'(0) = 0$, és a $k \neq 0$ esetben pedig $\varphi_k(0) = 0$ és $\varphi_k'(0) = 0$. Ez azt jelenti, hogy a 3.2.1. Tétel feltételei teljesülnek és $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N$ valóban egy általánosított momentum sorozatot alkot.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N$ egy általánosított momentum sorozat, és használjunk ismét teljes indukciót. Az állítás nyilván teljesül φ_0 esetén, és tegyük fel, hogy $\varphi_j(x) = \partial_t^j \Phi(x, f(t))|_{t=0}$ fennáll $j = 0, 1, \dots, k$ esetén, ahol $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Ha

$$g(x) = \varphi_{k+1}(x) - \partial_t^{k+1} \Phi(x, f(t))|_{t=0} \quad (x \in \mathbb{R}_+)$$

akkor a $g''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} g'(x)$ kifejezés egyenlő azzal, hogy

$$\varphi_{k+1}''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} \varphi_{k+1}'(x) - \partial_x^2 \partial_t^{k+1} \Phi(x, f(t))|_{t=0} - \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_x \partial_t^{k+1} \Phi(x, f(t))|_{t=0},$$

majd alkalmazva a 3.2.1. Tételt, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_0 \varphi_{k+1}(x) + \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k+1}{j} c_j \partial_t^{k+1-j} \Phi(x, f(t)) \Big|_{t=0} \\ - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} c_j \partial_t^{k+1-j} \Phi(x, f(t)) \Big|_{t=0} = c_0 g(x) \end{aligned}$$

valamely $c_0, c_1, \dots, c_{k+1}$ számok esetén. Innen

$$g''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} g'(x) = c_0 g(x), \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 0,$$

tehát $g(x) \equiv 0$.

□

ÖSSZEFOGLALÓ

A disszertációban hipercsoportokon értelmezett függvényegyenletekkel foglalkozunk. A struktúra jellegéből adódóan konvolúció típusú függvényegyenletek értelmezésére van lehetőség, keressük többek között a momentum függvények egyenletének, a Levi–Civita-egyenletnek és az állandó együtthatós differenciaegyenleteknek a megoldásait speciális hipercsoportokon.

Az első fejezetben leírjuk a hipercsoportok definícióját, illetve a hozzájuk kapcsolódó legfontosabb fogalmakat és tulajdonságokat. Legyen K egy lokálisan kompakt Hausdorff-tér, és jelölje δ_x az $x \in K$ pontbeli *Dirac-mértéket* vagy *pont mértéket*. Azt mondjuk, hogy $(K, *, {}^\vee)$ *hipercsoport*, ha teljesülnek az alábbi axiómák:

- H1 Az $\mathcal{M}^b(K)$ vektortéren adott egy $*$ bináris művelet (*konvolúció*), amellyel $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ algebra.
- H2 Ha $x, y \in K$, akkor $\delta_x * \delta_y \in \mathcal{M}^1(K)$ és $\text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ kompakt.
- H3 Az $(x, y) \mapsto \delta_x * \delta_y$ leképezés folytonos, ahol $\mathcal{M}^1(K)$ topológiája a $\mathcal{C}_c(K)$ szerinti gyenge topológia.
- H4 Az $(x, y) \mapsto \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ leképezés folytonos, ahol $\mathcal{K}(K)$ topológiája a Michael-topológia.
- H5 Egyértelműen létezik egy olyan $e \in K$ elem, amelyre $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x$ teljesül minden $x \in K$ esetén.
- H6 Létezik egy ${}^\vee : K \rightarrow K$ homeomorfizmus (*involúció*), amelyre minden $x \in K$ esetén fennáll, hogy $(x^\vee)^\vee = x$, és valamely $x, y \in K$ elemekre $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ pontosan akkor teljesül, ha $x = y^\vee$.
- H7 Bármely $x, y \in K$ elemekre $(\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee}$ teljesül, ahol egy tetszőleges $\mu \in \mathcal{M}^b(K)$ mérték esetén $\mu^\vee$ az alábbi módon definiált:

$$\int_K f(x) d\mu^\vee(x) = \int_K f(x^\vee) d\mu(x) \quad (f \in \mathcal{C}_c(K)).$$

Például, ha K egy lokálisan kompakt topologikus csoport, $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$ és $x^\vee = x^{-1}$, akkor $(K, *, {}^\vee)$ hipercsoport. Valóban, a csoportművelet asszociativitása miatt H1 teljesül, a csoport egységeleme a hipercsoportnak is egységeleme

és $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_y) = \{xy\}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = y^{-1}$, továbbá

$$(\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{(xy)^{-1}} = \delta_{y^{-1}x^{-1}} = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee}.$$

A hipercsoportok tehát tekinthetők a lokálisan kompakt csoportok általánosításának, ahol a korlátos mértékek konvolúciója hasonlóan működik mint a mértékek Banach-algebrája csoportok esetén. A konvolúció operátor segítségével hipercsoportokra is általánosíthatjuk a csoportok esetén természetes módon létező transzláció fogalmát. Tekintsünk egy $f \in \mathcal{C}(K)$ függvényt, és legyen $x, y \in K$. Ekkor az f függvény x -szel való bal- illetve jobb-eltolta az y pontban

$$\mathcal{T}^x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_x * \delta_y)(z), \quad \mathcal{T}_x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_y * \delta_x)(z).$$

A csoportoknál használható $f(xy)$ kifejezés analógiájaként bevezetjük a $\mathcal{T}$ eltolás operátorral, vagy transzláció operátorral kapcsolatban az

$$f(x * y) = \mathcal{T}^x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_x * \delta_y)(z)$$

jelölést, habár $x * y$ önmagában nem értelmezhető.

