MŰSZAKI MECHANIKA PÉLDATÁR

Készítette:

Dr. Szíki Gusztáv Áron
Dr. Mankovits Tamás
Hajdu Sándor
Deák Krisztián
Huri Dávid

Készült: Debreceni Egyetem Műszaki Kar, Debrecen

Terjedelem: 239 oldal (5 ív)

Kézirat lezárva: 2015. augusztus 15.

A tananyag elkészítését a Munkaerő-piaci igényeknek megfelelő, gyakorlatorientált képzések, szolgáltatások a Debreceni Egyetemen Élelmiszeripar, Gépészet, Informatika, Turisztika és Vendéglátás területen (Munkaalapú tudás a Debreceni Egyetem oktatásában) **TÁMOP-4.1.1.F-13/1-2013-0004** *számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.*

Lektor:
Dr. Kocsis Imre

ISBN: 978-963-473-909-8

TARTALOMJEGYZÉK

1. ELŐSZÓ

A Debreceni Egyetem Műszaki Kar gépészmérnöki és mechatronikai mérnöki alapképzésében a Műszaki Mechanika c. tantárgyat 4 féléven keresztül hallgatják a mérnökjelöltek. Ezzel az egyik legnagyobb óraszámú tantárgy, amely szigorlattal zárul.
Jelen példatár a Statika, a Szilárdságtan és a Dinamika témaköreit tárgyalja. A példafeladatok nagy részéhez a megoldás is kidolgozásra került, ezzel segítséget nyújtva az tantermi gyakorlatok jobb megértéséhez, illetve a vizsgákra való felkészüléshez. A jegyzetet haszonnal forgathatják a szigorlatozó Hallgatók is.
A Szerzők ezúton mondanak köszönetet a Műszaki Mechanika Példatár lektorának Dr. Kocsis Imrének a hasznos észrevételeiért, amelyek a példatár végleges változatába beépültek.

Debrecen, 2015. augusztus

A Szerzők

2. STATIKA

2.1 Vektoralgebrai alapműveletek

2.1.1 Meghatározott követelményeknek eleget tevő vektor előállítása

2.1.1/M1 Adja meg vektorkoordinátás alakban azokat az egységvektorokat, amelyek merőlegesek az $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ vektorra és az $[xz]$ síkban helyezkednek el!
Megoldás:
A feladatnak megoldása mindazon $\boldsymbol{b}$ vektor, mely eleget tesz az alábbi három feltételnek:

- egységvektorokat keresünk, tehát a vektor abszolút értéke: $|\boldsymbol{b}| = 1$,
- a $\boldsymbol{b}$ vektor merőleges az $\boldsymbol{a}$ vektorra, tehát a skaláris szorzatuk: $\boldsymbol{ab} = 0$,
- a $\boldsymbol{b}$ vektor az $[xz]$ síkban helyezkedik el, tehát vektorkoordinátás alakja: $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_z\boldsymbol{k}$ $(b_y = 0)$.

A második és harmadik feltételből:

$$\boldsymbol{ab} = 2b_x + 3 \cdot 0 - 4b_z = 0$$
$$2b_x - 4b_z = 0$$
$$b_x = 2b_z$$

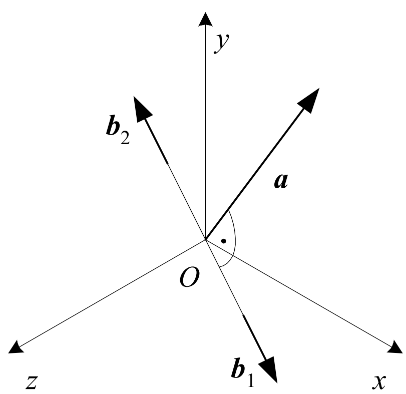
Az első feltételből:

$$b_x^2 + b_z^2 = 1$$
$$4b_z^2 + b_z^2 = 1$$
$$b_z^2 = \frac{1}{5}$$
$$b_z = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$b_x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

A két megoldásvektor tehát:

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{b}_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}$$

A megoldás ábrázolása:



2.1.1/M2 Adott a P_1 pontba mutató $\boldsymbol{a}_1 = -2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, és a P_2 pontba mutató $\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ vektor. Adja meg mindazon egységvektorokat, amelyek egyaránt merőlegesek az $\boldsymbol{a}_1$ és $\boldsymbol{a}_2$ vektorokra! Mekkora szöget zár be a $c = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ vektor az $\boldsymbol{a}_1$ és $\boldsymbol{a}_2$ vektorok által meghatározott síkra merőleges iránnyal?

Megoldás:

Az $\boldsymbol{a}_1$ és $\boldsymbol{a}_2$ vektorok vektoriális szorzata merőleges mindkét vektorra, így a vektorok által meghatározott síkra is:

$$\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$

Az ilyen irányú egységvektor:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}_3}{|\boldsymbol{a}_3|} = \frac{-2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = -\frac{2}{\sqrt{20}}\boldsymbol{j} - \frac{4}{\sqrt{20}}\boldsymbol{k}$$

Az $\boldsymbol{n}$ vektor mellett a $-\boldsymbol{n}$ vektor is megoldása a feladatnak.

Az $\boldsymbol{n}$ vektor kijelöli az $\boldsymbol{a}_1$ és $\boldsymbol{a}_2$ vektorok által meghatározott síkra merőleges irányt, így a feladat második kérdésének megválaszolásához az $\boldsymbol{n}$ és $\boldsymbol{c}$ által bezárt szöget kell meghatározni.

A két vektor skaláris szorzatára:

$$\boldsymbol{cn} = |\boldsymbol{c}| \cdot |\boldsymbol{n}| \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{cn}}{|\boldsymbol{c}| \cdot |\boldsymbol{n}|}$$

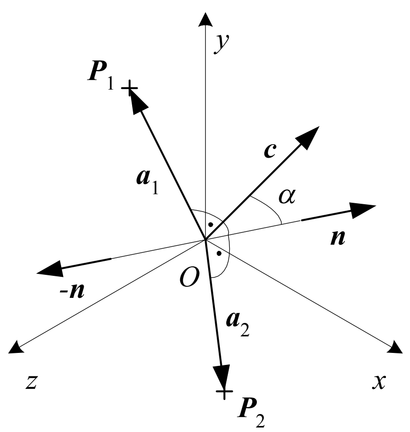
$$\boldsymbol{cn} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{20}}\right) + (-3) \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{20}}\right) = \frac{8}{\sqrt{20}}$$

$$|\boldsymbol{c}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\boldsymbol{n}| = 1$$

$$\alpha = \cos^{-1}\frac{\boldsymbol{cn}}{|\boldsymbol{c}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \cos^{-1}\frac{8}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{14}} = 61{,}43°$$

A megoldás ábrázolása:



2.1.2 Egy vektor komponenseinek előállítása adott irányokban

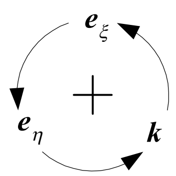
2.1.2/M1 Bontsuk fel az alábbi $\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ vektort a derékszögű koordinátarendszerben a $\boldsymbol{k}$, valamint az $\boldsymbol{e}_\xi$ és $\boldsymbol{e}_\eta$ egységvektorok által meghatározott három, egymásra merőleges irányú összetevőjére! A ξ tengely irányát az $\boldsymbol{e}_\xi = 0.8\boldsymbol{i} + 0.6\boldsymbol{j}$ egységvektor jelöli ki. Az $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$és $\boldsymbol{k}$ vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak.

Megoldás:

Az $\boldsymbol{a}$ vektor az eredeti koordinátarendszerben felírva tehát:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\,|_{xyz} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$$

Mivel $\boldsymbol{e}_\xi$, $\boldsymbol{e}_\eta$és $\boldsymbol{k}$ vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak:



$$\boldsymbol{e}_\eta = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}_\xi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \end{vmatrix} = -0.6\boldsymbol{i} + 0.8\boldsymbol{j}$$

Az $\boldsymbol{a}$ vektor vetületei az új koordinátarendszer tengelyeire:

$$a_\xi = \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_\xi = -3 \cdot 0.8 + 2 \cdot 0.6 + 4 \cdot 0 = -1.2$$

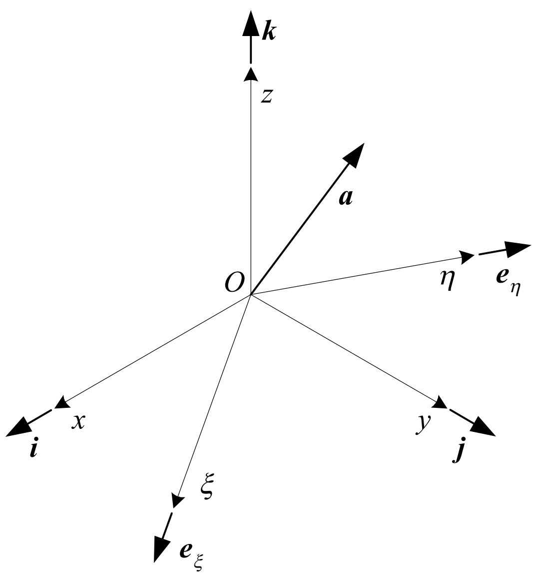
$$a_\eta = \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_\eta = -3 \cdot (-0.6) + 2 \cdot 0.8 + 4 \cdot 0 = 3.4$$

$$a_z = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{k} = 4$$

Így az $\boldsymbol{a}$ vektor az új koordinátarendszerben felírva:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\,|_{\xi\eta k} = -1.2\boldsymbol{e}_\xi + 3.4\boldsymbol{e}_\eta + 4\boldsymbol{k}$$

A megoldás ábrázolása:



2.1.3 Geometriai problémák megoldása vektoralgebra segítségével

2.1.3/M1 Koordinátáival adott három térbeli pont, $A(1;2;0)m$, $B(0;2;1)m$ és $C(2;1;2)m$. Határozza meg az alábbi adatokat vektoralgebrai számítások segítségével!

a) Az A és B pontok távolsága (d_{AB}).

b) Az A, B és C pontok által meghatározott háromszög területe (T_{ABC}).

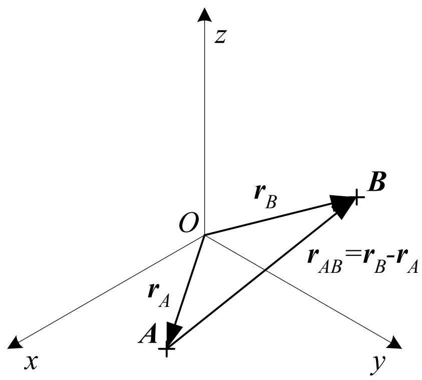
c) Az AB szakasznak az AC szakasz egyenesére eső merőleges vetülete (v_{ABAC}).

d) Az AB és AC szakasz által bezárt szög (α_{ABAC}).

e) Az ABC háromszög síkjára merőleges egységvektor ($\boldsymbol{e}_{ABC}$).

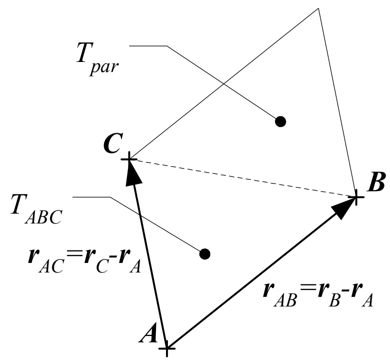
Megoldás:

a) Az A és B pontok távolsága meghatározható a két pontba mutató helyvektor különbségvektorának abszolút értékeként:



$$\boldsymbol{r}_A = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})m$$
$$\boldsymbol{r}_B = (2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})m$$
$$\boldsymbol{r}_{AB} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = (-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k})m$$
$$d_{AB} = |\boldsymbol{r}_{AB}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}m$$

b) Az A, B és C pontok által meghatározott háromszög területe egyenlő a háromszög két élével egybeeső vektorok vektoriális szorzata abszolút értékének a felével (lásd a vektoriális szorzás tulajdonságait):



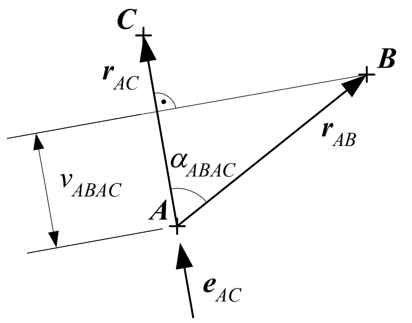
$$\boldsymbol{r}_C = (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})m$$
$$\boldsymbol{r}_{AC} = \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})m$$

$$\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{r}_{AB} \times \boldsymbol{r}_{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})m^2$$

$$T_{par} = |\boldsymbol{r}_n| = \sqrt{1^2+3^2+1^2} = \sqrt{11}m^2$$

$$T_{ABC} = \frac{T_{par}}{2} = \frac{\sqrt{11}}{2}m^2$$

c) Az AB szakasznak az AC szakasz egyenesére eső merőleges vetülete meghatározható az $\boldsymbol{r}_{AB}$ vektor és egy AC irányú egységvektor skaláris szorzataként:



$$\boldsymbol{e}_{AC} = \frac{\boldsymbol{r}_{AC}}{|\boldsymbol{r}_{AC}|} = \frac{\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}$$

$$v_{ABAC} = \boldsymbol{e}_{AB} \cdot \boldsymbol{r}_{AB} = \frac{1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}m$$

d) Az AB és AC szakasz által bezárt szög meghatározható az $\boldsymbol{r}_{AB}$ vektor és az $\boldsymbol{r}_{AC}$ vektor skaláris szorzatából:

$$\boldsymbol{r}_{AB} \cdot \boldsymbol{r}_{AC} = |\boldsymbol{r}_{AB}||\boldsymbol{r}_{AC}| \cdot \cos(\alpha_{ABAC})$$

$$\alpha_{ABAC} = arccos \frac{\boldsymbol{r}_{AB} \cdot \boldsymbol{r}_{AC}}{|\boldsymbol{r}_{AB}||\boldsymbol{r}_{AC}|} = arccos \frac{-1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2}{\sqrt{1^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2+2^2}} = 73.22°$$

e) Az ABC háromszög síkjára merőleges egységvektor meghatározható az $\boldsymbol{r}_n$ vektorból:

$$\boldsymbol{e}_{ABC} = \frac{\boldsymbol{r}_n}{|\boldsymbol{r}_n|} = \frac{\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{11}}\boldsymbol{i} + \frac{3}{\sqrt{11}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{11}}\boldsymbol{k}$$

2.2 Erők összetevőkre bontása, anyagi pontra ható erőrendszerek eredője, egyenértékűsége és egyensúlya

2.2.1 Közös metszéspontú erőrendszer eredőjének meghatározása

2.2.1/M1 Ismeretes a négy erőből álló erőrendszer első tagja vektorkoordinátás alakban, a második tag nagysága és irány-egységvektora. Ismert továbbá a harmadik erő nagysága és az, hogy hatásvonala a koordinátarendszer origóján kívül átmegy a $P(0; 3; -1)$ ponton is. A negyedik erőnek pedig a nagysága és az x, y tengelyekkel bezárt szöge ismert. Tudjuk azt is, hogy ezen erőnek az tengellyel bezárt szöge tompaszög. Számítsa ki az erőrendszer eredő vektorát!

Adatok:

$$\boldsymbol{F}_1 = (60\boldsymbol{i} - 40\boldsymbol{j} + 20\boldsymbol{k})N$$
$$F_2 = 70N;\ \boldsymbol{e}_2 = -0.6\boldsymbol{i} + 0.8\boldsymbol{j}$$
$$F_3 = 80N$$
$$F_4 = 50N;\ \alpha_{4x} = 65°;\ \alpha_{4y} = 125°;\ \alpha_{4z} > 90°$$

Megoldás:

Az $\boldsymbol{F}_2$ erő vektorkoordinátás alakban:

$$\boldsymbol{F}_2 = F_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = (-42\boldsymbol{i} + 56\boldsymbol{j})N$$

Az $\boldsymbol{F}_3$ erő irány-egységvektorának meghatározása:

$$\boldsymbol{r}_3 = 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{r}_3}{|\boldsymbol{r}_3|} = \frac{3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{10}}\boldsymbol{k}$$

Az $\boldsymbol{F}_3$ erő vektorkoordinátás alakban:

$$\boldsymbol{F}_3 = F_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \left(\frac{240}{\sqrt{10}}\boldsymbol{j} - \frac{80}{\sqrt{10}}\boldsymbol{k}\right)N$$

Az $\boldsymbol{e}_4$ egységvektor koordinátái között az alábbi összefüggés áll fenn (lásd: egységvektorok koordinátái és abszolút értéke):

$$cos^2\alpha_{4x} + cos^2\alpha_{4y} + cos^2\alpha_{4z} = 1$$

Ebből:

$$cos^2\alpha_{4z} = 1 - cos^2\alpha_{4x} - cos^2\alpha_{4y}$$
$$\cos\alpha_{4z} = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha_{4x} - cos^2\alpha_{4y}} = \pm\sqrt{1 - cos^2(65°) - cos^2(125°)} = \pm 0.701715$$

Így a két lehetséges szög:

$$\cos\alpha_{4z_1} = \arccos(0.701715) = 45.44°$$
$$\cos\alpha_{4z_2} = \arccos(-0.701715) = 134.56°$$

Ezek közül a második a tompaszög, tehát az $\boldsymbol{F}_4$ erő irány-egységvektora és vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{e}_4 = \cos\alpha_{4x}\,\boldsymbol{i} + \cos\alpha_{4y}\,\boldsymbol{j} + \cos\alpha_{4z}\,\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{F}_4 = F_4 \cdot \boldsymbol{e}_4 = F_4 \cdot \cos\alpha_{4x}\,\boldsymbol{i} + F_4 \cdot \cos\alpha_{4y}\,\boldsymbol{j} + F_4 \cdot \cos\alpha_{4z}\,\boldsymbol{k} = (21.13\boldsymbol{i} - 28.68\boldsymbol{j} - 35.08\boldsymbol{k})N$$

Tehát az eredővektor számítható:

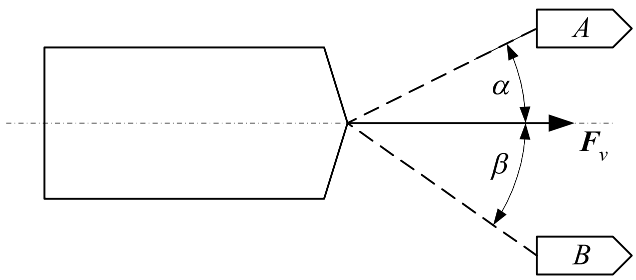
$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{4}\boldsymbol{F}_i = (60 - 42 + 21.13)\boldsymbol{i} + \left(-40 + 56 + \frac{240}{\sqrt{10}} - 28.68\right)\boldsymbol{j} + \left(20 - \frac{80}{\sqrt{10}} - 35.08\right)\boldsymbol{k} =$$
$$(39.13\boldsymbol{i} + 63.21\boldsymbol{j} - 40.38\boldsymbol{k})N$$

2.2.2 Erő felbontása összetevőire

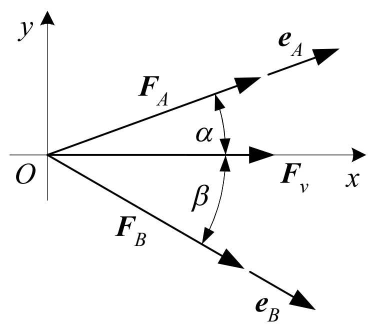
2.2.2/M1 Az ábrán látható A és B vontatóhajók uszályt vontatnak úgy, hogy a vontatókötelek a vontatás irányával α és β szöget zárnak be. Határozza meg számítás és szerkesztés segítségével a vontatókötelekben ébredő erők nagyságát, ha tudjuk, hogy az

uszály vontatásához szükséges vonóerő F_v. Számítsa ki a kötélerők vektorkoordinátás alakját is!
Adatok:

$$F_v = 100kN, \alpha = 20°, \beta = 30°$$



Megoldás számítással:



A vontatókötelek irányát megadó egységvektorok:

$$\boldsymbol{e}_A = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos(90° - \alpha)\,\boldsymbol{j} = \cos 20° \cdot \boldsymbol{i} + \cos 70° \cdot \boldsymbol{j} = 0.9397\boldsymbol{i} + 0.342\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{e}_B = \cos\beta\,\boldsymbol{i} + \cos(90° + \beta)\,\boldsymbol{j} = \cos 30° \cdot \boldsymbol{i} + \cos 120° \cdot \boldsymbol{j} = 0.866\boldsymbol{i} - 0.5\boldsymbol{j}$$

Így a vontatókötelekben ébredő erők valamint a vonóerő vektorkoordinátás alakja általánosan:

$$\boldsymbol{F}_A = F_A \cdot \boldsymbol{e}_A = F_A \cdot 0.9397\boldsymbol{i} + F_A \cdot 0.342\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{F}_B = F_B \cdot \boldsymbol{e}_B = F_B \cdot 0.866\boldsymbol{i} - F_B \cdot 0.5\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{F}_v = F_v \cdot \boldsymbol{i} = (100\boldsymbol{i})kN$$

Tudjuk, hogy az eredő vonóerő a két kötélerő vektori összege, tehát a kötélerők meghatározásához a vonóerőt kell a megadott irányú összetevőire bontani:

$$\boldsymbol{F}_v = \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B$$
$$100\boldsymbol{i} = (F_A \cdot 0.9397 + F_B \cdot 0.866)\boldsymbol{i} + (F_A \cdot 0.342 - F_B \cdot 0.5)\boldsymbol{j}$$

A fenti vektoregyenletet skalárisan megszorozva $\boldsymbol{i}$-vel és $\boldsymbol{j}$-vel az alábbi két skalár egyenletet kapjuk:

$$100\boldsymbol{i} = F_A \cdot 0.9397 + F_B \cdot 0.866$$
$$0 = F_A \cdot 0.342 - F_B \cdot 0.5$$

Ezeket rendezve:

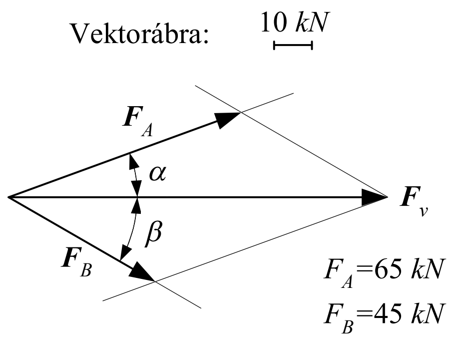
$$F_B = 0.684F_A$$
$$100 = 0.9397F_A + 0.866 \cdot 0.684F_A$$
$$F_A = \frac{100}{0.9397 + 0.866 \cdot 0.684} = 65.27kN$$

$$F_B = 0.684F_A = 0.684 \cdot 65.27 = 44.64kN$$

Az erők vektorkoordinátás alakban:

$$\boldsymbol{F}_A = F_A \cdot \boldsymbol{e}_A = (61.33\boldsymbol{i} + 22.32\boldsymbol{j})kN$$
$$\boldsymbol{F}_B = F_B \cdot \boldsymbol{e}_B = (38.66\boldsymbol{i} - 22.32\boldsymbol{j})kN$$

Megoldás szerkesztéssel:



2.2.3 Egyensúlyi erőrendszer tagjainak meghatározása, ha az ismeretlen erőknek csak az iránya ismert

2.2.3/M1 Ismeretes a négy erőből álló egyensúlyi erőrendszer $\boldsymbol{F}_1$ és $\boldsymbol{F}_2$ tagja, valamint az $\boldsymbol{F}_3$ erő $\boldsymbol{e}_3$ és $\boldsymbol{F}_4$ erő $\boldsymbol{e}_4$ irányú egységvektora. Határozza meg számítás és szerkesztés segítségével az ismeretlen $\boldsymbol{F}_3$ és $\boldsymbol{F}_4$ erőket!

Adatok:

$$\boldsymbol{F}_1 = 3 \cdot \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}kN;\ \ \boldsymbol{F}_2 = -2 \cdot \boldsymbol{i} + 3 \cdot \boldsymbol{j}\,kN;\ \boldsymbol{e}_3 = -\tfrac{2}{\sqrt{13}} \cdot \boldsymbol{i} - \tfrac{3}{\sqrt{13}} \cdot \boldsymbol{j};\ \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{i}.$$

Megoldás számítással:

Az $\boldsymbol{F}_3$ és $\boldsymbol{F}_4$ erők vektorkoordinátás alakja általánosan:

$$\boldsymbol{F}_3 = F_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = -\frac{2F_3}{\sqrt{13}} \cdot \boldsymbol{i} - \frac{3F_3}{\sqrt{13}} \cdot \boldsymbol{j}kN$$
$$\boldsymbol{F}_4 = F_4 \cdot \boldsymbol{e}_4 = F_4 \cdot \boldsymbol{i}kN$$

Mivel az erőrendszer egyensúlyi:

$$\sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} = (3 - 2 - \frac{2F_3}{\sqrt{13}} + F_4) \cdot \boldsymbol{i} + (1 + 3 - \frac{3F_3}{\sqrt{13}}) \cdot \boldsymbol{j}kN$$

A fenti vektoregyenlet az alábbi skaláregyenlettel egyenértékű:

$$0 = 3 - 2 - \frac{2F_3}{\sqrt{13}} + F_4$$
$$0 = 1 + 3 - \frac{3F_3}{\sqrt{13}}$$

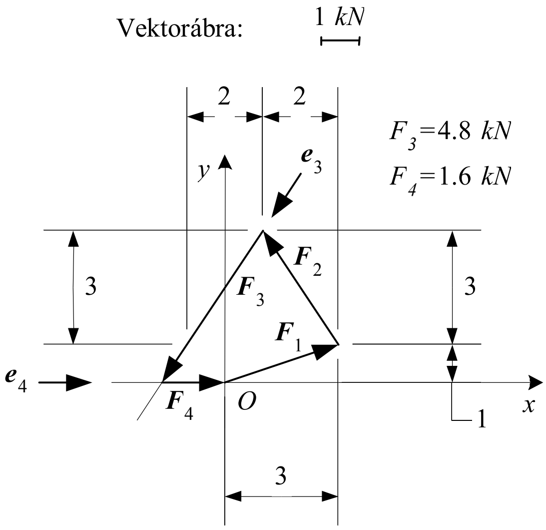
Ezekből:

$$F_3 = \frac{4\sqrt{13}}{3} = 4.807kN$$
$$F_4 = \frac{8}{3} - 1 = 1.667kN$$

A két erő vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{F}_3 = F_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = -2.667 \cdot \boldsymbol{i} - 4 \cdot \boldsymbol{j} kN$$
$$\boldsymbol{F}_4 = F_4 \cdot \boldsymbol{e}_4 = 1.667 \cdot \boldsymbol{i} kN$$

Megoldás szerkesztéssel:

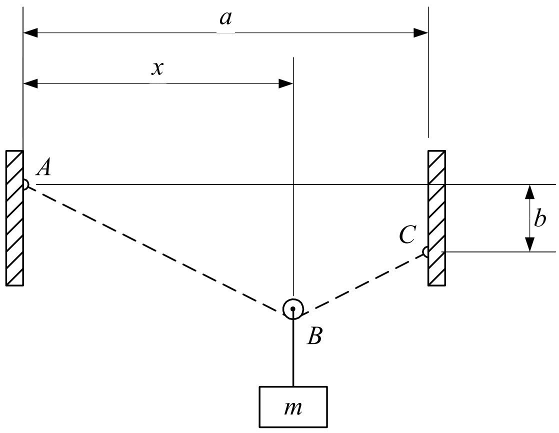


2.2.4 Anyagi pont egyensúlyát biztosító kötélerők meghatározása, ha az egyensúlyt csak felfüggesztéssel biztosítjuk

2.2.4/M1 Az L hosszúságú, falakhoz erősített kötélen csiga futhat, melynek tengelyére m tömegű terhet akasztottunk. Mekkora az x távolság egyensúly esetén? Mekkora szöget zárnak be ekkor a kötélágak, és mekkora erő feszíti a kötelet?

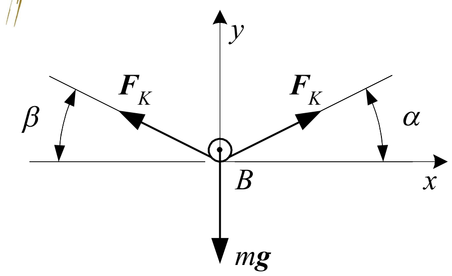
Adatok:

$$m = 100\,kg;\ L = 15\,m;\ a = 10\,m;\ b = 2\,m.$$



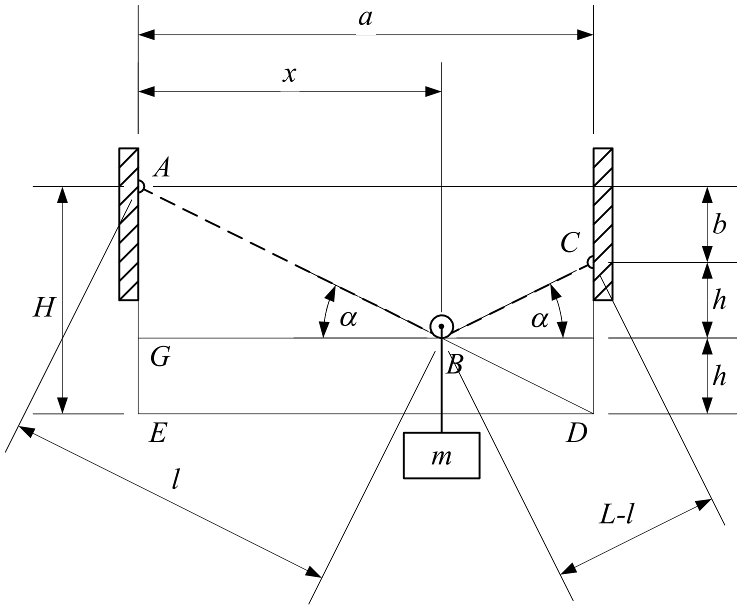
Megoldás:

Az ideális kötél és csiga tulajdonságaiból következik, hogy mindkét kötélágban ugyanakkora nagyságú erő lép fel. A csiga egyensúlyából:



$$\sum F_{xi} = 0 = F_K \cdot cos\alpha - F_K \cdot cos\beta$$
$$cos\alpha = cos\beta$$
$$\alpha = \beta$$
$$\sum F_{yi} = 0 = -mg + F_K \cdot sin\alpha + F_K \cdot sin\beta$$
$$mg = 2F_K \cdot sin\alpha$$
$$F_K = \frac{mg}{2sin\alpha}$$

Az alábbi ábrát tekintve megállapítható, hogy az *AB* szakaszt a szemközti falig meghosszabbítva az *AD* szakasz hossza pont *L*-el lesz egyenlő. Így az *ADE* háromszögből az α szög kiszámítható, mely segítségével a megfelelő háromszögekből az összes geometriai méret megállapítható.



$$\alpha = arccos\frac{a}{L} = 48.19°$$
$$H = a \cdot tan\alpha = 11.18m$$
$$h = \frac{H-b}{2} = 4.59m$$
$$x = \frac{b+h}{tan\alpha} = 5.89m$$

Így a kötélerő nagysága:

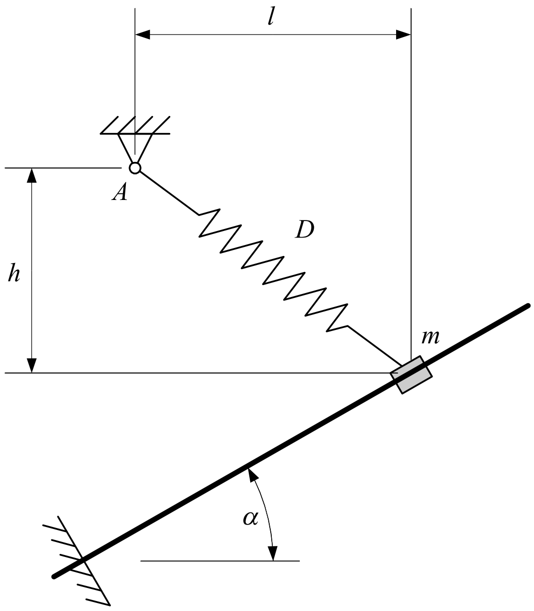
$$F_K = \frac{mg}{2sin\alpha} = 658.1N$$

2.2.5 Anyagi pont egyensúlyát biztosító reakcióerők meghatározása, ha az egyensúlyt sima vezetékkel (vagy lejtővel) és rugóval (vagy kötéllel) biztosítjuk

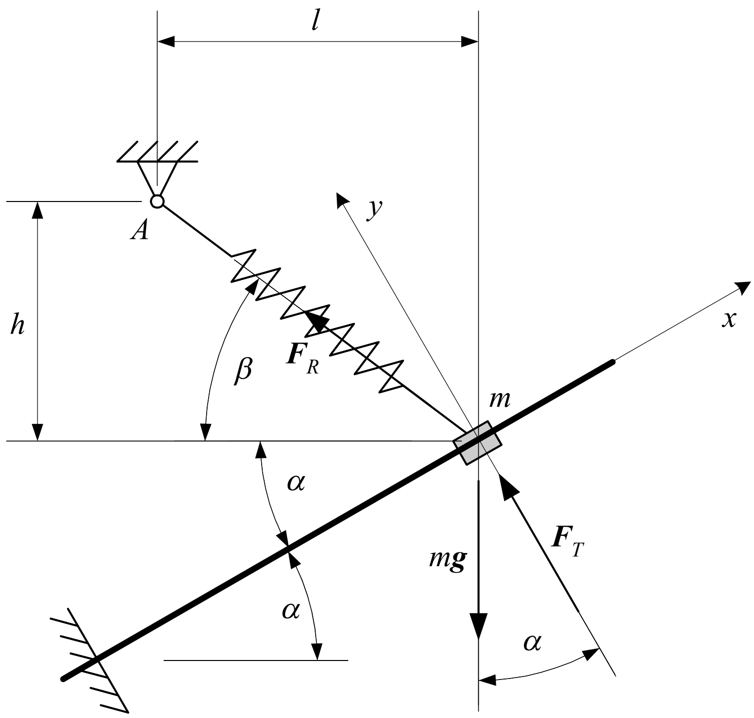
2.2.5/M1 Egy m tömegű csúszka súrlódásmentesen mozoghat a rajzon látható helyzetű sima vezetéken. A csúszka egy D rugómerevségű nyomórugóhoz csatlakozik, mely az A pontban csuklóval van rögzítve. A csúszka az ábrán látható helyzetben egyensúlyban van. Határozza meg számítás és szerkesztés segítségével az egyensúlyi helyzetben a csúszkára ható erőket! Mekkora a rugó deformációja egyensúlyesetén?

Adatok:

$$m = 30kg;\ l = 400\,mm;\ h = 300\,mm;\ \alpha = 30°;\ D = 50\,N/mm.$$



Megoldás számítással:



A β szög számítása:

$$\beta = arctan\frac{h}{l} = 36.87°$$

Az erők vektorkoordinátás alakban:

$$m\boldsymbol{g} = mg \cdot cos(90° + \alpha) \cdot \boldsymbol{i} + mg \cdot cos(180° - \alpha) \cdot \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{F}_R = F_R \cdot cos(180° - \alpha - \beta) \cdot \boldsymbol{i} + F_R \cdot cos(90° - \alpha - \beta) \cdot \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{F}_T = F_T \cdot \boldsymbol{j}$$

A vetületi egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_{xi} = 0 = mg \cdot cos(90° + \alpha) + F_R \cdot cos(180 - \alpha - \beta)$$
$$\sum F_{yi} = 0 = mg \cdot cos(180° - \alpha) + F_R \cdot cos(90° - \alpha - \beta) + F_T$$

Az egyenletek megoldása:

$$F_R = -mg \cdot \frac{cos120°}{cos113.13°} = -374.6N$$
$$F_T = -mg \cdot cos150° - F_R \cdot cos23.13° = 599.4N$$

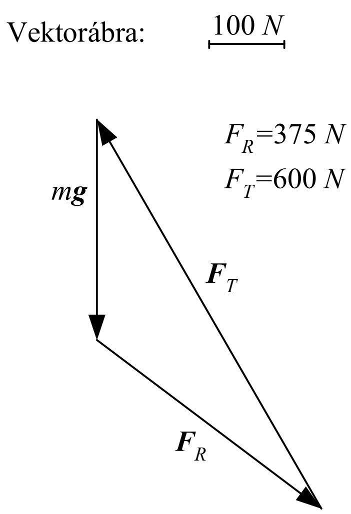
A megoldások vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{F}_R = 147.1 \cdot \boldsymbol{i} - 344.5 \cdot \boldsymbol{j}N$$
$$\boldsymbol{F}_T = 599.4 \cdot \boldsymbol{j}N$$

A rugó alakváltozása:

$$\Delta l = \frac{F_R}{D} = -7.492mm$$

Megoldás szerkesztéssel:

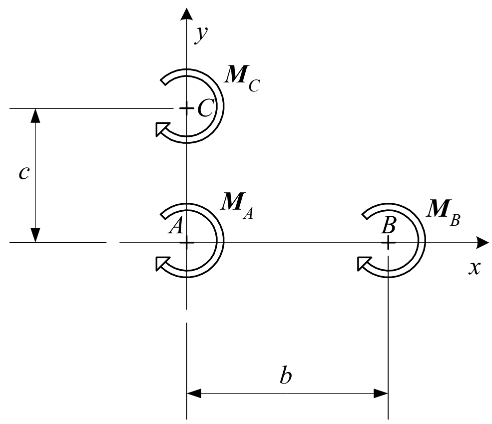


2.3 Merev testre ható erőrendszerek eredő vektorkettősének meghatározása, egyenértékűsége és egyensúlya

2.3.1 A nyomatékok között összefüggés felhasználása

2.3.1/M1 Egy ismeretlen, az $[xy]$ síkban elhelyezkedő $\boldsymbol{F}$ erőnek ismert az A, B és C pontra számított $\boldsymbol{M}_A$, $\boldsymbol{M}_B$ és $\boldsymbol{M}_C$ nyomatéka. Határozza meg az $\boldsymbol{F}$ erőt!
Adatok:

$$\boldsymbol{M}_A = (-12\boldsymbol{k})Nm;\ \boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{0};\ \boldsymbol{M}_C = (-6\boldsymbol{k})Nm; b = 3\,m;\ c = 2\,m.$$



Megoldás:
Az erő vektorkoordinátás alakja általánosan:

$$\boldsymbol{F} = F_x \cdot \boldsymbol{i} + F_y \cdot \boldsymbol{j}$$

Felhasználva a különböző pontokra számított nyomatékok közötti összefüggést:

$$\boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{r}_{BA} \times \boldsymbol{F}$$
$$\boldsymbol{r}_{BA} = -b \cdot \boldsymbol{i}$$
$$\boldsymbol{r}_{BA} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -b & 0 & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = -b \cdot F_y \cdot \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{0} = -12 \cdot \boldsymbol{k} - b \cdot F_y \cdot \boldsymbol{k}$$
$$F_y = -\frac{12}{b} = -4N$$
$$\boldsymbol{M}_B = \boldsymbol{M}_C + \boldsymbol{r}_{BC} \times \boldsymbol{F}$$
$$\boldsymbol{r}_{BC} = -b \cdot \boldsymbol{i} + c \cdot \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{r}_{BC} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -b & c & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (-b \cdot F_y - c \cdot F_x) \cdot \boldsymbol{k}$$
$$0 = -6 \cdot \boldsymbol{k} + (-b \cdot F_y - c \cdot F_x) \cdot \boldsymbol{k}$$
$$F_x = \frac{-6 - b \cdot F_y}{c} = 3N$$

Az erő vektorkoordinátás alakja:

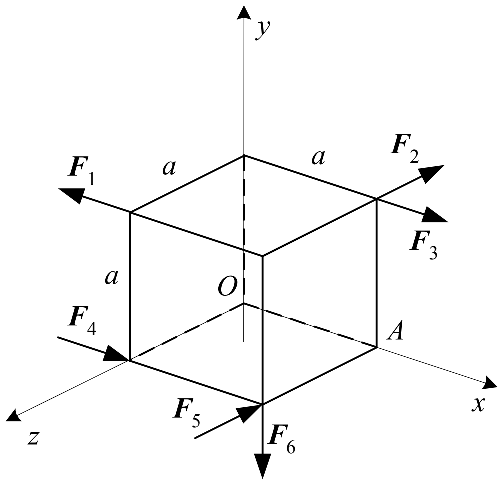
$$\boldsymbol{F} = (3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j})N$$

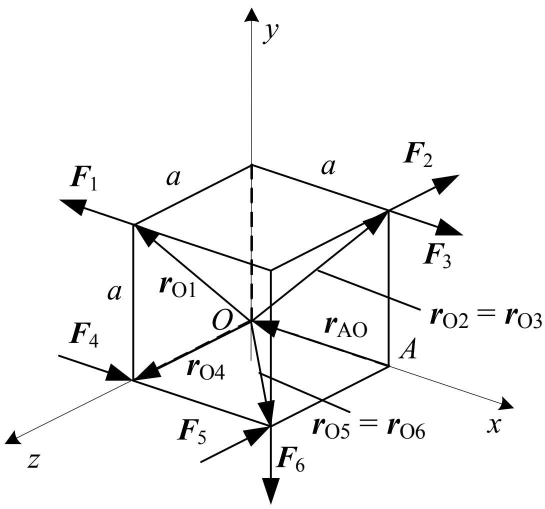
2.3.2 Eredő vektorkettős meghatározása (általános eset)

2.3.2/M1 Határozza meg az ábrán látható erőrendszer O pontba redukált vektorkettősét, majd a vektorkettős tagjai által bezárt szöget! Ezek után határozza meg az erőrendszer A pontba redukált vektorkettősét az O pontba redukált vektorkettősből kiindulva! Végezetül határozza meg az A pontba redukált vektorkettős tagjai által bezárt szöget!

Adatok:

$$F_1 = 10\,N;\ F_2 = 5\,N;\ F_3 = 15\,N;\ F_4 = 20\,N;\ F_5 = 5\,N;\ F_6 = 10\,N;\ a = 2\,m.$$





Az egyes erők vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{F}_1 = 10 \cdot (-\boldsymbol{i}) = (-10\boldsymbol{i})N$$
$$\boldsymbol{F}_2 = 5 \cdot (-\boldsymbol{k}) = (-5\boldsymbol{k})N$$
$$\boldsymbol{F}_3 = 15 \cdot \boldsymbol{i} = (15\boldsymbol{i})N$$
$$\boldsymbol{F}_4 = 20 \cdot \boldsymbol{i} = (20\boldsymbol{i})N$$
$$\boldsymbol{F}_5 = 5 \cdot (-\boldsymbol{k}) = (-5\boldsymbol{k})N$$
$$\boldsymbol{F}_6 = 10 \cdot (-\boldsymbol{j}) = (-10\boldsymbol{j})N$$

Eredő erő meghatározása:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 + \boldsymbol{F}_5 + \boldsymbol{F}_6 = 25 \cdot \boldsymbol{i} - 10 \cdot \boldsymbol{j} - 10 \cdot \boldsymbol{k}N$$

Az egyes erőkhöz tartozó helyvektorok (origóból a pontba mutató):

$$\boldsymbol{r}_{O1} = a \cdot \boldsymbol{j} + a \cdot \boldsymbol{k} = 2 \cdot \boldsymbol{j} + 2 \cdot \boldsymbol{k}m$$
$$\boldsymbol{r}_{O2} = \boldsymbol{r}_{O3} = a \cdot \boldsymbol{i} + a \cdot \boldsymbol{j} = 2 \cdot \boldsymbol{i} + 2 \cdot \boldsymbol{j}m$$
$$\boldsymbol{r}_{O4} = a \cdot \boldsymbol{k} = 2 \cdot \boldsymbol{k}m$$
$$\boldsymbol{r}_{O5} = \boldsymbol{r}_{O6} = a \cdot \boldsymbol{i} + a \cdot \boldsymbol{k} = 2 \cdot \boldsymbol{i} + 2 \cdot \boldsymbol{k}m$$

Az origóba redukált eredő nyomaték ($\boldsymbol{M_0}$): az egyes erők és az erőkhöz tartozó, az origóba mutató helyvektoruk vektoriális szorzatának összege.

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i)$$

$$\boldsymbol{r}_{O1} \times \boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 2 & 2 \\ -10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 20 \cdot \boldsymbol{j} + 20 \cdot \boldsymbol{k}Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{O2} \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 10 \cdot \boldsymbol{i} + 10 \cdot \boldsymbol{j} Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{O3} \times \boldsymbol{F}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 30 \cdot \boldsymbol{k} Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{O4} \times \boldsymbol{F}_4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 20 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 40 \cdot \boldsymbol{j} Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{O5} \times \boldsymbol{F}_5 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 10 \cdot \boldsymbol{j} Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{O6} \times \boldsymbol{F}_6 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} = 20 \cdot \boldsymbol{i} - 20 \cdot \boldsymbol{k} Nm$$

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i) = 10 \cdot \boldsymbol{i} + 40 \cdot \boldsymbol{j} - 30 \cdot \boldsymbol{k} Nm$$

A vektorkettős által bezárt szög:

$$\boldsymbol{M}_o \cdot \boldsymbol{F} = |\boldsymbol{M}_o| \cdot |\boldsymbol{F}| \cdot cos\alpha_1$$

$$\Downarrow$$

$$|\boldsymbol{M}_o| = \sqrt{10^2 + 40^2 + (-30)^2} = 50.99 Nm$$

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{25^2 + (-10)^2 + (-10)^2} = 28.72 N$$

$$\alpha_1 = cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{M}_o \cdot \boldsymbol{F}}{|\boldsymbol{M}_o| \cdot |\boldsymbol{F}|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{10 \cdot 25 + 40 \cdot (-10) + (-30) \cdot (-10)}{50.99 \cdot 28.72}\right) = 84.12^0$$

Az A pontba redukált vektorkettős:

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{M}_o + (\boldsymbol{r}_{Ao} \times \boldsymbol{F})$$

$$\boldsymbol{r}_{AO} = -a \cdot \boldsymbol{i} = -2 \cdot \boldsymbol{i} m$$

$$\boldsymbol{r}_{AO} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 25 & -10 & -10 \end{vmatrix} = 20 \cdot \boldsymbol{j} + 20 \cdot \boldsymbol{k} Nm$$

$$\boldsymbol{M}_A = (10\boldsymbol{i} + 40\boldsymbol{j} - 30\boldsymbol{k}) + (-20\boldsymbol{j} + 20\boldsymbol{k}) = 10\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k} Nm$$

Az A pontba redukált vektorkettős tagjai által bezárt szög (az $\boldsymbol{F}$ eredő erő állandó):

$$|\boldsymbol{M}_A| = \sqrt{10^2 + 20^2 + (-10)^2} = 24.49 Nm$$

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{25^2 + (-10)^2 + (-10)^2} = 28.72 N$$

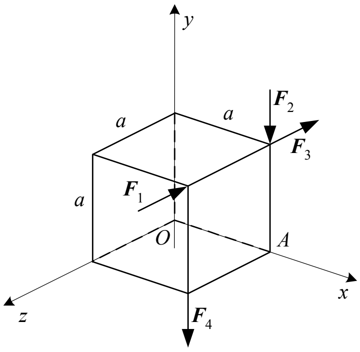
$$\alpha_1 = cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{M}_o \cdot \boldsymbol{F}}{|\boldsymbol{M}_o| \cdot |\boldsymbol{F}|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{10 \cdot 25 + 20 \cdot (-10) + (-10) \cdot (-10)}{24.49 \cdot 28.72}\right) = 77.69^0$$

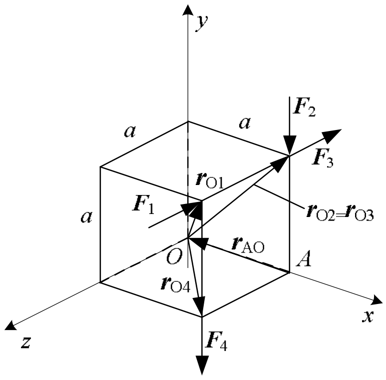
2.3.3 Eredő vektorkettős meghatározása (síkbeli erőrendszer)

2.3.3/M1 Határozza meg az ábrán látható erőrendszer O pontba redukált vektorkettősét, majd a vektorkettős tagjai által bezárt szöget! Ezek után határozza meg az erőrendszer A pontba redukált vektorkettősét az O pontba redukált vektorkettősből kiindulva! Végezetül határozza meg az A pontba redukált vektorkettős tagjai által bezárt szöget!

Adatok:

$$F_1 = 15\,N;\ F_2 = 10\,N;\ F_3 = 15\,N;\ F_4 = 5\,N;\ a = 1{,}5\,m.$$





Az egyes erők vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{F}_1 = 15 \cdot (-\boldsymbol{k}) = -15\boldsymbol{k}\ N$$
$$\boldsymbol{F}_2 = 10 \cdot (-\boldsymbol{j}) = -10\boldsymbol{j}\ N$$
$$\boldsymbol{F}_3 = 15 \cdot (-\boldsymbol{k}) = -15\boldsymbol{k}\ N$$
$$\boldsymbol{F}_4 = 5 \cdot (-\boldsymbol{j}) = -5\boldsymbol{j}\ N$$

Eredő erő meghatározása:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 = -15\boldsymbol{j} - 30\boldsymbol{k}\ N$$

Az egyes erőkhöz tartozó helyvektorok:

$$\boldsymbol{r}_{o1} = a \cdot \boldsymbol{i} + a \cdot \boldsymbol{j} + a \cdot \boldsymbol{k} = 1.5\boldsymbol{i} + 1.5\boldsymbol{j} + 1.5\boldsymbol{k}\ m$$
$$\boldsymbol{r}_{o2} = \boldsymbol{r}_{o3} = a \cdot \boldsymbol{i} + a \cdot \boldsymbol{j} = 1.5\boldsymbol{i} + 1.5\boldsymbol{j}\ m$$
$$\boldsymbol{r}_{o4} = a \cdot \boldsymbol{i} + a \cdot \boldsymbol{k} = 1.5\boldsymbol{i} + 1.5\boldsymbol{k}\ m$$

Az Origóba redukált eredő nyomaték ($\boldsymbol{M}_o$): az egyes erők és az erőkhöz tartozó, az Origóba mutató helyvektoruk vektoriális szorzatának összessége.

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i)$$

$$\boldsymbol{r}_{o1} \times \boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1.5 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = -22.5\boldsymbol{i} + 22.5\boldsymbol{j}\ Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o2} \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -15\boldsymbol{k}\ Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o3} \times \boldsymbol{F}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1.5 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = -22.5\boldsymbol{i} + 22.5\boldsymbol{j}\ Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o4} \times \boldsymbol{F}_4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 7.5\boldsymbol{i} - 7.5\boldsymbol{k}\ Nm$$

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i) = -37.5\boldsymbol{i} + 45\boldsymbol{j} - 22{,}5\boldsymbol{k}\ Nm$$

A vektorkettős által bezárt szög:

$$\boldsymbol{M}_o \cdot \boldsymbol{F} = |\boldsymbol{M}_o| \cdot |\boldsymbol{F}| \cdot \cos\alpha_1$$

$$\Downarrow$$

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{(-15)^2 + (-30)^2} = 33.54\ N$$

$$|\boldsymbol{M}_o| = \sqrt{(-37.5)^2 + 45^2 + (-22{,}5)^2} = 62.75\ Nm$$

$$\alpha_1 = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{M}_o \cdot \boldsymbol{F}}{|\boldsymbol{M}_o| \cdot |\boldsymbol{F}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0 \cdot (-37.5) + (-15) \cdot (45) + (-30) \cdot (-22.5)}{62.75 \cdot 33.54}\right) = 90^\circ$$

A nyomaték ($\boldsymbol{M}_0$) és az eredőerő ($\boldsymbol{F}$) vektor egymáshoz képest derékszöget zárnak be.

Az *A* pontba redukált vektorkettős:

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{M}_o + (\boldsymbol{r}_{Ao} \times \boldsymbol{F})$$

$$\boldsymbol{r}_{Ao} = -a \cdot \boldsymbol{i} = -1.5 \cdot \boldsymbol{i}\ m$$

$$\boldsymbol{r}_{Ao} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1.5 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & -30 \end{vmatrix} = -45\boldsymbol{j} + 22.5\boldsymbol{k}\ Nm$$

$$\boldsymbol{M}_A = (-37.5\boldsymbol{i} + 45\boldsymbol{j} - 22.5\boldsymbol{k}) + (-45\boldsymbol{j} + 22.5\boldsymbol{k}) = -37.5\boldsymbol{i}\ Nm$$

Az *A* pontba redukált vektorkettős tagjai által bezárt szög (az $\boldsymbol{F}$ eredő erő állandó):

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{(-15)^2 + (-30)^2} = 33.54\ N$$

$$|\boldsymbol{M}_A| = \sqrt{(-37.5)^2} = 37.5\ Nm$$

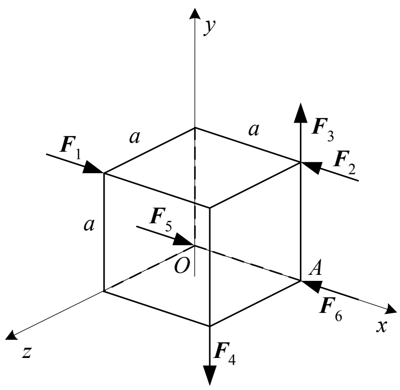
$$\alpha_1 = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{M}_A \cdot \boldsymbol{F}}{|\boldsymbol{M}_A| \cdot |\boldsymbol{F}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0 \cdot (-37.5) + (-15) \cdot 0 + (-30) \cdot 0}{37.5 \cdot 33.54}\right) = 90^\circ$$

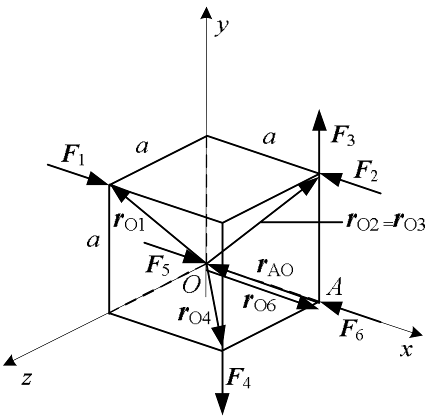
2.3.4 Eredő vektorkettős meghatározása (erőpár)

2.3.4/M1 Határozza meg az ábrán látható erőrendszer O pontba redukált vektorkettősét majd az A pontba redukált vektorkettősét az O pontba redukált vektorkettősből kiindulva!

Adatok:

$$F_1 = 6\,N;\ F_2 = 6\,N;\ F_3 = 9\,N;\ F_4 = 9\,N;\ F_5 = 3\,N;\ F_6 = 3\,N;\ a = 1\,m.$$





Az egyes erők vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{F}_1 = 6 \cdot \boldsymbol{i} = 6\boldsymbol{i}\, N$$
$$\boldsymbol{F}_2 = 6 \cdot (-\boldsymbol{i}) = -6\boldsymbol{i}\, N$$
$$\boldsymbol{F}_3 = 9 \cdot \boldsymbol{j} = 9\boldsymbol{j}\, N$$
$$\boldsymbol{F}_4 = 9 \cdot (-\boldsymbol{j}) = -9\boldsymbol{j}\, N$$
$$\boldsymbol{F}_5 = 3 \cdot \boldsymbol{i} = 3\boldsymbol{i}\, N$$
$$\boldsymbol{F}_6 = 3 \cdot (-\boldsymbol{i}) = -3\boldsymbol{i}\, N$$

Eredő erő meghatározása:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 + \boldsymbol{F}_5 + \boldsymbol{F}_6 = 0 \;\; N$$

Az egyes erőkhöz tartozó helyvektorok (origóból a pontba mutató):

$$\boldsymbol{r}_{o1} = a \cdot \boldsymbol{j} + a \cdot \boldsymbol{k} = 1\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}\, m$$
$$\boldsymbol{r}_{o2} = \boldsymbol{r}_{o3} = a \cdot \boldsymbol{i} + a \cdot \boldsymbol{j} = 1\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j}\, m$$
$$\boldsymbol{r}_{o4} = a \cdot \boldsymbol{i} + a \cdot \boldsymbol{k} = 1\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{k}\, m$$
$$\boldsymbol{r}_{o5} = 0\, m$$
$$\boldsymbol{r}_{o6} = a \cdot \boldsymbol{i} = 1\boldsymbol{i}\, m$$

Az origóba redukált eredő nyomaték ($\boldsymbol{M}_o$): az egyes erők és az erőkhöz tartozó, az origóba mutató helyvektoruk vektoriális szorzatának összege.

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i)$$

$$\boldsymbol{r}_{o1} \times \boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}\, Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o2} \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6\boldsymbol{k}\, Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o3} \times \boldsymbol{F}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 9\boldsymbol{k}\, Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o4} \times \boldsymbol{F}_4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 0 \end{vmatrix} = -9\boldsymbol{k}\, Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o5} \times \boldsymbol{F}_5 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o6} \times \boldsymbol{F}_6 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0Nm$$

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i) = 6\boldsymbol{j}\, Nm$$

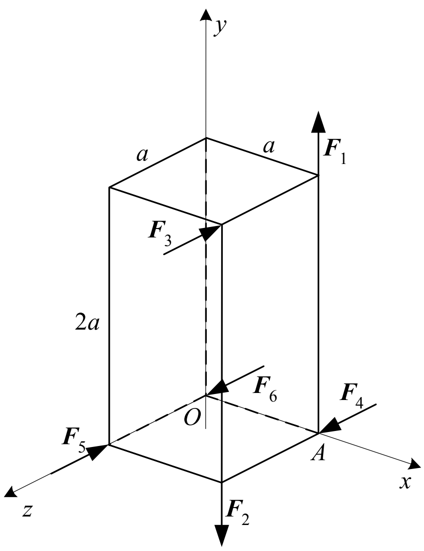
Az *A* pontba redukált vektorkettős:

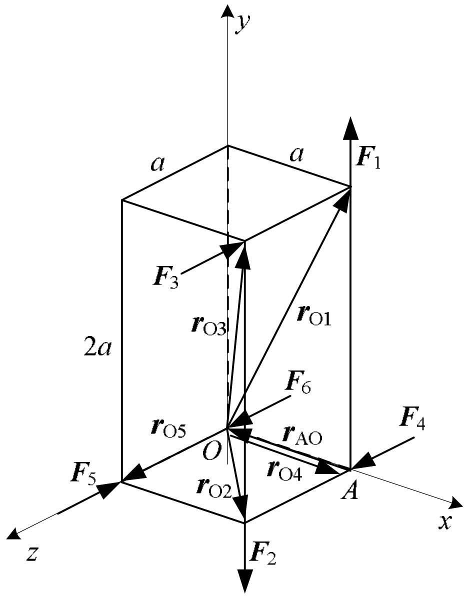
$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{M}_o + (\boldsymbol{r}_{Ao} \times \boldsymbol{F})$$
$$\boldsymbol{r}_{Ao} = -a \cdot \boldsymbol{i} = -1 \cdot \boldsymbol{i}\, m$$
$$\boldsymbol{r}_{Ao} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0Nm$$
$$\boldsymbol{M}_A = 6\boldsymbol{j} + 0 = 6\boldsymbol{j}\, Nm$$

2.3.5 Eredő vektorkettős meghatározása (egyensúlyi erőrendszer)

2.3.5/M1 Határozza meg az ábrán látható erőrendszer O pontba redukált vektorkettősét majd az A pontba redukált vektorkettősét az O pontba redukált vektorkettősből kiindulva!
Adatok:

$$F_1 = 8N;\ F_2 = 8\,N;\ F_3 = 4\,N;\ F_4 = 4\,N;\ F_5 = 5\,N;\ F_5 = 5\,N;\ a = 3\,m.$$





Az egyes erők vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{F}_1 = 8\cdot\boldsymbol{j} = 6\boldsymbol{i}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_2 = 8\cdot(-\boldsymbol{j}) = -6\boldsymbol{i}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_3 = 4\cdot(-\boldsymbol{k}) = -4\boldsymbol{k}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_4 = 4\cdot\boldsymbol{k} = 4\boldsymbol{k}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_5 = 5\cdot(-\boldsymbol{k}) = -5\boldsymbol{k}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_6 = 5\cdot\boldsymbol{k} = 5\boldsymbol{k}\,N$$

Eredő erő meghatározása:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 + \boldsymbol{F}_5 + \boldsymbol{F}_6 = 0\ \ N$$

Az egyes erőkhöz tartozó helyvektorok (origóból a pontba mutató):

$$\boldsymbol{r}_{o1} = a\cdot\boldsymbol{i} + 2a\cdot\boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}\,m$$
$$\boldsymbol{r}_{o2} = a\cdot\boldsymbol{i} + a\cdot\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}\,m$$
$$\boldsymbol{r}_{o3} = a\cdot\boldsymbol{i} + 2a\cdot\boldsymbol{j} + a\cdot\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}\,m$$
$$\boldsymbol{r}_{o4} = a\cdot\boldsymbol{i} = 3\boldsymbol{i}\,m$$
$$\boldsymbol{r}_{o5} = a\cdot\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{k}\,m$$
$$\boldsymbol{r}_{o6} = 0\,m$$

Az origóba redukált eredő nyomaték ($\boldsymbol{M}_o$): az egyes erők és az erőkhöz tartozó, az origóba mutató helyvektoruk vektoriális szorzatának összessége.

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i)$$

$$\boldsymbol{r}_{o1} \times \boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -36\boldsymbol{k}\, Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o2} \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18\boldsymbol{j}\, Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o3} \times \boldsymbol{F}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -24\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j}\, Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o4} \times \boldsymbol{F}_4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12\boldsymbol{j}\, Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o5} \times \boldsymbol{F}_5 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o6} \times \boldsymbol{F}_6 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0Nm$$

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i) = -24\boldsymbol{i} - 18\boldsymbol{j} - 36\boldsymbol{k}\, Nm$$

Az A pontba redukált vektorkettős:

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{M}_o + (\boldsymbol{r}_{Ao} \times \boldsymbol{F})$$

$$\boldsymbol{r}_{Ao} = -a \cdot \boldsymbol{i} = -3 \cdot \boldsymbol{i}\, m$$

$$\boldsymbol{r}_{Ao} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0Nm$$

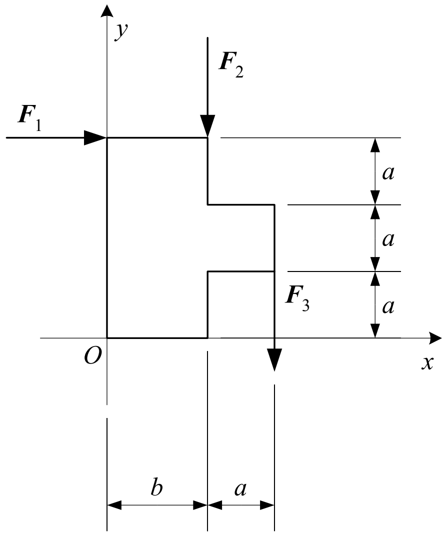
$$\boldsymbol{M}_A = (-24\boldsymbol{i} - 18\boldsymbol{j} - 36\boldsymbol{k}) + 0 = -24\boldsymbol{i} - 18\boldsymbol{j} - 36\boldsymbol{k}\, Nm$$

2.4 Síkbeli erőrendszerek eredőjének meghatározása számítással, szerkesztéssel, egyenértékűsége és egyensúlya

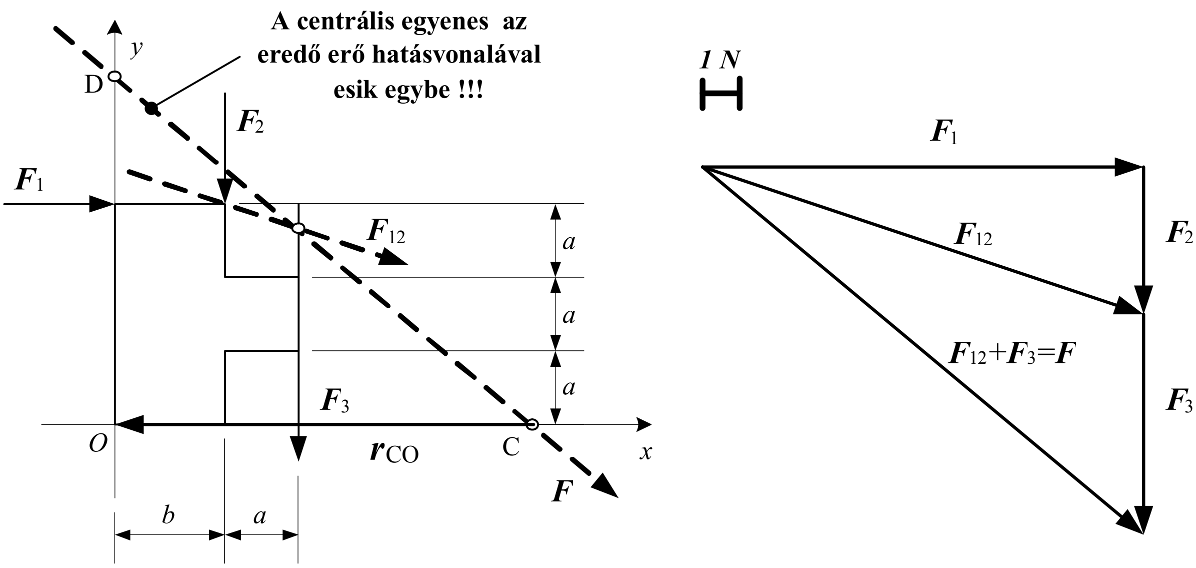
2.4.1 Metsződő hatásvonalú erőrendszer (általános eset)

2.4.1/M1 Határozza meg az ábrán látható lemezalkatrészt terhelő erőrendszer eredőjét számítással és szerkesztés segítségével!
Adatok:

$$F_1 = 12N;\ F_2 = 4\,N;\ F_3 = 6\,N;\ a = 2\,cm;\ b = 3\,cm.$$

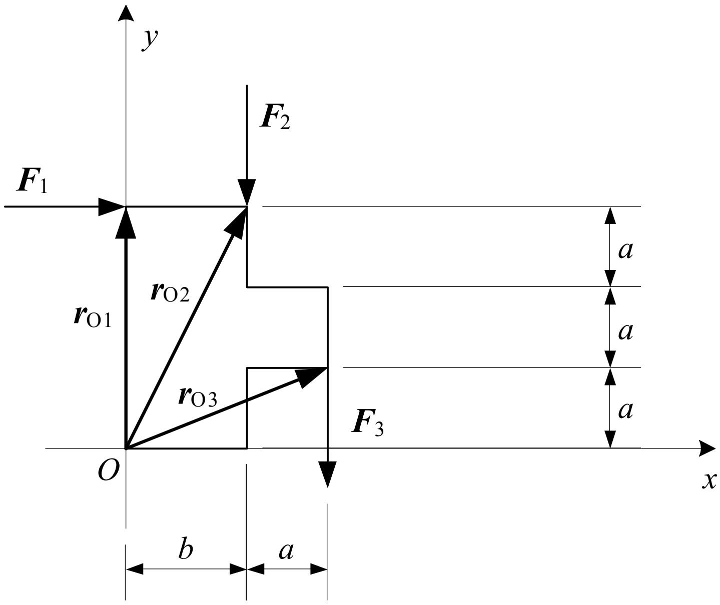


Megoldás szerkesztéssel:



Szerkesztés menete:

Felmértük az ismert erőket léptékhelyesen egy síkbeli koordináta rendszerbe, először meghatároztuk az $\boldsymbol{F_1}$ és $\boldsymbol{F_2}$ erővektorok összegét ($\boldsymbol{F_{12}}$), majd ezzel az összeg-, és az $\boldsymbol{F_3}$ erővektorral meghatároztuk az eredő erőt. Ha jól dolgoztunk, akkor könnyedén leolvasható az eredő erő vektorkoordinátás alakja, ami nem más, mint: $\boldsymbol{F} = 12\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j}\,N$.



Az egyes erők vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{F}_1 = 12 \cdot \boldsymbol{i} = 12\boldsymbol{i}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_2 = 4 \cdot (-\boldsymbol{j}) = -4\boldsymbol{j}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_3 = 6 \cdot (-\boldsymbol{j}) = -6\boldsymbol{j}\,N$$

Eredő erő meghatározása:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = 12\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j}\,N$$

Az egyes erőkhöz tartozó helyvektorok:

$$\boldsymbol{r}_{o1} = 3 \cdot a \cdot \boldsymbol{j} = 6\boldsymbol{j}\,cm$$
$$\boldsymbol{r}_{o2} = b \cdot \boldsymbol{i} + 3a \cdot \boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}\,cm$$
$$\boldsymbol{r}_{o3} = (a+b) \cdot \boldsymbol{i} + a \cdot \boldsymbol{j} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}\,cm$$

Az origóba redukált eredő nyomaték ($\boldsymbol{M_o}$): az egyes erők és az erőkhöz tartozó, az origóba mutató helyvektoruk vektoriális szorzatának összessége.

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i)$$

$$\boldsymbol{r}_{o1} \times \boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -72\boldsymbol{k}\,Ncm$$

$$\boldsymbol{r}_{o2} \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -12\boldsymbol{k}\,Ncm$$

$$\boldsymbol{r}_{o3} \times \boldsymbol{F}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -30\boldsymbol{k}\,Ncm$$

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i) = -114\boldsymbol{k}\,Ncm$$

Meghatározzuk a centrális egyenes x koordinátatengellyel alkotott metszéspontjának (C) koordinátáit [ez a feladatkiírásban nem szerepel, de a jobb rálátás érdekében ezt is elvégezzük]:

A centrális egyenesen nem keletkezik nyomaték, így:$M_C = 0$

$$\boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{M}_o + (\boldsymbol{r}_{CO} \times \boldsymbol{F})$$

$$\boldsymbol{r}_{CO} = -x_c \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{r}_{CO} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -x_c & 0 & 0 \\ 12 & -10 & 0 \end{vmatrix} = 10 \cdot x_c \boldsymbol{k}\,Ncm$$

$$\boldsymbol{M}_c = 0 = -114\boldsymbol{k} + 10 \cdot x_c \boldsymbol{k}$$

Egyszerű egyenletrendezéssel megkapjuk:

$$0 = -114 + 10 \cdot x_c$$

$$11.4\,cm = x_c$$

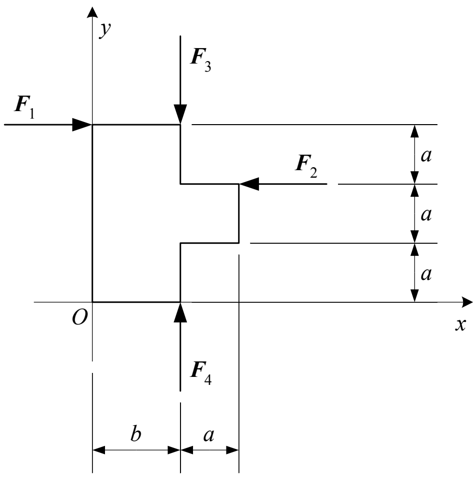
A centrális egyenes az x tengelyt a C pontban 11.4 cm-nél metszi. Ugyan ezt végig csinálhatjuk a D pontra és a további feladatokban is, de mi ezzel a továbbiakban nem foglalkozunk.

2.4.2 Metsződő hatásvonalú erőrendszer (erőpár)

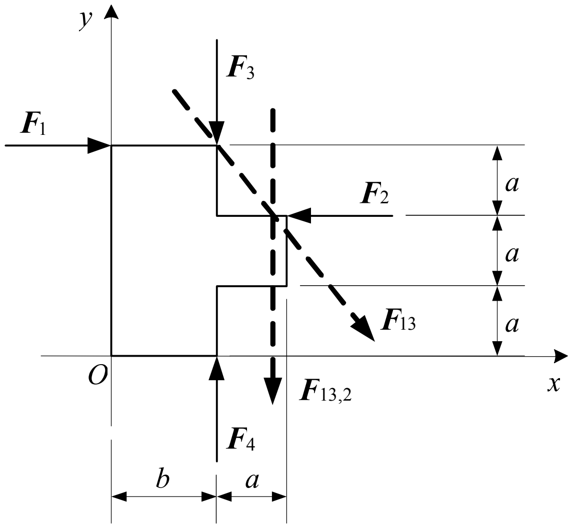
2.4.2/M1 Határozza meg az ábrán látható lemezalkatrészt terhelő erőrendszer eredőjét számítással és szerkesztés segítségével!

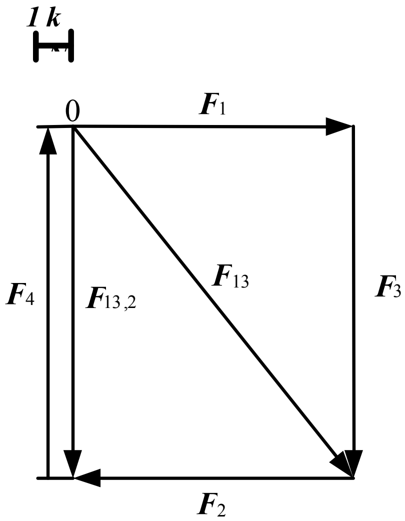
Adatok:

$F_1 = 8\,kN$; $F_2 = 8\,kN$; $F_3 = 10\,kN$; $F_4 = 10\,kN$; $a = 2\,cm$; $b = 3\,cm$.



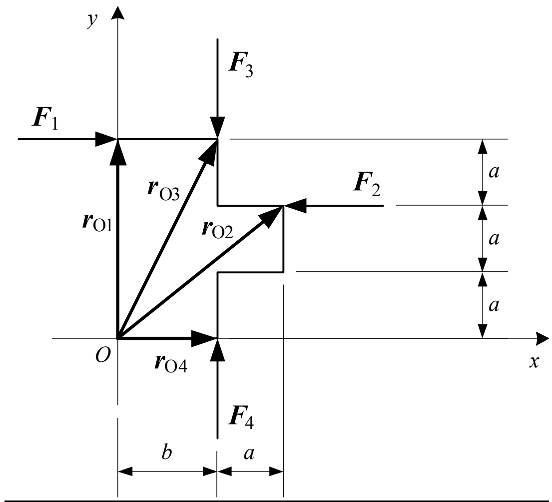
Megoldás szerkesztéssel:





<u>Szerkesztés menete:</u>

Az előző feladathoz képest hasonlóan jártunk el ebben az esetben is. Felmértük az ismert erőket léptékhelyesen egy síkbeli koordináta rendszerbe, látható a vektorábrán, hogy egy erőpárral terhelt lemezalkatrész eredő ereje $\boldsymbol{F} = 0$ és az erőpár nem esik egy hatásvonalra ($F_{13,2}$ és F_4).



<u>Számítás:</u>

Az egyes erők vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{F}_1 = 8 \cdot \boldsymbol{i} = 8\boldsymbol{i}\ kN$$
$$\boldsymbol{F}_2 = 8 \cdot (-\boldsymbol{i}) = -8\boldsymbol{i}\ kN$$
$$\boldsymbol{F}_3 = 10 \cdot (-\boldsymbol{j}) = -10\boldsymbol{j}\ kN$$
$$\boldsymbol{F}_4 = 10 \cdot \boldsymbol{j} = 10\boldsymbol{j}\ kN$$

Eredő erő meghatározása:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 = 0$$

Az egyes erőkhöz tartozó helyvektorok:

$$\boldsymbol{r}_{o1} = 3 \cdot a \cdot \boldsymbol{j} = 6\boldsymbol{j}\ cm$$
$$\boldsymbol{r}_{o2} = (a+b) \cdot \boldsymbol{i} + 2 \cdot a \cdot \boldsymbol{j} = 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}\ cm$$
$$\boldsymbol{r}_{o3} = b \cdot \boldsymbol{i} + 3a \cdot \boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}\ cm$$
$$\boldsymbol{r}_{o4} = b \cdot \boldsymbol{i} = 3\boldsymbol{i}\ cm$$

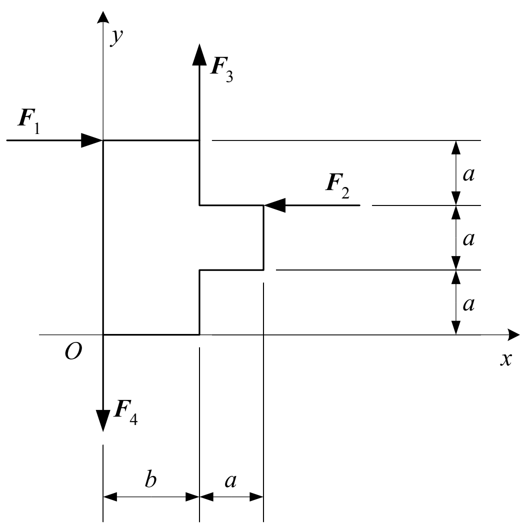
Az origóba redukált eredő nyomaték ($\boldsymbol{M}_o$): az egyes erők és az erőkhöz tartozó, az origóba mutató helyvektoruk vektoriális szorzatának összessége.

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i)$$
$$\boldsymbol{r}_{o1} \times \boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -48\boldsymbol{k}\ kNcm$$
$$\boldsymbol{r}_{o2} \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 32\boldsymbol{k}\ kNcm$$
$$\boldsymbol{r}_{o3} \times \boldsymbol{F}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -30\boldsymbol{k}\ kNcm$$
$$\boldsymbol{r}_{o4} \times \boldsymbol{F}_4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 30\boldsymbol{k}\ kNcm$$
$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i) = -12\boldsymbol{k}\ kNcm$$

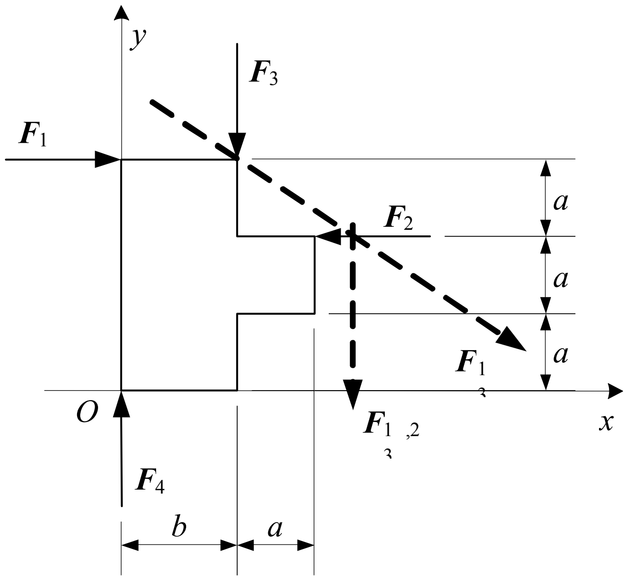
2.4.3 Metsződő hatásvonalú erőrendszer (egyensúlyi erőrendszer)

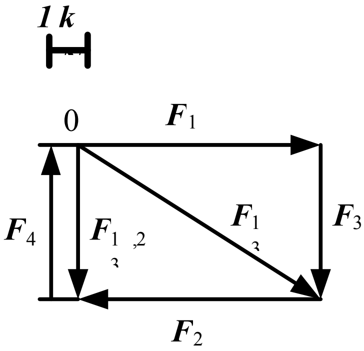
2.4.3/M1 Határozza meg az ábrán látható lemezalkatrészt terhelő erőrendszer eredőjét számítással és szerkesztés segítségével!
Adatok:

$$F_1 = 6kN;\ F_2 = 6kN;\ F_3 = 4kN;\ F_4 = 4kN;\ a = 200\,mm;\ b = 300\,mm.$$



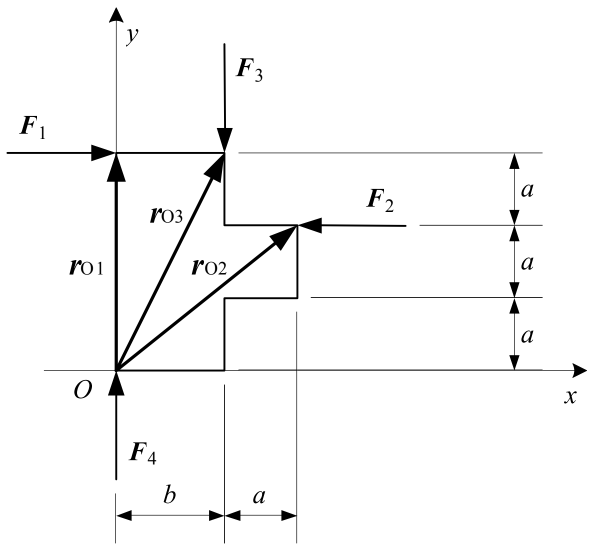
Megoldás szerkesztéssel:





Szerkesztés menete:

A szerkesztés menete ugyanolyan, mint az előző feladaté, annyi különbséggel, hogy a vektorábránk kisebb lesz. Felmértük az ismert erőket léptékhelyesen egy síkbeli koordináta rendszerbe, a vektorábrából jól látható, ha egyensúlyi erőrendszerről van szó, a lemezalkatrész eredő ereje $\boldsymbol{F} = 0$.



Számítás:

Az egyes erők vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{F}_1 = 6 \cdot \boldsymbol{i} = 6\boldsymbol{i}\ kN$$
$$\boldsymbol{F}_2 = 6 \cdot (-\boldsymbol{i}) = -6\boldsymbol{i}\ kN$$
$$\boldsymbol{F}_3 = 4 \cdot (-\boldsymbol{j}) = -4\boldsymbol{j}\ kN$$
$$\boldsymbol{F}_4 = 4 \cdot \boldsymbol{j} = 4\boldsymbol{j}\ kN$$

Eredő erő meghatározása:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 = 0$$

Az egyes erőkhöz tartozó helyvektorok:

$$\boldsymbol{r}_{o1} = 3 \cdot a \cdot \boldsymbol{j} = 0.6\boldsymbol{j}\, m$$

$$\boldsymbol{r}_{o2} = (a + b) \cdot \boldsymbol{i} + 2 \cdot a \cdot \boldsymbol{j} = 0.5\boldsymbol{i} + 0.4\boldsymbol{j}\, m$$

$$\boldsymbol{r}_{o3} = b \cdot \boldsymbol{i} + 3a \cdot \boldsymbol{j} = 0.3\boldsymbol{i} + 0.6\boldsymbol{j}\, m$$

$$\boldsymbol{r}_{o4} = 0$$

Az Origóba redukált eredő nyomaték ($\boldsymbol{M}_o$): az egyes erők és az erőkhöz tartozó, az Origóba mutató helyvektoruk vektoriális szorzatának összessége.

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i)$$

$$\boldsymbol{r}_{o1} \times \boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3.6\boldsymbol{k}\, kNm$$

$$\boldsymbol{r}_{o2} \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0.5 & 0.4 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2.4\boldsymbol{k}\, kNm$$

$$\boldsymbol{r}_{o3} \times \boldsymbol{F}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0.3 & 0.6 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -1.2\boldsymbol{k}\, kNm$$

$$\boldsymbol{r}_{o4} \times \boldsymbol{F}_4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0kNm$$

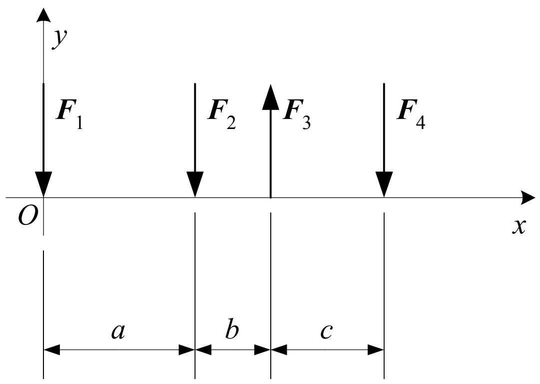
$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i) = -2.4\boldsymbol{k}\, kNm$$

2.4.4 Párhuzamos hatásvonalú erőrendszer (általános eset)

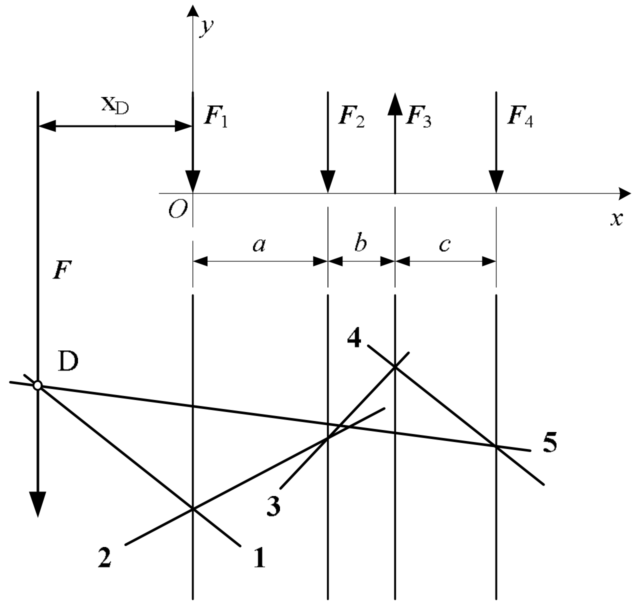
2.4.4/M1 Határozza meg az ábrán látható erőrendszer eredőjét számítással és szerkesztés segítségével!

Adatok:

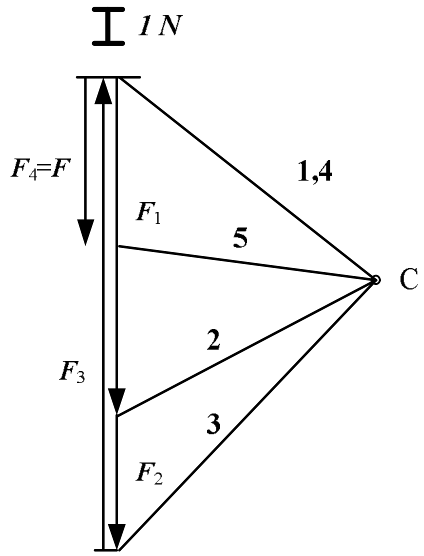
$$F_1 = 10\,N;\; F_2 = 5\,N;\; F_3 = 15\,N;\; F_4 = 5\,N;\; a = 2\,m;\; b = 1\,m;\; c = 1{,}5\,m.$$



Kötél ábra:



Vektor ábra:



Szerkesztés menete:

Felmértük az ismert erőket léptékhelyesen egy síkbeli koordináta rendszerbe (vektor ábra). Látható, hogy az összes erő az y tengellyel párhuzamos. Kijelöltünk egy tetszőleges (D) pontot és ezzel összekötöttük az erők kezdőpontjait. Ezek után elkészítettük a „kötél ábrát”. A vektor ábrából leolvasható az eredő erő vektora $\boldsymbol{F} = -5\boldsymbol{j}\,N$ és a kötélábrából az eredő erő y tengelyhez viszonyított helyzete $x_D = -2{,}5\,m$.

Megoldás számítással:

Az egyes erők vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{F}_1 = 10 \cdot (-\boldsymbol{j}) = -10\boldsymbol{j}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_2 = 5 \cdot (-\boldsymbol{j}) = -5\boldsymbol{j}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_3 = 15 \cdot \boldsymbol{j} = 15\boldsymbol{j}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_4 = 5 \cdot (-\boldsymbol{j}) = -5\boldsymbol{j}\,N$$

Eredő erő meghatározása:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 = -5\boldsymbol{j}\,N$$

Az egyes erőkhöz tartozó helyvektorok:

$$\boldsymbol{r}_{o1} = 0$$
$$\boldsymbol{r}_{o2} = a \cdot \boldsymbol{i} = 2\boldsymbol{i}\,m$$
$$\boldsymbol{r}_{o3} = (a + b) \cdot \boldsymbol{i} = 3\boldsymbol{i}\,m$$
$$\boldsymbol{r}_{o4} = (a + b + c) \cdot \boldsymbol{i} = 4.5\boldsymbol{i}\,m$$

Az origóba redukált eredő nyomaték $(\boldsymbol{M}_o)$: az egyes erők és az erőkhöz tartozó, az origóba mutató helyvektoruk vektoriális szorzatának összege.

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i)$$

$$\boldsymbol{r}_{o1} \times \boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{r}_{o2} \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -10\boldsymbol{k}\, Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o3} \times \boldsymbol{F}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \end{vmatrix} = 45\boldsymbol{k}\, Nm$$

$$\boldsymbol{r}_{o4} \times \boldsymbol{F}_4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -22.5\boldsymbol{k}\, Nm$$

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i) = 12.5\boldsymbol{k}\, Nm$$

Meghatározzuk a centrális egyenes y koordinátatengelytől való távolságát (D) [ez a feladatkiírásban nem szerepel, de a jobb érthetőség érdekében ezt is elvégezzük]:
A centrális egyenesen nem keletkezik nyomaték, így: $M_D = 0$

$$\boldsymbol{M}_D = \boldsymbol{M}_o + (\boldsymbol{r}_{DO} \times \boldsymbol{F})$$

$$\boldsymbol{r}_{DO} = -x_D\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{r}_{DO} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -x_D & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot x_D\boldsymbol{k}\, Nm$$

$$\boldsymbol{M}_D = 0 = 12.5\boldsymbol{k} + 5 \cdot x_D\boldsymbol{k}$$

Egyszerű egyenletrendezéssel megkapjuk:

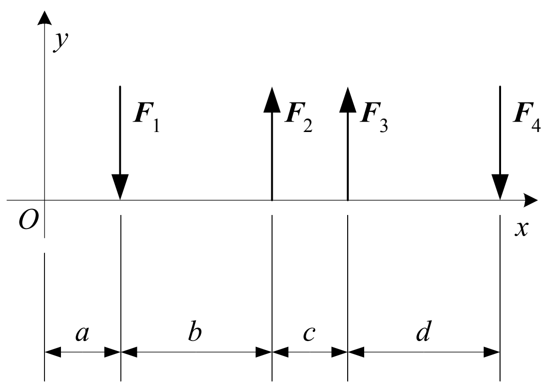
$$0 = 12.5 + 5 \cdot x_D$$

$$-2.5\, m = x_D$$

2.4.5 Párhuzamos hatásvonalú erőrendszer (erőpár)

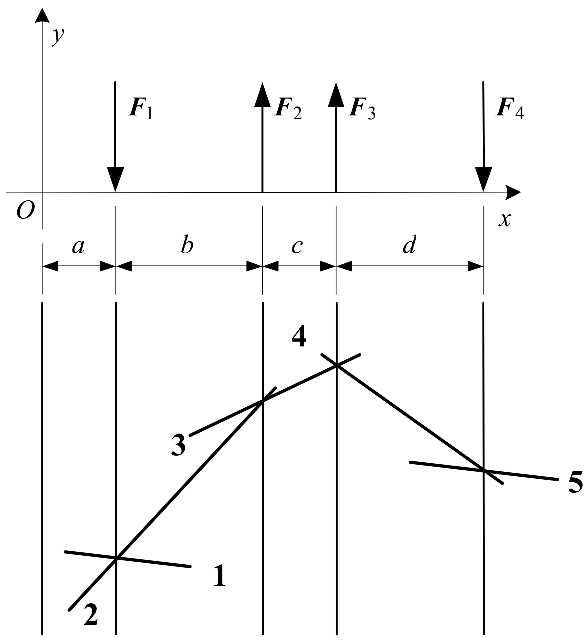
2.4.5/M1 Határozza meg az ábrán látható erőrendszer eredőjét számítással és szerkesztés segítségével!
Adatok:

$F_1 = 10\, kN$; $F_2 = 5\, kN$; $F_3 = 10\, kN$; $F_4 = 5\, kN$; $a = 1\, m$; $b = 2\, m$; $c = 1\, m$; $d = 2\, m$.

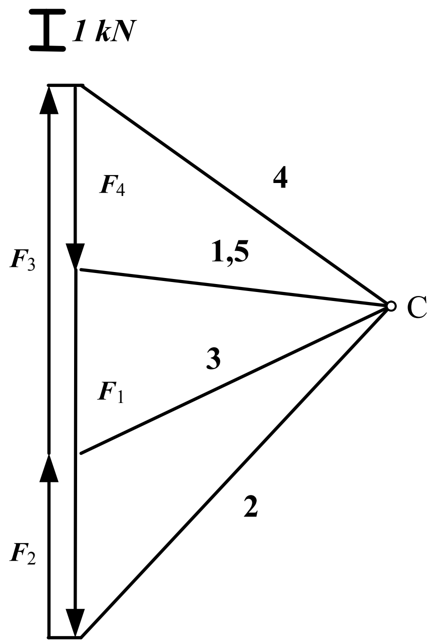


Megoldás szerkesztéssel:

Kötél ábra:



Vektor ábra:



Szerkesztés menete:

A szerkesztés menete ugyan úgy történik, mint az előző feladatnál. A szerkesztésből jól látszik, hogy az eredő erő értéke zérus ($\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$). Erőpárnál a vektor ábra önmagába záródó, míg a kötél ábra nyitott marad.

Megoldás számítással:

Az egyes erők vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{F}_1 = 10 \cdot (-\boldsymbol{j}) = -10\boldsymbol{j}\, kN$$
$$\boldsymbol{F}_2 = 5 \cdot \boldsymbol{j} = 5\boldsymbol{j}\, kN$$
$$\boldsymbol{F}_3 = 10 \cdot \boldsymbol{j} = 10\boldsymbol{j}\, kN$$
$$\boldsymbol{F}_4 = 5 \cdot (-\boldsymbol{j}) = -5\boldsymbol{j}\, kN$$

Eredő erő meghatározása:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 = 0$$

Az egyes erőkhöz tartozó helyvektorok:

$$\boldsymbol{r}_{o1} = a \cdot \boldsymbol{i} = 1\boldsymbol{i}\, m$$
$$\boldsymbol{r}_{o2} = (a + b) \cdot \boldsymbol{i} = 3\boldsymbol{i}\, m$$
$$\boldsymbol{r}_{o3} = (a + b + c) \cdot \boldsymbol{i} = 4\boldsymbol{i}\, m$$
$$\boldsymbol{r}_{o4} = (a + b + c + d) \cdot \boldsymbol{i} = 6\boldsymbol{i}\, m$$

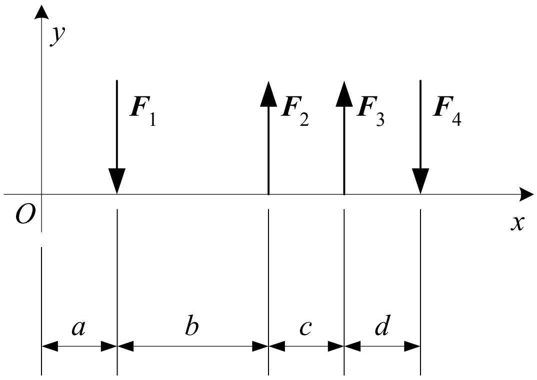
Az origóba redukált eredő nyomaték ($\boldsymbol{M}_o$): az egyes erők és az erőkhöz tartozó, az origóba mutató helyvektoruk vektoriális szorzatának összege.

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i)$$

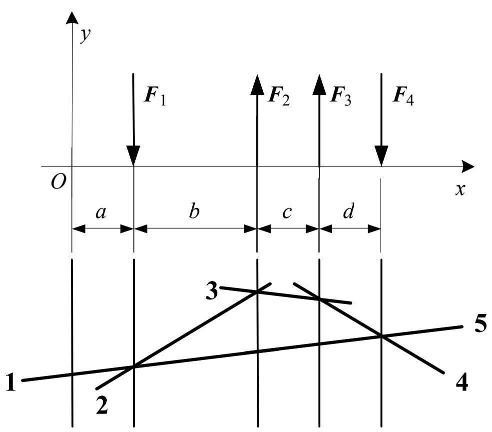
$$\boldsymbol{r}_{o1} \times \boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -10\boldsymbol{k}\; kNm$$
$$\boldsymbol{r}_{o2} \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 15\boldsymbol{k}\; kNm$$
$$\boldsymbol{r}_{o3} \times \boldsymbol{F}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 20\boldsymbol{k}\; kNm$$
$$\boldsymbol{r}_{o4} \times \boldsymbol{F}_4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -30\boldsymbol{k}\; kNm$$
$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum (\boldsymbol{r}_{oi} \times \boldsymbol{F}_i) = -5\boldsymbol{k}\; kNm$$

2.4.6 Párhuzamos hatásvonalú erőrendszer (egyensúlyi erőrendszer)

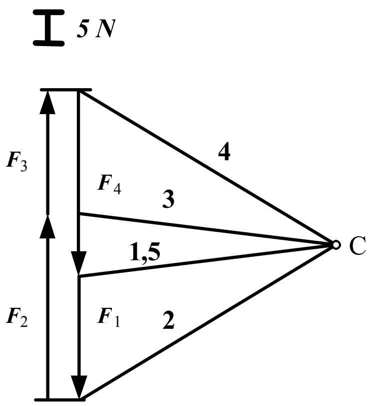
2.4.6/M1 Határozza meg az ábrán látható erőrendszer eredőjét számítással és szerkesztés segítségével!
Adatok:
$F_1 = 20\,N;\ F_2 = 30\,N;\ F_3 = 20\,N;\ F_4 = 30\,N;\ a = 1\,cm;\ b = 2\,cm;\ c = 1\,cm;\ d = 1\,cm.$



Kötél ábra:



Vektor ábra:



Szerkesztés menete:

A szerkesztés menete ugyan úgy történik, mint az előző feladatnál. A szerkesztésből jól látszik, hogy az eredő erő értéke zérus ($\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$). Az egyensúlyi erőrendszernél megfigyelhető, hogy a kezdő és az utolsó (záró) hatásvonal egybe esik (természetesen megfelelő szerkesztés mellett).

Megoldás számítással:

Az egyes erők vektorkoordinátás alakja:

$$\boldsymbol{F}_1 = 20\cdot(-\boldsymbol{j}) = -20\boldsymbol{j}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_2 = 30\cdot\boldsymbol{j} = 30\boldsymbol{j}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_3 = 20\cdot\boldsymbol{j} = 20\boldsymbol{j}\,N$$
$$\boldsymbol{F}_4 = 30\cdot(-\boldsymbol{j}) = -30\boldsymbol{j}\,N$$

Eredő erő meghatározása:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 = 0$$

Az egyes erőkhöz tartozó helyvektorok:

$$\boldsymbol{r}_{o1} = a\cdot\boldsymbol{i} = 1\boldsymbol{i}\,cm$$
$$\boldsymbol{r}_{o2} = (a+b)\cdot\boldsymbol{i} = 3\boldsymbol{i}\,cm$$
$$\boldsymbol{r}_{o3} = (a+b+c)\cdot\boldsymbol{i} = 4\boldsymbol{i}\,cm$$
$$\boldsymbol{r}_{o4} = (a+b+c+d)\cdot\boldsymbol{i} = 5\boldsymbol{i}\,cm$$

Az origóba redukált eredő nyomaték ($\boldsymbol{M}_o$): az egyes erők és az erőkhöz tartozó, az origóba mutató helyvektoruk vektoriális szorzatának összege.

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum(\boldsymbol{r}_{oi}\times\boldsymbol{F}_i)$$

$$\boldsymbol{r}_{o1}\times\boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \end{vmatrix} = -20\boldsymbol{k}\,Ncm$$

$$\boldsymbol{r}_{o2}\times\boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 90\boldsymbol{k}\,Ncm$$

$$\boldsymbol{r}_{o3}\times\boldsymbol{F}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \end{vmatrix} = 80\boldsymbol{k}\,Ncm$$

$$\boldsymbol{r}_{o4}\times\boldsymbol{F}_4 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & 0 \end{vmatrix} = -150\boldsymbol{k}\,Ncm$$

$$\boldsymbol{M}_o = \sum \boldsymbol{M}_{oi} = \sum(\boldsymbol{r}_{oi}\times\boldsymbol{F}_i) = 0$$

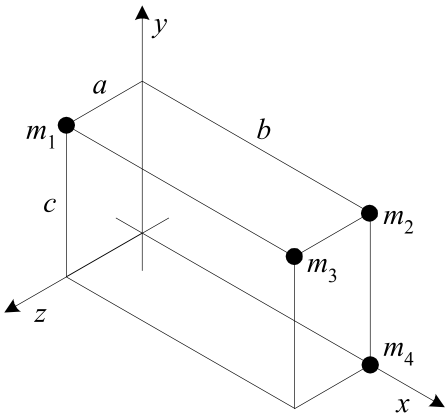
2.5 Tömegközéppont és súlypont helyzetének meghatározása

2.5.1 Tömegpontok tömegközéppontjának meghatározása

2.5.1/M1 Határozza meg az ábrán látható tömegpontrendszer tömegközéppontjának a helyét a megadott koordinátarendszerben!

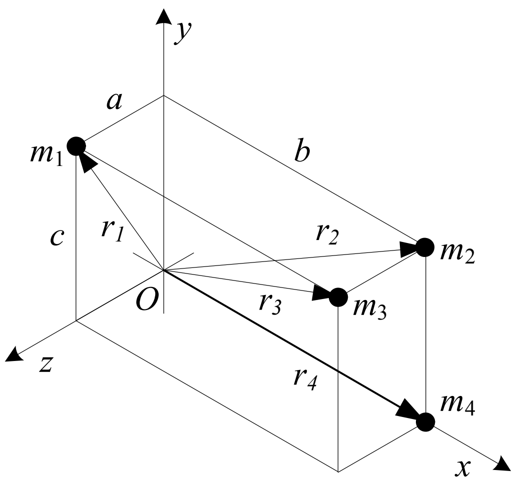
Adatok:

$$m_1 = 3\,kg;\ m_2 = 8\,kg;\ m_3 = 7\,kg;\ m_4 = 2\,kg;\ a = 50\,cm;\ b = 150\,cm;\ c = 100\,cm.$$



Megoldás:

Sokszor találkozunk olyan problémával, amikor egy pontrendszert vagy egy kiterjedt testet valamilyen szempontból pontszerűnek tekintünk és a rendszer egészét egyetlen, jellemző ponttal helyettesítjük. A rendszer mozgását ezzel úgy képzelhetjük el mintha a rendszer össztömege és az összes lendülete ebbe a pontba lenne összesűrítve. E pont neve tömegközéppont.



Az egyes helyvektorok felbonthatók koordinátáikra:

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1 + y_1 + z_1$$
$$\boldsymbol{r}_2 = x_2 + y_2 + z_2$$
$$\boldsymbol{r}_3 = x_3 + y_3 + z_3$$
$$\boldsymbol{r}_4 = x_4 + y_4 + z_4$$

A könnyebb áttekinthetőség érdekében táblázatba foglaljuk az ismert adatokat

		r_i		
i	m_i [kg]	x_{si} [cm]	y_{si} [cm]	z_{si} [cm]
1.	3	0	100	50
2.	8	150	100	0
3.	7	150	100	50
4.	2	150	0	0

A tömegközéppont helyvektorát (pozícióját) az alábbi összefüggés segítségével kapjuk meg:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 3 + 8 + 7 + 2 = 20kg$$

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i \cdot \boldsymbol{r}_i)}{m}$$

Oldjuk meg a feladatot az egyes helyvektorok felbontásával:

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{4}(m_i \cdot x_{si})}{m} = \frac{3 \cdot 0 + 8 \cdot 150 + 7 \cdot 150 + 2 \cdot 150}{20} = 127.5[cm]$$

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{4}(m_i \cdot y_{si})}{m} = \frac{3 \cdot 100 + 8 \cdot 100 + 7 \cdot 100 + 2 \cdot 0}{20} = 90[cm]$$

$$z_S = \frac{\sum_{i=1}^{4}(m_i \cdot z_{si})}{m} = \frac{3 \cdot 50 + 8 \cdot 0 + 7 \cdot 50 + 2 \cdot 0}{20} = 25[cm]$$

A tömegközéppont helyvektora:

$$\boldsymbol{r}_S = \begin{bmatrix} 127.5 \\ 90 \\ 25 \end{bmatrix} [cm]$$

Oldjuk meg a feladatot a helyvektorok felhasználásával:

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{4}(m_i \cdot r_i)}{m} = \frac{3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} + 8 \cdot \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 150 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{20} = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 300 \\ 150 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1200 \\ 800 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1050 \\ 700 \\ 350 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{20} =*$$

$$*= \frac{\begin{bmatrix} 2550 \\ 1800 \\ 500 \end{bmatrix}}{20} = \begin{bmatrix} 127.5 \\ 90 \\ 25 \end{bmatrix} [cm]$$

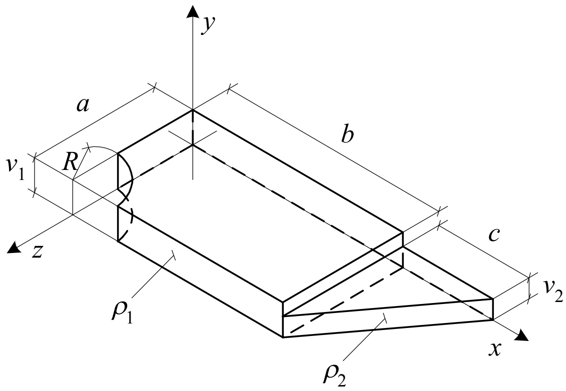
Jól látható, hogy a két végeredmény megegyezik. A különbség a két megoldási módszer között, hogy az elsőnél felbontottuk a helyvektorokat koordinátáikra és egyesével meghatároztuk a tömegpont koordinátáit. A második módszernél a már jól ismert mátrix műveleteket alkalmaztuk.

2.5.2 Inhomogén testek tömegközéppontjának meghatározása

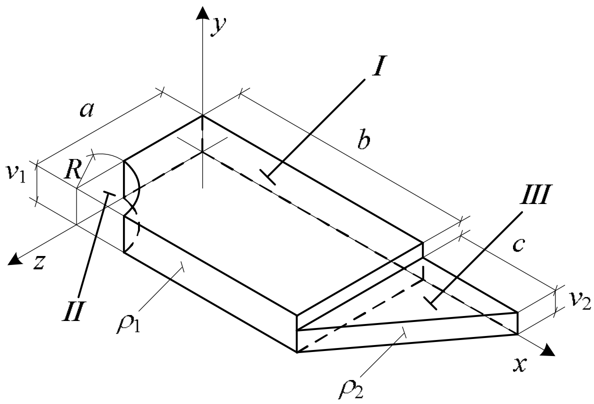
2.5.2/M1 Határozza meg az ábrán látható összetett alkatrész súlypontjának a helyét a megadott koordinátarendszerben!

Adatok:

$$a = 50\,mm;\ b = 70\,mm;\ c = 40\,mm;\ R = 20\,mm;$$
$$v_1 = 10\,mm;\ v_2 = 7\,mm;\ \rho_1 = 7800\,kg/m^3;\ \rho_2 = 9200\,kg/m^3.$$



Megoldás:



$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \cdot x_i}{m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \rho_i \cdot V_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{3} \rho_i \cdot V_i} = \frac{\sum_{i=1}^{3} \rho_i \cdot A_i \cdot v_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{3} \rho_i \cdot A_i \cdot v_i}$$

$$y_S = \frac{\sum_{i=1}^{3} \rho_i \cdot A_i \cdot v_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{3} \rho_i \cdot A_i \cdot v_i}$$

$$z_S = \frac{\sum_{i=1}^{3} \rho_i \cdot A_i \cdot v_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{3} \rho_i \cdot A_i \cdot v_i}$$

	$\rho_i\ [kg/m^3]$	$A_i\ [mm^2]$	$v_i\ [mm]$	$m_i\ [kg]$	$x_i\ [mm]$	$y_i\ [mm]$	$z_i\ [mm]$
I.	$\rho_1 = 7800$	$a \cdot b = 3500$	$v_1 = 10$	0.273	$\frac{b}{2} = 35$	$\frac{v_1}{2} = 5$	$\frac{a}{2} = 25$
II.	$-\rho_1 = -7800$	$\frac{R^4 \cdot \pi}{4} = 314.16$	$v_1 = 10$	-0.0245	$\frac{4R}{3\pi} = 8.488$	$\frac{v_1}{2} = 5$	$a - \frac{4R}{3\pi} = 41.51$
III.	$\rho_3 = 9200$	$\frac{a \cdot c}{4} = 1000$	$v_2 = 7$	0.0644	$b + \frac{c}{3} = 83.33$	$\frac{v_2}{2} = 3.5$	$\frac{a}{3} = 16.67$

$$x_S = \frac{0.273 \cdot 35 - 0.,0245 \cdot 8.488 + 0.0644 \cdot 83.33}{0.273 - 0.0245 + 0.0644} = 47.02mm$$

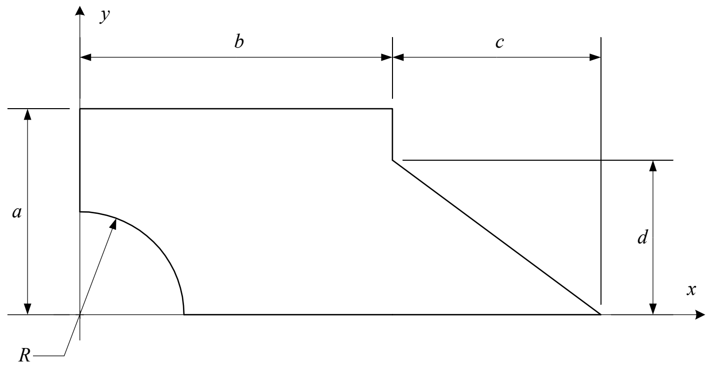
$$y_S = \frac{0.273 \cdot 5 - 0.0245 \cdot 5 + 0.0644 \cdot 3.5}{0.273 - 0.0245 + 0.0644} = 4.69mm$$

$$z_S = \frac{0.273 \cdot 25 - 0.0245 \cdot 41.51 + 0.0644 \cdot 16.67}{0.273 - 0.0245 + 0.0644} = 21.99mm$$

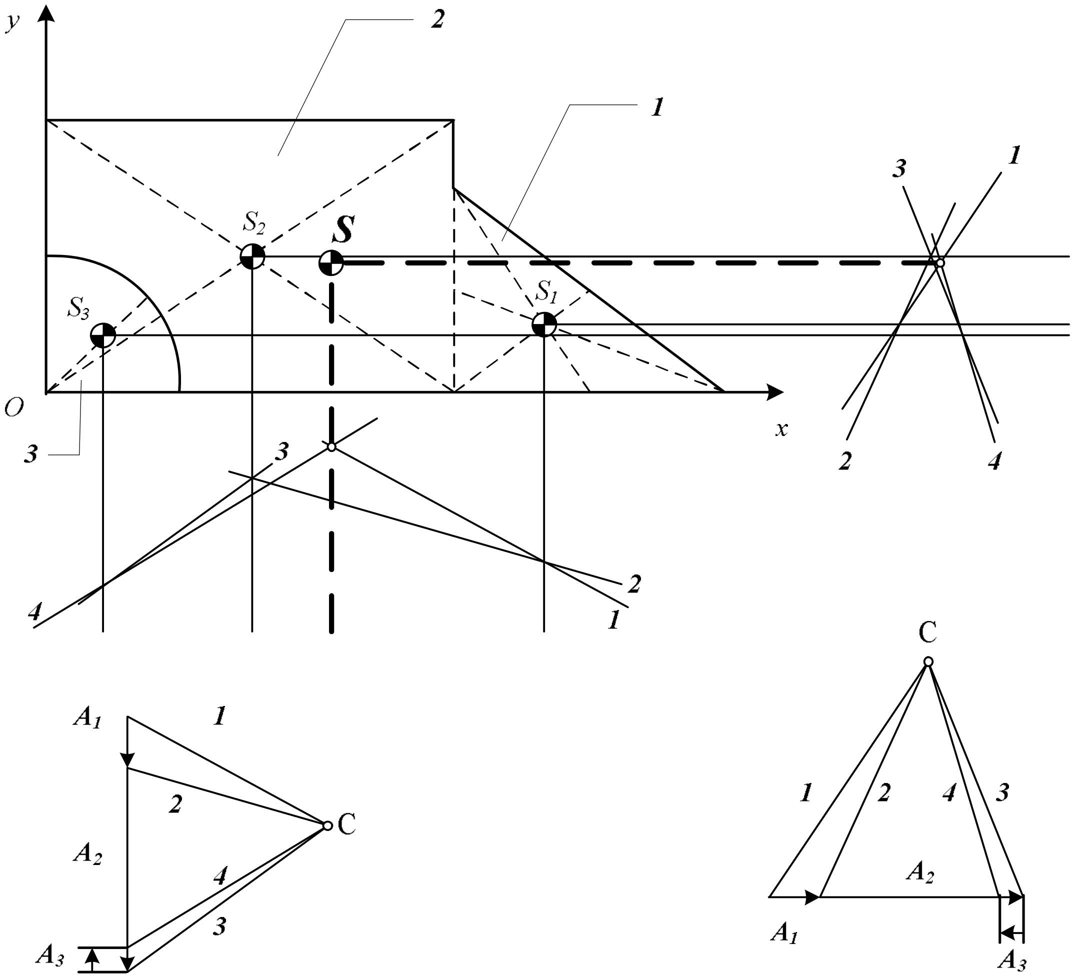
2.5.3 Síkidomok súlypontjának meghatározása

2.5.3/M1 Határozza meg az ábrán látható síkidom súlypontjának a helyét a megadott koordinátarendszerben számítás és szerkesztés segítségével!
Adatok:

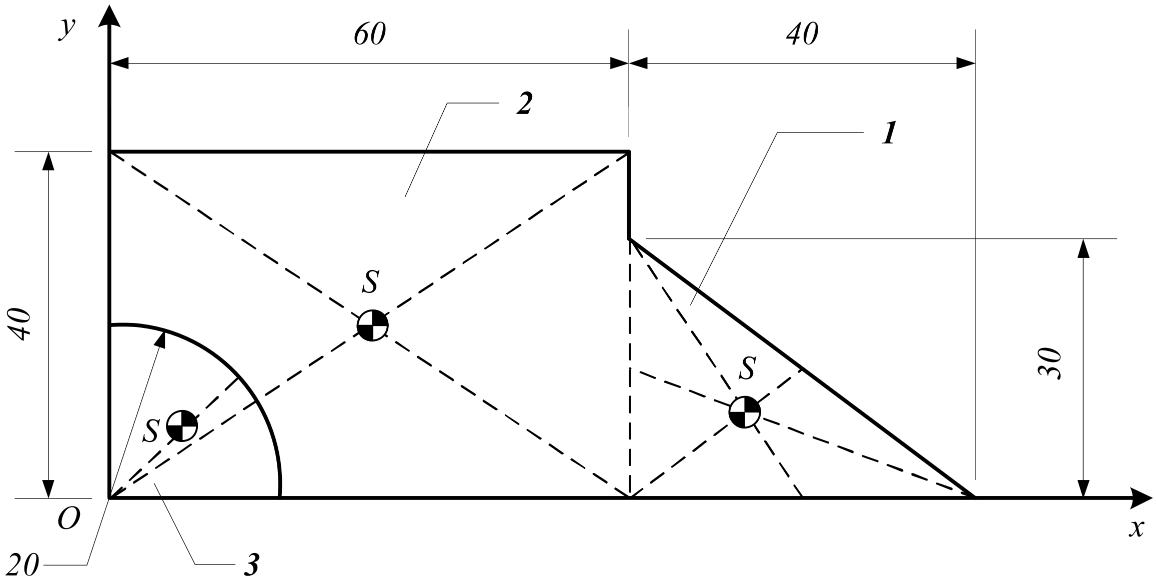
$$a = 40\,mm;\ b = 60\,mm;\ c = 40\,mm;\ d = 30\,mm;\ R = 20mm.$$



Megoldás szerkesztéssel:



Megoldás számítással:



Meghatározzuk az egyes rész elemek területét:

$$T_1 = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{40 \cdot 30}{2} = 600[mm^2] = 6[cm^2]$$

$$T_2 = a \cdot b = 60 \cdot 40 = 2400[mm^2] = 24[cm^2]$$

$$T_3 = \frac{r^2 \cdot \pi}{4} = \frac{20^2 \cdot \pi}{4} = 314[mm^2] = 3.14[cm^2]$$

Táblázatba foglaljuk az ismert adatokat:

i	$A_i\ [cm^2]$	$x_{si}\ [cm]$	$y_{si}\ [cm]$
1.	6	7.3	1
2.	24	3	2
3.	-3.14	0.6	0.6

Meghatározzuk a síkidom súlypontját:

$$x_S = \frac{\sum(A_i \cdot x_{si})}{\sum A_i} = \frac{6 \cdot 7.\dot{3} + 24 \cdot 3 - 3.14 \cdot 0{,}6}{6 + 24 - 3.14} = \frac{113.916}{26.86} = 4.24[cm] \approx 42.4[mm]$$

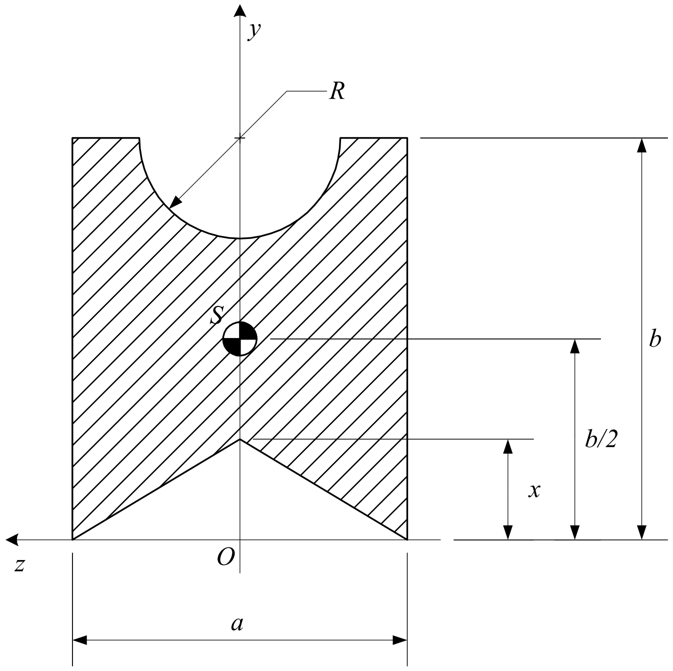
$$y_S = \frac{\sum(A_i \cdot y_{si})}{\sum A_i} = \frac{6 \cdot 1 + 24 \cdot 2 - 3.14 \cdot 0.6}{6 + 24 - 3.14} = \frac{52.116}{26.86} = 1.94[cm] = 19.4[mm]$$

2.5.4 Összetett síkidom valamely méretének a meghatározása, ha ismert a súlypont helyzete

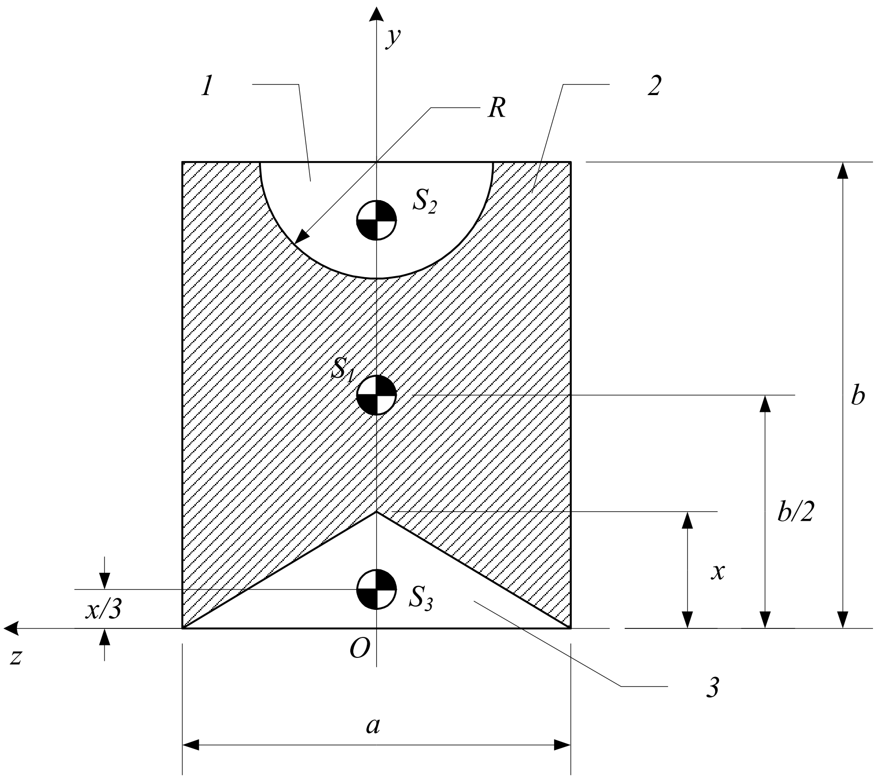
2.5.4/M1 Határozza meg, hogy mekkora x magasságú kivágást kell kialakítani az ábrán látható lemezalkatrész alsó részén, hogy az alkatrész súlypontja a megadott helyre kerüljön!