A második fejezet polinomiális hipercsoportokkal foglalkozik. Először az *egyváltozós polinomiális hipercsoportok* rövid ismertetésére kerül sor: Legyenek $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan valós sorozatok, amelyekre fennállnak az alábbi tulajdonságok:

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad \gamma_n > 0, \quad \beta_n \geq 0, \quad \alpha_{n+1} > 0 \quad \text{és} \quad \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$$

minden n természetes szám esetén. Definiáljuk a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sorozatot úgy, hogy $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ és

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n-1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n+1}(x)$$

minden $n \geq 1$ egész és x valós szám esetén. Ekkor létezik olyan kompakt tartójú π mérték, melyre nézve $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ortogonális polinom rendszer és léteznek olyan $c(n, m, k)$ konstansok (*linearizációs együtthatók*) minden n, m, k természetes szám esetén, hogy

$$\sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k) = 1.$$

Ha a linearizációs együtthatók nemnegatívak, $\delta_n^\vee = \delta_n$ és

$$\delta_n * \delta_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k) \delta_k \quad (n, m \in \mathbb{N}),$$

akkor $K = (\mathbb{N}, *, ^\vee)$ hipercsoport. Ismert, hogy egy $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sorozat által generált $K = (\mathbb{N}, *)$ polinomiális hipercsoporton az

$$\int_K a(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = a(x * y) = a(x) + a(y) \quad (x, y \in K)$$

függvényegyenletet teljesítő *additív* függvények $a(n) = cP'_n(1)$, $n \in \mathbb{N}$ alakúak valamely c komplex szám esetén, illetve az

$$\int_K m(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = m(x * y) = m(x)m(y) \quad (x, y \in \mathbb{N}),$$

egyenletet kielégítő *exponenciális* függvények pontosan az $m(n) = P_n(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$ függvények valamely λ komplex szám esetén.

Ezután megfogalmazzuk és bizonyítjuk az *általánosított N -ed rendű momentum függvények* egyenletének általános megoldására vonatkozó tételt (2.2.1. Tétel).

TÉTEL. Legyen $K = (\mathbb{N}, *)$ a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom rendszer által generált polinomiális hipercsoport és λ tetszőleges komplex szám. A $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N : K \rightarrow \mathbb{C}$ függvények akkor és csak akkor alkotnak a $\varphi_0(n) = P_n(\lambda)$ exponenciális függvény által generált általánosított N -ed rendű momentum sorozatot $(\mathbb{N}, *)$ -on, azaz akkor és csak akkor elégítik ki a

$$\varphi_k(\delta_x * \delta_y) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varphi_j(x) \varphi_{k-j}(y) \quad (x, y \in K)$$

egyenletet $k = 0, 1, \dots, N$ esetén, ha

$$\varphi_k(n) = (P_n \circ f)^{(k)}(0)$$

fennáll mined $n \in \mathbb{N}$ és $k = 0, 1, \dots, N$ esetén, ahol

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!} x^j \quad (x \in \mathbb{C}),$$

$c_0 = \lambda$ és c_j , $j = 1, 2, \dots$ tetszőleges komplex számok.

Megadjuk a *szinusz* és a *koszinusz* egyenlet megoldásait (2.3.1. Tétel, 2.3.2. Tétel), majd az ennél jóval általánosabb

$$f(x * y) = \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(y) \quad (x \in K)$$

Levi-Civita-egyenlet lineárisan független megoldásait. A bizonyítások a spektrálszintézisre épülnek, amelyet Székelyhidi László ültetett át polinomiális hipercsoportokra ([Sze02]). Legyen $K = (\mathbb{N}, *)$ a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom sorozat által generált polinomiális hipercsoport. Ekkor K -ra teljesül a spektrálszintézis és a spektrálanalízis, továbbá ha V egy n -dimenziós eltolásinvariáns altere a $\mathcal{C}(K)$ lineáris térnek, akkor léteznek olyan $m_1, \dots, m_k$ természetes számok és $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ különböző komplex számok, hogy $m_1 + \dots + m_k = n$, és V -nek egy bázisát adják az $n \mapsto P_n^{(j)}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$ függvények. Mivel a spektrálszintézis nemcsak polinomiális hipercsoportokra teljesül, hanem például Sturm–Liouville-hipercsoportokra is, így a tételt általánosabban is megfogalmazhatjuk, ha annyit teszünk fel a hipercsoportról, hogy $\mathcal{C}(K)$ véges dimenziós eltolásinvariáns altereit olyan lineárisan független exponenciális monomok generálják, amelyek előállnak egy $x \mapsto \Phi(x, \lambda)$ egyparaméteres exponenciális függvénysereg tagjainak deriváltjaiként. Mivel az f eltoltjai által generált $\tau(f)$ n -dimenziós eltolásinvariáns alter tartalmazza a g_i és a h_i függvényeket $i = 1, \dots, n$ esetén, így léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ komplex számok úgy, hogy a $\tau(f)$ alteret generálják az $x \mapsto \Phi^{(j)}(x, \lambda_l)$ függvények $l = 1, 2, \dots, k$ és $j = 0, 1, \dots, n_l - 1$ esetén, ahol $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Az ismeretlen függvényeket így komplex együtthatók segítségével a következő formába írhatjuk:

$$f(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} F_{l,j} \Phi^{(j)}(x, \lambda_l),$$

$$g_i(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} G_{l,j}^i \Phi^{(j)}(x, \lambda_l), \quad h_i(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} H_{l,j}^i \Phi^{(j)}(x, \lambda_l).$$

Jelölje G és H azokat az $n \times n$ típusú mátrixokat, amelyek a g_i és h_i függvényekhez tartozó együtthatók alkotnak: ha $t \in \{1, \dots, n\}$ és $t = n_1 + \dots + n_{l-1} + (j+1)$, akkor

$$G_{it} = G_{l,j}^i, \quad H_{it} = H_{l,j}^i.$$

Eredményünk a következő (2.4.1. Tétel).

TÉTEL. Az $f, g_i, h_i : K \rightarrow \mathbb{C}$ függvények akkor és csak akkor elégítik ki a Levi-Civita-egyenletet, ha

$$H^\top \cdot G = F,$$

ahol

$$F = \begin{pmatrix} B^1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & B^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & B^k \end{pmatrix},$$

a B^l blokkmátrixok $l = 1, \dots, k$ esetén az alábbi $n_l \times n_l$ típusú mátrixok:

$$B_{ts}^l = \begin{cases} \binom{(t-1)+(s-1)}{s-1} F_{l_{(t-1)}}, & \text{ha } (t-1) + (s-1) < n_l \\ 0, & \text{ha } (t-1) + (s-1) \geq n_l \end{cases}$$

és F minden más eleme zérus.

A tétel alkalmazását két példán keresztül szemléltetjük (2.4.2. Példa, 2.4.3. Példa), majd rátérünk az állandó együtthatós lineáris differenciaegyenletek vizsgálatára. A differenciaegyenletek elméletében egy függvény n -nel való eltoltja és az n -szer való eltolása 1-gyel ugyanazt az eredményt adja minden n természetes szám esetén. Hiper csoportoknál azonban két lehetőség adódik differenciaegyenletek definiálására ezen két különböző értelmezés alapján. Legyen $(\mathbb{N}, *)$ a $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polinom rendszer által generált hiper csoport és vezessük be a $\mathcal{T}f(n) = \mathcal{T}_1 f(n) = f(n * 1)$ jelölést minden $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá legyen $\mathcal{T}^0 f = f$ és $\mathcal{T}^N f = \mathcal{T}(\mathcal{T}^{N-1} f)$ minden $N > 1$ egész számra. Tekintsük a Q komplex együtthatós polinomhoz tartozó N -ed rendű konstans együtthatós homogén lineáris differenciaegyenletet:

$$Q(\mathcal{T})f = a_N \mathcal{T}^N f(n) + a_{N-1} \mathcal{T}^{N-1} f(n) + \dots + a_0 f(n) = 0,$$

ahol N egy pozitív egész, $a_0, \dots, a_N$ komplex számok és $a_N \neq 0$. Az egyenlet megoldásterét a $Q(\mathcal{T})$ lineáris operátor nulltere, egy altér $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ -ben, és eltolásinvariáns abban az értelemben, hogy ha f egy megoldás, akkor $\mathcal{T}f$ szintén az. A következő tétel megadja az egyenlet összes megoldását (2.5.3. Tétel).

TÉTEL. Legyen Q egy $N \geq 1$ fokú komplex polinom, melynek gyökei a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ különböző komplex számok, λ_j multiplicitása l_j $j = 1, 2, \dots, k$ esetén és $l_1 + \dots + l_k = N$. Ekkor az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor megoldása a $Q(\mathcal{T})f = 0$ egyenletnek, ha előáll az

$$n \mapsto P_n^{(i)}(\lambda_j) \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad i = 0, 1, \dots, l_j - 1$$

függvények lineáris kombinációjaként.

A másik értelmezési lehetőség szerint tekinthetjük az alábbi differenciaegyenletet:

$$a_N \mathcal{T}_N f(n) + a_{N-1} \mathcal{T}_{N-1} f(n) + \cdots + a_0 f(n) = 0,$$

ahol $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ismeretlen függvény, N egy pozitív egész és $a_N, \dots, a_0$ komplex számok. Az alábbi tétel megmutatja, hogy a megoldásteret hasonló függvények generálják, mint az előző egyenlet esetén, de itt a hipercsoportot generáló polinomoktól is függeni fog a karakterisztikus polinom (2.5.4. Tétel).

TÉTEL. *Az $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény akkor és csak akkor megoldása az egyenletnek, ha előáll az*

$$n \mapsto P_n^{(i)}(\lambda_j) \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad i = 0, 1, \dots, l_j - 1$$

függvények lineáris kombinációjaként, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ különböző komplex gyökei a

$$\lambda \mapsto a_N P_N(\lambda) + a_{N-1} P_{N-1}(\lambda) + \cdots + a_1 P_1(\lambda) + a_0$$

egyenletnek, és λ_j multiplicitása l_j minden $j = 1, 2, \dots, k$ esetén.

Több konkrét példát is nézünk a tételek alkalmazásaként, köztük szerepel a monom egyenlet is (2.5.5. Példa, 2.5.6. Példa, 2.5.7. Példa). A fejezet utolsó részei a többváltozós polinomiális hipercsoportokra vonatkoznak. Legyen K egy megszámlálható halmaz a diszkrét topológiával ellátva, d egy pozitív egész és tekintsük a d -változós komplex polinomok $(Q_x)_{x \in K}$ halmazát. Vezessük be az alábbi jelölést minden $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$K_n = \{x \in K \mid \deg Q_x \leq n\},$$

tehát K_n azon K -beli x elemek halmaza, amelyekre Q_x legfeljebb n -edfokú. Tegyük fel, hogy $\{Q_x \mid x \in K_n\}$ egy bázisa a legfeljebb n -edfokú d -változós komplex polinomok terének. Ekkor minden $x, y \in K$ esetén a $Q_x Q_y$ szorzat egyértelműen felírható a

$$Q_x Q_y = \sum_{w \in K} c(x, y, w) Q_w$$

alakban, ahol $c(x, y, w)$ komplex számok. Egy $(K, *)$ hipercsoportot akkor nevezünk *d -változós polinomiális hipercsoportnak*, ha létezik d -változós polinomoknak olyan $(Q_x)_{x \in K}$ halmaza, amelyre teljesül az előbbi tulajdonság, és a konvolúció K -n az alábbi módon definiált:

$$\delta_x * \delta_y(\{w\}) = c(x, y, w) \quad (x, y, w \in K).$$

Megjegyezzük, hogy egy d -változós polinomiális hipercsoporton az exponenciális függvények $m(x) = Q_x(\lambda)$ és az additív függvények pedig $a(x) = \sum_{i=1}^d c_i \partial_i Q_x(\lambda_0)$ alakúak, ahol $\lambda, c_1, \dots, c_d$ tetszőleges komplex számok és λ_0 a hipercsoport normalizáló pontja: $Q_x(\lambda_0) = 1, x \in K$. Az egyváltozós eset momentum függvényekre vonatkozó eredményét általánosítjuk többváltozós polinomiális hipercsoportokra (2.7.1. Tétel):

TÉTEL. Legyen $(K, *)$ a $(Q_x)_{x \in K}$ polinomok által generált d -változós polinomiális hipercsoport. A $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N : K \rightarrow \mathbb{C}$ függvények akkor és csak akkor alkotnak egy általánosított N -ed rendű momentum függvény sorozatot K -n, ha

$$\varphi_k(x) = (Q_x \circ f)^{(k)}(0)$$

fennáll minden $n \in \mathbb{N}$ és $k = 0, 1, \dots, N$ esetén, ahol $f = (f_1, \dots, f_d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^d$ és f_i legfeljebb N -ed fokú polinom $i = 1, \dots, d$ esetén.