Adatok:

$$a = 50\ mm;\ b = 60\ mm;\ R = 15\ mm.$$



Felvesszük a lemezalkatrész súlypontjának meghatározásához szükséges geometriai adatokat:



Meghatározzuk az egyes rész elemek területét:

$$T_1 = a \cdot b = 50 \cdot 60 = 3000[mm^2] = 30[cm^2]$$

$$T_3 = \frac{r^2 \cdot \pi}{2} = \frac{15^2 \cdot \pi}{2} = 353.4[mm^2] = 3.534[cm^2]$$

$$T_1 = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{50 \cdot x}{2} = 25x[mm^2] = 0.25x[cm^2]$$

Táblázatba foglaljuk az ismert adatokat:

i	$A_i\ [cm^2]$	$y_{si}\ [cm]$
1.	30	3
2.	-3.534	5.3634
3.	-0.25x	x/3

Meghatározzuk a síkidom súlypontját:

$$y_S = \frac{\sum(A_i \cdot y_{si})}{\sum A_i} = \frac{30 \cdot 3 - 3.534 \cdot 5.3634 - 0.25x \cdot \frac{x}{3}}{30 - 3.534 - 0.25x} = 3[cm]$$

$$\Downarrow$$

$$71.046 - 0.8\dot{3}x^2 = 79.398 - 7.5x$$

$$0.8\dot{3}x^2 - 7.5x + 8.352 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7.5 \pm \sqrt{7.5^2 - 4 \cdot 0.8\dot{3} \cdot 8.352}}{2 \cdot 0.8\dot{3}} =$$

$$x_1 = \frac{7.5 + 5.33}{1.\dot{6}} = 8.02[cm]$$

$$x_2 = \frac{7.5 - 5.33}{1.\dot{6}} = 1.356[cm]$$

Beláthatjuk, hogy az x_1 érték értelmezhetetlen, mivel a háromszög magassága ebben az esetben nagyobb lenne, mint az egész lemezalkatrészé.

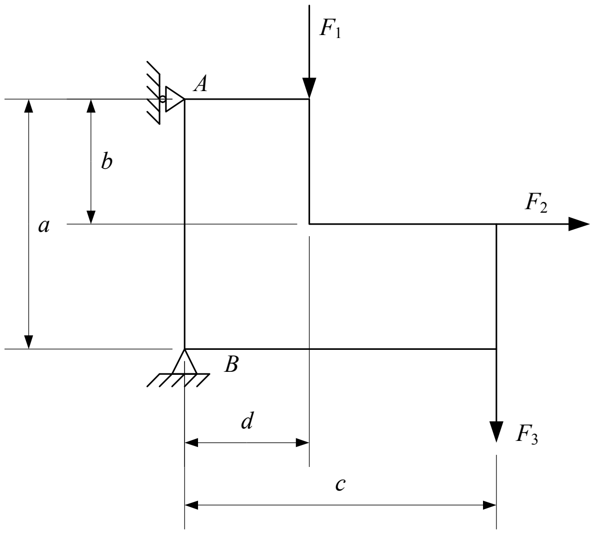
<u>A helyes megoldás az x_2 érték!</u>

2.6 Ideális kényszerek kényszererőinek meghatározása az egyensúlyi feltételek alapján

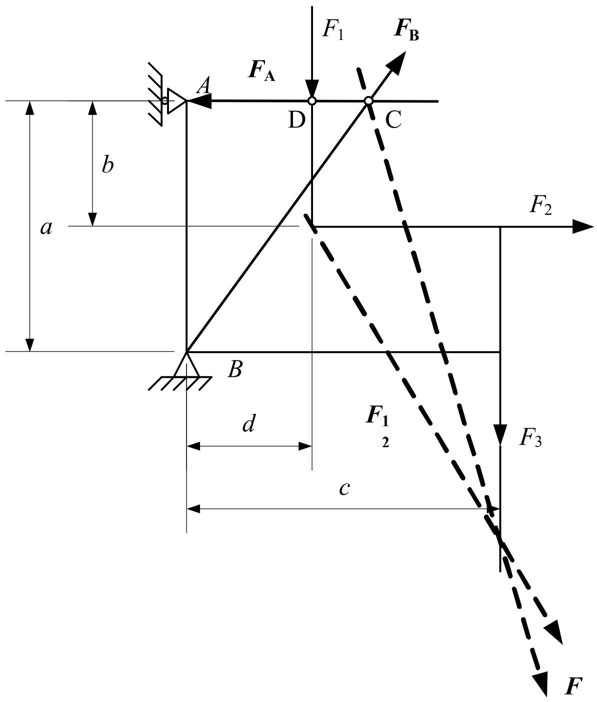
2.6.1 Kéttámaszú tartó (Metsződő hatásvonalú erőrendszer)

2.6.1/M1 Határozza meg számítás és szerkesztés segítségével az ábrán látható merev testet terhelő síkbeli erőrendszer hatására létrejövő támaszreakciókat!
Adatok:

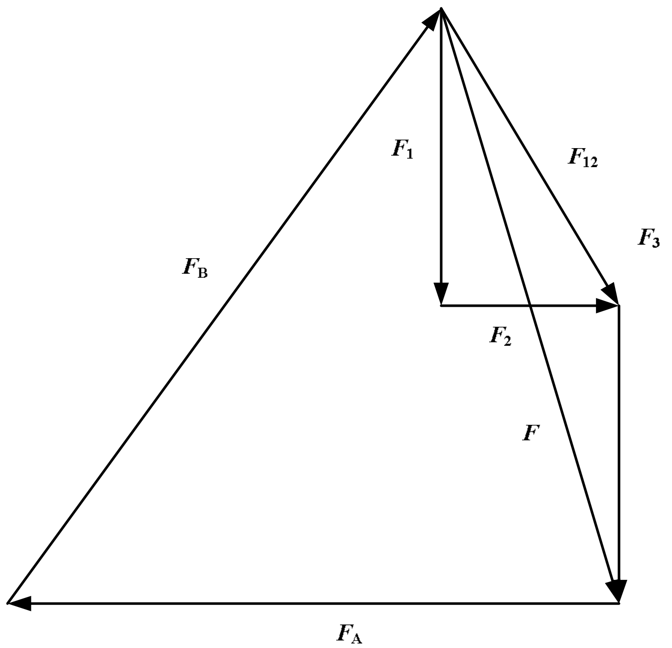
$F_1 = 10\,kN;\ F_2 = 5\,kN;\ F_3 = 10\,kN;\ a = 400\,mm;\ b = 200\,mm;\ c = 500\,mm;\ d = 200\,mm.$



Megoldás szerkesztéssel:



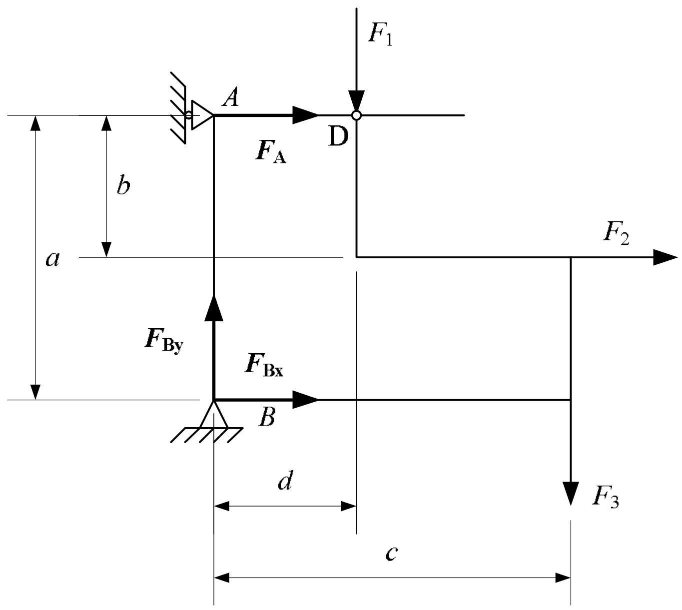
Vektor ábra:



Szerkesztés menete:

Első körben léptékhelyesen felmérjük az $\boldsymbol{F}_1$ és $\boldsymbol{F}_2$ erőket. Elkészítjük az $\boldsymbol{F}_{12}$ vektort, amit az $\boldsymbol{F}_1$ és $\boldsymbol{F}_2$ erők hatásvonalának metszéspontjába redukálunk. Ezután a vektorábrán elkészítjük az eredő $\boldsymbol{F}$ erőt az $\boldsymbol{F}_{12}$ és $\boldsymbol{F}_3$ erők segítségével. Ezután ezt felmérjük az $\boldsymbol{F}$ eredő erőt az $\boldsymbol{F}_{12}$ és $\boldsymbol{F}_3$ erők hatásvonalainak metszéspontjára.

Megoldás számítással:



Felírjuk az egyensúlyi nyomatéki egyenleteket az A és B kényszerre, illetve a D pontra!

$$\sum M_{Ai} = 0 = -F_1 \cdot d + F_2 \cdot b - F_3 \cdot c + F_{Bx} \cdot a$$

$$F_{Bx} = \frac{F_1 \cdot d - F_2 \cdot b + F_3 \cdot c}{a} = \frac{10 \cdot 0.2 - 5 \cdot 0.2 + 10 \cdot 0.5}{0.4} = 15\ kN\ (\rightarrow)$$

$$\sum M_{Di} = 0 = -F_3 \cdot (c-d) + F_2 \cdot b - F_{By} \cdot d + F_{Bx} \cdot a$$

$$F_{By} = \frac{-F_3 \cdot (c-d) + F_2 \cdot b + F_{Bx} \cdot a}{d} = \frac{-10 \cdot (0.5-0.2) + 5 \cdot 0.2 + 15 \cdot 0.4}{0.2} = 20\ kN\ (\uparrow)$$

$$F_B = \sqrt{{F_{Bx}}^2 + {F_{By}}^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25\ kN\ (\nearrow)$$

$$\sum M_{Bi} = 0 = -F_3 \cdot c - F_2 \cdot (a-b) - F_1 \cdot d - F_A \cdot a$$

$$F_A = \frac{-F_3 \cdot c - F_2 \cdot (a-b) - F_1 \cdot d}{a} = \frac{-10 \cdot 0.5 - 5 \cdot (0.4-0.2) - 10 \cdot 0.2}{0.4} = -20\ kN\ (\leftarrow)$$

Ellenőrzés:

$$\sum F_{xi} = -F_A + F_2 + F_{Bx} = -20 + 5 + 15 = 0\ \surd$$

$$\sum F_{yi} = 0 = -F_1 - F_3 + F_{By} = -10 - 10 + 20 = 0\ \surd$$

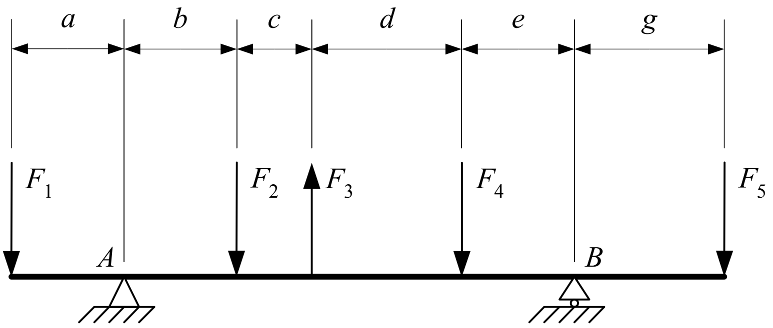
A kapott eredmények megfelelnek!

2.6.2 Kéttámaszú tartó (Párhuzamos hatásvonalú erőrendszer)

2.6.2/M1 Határozza meg számítás és szerkesztés segítségével az ábrán látható kéttámaszú tartó támaszaiban keletkező reakciókat!

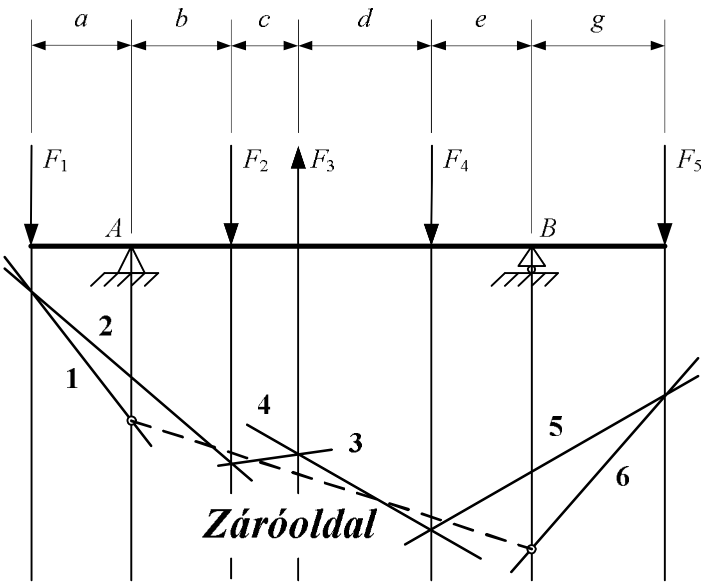
Adatok:

$$F_1 = 3kN;\ F_2 = 7\ kN;\ F_3 = 5\ kN;\ F_4 = 8\ kN;\ F_5 = 4\ kN;$$
$$a = 3\ m;\ b = 3\ m;\ c = 2\ m;\ d = 4\ m;\ e = 3\ m;\ g = 4\ m.$$

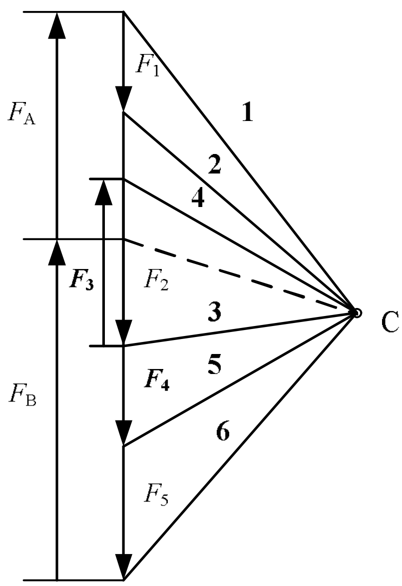


Megoldás szerkesztéssel:

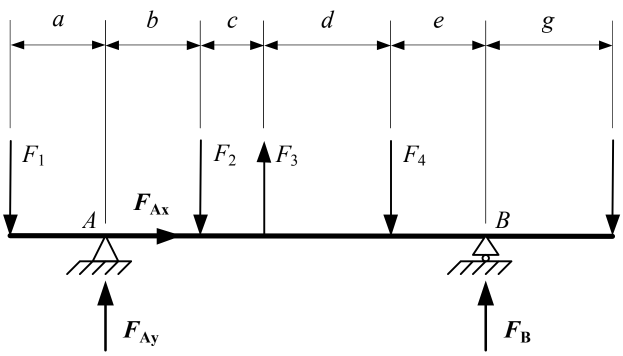
Kötél ábra:



Vektor ábra:



Megoldás számítással:



Felírjuk az egyensúlyi egyenleteket az A és B kényszerekre:

$$\sum M_{Ai} = 0 =$$

$$= F_1 \cdot a - F_2 \cdot b + F_3 \cdot (b+c) - F_4 \cdot (b+c+d) + F_B \cdot (b+c+d+e) - F_5 \cdot (b+c+d+e+g)$$

$$F_B = \frac{-F_1 \cdot a + F_2 \cdot b - F_3 \cdot (b+c) + F_4 \cdot (b+c+d) + F_5 \cdot (b+c+d+e+g)}{(b+c+d+e)}$$

$$F_B = \frac{-3 \cdot 3 + 7 \cdot 3 - 5 \cdot (3+2) + 8 \cdot (3+2+4) + 4 \cdot (3+2+4+3+4)}{(3+2+4+3)} = 10.25\ kN\ (\uparrow)$$

$$\sum M_{Bi} = 0 =$$

$$= -F_5 \cdot g + F_4 \cdot e - F_3 \cdot (e+d) + F_2 \cdot (e+d+c) - F_{Ay} \cdot (e+d+c+b) + F_1 \cdot (e+d+c+b+a)$$

$$F_{Ay} = \frac{-F_5 \cdot g + F_4 \cdot e - F_3 \cdot (e+d) + F_2 \cdot (e+d+c) + F_1 \cdot (e+d+c+b+a)}{(e+d+c+b)}$$

$$F_{Ay} = \frac{-4 \cdot 4 + 8 \cdot 3 - 5 \cdot (3+4) + 7 \cdot (3+4+2) + 3 \cdot (3+4+2+3+3)}{(3+4+2+3)} = 6.75\ kN\ (\uparrow)$$

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Ax}$$

Ellenőrzés:

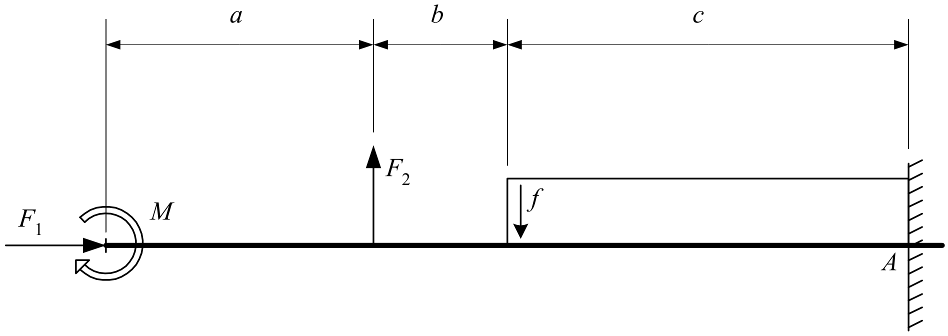
$$\sum F_{yi} = -F_1 + F_{Ay} - F_2 + F_3 - F_4 + F_B - F_5 = -3 + 6.75 - 7 + 5 - 8 + 10.25 - 4 = 0$$

2.6.3 Befogott tartó (Metsződő hatásvonalú erőrendszer)

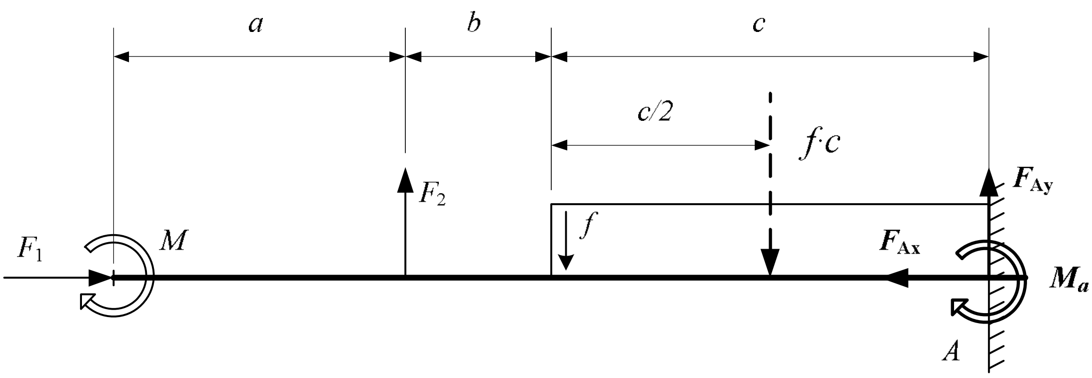
2.6.3/M1 Határozza meg számítás segítségével az ábrán látható befogott tartó kényszereiben keletkező reakciókat!

Adatok:

$$F_1 = 6\,N;\ F_2 = 12\,N;\ M = 2\,Nm;\ f = 1.5\,N/m;\ a = 4\,m;\ b = 2\,m;\ c = 6\,m.$$



Megoldás:



Felírjuk az „A” pontra a nyomatéki egyenletet:

$$\sum M_{Ai} = 0 = M_a + f \cdot \frac{c}{2} \cdot -F_2 \cdot (b + c) - M$$

$$M_a = -(f \cdot c) \cdot \frac{c}{2} \cdot +F_2 \cdot (b + c) + M = -(1{,}5 \cdot 6) \cdot \frac{6}{2} \cdot +12 \cdot (2 + 6) + 2 = 69\,Nm$$

$$\sum F_{xi} = F_1 - F_{Ax} = 0$$

$$F_{Ax} = F_1 \Rightarrow F_{Ax} = 6\,N(\leftarrow)$$

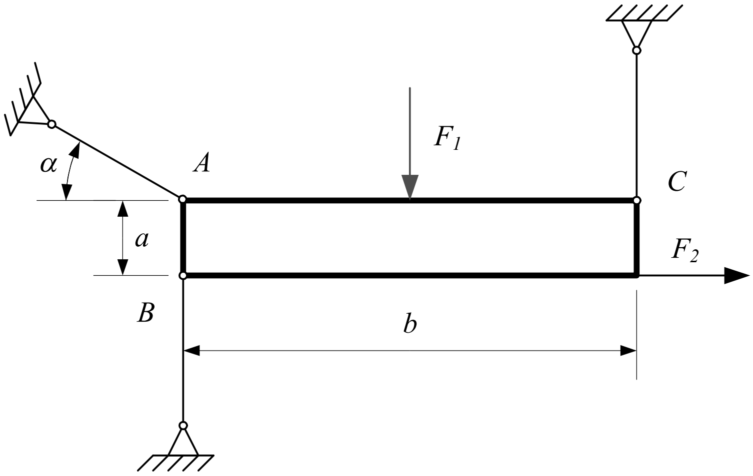
$$\sum F_{yi} = F_2 - f \cdot c + F_{Ay} = 0$$

$$F_{Ay} = f \cdot c - F_2 \Rightarrow F_{Ay} = 1{,}5 \cdot 6 - 12 = -3\,N(\downarrow)$$

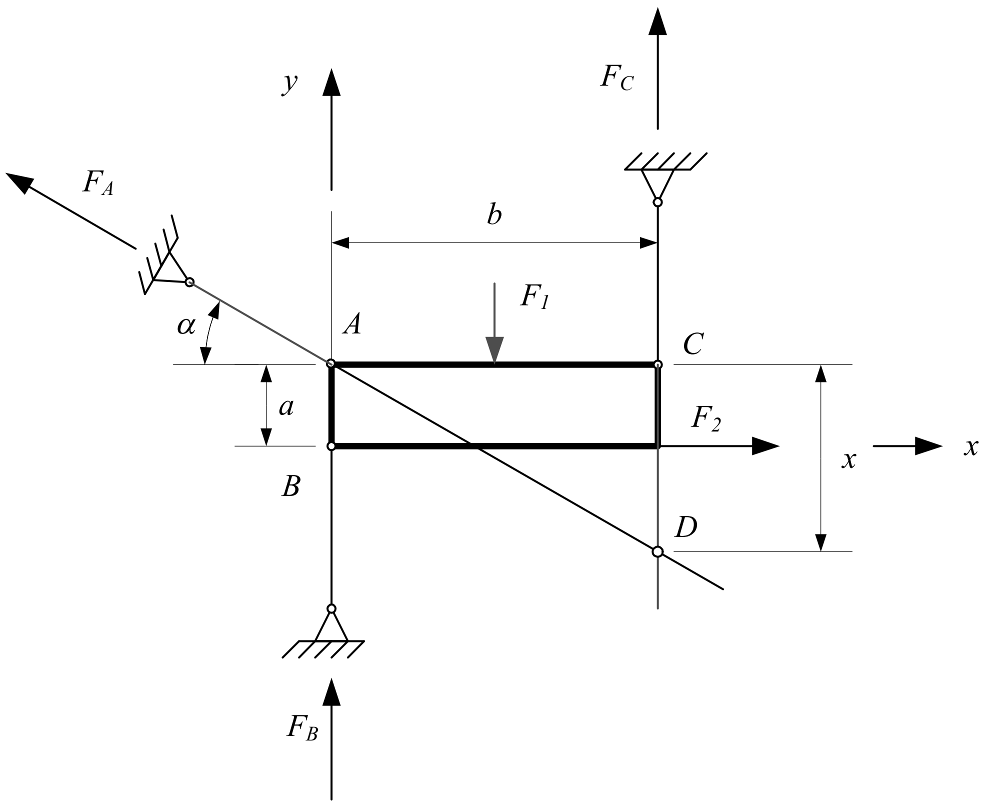
2.6.4 Rudas támasz (Metsződő hatásvonalú erőrendszer)

2.6.4/M1 Határozza meg számítás és szerkesztés segítségével az ábrán látható merev testet terhelő síkbeli erőrendszer hatására létrejövő támaszreakciókat!
Adatok:

$$F_1 = 8\,N;\; F_2 = 6\,N;\; a = 2\,m;\; b = 8\,m;\; \alpha = 30°.$$



Megoldás számítással:

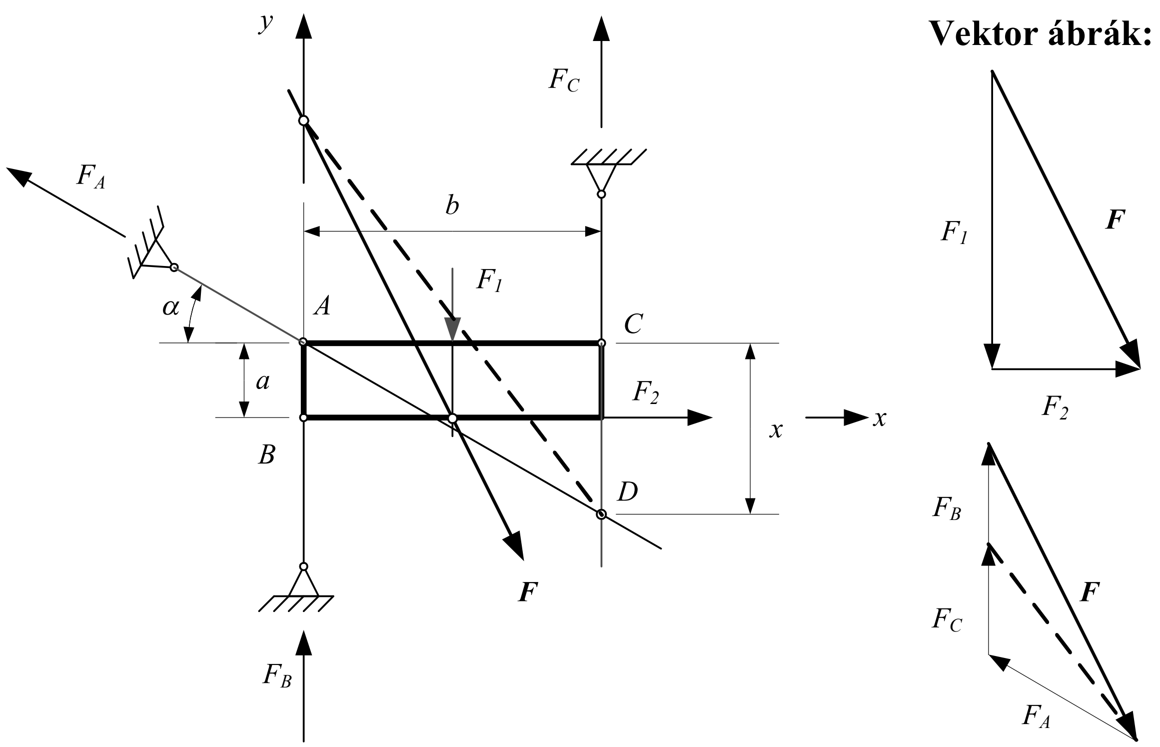


$$\sum M_{Ai} = 0 = -F_1 \cdot \frac{b}{2} + F_2 \cdot a + F_C \cdot b \Rightarrow F_C = \frac{6 \cdot 2 - 8 \cdot 4}{8} = 2.5N$$
$$\sum M_{Di} = 0 = F_B \cdot b - F_1 \cdot \frac{b}{2} + F_2 \cdot (x - a) \Rightarrow F_B = \frac{8 \cdot 4 - 6 \cdot (4.6188 - 2)}{8} = 2.0359N$$
$$x = b \cdot tg\alpha = 8 \cdot tg30^o = 4.6188m$$
$$\sum F_{xi} = 0 = -F_A \cdot cos\alpha + F_2 \Rightarrow F_A = \frac{F_2}{cos\alpha} = \frac{6}{cos30^o} = 6.9282N$$
$$\Downarrow$$
$$F_{Ay} = F_A \cdot sin\alpha = 3.4641N$$

Ellenőrzés:

$$\sum F_{yi} = F_{Ay} + F_C + F_B - F_1 = 3.4641 + 2.5 + 2.0359 - 8 = 0$$

Megoldás szerkesztéssel:

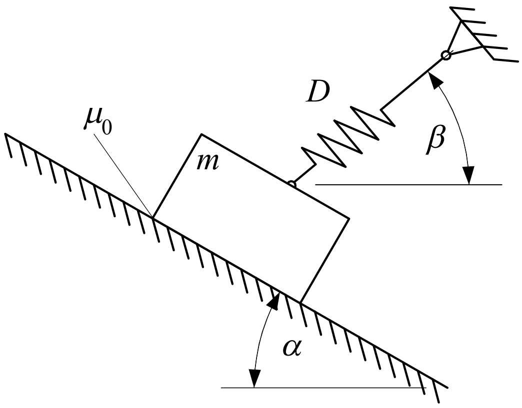


2.7 Súrlódásos támasz és alkalmazása egyszerű gépek esetében

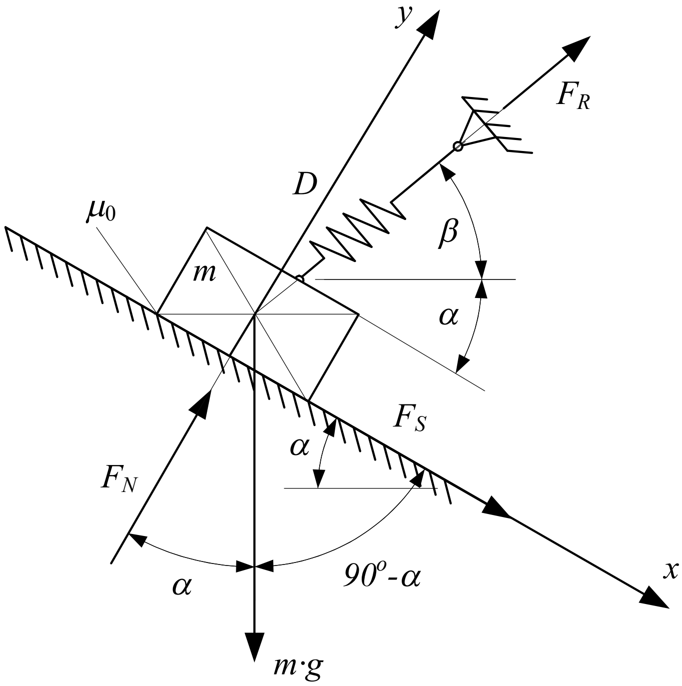
2.7/M1 Az érdes, α hajlásszögű lejtőre helyezett, pontszerűnek tekinthető m tömegű testhez *D* rugómerevségű, β hajlásszögű rugó csatlakozik. Határozza megszámítás és szerkesztés segítségével, hogy milyen határok között változhat a rugó deformációja ahhoz, hogy a test a lejtőn nyugalomban maradjon!

Adatok:

$$m = 50\,kg;\ D = 100\,N/mm;\ \mu_0 = 0.2;\ \alpha = 30°;\ \beta = 40°.$$



Vegyük fel a koordináta rendszert és az erők helyzetét:



Írjuk fel az egyensúlyi egyenleteket:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_S + F_R \cdot cos(\alpha+\beta) + mg \cdot cos(90^o - \alpha)$$
$$\sum F_{yi} = 0 = F_N + F_R \cdot cos(90 - \alpha - \beta) + mg \cdot cos(180^o - \alpha)$$
$$|F_S| \le \mu_o \cdot F_N$$
$$F_S = -F_R \cdot cos70^o - mg \cdot cos60^o$$
$$F_N = -F_R \cdot cos20^o - mg \cdot cos150^o$$

Ha $F_S > 0$

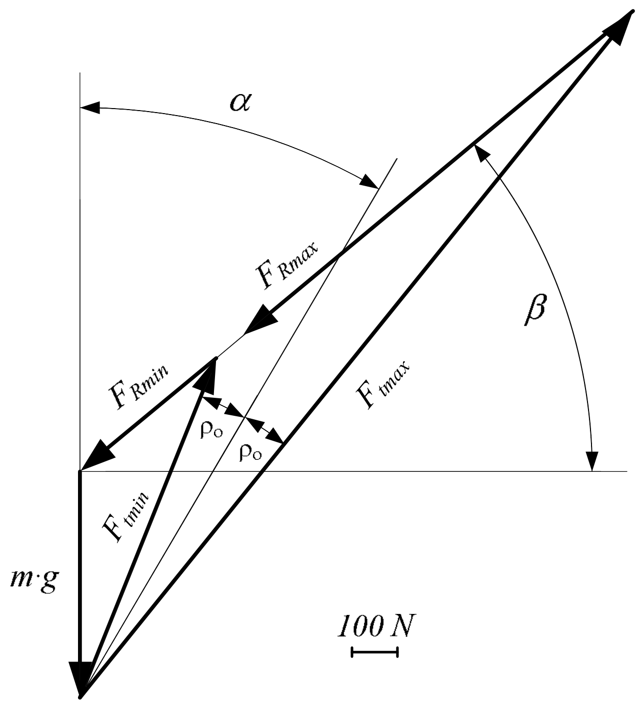
$$F_s \le \mu_0 \cdot F_n$$
$$-F_R \cdot cos70^o - mg \cdot cos60^o \le -F_R \cdot \mu_o \cdot cos20^o - mg \cdot \mu_o \cdot cos150^o$$
$$F_R \cdot cos70^o + mg \cdot cos60^o \ge F_R \cdot \mu_o \cdot cos20^o + mg \cdot \mu_o \cdot cos150^o$$
$$F_R \cdot (cos70^o - \mu_o \cdot cos20^o) \ge mg \cdot (\mu_o \cdot cos150^o - cos60^o)$$
$$F_R \ge mg \cdot \frac{(\mu_o \cdot cos150^o - cos60^o)}{(cos70^o - \mu_o \cdot cos20^o)} = -2143N = F_{Rmax}$$

Ha $F_S < 0$

$$-F_s \le \mu_0 \cdot F_n$$
$$F_R \cdot cos70^o - mg \cdot cos60^o \le -F_R \cdot \mu_o \cdot cos20^o - mg \cdot \mu_o \cdot cos150^o$$
$$F_R \cdot (cos70^o + \mu_o \cdot cos20^o) \le -mg \cdot (\mu_o \cdot cos150^o + cos60^o)$$
$$F_R \le -mg \cdot \frac{(\mu_o \cdot cos150^o + cos60^o)}{(cos70^o + \mu_o \cdot cos20^o)} = -302.5N = F_{Rmin}$$

$$\Delta l_{max} = \frac{F_{Rmax}}{D} = \frac{-2143}{100} = -21.43mm$$
$$\Delta l_{min} = \frac{F_{Rmin}}{D} = \frac{-302,5}{100} = -3.025mm$$

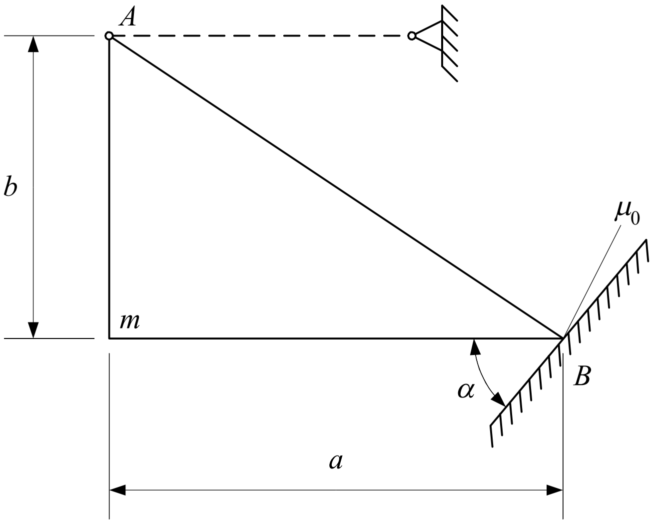
Megoldás szerkesztéssel:



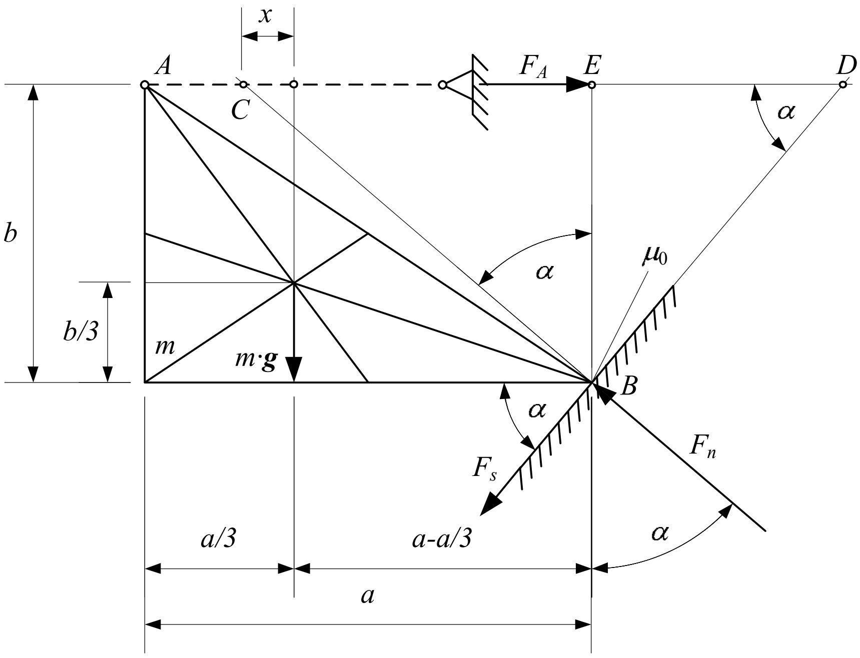
2.7/M2 Az ábrán látható m tömegű merev test A pontja vízszintes kötél segítségével van rögzítve, B pontja pedig α hajlásszögű, érdes felületre támaszkodik. Határozza megszámítás és szerkesztés segítségével, hogy minimum mekkora μ_0 nyugvó súrlódási tényező szükséges ahhoz, hogy a test egyensúlyban maradjon! Határozza meg egyensúly esetén a támaszreakciókat!

Adatok:

$$a = 60\,mm;\ b = 40\,mm;\ m = 15\,kg;\ \alpha = 50°.$$



Megoldás:



$$\sum_B M = 0 = -F_A \cdot b + mg \cdot \left(a - \frac{a}{3}\right)$$

$$F_A = \frac{mg \cdot \left(a - \frac{a}{3}\right)}{b} = \frac{15 \cdot 9.81 \cdot (60 - 20)}{40} = \underline{147.15N}$$

$$I. \sum_C M = 0 = -F_s \cdot \overline{BC} + mg \cdot \left[\overline{CE} - \left(a - \frac{a}{3}\right)\right]$$

$$II. \sum_D M = 0 = -F_n \cdot \overline{BD} + mg \cdot \left[\left(a - \frac{a}{3}\right) + \overline{ED}\right]$$

Meghatározzuk a vektorok hosszát:

$$cos\alpha = \frac{b}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{b}{cos\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{\overline{CE}}{b} \Rightarrow \overline{CE} = b \cdot tg\alpha$$

$$sin\alpha = \frac{b}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{b}{sin\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{b}{\overline{ED}} \Rightarrow \overline{ED} = \frac{b}{tg\alpha}$$

$$I. \quad 0 = -F_s \cdot \frac{b}{cos\alpha} + mg \cdot \left[b \cdot tg\alpha - \left(a - \frac{a}{3}\right)\right]$$

$$F_s = mg \cdot \frac{\left[b \cdot tg\alpha - \left(a - \frac{a}{3}\right)\right]}{b} \cdot cos\alpha$$

$$II. \quad 0 = -F_n \cdot \frac{b}{sin\alpha} + mg \cdot \left[\left(a - \frac{a}{3}\right) + \frac{b}{tg\alpha}\right]$$

$$F_n = mg \cdot \frac{\left[\left(a - \frac{a}{3}\right) + \frac{b}{tg\alpha}\right]}{b} \cdot sin\alpha$$

Ha $F_S > 0$

$$F_s \le \mu_0 \cdot F_n$$

$$mg \cdot \frac{\left[b \cdot tg\alpha - \left(a - \frac{a}{3}\right)\right]}{b} \cdot cos\alpha \le \mu_0 \cdot mg \cdot \frac{\left[\left(a - \frac{a}{3}\right) + \frac{b}{tg\alpha}\right]}{b} \cdot sin\alpha$$

$$\frac{mg \cdot \frac{\left[b \cdot tg\alpha - \left(a - \frac{a}{3}\right)\right]}{b} \cdot cos\alpha}{mg \cdot \frac{\left[\left(a - \frac{a}{3}\right) + \frac{b}{tg\alpha}\right]}{b} \cdot sin\alpha} \le \mu_0$$

$$\frac{\left[b \cdot tg\alpha - \left(a - \frac{a}{3}\right)\right]}{\left[\left(a - \frac{a}{3}\right) + \frac{b}{tg\alpha}\right]} \cdot \frac{cos\alpha}{sin\alpha} \le \mu_0$$

$$\frac{\left[b \cdot tg\alpha - \left(a - \frac{a}{3}\right)\right]}{tg\alpha \cdot \left[\left(a - \frac{a}{3}\right) + \frac{b}{tg\alpha}\right]} \le \mu_0$$

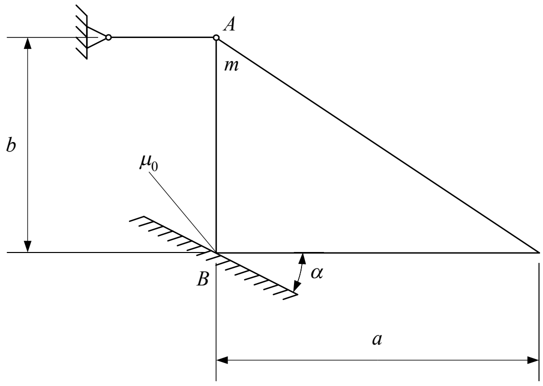
$$\frac{\left[40 \cdot tg50^0 - \left(60 - \frac{60}{3}\right)\right]}{tg50^0 \cdot \left[\left(60 - \frac{60}{3}\right) + \frac{40}{tg50^0}\right]} \le \mu_0$$

$$\underline{0.12 \le \mu_{0min}}$$

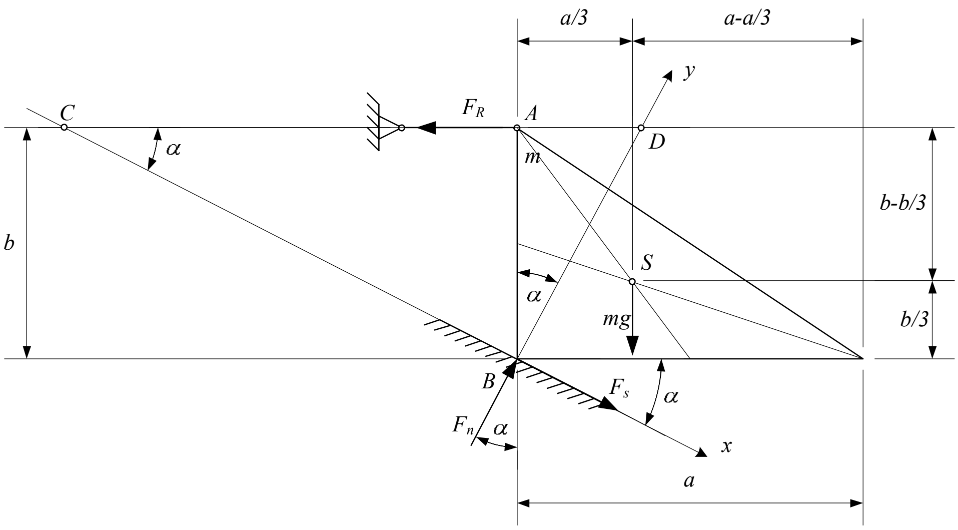
2.7/M3 Az ábrán látható m tömegű merev test A pontja vízszintes rúd segítségével van rögzítve, B pontja pedig α hajlásszögű, érdes felületre támaszkodik. Határozza megszámítás és szerkesztés segítségével, hogy milyen határok között változhat a lejtő α szöge ahhoz, hogy a test egyensúlyban maradjon!

Adatok:

$$a = 600\,mm;\ b = 400\,mm;\ m = 50\,kg;\ \mu_0 = 0.3.$$



Megoldás:



$$\sum_C M = 0 = F_n \cdot l_{BC} - mg \cdot [l_{AC} + a/3]$$

$$\sum_D M = 0 = -F_s \cdot l_{BD} + mg \cdot [l_{AD} - a/3]$$

$$|F_s| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

Meghatározzuk a vektorok hosszát:

$$sin\alpha = \frac{b}{l_{BC}} \Rightarrow l_{BC} = \frac{b}{sin\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{b}{l_{AC}} \Rightarrow l_{AC} = \frac{b}{tg\alpha}$$

$$cos\alpha = \frac{b}{l_{BD}} \Rightarrow l_{BD} = \frac{b}{cos\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{l_{AD}}{b} \Rightarrow l_{AD} = b \cdot tg\alpha$$

$$F_n = mg \cdot \frac{\left[l_{AC} + \frac{a}{3}\right]}{l_{CB}} = mg \cdot \frac{\left[\frac{b}{tg\alpha} + \frac{a}{3}\right]}{\frac{b}{sin\alpha}} = mg \cdot \left[cos\alpha + \frac{a \cdot sin\alpha}{3b}\right]$$

$$F_s = -mg \cdot \frac{\left[l_{AD} - \frac{a}{3}\right]}{l_{BD}} = -mg \cdot \frac{\left[b \cdot tg\alpha - \frac{a}{3}\right]}{\frac{b}{cos\alpha}} = -mg \cdot \left[sin\alpha - \frac{a \cdot cos\alpha}{3b}\right]$$

Ha $F_S > 0$

$$F_s \le \mu_0 \cdot F_n$$

$$-mg \cdot \left[sin\alpha - \frac{a \cdot cos\alpha}{3b}\right] \le \mu_0 \cdot mg \cdot \left[cos\alpha + \frac{a \cdot sin\alpha}{3b}\right] \qquad / \quad \cdot \frac{3b}{mg}$$

$$[3b \cdot sin\alpha - a \cdot cos\alpha] \le \mu_0 \cdot [3b \cdot cos\alpha + a \cdot sin\alpha] \qquad / \quad \cdot \frac{1}{cos\alpha}$$

$$-3b \cdot tg\alpha + a \le \mu_0 \cdot 3b + \mu_0 \cdot a \cdot tg\alpha$$

$$\frac{a - \mu_0 \cdot 3b}{\mu_0 \cdot a + 3b} \le tg\alpha$$

$$arctg\left(\frac{a - \mu_0 \cdot 3b}{\mu_0 \cdot a + 3b}\right) \le \alpha$$

$$\alpha_{min} = 9.866^o$$

Ha $F_S < 0$

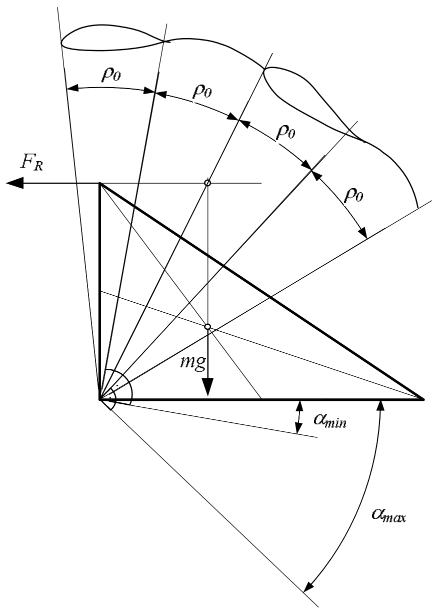
$$-F_s \le \mu_0 \cdot F_n$$

$$3b \cdot tg\alpha - a \le \mu_0 \cdot 3b + \mu_0 \cdot a \cdot tg\alpha$$

$$tg\alpha \le \frac{a + \mu_0 \cdot 3b}{3b - \mu_0 \cdot a}$$

$$\alpha \le arctg\left(\frac{a + \mu_0 \cdot 3b}{3b - \mu_0 \cdot a}\right)$$

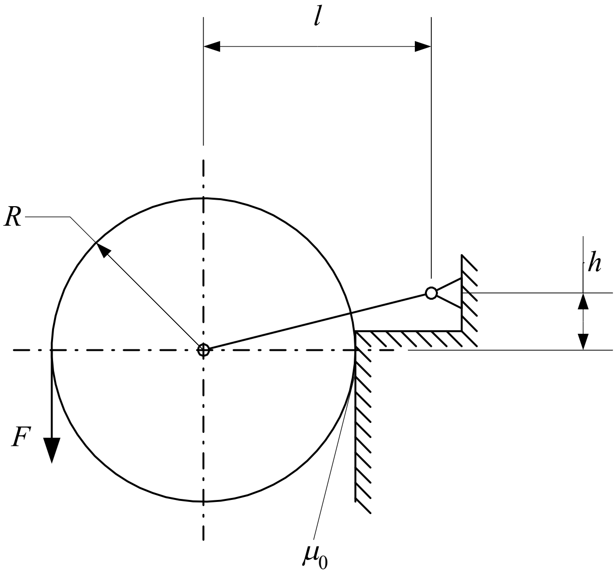
$$\alpha_{max} = 43.26^o$$



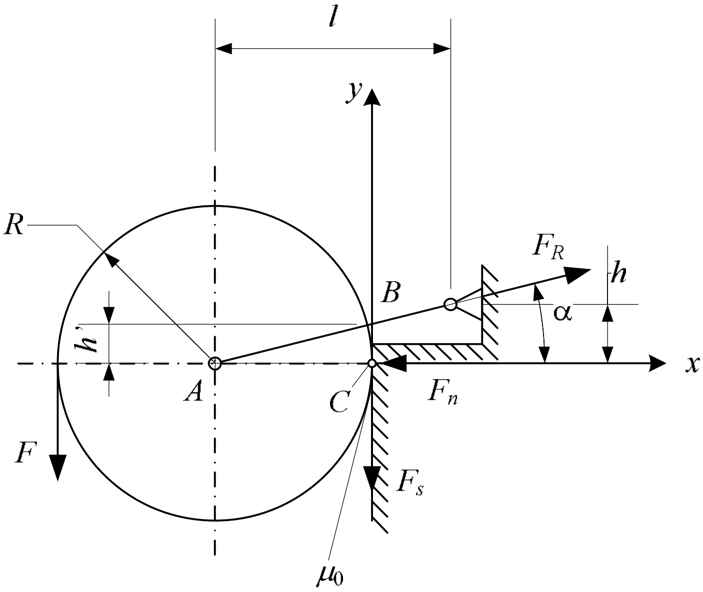
2.7/M4 Egy súlytalannak tekinthető, R sugarú hengert az ábrán látható módon egy rúd segítségével érdes fal mellé függesztettünk. A henger jobb oldala az érdes falra támaszkodik, a bal oldalán pedig egy F, érintőirányú erő hat. Határozza megszámítás és szerkesztés segítségével, hogy a megadott adatok mellett egyensúlyban van-e a henger! Határozza meg a függesztőrúdban ébredő erőt is!

Adatok:

$$R = 20\,mm;\; h = 7.5\,mm;\; l = 30\,mm;\; F = 50\,N;\; \mu_0 = 0.15.$$



Megoldás:



$$I.\quad \sum_A M = 0 = F \cdot R - F_s \cdot R$$

$$II.\quad \sum_B M = 0 = F \cdot 2R - F_n \cdot h'$$

$$III.\quad |F_s| \leq \mu_0 \cdot F_n$$

$$I.\quad F_s = F$$

$$II.\quad F_n = F \cdot \frac{2R}{h'} \qquad\qquad \frac{h}{l} = \frac{h'}{R} \to h' = \frac{R \cdot h}{l}$$

$$F_n = F \cdot \frac{2l}{h}$$

Mivel $F > 0 \to |F_s| = F_s = F$

$$III.\quad F \le \mu_0 \cdot F \cdot \frac{2l}{h}$$

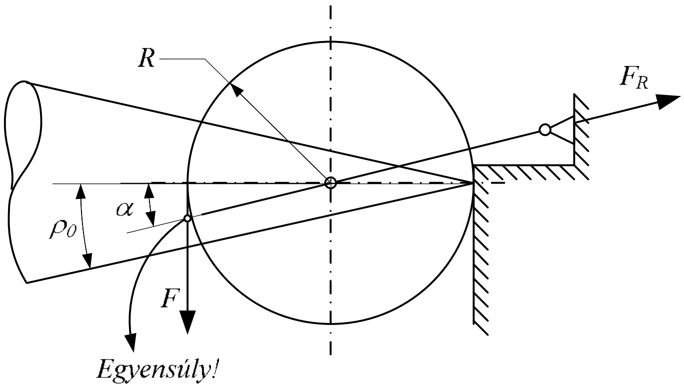
$$\frac{h}{l} \le 2 \cdot \mu_0 \qquad \frac{7.5}{30} = 0.25 < 2 \cdot 0.15 = 0.3 \to \text{Egyensúly!}$$

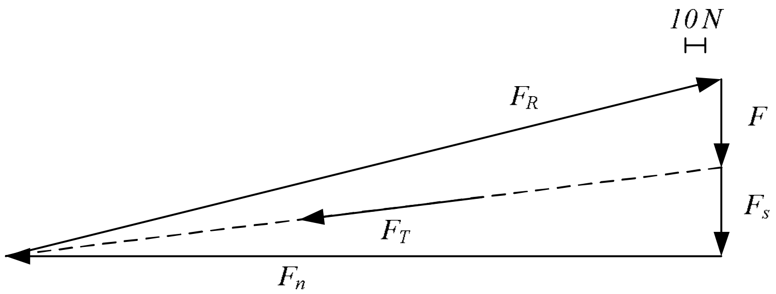
$$\frac{tg\alpha}{tg\rho_0} \le 2$$

$$IV.\quad \sum_c M = 0 = F \cdot 2R - F_R \cdot R \cdot sin\alpha$$

$$F_R = F \cdot \frac{2}{sin\alpha} \qquad\qquad \alpha = arctg\frac{h}{l} = 14.04^o$$

$$F_R = 50 \cdot \frac{2}{sin14.04^o} = 412.31N$$

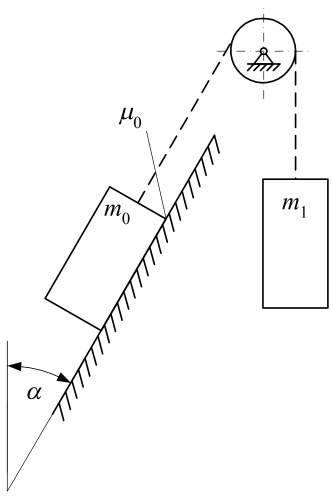




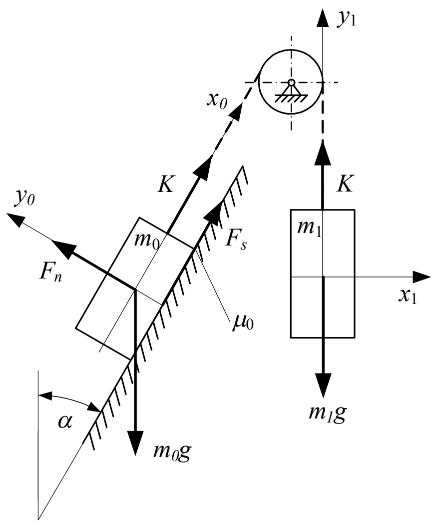
2.7/M5 Az m_0 tömegű test az ábrán látható módon egy érdes felületű lejtőn helyezkedik el. Ehhez a testhez egy ellenállás nélkül elforduló kötélkorongon átvetett kötél segítségével egy másik, m_1 tömegű test csatlakozik. Határozza meg, hogy milyen határok között változhat a tömegek m_1/m_0 aránya ahhoz, hogy a rendszer egyensúlyban maradjon!

Adatok:

$$\alpha = 30°;\ \mu_0 = 0{,}2;\ g = 9.81\, m/s^2.$$



Megoldás:



$$\sum F_{yi} = 0 = K - m_1 \cdot g$$

I. $\quad K = m_1 \cdot g$

$$\sum F_{x0i} = 0 = K + F_s - m_0 \cdot g \cdot cos\alpha$$

II. $\quad F_s = m_0 \cdot g \cdot cos\alpha - K$

$$\sum F_{y0i} = 0 = F_n - m_0 \cdot g \cdot sin\alpha$$

III. $\quad F_n = m_0 \cdot g \cdot sin\alpha$

IV. $\quad |F_s| \leq \mu_0 \cdot F_n$

Ha $F_s > 0$,

$$F_s \leq \mu_0 \cdot F_n$$
$$m_0 \cdot g \cdot cos\alpha - m_1 \cdot g \leq \mu_0 \cdot m_0 \cdot g \cdot sin\alpha$$
$$m_0 \cdot cos\alpha - \mu_0 \cdot m_0 \cdot sin\alpha \leq m_1$$
$$cos\alpha - \mu_0 \cdot sin\alpha \leq \frac{m_1}{m_0}$$
$$0.766 \leq \frac{m_1}{m_0}$$

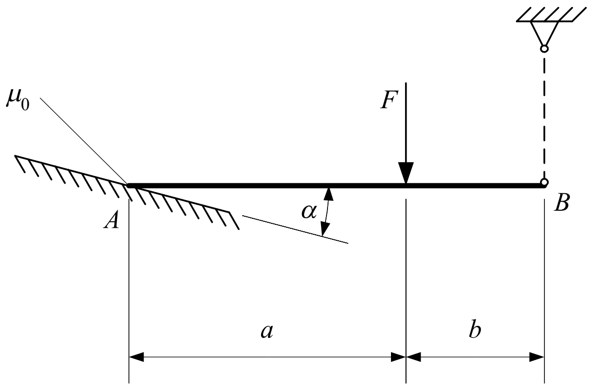
Ha $F_s < 0$,

$$-F_s \le \mu_0 \cdot F_n$$
$$-m_0 \cdot g \cdot cos\alpha + m_1 \cdot g \le \mu_0 \cdot m_0 \cdot g \cdot sin\alpha$$
$$m_1 \le m_0 \cdot cos\alpha + \mu_0 \cdot m_0 \cdot sin\alpha$$
$$\frac{m_1}{m_0} \le cos\alpha + \mu_0 \cdot sin\alpha$$
$$\frac{m_1}{m_0} \le 0.966$$

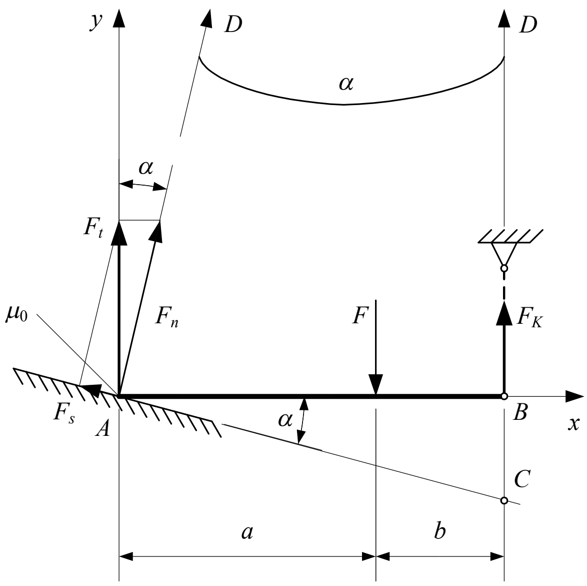
2.7/M6 A súlytalannak tekinthető AB rúd baloldali vége érdes felületre támaszkodik, a jobboldali pedig egy kötél segítségével van felfüggesztve. A rudat a megadott helyen F nagyságú erő terheli. Határozza meg szerkesztés és számítás segítségével, hogy minimum mekkora μ_0 nyugvó súrlódási tényezőre van szükség a rúd egyensúlyához! Határozza meg szerkesztés és számítás segítségével, hogy mekkora kötélerő és támaszerő keletkezik egyensúly esetén!