A harmadik fejezet fő eredménye is momentum függvényekre vonatkozik, de ezúttal Sturm–Liouville-hipercsoportokon keressük a megoldásokat. A Sturm–Liouville-hipercsoportok nevüket a definiálásukhoz használt Sturm–Liouville-operátorról kapták, illetve onnan, hogy az ilyen hipercsoportok exponenciális függvényei egy Sturm–Liouville-féle peremérték probléma megoldásai. Egy $A : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt *Sturm–Liouville-függvénynek* nevezzük, ha a pozitív valós számok $\mathbb{R}_+$ halmazán pozitív és folytonosan differenciálható. Az A függvényhez tartozó L_A Sturm–Liouville-operátor

$$L_A f = -f'' - \frac{A'}{A} f',$$

ahol $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény. Ezek után bevezetjük az l differenciáloperátort a $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ téren az alábbi módon:

$$\begin{aligned} l[u](x, y) &= (L_A)_x u(x, y) - (L_A)_y u(x, y) = \\ &= -\partial_1^2 u(x, y) - \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_1 u(x, y) + \partial_2^2 u(x, y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \partial_2 u(x, y). \end{aligned}$$

A $K = (\mathbb{R}_0, *)$ hipercsoportot *Sturm–Liouville-hipercsoportnak* nevezzük, ha létezik egy A Sturm–Liouville-függvény, amelyre teljesül, hogy minden olyan f függvény esetén, amely egy páros nemnegatív $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ -beli függvény megszorítása $\mathbb{R}_0$ -ra, az $u_f : \mathbb{R}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u_f(x, y) = \int_{\mathbb{R}_0} f d(\delta_x * \delta_y) = f(x * y)$$

függvény kétszer folytonosan differenciálható és kielégíti az alábbi parciális differenciálegyenletet:

$$l[u_f] = 0, \quad \partial_2 u_f(x, 0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

Ez egyenértékű azzal, hogy u_f egyértelmű megoldása az

$$\partial_1^2 u(x, y) + \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_1 u(x, y) = \partial_2^2 u(x, y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \partial_2 u(x, y),$$

$$\partial_1 u(0, y) = 0, \quad \partial_2 u(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u(0, y) = f(y)$$

peremérték feladatnak, ahol $x, y \in \mathbb{R}_+$. Egy Sturm–Liouville-hipercsoporton az $m : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor exponenciális függvény, ha

$$m''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} m'(x) = \lambda m(x), \quad m(0) = 1, \quad m'(0) = 0,$$

és az $a : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor additív függvény, ha

$$a''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} a'(x) = \lambda, \quad a(0) = 0, \quad a'(0) = 0$$

teljesül valamely λ komplex szám és minden $x \in \mathbb{R}_+$ esetén. Mivel minden exponenciális függvény egy sajátfüggvénye a hipercsoportoz tartozó Sturm–Liouville-operátornak, és minden komplex szám sajátérték, így a komplex számok és az exponenciális függvények között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, és létezik egy $\Phi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ exponenciális sereg K -n. Végül kimondjuk és bizonyítjuk a Sturm–Liouville-hipercsoportok általánosított momentum függvényeit megadó tételt (3.2.2. Tétel).

TÉTEL. *Legyen $K = (\mathbb{R}_0, *A)$ egy Sturm–Liouville-hipercsoport és jelölje $\Phi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a hozzá tartozó exponenciális sereget. A $\varphi_k : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, N$ függvények pontosan akkor alkotnak egy N -ed rendű általánosított momentum függvény sorozatot K -n, ha léteznek olyan $c_0, c_1, \dots, c_N$ komplex számok, amelyekre*

$$\varphi_k(x) = \partial_t^k \Phi(x, f(t)) \Big|_{t=0} \quad (x \in \mathbb{R}_0)$$

és

$$f(t) = \sum_{j=0}^N c_j \frac{t^j}{j!} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

SUMMARY

This PhD dissertation deals with functional equations on hypergroups. Due to the character of the structure we have the opportunity to investigate functional equations of convolution type, we look, among other things, for the solutions of the equation of moment functions, the Levi-Civita equation and difference equations with constant coefficients on special hypergroups.

In the first chapter the definition of hypergroups and the most important related concepts and properties are given. Let K be a locally compact Hausdorff space and let us denote with δ_x the *Dirac measure* or point measure at $x \in K$. We said that $(K, *, {}^\vee)$ is a *hypergroup* if the following axioms are satisfied:

- H1 There is a binary operation $*$ (*convolution*) on the vector space $\mathcal{M}^b(K)$, such that $(\mathcal{M}^b(K), +, *)$ is an algebra.
- H2 For all $x, y \in K$, $\delta_x * \delta_y \in \mathcal{M}^1(K)$ and $\text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ is compact.
- H3 The mapping $(x, y) \mapsto \delta_x * \delta_y$ is continuous, where $\mathcal{M}^1(K)$ has the weak topology with respect to $\mathcal{C}_c(K)$.
- H4 The mapping $(x, y) \mapsto \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ is continuous, where $\mathcal{K}(K)$ is equipped with the Michael topology.
- H5 There exists a unique element $e \in K$ such that $\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x$ for all $x \in K$.
- H6 There exists a ${}^\vee : K \rightarrow K$ homeomorphism (*involution*), such that $(x^\vee)^\vee = x$ for all $x \in K$ and for any $x, y \in K$, $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_y)$ if and only if $x = y^\vee$.
- H7 For $x, y \in K$, $(\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee}$ holds, where $\mu^\vee$ is defined by

$$\int_K f(x) d\mu^\vee(x) = \int_K f(x^\vee) d\mu(x) \quad (f \in \mathcal{C}_c(K)).$$

For example, if K is a locally compact topological group, $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$ and $x^\vee = x^{-1}$, then $(K, *, {}^\vee)$ is a hypergroup. Indeed, H1 holds by the associativity of the group operation, the identity element of the group is also the identity element of the hypergroup, $e \in \text{supp}(\delta_x * \delta_y) = \{xy\}$ if and only if $x = y^{-1}$ and

$$(\delta_x * \delta_y)^\vee = \delta_{(xy)^{-1}} = \delta_{y^{-1}x^{-1}} = \delta_{y^\vee} * \delta_{x^\vee}.$$

Thus hypergroups can be considered as generalizations of the locally compact groups where the measures convolve in a similar way to that in the Banach algebra of measures of a group. The notion of translation, which exists in a natural way in the case of groups, can be generalized for hypergroups by the help of the convolution operation. Let us consider a function $f \in \mathcal{C}(K)$ and let $x, y \in K$. The *left*, respectively the *right translate of f by x at y* are

$$\mathcal{T}^x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_x * \delta_y)(z), \quad \mathcal{T}_x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_y * \delta_x)(z).$$

As the analogous of the term $f(xy)$ we introduce for the *translation operator $\mathcal{T}$* the following notation

$$f(x * y) = \mathcal{T}^x f(y) = \int_K f(z) d(\delta_x * \delta_y)(z),$$

however $x * y$ has no meaning on its own.

The second chapter deals with polynomial hypergroups. First we review briefly the *polynomial hypergroups with one variable*: Let $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be real sequences such that

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad \gamma_n > 0, \quad \beta_n \geq 0, \quad \alpha_{n+1} > 0 \quad \text{and} \quad \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$$

hold for all $n \in \mathbb{N}$. We define the polynomial sequence $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ by $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ and

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n-1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n+1}(x) \quad (n > 1), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

In this case there exists a compactly supported measure π for which $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forms an orthogonal polynomial system and there exist constants $c(n, m, k)$ for all n, m, k natural numbers such that

$$\sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k) = 1.$$

If these *linearization coefficients* are nonnegative, $\delta_n^\vee = \delta_n$ and

$$\delta_n * \delta_m = \sum_{k=|n-m|}^{n+m} c(n, m, k) \delta_k \quad (n, m \in \mathbb{N}),$$

then $K = (\mathbb{N}, *, \vee)$ is a hypergroup. It is known that on a polynomial hypergroup generated by the $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ polynomials the solutions of the functional equation

$$\int_K a(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = a(x * y) = a(x) + a(y) \quad (x, y \in K),$$

namely the *additive* functions have the form $a(n) = cP'_n(1)$, $n \in \mathbb{N}$ with some complex number c and the *exponential functions* satisfying

$$\int_K m(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = m(x * y) = m(x)m(y) \quad (x, y \in \mathbb{N})$$

are exactly the functions of the form $m(n) = P_n(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$ with some complex number λ .

After this we formulate and prove the theorem on the solutions of the generalized moment functions of order N (2.2.1. Tétel).

THEOREM. *Let $K = (\mathbb{N}, *)$ be the polynomial hypergroup associated with the sequence of polynomials $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$. The functions $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N : K \rightarrow \mathbb{C}$ form a generalized moment sequence of order N on K , that is the equation*

$$\varphi_k(\delta_x * \delta_y) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \varphi_j(x) \varphi_{k-j}(y) \quad (x, y \in K)$$

holds for $k = 0, 1, \dots, N$ if and only if

$$\varphi_k(n) = (P_n \circ f)^{(k)}(0)$$

for all $n \in \mathbb{N}$ and $k = 0, 1, \dots, N$, where

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{j!} x^j \quad (x \in \mathbb{C}),$$

and c_j , $j = 0, 1, \dots$ are arbitrary complex numbers.

The solutions of the *sine* and the *cosine equation* are given (2.3.1. Tétel, 2.3.2. Tétel), as the linearly independent solutions of the much more general Levi-Civita equation

$$f(x * y) = \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(y) \quad (x \in K).$$

The proofs are based on spectral synthesis, which was adopted into polynomial hypergroups by László Székelyhidi ([Sze02]). Let $K = (\mathbb{N}, *)$ be the polynomial hypergroup associated with the sequence of polynomials $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$. In this case spectral synthesis and spectral analysis hold for K , and additionally, if V is an n dimensional translation invariant subspace of $\mathcal{C}(K)$, then there exist natural numbers $m_1, \dots, m_k$ and different complex numbers $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ such that $m_1 + \dots + m_k = n$ and the functions $n \mapsto P_n^{(j)}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, k$, $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$ form a basis of V . Since spectral synthesis holds not only on polynomial hypergroups but also for example on Sturm–Liouville hypergroups, we can formulate our theorem more generally, if only the fact is supposed that the finite dimensional translation invariant subspaces of $\mathcal{C}(K)$ are generated by linearly independent exponential monomials which can be given as the derivatives of the members of a one-parameter exponential family $x \mapsto \Phi(x, \lambda)$. Since the n dimensional translation invariant subspace $\tau(f)$ generated by all the translates of f contains the functions g_i and h_i , $i = 1, \dots, n$, so there exist complex numbers $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ such that the subspace $\tau(f)$ is generated by the functions $x \mapsto \Phi^{(j)}(x, \lambda_l)$, $l = 1, 2, \dots, k$ and $j = 0, 1, \dots, n_l - 1$, where $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Thus the unknown functions can be written with some complex coefficients in the following forms:

$$f(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} F_{lj} \Phi^{(j)}(x, \lambda_l),$$

$$g_i(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} G_{lj}^i \Phi^{(j)}(x, \lambda_l), \quad h_i(x) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^{n_l-1} H_{lj}^i \Phi^{(j)}(x, \lambda_l).$$

Let us denote by G and H the $n \times n$ type matrices which contain the coefficients of the functions g_i and h_i : if $t \in \{1, \dots, n\}$ and $t = n_1 + \dots + n_{l-1} + (j+1)$ then

$$G_{it} = G_{lj}^i, \quad H_{it} = H_{lj}^i.$$

Our result is the following (2.4.1. Tétel).

THEOREM. *The functions $f, g_i, h_i : K \rightarrow \mathbb{C}$ satisfy the Levi–Civita equation if and only if*

$$H^\top \cdot G = F,$$

where

$$F = \begin{pmatrix} B^1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & B^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & B^k \end{pmatrix},$$

the block matrices B^l , $l = 1, \dots, k$ are the type of $n_l \times n_l$ with

$$B_{ts}^l = \begin{cases} \binom{(t-1)+(s-1)}{s-1} F_{l_{(t-1)}}, & \text{ha } (t-1) + (s-1) < n_l \\ 0, & \text{ha } (t-1) + (s-1) \geq n_l \end{cases}$$

and all the other elements of F are zero.