Adatok:

$$a = 40\ cm;\ b = 20\ cm;\ F = 2\ kN;\ \alpha = 15°.$$

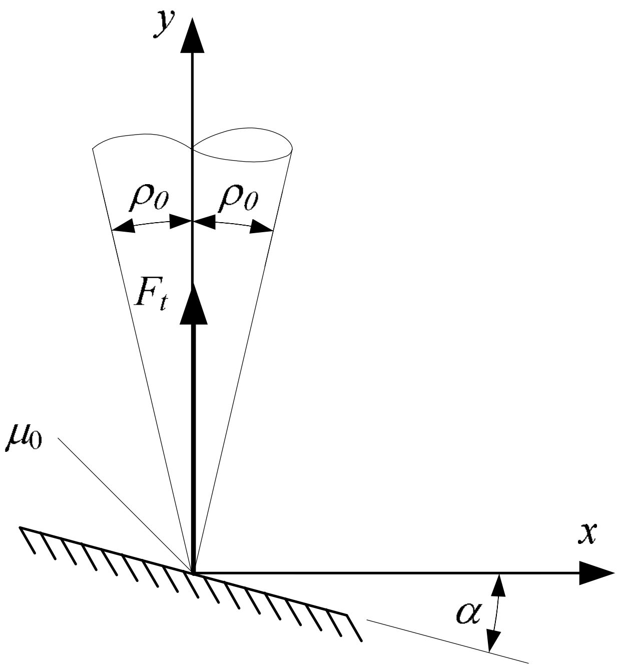


Megoldás:



Szerkesztéssel:

$$F \amalg F_K \Rightarrow F \amalg F_t$$



$$\rho_{0min} = \alpha$$
$$\mu_{0min} = tg\rho_{0min} = tg\alpha = 0.2679$$

Számítással:

I. $$\sum_C M = 0 = F \cdot b - F_n \cdot \overline{AC} \Rightarrow F_n = F \cdot cos\alpha \cdot \frac{a}{a+b}$$

II. $$\sum_D M = 0 = F \cdot b - F_s \cdot \overline{AD} \Rightarrow F_n = F \cdot sin\alpha \cdot \frac{a}{a+b}$$

Meghatározzuk a vektorok hosszát:

$$cos\alpha = \frac{a+b}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{a+b}{cos\alpha}$$
$$sin\alpha = \frac{a+b}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{a+b}{sin\alpha}$$

Mivel a szerkesztésből ismert a szándékolt elmozdulás iránya, így: $F_s \le \mu_0 \cdot F_n$

$$F \cdot sin\alpha \cdot \frac{a}{a+b} \le \mu_0 \cdot F \cdot cos\alpha \cdot \frac{a}{a+b}$$
$$\mu_0 \ge \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \mu_{0min} \to \mu_{0min} = tg\alpha = 0.2679$$

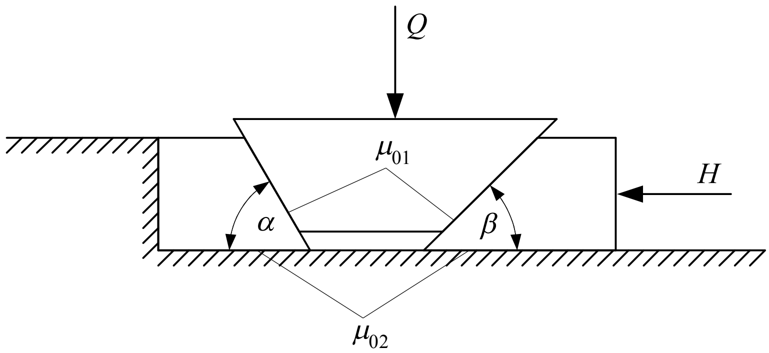
Határozza meg szerkesztés és számítás segítségével, hogy mekkora kötélerő és támaszerő keletkezik egyensúly esetén! (A szerkesztést nem közöljük, mivel könnyen belátható és felrajzolható.)

$$\sum_B M = 0 = F \cdot b - F_t \cdot (a+b) \Rightarrow F_t = F \cdot \frac{b}{a+b} = 666.7N$$
$$\sum_A M = 0 = F_K \cdot (a+b) - F \cdot a \Rightarrow F_K = F \cdot \frac{a}{a+b} = 1333.3N$$

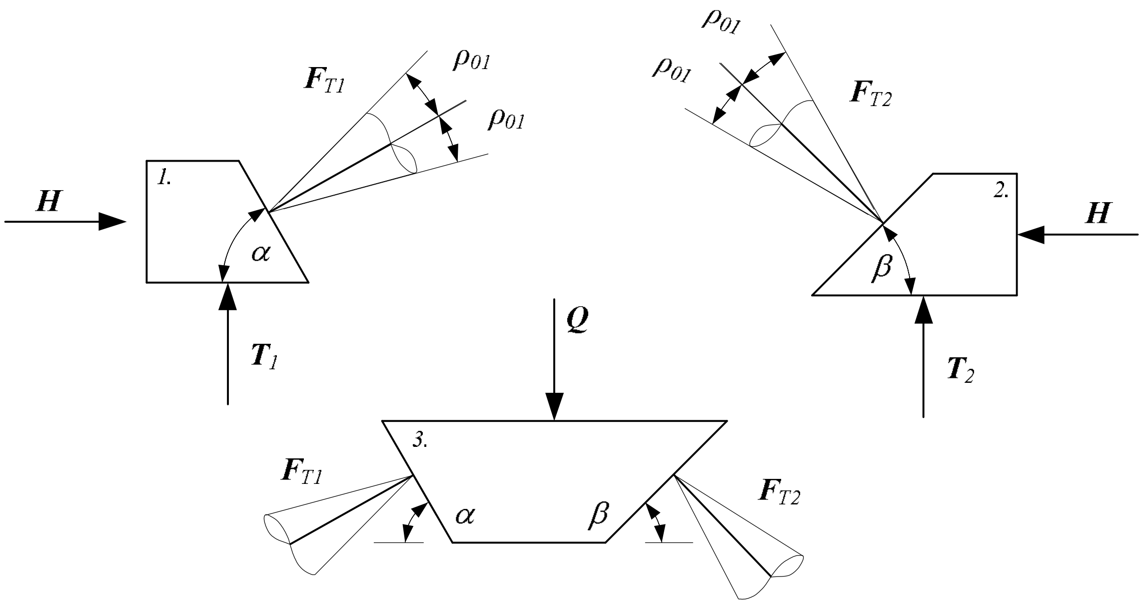
2.7/M7 Az ábrán látható három ékből álló rendszer két szélső tagja súrlódásmentes felületre támaszkodik. A középső tagot Q nagyságú függőleges erő, míg a jobboldali tagot H nagyságú vízszintes erő terheli. Határozza meg, hogy a megadott adatok mellett milyen határok között változhat Q értéke az ékek egyensúlya esetén!

Adatok:

$$H = 50\,N;\ \alpha = 60°;\ \beta = 45°;\ \mu_{01} = 0.3;\ \mu_{02} = 0.$$



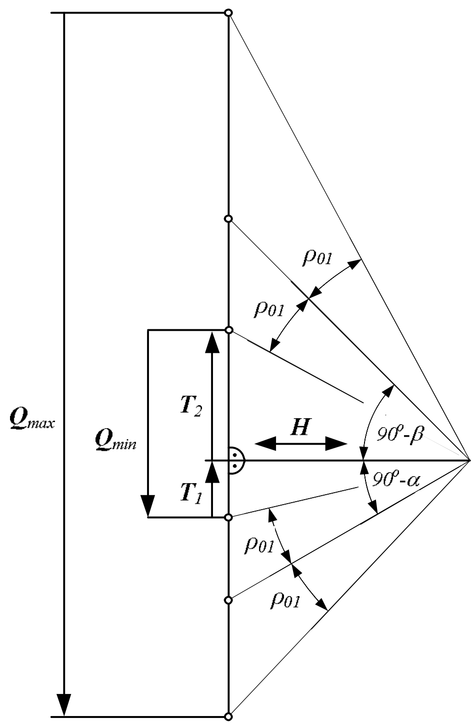
Megoldás:



$$\rho_{01} = arctg\mu_{01} = 16.7^o$$

$$Q_{min} = H \cdot [tg(90^o - \alpha - \rho_{01}) + tg(90^o - \beta - \rho_{01})]$$
$$Q_{min} = H \cdot [tg(90^o - 60^o - 16.7^o) + tg(90^o - 45^o - 16.7^o)] = 38.74N$$

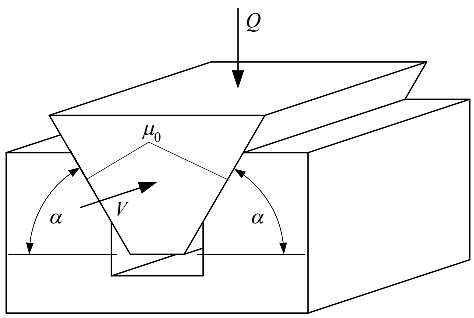
$$Q_{max} = H \cdot [tg(90^o + \alpha - \rho_{01}) + tg(90^o + \beta - \rho_{01})]$$
$$Q_{max} = H \cdot [tg(90^o + 60^o - 16.7^o) + tg(90^o + 45^o - 16.7^o)] = 145.92N$$



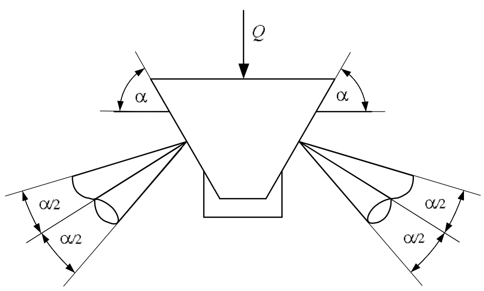
2.7/M8 Határozza meg az ábrán látható ék vezetékirányú elmozdításához szükséges V erő nagyságát, ha az ék terhelése Q, valamint az ék és a horony felületei között a nyugvó súrlódási tényező μ_0!

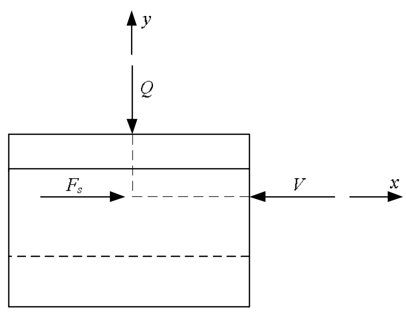
Adatok:

$$Q = 5\,kN;\ \alpha = 60°;\ \mu_0 = 0.05.$$



Megoldás:





Egyensúlyi feltétel:

$$\text{I.} \quad \sum F_{xi} = 0 = -V + 2 \cdot F_s$$

$$\text{II.} \quad \sum F_{yi} = 0 = -Q + 2 \cdot F_n \cdot sin(\alpha/2)$$

$$\text{III.} \quad |F_s| \leq \mu_o \cdot F_n$$

$$\downarrow$$

$$\frac{V}{2} \leq Q \cdot \frac{\mu_o}{2 \cdot sin(\alpha/2)}$$

$$V \leq 5 \cdot \frac{0{,}05}{sin30^o}[kN]$$

$$\downarrow$$

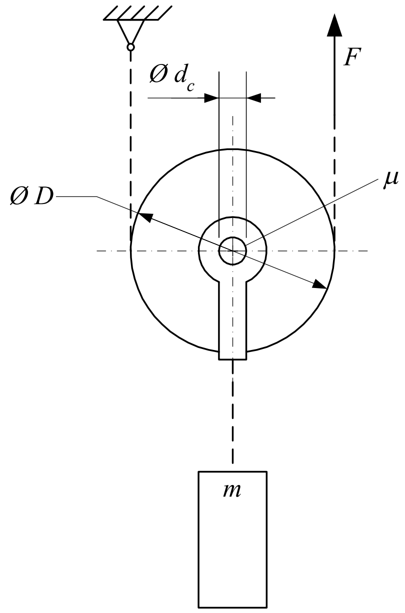
$$V > 500[N]$$

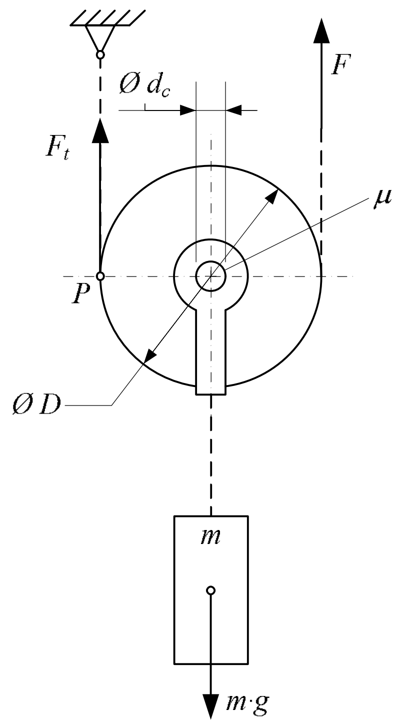
Az összefüggések felírása és levezetése után belátható, hogy az ék vezetékirányú elmozdításához nagyobb, mint 500*N* erőhatás szükségeltetik.

2.8 Csapsúrlódás, gördülési ellenállás, kötélsúrlódás figyelembe vétele merev test egyensúlyánál

2.8/M1 Határozza meg az ábrán látható mozgócsiga esetében a teher állandó sebességű emeléséhez és süllyesztéséhez szükséges F erő nagyságát!
Adatok:

$$D = 300\,mm;\ d_c = 40\,mm;\ m = 100\,kg;\ \mu = 0.1.$$





Egyensúlyi feltételek:

$$\text{I.} \quad |M_c| \leq F_t \cdot r = F_t \cdot r_c \cdot sin\rho = F_t \cdot \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho$$

$$\text{II.} \quad \sum M_{Pi} = 0 = M_c - mg \cdot \frac{D}{2} + F \cdot D$$

$$M_c = mg \cdot \frac{D}{2} - F \cdot D$$

$$\text{III.} \quad mg = F_t$$

a) Ha > 0 $\left[M_c \leq F_t \cdot \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho\right]$

$$mg \cdot \frac{D}{2} - F \cdot D \leq mg \cdot \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho$$

$$mg \cdot \left(\frac{D}{2} - \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho\right) \leq F \cdot D$$

$$mg \cdot \frac{\left(\frac{D}{2} - \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho\right)}{D} \leq F$$

$574.18N \leq F$ [F_{min} – süllyesztéshez]

$tg\rho = \mu$
$\rho = arctg\mu$
$\rho = 11.3°$

b) Ha < 0 $\left[-M_c \leq F_t \cdot \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho\right]$

$$F \cdot D - mg \cdot \frac{D}{2} \leq mg \cdot \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho$$

$$F \cdot D \leq mg \cdot \left(\frac{d_c}{2} \cdot sin\rho + \frac{D}{2}\right)$$

$$F \leq mg \cdot \frac{\left(\frac{d_c}{2} \cdot sin\rho + \frac{D}{2}\right)}{D}$$

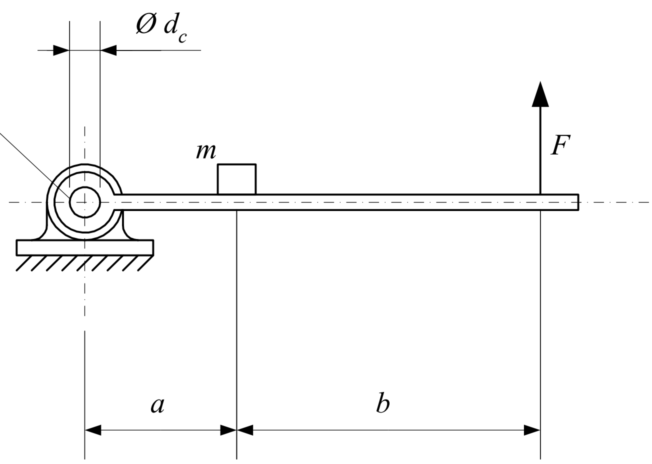
$F \leq 603.02N$ [F_{max} – emeléshez]

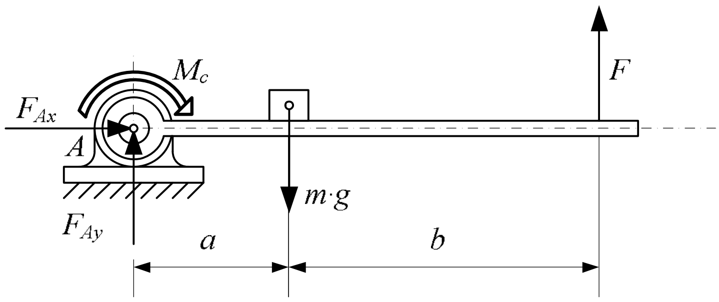
$tg\rho = \mu$
$\rho = arctg\mu$
$\rho = 11.3°$

2.8/M2 Határozza meg az ábrán látható egykarú emelő esetében a teher állandó sebességű emeléséhez és süllyesztéséhez szükséges F erő nagyságát!

Adatok:

$$a = 200\,mm;\ b = 400\,mm;\ d_c = 40\,mm;\ m = 100\,kg;\ \mu = 0.1.$$





Egyensúlyi feltételek:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Ax}$$
$$\sum F_{yi} = 0 = F_{Ay} - mg + F$$
$$F_{Ay} = mg - F$$
$$\sum M_{Ai} = 0 = M_c - mg \cdot a + F(a+b)$$
$$M_c = mg \cdot a - F(a+b)$$

a) Ha > 0 $\left[M_c \leq F_A \cdot \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho\right]$

$$mg \cdot a - F \cdot (a+b) \leq (mg - F) \cdot \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho$$
$$mg \cdot \left(a - \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho\right) \leq F \cdot \left((a+b) - \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho\right)$$
$$mg \cdot \frac{\left(a - \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho\right)}{\left((a+b) - \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho\right)} \leq F$$
$$324.82N \leq F \quad [F_{min} - \text{süllyesztéshez}]$$

$$tg\rho = \mu$$
$$\rho = arctg\mu$$
$$\rho = 5.71°$$
$$F_{Ay} = F_A$$

b) Ha < 0 $\left[-M_c \leq F_A \cdot \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho\right]$

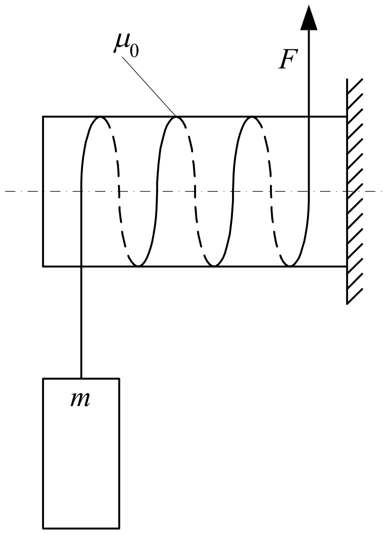
$$F \cdot (a+b) - mg \cdot a \leq (mg - F) \cdot \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho$$
$$F \leq mg \cdot \frac{\left(a + \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho\right)}{\left((a+b) + \frac{d_c}{2} \cdot sin\rho\right)}$$
$$F \leq 329.16N \quad [F_{max} - \text{emeléshez}]$$

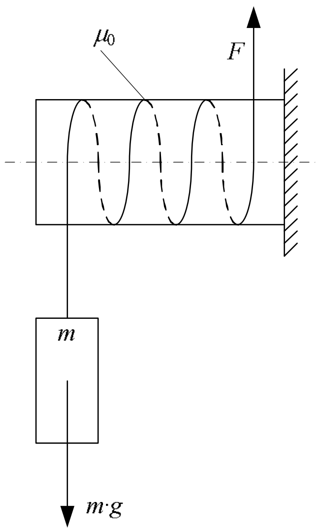
$$tg\rho = \mu$$
$$\rho = arctg\mu$$
$$\rho = 5.71°$$
$$F_{Ay} = F_A$$

2.8/M3 Az ábrán látható m tömegű testet tartó kötél egy rögzített tengelyű henger köré van csévélve. A kötél menetszáma a hengeren n, a kötél és a henger közötti nyugvó súrlódási tényező értéke μ_0. Határozza meg a kötél végét terhelő F erő két határértékét ahhoz, hogy a kötél még ne csússzon meg a henger palástján!

Adatok:

$$m = 100\,kg;\; n = 3;\; \mu_0 = 0.15.$$





Felfelé elmozdulás határhelyzete:

$$F_{max} \cdot e^{-\mu_0 \cdot \hat{\alpha}} \leq m \cdot g$$

Lefelé elmozdulás határhelyzete:

$$m \cdot g \leq F_{min} \cdot e^{\mu_0 \cdot \hat{\alpha}}$$
$$\hat{\alpha} = n \cdot 2\pi = 6\pi$$

I. $F_{max} \leq \dfrac{m \cdot g}{e^{-\mu_0 \cdot \hat{\alpha}}} = \dfrac{100 \cdot 9.81}{e^{-0,15 \cdot 6\pi}} = 16581N$

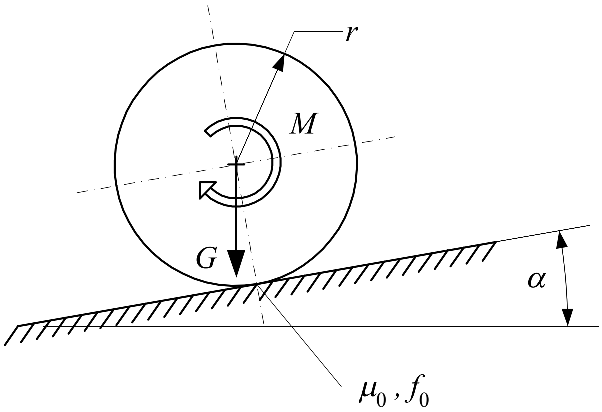
II. $\dfrac{m \cdot g}{e^{\mu_0 \cdot \hat{\alpha}}} \leq F_{min}$

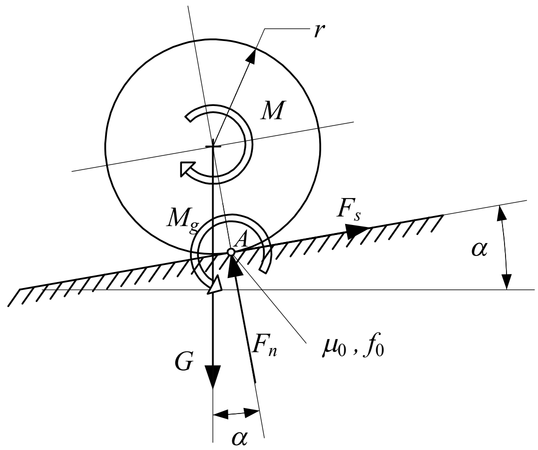
$$\frac{m \cdot g}{e^{\mu_0 \cdot \hat{\alpha}}} = \frac{100 \cdot 9.81}{e^{0,15 \cdot 6\pi}} = 58.04N$$

2.8/M4 Határozza meg, hogy az érdes felületű, α hajlásszögű emelkedőre helyezett G súlyú, r sugarú kerék tengelyét maximum mekkora nagyságú M nyomaték terhelheti, ha a kerék és a talaj közötti nyugvó súrlódási tényező μ_0, a gördülési ellenállás karja pedig f_0 és tudjuk, hogy a kerék nyugalomban van!

Adatok:

$$r = 200\,mm;\ G = 5\,kN;\ \alpha = 10°;\ \mu_0 = 0.3;\ f_0 = 1.5\,cm.$$





Egyensúlyi feltételek:

$$\text{I.}\qquad |M_g| \le f_0 \cdot F_n$$

$$\text{II.}\qquad \sum F_{yi} = 0 = F_n - G \cdot cos\alpha$$

$$F_n = G \cdot cos\alpha$$

$$\text{III.}\qquad \sum M_{Ai} = 0 = -M + M_g + G \cdot sin\alpha \cdot r$$

$$M_g = M - G \cdot sin\alpha \cdot r$$

a) Ha $M_g > 0$ $[M_g \le f_0 \cdot F_n]$

$$M - G \cdot sin\alpha \cdot r \le f_0 \cdot G \cdot cos\alpha$$

$$M \le G \cdot (f_0 \cdot cos\alpha + sin\alpha \cdot r)$$

$$M \le 247.51 Nm \quad [\boldsymbol{M}_{max}]$$

b) Írjuk fel az egyensúlyt biztosító további egyenleteket!

$$\text{IV.}\qquad |Fs| \le \mu_0 \cdot F_n$$

$$\text{V.}\qquad \sum F_{xi} = 0 = F_s - G \cdot sin\alpha$$

$$F_s = G \cdot sin\alpha$$

$$G \cdot sin\alpha \le \mu_0 \cdot G \cdot cos\alpha \qquad tg\alpha = 0.176$$

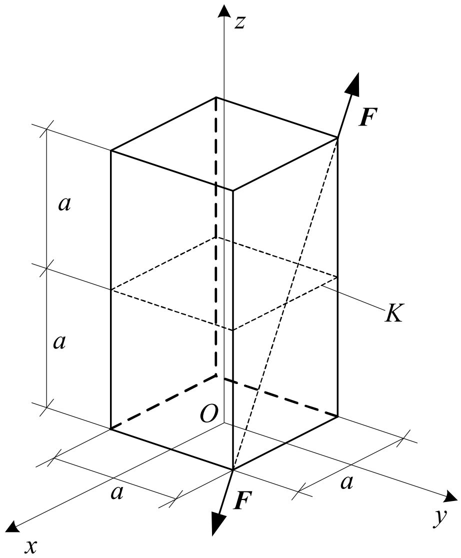
$$tg\alpha \le \mu_0 [tg\rho_0] \qquad tg\rho_0 = 0.3$$

$$\alpha \le \rho_0 \qquad \alpha < \rho_0$$

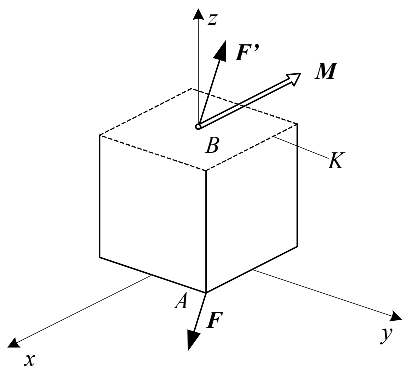
2.9 Rudak igénybevételeinek meghatározása

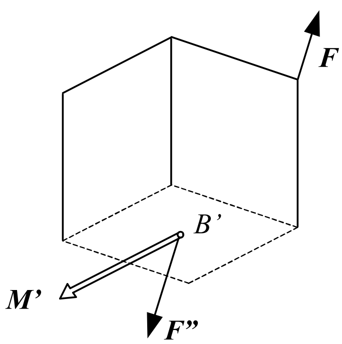
2.9/M1 Az ábrán látható négyzet alapú hasábot a megadott egyensúlyi erőrendszer terheli. Határozza meg a bejelölt K keresztmetszet igénybevételeit!
Adatok:

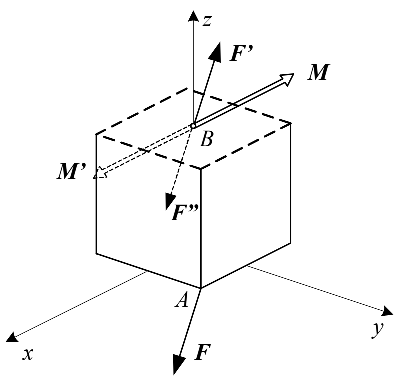
$$a = 40\,mm;\ F = 50\,N.$$



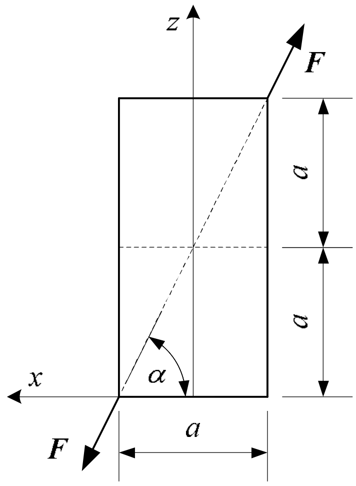
Megoldás:
Vizsgáljuk meg a „K" keresztmetszetet!







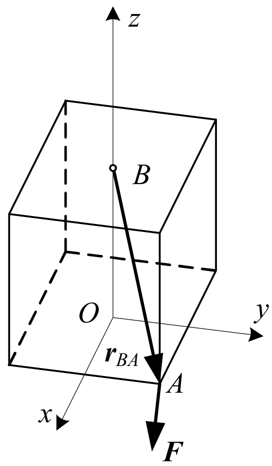
Számítás:



$$tg\alpha = \frac{2 \cdot a}{a} \Rightarrow \alpha = arctg2 = 63.4°$$

$$\boldsymbol{F} = F_x - F_z = (F \cdot cos\alpha) \cdot \boldsymbol{i} - (F \cdot sin\alpha) \cdot \boldsymbol{j} = (50 \cdot cos63.4°) \cdot \boldsymbol{i} - (50 \cdot sin63.4°)$$

$$\boldsymbol{F} = 22.39 \cdot \boldsymbol{i} - 44.71 \cdot \boldsymbol{j}[N]$$



$$\boldsymbol{r}_{BA} = \frac{a}{2} \cdot \boldsymbol{i} + \cdot \frac{a}{2} \cdot \boldsymbol{j} - a \cdot \boldsymbol{k} = 20 \cdot \boldsymbol{i} + \cdot 20 \cdot \boldsymbol{j} - 40 \cdot \boldsymbol{k}[mm]$$

$$\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{r}_{BA} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 20 & 20 & -40 \\ 22.39 & 0 & -44.71 \end{vmatrix} = -894.2 \cdot \boldsymbol{i} - 1.4 \cdot \boldsymbol{j} - 447.8 \cdot \boldsymbol{k}[Nmm]$$

$$M' = \sqrt{(-894.2 \cdot \boldsymbol{i})^2 + (-1.4 \cdot \boldsymbol{j})^2 + (-447.8 \cdot \boldsymbol{k})^2} \cong 1000[Nmm] = 1[Nm]$$

Az általunk keresett igénybevételek pedig:

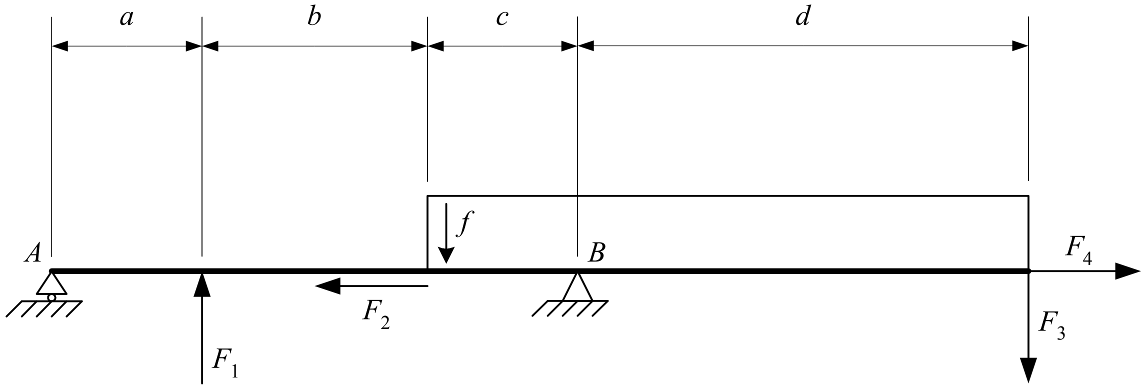
$$F' = -F" = -F = -50[N]$$

$$M = -M' = -1[Nm]$$

2.9/M2 Határozza meg az ábrán látható kéttámaszú tartó támaszaiban keletkező reakciókat, valamint írja fel az igénybevételi függvényeket!

Adatok:

$$F_1 = 6\,N;\ F_2 = 8\,N;\ F_3 = 3\,N;\ F_4 = 4\,N;\ f = 3\,N/m$$
$$a = 2\,m;\ b = 3\,m;\ c = 2\,m;\ d = 6\,m;$$



Megoldás:

$$\sum_A M = 0 = F_1 \cdot a + F_{By} \cdot (a+b+c) - [f \cdot (c+d)] \cdot \left(a+b+\frac{c+d}{2}\right) - F_3 \cdot (a+b+c+d)$$

$$F_{By} = \frac{[f \cdot (c+d)] \cdot \left(a+b+\frac{c+d}{2}\right) + F_3 \cdot (a+b+c+d) - F_1 \cdot a}{a+b+c} = \frac{[24] \cdot (9) + 3 \cdot (13) - 6 \cdot 2}{7} = 34.7N(\uparrow)$$

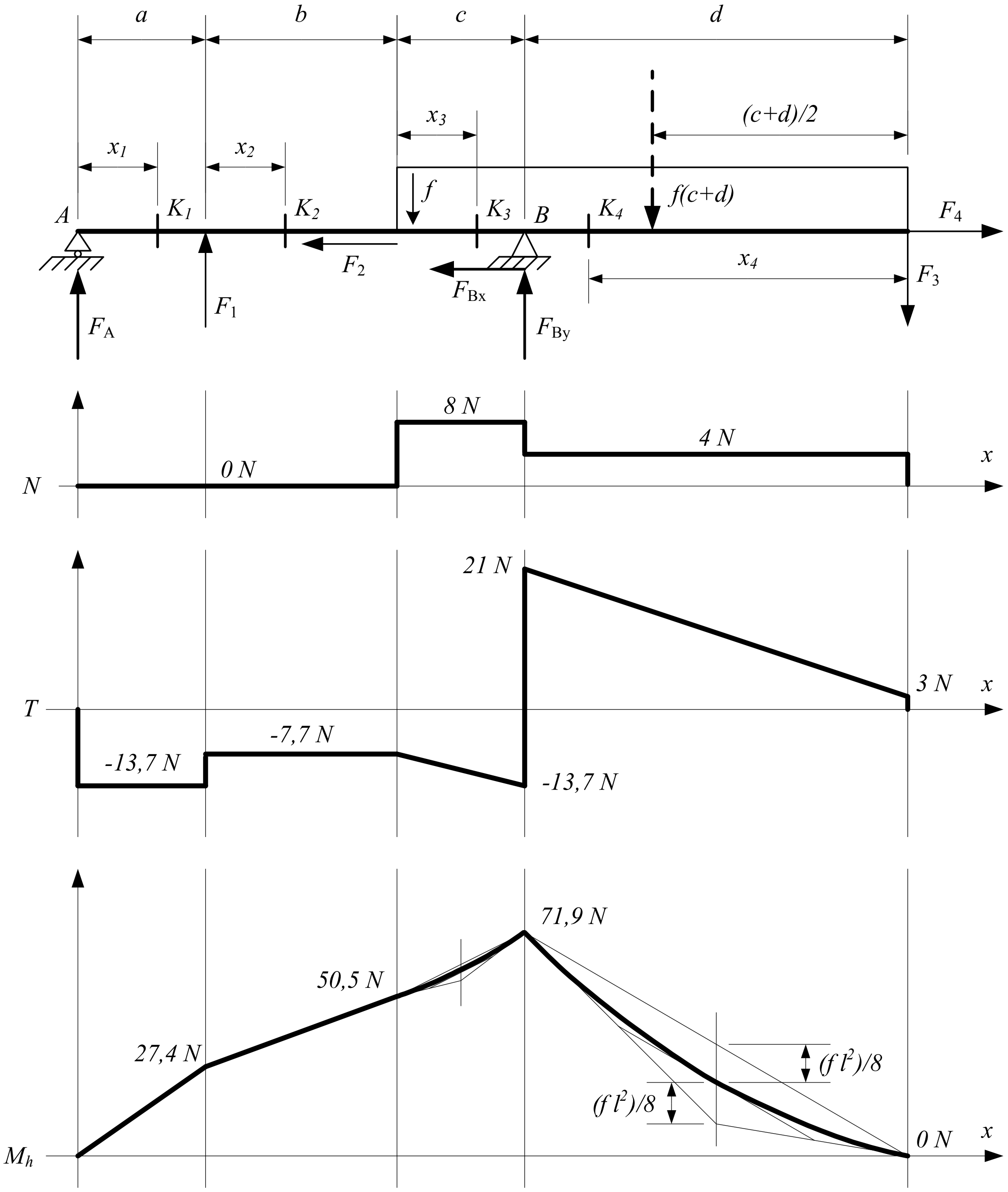
$$\sum_B M = 0 = -F_A \cdot (a+b+c) - F_1 \cdot (a+b) - [f \cdot (c+d)] \cdot \left(d - \frac{c+d}{2}\right) - F_3 \cdot d$$

$$F_A = \frac{-F_1 \cdot (a+b) - [f \cdot (c+d)] \cdot \left(d - \frac{c+d}{2}\right) - F_3 \cdot d}{a+b+c} = \frac{-6 \cdot (5) - [24] \cdot (2) - 3 \cdot 6}{7} = -13.7N(\downarrow)$$

$$\sum F_{xi} = 0 = -F_2 + F_{Bx} + F_4$$
$$F_{Bx} = F_2 - F_4 = 8 - 4 = 4N(\rightarrow)$$

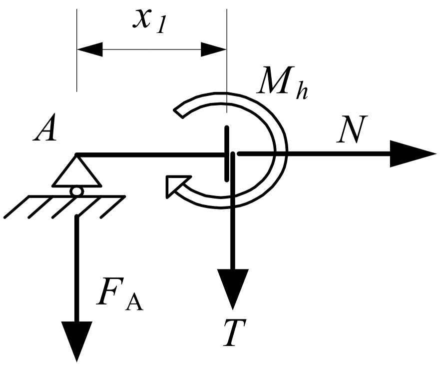
Ellenőrzés:

$$\sum F_{yi} = -F_A + F_1 + F_{By} - f \cdot \frac{c+d}{2} - F_3 = -13.7 + 6 + 34.7 - 24 - 3 = 0$$



a
b
c
d
x1
x2
x3
(c+d)/2
f
f(c+d)
A
K1
K2
K3
B
K4
F4
F2
FBx
x4
F3
F1
FA
FBy
8 N
4 N
0 N
N
x
21 N
3 N
T
-13,7 N
-7,7 N
-13,7 N
71,9 N
50,5 N
27,4 N
(f l2)/8
(f l2)/8
Mh
0 N

K$_1$ (1-es keresztmetszet):



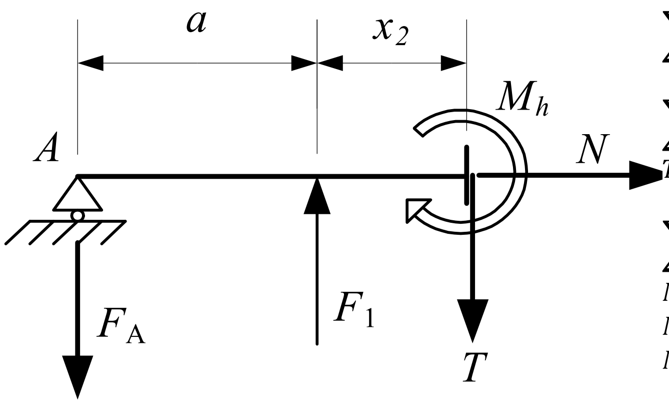
$$\sum F_{xi} = 0 = N$$

$$\sum F_{yi} = 0 = -F_A - T$$
$$T = -F_A = -13.7N$$

$$\sum M_i = 0 = F_A \cdot x_1 - M_h$$
$$M_h = F_A \cdot x_1 = 13.7 \cdot x_1 Nm$$

$$0 \leq x_1 \leq 2$$

K$_2$ (2-es keresztmetszet):



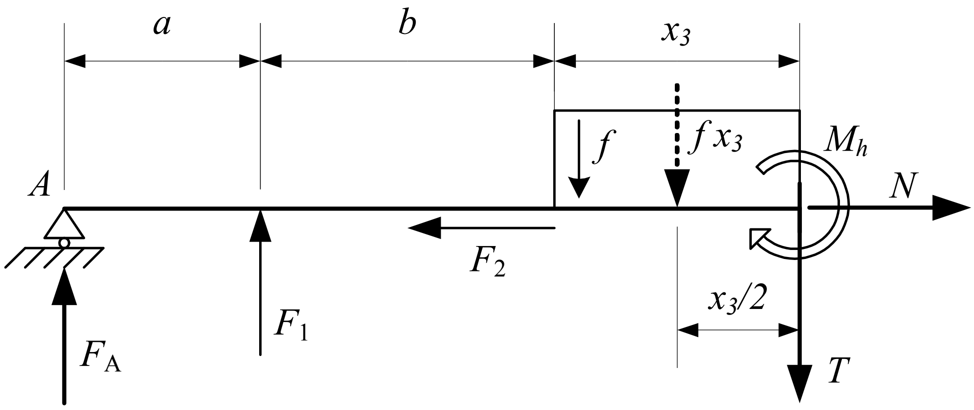
$$\sum F_{xi} = 0 = N$$

$$\sum F_{yi} = 0 = F_1 - F_A - T$$
$$T = F_1 - F_A = 6 - 13.7 = 7.7N$$

$$\sum M_i = 0 = F_A \cdot (a + x_2) - F_1 \cdot x_2 - M_h$$
$$M_h = F_A \cdot (a + x_2) - F_1 \cdot x_2$$
$$M_h = F_A \cdot a + (F_A - F_1) \cdot x_2$$
$$M_h = 13.7 \cdot 2 + (13.7 - 6) \cdot x_2 = 7.7 \cdot x_2 + 27.4N$$

$$0 \leq x_2 \leq 3$$

K$_3$ (3-as keresztmetszet):



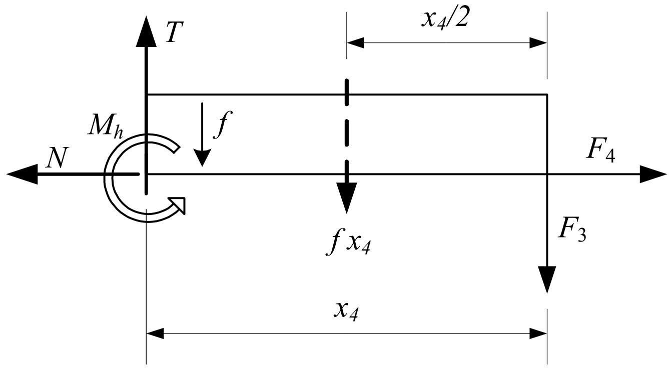
$$\sum F_{xi} = 0 = N - F_2 \Rightarrow N = F_2 = 8N$$

$$\sum F_{yi} = 0 = F_1 - F_A - f \cdot x_3 - T$$
$$T = F_1 - F_A - f \cdot x_3 = 6 - 13.7 - 3 \cdot x_3 = -3 \cdot x_3 - 7.7N$$

$$\sum M_i = 0 = F_A \cdot (a + b + x_3) - F_1 \cdot (b + x_3) + \left(f \cdot x_3 \cdot \frac{x_3}{2}\right) - M_h$$
$$M_h = F_A \cdot (a + b + x_3) - F_1 \cdot (b + x_3) + \left(f \cdot x_3 \cdot \frac{x_3}{2}\right)$$
$$M_h = F_A \cdot (a + b) - F_1 \cdot b + (F_A - F_1) \cdot x_3 + \left(\frac{f}{2} \cdot {x_3}^2\right)$$
$$M_h = 1.5 \cdot {x_3}^2 + (13.7 - 6) \cdot x_3 + 13.7 \cdot (2 + 3)$$

$$M_h = 1.5 \cdot {x_3}^2 + 7.7 \cdot x_3 + 50.5Nm$$
$$0 \leq x_3 \leq 2$$
$$\frac{f \cdot l^2}{8} = \frac{3 \cdot 2^2}{8} = 1.5Nm$$

K_4 (4-es keresztmetszet):



$$\sum F_{xi} = 0 = -N + F_4 \Rightarrow N = F_4 = 4N$$

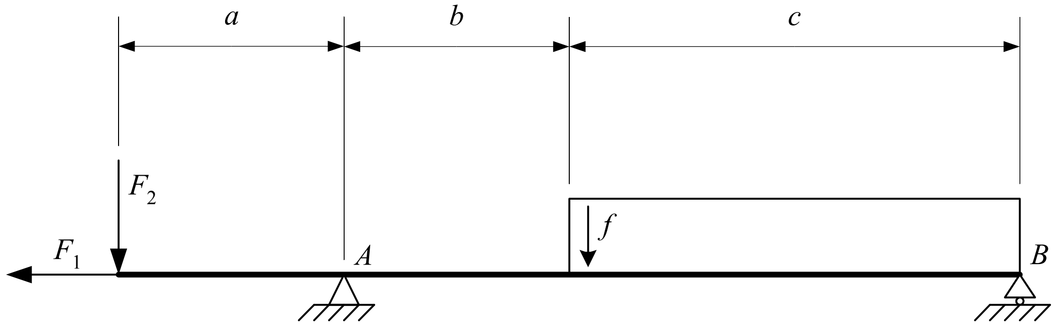
$$\sum F_{yi} = 0 = f \cdot x_4 + F_3 + T$$
$$T = -f \cdot x_4 - F_3 = -3 \cdot x_4 - 3N$$

$$\sum M_i = 0 = M_h - F_3 \cdot x_4 - \left(f \cdot x_4 \cdot \frac{x_4}{2}\right)$$
$$M_h = F_3 \cdot x_4 + \left(f \cdot x_4 \cdot \frac{x_4}{2}\right) = \frac{f}{2} \cdot {x_4}^2 + F_3 \cdot x_4 = 1.5 \cdot {x_4}^2 + 3 \cdot x_4$$
$$0 \leq x_4 \leq 6$$
$$\frac{f \cdot l^2}{8} = \frac{3 \cdot 6^2}{8} = 13.5Nm$$

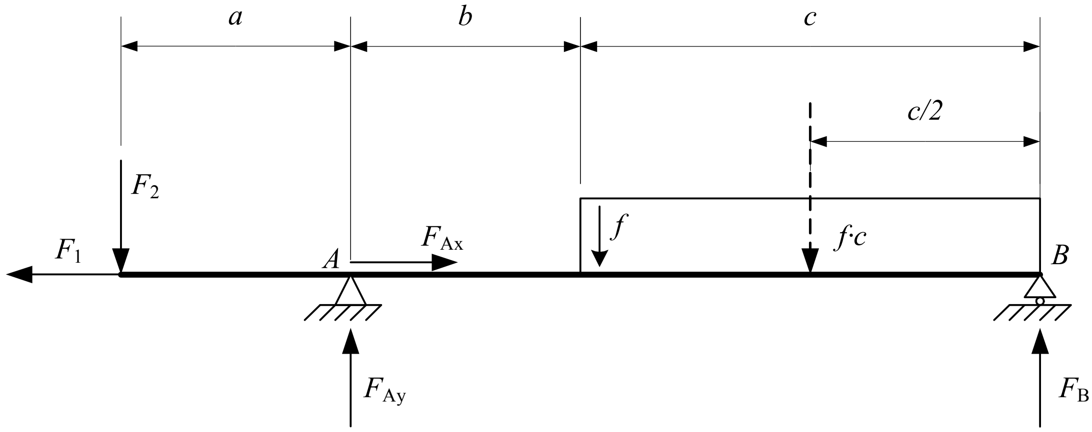
2.9/M3 Határozza meg az ábrán látható kéttámaszú tartó támaszaiban keletkező reakciókat, valamint írja fel az igénybevételi függvényeket!

Adatok:

$$F_1 = 10\,N;\ F_2 = 15\,N;\ f = 5\,N/m;\ a = 3\,m;\ b = 3\,m;\ c = 6\,m.$$



Megoldás:



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_{xi} = 0 = -F_1 + F_{Ax} = -10 + F_{Ax}$$

$$F_{Ax} = 10N(\rightarrow)$$

$$\sum_A M = 0 = F_2 \cdot a - f \cdot c \cdot \left(b + \frac{c}{2}\right) + F_{By} \cdot (b + c) = 15 \cdot 3 - 30 \cdot 6 + F_{By} \cdot 9$$

$$F_{By} = 15N(\uparrow)$$

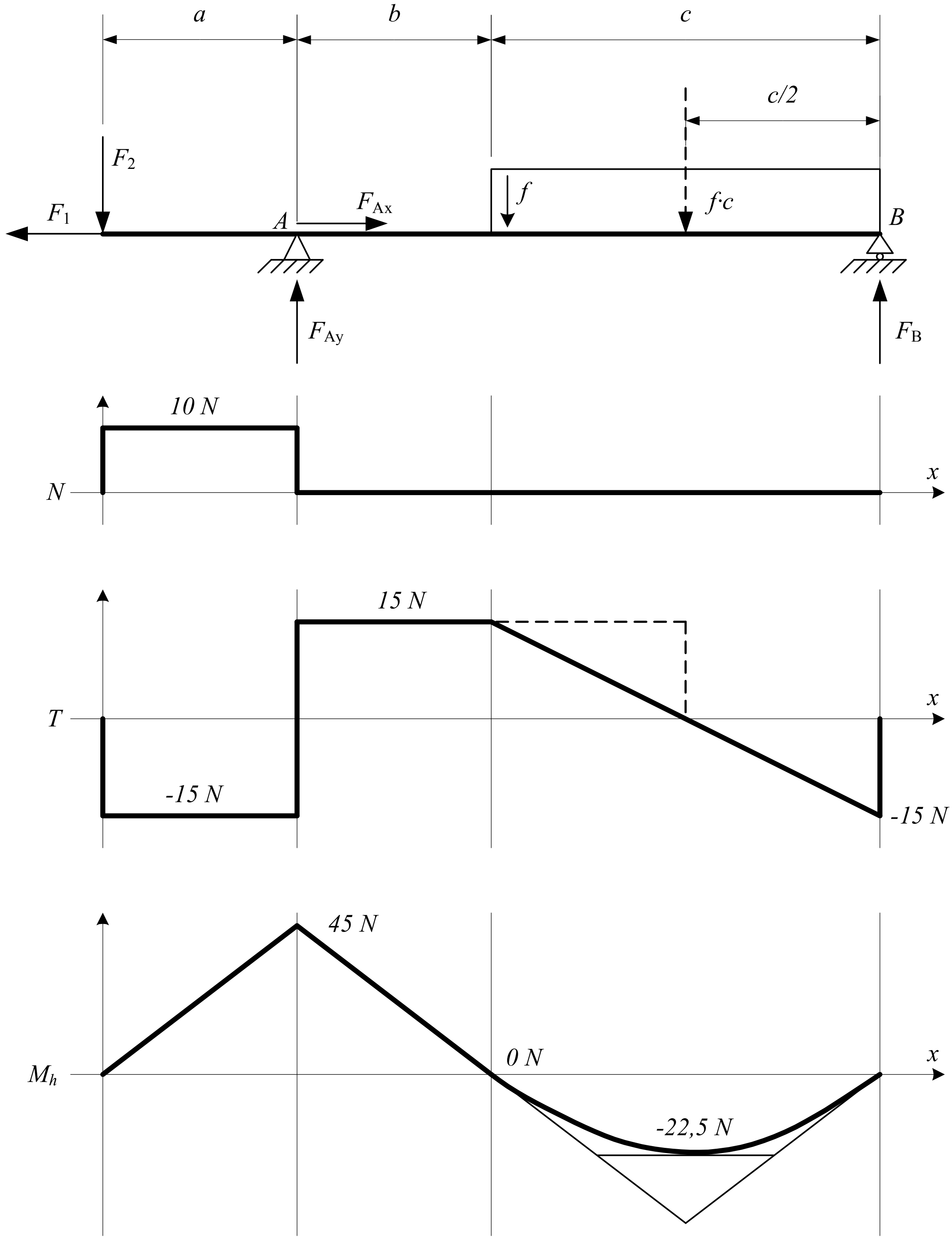
$$\sum_B M = 0 = F_2 \cdot (a + b + c) - F_{Ay} \cdot (b + c) + f \cdot c \cdot \left(\frac{c}{2}\right) = 15 \cdot 12 - F_{Ay} \cdot 9 + 30 \cdot 3$$

$$F_{Ay} = 30N(\uparrow)$$

Ellenőrzés:

$$\sum F_{yi} = F_{By} - F_2 + F_{Ay} - f \cdot c = 15 - 15 + 30 - 30 = 0$$

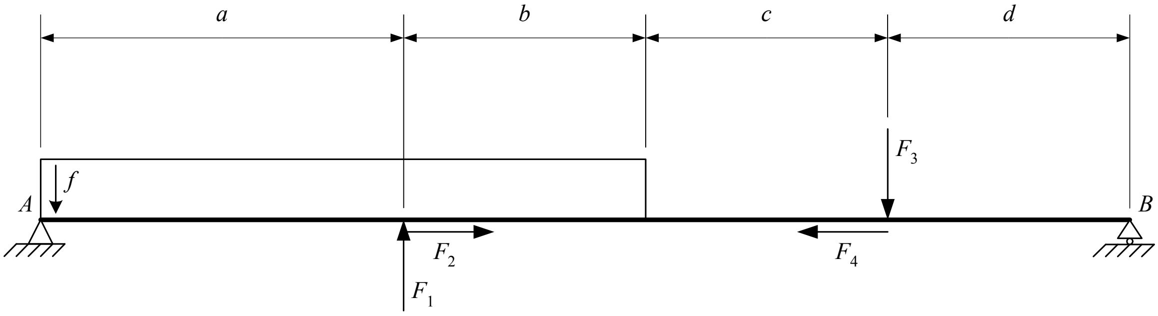
Igénybevételi ábrák:



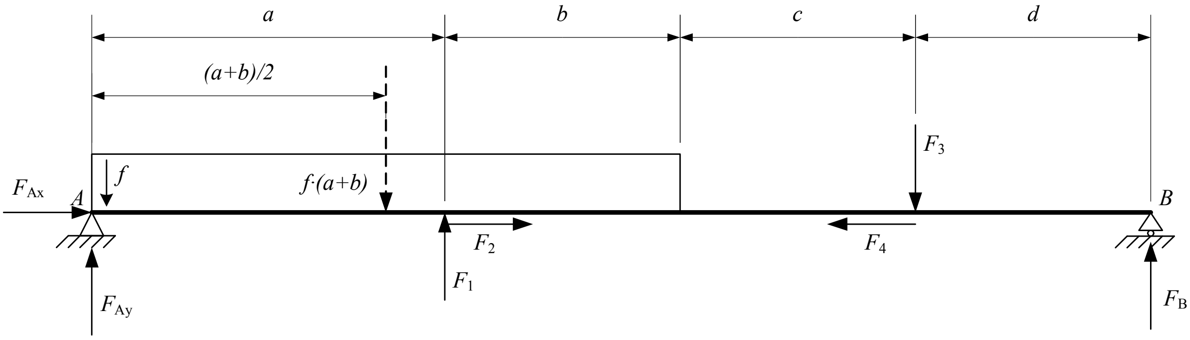
2.9/M4 Határozza meg az ábrán látható kéttámaszú tartó támaszaiban keletkező reakciókat, valamint írja fel az igénybevételi függvényeket!