We demonstrate the application of the theorem through two examples (2.4.2. Példa, 2.4.3. Példa), then we start the investigation of the linear difference equations with constant coefficients. In the classical theory of difference equations the translate of a function by n and the translation of the function n -times by 1 give the same result for all n in $\mathbb{N}$. But in case of hypergroups there are two different ways for defining difference equations on the basis of these two interpretations. Let $K = (\mathbb{N}, *)$ be the polynomial hypergroup associated with the polynomials $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and let us introduce the notation $\mathcal{T}f(n) = \mathcal{T}_1 f(n) = f(n * 1)$ for all $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ and $n \in \mathbb{N}$, moreover $\mathcal{T}^0 f = f$ and $\mathcal{T}^N f = \mathcal{T}(\mathcal{T}^{N-1} f)$ for each integer $N > 1$. Let us consider the *homogeneous linear difference equation of order N on the hypergroup K with constant coefficients* associated to the complex polynomial Q :

$$Q(\mathcal{T})f = a_N \mathcal{T}^N f(n) + a_{N-1} \mathcal{T}^{N-1} f(n) + \dots + a_0 f(n) = 0,$$

where N is a positive integer, $a_0, \dots, a_N$ are complex numbers and $a_N \neq 0$. The *solution space* of the equation is the kernel of the linear operator $Q(\mathcal{T})$, hence it is a linear subspace of the function space $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. This solution space is translation invariant in the sense that if f is a solution, then $\mathcal{T}f$ is a solution, too. The following theorem gives us all the solutions of the equation (2.5.3. Tétel).

THEOREM. *Let Q be a complex polynomial of degree $N \geq 1$ with all different complex zeros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, where the multiplicity of λ_j is l_j , $j = 1, 2, \dots, k$. Then the function $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ is a solution of the equation $Q(\mathcal{T})f = 0$ if and only if it is a linear combination of functions of the form $n \mapsto P_n^{(i)}(\lambda_j)$ with $j = 1, 2, \dots, k$ and $i = 0, 1, \dots, l_j - 1$.*

On the other hand we can consider the difference equation

$$a_N \mathcal{T}_N f(n) + a_{N-1} \mathcal{T}_{N-1} f(n) + \dots + a_0 f(n) = 0,$$

where $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ is the unknown function, N is a positive integer and $a_N, \dots, a_0$ are complex numbers. The next theorem shows that the solution space is generated by functions similar to the previous case, but the characteristic polynomial is different: it depends on the basic generating polynomials of the hypergroup (2.5.4. Tétel).

THEOREM. *The function $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ is a solution of the above equation if and only if it is the linear combination of functions of the form $n \mapsto P_n^{(i)}(\lambda_j)$ with $j = 1, 2, \dots, k$ and $i = 0, 1, \dots, l_j - 1$, where $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ are different complex zeros of the polynomial*

$$\lambda \mapsto a_N P_N(\lambda) + a_{N-1} P_{N-1}(\lambda) + \dots + a_1 P_1(\lambda) + a_0$$

and the multiplicity of λ_j is l_j , $j = 1, 2, \dots, k$.

We give some examples as applications of these theorems, including the monomial equation (2.5.5. Példa, 2.5.6. Példa, 2.5.7. Példa). The remaining parts of the chapter refer to polynomial hypergroups in several variables. Let K be a countable set equipped with the discrete topology and let d be a positive integer, and let us consider a set $(Q_x)_{x \in K}$ of polynomials in d complex variables. For any nonnegative integer n let the symbol K_n denote the set of all elements x in K for which the degree of Q_x is not greater than n , and suppose that the polynomials Q_x with x in K_n form a basis for all polynomials of degree not greater than n . In this case for every x, y in K the product $Q_x Q_y$ admits a unique representation

$$Q_x Q_y = \sum_{w \in K} c(x, y, w) Q_w$$

with some complex numbers $c(x, y, w)$. A hypergroup $(K, *)$ is called a *polynomial hypergroup in d variables* or *d -dimensional polynomial hypergroup* if there exists a family of polynomials $(Q_x)_{x \in K}$ in d complex variables satisfying the condition above and such that the convolution in K is defined by

$$\delta_x * \delta_y(\{w\}) = c(x, y, w), \quad (x, y, w \in K).$$

We remark that on a polynomial hypergroup in d variables the exponential functions have the form $m(x) = Q_x(\lambda)$ and the additive functions have the form $a(x) = \sum_{i=1}^d c_i \partial_i Q_x(\lambda_0)$, where $\lambda, c_1, \dots, c_d$ are arbitrary complex numbers and λ_0 is the normalizing point of the hypergroup: $Q_x(\lambda_0) = 1$, $x \in K$. We generalize our result concerning the one dimensional case to the case of several variables (2.7.1. Tétel):

THEOREM. Let K be a polynomial hypergroup of dimension d generated by the family of polynomials $(Q_x)_{x \in K}$. The functions $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N : K \rightarrow \mathbb{C}$ form a generalized moment sequence of order N on K if and only if

$$\varphi_k(x) = (Q_x \circ f)^{(k)}(0)$$

holds for all n in $\mathbb{N}$ and for $k = 0, 1, \dots, N$, where $f = (f_1, \dots, f_d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^d$ such that f_i is a polynomial of degree at most N for $i = 1, \dots, d$.

The main result of the third chapter also relates to the equation of moment functions, but this time we look for the solutions on Sturm–Liouville hypergroups. The name of Sturm–Liouville hypergroups was given by the Sturm–Liouville operator, which is used in their definition, moreover, the exponentials of these hypergroups are the solutions of a Sturm–Liouville boundary value problem. The continuous function $A : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ is called a *Sturm–Liouville function*, if it is positive and continuously differentiable on the positive reals. For a given Sturm–Liouville function A we define the *Sturm–Liouville operator* L_A by

$$L_A f = -f'' - \frac{A'}{A} f',$$

where $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ is a twice continuously differentiable function. Using L_A we introduce the differential operator l on the space $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ by

$$\begin{aligned} l[u](x, y) &= (L_A)_x u(x, y) - (L_A)_y u(x, y) = \\ &= -\partial_1^2 u(x, y) - \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_1 u(x, y) + \partial_2^2 u(x, y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \partial_2 u(x, y). \end{aligned}$$