Adatok:

$$F_1 = 10\,N;\ F_2 = 30\,N;\ F_3 = 15\,N;\ F_4 = 10\,N;\ f = 2\,N/m.$$
$$a = 6\,m;\ b = 4\,m;\ c = 4\,m;\ d = 4\,m;$$



Megoldás:



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Ax} + F_2 - F_4 = F_{Ax} + 30 - 10$$

$$F_{Ax} = -20N(\leftarrow)$$

$$\sum_A M = 0 = -f \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) + F_1 \cdot a - F_3 \cdot (a+b+c) + F_{By} \cdot (a+b+c+d)$$

$$\sum_A M = 0 = -2 \cdot (10) \cdot \left(\frac{10}{2}\right) + 10 \cdot 6 - 15 \cdot (14) + F_{By} \cdot (18)$$

$$F_{By} = 13.89N(\uparrow)$$

$$\sum_B M = 0 = -F_{Ay} \cdot (a+b+c+d) + f \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{a+b}{2} + c + d\right) - F_1 \cdot (b+c+d) + F_3 \cdot d$$

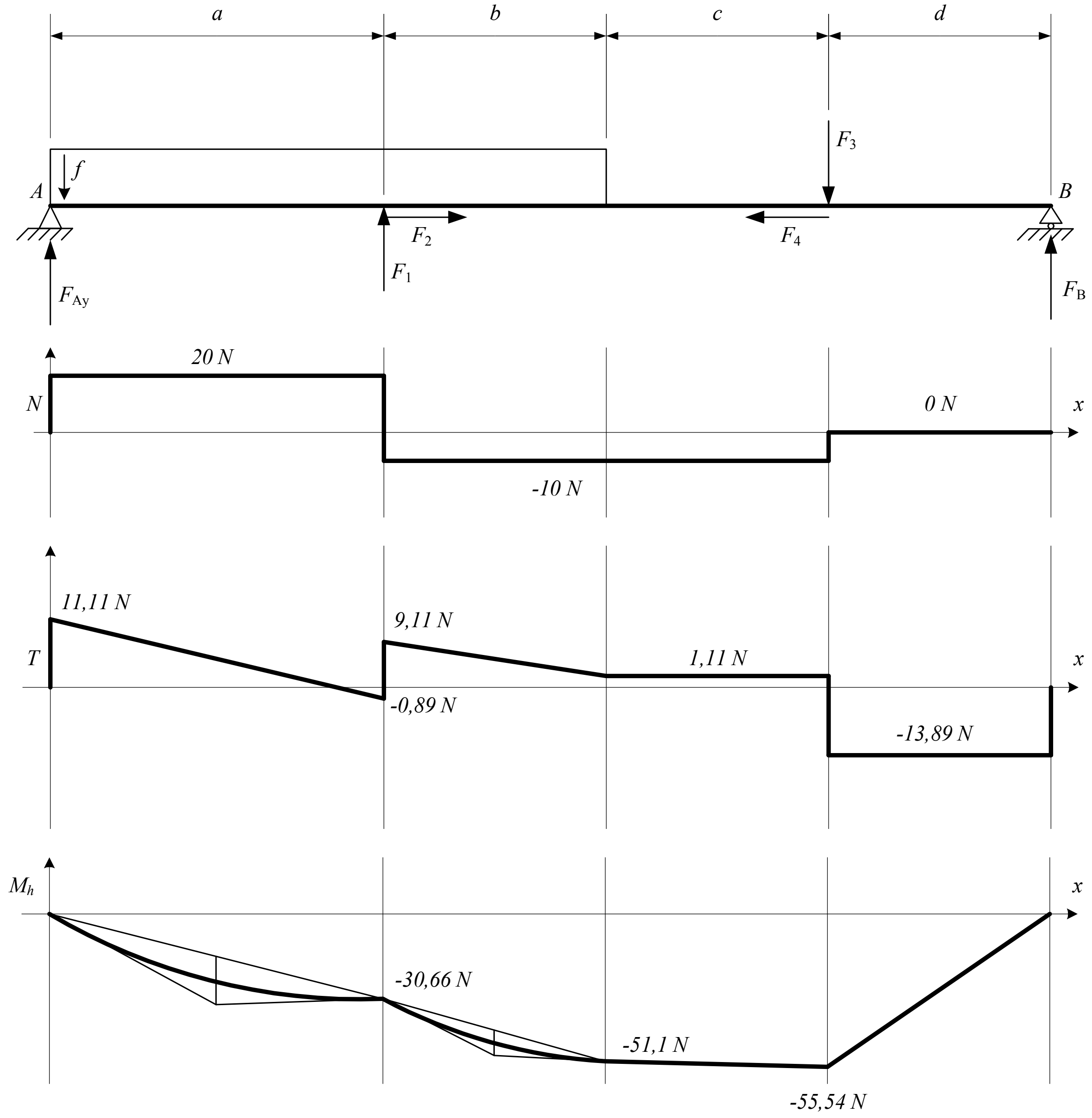
$$\sum_B M = 0 = -F_{Ay} \cdot (18) + 2 \cdot (10) \cdot \left(\frac{10}{2} + 4 + 4\right) - 10 \cdot (12) + 15 \cdot 4$$

$$F_{Ay} = 11.11N(\uparrow)$$

Ellenőrzés:

$$\sum F_{yi} = F_{Ay} - f \cdot (a+b) + F_1 - F_3 + F_{By} = 11.11 - 20 + 10 - 15 + 13.89 = 0$$

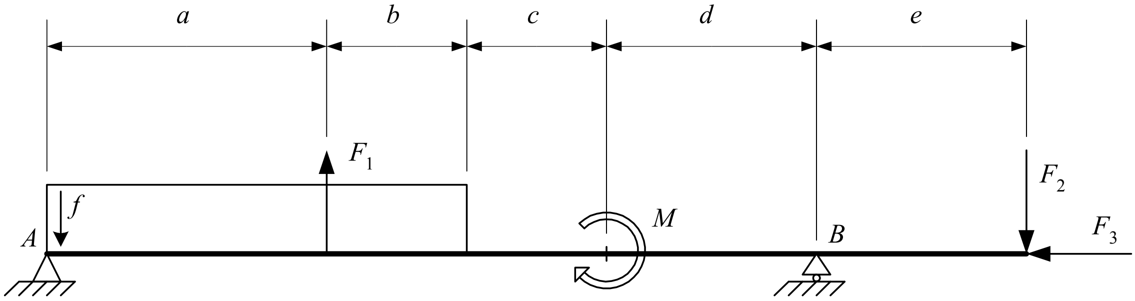
Igénybevételi ábrák:



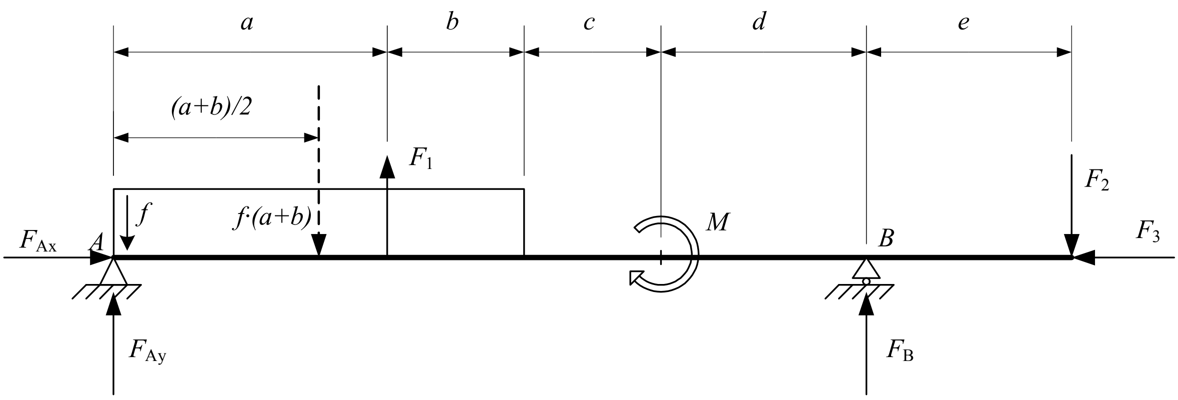
2.9/M5 Határozza meg az ábrán látható kéttámaszú tartó támaszaiban keletkező reakciókat, valamint írja fel az igénybevételi függvényeket!

Adatok:

$$F_1 = 9\,kN;\ F_2 = 3\,kN;\ F_3 = 6\,kN;\ M = 1.5\,kNm;\ f = 3\,kN/m;$$
$$a = 4\,m;\ b = 2\,m;\ c = 2\,m;\ d = 3\,m;\ e = 3\,m.$$



Megoldás:



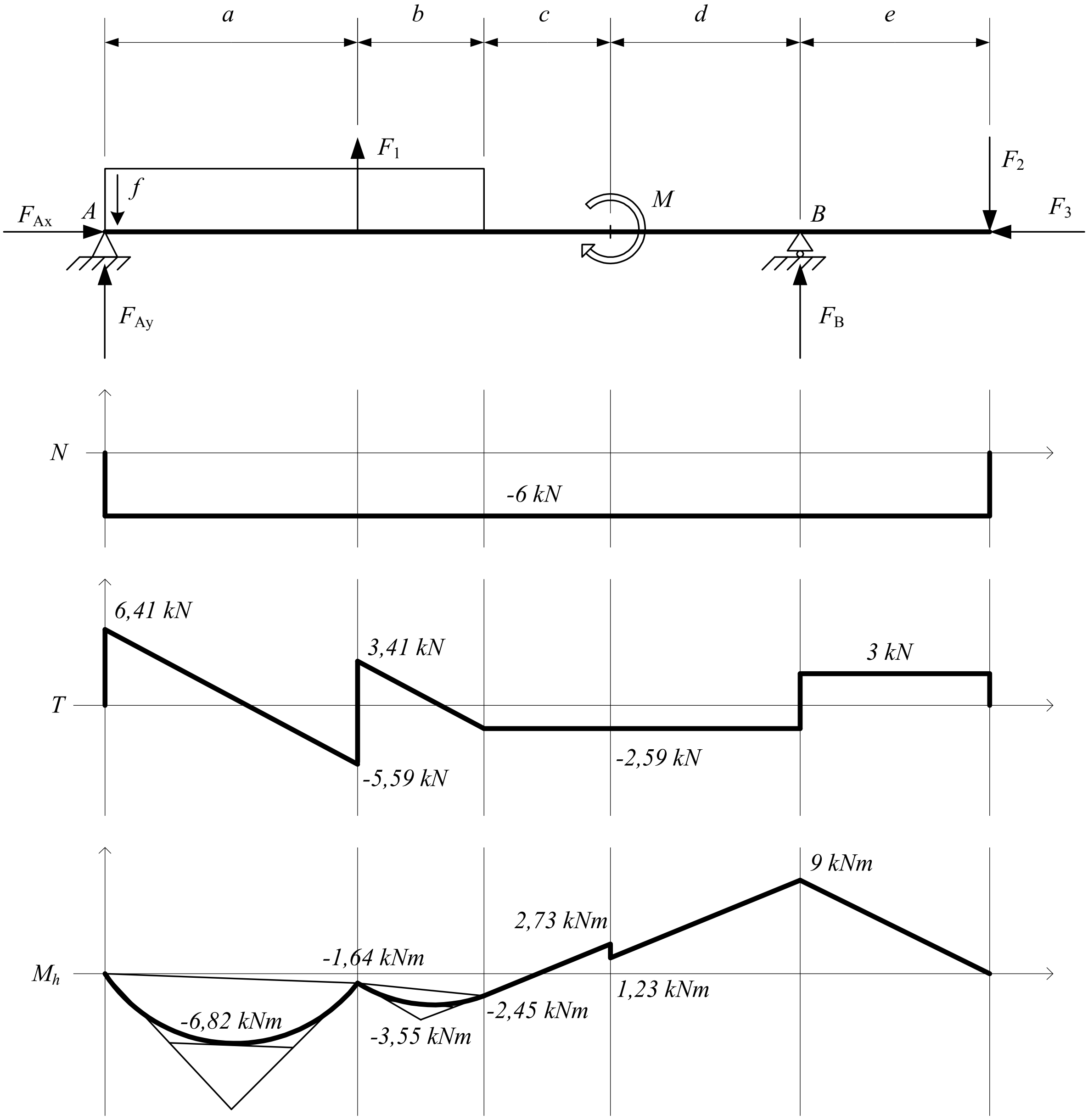
Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Ax} - F_3 = F_{Ax} - 6$$
$$F_{Ax} = 6kN(\rightarrow)$$
$$\sum_A M = 0 = -f \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) + F_1 \cdot a - M + F_B \cdot (a+b+c+d) - F_2 \cdot (a+b+c+d+e)$$
$$\sum_A M = 0 = -3 \cdot (6) \cdot \left(\frac{6}{2}\right) + 9 \cdot 4 - 1.5 + F_B \cdot (11) - 3 \cdot (14)$$
$$F_B = 5.59kN(\uparrow)$$
$$\sum_B M = 0 = -F_{Ay} \cdot (a+b+c+d) + f \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{a+b}{2} + c + d\right) - F_1 \cdot (b+c+d) - M - F_2 \cdot e$$
$$\sum_B M = 0 = -F_{Ay} \cdot (11) + 3 \cdot (6) \cdot \left(\frac{6}{2} + 2 + 3\right) - 9 \cdot (7) - 1.5 - 3 \cdot 3$$
$$F_{Ay} = 6.41kN(\uparrow)$$

Ellenőrzés:

$$\sum F_{yi} = F_{Ay} - f \cdot (a+b) + F_1 + F_B - F_2 = 6.41 - 18 + 9 + 5.59 - 3 = 0$$

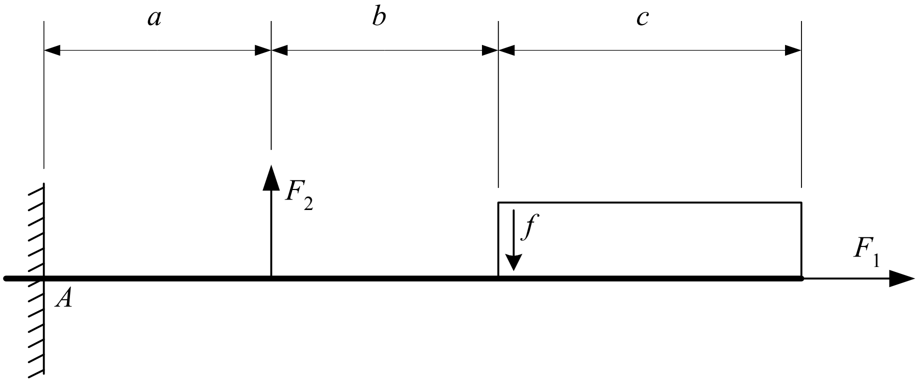
Igénybevételi ábrák:



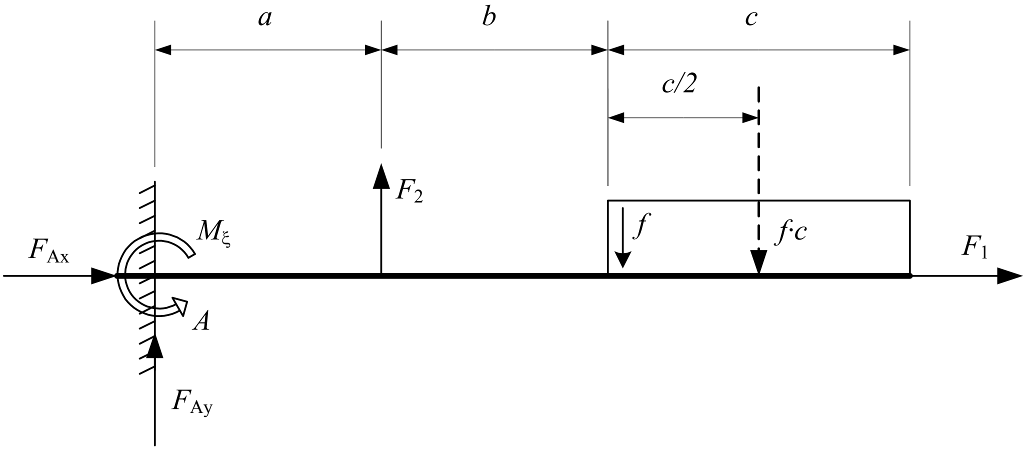
2.9/M6 Határozza meg az ábrán látható befogott tartó támaszreakcióit, valamint rajzolja fel az igénybevételi ábrákat!

Adatok:

$$F_1 = 20kN;\ F_2 = 12\,kN;\ f = 1\,kN/m;\ a = 3\,m;\ b = 3\,m;\ c = 4\,m.$$



Megoldás:



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Ax} + F_1 = F_{Ax} + 20$$

$$F_{Ax} = -20kN(\leftarrow)$$

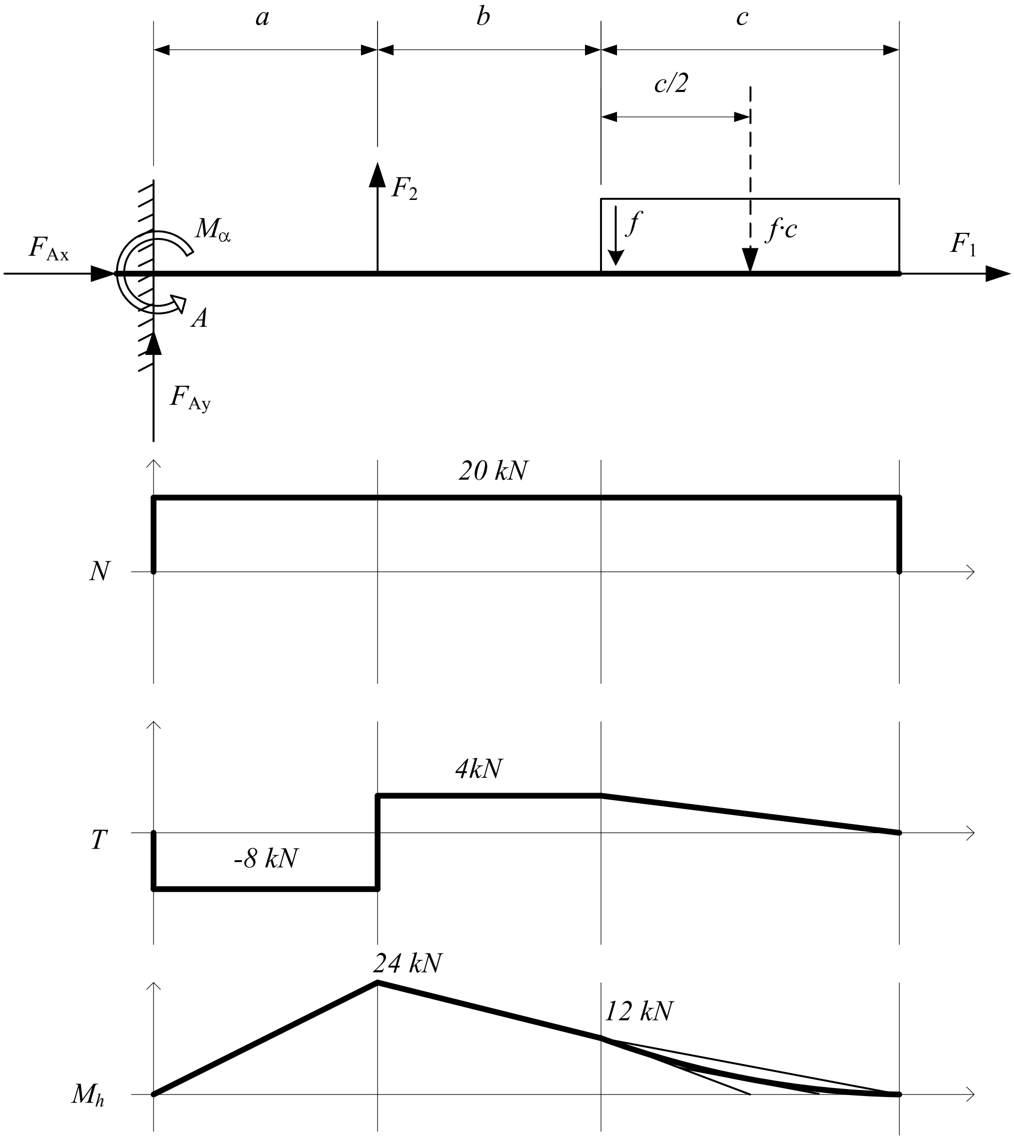
$$\sum F_{yi} = 0 = F_{Ay} + F_2 - f \cdot c = F_{Ay} + 12 - 4$$

$$F_{Ay} = -8kN(\downarrow)$$

$$\sum \underset{A}{M} = 0 = \underset{\alpha}{M} + F_2 \cdot a - f \cdot c \cdot \left(a + b + \frac{c}{2}\right) = \underset{\alpha}{M} + 12 \cdot 3 - 4 \cdot (8)$$

$$\underset{\alpha}{M} = -4kNm$$

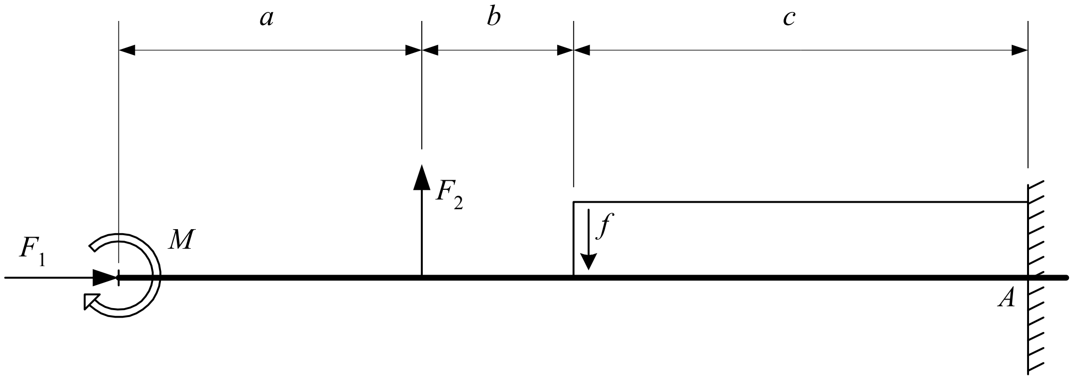
Igénybevételi ábrák:



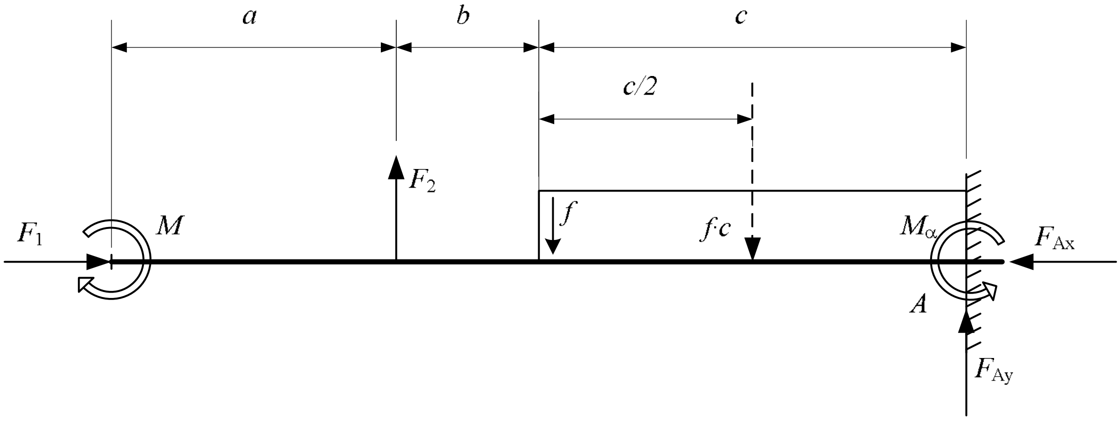
2.9/M7 Határozza meg az ábrán látható befogott tartó támaszreakcióit, valamint rajzolja fel az igénybevételi ábrákat!

Adatok:

$$F_1 = 5\,kN;\ F_2 = 6\,kN;\ M = 1\,kNm;\ f = 2\,kN/m;\ a = 4\,m;\ b = 2\,m;\ c = 6\,m.$$



Megoldás:



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_1 + F_{Ax} = 5 + F_{Ax}$$

$$F_{Ax} = -5kN(\leftarrow)$$

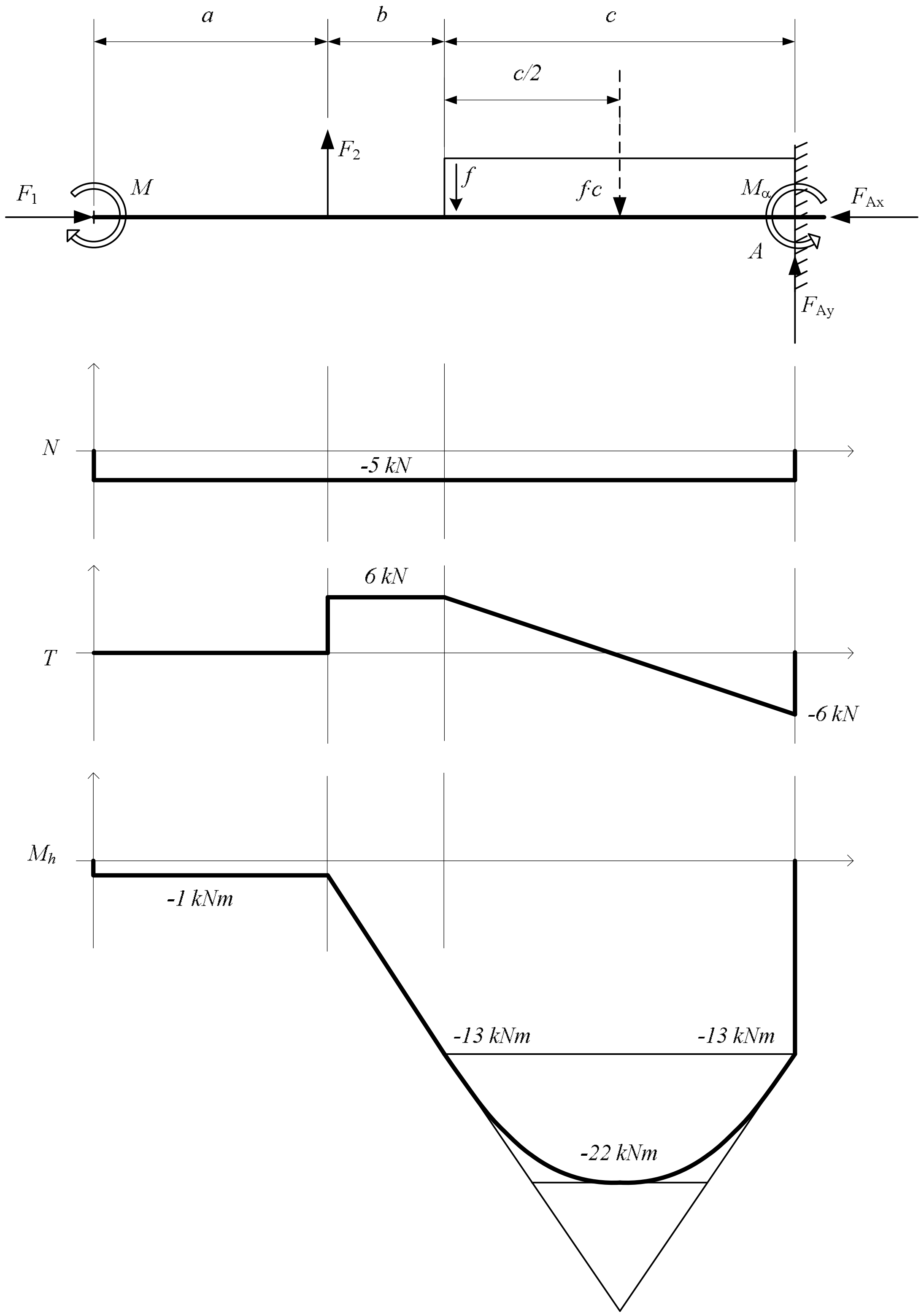
$$\sum F_{iy} = 0 = F_2 - f\cdot c + F_{Ay} = 6 - 12 + F_{Ay}$$

$$F_{Ay} = 6kN(\uparrow)$$

$$\sum \underset{A}{M} = 0 = -M - F_2\cdot(b+c) + f\cdot c\cdot\left(\frac{c}{2}\right) + \underset{\alpha}{M} = -1 - 6\cdot(8) + 12\cdot(3) + \underset{\alpha}{M}$$

$$\underset{\alpha}{M} = 13kNm$$

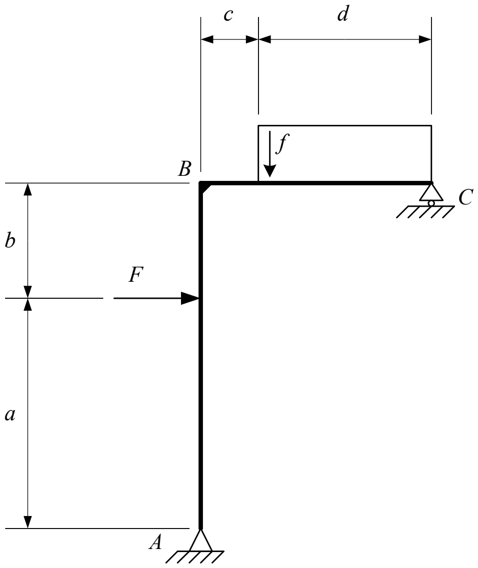
Igénybevételi ábrák:



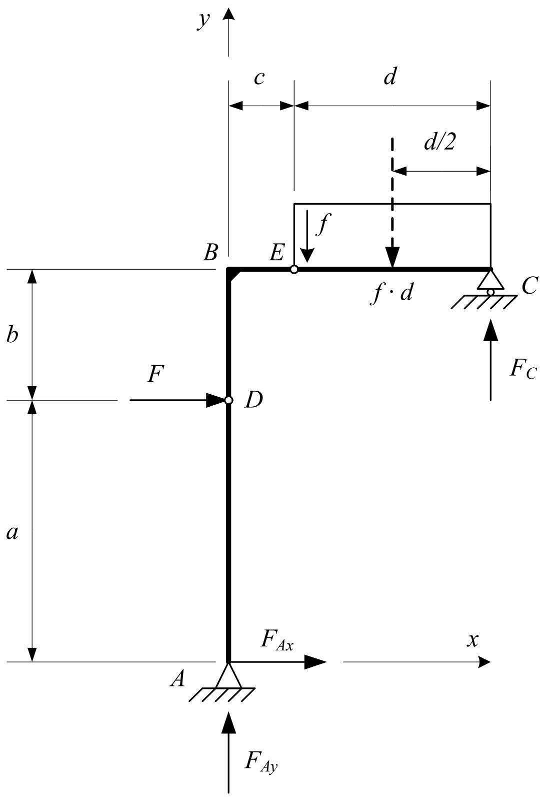
2.9/M8 Határozza meg az ábrán látható törtvonalú tartó támaszreakcióit, valamint rajzolja fel az igénybevételi ábrákat!

Adatok:

$$F = 5\,kN;\ f = 2\,kN/m;\ a = 4\,m;\ b = 2\,m;\ c = 1\,m;\ d = 3\,m.$$



Megoldás:



$$\sum_A M = 0 = -F \cdot a - [f \cdot d] \cdot \left(c + \frac{d}{2}\right) + F_C \cdot (c + d)$$

$$F_C = \frac{F \cdot a - [f \cdot d] \cdot \left(c + \frac{d}{2}\right)}{c + d}$$

$$F_C = \frac{5 \cdot 4 - [2 \cdot 3] \cdot (1 + 1.5)}{1 + 3}$$

$$F_C = 8.75 kN (\uparrow)$$

$$\sum F_{yi} = 0 = F_{Ay} - f \cdot d + F_C$$

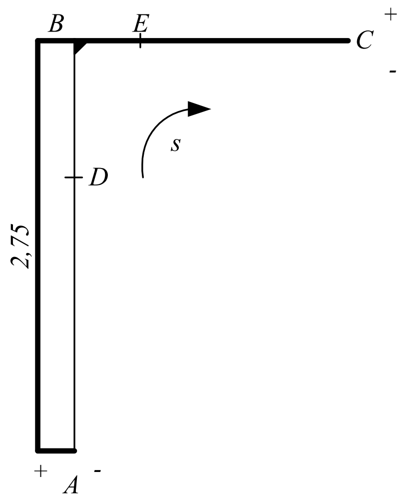
$$F_{Ay} = f \cdot d - F_C = -2.75 kN (\downarrow)$$

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Ax} + F$$

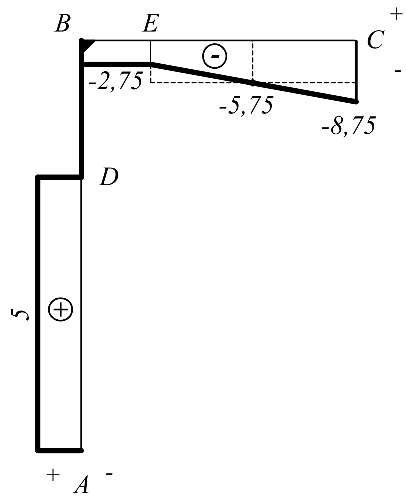
$$F_{Ax} = -F = -5 kN (\leftarrow)$$

A kapott eredmények alapján megrajzoljuk az igénybevételi ábrákat:

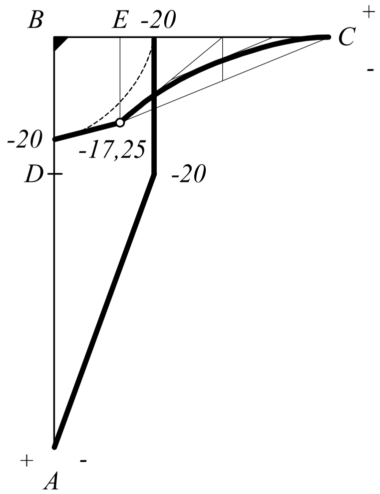
N:



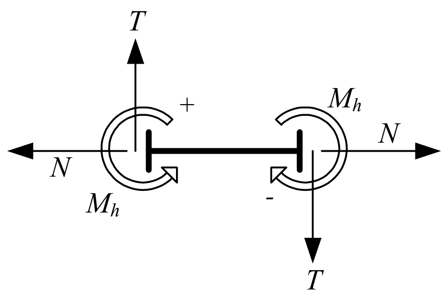
T:



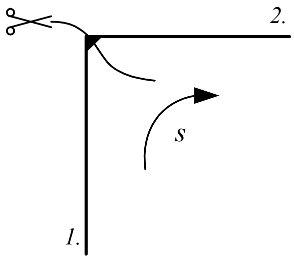
M_h:

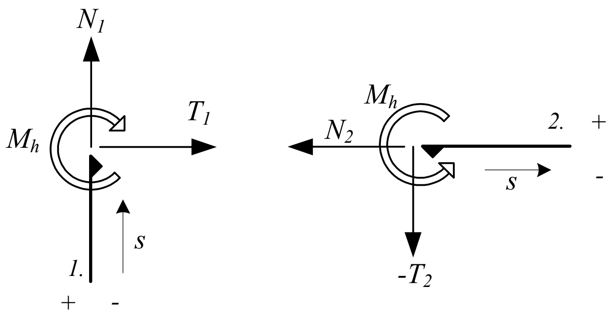


Ismételjük át a rúdszakaszok egyensúlyát!



Most metsszük el a „B” pontban a tartót.

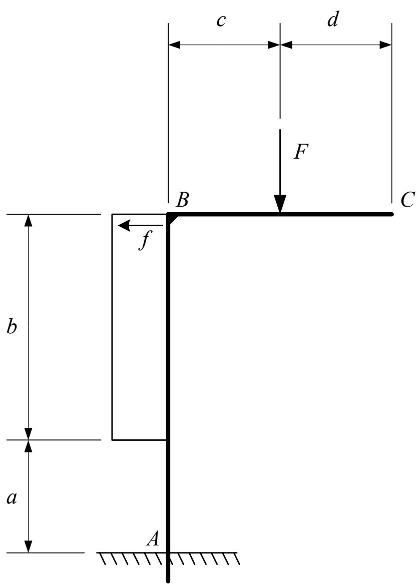




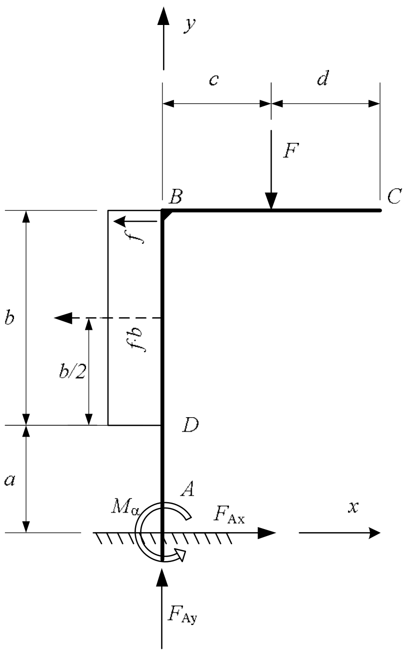
Jól látszik, hogy az 1.-es rúdszakaszon keletkező normálerő (N_1) a 2.-es rúdszakasz nyíróerejének -1 szeresével (-T_2) tart egyensúlyt. Az 1.-es rúdszakaszon keletkező nyíróerő (T_1) pedig a 2.-es rúdszakasz normálerejével (N_2).
Ebből adódóan a 2.-es rúdszakasz nyíróereje meg fog egyezni az 1.-es rúdszakaszon keletkező normálerő -1 szeresével és a 2.-es rúdszakasz normálereje pedig az 1.-es rúdszakaszon keletkező nyíróerővel.

2.9/M9 Határozza meg az ábrán látható törtvonalú tartó támaszreakcióit, valamint rajzolja fel az igénybevételi ábrákat!
Adatok:

$$F = 10\,kN;\ f = 3\,kN/m;\ a = 2\,m;\ b = 4\,m;\ c = 2\,m;\ d = 2\,m.$$



Megoldás:



$$\sum M_A = 0 = M_\alpha + [f \cdot b] \cdot \left(\frac{b}{2}\right) - F \cdot c$$

$$M_\alpha = F \cdot c - [f \cdot b] \cdot \left(\frac{b}{2} + a\right)$$

$$M_\alpha = 10 \cdot 2 - [3 \cdot 4] \cdot \left(\frac{4}{2} + 2\right)$$

$$M_\alpha = -28kNm$$

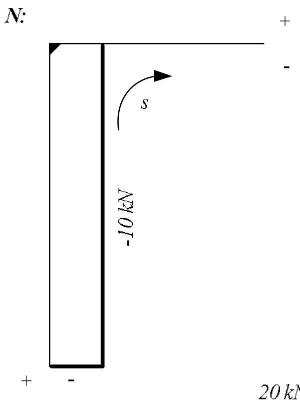
$$\sum F_{yi} = 0 = F_{Ay} - F$$

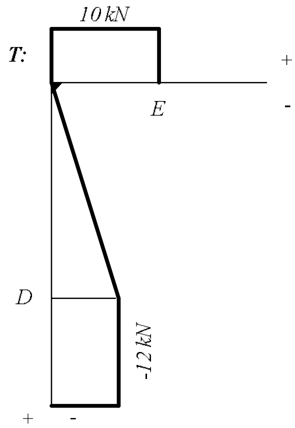
$$F_{Ay} = F = 10kN \quad (\uparrow)$$

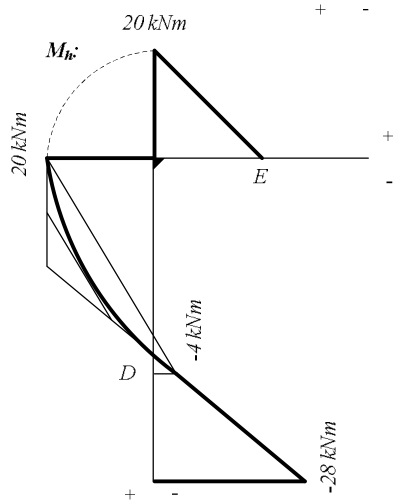
$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Ax} - [f \cdot b]$$

$$F_{Ax} = f \cdot b = 12kN \quad (\rightarrow)$$

A kapott eredmények alapján megrajzoljuk az igénybevételi ábrákat:



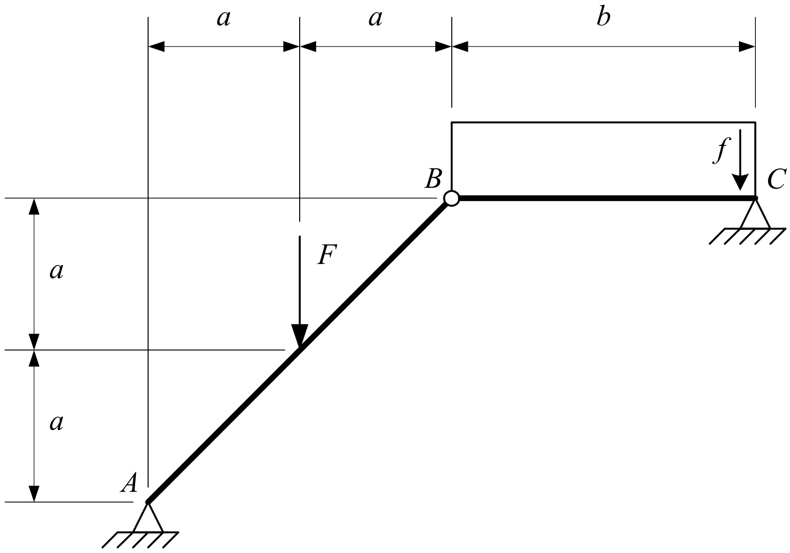




2.10 Háromcsuklós szerkezet és Gerber-tartó statikai vizsgálata

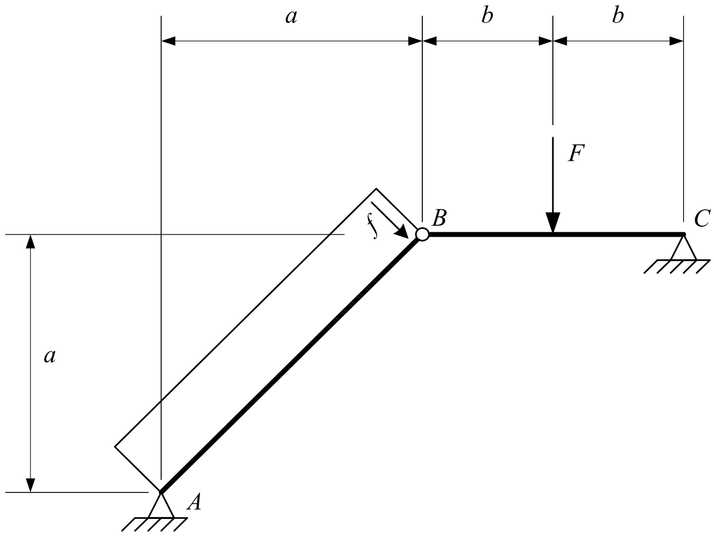
2.10/1 Az ábrán vázolt háromcsuklós szerkezetet a megadott erőrendszer terheli. Határozza meg szerkesztés és számítás segítségével a kényszereknél kialakuló reakcióerőket, valamint a B pontban fellépő kapcsolóerőt!
Adatok:

$$F = 4\,kN;\ f = 2\,kN/m;\ a = 2\,m;\ b = 4\,m.$$



2.10/2 Az ábrán vázolt háromcsuklós szerkezetet a megadott erőrendszer terheli. Határozza meg szerkesztés és számítás segítségével a kényszereknél kialakuló reakcióerőket, valamint a B pontban fellépő kapcsolóerőt!
Adatok:

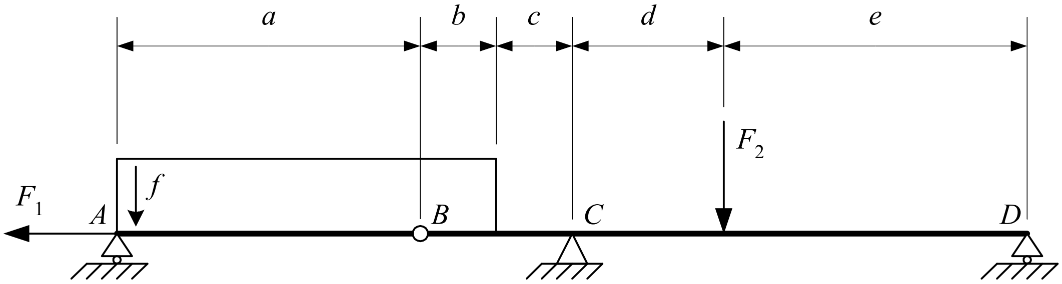
$$F = 8\,kN;\ f = 0.7071\,kN/m;\ a = 4\,m;\ b = 2\,m.$$



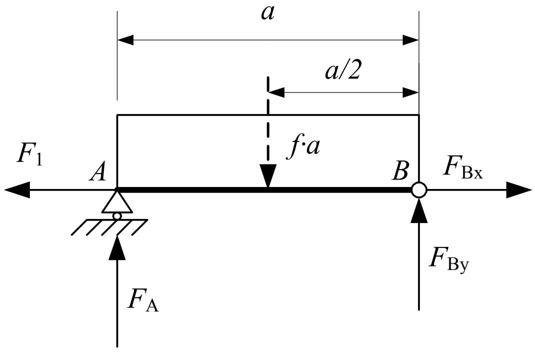
2.10/M3 Határozza meg az ábrán látható Gerber-tartó támaszainál keletkező reakcióerőket valamint a B pontbeli kapcsolóerőt! Ábrázolja a tartó igénybevételi ábráit!

Adatok:

$$F_1 = 8\,kN;\ F_2 = 10\,kN;\ f = 2\,kN/m;$$
$$a = 4\,m;\ b = 1\,m;\ c = 1\,m;\ d = 2\,m;\ e = 4\,m.$$



Megoldás:



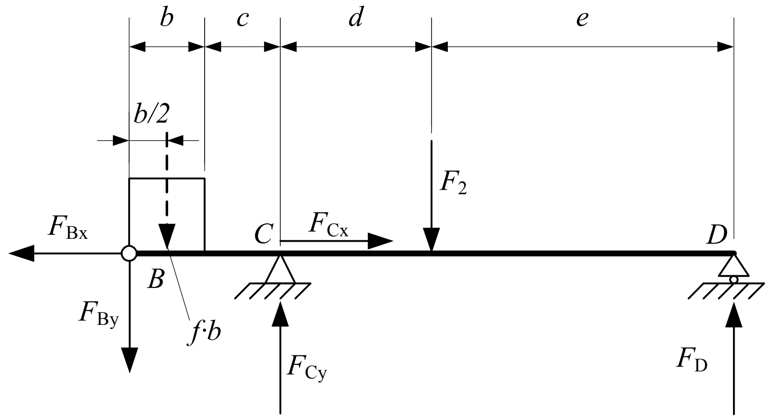
Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Bx} - F_1 = F_{Bx} - 8$$
$$F_{Bx} = 8kN \quad (\rightarrow)$$

$$\sum_A M = 0 = F_{By} \cdot a - (f \cdot a) \cdot \frac{a}{2}$$
$$F_{By} = \frac{(f \cdot a) \cdot \frac{a}{2}}{a} = \frac{(2 \cdot 4) \cdot \frac{4}{2}}{4} = 4kN \quad (\uparrow)$$
$$\sum_B M = 0 = -F_A \cdot a + (f \cdot a) \cdot \frac{a}{2}$$

$$F_A = \frac{(f \cdot a) \cdot \frac{a}{2}}{a} = \frac{(2 \cdot 4) \cdot \frac{4}{2}}{4} = 4kN \quad (\uparrow)$$

$Ell.:$
$$\sum F_{yi} = F_A - (f \cdot a) + F_{By} = 4 - 8 + 4 = 0$$



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Cx} - F_{Bx} = F_{Cx} - 8$$

$$F_{Cx} = 8kN \quad (\rightarrow)$$

$$\sum_C M = 0 = F_{By} \cdot (b + c) + (f \cdot b) \cdot \left(\frac{b}{2} + c\right) - F_2 \cdot d + F_D \cdot (d + e)$$

$$F_D = \frac{F_2 \cdot d - F_{By} \cdot (b + c) - (f \cdot b) \cdot \left[\frac{b}{2} + c\right]}{d + e} = \frac{10 \cdot 2 - 4 \cdot (2) - (2 \cdot 1) \cdot \left[\frac{1}{2} + 1\right]}{6} = 1.5kN \quad (\uparrow)$$

$$\sum_D M = 0 = F_{By} \cdot (b + c + d + e) + (f \cdot b) \cdot \left(\frac{b}{2} + c + d + e\right) - F_{Cy} \cdot (d + e) + F_2 \cdot e$$

$$F_{Cy} = \frac{F_{By} \cdot (b + c + d + e) + (f \cdot b) \cdot \left[\frac{b}{2} + c + d + e\right] + F_2 \cdot e}{d + e} = \frac{4 \cdot (8) + (2) \cdot [7{,}5] + 10 \cdot 4}{6} = 14.5kN \quad (\uparrow)$$

$Ell.:$

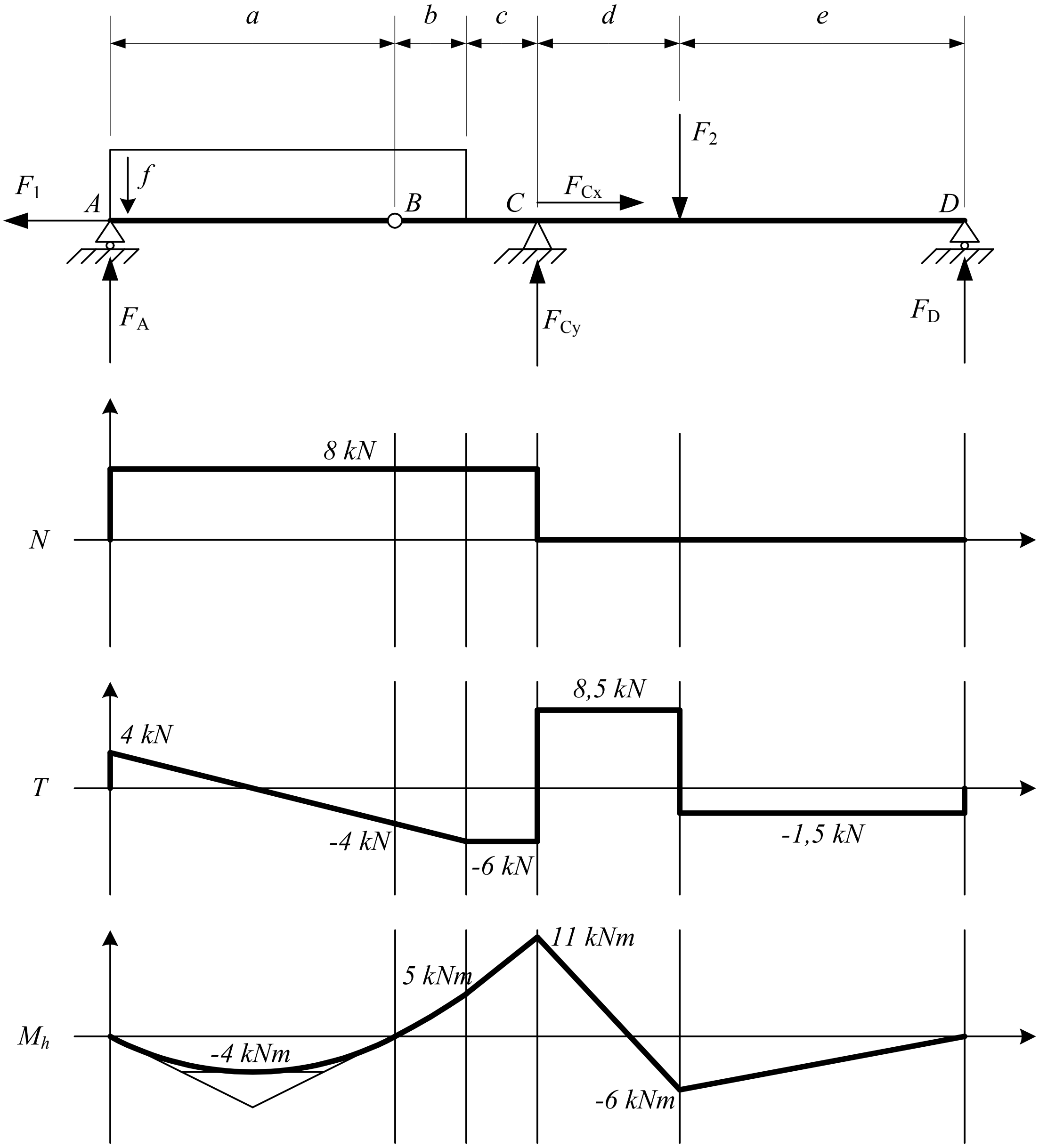
$$\sum F_{yi} = -F_{By} - (f \cdot a) + F_{Cy} - F_2 + F_D = -4 - 2 + 14.5 - 10 + 1.5 = 0$$

$Ell.\ldots$ Teljes rendszerre:

$$\sum F_{xi} = F_{Cx} - F_1 = 8 - 8 = 0$$

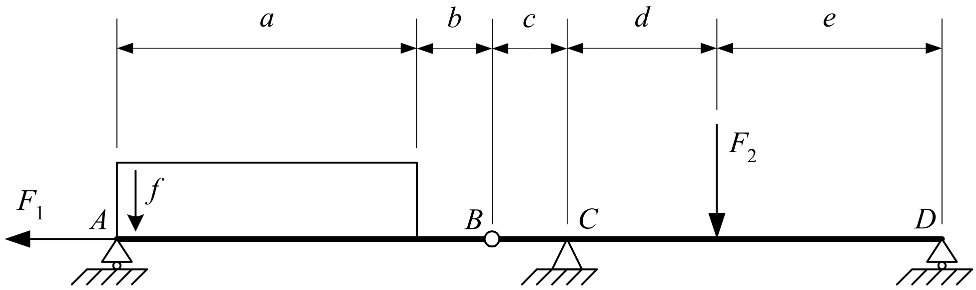
$$\sum F_{yi} = F_{Ay} - f \cdot (a + b) + F_{Cy} - F_2 + F_D = 4 - 10 + 14.5 - 10 + 1.5 = 0$$

Igénybevételi ábrák:

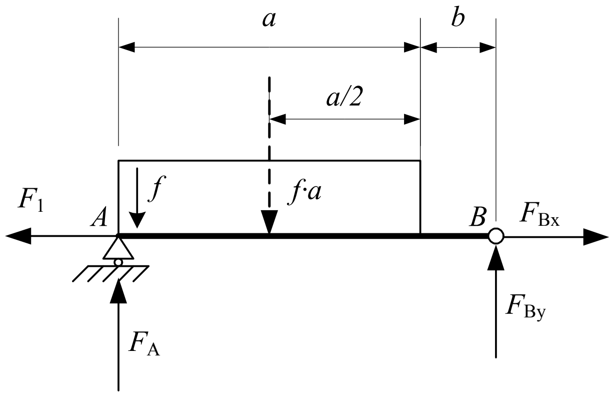


2.10/M4 Határozza meg az ábrán látható Gerber-tartó támaszainál keletkező reakcióerőket valamint a B pontbeli kapcsolóerőt! Ábrázolja a tartó igénybevételi ábráit!
Adatok:

$$F_1 = 6\,kN;\ F_2 = 8\,kN;\ f = 3\,kN/m;$$
$$a = 4\,m;\ b = 1\,m;\ c = 1\,m;\ d = 2\,m;\ e = 3\,m.$$



Megoldás:



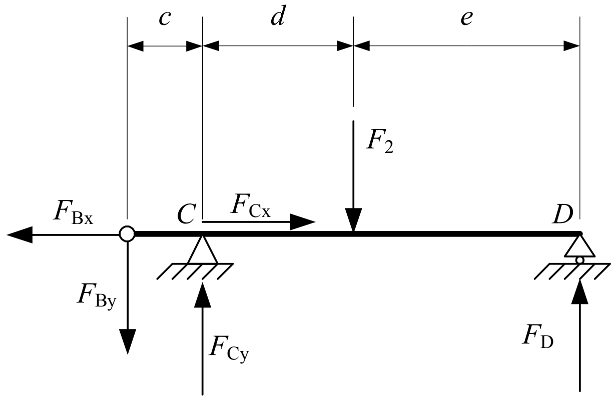
Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Bx} - F_1 = F_{Bx} - 6$$
$$F_{Bx} = 6kN \quad (\rightarrow)$$

$$\sum_A M = 0 = -(f \cdot a) \cdot \frac{a}{2} + F_{By} \cdot (a+b)$$
$$F_{By} = \frac{(f \cdot a) \cdot \frac{a}{2}}{a+b} = \frac{(3 \cdot 4) \cdot \frac{4}{2}}{4+1} = 4.8kN \quad (\uparrow)$$
$$\sum_B M = 0 = -F_A \cdot (a+b) + (f \cdot a) \cdot \left[\frac{a}{2} + b\right]$$

$$F_A = \frac{(f \cdot a) \cdot \frac{a}{2}}{a+b} = \frac{(3 \cdot 4) \cdot \left[\frac{4}{2} + 1\right]}{4+1} = 7.2kN \quad (\uparrow)$$

$$Ell.:$$
$$\sum F_{yi} = F_A - (f \cdot a) + F_{By} = 7.2 - 12 + 4.8 = 0$$



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_{xi} = 0 = F_{Cx} - F_{Bx} = F_{Cx} - 6$$
$$F_{Cx} = 6kN \quad (\rightarrow)$$

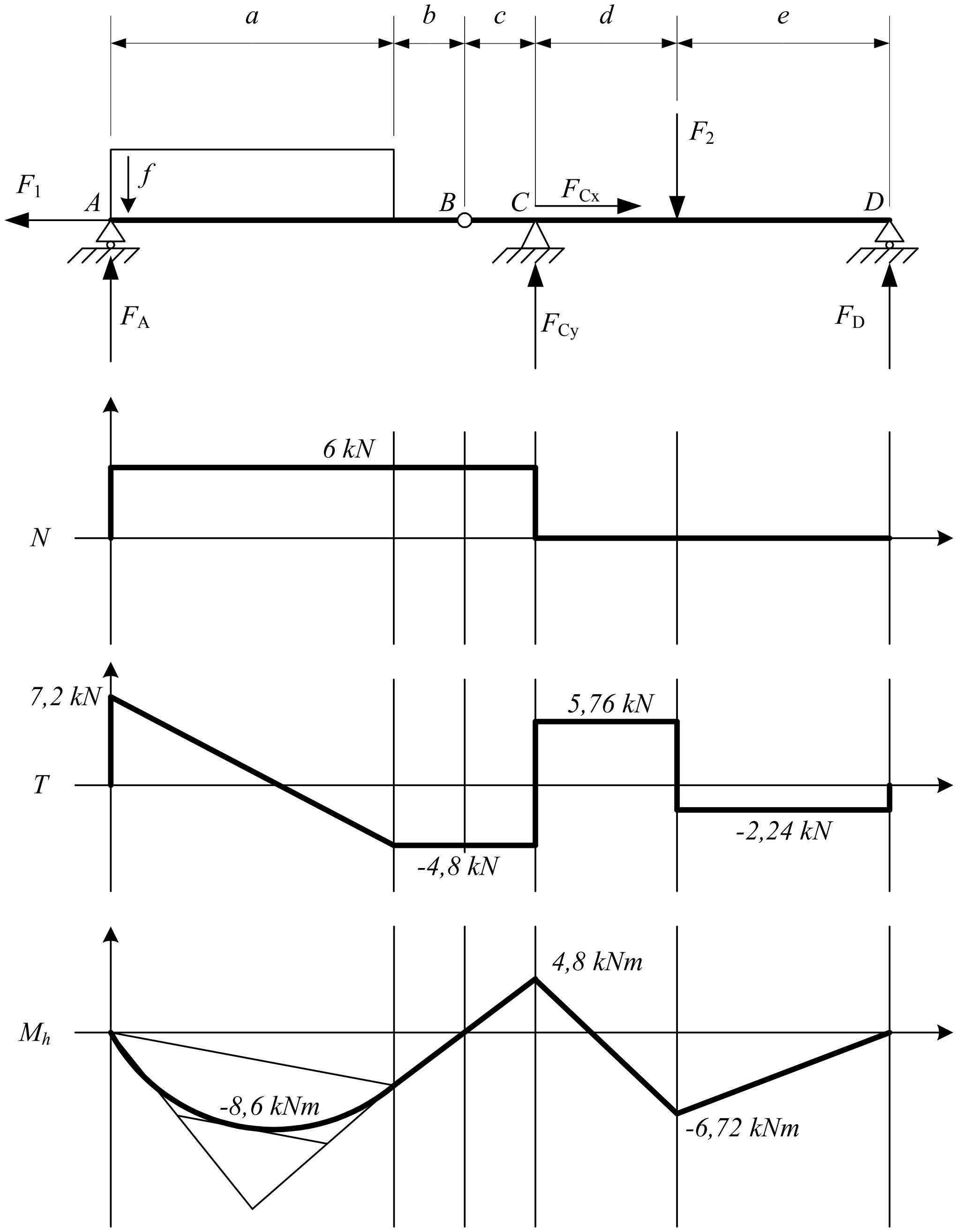
$$\sum_{C} M = 0 = F_{By} \cdot c - F_2 \cdot d + F_D \cdot (d + e)$$
$$F_D = \frac{F_2 \cdot d - F_{By} \cdot c}{d + e} = \frac{8 \cdot 2 - 4.8 \cdot 1}{5} = 2.24kN \quad (\uparrow)$$

$$\sum_{D} M = 0 = F_{By} \cdot (c + d + e) - F_{Cy} \cdot (d + e) + F_2 \cdot e$$
$$F_{Cy} = \frac{F_{By} \cdot (c + d + e) + F_2 \cdot e}{d + e} = \frac{4.8 \cdot (6) + 8 \cdot 3}{5} = 10.56kN \quad (\uparrow)$$

$Ell.:$
$$\sum F_{yi} = -F_{By} - (f \cdot a) + F_{Cy} - F_2 + F_D = -4 - 2 + 14.5 - 10 + 1.5 = 0$$

$Ell\ldots Teljes \quad Rendszerre:$
$$\sum F_{xi} = F_{Cx} - F_1 = 6 - 6 = 0$$
$$\sum F_{yi} = F_A - f \cdot a + F_{Cy} - F_2 + F_D = 7{,}2 - 12 + 10.56 - 8 + 2.24 = 0$$

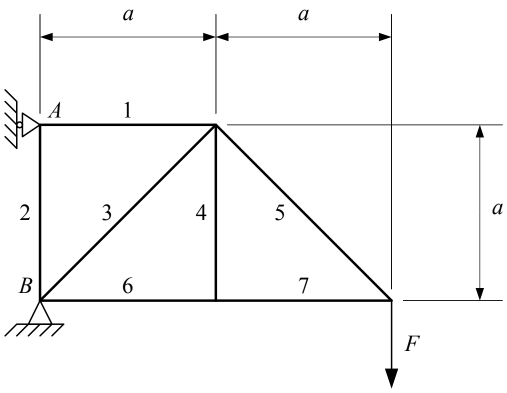
Igénybevételi ábrák:



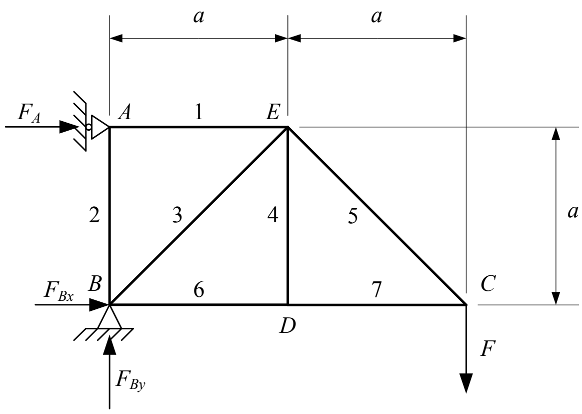
2.11 Síkbeli rácsos szerkezetek rúderőinek meghatározása

2.11/M1 Az ábrán vázolt rácsos szerkezetet a megadott erő terheli. Határozza meg a rácsos szerkezet egyensúlyát biztosító kényszereknél keletkező támaszerőket! Határozza meg a rácsos szerkezet rúdjaiban ébredő rúderők nagyságát csomóponti módszer segítségével!
Adatok:

$$F = 2\,kN;\ a = 3\,m.$$



Megoldás:



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_{yi} = 0 = F_{By} - F = F_{By} - 2$$

$$F_{By} = 2kN \quad (\uparrow)$$

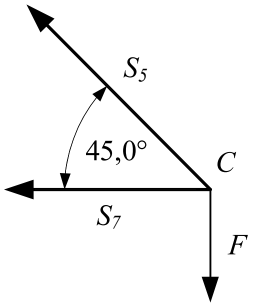
$$\sum_A M = 0 = F_{Bx} \cdot a - F \cdot 2a$$

$$F_{Bx} = \frac{F \cdot 2a}{a} = 2 \cdot F = 4kN \quad (\rightarrow)$$

$$\sum_B M = 0 = -F_A \cdot a - F \cdot 2a$$

$$F_A = \frac{-F \cdot 2a}{a} = -2 \cdot F = -4kN \quad (\leftarrow)$$

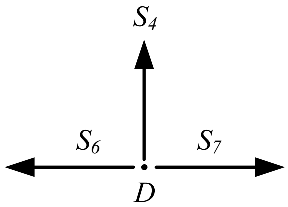
C. pontban a rúderők:



$$\sum F_{yi} = 0 = -F + S_5 \cdot sin45°$$
$$S_5 = \frac{F}{sin45°} = \frac{4}{\sqrt{2}} kN$$

$$\sum F_{xi} = 0 = -S_7 - S_5 \cdot cos45°$$
$$S_7 = -S_5 \cdot cos45° = -2kN$$

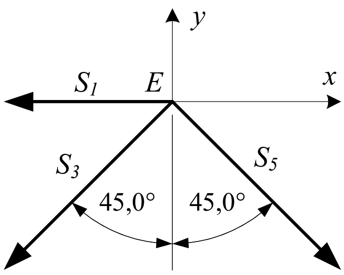
D. pontban a rúderők:



$$S_4 = 0kN$$

$$\sum F_{xi} = 0 = -S_6 + S_7$$
$$S_6 = S_7 = -2kN$$

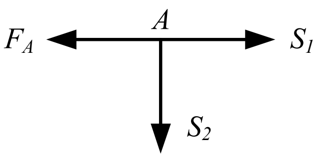
E. pontban a rúderők:



$$\sum F_{xi} = 0 = -S_1 - S_3 \cdot sin45° + S_5 \cdot sin45°$$
$$\sum F_{yi} = 0 = -S_3 \cdot cos45° - S_5 \cdot cos45°$$

$$S_3 = -\frac{4}{\sqrt{2}} kN$$
$$S_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4kN$$

A.m pontban a rúderők:



$$\sum F_{xi} = 0 = S_1 - F_A = 4 - 4$$
$$\sum F_{yi} = 0 = -S_2$$

$$S_2 = 0kN$$

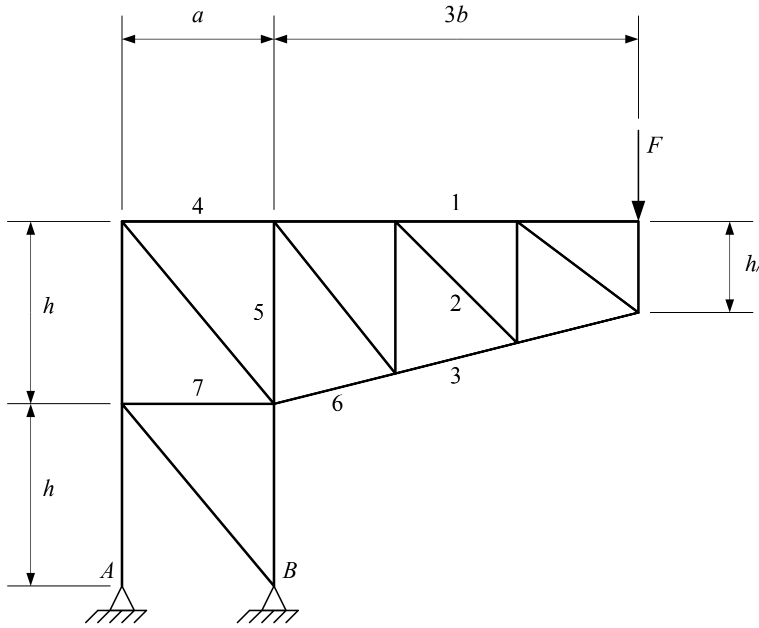
Az eredmények összefoglalása:

$S_1 = 4kN$
$S_2 = 0kN$
$S_3 = -\frac{4}{\sqrt{2}} kN$
$S_4 = 0kN$
$S_5 = \frac{4}{\sqrt{2}} kN$
$S_6 = -2kN$
$S_7 = -2kN$

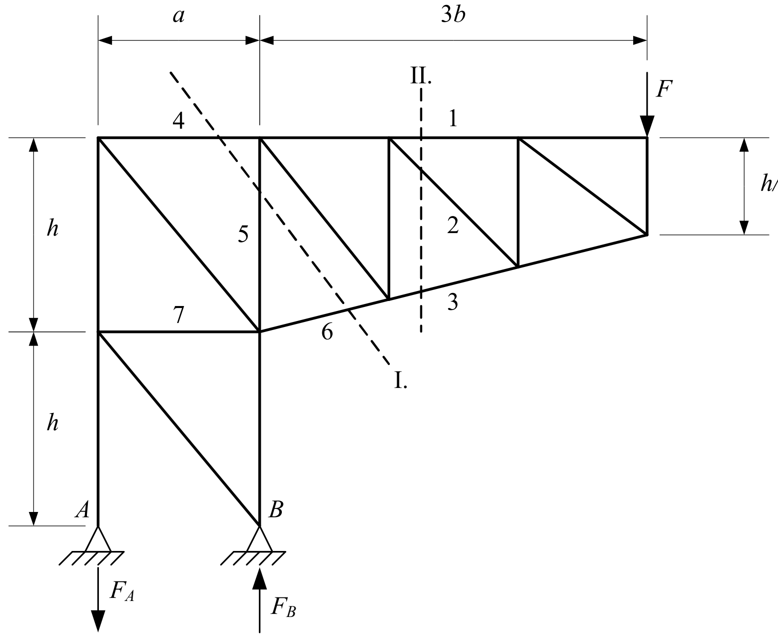
2.11/M2 Az ábrán vázolt rácsos szerkezetet a megadott erőrendszer terheli. Határozza meg a rácsos szerkezet egyensúlyát biztosító kényszereknél keletkező támaszerőket! Határozza meg a rácsos szerkezet bejelölt rúdjaiban ébredő rúderők nagyságát átmetsző módszer segítségével!