A hypergroup $K = (\mathbb{R}_0, *)$ is called a *Sturm–Liouville hypergroup* if there exists a Sturm–Liouville function A such that given any function f which is the restriction for $\mathbb{R}_0$ of an even nonnegative function from $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, the function $u_f : \mathbb{R}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$u_f(x, y) = \int_{\mathbb{R}_0} f d(\delta_x * \delta_y) = f(x * y)$$

is twice continuously differentiable and satisfies the partial differential equation

$$l[u_f] = 0, \quad \partial_2 u_f(x, 0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}_+).$$

This is equivalent to the fact that u_f is the unique solution of the boundary value problem

$$\partial_1^2 u(x, y) + \frac{A'(x)}{A(x)} \partial_1 u(x, y) = \partial_2^2 u(x, y) + \frac{A'(y)}{A(y)} \partial_2 u(x, y),$$

$$\partial_1 u(0, y) = 0, \quad \partial_2 u(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u(0, y) = f(y),$$

where $x, y \in \mathbb{R}_+$. On a Sturm–Liouville hypergroup the function $m : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ is an exponential if and only if

$$m''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} m'(x) = \lambda m(x), \quad m(0) = 1, \quad m'(0) = 0$$

and the function $a : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ is additive if and only if

$$a''(x) + \frac{A'(x)}{A(x)} a'(x) = \lambda, \quad a(0) = 0, \quad a'(0) = 0$$

holds for some complex number λ and for all $x \in \mathbb{R}_+$. Since all the exponential functions are eigenfunctions of the related Sturm–Liouville operator and all the complex numbers are eigenvalues so there is a one-to-one correspondence between the complex numbers and the exponential functions, and there exists an exponential family $\Phi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ on K . Finally, we formulate and prove the theorem which gives us the generalized moment functions on Sturm–Liouville hypergroups (3.2.2. Tétel).

THEOREM. *Let $K = (\mathbb{R}_0, *A)$ be the Sturm–Liouville hypergroup corresponding to the Sturm–Liouville function A with the exponential family $\Phi : \mathbb{R}_0 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. The functions $\varphi_k : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, N$ form a sequence of generalized moment functions of order N on the hypergroup K if and only if there are complex numbers $c_0, c_1, \dots, c_N$ such that*

$$\varphi_k(x) = \partial_t^k \Phi(x, f(t)) \big|_{t=0} \quad (x \in \mathbb{R}_0)$$

and

$$f(t) = \sum_{j=0}^N c_j \frac{t^j}{j!} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

IRODALOMJEGYZÉK

- [Acz61] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Birkhäuser, Basel, 1961, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 25.
- [Acz66] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 19, Academic Press, New York–London, (1966).
- [Acz77] J. Aczél, *Functions of binomial type mapping groupoids into rings*, Math. Zeitschrift, **154** (1977), 115–124
- [Ber53] Y. M. Berezansky, *On hypercomplex systems constructed on the basis of the Sturm–Liouville problem on the semi axis*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), **91** (1953), no. 6, 1245–1248
- [BeK95] Y. M. Berezansky, A. A. Kalyushnyi, *Hypercomplex systems and hypergroups: connections and distinctions*, Applications of Hypergroups and Related Measure Algebras–Seattle conference, July 31–August 6, 1993 Contemporary Math. AMS, (1995), 21–44
- [BlH82] W. R. Bloom and H. Heyer, *The Fourier transform for probability measures on hypergroups*, Rend. Math., **2** (1982), no. 3, 315–334
- [Boc56] S. Bochner, *Sturm–Liouville and heat equations whose eigenfunctions are ultraspherical polynomials and similar or associated Bessel functions*, Proceedings of the conference on differential equations, University of Maryland Book Store, College Park, Maryland, (1956), 23–48
- [BlH95] W. R. Bloom and H. Heyer, *Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups*, de Gruyter Studies in Mathematics, de Gruyter, Berlin, New York, (1995).
- [CKN85] J. K. Chung and P. Kannappan and C. T. Ng, *A generalization of a cosine-sine functional equation on groups*, Linear Algebra Appl., **66** (1985), 259–277.
- [CoS90] W. C. Connett and A. L. Schwartz, *Analysis of a class of probability preserving measure algebras of compact intervals*, Trans. Amer. Math. Soc. (N.S.), **320** (1990), no. 1, 371–393.
- [CoS95] W. C. Connett and A. L. Schwartz, *Subsets of $\mathbb{R}$ which support hypergroups with polynomial characters*, J. Comput. Appl. Math., **65** (1995), 73–84.
- [Cor77] I. Corovei, *The cosine functional equation for nilpotent groups*, Aequationes Math., **15** (1977), 99–106.
- [CDG04] P. Corsini, B. K. Dass, M. Gionfriddo, R. Migliorato, *Algebraic Hyperstructures and Applications*, Taru Publications, (2004).

- [Che72] H. Chébli, *Sur la positivité des opérateurs de "translation généralisée" associés à un opérateur de Sturm-Liouville sur $]0, \infty[$* , C.R. Acad. Sci. Paris Sér., **275** (1972), 601–604.
- [Del38] J. Delsarte, *Sur une extension de la formule de Taylor*, J. Math. Pures. Appl., **17** (1938), no. 3, 213–231.
- [Dun73] C. F. Dunkl, *The measure algebra of a locally compact hypergroup*, Trans. Amer. Math. Soc., **179** (1973), 331–348.
- [Fav35] J. Favard, *Sur les polynômes de Tchebisheff*, C. R. Acad. Sci. Paris, **200** (1935), 2052–2053.
- [Gal97] L. Gallardo, *Asymptotic drift of the convolution and moment functions on hypergroups*, Math. Zeitschrift, **224** (1997), 427–444.
- [Gal98] L. Gallardo, *Some Methods to Find Moment Functions on Hypergroups*, Harmonic Analysis and Hypergroups, Anderson, J. M., Litvinov, G. L., Ross, K. A., Singh, A. I., Sunder, V. S. and Wildberger, N. J., Gruyter Studies in Mathematics, de Gruyter Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin (1998), 13–31.
- [Gas70] G. Gasper, *Linearization of the product of Jacobi polynomials*, Canad. J. Math., **32** (1970), no. 3, 582–593.
- [HJK05] H. Heyer, T. Jimbo, S. Kawakami, K. Kawasaki, *Finite Commutative Hypergroups Associated with Actions of Finite Abelian Groups*, Bull. Nara Univ. Educ., **54** (2005), no. 2, 23–29.
- [Hir56a] I. I. Hirschman, Jr., *Harmonic analysis and the ultraspherical polynomials*, Symposium of the Conference on Harmonic Analysis, Cornell, (1956)
- [Hir56b] I. I. Hirschman, Jr., *Sur les polynômes ultrasphériques*, C. R. Acad. Sci. Paris, **242** (1956), 2212–2214.
- [Hos69] M. Hosszú, *Some remarks on the cosine functional equation*, Publ. Math. Debrecen, **16** (1969), 93–98.
- [Jew75] R. I. Jewett, *Spaces with an abstract convolution of measures*, Adv. in Math., **18** (1975), no. 1, 1–101.
- [KaW94] V. A. Kaimanovich, W. Woess, *Construction of discrete, non-unimodular hypergroups*, Proc. Oberwolfach, Probability Measures on Groups and Related Structures, (1994), 196–209.
- [KoS97] T. H. Koornwinder, A. L. Schwartz, *Product formulas and associated hypergroups for orthogonal polynomials on the simplex and on a parabolic biangle*, Constr. Approx., **13** (1997), 537–567.
- [Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