Adatok:

$$F = 100\,kN;\ a = 2.5\,m;\ b = 2\,m;\ h = 3\,m.$$



Megoldás:



Egyensúlyi egyenletek:

$$\sum_A M = 0 = F_B \cdot a - F \cdot (a + 3b)$$

$$F_B = \frac{F \cdot (a + 3b)}{a} = \frac{100 \cdot (2.5 + 6)}{2.5} = 340kN(\uparrow)$$

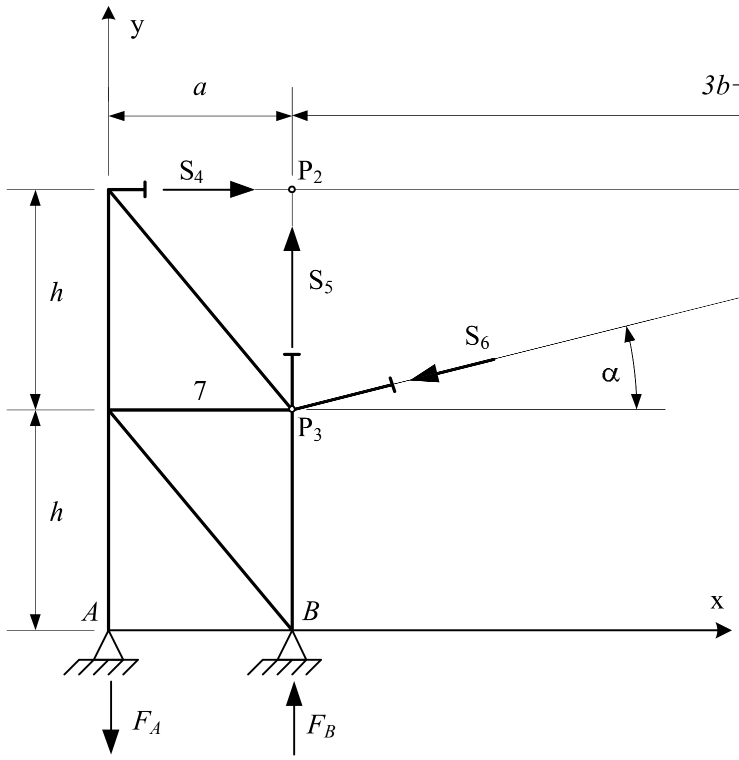
$$\sum_B M = 0 = -F_A \cdot a - F \cdot 3b$$

$$F_A = \frac{-F \cdot 3b}{a} = \frac{-100 \cdot (6)}{2.5} = -240kN(\downarrow)$$

$Ell.:$

$$\sum F_{yi} = 0 = F_B - F_A - F = 340 - 240 - 100 = 0$$

Átmetszéssel:



Rúderők meghatározása:

$$\alpha = arctg\frac{h/2}{3b} = arctg\frac{1,5}{6} = 14°$$

$$c = \frac{h/2}{tg\alpha} = 6m$$

$$\sum M_{P1} = 0 = F_A \cdot (a + 3b + c) - F_B \cdot (3b + c) + S_5 \cdot (3b + c)$$

$$S_5 = \frac{F_B \cdot (3b + c) - F_A \cdot (a + 3b + c)}{(3b + c)} = \frac{340 \cdot (12) - 240 \cdot (14.5)}{12} = 50kN$$

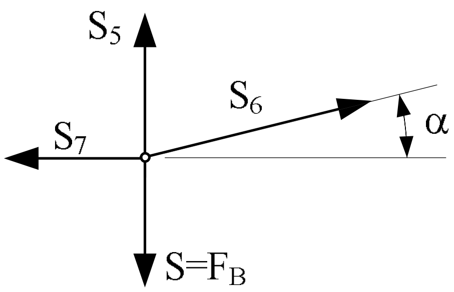
$$\sum M_{P2} = 0 = F_A \cdot a - S_6 \cdot cos\alpha \cdot h$$

$$S_6 = \frac{F_A \cdot a}{h \cdot cos\alpha} = \frac{240 \cdot 2.5}{3 \cdot cos14°} = 206.12kN$$

$$\sum M_{P3} = 0 = F_A \cdot a - S_4 \cdot h$$

$$S_4 = \frac{F_A \cdot a}{h} = \frac{240 \cdot 2.5}{3} = 200kN$$

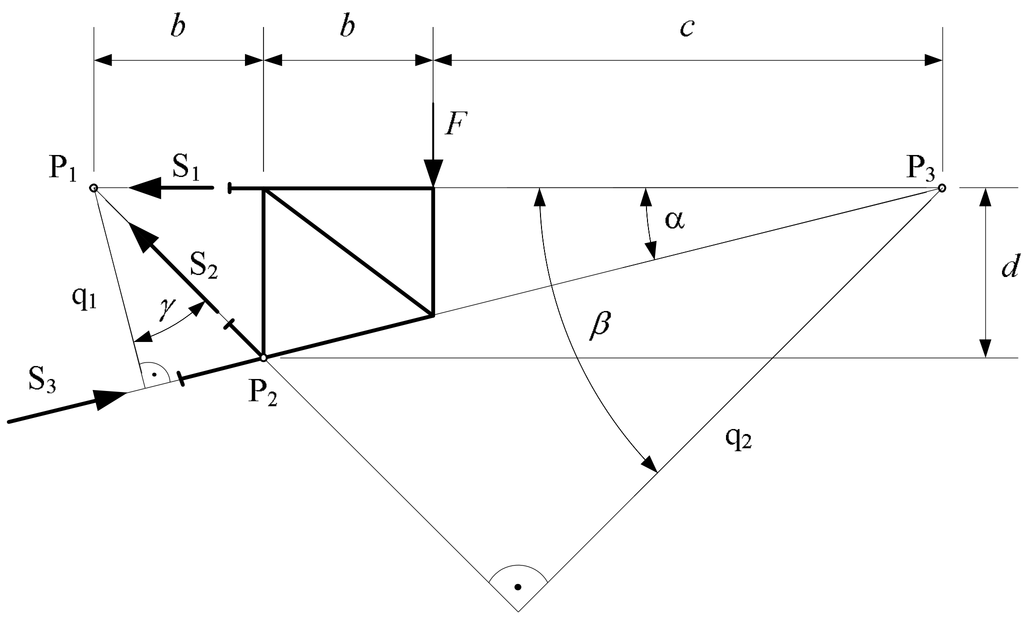
P_3 Pontban a rúderők:



$$\sum F_{xi} = 0 = -S_7 + S_6 \cdot cos\alpha$$

$$S_7 = S_6 \cdot cos\alpha = 200kN$$

Átmetszéssel:



Rúderők meghatározása:

$$\beta = 45°$$
$$\gamma = \beta - \alpha = 45° - 14° = 31°$$
$$d = \frac{h}{2} + b \cdot tg\alpha = 1.5 + 0{,}5 = 2m$$

$$2 - es \quad rúd \quad hossza:$$
$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2^2 + 2^2} = c \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{8}$$
$$q_1 = c \cdot cos\gamma = \sqrt{8} \cdot cos31° \cong 2.4244m$$

$$\sum M_{P1} = 0 = S_3 \cdot q_1 - F \cdot 2b$$
$$S_3 = \frac{F \cdot 2b}{q_1} = \frac{100 \cdot 4}{\sqrt{8} \cdot cos31°} \cong 165kN$$

$$\sum M_{P2} = 0 = S_1 \cdot d - F \cdot b$$
$$S_1 = \frac{F \cdot b}{d} = F = 100kN$$

$$q_2 = (2b + c) \cdot cos\beta = 12 \cdot cos45° = 8.4853m$$
$$\sum M_{P3} = 0 = F \cdot c - S_2 \cdot q_2$$
$$S_2 = \frac{F \cdot c}{q_2} = \frac{600}{12 \cdot cos45°} = 70.71kN$$

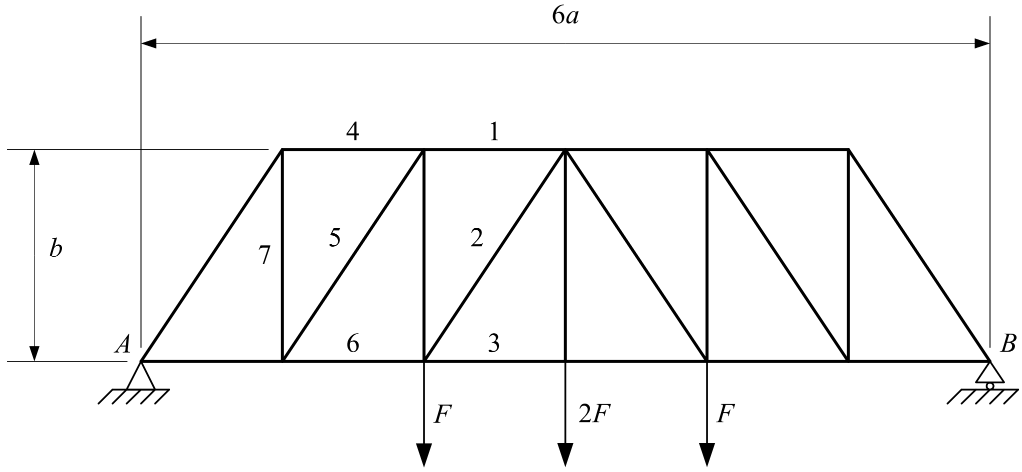
Az eredmények összefoglalása:

$S_1 = 100\ kN$
$S_2 = 70.71\ kN$
$S_3 = 165\ kN$
$S_4 = 200\ kN$
$S_5 = 50\ kN$
$S_6 = 206.12\ kN$
$S_7 = 200\ kN$

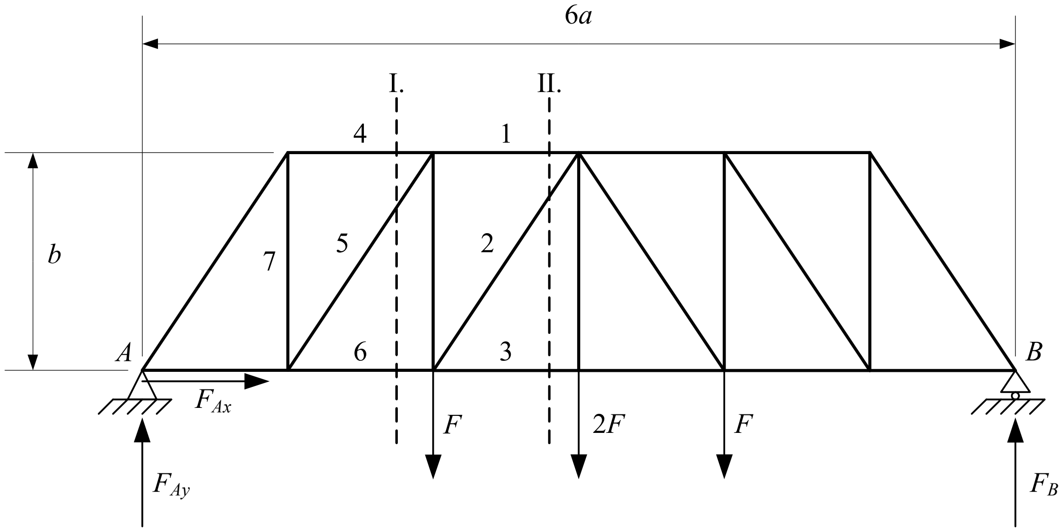
2.11/M3 Az ábrán vázolt rácsos szerkezetet a megadott erőrendszer terheli. Határozza meg a rácsos szerkezet egyensúlyát biztosító kényszereknél keletkező támaszerőket! Határozza meg a rácsos szerkezetbejelölt rúdjaiban ébredő rúderők nagyságát!

Adatok:

$$F = 30\,kN;\ a = 2\,m;\ b = 3\,m.$$



Megoldás:



Egyensúlyi egyenletek:

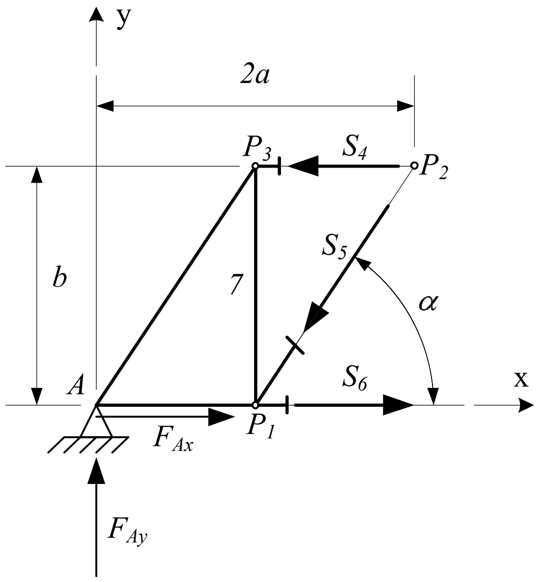
$$\sum M_A = 0 = -F2a - 2F3a - F4a + F_B 6a$$

$$F_B = \frac{F12a}{6a} = 60\ kN$$

$$\sum M_B = 0 = F2a + 2F3a + F4a - F_{Ay} 6a$$

$$F_{Ay} = \frac{F12a}{6a} = 60\ kN$$

Átmetszéssel:



Rúderők meghatározása:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{b}{a} = 56.31°$$

$$\sum M_{P1} = 0 = -F_{Ay}a + S_4 b$$

$$S_4 = \frac{F_{Ay}a}{b} = 40\ kN$$

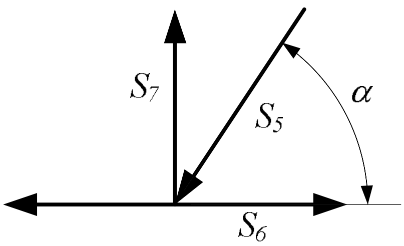
$$\sum M_{P2} = 0 = -F_{Ay}2a + S_6 b$$

$$S_6 = \frac{F_{Ay}2a}{b} = 80\ kN$$

$$\sum M_{P3} = 0 = -F_{Ay}a + S_6 b - S_5 b\cos\alpha$$

$$S_5 = \frac{-F_{Ay}a + S_6 b}{b\cos\alpha} = 72.11\ kN$$

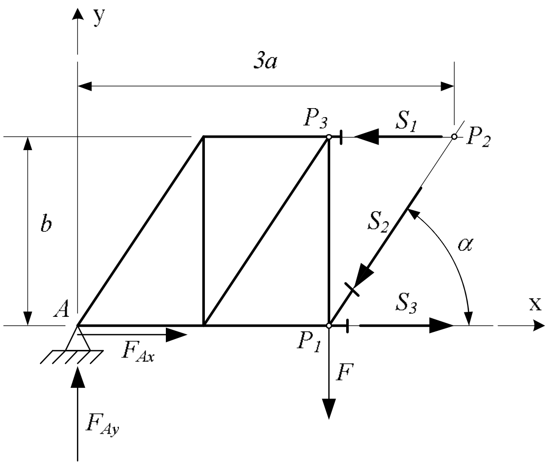
$P1$ Pontban a rúderők:



$$\sum F_{yi} = 0 = S_7 - S_5\sin\alpha$$

$$S_7 = S_5\sin\alpha = 60\ kN$$

Átmetszéssel:



Rúderők meghatározása:

$$\sum M_{P1} = 0 = -F_{Ay} 2a + S_1 b$$

$$S_1 = \frac{F_{Ay} 2a}{b} = 80\ kN$$

$$\sum M_{P2} = 0 = -F_{Ay} 3a + Fa + S_3 b$$

$$S_3 = \frac{F_{Ay} 3a - Fa}{b} = 100\ kN$$

$$\sum M_{P3} = 0 = -F_{Ay} 2a + S_3 b - S_2 b \cos\alpha$$

$$S_2 = \frac{-F_{Ay} 2a + S_3 b}{b \cos\alpha} = 36.06\ kN$$

Az eredmények összefoglalása:

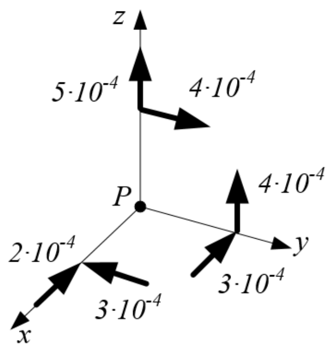
$S_1 = 80\ kN$
$S_2 = 36.06\ kN$
$S_3 = 100\ kN$
$S_4 = 40\ kN$
$S_5 = 72.11\ kN$
$S_6 = 80\ kN$
$S_7 = 60\ kN$

3. SZILÁRDSÁGTAN

3.1 Alakváltozási- és feszültségi állapot

3.1.1 Alakváltozási állapot értelmezése egy szilárd test P pontjában

3.1.1/M1 Az elemi triéderen ismert egy szilárd test P pontjának alakváltozási állapota.



Kérdések:
a, Írja fel a P pont $\mathbf{A}_P$ alakváltozási tenzorát!
b, Határozza meg az $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ és $\boldsymbol{k}$ irányokhoz tartozó $\boldsymbol{\alpha}_x$, $\boldsymbol{\alpha}_y$, $\boldsymbol{\alpha}_z$ alakváltozási vektorokat!
c, Határozza meg az $\varepsilon_x, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ alakváltozási jellemzőket!
Megoldás:
a, Az alakváltozási tenzor:

$$\boldsymbol{A}_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

b, Az alakváltozási tenzor diadikus alakja:

$$\boldsymbol{A}_P = \boldsymbol{\alpha}_x \circ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{\alpha}_y \circ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{\alpha}_z \circ \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_x = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

c, Az értékek az alakváltozási tenzorból kiolvashatóak:

$$\varepsilon_x = -2 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 8 \cdot 10^{-4} rad = 8 \cdot 10^{-4} \frac{180°}{\pi} = 0.04584°$$

3.1.2 Alakváltozási jellemzők számítása

3.1.2/M1 Adott egy P pont környezetében az alakváltozási jellemzők és az $\boldsymbol{n}$ és $\boldsymbol{m}$ egységvektorok.
Adatok:

$$\varepsilon_x = -10 \cdot 10^{-5},\ \varepsilon_y = 8 \cdot 10^{-5},\ \varepsilon_z = 5 \cdot 10^{-5},\ \gamma_{xz} = \gamma_{xy} = 0,\ \gamma_{yz} = -5 \cdot 10^{-3}$$
$$\boldsymbol{n} = -0.6\boldsymbol{i} + 0.8\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{m} = 0.8\boldsymbol{i} + 0.6\boldsymbol{k}$$

Kérdések:
a, Írja fel a P pontban az alakváltozási tenzort!
b, Határozza meg $\boldsymbol{n}$ irányban az ε_n fajlagos megnyúlást! Határozza meg a γ_{mn} fajlagos szögtorzulás értékét!
c, Határozza meg $\boldsymbol{m}$ irányban az ε_m fajlagos megnyúlást! Határozza meg a γ_{nm} fajlagos szögtorzulás értékét!
d, Határozza meg a γ_{zm} fajlagos szögtorzulás értékét!
Megoldás:
a, Az alakváltozási tenzor a szilárd test P pontjában

$$\boldsymbol{A}_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} 10^{-5}$$

b,

$$\varepsilon_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A}_P \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\alpha}_n \cdot \boldsymbol{n} = [6 \quad -4 \quad 4] \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix} 10^{-5} = -0.4 \cdot 10^{-5}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{A}_P \cdot \boldsymbol{n} = 10^{-5} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} 10^{-5}$$

$$\gamma_{mn} = 2 \cdot \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{A}_P \cdot \boldsymbol{n} = 2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_n \cdot \boldsymbol{m} = 2 \cdot [6 \quad -4 \quad 4] \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix} 10^{-5} = 7.2 \cdot 10^{-5}$$

c,

$$\varepsilon_m = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{A}_P \cdot \boldsymbol{m} = \boldsymbol{\alpha}_m \cdot \boldsymbol{m} = [-8 \quad -3 \quad 3] \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix} 10^{-5} = -4.6 \cdot 10^{-5}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{A}_P \cdot \boldsymbol{m} = 10^{-5} \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} 10^{-5}$$

$$\gamma_{nm} = 2 \cdot \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A}_P \cdot \boldsymbol{m} = 2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_m \cdot \boldsymbol{n} = 2 \cdot [-8 \quad -3 \quad 3] \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0 \\ 0.8 \end{bmatrix} 10^{-5} = 7.2 \cdot 10^{-5} = \gamma_{mn}$$

d,

$$\gamma_{zm} = 2 \cdot \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A}_p \cdot \boldsymbol{m} = 2 \cdot \boldsymbol{\alpha}_m \cdot \boldsymbol{k} = 2 \cdot [-8 \quad -3 \quad 3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} 10^{-5} = 3 \cdot 10^{-5}$$

3.1.3 Feszültségi állapot értelmezése egy szilárd test P pontjában.

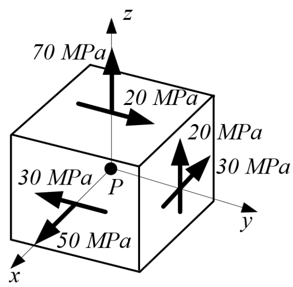
3.1.3/M1 Adott egy szilárd test P pontjának feszültség tenzora.
Adatok:

$$\boldsymbol{T}_P = \begin{bmatrix} 50 & -30 & 0 \\ -30 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 70 \end{bmatrix} MPa$$

Kérdések:
a, Határozza meg x, y, z irányokban a feszültségvektorokat!
b, Ábrázolja a feszültségi állapotot az elemi triéderen!
Megoldás:
a, A feszültségi tenzor diadikus alakja:

$$\boldsymbol{T}_P = \boldsymbol{\rho}_x \circ \boldsymbol{i} + \boldsymbol{\rho}_y \circ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{\rho}_z \circ \boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{\rho}_x = \sigma_x \boldsymbol{e}_x + \tau_{yx} \boldsymbol{e}_y + \tau_{zx} \boldsymbol{e}_z = (50\boldsymbol{i} - 30\boldsymbol{j})MPa$$
$$\boldsymbol{\rho}_y = \tau_{xy} \boldsymbol{e}_x + \sigma_y \boldsymbol{e}_y + \tau_{zy} \boldsymbol{e}_z = (-30\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{k})MPa$$
$$\boldsymbol{\rho}_z = \tau_{xz} \boldsymbol{e}_x + \tau_{yz} \boldsymbol{e}_y + \tau_{zx} \boldsymbol{e}_z = (20\boldsymbol{j} + 70\boldsymbol{k})MPa$$

b, A feszültségi állapot alakulása a P pont környezetéből kiragadott elemi kockán:



3.1.4 Feszültségi jellemzők számítása

3.1.4/M1 Adott egy P pont környezetében az $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ és $\boldsymbol{k}$ irányokhoz tartozó $\boldsymbol{\rho}_x$, $\boldsymbol{\rho}_y$, $\boldsymbol{\rho}_z$ feszültségvektorok és az $\boldsymbol{n}$ és $\boldsymbol{m}$ egységvektorok.
Adatok:

$$\boldsymbol{\rho}_x = (60\boldsymbol{i} + 90\boldsymbol{k})MPa, \boldsymbol{\rho}_y = \left(-30\sqrt{5}\boldsymbol{k}\right)MPa, \boldsymbol{\rho}_z = (90\boldsymbol{i} - 30\sqrt{5}\boldsymbol{j} + 50\boldsymbol{k})MPa$$
$$\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{5}}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{m} = -\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{5}}{3}\boldsymbol{j}$$

Kérdések:
a, Írja fel a P pontban a feszültségi tenzort!
b, Határozza meg $\boldsymbol{n}$ irányban a σ_n normál feszültség értékét! Határozza meg a τ_{mn} csúsztató feszültség értékét!
c, Határozza meg $\boldsymbol{m}$ irányban az σ_m normál feszültség értékét! Határozza meg a τ_{nm} csúsztató feszültség értékét!
d, Határozza meg a τ_{xn} csúsztató feszültség értékét!

Megoldás:
a, A feszültségi tenzor a szilárd test P pontjában

$$\boldsymbol{T}_P = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & -30\sqrt{5} \\ 90 & -30\sqrt{5} & 50 \end{bmatrix} MPa$$

b,

$$\sigma_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}_P \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\rho}_n \cdot \boldsymbol{n} = [20\sqrt{5} \quad 0 \quad 10\sqrt{5}] \begin{bmatrix} \sqrt{5}/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} MPa = \frac{100}{3} MPa$$

$$\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{T}_P \cdot \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & -30\sqrt{5} \\ 90 & -30\sqrt{5} & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5}/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} MPa = \begin{bmatrix} 20\sqrt{5} \\ 0 \\ 10\sqrt{5} \end{bmatrix} MPa$$

$$\tau_{mn} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{T}_P \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\rho}_n \cdot \boldsymbol{m} = [20\sqrt{5} \quad 0 \quad 10\sqrt{5}] \begin{bmatrix} -2/3 \\ \sqrt{5}/3 \\ 0 \end{bmatrix} MPa = -\frac{40\sqrt{5}}{3} MPa$$

c,

$$\sigma_m = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{T}_P \cdot \boldsymbol{m} = \boldsymbol{\rho}_m \cdot \boldsymbol{m} = [-40 \quad 0 \quad -110] \begin{bmatrix} -2/3 \\ \sqrt{5}/3 \\ 0 \end{bmatrix} MPa = \frac{80}{3} MPa$$

$$\boldsymbol{\rho}_m = \boldsymbol{T}_P \cdot \boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & -30\sqrt{5} \\ 90 & -30\sqrt{5} & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 \\ \sqrt{5}/3 \\ 0 \end{bmatrix} MPa = \begin{bmatrix} -40 \\ 0 \\ -110 \end{bmatrix} MPa$$

$$\tau_{nm} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}_P \cdot \boldsymbol{m} = \boldsymbol{\rho}_m \cdot \boldsymbol{n} = [-40 \quad 0 \quad -110] \begin{bmatrix} \sqrt{5}/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} MPa = -\frac{40\sqrt{5}}{3} MPa = \tau_{mn}$$

d,

$$\tau_{xn} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{T}_p \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\rho}_n \cdot \boldsymbol{i} = [20\sqrt{5} \quad 0 \quad 10\sqrt{5}] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} MPa = 20\sqrt{5} MPa$$

3.1.5 Általános Hooke-törvény alkalmazása feszültségi tenzor meghatározására.

3.1.5/M1 Az általános Hooke-törvény felhasználásával ismert alakváltozás esetén határozza meg a P pont feszültségi tenzorát!
Adatok:

$$\boldsymbol{\alpha}_x = [4 \quad 3 \quad 0] \cdot 10^{-5}, \boldsymbol{\alpha}_y = [3 \quad -2 \quad -3] \cdot 10^{-5}, \boldsymbol{\alpha}_z = [0 \quad -3 \quad 7] \cdot 10^{-5}$$
$$\nu = 0.3; \; E = 2.1 \cdot 10^5 MPa$$

Megoldás:
Az általános Hooke-törvény értelmében:

$$\boldsymbol{T}_P = 2G\left(\boldsymbol{A}_P + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \cdot \boldsymbol{I}\right),$$

ahol

$$E = 2G(1+\nu) \Rightarrow 2G = \frac{E}{1+\nu} = 1.6 \cdot 10^5 MPa$$

$$\boldsymbol{A}_P = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} 10^{-5}$$
$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 9 \cdot 10^{-5}$$
$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Így

$$\boldsymbol{T}_P = 1.6 \cdot 10^5 MPa \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} 10^{-5} + \frac{0.3}{1 - 2 \cdot 0.3} \cdot 9 \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$
$$1.6 \cdot 10^5 MPa \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} 10^{-5} + \begin{bmatrix} 6.75 & 0 & 0 \\ 0 & 6.75 & 0 \\ 0 & 0 & 6.75 \end{bmatrix} 10^{-5} \right) =$$
$$1.6 \cdot 10^5 MPa \begin{bmatrix} 10.75 & 3 & 0 \\ 3 & 4.75 & -3 \\ 0 & -3 & 13.75 \end{bmatrix} 10^{-5} = \begin{bmatrix} 17.2 & 4.8 & 0 \\ 4,8 & 7.6 & -4.8 \\ 0 & -4.8 & 22 \end{bmatrix} MPa$$

3.1.6 Általános Hooke-törvény alkalmazása az alakváltozási tenzor meghatározására.

3.1.6/M1 Adott egy P pont környezetében az $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ és $\boldsymbol{k}$ irányokhoz tartozó $\boldsymbol{\rho}_x$, $\boldsymbol{\rho}_y$, $\boldsymbol{\rho}_z$ feszültségvektorok. Az általános Hooke-törvény felhasználásával határozza meg a P pont alakváltozási tenzorát!

Adatok:

$$\boldsymbol{\rho}_x = [20 \quad 30 \quad -30] MPa, \boldsymbol{\rho}_y = [30 \quad -40 \quad 0] MPa, \boldsymbol{\rho}_z = [-30 \quad 0 \quad -80] MPa$$
$$\nu = 0.3; \;\; E = 2.1 \cdot 10^5 MPa$$

Megoldás:

Az általános Hooke-törvény értelmében:

$$\boldsymbol{A}_P = \frac{1}{2G}\left(\boldsymbol{T}_P - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \cdot \boldsymbol{I}\right),$$

ahol

$$E = 2G(1+\nu) \rightarrow 2G = \frac{E}{1+\nu} = 1.6 \cdot 10^5 MPa$$
$$\boldsymbol{T}_P = \begin{bmatrix} 20 & 30 & -30 \\ 30 & -40 & 0 \\ -30 & 0 & -80 \end{bmatrix} MPa$$
$$T_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = -100 MPa$$
$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Így

$$\boldsymbol{A}_P = \frac{1}{1.6 \cdot 10^5 MPa} \left(\begin{bmatrix} 20 & 30 & -30 \\ 30 & -40 & 0 \\ -30 & 0 & -80 \end{bmatrix} MPa - \frac{0,3}{1+0,3} \cdot (-100 MPa) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$
$$\frac{1}{1.6 \cdot 10^5 MPa} \left(\begin{bmatrix} 20 & 30 & -30 \\ 30 & -40 & 0 \\ -30 & 0 & -80 \end{bmatrix} MPa - \begin{bmatrix} -23.08 & 0 & 0 \\ 0 & -23.08 & 0 \\ 0 & 0 & -23.08 \end{bmatrix} MPa \right) =$$

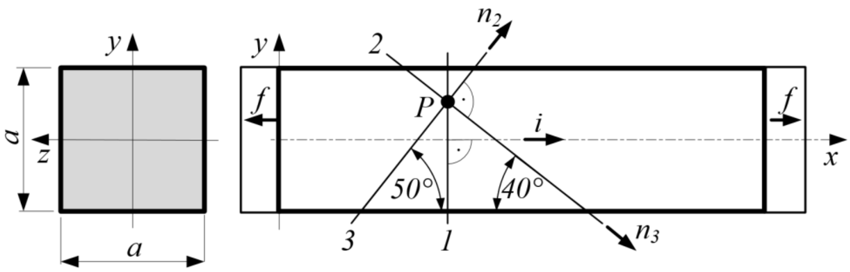
$$\frac{1}{1.6\cdot 10^{5}MPa}\begin{bmatrix}43.08 & 30 & -30\\ 30 & -63.08 & 0\\ -30 & 0 & -103.08\end{bmatrix}MPa=\begin{bmatrix}26.88 & 18.75 & -18.75\\ 18.75 & -39.43 & 0\\ -18.75 & 0 & -64.43\end{bmatrix}\cdot 10^{-5}$$

3.2 Egyszerű igénybevételek

3.2.1 Egyszerű igénybevételek: Húzás (nyomás)

3.2.1/1M Egy négyzet keresztmetszetű rúd végén f intenzitású megoszló terhelés hat. A P ponton keresztül kettévágjuk a rudat, a rajz síkjára merőleges $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{n}_2$ és $\boldsymbol{n}_3$ normálisú síkokkal.
Adatok:

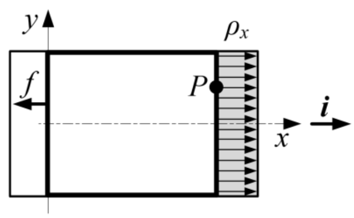
$$f = 250\frac{N}{mm^2}, \qquad a = 100mm$$



Kérdések:
a, Határozza meg a rúd tengelyére merőleges sík P pontjában ébredő feszültségvektor nagyságát, majd írja fel a P pontbeli feszültségtenzort!
b, Határozza meg az $\boldsymbol{n}_2$ és $\boldsymbol{n}_3$ normálisú sík P pontjában ébredő feszültségvektor nagyságát. Számítsa ki a $\boldsymbol{\rho}_{n_i}$ feszültségvektor koordinátáinak nagyságát az $\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{m}_i, \boldsymbol{k}_i$ helyi koordináta rendszerben!

Megoldás:
a,
A P pont közvetlen környezetében a feszültségvektor a következő képen értelmezhető:

$$\boldsymbol{\rho}_{n_i} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta A}$$



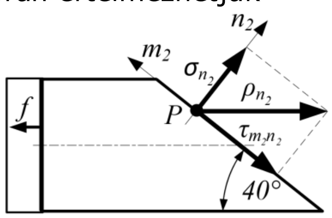
Mivel a keresztmetszetek igénybevétele állandó intenzitású felületen megoszló terhelés igaz hogy

$$\boldsymbol{\rho}_x = \frac{N}{A} \cdot \boldsymbol{i} = \frac{fA}{A} \cdot \boldsymbol{i} = f \cdot \boldsymbol{i} = 250\boldsymbol{i}\frac{N}{mm^2} = 250\boldsymbol{i}MPa$$

Az $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ egységvektorok által kijelölt koordinátarendszerben $\boldsymbol{\rho}_x$ iránya párhuzamos az $\boldsymbol{i}$ egységvektorral így $\tau_{yx} = 0$. Így a P pontbeli feszültségtenzornak egyetlen eleme van

$$\boldsymbol{T}_P = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

b, A második sík által kimetszett keresztmetszet P pontjában ébredő $\boldsymbol{\rho}_{n_2}$ feszültségvektort a következő ábrán értelmezhetjük



$$|\boldsymbol{\rho}_{n_2}| = \frac{N}{A_2} = \frac{fA}{A_2} = f\sin\ 40° = 160.7MPa$$

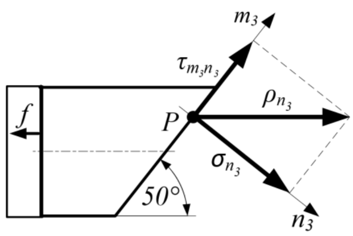
$$A_2 = a\frac{a}{\sin\ 40°} = \frac{a^2}{\sin\ 40°} = \frac{A}{\sin\ 40°}$$

Az $\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{k}_2$ helyi koordináta rendszerben a $\boldsymbol{\rho}_{n_2}$ feszültségvektornak lesz normál- és csúsztatófeszültség komponense is,

$$\sigma_{n_2} = |\boldsymbol{\rho}_{n_2}| \sin 40° = 103.3MPa$$

$$\tau_{m_2n_2} = |\boldsymbol{\rho}_{n_2}| \cos 40° = -123.1MPa$$

A harmadik sík által kimetszett keresztmetszet P pontjában ébredő $\boldsymbol{\rho}_{n_3}$feszültségvektor



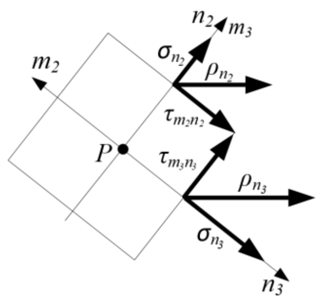
$$|\boldsymbol{\rho}_{n_3}| = \frac{N}{A_3} = \frac{fA}{A_3} = f\sin\ 50° = 191.51MPa$$

$$A_3 = a\frac{a}{\sin\ 50°} = \frac{A}{\sin\ 50°}$$

$$\sigma_{n_3} = |\boldsymbol{\rho}_{n_3}| \cos 50° = 146.71MPa$$

$$\tau_{m_2n_2} = |\boldsymbol{\rho}_{n_3}| \sin 50° = 123.1MPa = -\tau_{m_2n_2}$$

Érdemes megfigyelni, hogy az egymásra merőleges síkokban ébredő csúsztatófeszültségek nagysága megegyezik, erre majd a csúsztató feszültségek dualitásának ismertetése ad magyarázatot.



Az 1.4-es feladatban ismertetett számításmenettel is megkaphatjuk a $\boldsymbol{\rho}_{n_3}$ feszültségvektort és komponenseit. Ehhez először határozzuk meg az $\boldsymbol{n}_3$ és $\boldsymbol{m}_3$ egységvektorokat

$$\boldsymbol{n}_3 = \cos 40\,°\boldsymbol{i} - \sin 40\,°\boldsymbol{j}, \boldsymbol{m}_3 = \cos 50\,°\boldsymbol{i} + \sin 50\,°\boldsymbol{j}$$

Majd a feladat a, részében meghatározott T_P feszültségtenzorból kiindulva megkaphatjuk a $\boldsymbol{\rho}_{n_3}$ feszültségvektort és komponenseit,

$$\boldsymbol{\rho}_{n_3} = \boldsymbol{T}_P \cdot \boldsymbol{n}_3 = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 40\,° \\ -\sin 40\,° \\ 0 \end{bmatrix} MPa = \begin{bmatrix} 250 \cdot \cos 40\,° \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} MPa = \begin{bmatrix} 191.51 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} MPa$$

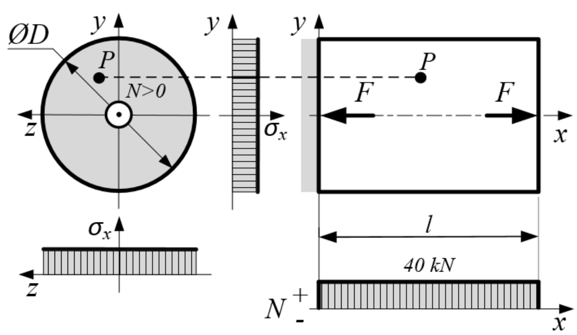
$$\sigma_{n_3} = \boldsymbol{\rho}_{n_3} \cdot \boldsymbol{n}_3 = [191.51 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \cos 40\,° \\ -\sin 40\,° \\ 0 \end{bmatrix} MPa = 146.71 MPa$$

$$\tau_{m_3n_3} = \boldsymbol{\rho}_{n_3} \cdot \boldsymbol{m}_3 = [191.51 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \cos 50\,° \\ \sin 50\,° \\ 0 \end{bmatrix} MPa = 123.1 MPa$$

3.2.1/2M Egyszerű igénybevételek: húzás. Az ábrán látható kör keresztmetszetű befogott rudat a végén lévő erő terheli.

Adatok:

$$l = 800\ mm, D = 30\ mm, E = 2.1 \cdot 10^5 MPa, \nu = 0.33, F = 40 kN$$



Kérdések:

a, Rajzolja fel a normál igénybevételi ábrát majd határozza meg a tartó veszélyes keresztmetszetét. Határozza meg a veszélyes keresztmetszetben ébredő igénybevétel nagyságát. Ábrázolja a feszültségek eloszlását az y és z tengelyek mentén! Határozza meg a feszültség eloszlásból a veszélyes pont(ok)-at.

b, Írja fel a P ponthoz tartozó feszültségtenzort!

c, Határozza meg a rudat terhelő erő hatására létrejövő hosszváltozást (Δl) és a rúd átmérőjének megváltozását (ΔD)!
e, Írja fel a P ponthoz tartozó alakváltozási tenzort!

Megoldás:
a, Veszélyes keresztmetszet: a rúd összes keresztmetszete.
Igénybevétel nagysága a veszélyes keresztmetszetben: $N = 40\ kN$
Veszélyes pontok: a keresztmetszet összes pontja.
b,

$$\boldsymbol{T}_P = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56.59 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$\sigma_x(P) = \frac{N}{A} = \frac{N}{\frac{D^2\pi}{4}} = \frac{40\ kN \cdot 10^3}{706.86\ mm^2} = 56.59 MPa$$

c,

$$\varepsilon_x = \frac{l' - l}{l} = \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = l \cdot \varepsilon_x = 800\ mm \cdot 2.69 \cdot 10^{-4} = 0.21558 mm$$

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{56.59 MPa}{2.1 \cdot 10^5 MPa} = 2.69 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_k = \frac{D' - D}{D} = \frac{\Delta D}{D} \Rightarrow \Delta D = D \cdot \varepsilon_k = 30\ mm \cdot (-0.8089 \cdot 10^{-4}) = -2.668 \cdot 10^{-3} mm$$

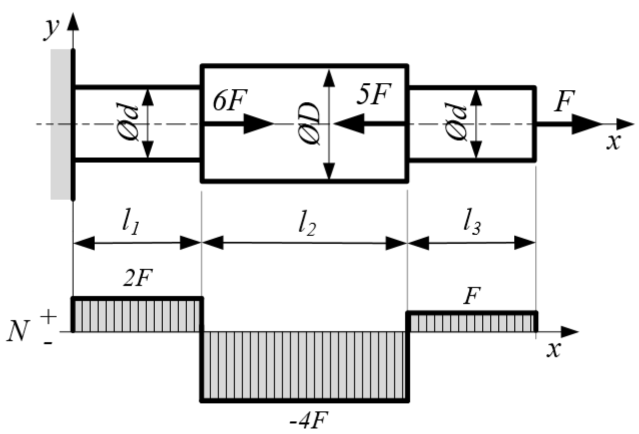
$$\varepsilon_k = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -0.8089 \cdot 10^{-4}$$

d,

$$\boldsymbol{A}_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.69 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8089 & 0 \\ 0 & 0 & -0.8089 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

3.2.1/3M Egyszerű igénybevételek: húzás-nyomás. Adott egy változó keresztmetszetű rúd és annak terhelése.
Adatok:

$$d = 100 mm, D = 150 mm, l_1 = l_3 = 0.2 m, l_2 = 0.3 m, F = 100 kN, E = 0.7 \cdot 10^5\ MPa$$



Kérdések:
a, Határozza meg a rúd igénybevételeit!
b, Határozza meg az ébredő normálfeszültségeket!
c, Számolja ki a rúdszakaszok, és a teljes rúd hosszváltozását!

Megoldás:
a, Igénybevételek a rúd különböző szakaszaiban:

$$N_1 = 200kN$$
$$N_2 = -400kN$$
$$N_3 = 100kN$$

b, Előzetes megtekintés után az 1-es és 2-es szakasz lehet a rúd veszélyes keresztmetszete:

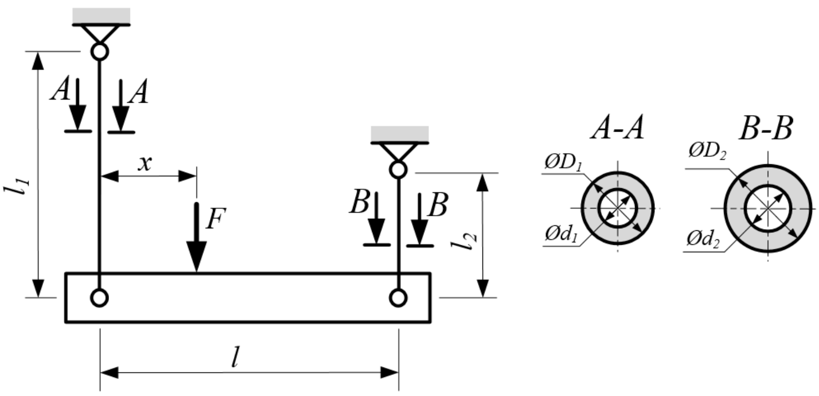
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{200 \cdot 10^3\ N}{7854mm^2} = 24.56MPa$$
$$A_1 = \frac{d^2\pi}{4} = 7854mm^2$$
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-400 \cdot 10^3\ N}{17671mm^2} = -22.64MPa$$
$$A_2 = \frac{D^2\pi}{4} = 17671mm^2$$

A rúd teljes 1-es szakasza veszélyes.
c, Hosszváltozások számítása:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{3} \Delta l_i = \frac{l_i \cdot N_i}{A_i \cdot E}$$
$$\Delta l_1 = \frac{F_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} + \frac{F_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} + \frac{F_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot l_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot l_2} + \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot l_3}$$
$$\Delta l_1 = \frac{l_1 \cdot N_1}{A_1 \cdot E} = \frac{200\ mm \cdot 2 \cdot 10^5\ N}{7854mm^2 \cdot 0.7 \cdot 10^5\ MPa} = 0.07276\ mm$$
$$\Delta l_2 = \frac{l_2 \cdot N_2}{A_2 \cdot E} = \frac{300\ mm \cdot (-4 \cdot 10^5\ N)}{17671mm^2 \cdot 0.7 \cdot 10^5\ MPa} = -0.09701\ mm$$
$$\Delta l_3 = \frac{l_3 \cdot N_3}{A_3 \cdot E} = \frac{200\ mm \cdot 10^5\ N}{7854mm^2 \cdot 0.7 \cdot 10^5\ MPa} = 0.03638\ mm = \frac{\Delta l_1}{2}$$
$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.01214mm$$

3.2.1/4M Egyszerű igénybevételek: húzás. Egy merevnek tekinthető gerendát különböző méretű és anyagú rúddal függesztettünk fel az ábrán látható módon.
Adatok:

$$l = 1.5\ m = 1500mm, l_1 = 1.5m = 1500mm, l_2 = 0.5m = 500mm$$
$$d_1 = 20mm, D_1 = 30mm, d_2 = 35mm, D_2 = 40mm, E_1 = 210GPa, E_2 = 70GPa$$



Kérdés:
Határozza meg, hol kell elhelyezni az F erő támadáspontját ahhoz, hogy a gerenda csak önmagával párhuzamosan mozdulhasson el?

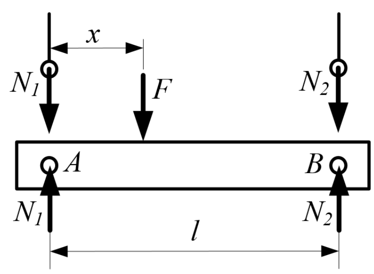
Megoldás:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2$$
$$\frac{l_1\, N_1}{E_1\, A_1} = \frac{l_2\, N_2}{E_2\, A_2}$$

Ahol

$$A_1 = \frac{(D_1^2 - d_1^2) \cdot \pi}{4} = 393mm^2$$
$$A_2 = \frac{(D_2^2 - d_2^2) \cdot \pi}{4} = 295mm^2$$

Az N_1 és N_2 nem ismert, értékük az erő támadáspontjának függvénye,



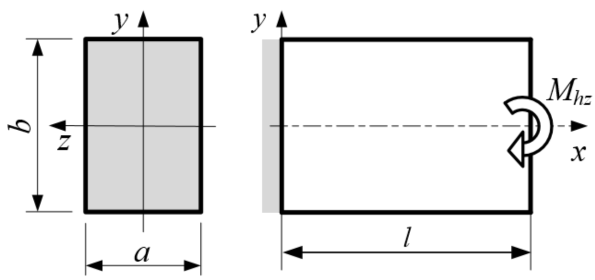
$$\sum M_A = 0 = -F\,x + l\,N_2 \Longrightarrow \quad N_2 = \frac{F \cdot x}{l}$$
$$\sum M_B = 0 = -N_1\,l + F(l - x) \Longrightarrow N_1 = \frac{F(l - x)}{l}$$

$$\frac{l_1 \cdot \frac{F(l-x)}{l}}{E_1\, A_1} = \frac{l_2 \cdot \frac{F\, x}{l}}{E_2\, A_2}$$
$$\frac{l_1(l-x)}{E_1\, A_1} = \frac{l_2\, x}{E_2\, A_2}$$
$$\frac{l-x}{x} = \frac{l_2\, E_1\, A_1}{l_1\, E_2\, A_2}$$
$$\frac{1500mm - x}{x} = \frac{500mm \cdot 210 \cdot 10^3 MPa \cdot 393mm^2}{1500mm \cdot 70 \cdot 10^3 MPa \cdot 295mm^2}$$
$$\frac{1500mm - x}{x} = \frac{393}{295} = 1.3322$$
$$1500mm = 2.3322x$$
$$x = 643.17mm$$

3.2.2 Egyszerű igénybevételek: Egyenes hajlítás.

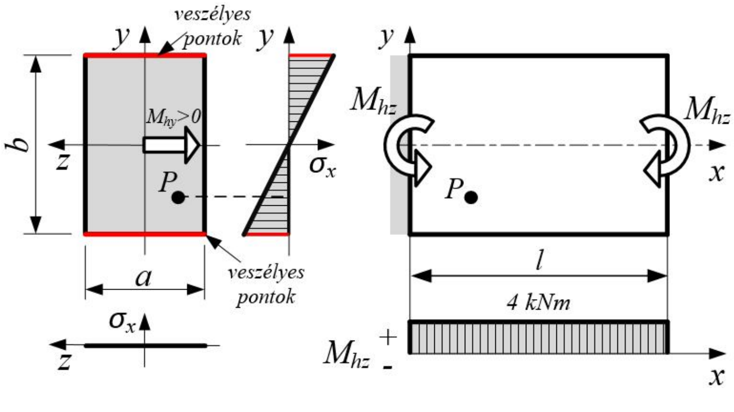
3.2.2/1M Adott egy téglalap keresztmetszetű tartó és igénybevétele!
Adatok:

$$R_{p\,0.2} = 320MPa, n = 1.6, P = \left(\frac{l}{2}; -20; -10\right) mm, a = 40mm, b = 60mm$$
$$M_{hz} = 4kNm, E = 2.1 \cdot 10^5 MPa, \nu = 0.3$$



Kérdések:
a, Határozzuk meg a P pont feszültségi- és alakváltozási tenzorát!
b, Végezzük el a tartó szilárdsági ellenőrzését!

Megoldás:
a,



$$\boldsymbol{T}_P=\begin{bmatrix}\sigma_x(P) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-111.\dot{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}MPa$$

$$\sigma_x(P)=\frac{M_{hz}}{I_z}y_P=\frac{4\,kNm}{7.2\cdot 10^5 mm^4}\cdot(-20mm)=\frac{4\cdot 10^6 Nmm}{7.2\cdot 10^5 mm^4}\cdot(-20mm)=-111.1\frac{N}{mm^2}=-111.1MPa$$

$$I_z=\frac{ab^3}{12}=\frac{40\cdot 60^3}{12}=720000mm^4$$

$$\boldsymbol{A}_P=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_y & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5.291 & 0 & 0\\ 0 & 1.587 & 0\\ 0 & 0 & 1.587\end{bmatrix}\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x(P)}{E}=\frac{-111.\dot{1}MPa}{2{,}1\cdot 10^5}=-5.291\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y=\varepsilon_z=-\nu\varepsilon_x=-0.3\cdot(-5.291\cdot 10^{-4})=1.587\cdot 10^{-4}$$

b, A szilárdságtani ellenőrzés alapegyenlete:

$$\sigma_{xmax}\leq\sigma_{meg}$$

Ahol

$$\sigma_{meg}=\frac{R_{p\,0.2}}{n}=\frac{320MPa}{1.6}=200MPa$$

$$\sigma_{x\,max}=\frac{M_{hz}}{I_z}y_{max}=\frac{M_{Hz}}{K_z}=\frac{4\cdot 10^6}{2.4\cdot 10^4}=166.67MPa$$

$$K_z=I_z\frac{1}{y_{max}}=\frac{ab^3}{12}\cdot\frac{2}{b}=\frac{ab^2}{6}=\frac{40\cdot 60^2}{6}=2.4\cdot 10^4 mm^3$$

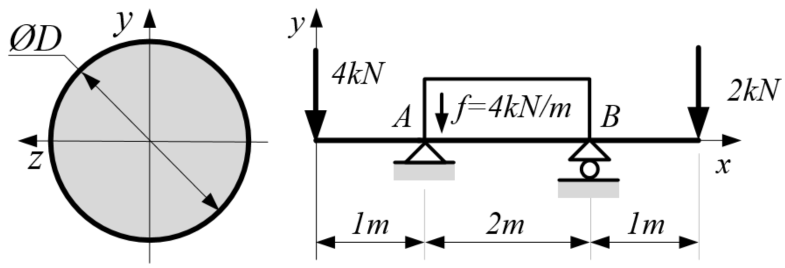
$$\sigma_{x\,max}\leq\sigma_{meg}\ \rightarrow 166.67MPa\leq 200MPa$$

Ezek alapján a tartó szilárdságilag megfelel.