- [Lef58] M. Lefranc, *L'analyse harmonique dans $\mathbb{Z}^n$* , C. R. Acad. Sci. Paris, **246** (1958), 1951–1953.
- [Las83] R. Lasser, *Orthogonal polynomials and hypergroups*, Rend. Math., (7)**3** no. 2(1983), 185–209.
- [Lev13] T. Levi-Civitá, *Sulle funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo $f(x+y) = \sum_{i=1}^n X_i(x)Y_i(y)$* , Atti Acad. Nazl. Lincei, **22** (1913), 181–183.
- [Lev45] B. Levitan, *Normal rings generated by the generalized operation of translator*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. USSR (N.S.), **47** (1945), 3–6.
- [Mck77] M. A. McKiernan, *Equations of the form $H(x \circ y) = \sum_i f_i(x)g_i(y)$* , Aequationes Math., **16** (1977), 51–58.
- [Mic55] E. A. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc., **71** (1955), 152–182.
- [Mar35] F. Marty, *Rôle de la notion d'hypergroupe dans l'étude des groupes non abéliens*, C. R. Acad. Sci. Paris, **201** (1935), 636–638.
- [Oro06] Á. Orosz, *Sine and cosine equation on discrete polynomial hypergroups*, Aequationes Math., **72** (2006), 225–233.
- [Oro06b] Á. Orosz, *Difference equations on discrete polynomial hypergroups*, Adv. in Difference Equations, (2006), Article ID 51427, 10 pages.
- [OrS04] Á. Orosz, L. Székelyhidi, *Moment Functions on Polynomial Hypergroups in Several Variables*, Publ. Math. Debrecen **65** no. 3-4, (2004), 429–438.
- [OrS05] Á. Orosz, L. Székelyhidi, *Moment functions on polynomial hypergroups*, Archiv der Math., **85** (2005), 141–150.
- [OrS08] Á. Orosz, L. Székelyhidi, *Moment functions on Sturm-Liouville hypergroups*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. **29** (2008), 141–156.
- [ReV00] C. Rentzsch, M. Voit, *Lévy Processes on Commutative Hypergroups*, Contemp. Math., **261** (2000), 83–105.
- [RoS60] R. A. Rosenbaum and S. L. Segal, *A functional equation characterizing the sine*, Math. Gaz., **44**, (1960), 97–105.
- [Scz47] L. Schwartz, *Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques*, Ann. of Math., **48** (1947), 857–929.
- [Seg63] S. L. Segal, *On a sine functional equation*, Amer. Math. Monthly, **70** (1963), 306–308.
- [Spe75] R. Spector, *Aperçu de la théorie des hypergroupes*, Analyse harmonique sur les groupes de Lie, Sémin. Nancy-Strasbourg, 1973-75, Lecture Notes in Math., **497** (1975), 643–673.

- [Spe78] R. Spector, *Mesures invariantes sur les hypergroupes*, Trans. Amer. Math. Soc. **239** (1978), 147–165.
- [Sta13] P. Stäckel, *Sulle equazione funzionale $f(x + y) = \sum_{i=1}^n X_i(x)Y_i(y)$* , Atti Acad. Nazl. Lincei, **22** (1913), 392–393.
- [SuW03] V. S. Sunder, N. J. Wildberger, *Actions of Finite Hypergroups*, J. Algebraic Comb. **18** (2003), no. 2, 135–151.
- [Sze91] L. Székelyhidi, *Convolution type functional equations on topological abelian groups*, World Scientific Publishing Co. Inc., Teaneck, NJ, (1991).
- [Sze02] L. Székelyhidi, *Spectral Analysis and Spectral Synthesis on Polynomial Hypergroups*, Monatshefte Math., **141** (2004), no. 1, 33–43.
- [SzV10] L. Székelyhidi, L. Vajday *Spectral analysis on commutative hypergroups*, Aequationes Math., **80** (2010), 223–226.
- [Vin62] E. Vincze, *Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen I., II., III., IV.*, Publ. Math. Debrecen, **9-10** (1962/63), 149–163; 314–323; 191–202; 283–318.
- [Voi90] M. Voit, *Laws of large numbers for polynomial hypergroups and some applications*, J. Theoret. Probab., **3** (1990), no. 2, 245–266.
- [Wil93] N J Wildberger, *Finite commutative hypergroups and applications from group theory to conformal field theory*, Applications of Hypergroups and Related Measure Algebras, Contemp. Math., **183** (1993), 413–434.
- [Wal37] H. S. Wall, *Hypergroups*, Amer. J. Math., **59** (1937), 77–98.
- [Zeu89] H. Zeuner, *Laws of large numbers for hypergroups on $\mathbb{R}_+$* , Math. Ann., **283** (1989), no. 4, 657–678.
- [Zeu92a] H. Zeuner, *Polynomial hypergroups in several variables*, Arch. Math., **58** (1992), 425–434.
- [Zeu92b] H. Zeuner, *Moment functions and laws of large numbers on hypergroups*, Math. Z., **211** (1992), no. 3, 369–407.