3.2.2/2M Egyszerű igénybevételek: hajlítás. Ismert egy kéttámaszú tartó és annak terhelése.

Adatok:

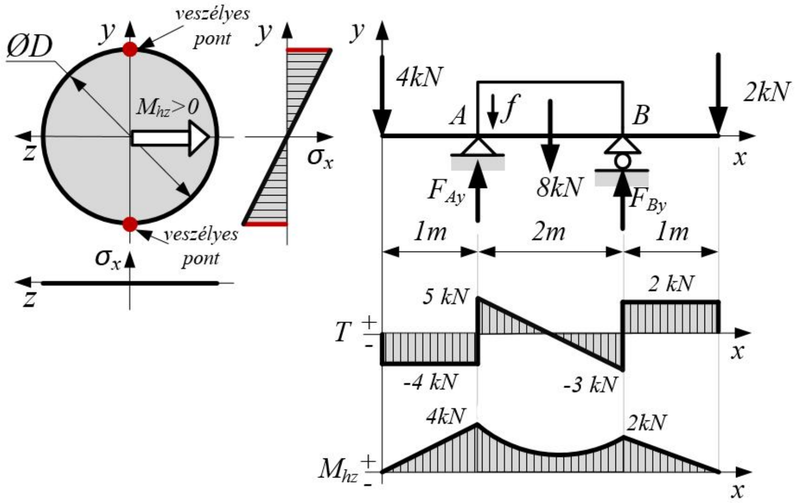
$$\sigma_{meg}=170MPa$$



Kérdés:

Méretezze a rudat feszültség csúcsra (a nyírásból származó feszültséget elhanyagoljuk)!

Megoldás:



$$\sigma_{xmax} = \frac{|M_{hz}|}{K_z} \leq \sigma_{meg} \Longrightarrow K_z \geq \frac{|M_{hz}|}{\sigma_{meg}}$$

$$K_{zmin} = \frac{|M_{hz}|}{\sigma_{meg}} = \frac{|4 \cdot 10^6 Nmm|}{170MPa} = 2.353 \cdot 10^4\ mm^3$$

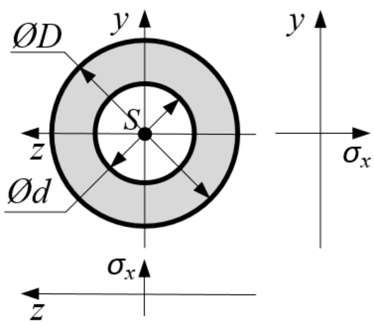
$$K_{zmin} = \frac{D^3 \cdot \pi}{32} \Longrightarrow D_{min} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot K_{zmin}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2.353 \cdot 10^4 mm^3}{\pi}} = 62.11mm$$

$$\downarrow$$

$$D_{alk} = 65mm$$

3.2.2/3M Egyszerű igénybevételek: hajlítás. Ismert egy körgyűrű keresztmetszetű rúd terhelése (a keresztmetszet súlypontjába redukált nyomatékvektor) és az átmérőarány. Adatok:

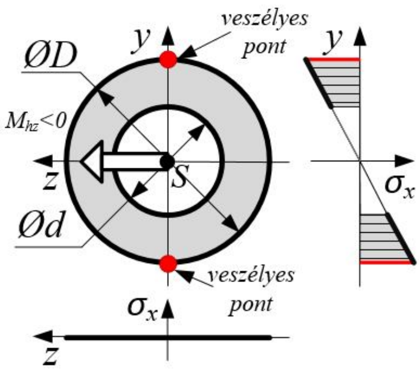
$$\sigma_{meg} = 100MPa, \frac{D}{d} = \frac{4}{3}, \boldsymbol{M}_S = 4.5\boldsymbol{k}\ kNm$$



Kérdés:

Méretezze a rudat feszültség csúcsra (a nyírásból származó feszültséget elhanyagoljuk)!

Megoldás:



$$\sigma_{xmax} = \frac{|M_{hz}|}{K_z} \leq \sigma_{meg} \rightarrow K_z \geq \frac{|M_{hz}|}{\sigma_{meg}}$$

$$K_{zmin} = \frac{|M_{hz}|}{\sigma_{meg}} = \frac{|-4{,}5 \cdot 10^6 Nmm|}{100MPa} = 4.5 \cdot 10^4 mm^3$$

$$K_z = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{32D} = \frac{\left[\left(\frac{4}{3}d\right)^4 - d^4\right]\pi}{32 \cdot \frac{4}{3}d} = \frac{\left[\left(\frac{256}{81}d^4\right) - d^4\right]\pi}{\frac{128}{3}d} = \frac{\frac{175}{81}d^4\pi}{\frac{128}{3}d} = \frac{175d^3\pi}{27 \cdot 128}$$

$$\downarrow$$

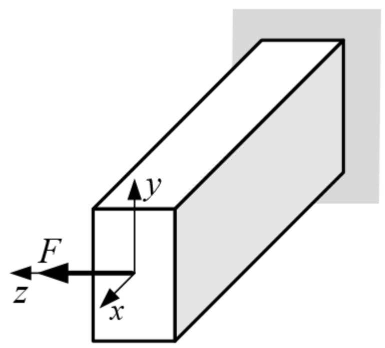
$$d_{min} = \sqrt[3]{\frac{27 \cdot 128 \cdot K_{zmin}}{175\pi}} = 65.64\ mm$$

$$d_{alk} = 66mm$$
$$D_{alk} = 88mm$$

3.2.2/4M Egyszerű igénybevételek: hajlítás. Ismert egy téglalap keresztmetszetű befogott tartó és terhelése.

Adatok:

$$R_{eH} = 450MPa, n = 2.5, \ \ l = 2m$$

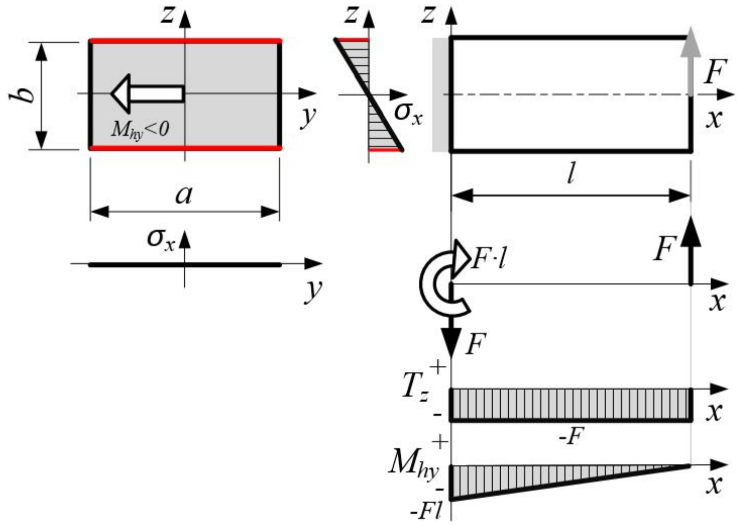


Kérdések:

a, Méretezés maximális terhelésre (a nyírásból származó feszültséget elhanyagoljuk)!

b, Méretezés az *y* tengely mentén ható *F* erőre (a nyírásból származó feszültséget elhanyagoljuk)!

Megoldás:
a,



Méretezés maximális terhelésre:

$$\sigma_{xmax} = \frac{|M_{hy}|}{K_y} \leq \sigma_{meg} = \frac{R_{eH}}{n} = 180MPa \rightarrow M_{hy} \leq \sigma_{meg} K_y$$

$$M_{hymin} = \sigma_{meg} K_y = 180MPa \cdot 2000\ mm^3 = 360000Nmm$$

$$K_y = \frac{ab^2}{6} = 2000mm^3$$

$$M_{hy} = F \cdot l \rightarrow F_{max} = \frac{M_{hy}}{l} = \frac{360000Nmm}{2000mm} = 180N$$

b, Méretezés az *y* tengely mentén ható *F* erőre:

$$\sigma_{x\,max} = \frac{|M_{hz}|}{K_z} \leq \sigma_{meg} \rightarrow M_{hz} \leq \sigma_{meg} K_z$$

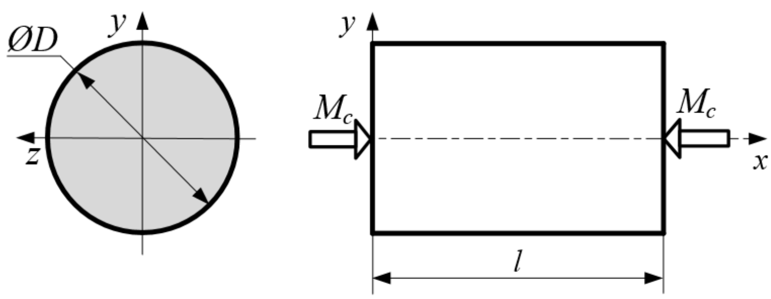
$$M_{hzmin} = \sigma_{meg} K_z = 180MPa \cdot 3000\ mm^3 = 540000Nmm$$

$$K_z = \frac{a^2 b}{6} = 3000mm^3$$

$$M_{hz} = F \cdot l \rightarrow F_{max} = \frac{M_{hy}}{l} = \frac{540000Nmm}{2000mm} = 270N$$

3.2.3 Egyszerű igénybevételek: Csavarás

3.2.3/1M Egy tartó igénybevétele tiszta, homogén csavarás.

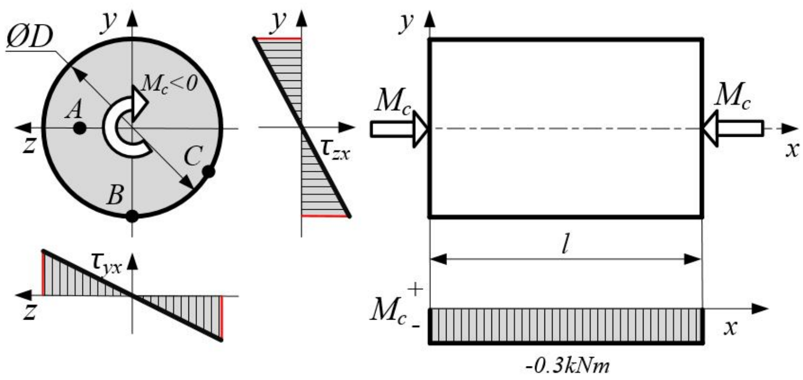


Kérdések:
a, Határozza meg az A és C pont beli feszültségtenzort!
b, Határozza meg a C pont feszültségtenzorát! Mekkora nagyságú csúsztatófeszültség ébred a C pontban?
c, Határozza meg a C pont feszültségtenzorát az r, φ, x koordináta rendszerben!

Adatok:

$$M = 0.3kNm$$
$$D = 20mm$$
$$A = (0;\ 0; 5)mm$$
$$B = (0;\ -10; 0)mm$$
$$C = \left(0;\ -5; -10\frac{\sqrt{3}}{2}\right)mm$$

Kidolgozás:



a,

$$\mathbf{T}_A = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 95.49 & 0 \\ 95.49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$\tau_{yx}(A) = -\frac{M_c}{I_p} \cdot z_A = -\frac{-0.3 \cdot 10^6 Nmm}{15708mm^4} \cdot 5mm = 95.49MPa$$

$$I_p = \frac{D^4 \cdot \pi}{32} = 15708mm^4$$

$$\tau_{zx}(A) = \frac{M_c}{I_p} \cdot y_A = 0MPa$$

$$\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 190.99 \\ 0 & 0 & 0 \\ 190.99 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$\tau_{yx}(B) = -\frac{M_c}{I_p} \cdot z_B = 0MPa$$

$$\tau_{zx}(B) = \frac{M_c}{I_p} \cdot y_B = \frac{-0.3 \cdot 10^6 Nmm}{15708mm^4} \cdot (-10mm) = 190.99MPa$$

b,

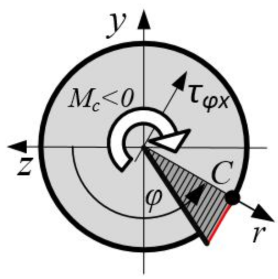
$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -165.4 & 95.49 \\ -165.4 & 0 & 0 \\ 95.49 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$\tau_{yx}(C) = -\frac{M_c}{I_p} \cdot z_C = -\frac{-0.3 \cdot 10^6 Nmm}{15708mm^4} \cdot \left(-10\frac{\sqrt{3}}{2}\right) mm = -165.4MPa$$

$$\tau_{zx}(C) = \frac{M_c}{I_p} \cdot y_C = \frac{-0.3 \cdot 10^6 Nmm}{15708mm^4} \cdot (-5)mm = 95.49MPa$$

$$|\boldsymbol{\tau}_x(C)| = \sqrt{\tau_{yx}(C)^2 + \tau_{zx}(C)^2} = 190.99MPa$$

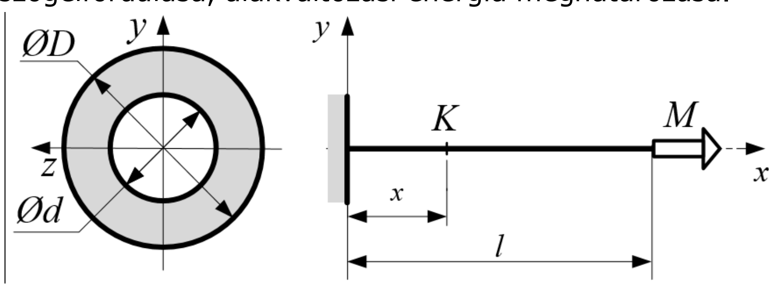
c,



$$\underset{(r\varphi x)}{\mathbf{T}_c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi x} \\ 0 & \tau_{x\varphi} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -190.99 \\ 0 & -190.99 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

$$\tau_{\varphi x}(C) = \frac{M_c}{I_p} \cdot r_C = \frac{-0.3 \cdot 10^6 Nmm}{15708mm^4} \cdot 10mm = -190.99MPa$$

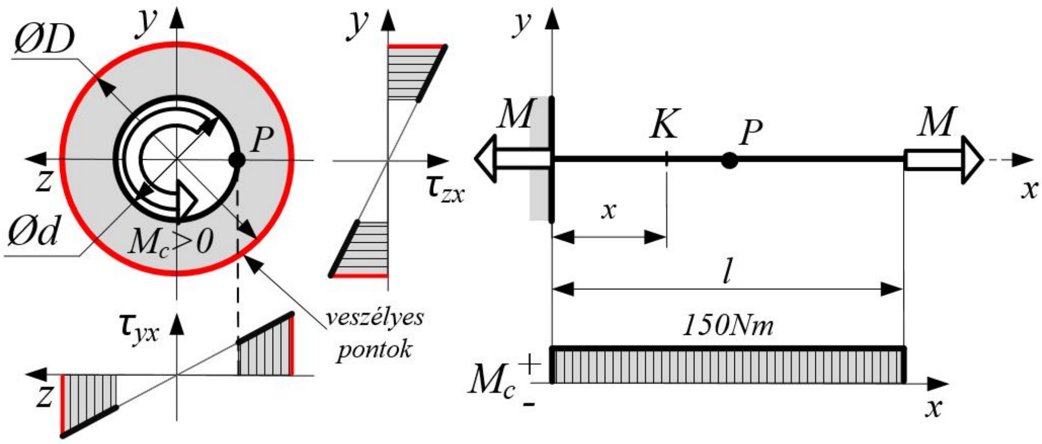
3.2.3/2M Határozza meg a P pontban az alakváltozási- és feszültség tenzor elemeit! K keresztmetszet szögelfordulása, alakváltozási energia meghatározása.



Adatok:

$$M = 150Nm$$
$$D = 30mm$$
$$d = 24mm$$
$$l = 300mm$$
$$x = 100mm$$
$$G = 80GPa$$
$$P = (150;\ 0; -12)\ mm$$

Megoldás:



a, Veszélyes keresztmetszet: Minden keresztmetszet az egész rúd hosszában.

$$\mathbf{T}_P=\begin{bmatrix}0 & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & 0 & 0\\ \tau_{zx} & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 38.34 & 0\\ 38.34 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}MPa$$

Általánosan elmondható: A feszültség a keresztmetszet középpontjától számítva sugár mentén kifelé nő.

$$\tau_{yx}(P)=-\frac{M_c}{I_p}\cdot z_P=-\frac{150\cdot 10^3 Nmm}{46950mm^4}\cdot(-12mm)=38.34MPa$$

$$I_p=\frac{(D^4-d^4)\cdot\pi}{32}=46950mm^4$$

$$\tau_{zx}(P)=\frac{M_c}{I_p}\cdot y_P=0MPa$$

b, Az alakváltozási tenzor:

$$\mathbf{A}_P=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2.4 & 0\\ 2.4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}10^{-4}$$

Az egyszerű Hooke-törvényhez hasonló összefüggés alapján:

$$\gamma_{yx}=\frac{\tau_{yx}}{G}=\frac{38.34MPa}{80\cdot 10^3 MPa}=4.79\cdot 10^{-4}$$

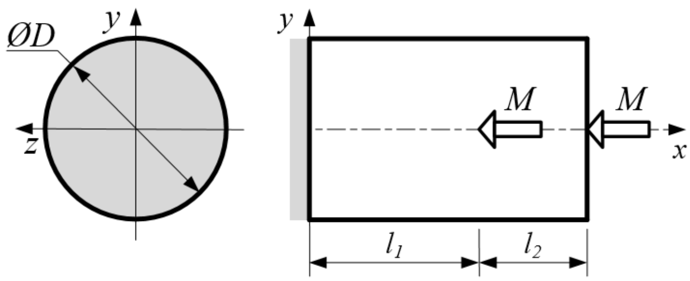
c,

$$\psi_K=\frac{M_c\cdot x}{I_p\cdot G}=\frac{150\cdot 10^3 Nmm\cdot 100mm}{46950\,mm^4\cdot 80\cdot 10^3 MPa}=3.99\cdot 10^{-3}rad$$

d,

$$U=\frac{1}{2}\cdot\frac{{M_c}^2\cdot l}{I_p\cdot G}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(150\cdot 10^3 Nmm)^2\cdot 300mm}{46950\,mm^4\cdot 80\cdot 10^3 MPa}=898.56Nmm=0.899J$$

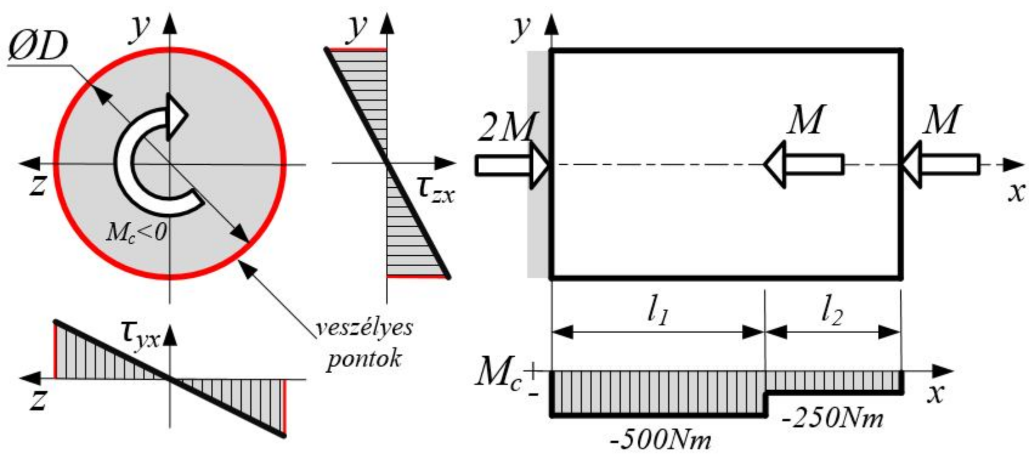
3.2.3/3M Méretezze a rudat ha a rúd teljes hosszára a megengedett szögelfordulás adott. Végezzen szilárdságtani ellenőrzést is a megengedett csúsztatófeszültség figyelembe vételével!



Adatok:

$$M = 250Nm$$
$$l_1 = 300mm$$
$$l_2 = 200mm$$
$$G = 65GPa$$
$$\psi_{meg} = 1.5°$$
$$\tau_{meg} = 40MPa$$

Kidolgozás:



a,

$$\psi_{max} = \left|\sum_{i=1}^{2} \frac{M_{c_i} \cdot l_i}{I_p \cdot G}\right| = \frac{1}{I_p \cdot G}\left|\sum_{i=1}^{2} M_{c_i} \cdot l_i\right| \leq \psi_{meg} = 1.5 \cdot \frac{\pi}{180°} rad$$

$$I_{p_{min}} = \frac{1}{\psi_{meg} \cdot G}\left|\sum_{i=1}^{2} M_{c_i} \cdot l_i\right| = \frac{|-150 \cdot 10^6 Nmm^2 - 50 \cdot 10^6 Nmm^2|}{1.5 \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot 65 \cdot 10^3 MPa} = 117530\, mm^4$$

$$I_p = \frac{D^4 \cdot \pi}{32} \rightarrow D_{min} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot I_{p_{min}}}{\pi}} = 33.08mm$$

$$D_{alk} = 35mm$$

b,

$$\tau_{max} = \frac{|M_c|}{K_{p_{alk}}} = \frac{|-0.5 \cdot 10^6 Nmm|}{8418 mm^3} = 59.39 MPa \leq \tau_{meg}$$

$$K_{p_{alk}} = \frac{D_{alk}^3 \cdot \pi}{16} = \frac{35^3 mm^3 \cdot \pi}{16} = 8418 mm^3$$

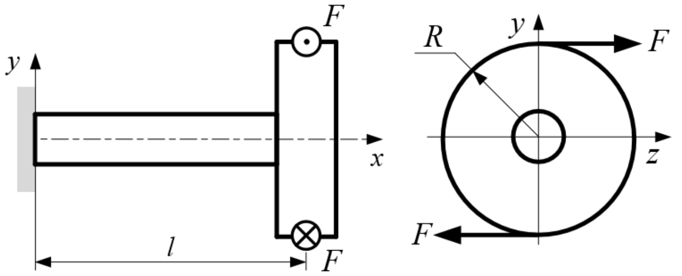
$$59.39 MPa \leq 40 MPa \rightarrow Szilárdságilag\ nem\ felel\ meg!$$

$$\tau_{max} = \frac{|M_c|}{K_p} \leq \tau_{meg} \rightarrow K_{p_{min}} = \frac{|M_c|}{\tau_{meg}} = \frac{|-0.5 \cdot 10^6 Nmm|}{40 MPa} = 12500 mm^3$$

$$K_{p_{min}} = \frac{D^3 \cdot \pi}{16} \rightarrow D_{min} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot K_{p_{min}}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 12500 mm^3}{\pi}} = 39.93 mm$$

$$D_{alk} = 40 mm$$

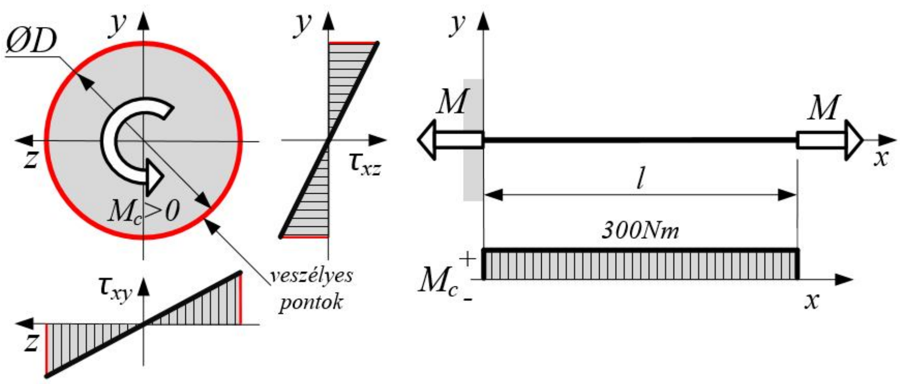
3.2.3/4M Egy befogott tartó végére tárcsát szereltünk, melynek kerületén erők hatnak.



Kérdések:
a, Méretezze a tartót feszültségcsúcsra, ha a tartó keresztmetszete kör!
b, Méretezze a tartót feszültségcsúcsra, ha a tartó keresztmetszete körgyűrű, továbbá az átmérők aránya adott!
c, A tartó súlyának csökkentése céljából melyik keresztmetszetű tartót javasolja kivitelezésre, ez százalékosan mennyivel lenne könnyebb?
Adatok:

$$F = 1 kN$$
$$R = 0.15 m$$
$$\tau_{meg} = 60 MPa$$

Kidolgozás:



a, A tárcsa kerületén ható erőket redukálva a tartó súlyvonalára:

$$\boldsymbol{F}_S = \sum \boldsymbol{F}_i = -F \cdot \boldsymbol{k} + F \cdot \boldsymbol{k} = 0$$

$$\boldsymbol{M}_S = \sum \boldsymbol{M}_i = F \cdot R \cdot \boldsymbol{i} + F \cdot R \cdot \boldsymbol{i} = 2 \cdot F \cdot R \cdot \boldsymbol{i} = 300Nm \cdot \boldsymbol{i}$$

$$\tau_{max} = \frac{|M_c|}{K_p} \leq \tau_{meg} \rightarrow K_{p_{min}} = \frac{|M_c|}{\tau_{meg}} = \frac{|300 \cdot 10^3 Nmm|}{60MPa} = 5000mm^3$$

$$K_{p_{min}} = \frac{D^3 \cdot \pi}{16} \rightarrow D_{min} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot K_{p_{min}}}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5000mm^3}{\pi}} = 29.42mm$$

b, Méretezzük a tartót ha körgyűrű keresztmetszetű, továbbá az átmérők aránya adott:

$$\frac{D_2}{d_2} = \frac{9}{8}$$

$$K_p = \frac{({D_2}^4 - {d_2}^4)\pi}{32D_2} = \frac{\left[\left(\frac{9}{8}d_2\right)^4 - {d_2}^4\right]\pi}{32 \cdot \frac{9}{8}d_2} = \frac{\left[\left(\frac{3^8}{4096}{d_2}^4\right) - {d_2}^4\right]\pi}{36 \cdot d_2} = \frac{\frac{2465}{4096}{d_2}^3\pi}{36} = \frac{2465{d_2}^3\pi}{4096 \cdot 36}$$

$$\downarrow$$

$$d_{2_{min}} = \sqrt[3]{\frac{4096 \cdot 36 \cdot K_{p_{min}}}{2465\pi}} = 45.66mm$$

$$D_{2_{min}} = 51.36mm$$

c, A tömegek aránya:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho V_1}{\rho V_2} = \frac{\rho A_1 l}{\rho A_2 l} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{D^2 \cdot \pi}{4}}{\frac{({D_2}^2 - {d_2}^2)\pi}{4}} = \frac{D^2}{{D_2}^2 - {d_2}^2} = 1.565$$

Elérhető súlycsökkentés százalékos értéke:

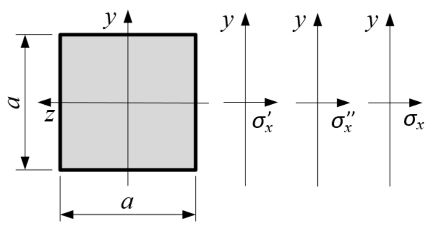
$$100 \cdot \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \approx 36\%$$

3.3 Összetett igénybevételek

3.3.1 Húzás (nyomás) és egyenes hajlítás

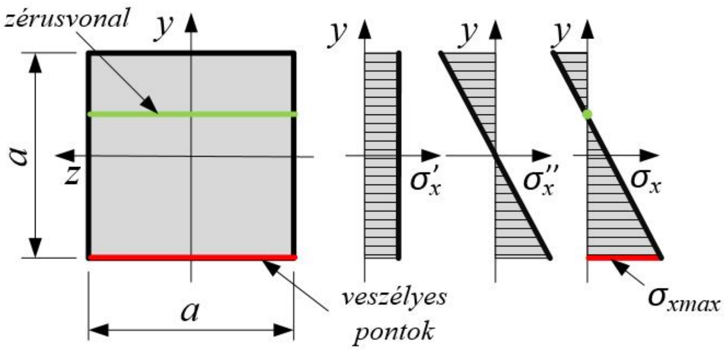
3.3.1/1M Húzás és egyenes hajlítás. Ismert egy négyzet keresztmetszetű prizmatikus rúd veszélyes keresztmetszete, amelyen a külső erőrendszer a keresztmetszet súlypontjába redukált vektorkettőssel van megadva.
Adatok:

$$\boldsymbol{M}_s = (1.4\boldsymbol{k})kNm,\ \boldsymbol{F}_s = (20\boldsymbol{i})kN,\ R_p = 215MPa,\ n = 1.6$$



Kérdések:
a, Rajzolja meg a veszélyes keresztmetszeten a feszültségeloszlást és határozza meg a keresztmetszet veszélyes pontjait!
b, Méretezze a rudat feszültségcsúcsra, ha ismert a rúd anyagának folyáshatára és a biztonsági tényező értéke!
c, Az alkalmazott keresztmetszeti adatokkal határozza meg a veszélyes keresztmetszeten a zérusvonal egyenletét!

Megoldás:
a, A keresztmetszet súlypontjába redukált vektorkettős alapján a keresztmetszeten az igénybevételek meghatározhatók. A nyomatékvektornak csak z irányú komponense van, amely pozitív, ami azt jelenti, hogy az egyik igénybevétel egyenes hajlítás (az előjelszabály értelmében negatív előjelű). Az erővektornak csak x irányú komponense van, amely pozitív, ebből az következik, hogy a másik igénybevétel húzás. Azaz a keresztmetszet igénybevétele összetett, húzás+hajlítás.
A fentiek ismeretében a feszültségeloszlás megrajzolható, ahol σ_x' a húzásból származó normálfeszültség, amíg σ_x'' a hajlításból származó normálfeszültség. A szuperpozíció elv értelmében a két feszültség összeadható, amelynek eredményeként kapjuk σ_x feszültségeloszlást az y függvényében. Az ábrából látható, hogy a keresztmetszet veszélyes pontjai az alsó szál pontjai. Ez azt jelenti, hogy a szerkezetben itt ébred a legnagyobb feszültség.
A zérusvonal azon pontok halmaza a keresztmetszeten, amelyen a feszültségérték zérus.



b, A feszültségcsúcsra való méretezés esetén a következő egyenlőtlenségnek kell fennállnia húzás+hajlítás összetett igénybevétel esetén:

$$\sigma_{xmax} \leq \sigma_{meg}$$

A maximális normálfeszültséget a következő összefüggés adja

$$\sigma_{xmax} = \sigma'_{xmax} + \sigma''_{xmax} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_{hz}|}{K_z}$$

A megengedett feszültség a következő összefüggésből határozható meg

$$\sigma_{meg} = \frac{R_P}{n}$$

Húzás+hajlítás összetett igénybevétel esetén a következőképpen kell elvégezni a méretezést. Első lépésben elhanyagoljuk a húzásból származó normálfeszültséget és kizárólag egyenes hajlításra méretezünk. A második lépésben a hajlításra meghatározott keresztmetszeti adatok esetén ellenőrzünk összetett igénybevételre. Amennyiben a meghatározott keresztmetszettel az ébredő maximális normálfeszültség kisebb, mint a megengedett feszültség, úgy a méretezést elvégeztük és a kapott eredményeket alkalmazzuk. Amennyiben a maximális normálfeszültség nagyobb, mint a megengedett feszültség, úgy eggyel nagyobb szabványos méretet választunk, és újra elvégezzük az ellenőrzést. Ezt az iterációt addig végezzük, amíg az egyenlőtlenség fel nem áll. Ennek megfelelően:

Elhanyagoljuk a húzást, és méretezünk egyenes hajlításra:

$$\frac{|M_{hz}|}{K_z} \leq \frac{R_P}{n}$$

A fenti összefüggésből kiszámolható a minimális keresztmetszeti tényező értéke

$$K_{zmin} = \frac{|M_{hz}| \cdot n}{R_P} = \frac{1.4 \cdot 10^6 Nmm \cdot 1.6}{215 \frac{N}{mm^2}} = 10418.60465 mm^3$$

Mivel négyzet keresztmetszet esetén

$$K_z = \frac{a^3}{6},$$

ezért

$$K_{zmin} = \frac{a_{min}^3}{6} \rightarrow a_{min} = \sqrt[3]{6 \cdot K_{zmin}} = \sqrt[3]{6 \cdot 10418.60465 mm^3} = 39.687 mm$$

A megkapott minimális oldalélt a legközelebbi szabványos értékre felfelé kell kerekíteni, azaz az alkalmazott oldalél

$$a_{alk} = 40 mm.$$

Ellenőrzés összetett igénybevételre az alkalmazott oldaléllel számolva:
Az alkalmazott keresztmetszeti jellemzők értékei

$$A_{alk} = a_{alk}^2 = 1600mm^2, K_{zalk} = \frac{a_{alk}^3}{6} = 10666.67mm^3.$$

Az alkalmazott oldaléllel számolva a szerkezetben ébredő maximális feszültség

$$\sigma_{xmax} = \frac{|N|}{A_{alk}} + \frac{|M_{hz}|}{K_{zalk}} = \frac{20 \cdot 10^3 N}{1.6 \cdot 10^3 mm^2} + \frac{1.4 \cdot 10^6 Nmm}{1.066 \cdot 10^4 mm^3} = 12.5MPa + 131.258MPa = 143.758MPa$$

A megengedett feszültség

$$\sigma_{meg} = \frac{R_P}{n} = \frac{215MPa}{1.6} = 134.375MPa$$

Mivel

$$\sigma_{xmax} > \sigma_{meg},$$

így nem teljesül a feltétel, azaz a kizárólag hajlításra kiszámolt alkalmazott oldalél az összetett igénybevétel esetén nem elegendő, így eggyel nagyobb szabványos méretet választunk

$$a_{alk} = 45mm$$

Ellenőrzés összetett igénybevételre az alkalmazott oldaléllel számolva:
Az alkalmazott keresztmetszeti jellemzők értékei

$$A_{alk} = a_{alk}^2 = 2025mm^2, K_{zalk} = \frac{a_{alk}^3}{6} = 15187.5mm^3$$

Az alkalmazott oldaléllel számolva a szerkezetben ébredő maximális feszültség

$$\sigma_{xmax} = \frac{|N|}{A_{alk}} + \frac{|M_{hz}|}{K_{zalk}} = \frac{20 \cdot 10^3 N}{2.025 \cdot 10^3 mm^2} + \frac{1.4 \cdot 10^6 Nmm}{1.518 \cdot 10^4 mm^3} = 9.876MPa + 92.181MPa = 102.057MPa$$

Mivel

$$\sigma_{xmax} < \sigma_{meg}$$

így teljesül a feltétel, azaz az új szabványos oldalélű ($a_{alk} = 45mm$) keresztmetszet biztonsággal kibírja a terhelést.

c, Húzás+hajlítás összetett igénybevétel esetén a zérusvonal egyenletét a következő összefüggésből tudjuk meghatározni:

$$\sigma_x = \frac{N}{A_{alk}} + \frac{M_{hz}}{I_{zalk}} \cdot y = 0$$

Az alkalmazott másodrendű nyomtaték

$$I_{zalk} = \frac{a_{alk}^4}{12} = 341718.75mm^4$$

A fenti egyenletet y-ra kifejezve kapjuk

$$y = -\frac{N}{M_{hz}} \cdot \frac{I_{zalk}}{A_{alk}} = -\frac{20 \cdot 10^3}{-1.4 \cdot 10^6} \cdot \frac{3.417 \cdot 10^5}{2.025 \cdot 10^3} = 2.41mm$$

A zérusvonal egyenlete

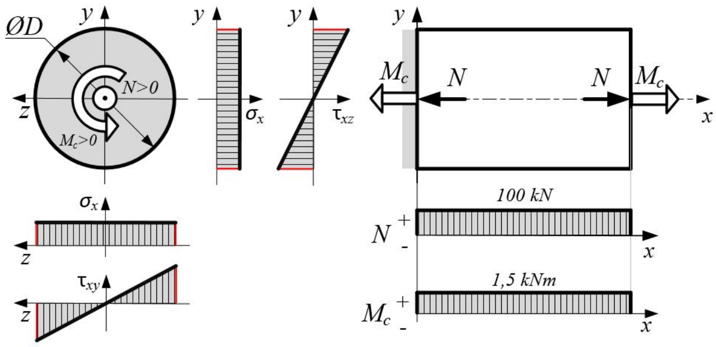
$$y = 2.41mm$$

3.3.2 Húzás (nyomás) és csavarás

3.3.2. Húzás és csavarás. Ismert egy kör keresztmetszetű prizmatikus rúd igénybevételei.
Adatok:

$$P(0;0;20)mm, N = 100kN, M_c = 1.5kN, D = 40mm, G = 80GPa, \nu = 0.3$$

Kérdések:
a, Rajzolja meg az igénybevételi ábrákat és a feszültségeloszlásokat!
b, A szerkezet P pontjában határozza meg az összetett igénybevételből származó feszültségeket!
c, A szerkezet P pontjában határozza meg a Mohr szerinti redukált feszültséget!
d, Szerkessze meg a szerkezet P pontjához tartozó Mohr-kört és határozza meg a főfeszültségeket!
Megoldás:
a,



b, Az igénybevétel összetett: húzás és csavarás. A feszültségek kiszámításához szükséges meghatározni a keresztmetszeti jellemzőket.

$$A = \frac{D^2\pi}{4} = \frac{40^2 \cdot \pi}{4} = 1256.6mm^2, I_p = \frac{D^4\pi}{32} = \frac{40^4 \cdot \pi}{32} = 251327.41mm^4$$

A húzásból származó feszültség a szerkezet P pontjában:

$$\sigma_x(P) = \frac{N}{A} = \frac{100 \cdot 10^3 N}{1256.6mm^2} = 79.57MPa$$

A csavarásból származó feszültség a szerkezet P pontjában:

$$\tau_{xz}(P) = 0MPa, \qquad \tau_{xy}(P) = -\frac{M_c}{I_p} z_p = -\frac{1.5 \cdot 10^6 Nmm}{251327.41mm^4} \cdot 20mm = -119.36MPa$$

c, A redukált feszültséget a következő képlettel tudjuk kiszámítani:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + \beta\tau^2},$$

ahol Mohr szerint

$$\beta = 4,$$

így

$$\sigma_{red}^{MOHR}(P) = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = \sqrt{79.57^2 + 4 \cdot (-119.36)^2} = 251.6319MPa$$

d, A Mohr-kör szerkesztésének eredménye:

$$\sigma_1 = 165.6MPa\,;\ \sigma_2 = 0MPa\,;\ \sigma_3 = -86.03MPa$$

$$\sigma_{red}^{MOHR} = \sigma_1 - \sigma_3 = 165.6MPa - (-86.03)MPa = 251.63MPa$$

4. DINAMIKA

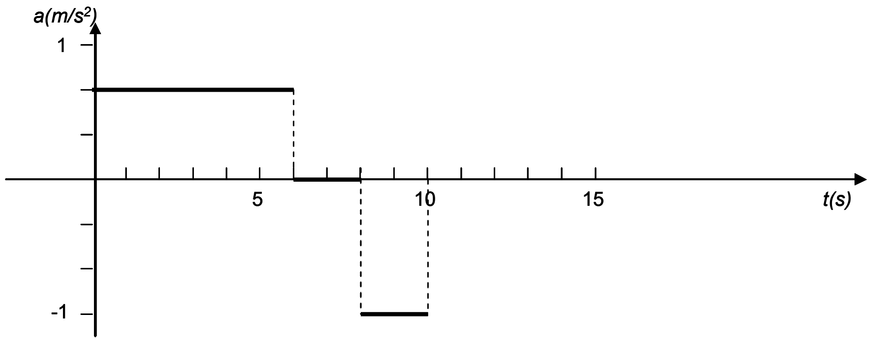
4.1 Anyagi pont kinematikája

4.1.1 Mozgás adott pályán

4.1.1.1 Egyenes vonalú pálya

4.1.1.1/M1 Egy egyenes pályán mozgó anyagi pont $a(t)$ függvényét megadtuk. Továbbá ismerjük a $t = 0$ időpillanatban a pályamenti sebesség és pályakoordináta értékét.
Adatok:

$$v(0) = -2\left[\frac{m}{s}\right];\ s(0) = -2[m].$$



Rajzolja fel a mozgás $v(t)$ és $s(t)$ függvényét!
Megoldás:
Kiszámítjuk az egyes szakaszok végpontjaiban a pályamenti sebesség és pályakoordináta értékét, majd ábrázoljuk a $v(t)$ és $s(t)$ függvényeket. Az egyes szakaszok időtartamát jelöljük Δt_i-vel.

0. szakasz: $a_0 = \frac{2}{3}\left[\frac{m}{s^2}\right]$

$$v(t_1) = v(t_0) + a{\cdot}\Delta t_0 = -2 + \frac{2}{3}{\cdot}6 = 2\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$s(t_1) = s(t_0) + v(t_0){\cdot}\Delta t_0 + \frac{a_0}{2}{\cdot}{\Delta t_0}^2 = -2 - 2{\cdot}6 + \frac{1}{3}{\cdot}6^2 = 2[m]$$

1. szakasz: $a_1 = 0\left[\frac{m}{s^2}\right]$

$$v(t_2) = v(t_1) = 2\left[\frac{m}{s}\right]$$

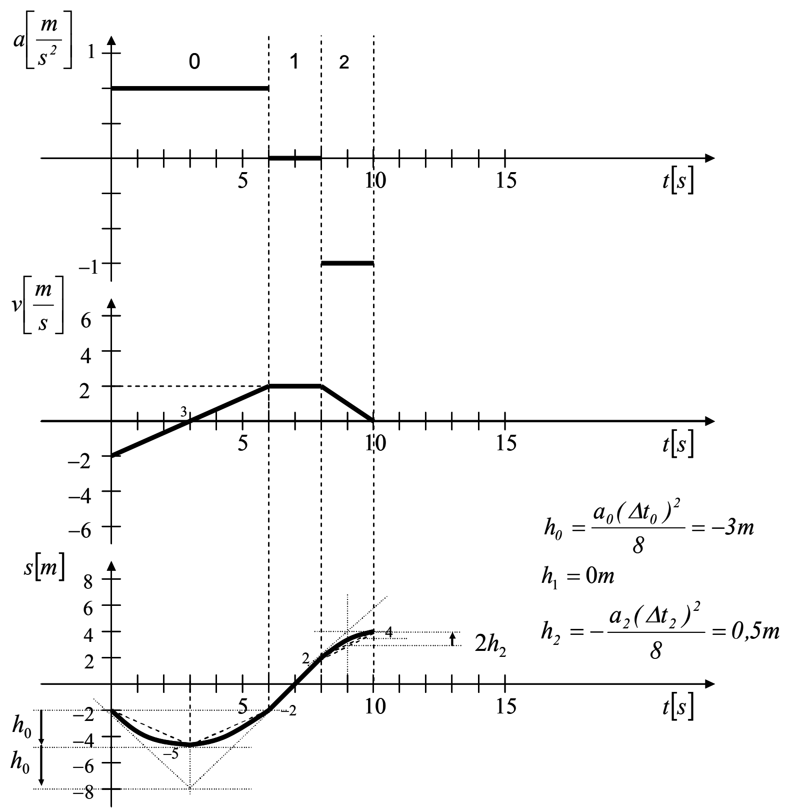
$$s(t_2) = s(t_1) + v(t_1){\cdot}\Delta t_1 = -2 + 2{\cdot}2 = 2[m]$$

2. szakasz: $a_2 = -1\left[\frac{m}{s^2}\right]$

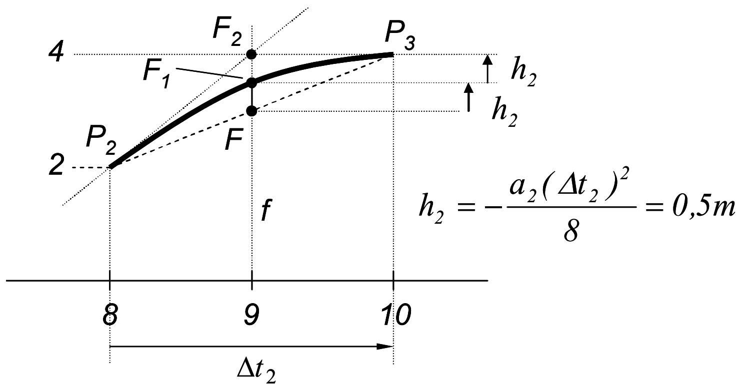
$$v(t_3) = v(t_2) + a_2{\cdot}\Delta t_2 = 2 - 1{\cdot}2 = 0\left[\frac{m}{s}\right]$$

$$s(t_3) = s(t_2) + v(t_2){\cdot}\Delta t_2 + \frac{a_2}{2}{\cdot}{\Delta t_2}^2 = 2 + 2{\cdot}2 - \frac{1}{2}{\cdot}2^2 = 4[m]$$

Ezt követően már ábrázolhatjuk a $v(t)$ és $s(t)$ függvényeket:



A parabolaív szerkesztéséhez tekintsük a 2-es pályaszakaszt:

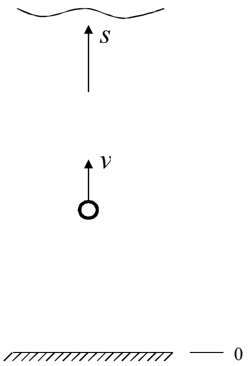


Először a pályaszakasz P_2 kezdő és P_3 végpontját egy egyenes szakasszal összekötjük, majd az így kapott szakasz F felező pontján át párhuzamost húzunk az s tengellyel (f egyenes). Az f egyenesen, az F felező pontból kiindulva, egyszer (F_1 pont), majd még egyszer (F_2 pont) felmérjük az $-\frac{a_2 \cdot \Delta t_2^2}{8}$ előjeles mennyiséget. Az így kapott F_2 pontot összekötve a P_2 és P_3 pontokkal megkapjuk a parabolaív P_2 és P_3 pontbeli érintőit. Ezt követően az F_1 ponton át párhuzamost húzunk a P_2P_3 szakasszal, így megkapjuk a parabolaív F_1 pontbeli érintőjét. Ezt követően a P_2, F_1, P_3 pontokon át megrajzoljuk a parabolaívet. Ha a pályagyorsulás értéke pozitív, akkor a parabolaív az P_2P_3 szakasz alatt, ha negatív, akkor pedig fölötte fut.

4.1.1.1/M2 Egy fából készült golyó egy tó fenekéről nyugalomból indul, és a megadott pályamenti sebesség-idő függvény szerint emelkedik a felszín irányába.
Adatok:

$$v(t)=\frac{1}{A}\cdot(1-e^{-A\cdot B\cdot t});\ v(0)=0\left[\frac{m}{s}\right];\ s(0)=0[m];\ \eta=0.00102\left[\frac{kg}{m\cdot s}\right];R=0.01[m];$$

$$g=9.81\left[\frac{m}{s^2}\right];\ \rho_v=1000\left[\frac{kg}{m^3}\right];\ \rho_f=990\left[\frac{kg}{m^3}\right]\ ;\ A=\frac{4{,}5\cdot\eta}{R^2\cdot(\rho_v-\rho_f)\cdot g};\ B=g\cdot\frac{\rho_v-\rho_f}{\rho_v}.$$



a, Határozzuk meg a golyó pályamenti gyorsulás- és pályakoordináta-idő függvényeit!
b, Számítsuk ki a pályamenti gyorsulás értékét valamint a golyó távolságát a tó fenekétől $3[s]$-al az indulás után!
c, Mekkora sebességre gyorsulhat fel maximálisan a golyó?
Megoldás:
a,

$$a(t)=\dot{v}(t)=\overbrace{\left(\frac{1}{A}\cdot(1-e^{-A\cdot B\cdot t})\right)}^{\cdot}=-\frac{1}{A}\cdot e^{-A\cdot B\cdot t}\cdot(-A\cdot B)=\underline{\underline{B\cdot e^{-A\cdot B\cdot t}}}$$

$$s(t_1)=\overbrace{s(0)}^{0}+\int_0^{t_1}v(t)dt=\frac{1}{A}\cdot\int_0^{t_1}(1-e^{-A\cdot B\cdot t})dt=\frac{1}{A}\cdot\left[t+\frac{1}{A\cdot B}(e^{-A\cdot B\cdot t}-1)\right]_0^{t_1}=$$

$$=\frac{1}{A}\cdot\left(t_1+\frac{1}{A\cdot B}(e^{-A\cdot B\cdot t_1}-1)\right)\ \Rightarrow\ s(t)=\underline{\underline{\frac{1}{A}\cdot\left(t+\frac{1}{A\cdot B}(e^{-A\cdot B\cdot t}-1)\right)}}$$

b,

$$A=\frac{4.5\cdot\eta}{R^2\cdot(\rho_v-\rho_f)\cdot g}=\frac{4.5\cdot 0.00102}{0.01^2\cdot(1000-990)\cdot 9.81}=0{,}4679\left[\frac{s}{m}\right],\ B=9.81\cdot\frac{1000-990}{1000}=0.0981\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$a(3)=0.0981\cdot e^{-0.4679\cdot 0.981\cdot 3}=\underline{\underline{0.0937\left[\frac{m}{s^2}\right]}}$$

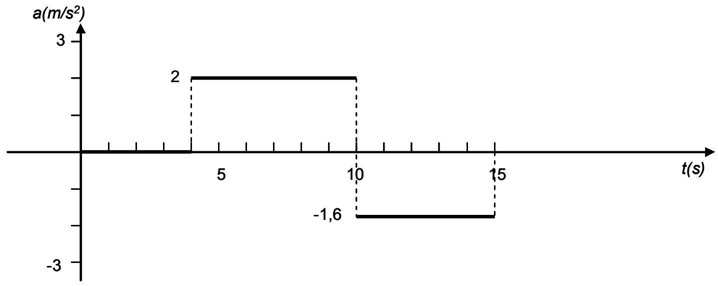
$$s(3)=\frac{1}{0.4679}\cdot\left(3+\frac{1}{0.4679\cdot 0.0981}(e^{-0.4679\cdot 0.0981\cdot 3}-1)\right)=\underline{\underline{0.422[m]}}$$

c,

$$v_{max}=\lim_{t\to\infty}v(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{A}\cdot(1-e^{-A\cdot B\cdot t})=\frac{1}{A}=\underline{\underline{2{,}137\left[\frac{m}{s}\right]}}$$

4.1.1.1/3 Egy egyenes pályán mozgó anyagi pont $a(t)$ függvényét megadtuk. Továbbá ismerjük a $t = 0$ időpillanatban a pályamenti sebesség és pályakoordináta értékét.
Adatok:

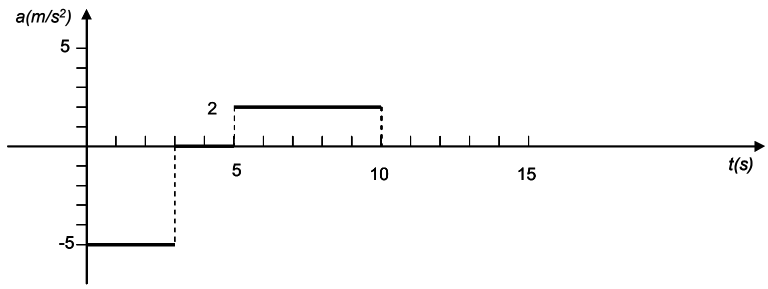
$$v(0) = -4\left[\frac{m}{s}\right]; \; s(0) = 0[m].$$



Rajzolja fel a mozgás $v(t)$ és $s(t)$ függvényét jelleghelyesen, a szükséges adatok számszerű feltüntetésével!

4.1.1.1/4 Egy egyenes pályán mozgó anyagi pont $a(t)$ függvényét megadtuk. Továbbá ismerjük a $t = 0$ időpillanatban a pályamenti sebesség és pályakoordináta értékét.
Adatok:

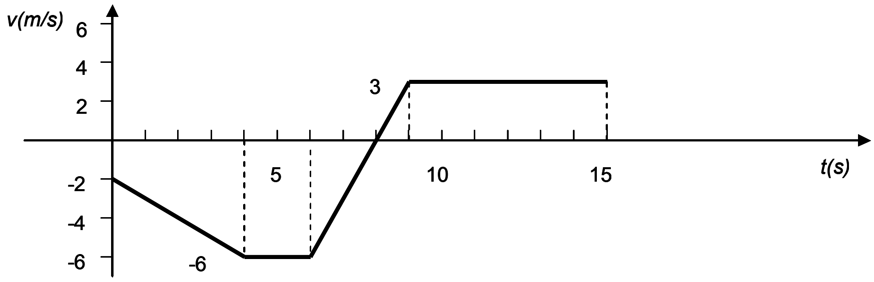
$$v(0) = 5\left[\frac{m}{s}\right]; \; s(0) = 0[m].$$



Rajzolja fel a mozgás $v(t)$ és $s(t)$ függvényét jelleghelyesen, a szükséges adatok számszerű feltüntetésével!

4.1.1.1/5 Egy egyenes pályán mozgó anyagi pont $v(t)$ függvényét megadtuk. Továbbá ismerjük a $t = 0$ időpillanatban a pályakoordináta értékét.
Adatok:

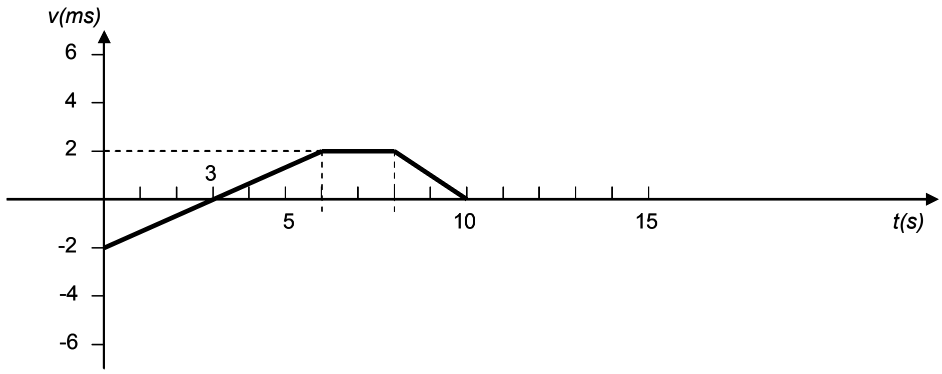
$$s(0) = -2[m].$$



Rajzolja fel a mozgás $a(t)$ és $s(t)$ függvényét jelleghelyesen, a szükséges adatok számszerű feltüntetésével!

4.1.1.1/6 Egy egyenes pályán mozgó anyagi pont $v(t)$ függvényét megadtuk. Továbbá ismerjük a $t = 0$ időpillanatban a pályakoordináta értékét.
Adatok:

$$s(0) = -2[m].$$



Rajzolja fel a mozgás $a(t)$ és $s(t)$ függvényét jelleghelyesen, a szükséges adatok számszerű feltüntetésével!

4.1.1.1/7 Egy egyenes pályán mozgó sínkocsi $5\left[\frac{m}{s}\right]$ kezdeti sebességről indulva, $3[s]$-ig $-5\left[\frac{m}{s^2}\right]$ állandó pályamenti gyorsulással lassít. Ezt követően $2[s]$-ig állandó nagyságú sebességgel halad, majd $5[s]$-ig $2\left[\frac{m}{s}\right]$ állandó pályamenti gyorsulással gyorsít.
Rajzolja fel a mozgás $a(t)$, $v(t)$ és $s(t)$ függvényeit jelleghelyesen, a szükséges adatok számszerű feltüntetésével!

4.1.1.1/8 Egy anyagi pont egyenes vonalú pályán mozog. A vizsgálat kezdetén $5[s]$-ig állandó $2\left[\frac{m}{s}\right]$ értékű pályamenti sebességgel mozog, majd további $5[s]$-ig egyenletesen lassuló mozgással halad úgy, hogy a lassuló mozgás végén a pályamenti sebessége $-8\left[\frac{m}{s}\right]$ lesz. A mozgás harmadik szakaszában egyenletesen gyorsuló mozgással $5[s]$ alatt $7\left[\frac{m}{s}\right]$ pályamenti sebességet ér el.
Rajzolja fel a mozgás $a(t)$, $v(t)$ és $s(t)$ függvényeit jelleghelyesen, a szükséges adatok számszerű feltüntetésével!

4.1.1.1/9 Egymástól $11[km]$ távolságban lévő városok közötti egyenes utat egy gépkocsi $550[s]$ alatt teszi meg. Induláskor $45[s]$-ig gyorsít állandó gyorsulással, majd állandó nagyságú sebességgel halad, végül fékezéskor $35[s]$-ig lassít, szintén állandó gyorsulással, majd megáll.
a, Mennyi a gépkocsi pályamenti sebessége, amikor mozgása egyenletes?
b, Mennyi a pályamenti gyorsulás értéke gyorsításkor és lassításkor?
c, Rajzolja fel a mozgás $a(t)$, $v(t)$ és $s(t)$ függvényeit jelleghelyesen, a szükséges adatok számszerű feltüntetésével!

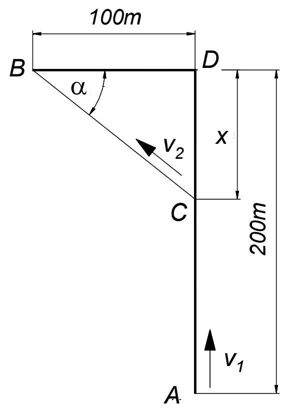
4.1.1.1/10 Egy csótány éjszaka élelmet keres a konyhaasztalon. Egyenes vonalú pályán mozog, sebessége $2\left[\frac{cm}{s}\right]$. A háziasszony benyit, és felkapcsolja a villanyt. A csótány ekkor $60[cm]$ távolságra van a biztonságot nyújtó repedéstől, és a fény érzékelésekor maximális, $1.5\left[\frac{cm}{s^2}\right]$ gyorsulással menekülni kezd, míg el nem éri a $9\left[\frac{cm}{s}\right]$ maximális sebességet. A menekülést ezt követően a maximális sebességgel folytatja. A repedés elérése előtt $5[cm]$-rel fékezni kezd, míg sebessége zérusra nem csökken.
a, Mennyi ideje van a háziasszonynak a csótány elpusztítására?
b, Rajzolja meg a csótány mozgásának $a(t)$, $v(t)$ és $s(t)$ függvényeit jelleghelyesen, a szükséges adatok számszerű feltüntetésével!

4.1.1.1/11 Két anyagi pont egyenes vonalú mozgást végez. Az egyik $v_1(t) = 2{\cdot}t - 10\ \left[\frac{m}{s}\right]$ sebesség-idő függvény szerint a pálya kezdőpontjától $30[m]$-re kezdi mozgását, a másik pedig $s_2(t) = 6{\cdot}t + 2\ [m]$ pályakoordináta-idő függvény szerint mozog.
a, Rajzolja fel az anyagi pontok mozgásának $a(t)$, $v(t)$ és $s(t)$ függvényeit jelleghelyesen, a szükséges adatok számszerű feltüntetésével!
b, Határozza meg, hogy mikor találkoznak az anyagi pontok!

4.1.1.1/12 Egy anyagi pont kezdetben $v(0) = 3\left[\frac{m}{s}\right]$ állandó pályamenti sebességgel mozog, majd $2[s]$ eltelte után $-2\left[\frac{m}{s^2}\right]$ állandó pályamenti gyorsulással mozog tovább.
a, Rajzolja meg a mozgás $a(t)$, $v(t)$ és $s(t)$ függvényeit jelleghelyesen, a szükséges adatok számszerű feltüntetésével!
b, Határozza meg a függvények alapján, hogy mekkora út megtétele után kezdtük el fékezni az anyagi pontot!
c, Számítsa ki, hogy mikor, és mekkora út megtétele után állt meg az anyagi pont!
d, Határozza meg, hogy az anyagi pont mennyi idővel az indulása után ér vissza a kiindulási helyére!

4.1.1.1/13 Két település egymástól $200[km]$ távolságra fekszik. Mindkét településről egy időben elindul egy-egy gépkocsi, $80\left[\frac{km}{h}\right]$ illetve $120\left[\frac{km}{h}\right]$ sebességgel.
a, Mennyi idővel az indulásuk után találkoznak, ha a két gépkocsi egymás felé indul el?
b, Mennyi idővel az indulásuk után találkoznak abban az esetben, ha ugyanabba az irányba indulnak, és a $120\left[\frac{km}{h}\right]$ sebességű gépkocsi követi a $80\left[\frac{km}{h}\right]$ sebességűt?

4.1.1.1/14 Egy villamos az „A” pontból egyenes vonalban, állandó v_1 nagyságú sebességgel halad a „D” pont felé. Egy utas, akinek nincs jegye, az „A” pontban észreveszi a villamoson tartózkodó ellenőrt. Eldönti, hogy minél hamarabb eljut a „B” jelű pontban elhelyezkedő, a biztos eltűnését biztosító, aluljáróig.



Hol kell leugrania a villamosról ($x =?$), hogy állandó, v_2 nagyságú sebességgel egyenes pályán futva a lehető legrövidebb idő alatt érjen el a „B” jelű pontba? (A kérdésben szereplő időt az „A” ponttól mérjük, a feladatban szereplő méretek az ábrán láthatóak.)

4.1.1.1/15 Egy darunak egy terhet $20[m]$ magasra kell emelnie. A teher az $1{,}5\left[\frac{m}{s}\right]$ nagyságú maximális sebességét $10[s]$ alatt éri el, fékútja pedig $5[m]$.
Rajzolja meg a teher mozgásának $a(t)$, $v(t)$ és $s(t)$ függvényeit jelleghelyesen, a szükséges adatok számszerű feltüntetésével!

4.1.1.1/16 A szomjas csigának még $12[s]$ ideje van a végső kiszáradásig, tehát mozgása ennyi ideig tarthat. Ekkor észrevesz egy vízcseppet a mezőn, tehát megkezdi a megközelítést. A megközelítés első szakaszában $2\left[\frac{m}{s^2}\right]$ pályamenti gyorsulással mozog $3[s]$-ig. Ekkor az így elért utazósebességgel $33[m]$-t tesz meg, majd a vízcseppig állandó lassulással fékez.
Rajzolja meg a csiga mozgásának $a(t)$, $v(t)$ és $s(t)$ függvényeit jelleghelyesen, a szükséges adatok számszerű feltüntetésével!

4.1.1.1/17 A $144\left[\frac{km}{h}\right]$ sebességgel haladó személygépkocsi vezetője csak akkor veszi észre az előtte $72\left[\frac{km}{h}\right]$ sebességgel haladó tehergépkocsit, mikor azt már $80[m]$-re megközelítette. Tekintve, hogy előzésre nincs lehetősége $2\left[\frac{m}{s^2}\right]$ lassulással azonnal fékezni kezd. A fékezés megkezdése után Δt^* idővel a teherautó is észleli a veszélyhelyzetet, és $0{,}6\left[\frac{m}{s^2}\right]$ gyorsulással gyorsít.
Legfeljebb mekkora lehet a Δt^* időtartam, hogy ne következzen be a baleset?

4.1.1.1/18 A Halál sétál a sivatagban $1000\left[\frac{m}{s}\right]$ sebességgel. Örül, mert ő a leggyorsabb. Ennek ellenére a Lóhalál $1500\left[\frac{m}{s}\right]$ sebességgel megelőzi. Ez a halált felbosszantja.
Mekkora gyorsulással kell mozognia a Halálnak, ha utol akarja érni a Lóhalált a sivatag vége előtt, ha a sivatag vége $100[km]$-re van?

4.1.1.1/19 Egy vízszintes terepen álló helyzetből gyorsító elektromos meghajtású gépkocsi pályakoordináta-idő függvényét ismerjük. A pályakoordinátát méterben, az időt másodpercben mérjük.
Adatok:

$$s(t)=\frac{1}{C}\cdot ln\left(ch\left(\frac{D}{2}\cdot(t+C_1)\right)\right)-\frac{A}{2C}\cdot t+C_2,\ \text{ahol: } C_1=\frac{2arth\left(\frac{A}{D}\right)}{D},\ C_2=-\frac{1}{C}\cdot ln\frac{ch\left(\frac{C}{C_1}\right)}{2},\ A=200\left[\frac{m}{s}\right],$$

$$C=6.494[s],\ D=0.064\left[\frac{1}{s}\right].$$

a, Határozza meg a gépkocsi pályamenti sebesség-idő, és pályamenti gyorsulás-idő függvényeit!
b, Határozza meg a pályakoordináta, pályamenti sebesség és gyorsulás értékét a gépkocsi indulása után $10[s]$ -al.
c, Határozza meg a gépkocsi végsebességét! (A végsebességet a $v_{max}=lim_{t\to\infty}v(t)$ összefüggés szolgáltatja.)
d, Milyen értékhez tart a gépkocsi pályamenti gyorsulása, ha $t\to\infty$?

4.1.1.1/20 Egy anyagi pont pályamenti gyorsulás-idő függvényét, továbbá a pályakoordináta és pályamenti sebesség értékét a $t=0[s]$ időpillanatban ismerjük:
Adatok:

$$a(t)=t^2\cdot e^{\cdot t}\left[\frac{m}{s^2}\right],\ s(0)=0[m],\ v(0)=0[m].$$

a, Határozzuk meg a golyó pályamenti sebesség- és pályakoordináta-idő függvényeit!
b, Számítsuk ki a pályamenti sebesség- és pályakoordináta értékét $2[s]$-al az indulás után!

4.1.1.2 Körpálya

4.1.1.2/M1 Az R sugarú körpálya P_0 kezdőpontjából $v_1(0)$ és $v_2(0)$ kezdeti pályamenti sebességgel, az óramutató járásával egyezően, két anyagi pont indul mozgásnak. Az egyik egyenletesen gyorsuló, a másik egyenletesen lassuló mozgást végez.
Adatok:

$$v_1(0)=2\left[\frac{m}{s}\right];\ v_2(0)=20\left[\frac{m}{s}\right];\ R=2[m],\ a_1=2\left[\frac{m}{s^2}\right];\ a_2=-2\left[\frac{m}{s^2}\right].$$

a, Adjuk meg, majd rajzoljuk fel közös koordináta rendszerben a mozgások $\varepsilon(t)$, $\omega(t)$, és $\varphi(t)$ függvényeit!
b, Az indulás után mennyi idővel lesz a két pont szögsebessége egymással egyenlő?

c, Mekkora a fenti időpillanatban a pontok normális irányú, valamint teljes gyorsulásának nagysága?

d, Az indulástól számítva mennyi idő telik el addig, amíg a 2-es számú pont először lekörözi az 1-es számút?

Megoldás:

a,

Először áttérünk a megadott pályamenti mennyiségekről szögmennyiségekre:

$$\omega_1(0) = \frac{v_1(0)}{R} = 1\left[\frac{rad}{s}\right];\ \omega_2(0) = \frac{v_2(0)}{R} = 10\left[\frac{rad}{s}\right];\ \varepsilon_1 = \frac{a_1}{R} = 1\left[\frac{rad}{s^2}\right];\ \varepsilon_2 = \frac{a_2}{R} = -1\left[\frac{rad}{s^2}\right];$$

Az $\varepsilon(t)$, $\omega(t)$, és $\varphi(t)$ függvények az alábbiak:

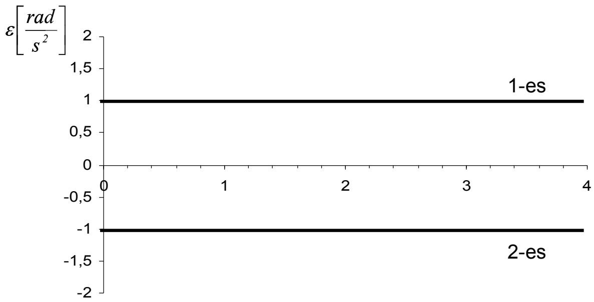
$$\varepsilon_1(t) = 1\left[\frac{rad}{s^2}\right] = const.,\ \varepsilon_2(t) = -1\left[\frac{rad}{s^2}\right] = const.$$

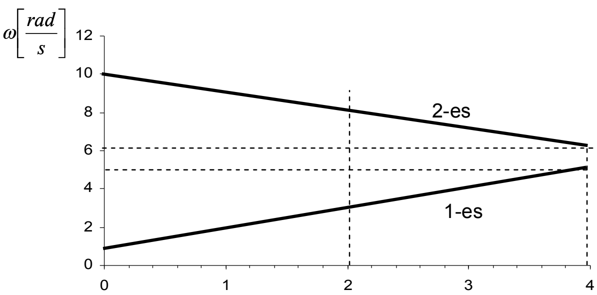
$$\omega_1(t) = \omega_1(0) + \varepsilon_1 \cdot t = 1 + t\left[\frac{rad}{s}\right],\ \omega_2(t) = \omega_2(0) + \varepsilon_2 \cdot t = 10 - t\left[\frac{rad}{s}\right]$$

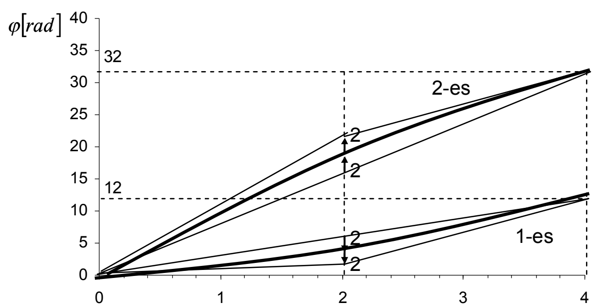
$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \omega_1(0) \cdot t\ + \frac{\varepsilon_1}{2} \cdot t^2 = 0 + 1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t^2[rad] = t + \frac{t^2}{2}[rad]$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_2(0) + \omega_2(0) \cdot t\ + \frac{\varepsilon_2}{2} \cdot t^2 = 0 + 10 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot t^2[rad] = 10 \cdot t - \frac{t^2}{2} \cdot [rad]$$

Ábrázolva a függvényeket a $[0;4][s]$ időtartamon:







b,
Jelölje t^* azt az időpillanatot, amikor a két pont szögsebessége egymással egyenlő.
Ekkor:

$$\omega_1(t^*) = \omega_2(t^*) \rightarrow 1 + t^* = 10 - t^* \rightarrow t^* = 4.5[s]$$

c,
Először kiszámítjuk a szögsebességek nagyságát a fenti időpillanatban:

$$\omega_1(t^*) = \omega_2(t^*) = \omega_1(0) + \varepsilon_1 \cdot t^* = 1 + t^* = 5.5\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Ezt követően a normális irányú és teljes gyorsulások nagysága:

$$a_{n1}(t^*) = a_{n2}(t^*) = {\omega_1}^2(t^*) \cdot R = {\omega_2}^2(t^*) \cdot R = 60.5\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$|\boldsymbol{a}_1(t^*)| = |\bar{a}_2(t^*)| = \sqrt{{a_{1e}}^2(t^*) + {a_{1n}}^2(t^*)} = \sqrt{{a_{2e}}^2(t^*) + {a_{2n}}^2(t^*)} = \sqrt{2^2 + (60.5)^2} = 60.53\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

d,
Jelölje t' az indulástól a leközözésig eltelt időt. Az egyes pontok által a t' időtartam alatt befutott szögek:

$$\varphi_1(t') = t' + \frac{t'^2}{2}[rad], \qquad \varphi_2(t') = 10 \cdot t' - \frac{t'^2}{2}[rad]$$

A leközözés pillanatában:

$$\varphi_2(t') = \varphi_1(t') + 2 \cdot \pi$$

Tehát:

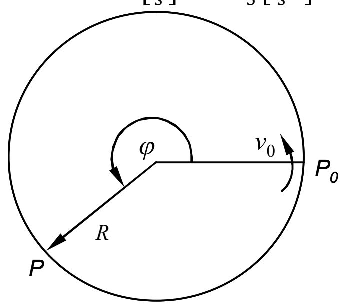
$$10 \cdot t' - \frac{t'^2}{2} = t' + \frac{t'^2}{2} + 2 \cdot \pi$$

Innen:

$$t'^2 - 9 \cdot t' + 2 \cdot \pi = 0 \rightarrow t' = 0.76[s]$$

4.1.1.2/2 Egy anyagi pont az R sugarú körpálya P_0 pontjából $v(0)$ kezdeti pályamenti sebességgel indul, majd állandó, ε szöggyorsulással halad Δt ideig.
Adatok:

$$R = 5[m];\ v(0) = 3\left[\frac{m}{s}\right];\ \varepsilon = \frac{2}{5}\left[\frac{rad}{s^2}\right];\ \Delta t = 3[s].$$



a, Adjuk meg a szögsebesség értékét a mozgás elején és végén!
b, Adjuk meg a pont érintő és normális irányú gyorsulásának nagyságát a mozgás végén!
c, Mekkora a pont gyorsulásának nagysága a mozgás végén, és mekkora szöget zár be ekkor a gyorsulásvektor a körpálya sugarával?
d, Mekkora szöget fut be a pont a mozgása során?
e, Rajzolja fel a mozgás $\varepsilon(t)$, $\omega(t)$ és $\varphi(t)$ függvényeit!

4.1.1.2/3 Egy R sugarú körpálya egy P_0 pontjából közös $v(0)$ kezdeti pályamenti sebességgel, valamint ε_1 és ε_2 szöggyorsulásokkal elindítunk két anyagi pontot.
Adatok:

$$v(0) = 5\left[\frac{m}{s}\right];\ R = 2[m];\ \varepsilon_1 = 2\left[\frac{rad}{s^2}\right];\ \varepsilon_2 = -2\left[\frac{rad}{s^2}\right].$$

a, Határozzuk meg, hogy mennyi idő múlva találkoznak újra a pontok, és a P_0 ponttól mérve milyen φ szögnél?
b, Mekkora szöget fut be az 1-es és a 2-es anyagi pont a találkozásig?
c, Mennyi a pontok pályamenti és szögsebessége a találkozás pillanatában?

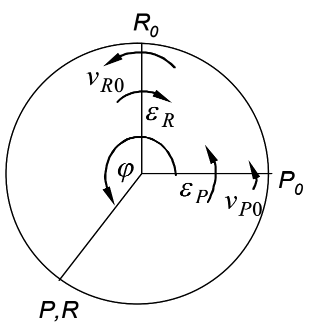
4.1.1.2/4 Az R sugarú körpálya P_0 kezdőpontjából azonos $v(0)$ kezdeti pályamenti sebességgel két anyagi pont indul mozgásnak. Az egyik egyenletesen gyorsuló, a másik egyenletesen lassuló körmozgást végez.
Adatok:

$$v(0) = 12\left[\frac{m}{s}\right];\ R = 5[m];\ a_1 = 1\left[\frac{m}{s^2}\right];\ a_2 = -2\left[\frac{m}{s^2}\right].$$

a, Rajzolja fel közös koordináta rendszerben a mozgások $\varepsilon(t)$, $\omega(t)$ *és* $\varphi(t)$ függvényeit, és olvassa le róluk, hogy mennyi idő múlva, és a P_0 ponttól mérve milyen φ szögnél találkoznak először az anyagi pontok!
b, A kapott eredményeket számítással is ellenőrizze!

4.1.1.2/5 Az R sugarú körpályán, az ábrán látható P_0 és R_0 pontokból, egyszerre indul el két anyagi pont $v_P(0)$ é $v_R(0)$ nagyságú kezdősebességgel, majd állandó ε_P és ε_R szöggyorsulással haladnak.
Adatok:

$$R = 3[m];\ v_P(0) = 4\left[\frac{m}{s}\right];\ v_R(0) = 10\left[\frac{m}{s}\right];\ \varepsilon_P = 3\left[\frac{1}{s^2}\right];\ \varepsilon_R = -2\left[\frac{1}{s^2}\right].$$

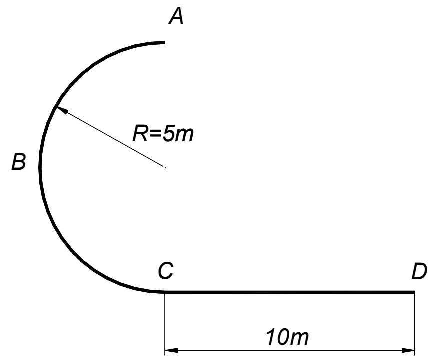


a, Határozzuk meg, hogy az indulás után mennyi idővel éri utol a P_0 pontokból induló anyagi pont az R_0 pontokból indulót, és a P_0 ponttól mérve milyen φ szögnél?
b, Mennyi a pontok szögsebessége a találkozás pillanatában?
c, Rajzoljuk fel közös koordinátarendszerbe a két mozgás $\varepsilon(t)$, $\omega(t)$ és $\varphi(t)$ függvényeit!
d, Mekkora a pontok normális irányú gyorsulásának nagysága a találkozás pillanatában?
e, Mekkora a pontok (teljes) gyorsulásának nagysága ekkor?

4.1.1.2/6 A vázolt vízszintes síkban fekvő AD pályán mozog egy anyagi pont. A pálya AC íves szakaszát állandó, $v(0)$ nagyságú sebességgel teszi meg, majd a CD szakaszon lassulva a D pontban megáll.

Adatok:

$$v(0) = 6\left[\frac{m}{s}\right].$$



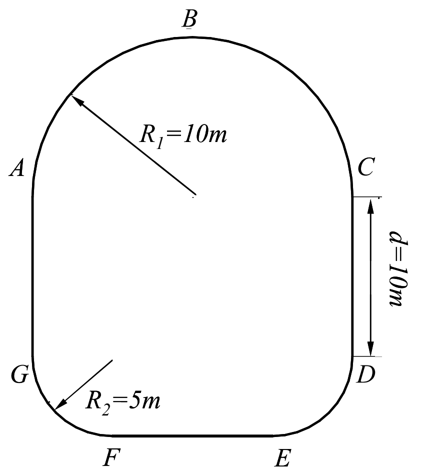
a, Rajzolja meg a mozgás $a(t)$, $v(t)$ és $s(t)$ függvényeit jelleghelyesen, a számszerű adatok feltüntetésével!

b, Rajzolja meg a mozgásjellemzők irányát is megmutató sebességhodográfot!

4.1.1.2/7 Az ábra egy induktív vezetésű, automatikus ipari targonca vízszintes pályáját mutatja az üzemcsarnokban. A targonca az "A" pontból a "B" felé indul. A targonca az egyenes szakaszokat állandó gyorsulással, az íves szakaszokat állandó nagyságú sebességgel futja be.

Adatok:

$$v_A = 10\left[\frac{m}{s}\right];\ v_D = 15\left[\frac{m}{s}\right];\ v_F = 10\left[\frac{m}{s}\right].$$



a, Rajzolja meg jelleghelyesen a mozgás $a(t)$, $v(t)$, és $s(t)$ függvényeit a jellemző adatok számszerű feltüntetésével!

b, Rajzolja meg a mozgás sebességhodográfját!

4.1.1.2/8 Az R sugarú körpályán mozgó anyagi pont sebessége a t_0 időpillanatban v_0. Ezután egyenletesen lassulva megtesz még két fordulatot, és megáll.

Adatok:

$$v(0) = 20\left[\frac{m}{s}\right];\ R = 5[m].$$

a, Rajzolja meg a mozgás $\varepsilon(t)$, $\omega(t)$ és $\varphi(t)$ függvényeit!

b, Olvassuk le az ábrákról, hogy mennyi idő múlva áll meg az anyagi pont! A kapott eredményt ellenőrizzük le számítással!

c, Határozza meg az anyagi pont pályamenti gyorsulását az első fordulat megtétele után!

4.1.1.2/9 A kutya macskát kerget az $1[m]$ sugarú hirdetőoszlop körül. A kergetés kezdetén a kutya és a macska a hirdetőoszlop két átellenes pontjáról indulnak, mindketten az óramutató járásával megegyező irányba. A kutya kezdősebessége $v_k(0) = 0.5\left[\frac{m}{s}\right]$ a macskáé $v_m(0) = 2\left[\frac{m}{s}\right]$. A kutya $0.5\left[\frac{m}{s^2}\right]$ állandó nagyságú pályairányú gyorsulással mozog, a macska állandó sebességgel menekül.

a, Vázolja az állatok mozgásának foronómiai görbéit jelleghelyesen, a számszerű értékek feltüntetésével, valamint határozza meg a macska számára végzetes találkozás helyét és idejét!

b, Számítsa ki a találkozás helyén mindkét állat normális irányú gyorsulását!

A feladat megoldása során az állatokat tekintse $1[m]$ sugarú körpályán mozgó anyagi pontoknak!

4.1.1.2/10 A $2[m]$ sugarú körpálya "A" pontjából egyidejűleg két anyagi pont indul azonos $v(0) = 2\left[\frac{m}{s}\right]$ kezdősebességgel. Az egyik szöggyorsulása $\varepsilon_1 = 0.9\left[\frac{rad}{s^2}\right]$, a másiké $\varepsilon_2 = -0.6\left[\frac{rad}{s^2}\right]$.

a, Rajzolja meg jelleghelyesen mindkét mozgás foronómiai görbéit!

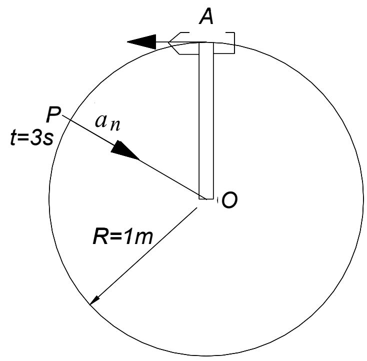
b, Határozza meg, hogy a pálya mely pontjában találkoznak a anyagi pontok!

4.1.1.2/11 A falu tréfás kedvű kovácsa m tömegű kalapácsának forgatásával szórakoztatja megrendelőit. A kalapács nyele R hosszúságú. A forgatás az "A" jelű pontból, nulla kezdősebességgel indul, és állandó szöggyorsulással történik.

A kalapács feje a nyélről t idő múlva elszabadul. A kalapács fejének normál irányú gyorsulásának nagysága ekkor a_n.

Adatok:

$$m = 10[kg];\ R = 1[m];\ t = 3[s];\ a_n = 36\left[\frac{m}{s^2}\right].$$

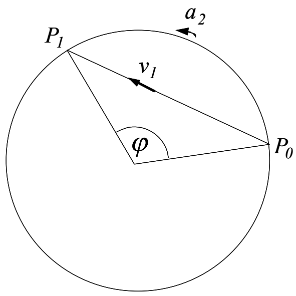


a, Határozza meg a kalapács fejének szöggyorsulását, valamint pályamenti sebességét és gyorsulás vektorának nagyságát az elszabadulás pillanatában!
b, Írja fel a gyorsulásvektort az érintő és normálirányú egységvektorok segítségével!

4.1.1.2/12 Egy gépkocsi $1[km]$ sugarú, vízszintes síkú körpályán halad $90\left[\frac{km}{h}\right]$ sebességgel. Ekkor sebességét állandó, érintő irányú lassulással (fékezéssel) $60\left[\frac{km}{h}\right]$ −ra csökkenti $3[s]$ alatt.
a, Határozza meg a gépkocsi gyorsulásvektorának nagyságát a fékezés megkezdésekor!
b, Írja fel a gyorsulásvektort az érintő és normális irányú egységvektorokkal!

4.1.1.2/13 Az ábrán látható P_0 pontból egyszerre indul két anyagi pont. Az egyik állandó, v_1 nagyságú sebességgel halad, egyenesen a P_1 pont irányába, a másik nyugalomból indulva, az R sugarú köríven mozog a P_1 pont felé, állandó a_2 nagyságú pályamenti gyorsulással.
Adatok:

$$R = 10[m];\ a_2 = 2\left[\frac{m}{s^2}\right];\ \varphi = 120°.$$

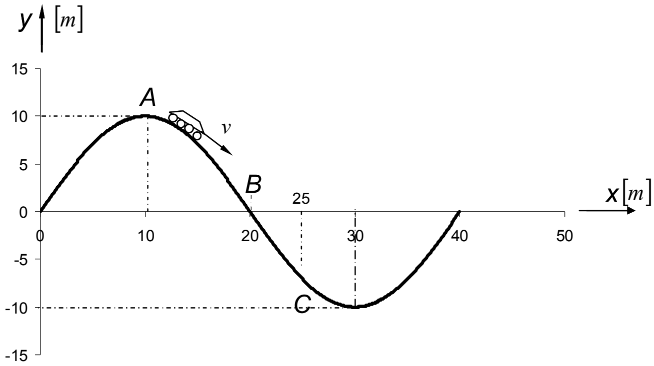


Mekkorára kell választani v_1 értékét, hogy a két anyagi pont egyszerre érkezzen a P_1 pontba?

4.1.1.3 Tetszőleges síkgörbe

4.1.1.3/M1 Az ábra egy hullámvasutat szemléltet. Az ábrán vázolt koordinátarendszerben a pálya egyenlete $y = a \cdot sin(bx)$ alakú, továbbá az A, B és C pontokban ismerjük a kocsi sebességének nagyságát.
Adatok:

$$v_A = 2\left[\frac{m}{s}\right];\ v_B = 18\left[\frac{m}{s}\right];\ v_C = 22\left[\frac{m}{s}\right].$$



a, Határozzuk meg az a és b paraméterek értékét a pálya egyenletében!
b, Határozzuk meg a pálya görbületi (simuló) körének sugarát az A, B és C pontokban!
c, Számítsa ki a kocsi normális irányú gyorsulásának nagyságát a fenti pontokban!
Megoldás:
a,
Írjuk fel az $y = a \cdot sin(b \cdot x)$ alakú egyenletet az A és B pontokban:

$$10 = a \cdot sin(b \cdot 10)$$

$$0 = a \cdot sin(b \cdot 20)\ \rightarrow\ b \cdot 20 = \pi\ \ \rightarrow\ b = \frac{\pi}{20}$$

$$10 = a \cdot sin\left(\frac{\pi}{20} \cdot 10\right) = a \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\ \rightarrow a = 10$$

Tehát a pálya egyenlete:

$$y = 10 \cdot sin\left(\frac{\pi}{20} \cdot x\right)[m]$$

b,

$$y'(x) = \frac{\pi}{20} \cdot 10 \cdot cos\left(\frac{\pi}{20} \cdot x\right) = \frac{\pi}{2} \cdot cos\left(\frac{\pi}{20} \cdot x\right),\ \ y''(x) = -\frac{\pi^2}{40} \cdot sin\left(\frac{\pi}{20} \cdot x\right)$$

A pont:

$$y'(10) = \frac{\pi}{2} \cdot cos\left(\frac{\pi}{20} \cdot 10\right) = 0,\ \ y''(10) = -\frac{\pi^2}{40} \cdot sin\left(\frac{\pi}{20} \cdot 10\right) = -\frac{\pi^2}{40}$$

$$r_A = \left|\frac{\left(1 + (y'(10)^{\,2})\right)^{\frac{3}{2}}}{y''(10)}\right| = \left|\frac{\left(1 + (0^2)\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{\pi^2}{40}}\right| = \frac{40}{\pi^2} = 4.053[m]$$

B pont:

$$y'(20) = \frac{\pi}{2} \cdot cos\left(\frac{\pi}{20} \cdot 20\right) = -\frac{\pi}{2},\ \ y''(20) = -\frac{\pi^2}{40} \cdot sin\left(\frac{\pi}{20} \cdot 20\right) = 0$$

$$r_B = \left|\frac{\left(1+\left(y'(20)^{\ 2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{y''(20)}\right| = \left|\frac{\left(1+\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{0}\right| = \infty$$

C pont:

$$y'(25) = \frac{\pi}{2}\cdot cos\left(\frac{\pi}{20}\cdot 25\right) = -\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4},\quad y''(25) = -\frac{\pi^2}{40}\cdot sin\left(\frac{\pi}{20}\cdot 25\right) = \frac{\sqrt{2}\cdot\pi^2}{80}$$

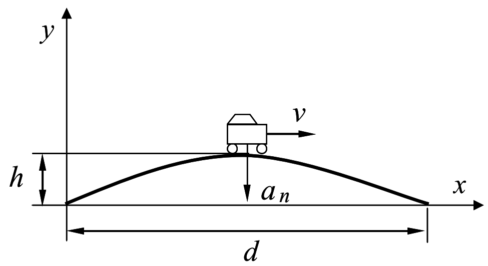
$$r_C = \left|\frac{\left(1+\left(y'(25)^{\ 2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{y''(25)}\right| = \left|\frac{\left(1+\left(-\frac{\sqrt{2}\cdot\pi}{4}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\pi^2}{80}}\right| = 19.13[m]$$

c,

$$a_{nA} = \frac{v_A{}^2}{r_A} = 0.987\left[\frac{m}{s^2}\right],\quad a_{nB} = \frac{v_B{}^2}{r_B} = 0\left[\frac{m}{s^2}\right],\quad a_{nC} = \frac{v_C{}^2}{r_C} = 25.3\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

4.1.1.3/2 Egy gépkocsi az ábrán látható parabola ívű hídon halad keresztül állandó v nagyságú sebességgel.
Adatok:

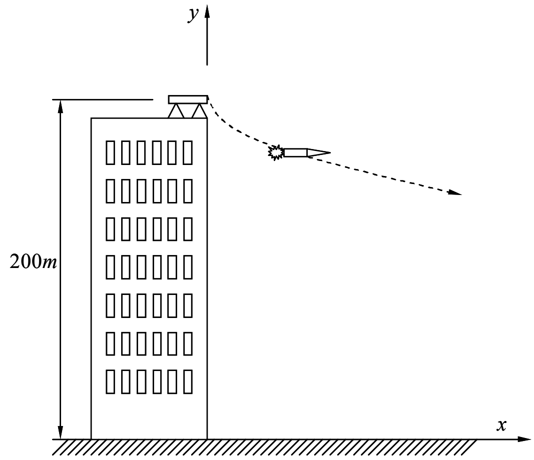
$$h = 10[m];\ d = 80[m];\ v = 20\left[\frac{m}{s}\right].$$



a, Írjuk fel a parabolaív $y = f(x)$ alakú egyenletét az ábrán vázolt koordinátarendszerben!
b, Határozzuk meg a pálya görbületi (simuló) körének sugarát annak tetőpontjában!
c, Számítsa ki a gépkocsi normális irányú gyorsulásának nagyságát a tetőpontban!

4.1.2 Szabad mozgások

4.1.2/M1 Egy rakétát egy $200[m]$ magas épület tetejéről indítunk. A rakéta síkmozgást végez, hely-idő függvénye az ábrán vázolt koordinátarendszerben $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t^4 + 2 \cdot t^2 \\ 200 - 4.9 \cdot t^2 \end{pmatrix} [m]$en alakú. Az időt másodpercben mérjük.



a, Adja meg a rakéta $\bar{v}(t)$ sebesség-idő függvényét, és sebességének nagyságát az indítást követően $4[s]$-mal!
b, Adja meg a rakéta $\bar{a}(t)$gyorsulás-idő függvényét, és gyorsulásanak nagyságát az indítást követően $4[s]$-mal!
c, Adja meg a rakéta pályájának $y = f(x)$ alakú egyenletét!
Megoldás:
a,
A sebesség-idő függvényt a hely-idő függvény idő szerinti deriváltja. A deriválást koordinátánként végezzük el:

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot t^3 + 4 \cdot t \\ -9.8 \cdot t \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

A sebességvektor az indítás után $4[s]$-al:

$$\boldsymbol{v}(4) = \begin{pmatrix} 4 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4 \\ -9.8 \cdot 4 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right] = \begin{pmatrix} 272 \\ -39.2 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

A sebesség nagysága:

$$|\boldsymbol{v}(4)| = \sqrt{(272)^2 + (-39.2)^2} = 274.8 \left[\frac{m}{s}\right]$$

b,
A gyorsulás-idő függvényt a sebesség-idő függvény idő szerinti deriváltja:

$$\boldsymbol{a}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cdot t^2 + 4 \\ -9.8 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

A gyorsulásvektor az indítás után $4[s]$-al:

$$\boldsymbol{a}(4) = \begin{pmatrix} 12 \cdot 4^2 + 4 \\ -9.8 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right] = \begin{pmatrix} 196 \\ -9.8 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

A gyorsulás nagysága:

$$|\boldsymbol{a}(4)| = \sqrt{(196)^2 + (-9.8)^2} = 196.2 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

c,

$$x = t^4 + 2 \cdot t^2$$

$$y = 200 - 4.9 \cdot t^2 \rightarrow t^2 = \frac{200 - y}{4.9}$$

$$x = \left(\frac{200 - y}{4.9}\right)^2 + 2 \cdot \frac{200 - y}{4.9} = \left(\frac{200 - y}{4.9} + 1\right)^2 - 1$$

$$\frac{200 - y}{4.9} + 1 = \pm\sqrt{x + 1} \rightarrow 200 - y = \pm 4.9 \cdot \sqrt{x + 1} - 4.9 \rightarrow y = \pm 4.9 \cdot \sqrt{x + 1} + 204.9$$

A rakéta tényleges mozgását figyelembe véve a fenti két megoldás közül az alábbi a valós:

$$y = -4.9 \cdot \sqrt{x + 1} + 204.9$$

4.1.2/M2

Egy anyagi pont gyorsulás-idő függvénye az alábbi:

$$\boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ -9.8 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Ismerjük továbbá a pont $\mathrm{t} = 0$ időpillanatban vett $\boldsymbol{r}_0$ hely- és $\boldsymbol{v}_0$ sebességvektorát.

Adatok:

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} [m],\ \boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right].$$

a, Adjuk meg a pont $\mathbf{v}(\mathrm{t})$ sebesség-idő függvényét, valamint sebességnagyságát a $t = 4[s]$ időpillanatban!

b, Adjuk meg a pont $\boldsymbol{r}(t)$ hely-idő függvényét, valamint kiinduló ponttól mért távolságát a $t = 4[s]$ időpillanatban!

Megoldás:

a,

$$\boldsymbol{v}(t_1) = \boldsymbol{v}(0) + \int_0^{t_1} \boldsymbol{a}(t)dt = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ -9.8 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 \\ -9.8 \cdot t \end{bmatrix}_0^{t_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} {t_1}^2 \\ -9.8 \cdot t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + {t_1}^2 \\ 3 - 9.8 \cdot t_1 \end{pmatrix}$$

Tehát a pont sebesség-idő függvénye az alábbi:

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} 5 + t^2 \\ 3 - 9.8 \cdot t \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

A sebességnagyság a $t = 4[s]$ időpillanatban:

$$|\boldsymbol{v}(4)| = \sqrt{(5 + 4^2)^2 + (3 - 9.8 \cdot 4)^2} = 41.88 \left[\frac{m}{s}\right]$$

b,

$$\boldsymbol{r}(t_1) = \boldsymbol{r}(0) + \int_0^{t_1} \boldsymbol{v}(t)dt = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} 5 + t^2 \\ 3 - 9.8 \cdot t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \cdot t + \frac{t^3}{3} \\ 3 \cdot t - 4.9 \cdot t^2 \end{bmatrix}_0^{t_1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \cdot t_1 + \frac{{t_1}^3}{3} \\ 3 \cdot t_1 - 4.9 \cdot {t_1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 5 \cdot t_1 + \frac{{t_1}^3}{3} \\ 5 + 3 \cdot t_1 - 4.9 \cdot {t_1}^2 \end{pmatrix} [m]$$

Tehát a pont hely-idő függvénye az alábbi:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 10 + 5 \cdot t + \frac{t^3}{3} \\ 5 + 3 \cdot t - 4.9 \cdot t^2 \end{pmatrix} [m]$$

A pont kiinduló ponttól mért távolsága a $t = 4[s]$ időpillanatban:

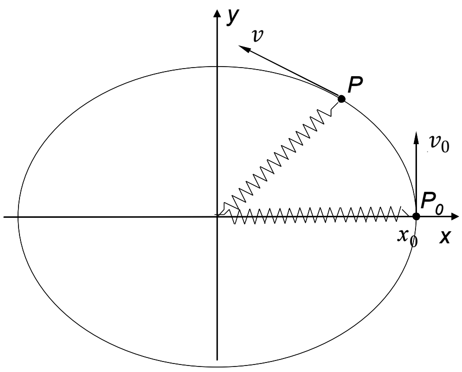
$$|\boldsymbol{r}(4) - \boldsymbol{r}(0)| = \left|\begin{pmatrix} 10 + 5 \cdot 4 + \frac{4^3}{3} \\ 5 + 3 \cdot 4 - 4.9 \cdot 4^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + \frac{4^3}{3} \\ 3 \cdot 4 - 4.9 \cdot 4^2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(41.33)^2 + (-66.40)^2}$$
$$= 78.21[m]$$

4.1.2/3 Egy csavarrugó egyik végét egy vízszintes, tökéletesen sima síklap O pontjához rögzítjük, másik végéhez egy pontszerű testet erősítünk. A rugót megnyújtva a testet a P_0 pontból v_0 nagyságú, a síkba eső és a rugó hossztengelyére merőleges irányú kezdősebességgel elindítjuk. A test az ábrán vázolt koordinátarendszerben az alábbi hely-idő függvény szerint periodikus síkmozgást végez. (A rugó terheletlen hossza nullának tekinthető.)

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \cos(\omega t) \\ \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} [m]$$

Adatok:

$$x_0 = 0.5[m]; \; v_0 = 2\left[\frac{m}{s}\right]; \; \omega = 10\left[\frac{rad}{s}\right].$$



a, Adja meg a test $\boldsymbol{v}(t)$ sebesség-idő és $\boldsymbol{a}(t)$ gyorsulás-idő függvényét!

b, Adja meg a test sebességének és gyorsulás nagyságát, az indítást követően $3[s]$-al!

c, Adja meg a test pályájának $y = f(x)$ egyenletét! Milyen alakzat a pálya?

4.1.2/4 Egy anyagi pont $\boldsymbol{a}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ -9.81 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$ gyorsulás-idő függvény szerint szabad mozgást végez. A pont kezdeti $\bar{r}_0$ helyvektora és $\bar{v}_0$ sebességvektora ismert.

Adatok:

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} [m]; \; \boldsymbol{v}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right].$$

a, Adjuk meg a pont gyorsulásvektorát és gyorsulásának nagyságát az indulást követően $3[s]$-al!

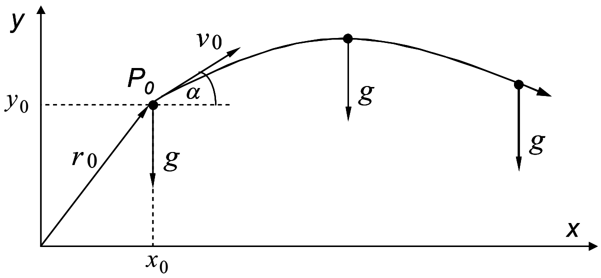
b, Adja meg a pont $\boldsymbol{v}(t)$ sebesség-idő és $\boldsymbol{r}(t)$ hely-idő függvényét!

c, Adja meg a pont sebességének nagyságát, valamint kiinduló ponttól mért távolságát az indulást követően $3[s]$-al!

4.1.2/5 A P_0 pontból, a vízszintessel α szöget bezáró v_0 nagyságú kezdősebességgel elhajítunk egy ködarabot, amely anyagi ponttal modellezhető. Elhanyagolható közegellenállás esetén a kő állandó nagyságú, függőleges irányú $\bar{g}$ gyorsulással mozog az ábra szerint.

Adatok:

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} [m];\ \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.81 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right];\ v_0 = 15 \left[\frac{m}{s}\right];\ \alpha = 30°.$$



a, Írjuk fel a kő $\boldsymbol{v}_0$ kezdősebesség vektorát az ábrán adott koordinátarendszerben!

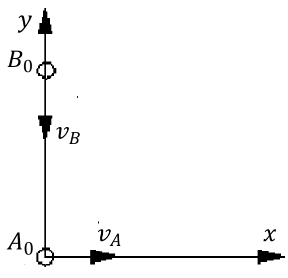
b, Adjuk meg a kő $\boldsymbol{v}(t)$ sebesség-idő és $\boldsymbol{r}(t)$ hely-idő függvényét!

c, Számítsuk ki a kő sebességének nagyságát és P_0 ponttól mért távolságát az elhajítást követően $2[s]$-al!

d, Határozzuk meg a kő pályájának $y = f(x)$ alakú egyenletét! Milyen mértani alakzat a pálya?

4.1.2/6 Az "A_0" jelű pontból indulva egy harckocsi $\mathbf{v}_A$ állandó sebességgel halad. Az "A_0" ponttól y_0 távolságra lévő tüzelőállásból ("B_0" jelű pont) a harckocsit – indulásának pillanatában – lézer-rávezetésű páncéltörő rakétával támadják. A rakéta állandó, v_B nagyságú sebességgel halad, a sebességvektor iránya mindig a harckocsi felé mutat.

Adatok: $y_0 = 1000[m];\ \boldsymbol{v}_A = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right];\ v_B = 850 \left[\frac{m}{s}\right].$



a, Adja meg a rakéta $\boldsymbol{r}(t)$ hely-idő függvényét az ábrán adott koordinátarendszerben!

b, Írja fel a rakéta pályájának $y = f(x)$ alakú egyenletét!

4.1.2/7 Az "A" pontból induló pontszerű test kezdősebessége $\boldsymbol{v}_{A0}$, a "B" pontból indulóé $\bar{v}_{B0}$. Az "A" és "B" pontok helyvektorait $\mathbf{r}_A$ és $\mathbf{r}_B$ jelöli.
Adatok:

$$\bar{r}_A = \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}[m];\ \bar{r}_B = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}[m];\ \bar{v}_{A0} = \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s}\right];\quad \bar{v}_{B0} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s}\right].$$

a, Melyik testnek, és mennyivel kell korábban indulnia, hogy pályájuk közös pontjába egy időben érkezzenek, ha

$$\text{I. } \boldsymbol{a}_A = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s}\right];\ \boldsymbol{a}_B = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s}\right]?$$

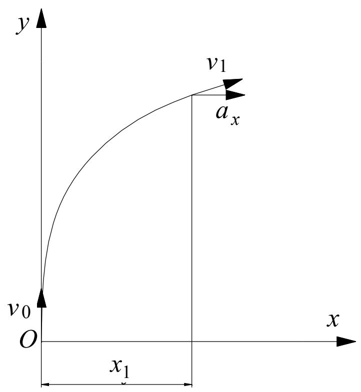
$$\text{II. } \boldsymbol{a}_A = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s}\right];\ \boldsymbol{a}_B = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s}\right]?$$

$$\text{III. } \boldsymbol{a}_A = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s}\right];\boldsymbol{a}_B = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s}\right]?$$

b, Adja meg az egyes testek pályáinak $y = f(x)$ alakú egyenletét, és a pályák közös pontjának koordinátáit a fenti esetekben!

4.1.2/8 Egy tollaslabdát az ábra O pontjából függőlegesen felfelé, v_0 nagyságú kezdősebességgel elindítunk. Vízszintes irányú szél fúj, melynek hatására a tollaslabda – a függőleges irányú nehézségi gyorsuláson kívül – vízszintes irányú, állandó a_x gyorsulással is rendelkezik. A tollaslabda közegellenállásból adódó, függőleges irányú sebességvesztésétől eltekintünk.
Adatok:

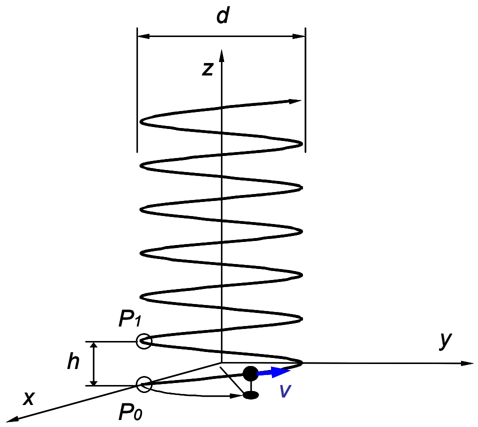
$$v_0 = 4\left[\frac{m}{s}\right];\ a_x = 2\left[\frac{m}{s^2}\right];\ g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Adja meg a tollaslabda $\boldsymbol{v}(t)$ sebesség-idő, és $\boldsymbol{r}(t)$ helyvektor-idő függvényét a vázolt koordináta-rendszerben!
b, Mennyi idő alatt sodródik el a labda x irányban x_1 távolságra? Mekkora y koordinátájának értéke ekkor?
c, Írja fel a tollaslabda pályájának $y = f(x)$ alakú egyenletét!

4.1.2/9 Egy pontszerű test álladó v nagyságú sebességgel állandó h menetemelkedésű, d átmérőjű csavarvonal mentén halad. A test mozgásának leírásához koordinátarendszert rögzítünk úgy, hogy a z tengely egybeessen a csavarvonal szimmetriatengelyével, az x tengely pedig metssze a csavarvonalat (P_0 pont). Tegyük fel, hogy a $t = 0$ időpillanatban a test a P_0 ponton halad keresztül.
Adatok:

$$d = 3[m];\ h = \sqrt{3} \cdot \pi [m];\ v = 5 \left[\frac{m}{s}\right].$$



a, írja fel a test $\boldsymbol{v}(t)$ sebesség-idő függvényét az ábrán kijelölt koordinátarendszerben!
b, Az a, pont eredményének ismeretében adja meg a pont $\boldsymbol{r}(t)$ hely-idő függvényét! Milyen messze van a pont az origótól a $t = 3[s]$ időpillanatban?
c, Az a, pont eredményének ismeretében adja meg a pont $\boldsymbol{a}(t)$ gyorsulás-idő függvényét! Mekkora a pont gyorsulása a $t = 2[s]$ időpillanatban?
d, Adja meg a pálya $x = f(z),\ y = f(z)$ egyenletrendszerét!

4.2 Anyagi pont kinetikája

4.2.1 Szabad mozgások

4.2.1.1 Mozgás gravitációs erőtérben

4.2.1.1/1M Egy vízszintessel β szöget bezáró emelkedő tetejéről egy aknavetővel tüzelünk. Az aknavető csövének a lejtő síkjával bezárt szöge csöve γ, a célpont az aknavetőtől l távolságban állomásozó tank.

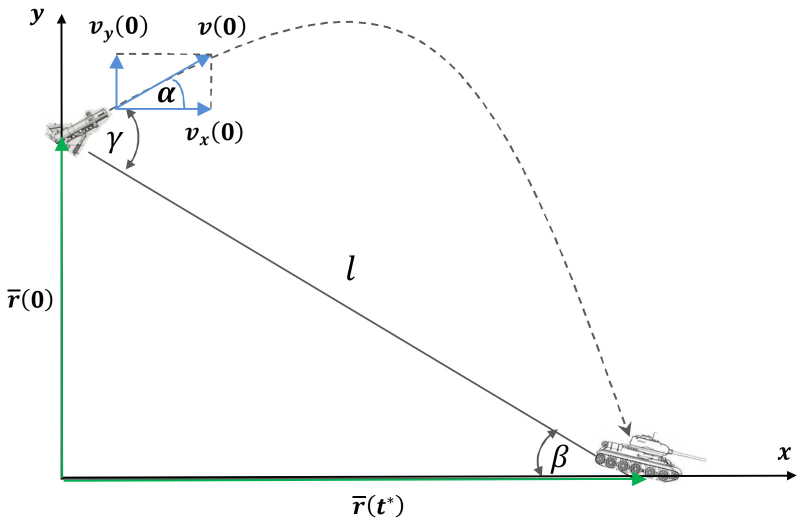
Adatok:

$$l = 100[m];\ \beta = 30^{\circ};\ \gamma = 45^{\circ};\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$

a, Mekkora legyen az aknagránát kezdősebessége, hogy eltaláljuk a tankot? (A közegellenállást hanyagoljuk el!)

b, Mekkora az aknagránát sebessége becsapódáskor?

c, Mekkora maximális magasságot ér el az aknagránát?



Megoldás:

a, Mivel a közegellenállást elhanyagoljuk, az aknagránátra csak a gravitációs erő hat. Tehát az aknagránát mozgásegyenlete:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m \cdot \boldsymbol{g} = m \cdot \boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$$

Azaz az aknagránát állandó $\boldsymbol{g}$ gyorsulással mozog.

Jelölje t^* az aknagránát kilövésétől a becsapódásáig eltelt időt.

Az aknagránát sebesség- és hely-idő függvénye:

$$\boldsymbol{v}(t^*) = \boldsymbol{v}(0) + \int_0^{t^*} \boldsymbol{g}dt = v(0) + \boldsymbol{g}\int_0^{t^*} dt = \boldsymbol{v}(0) + \boldsymbol{g} \cdot t^*$$

$$\boldsymbol{r}(t^*) = \boldsymbol{r}(0) + \int_0^{t^*} (\boldsymbol{v}(0) + \boldsymbol{g} \cdot t)dt = \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v}(0) \cdot t^* + \frac{\boldsymbol{g}}{2} \cdot t^{*2}$$

Most írjuk fel az ábra alapján az $\boldsymbol{r}(0)$, $\boldsymbol{v}(0)$, $\boldsymbol{r}(t^*)$ és $\boldsymbol{g}$ vektorokat:

$$\boldsymbol{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ l \cdot sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix} [m],\ \boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(0) \cdot cos15° \\ v(0) \cdot sin15° \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right],\ \boldsymbol{r}(t^*) = \begin{pmatrix} l \cdot cos\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86.6 \\ 0 \end{pmatrix} [m],$$

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9{,}81 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

A hely-idő függvényből az alábbi egyenlet adódik:

$$\boldsymbol{r}(t^*) = \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v}(0) \cdot t^* + \frac{\boldsymbol{g}}{2} \cdot t^{*2}$$

$$\begin{pmatrix} 86.6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v(0) \cdot cos15° \\ v(0) \cdot sin15° \end{pmatrix} \cdot t^* + \begin{pmatrix} 0 \\ -4.905 \end{pmatrix} \cdot t^{*2}$$

$$86.6 = v(0) \cdot cos15° \cdot t^* \to t^* = \frac{86.6}{v(0) \cdot cos15°} = 3.86[s]$$

$$\underline{0 = v(0) \cdot sin15° \cdot t^* - 4.905 \cdot t^{*2}}$$

$$0 = v(0) \cdot sin15° \cdot \frac{86.6}{v(0) \cdot cos15°} - 4.905 \cdot \left(\frac{86.6}{v(0) \cdot cos15°}\right)^2$$

$$0 = tan15° \cdot 86.6 - 4.905 \cdot \left(\frac{86.6}{cos15°}\right)^2 \cdot \frac{1}{v^2(0)}$$

$$39422 \cdot \frac{1}{v^2(0)} = 73.2$$

$$v(0) = 23.2 \left[\frac{m}{s}\right]$$

b,

A sebesség-idő függvényt felhasználva:

$$\boldsymbol{v}(t^*) = \boldsymbol{v}(0) + \boldsymbol{g} \cdot t^* = \begin{pmatrix} 23.2 \cdot cos15° \\ 23.2 \cdot sin15° \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9.81 \end{pmatrix} \cdot 3.86 = \begin{pmatrix} 22.41 \\ -31.86 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Tehát az aknagránát sebességének nagysága becsapódáskor:

$$|\boldsymbol{v}(3.86)| = \sqrt{(22.41)^2 + (-31.86)^2} = 38.93 \left[\frac{m}{s}\right]$$

c,

A maximális magasságban a gránát sebességének függőleges irányú komponense zérus. Ezt felhasználva:

$$0 = 23.2 \cdot sin15° - 9.81 \cdot t_{max} \ \to\ t_{max} = 0.6121[s]$$

Tehát a maximális magasság:

$$y_{max} = y(0) + v(0) \cdot sin\alpha \cdot t_{max} - \frac{g}{2} \cdot {t_{max}}^2 = 50 + 23.2 \cdot 0.6121 - 4.905 \cdot 0.6121^2 = 62.36[m]$$

4.2.1.1/M2 Milyen magasra jut fel a Föld felszínéről függőlegesen fellőtt m tömegű, $4000 \left[\frac{m}{s}\right]$ kezdősebességű lövedék? A közegellenállástól eltekintünk. Hány százalékos hibát okoz az előbbi számításban, ha a gravitációs teret homogén erőtérnek feltételezzük, amelyben az erő nagysága a Föld felszínén mért értékkel egyenlő? (A feladat megoldásához célszerű a munkatételt felhasználni.)

Adatok:

$$R_{Föld} = 6371[km];\ M_{Föld} = 5.973 \cdot\ 10^{24}[kg];\ \gamma = 6.674 \cdot\ 10^{-11} \left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right].$$

Megoldás:

Jelölje h_{max} a földfelszíntől mért maximális magasságot, amit a lövedék elér. Mivel a légellenállást elhanyagoljuk, a lövedékre mozgása során csak a gravitációs erő hat. A gravitációs erő által a lövedéken végzett munka, mialatt az a földfelszínről a h_{max} magasságba ér:

$$W_{F_g}^{R_{Föld}\to R_{Föld}+h_{max}} = \int_{R_{Föld}}^{R_{Föld}+h_{max}} F_g(r)dr = \int_{R_{Föld}}^{R_{Föld}+h_{max}} -\gamma\cdot\frac{M_{Föld}\cdot m}{r^2}dr = -\gamma\cdot M_{Föld}\cdot m \int_{R_{Föld}}^{R_{Föld}+h_{max}} \frac{1}{r^2}dr =$$

$$= -\gamma\cdot M_{Föld}\cdot m\cdot\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_{Föld}}^{R_{Föld}+h_{max}} = -\gamma\cdot M_{Föld}\cdot m\cdot\left(-\frac{1}{R_{Föld}+h_{max}} - -\frac{1}{R_{Föld}}\right) =$$

$$= -\gamma\cdot M_{Föld}\cdot m\cdot\left(\frac{1}{R_{Föld}} - \frac{1}{R_{Föld}+h_{max}}\right)$$

A lövedék mozgására vonatkozó munkatétel:

$$W_{F_g}^{R_{Föld}\to R_{Föld}+h_{max}} = -\gamma\cdot M_{Föld}\cdot m\cdot\left(\frac{1}{R_{Föld}} - \frac{1}{R_{Föld}+h_{max}}\right) = \frac{1}{2}\cdot m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot {v_0}^2$$

$$\gamma\cdot M_{Föld}\cdot\left(\frac{1}{R_{Föld}} - \frac{1}{R_{Föld}+h_{max}}\right) = \frac{1}{2}\cdot {v_0}^2$$

$$\frac{1}{R_{Föld}} - \frac{1}{R_{Föld}+h_{max}} = \frac{{v_0}^2}{2\cdot\gamma\cdot M_{Föld}}$$

$$\frac{h_{max}}{R_{Föld}\cdot(R_{Föld}+h_{max})} = \frac{{v_0}^2}{2\cdot\gamma\cdot M_{Föld}}$$

$$h_{max} = \frac{\frac{{v_0}^2}{2\cdot\gamma\cdot M_{Föld}}\cdot {R_{Föld}}^2}{1-\frac{{v_0}^2}{2\cdot\gamma\cdot M_{Föld}}\cdot R_{Föld}} = 933.980[km]$$

Ha a gravitációs erőteret olyan homogén erőtérnek feltételezzük, amelyben az erő nagysága a földfelszínen mért értékkel egyenlő:

$$W_{F_g}^{0\to h_{max}} = \int_0^{h_{max}} F_g(R_{Föld})dr = F_g(R_{Föld})\int_0^{h_{max}} dr = F_g(R_{Föld})\cdot h_{max} = -\gamma\cdot\frac{M_{Föld}\cdot m}{{R_{Föld}}^2}\cdot h_{max} =$$

$$= -m\cdot\overbrace{\left(\gamma\cdot\frac{M_{Föld}}{{R_{Föld}}^2}\right)}^{g}\cdot h_{max} = -m\cdot g\cdot h_{max}$$

A lövedék mozgására vonatkozó munkatétel ekkor:

$$W_{F_g}^{0\to h_{max}} = -m\cdot g\cdot h_{max} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot {v_0}^2$$

$$h_{max} = \frac{{v_0}^2}{2\cdot g} = 815.494[km]$$

Az állandó gravitációs erő feltételezésével okozott százalékos hiba:

$$\delta = \frac{933.980 - 815.494}{933.980}\cdot 100 = 12.7\%$$

4.2.1.1/3 A Föld felszínétől $500[m]$ magasságban $10\left[\frac{m}{s}\right]$ kezdősebességgel lefelé elhajítunk egy testet.

a, Milyen magasan lenne a Föld felszínétől $4[s]$ múlva, ha nem lenne közegellenállás? $\left(g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)$

b, Mennyi a $4[s]$ alatt a test által megtett út?

c, Mennyi idő alatt ér földet a test, és mekkora ekkor sebességének nagysága?

4.2.1.1/4 Egy követ $5\left[\frac{m}{s}\right]$ kezdősebességgel függőlegesen felfelé elhajítunk.

a, Milyen magasra repülne fel a kő, ha nem lenne közegellenállás? A testmagasságunkat hanyagoljuk el! ($g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$)

b, Az eldobás után mennyi idővel kellene legkésőbb arrébb lépnünk, hogy ne essen a fejünkre?

4.2.1.1/5 A Föld felszínétől $30[\mathrm{m}]$ magasságban $60\left[\frac{m}{s}\right]$-os kezdősebességgel fölfelé elhajítunk egy pontszerű testet.

a, Milyen magasan lenne $3[s]$ múlva, ha nem lenne közegellenállás? ($g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$)

b, Mennyi a test által $3[s]$ alatt megtett út?

c, Mennyi idő múlva ér földet a test? Mekkora földet éréskor sebességének nagysága?

4.2.1.1/6 Egy ködarabot $30[m]$ magasról lelejtünk, vele egyidejűleg v_0 nagyságú kezdősebességgel a földfelszínről feldobunk egy másikat.

a, Ha $v_0 = 15\left[\frac{m}{s}\right]$, akkor milyen magasan fog a két kő találkozni? ($g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$)

b, Mekkora legyen v_0, hogy a találkozás éppen a földfelszínen történjék, amikor a fölfelé eldobott kő is éppen visszaér a földre?

c, Mekkora legyen v_0, hogy a találkozás éppen a lentről feldobott kő pályájának felső holtpontján következzen be?

4.2.1.1/7 Egy földön nyugvó $mg = 100[N]$ súlyú tömegpontra rövid $\Delta t = 2[s]$ ideig $F = 250[N]$ nagyságú, függőleges irányú erő hat.
Határozza meg, hogy milyen magasra emelkedik a tömegpont, és mennyi idő múlva érkezik vissza a földre!

4.2.1.1/8 Hányszor olyan magasra ugrik egy kétszer akkora bolha?
(A feladat először értelmetlennek tűnik, de ha alaposabban elemzi a helyzetet, végiggondolja a kérdés részleteit, valamint a megválaszoláshoz szükséges fizikai összefüggéseket, a megoldás néhány lépésben, viszonylag egyszerűen megtalálható.)

4.2.1.1/9 Egy $130\left[\frac{km}{h}\right]$ sebességgel haladó személyautóban ülve, az ablakon kinyújtott kézzel, a talajtól mérve $75[\mathrm{cm}]$ magasságban tartunk egy követ, majd elengedjük.

a, Ha a közegellenállástól eltekintünk, az elengedéstől számítva, mekkora vízszintes távolságra ér a kő a talajra? ($g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$)

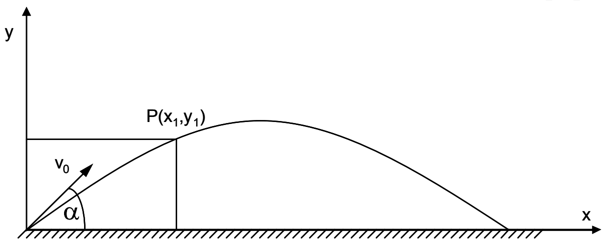
4.2.1.1/10 Egy pontszerű testet a földfelszínről, a vízszintessel $40°$-os szöget bezáró, $100\left[\frac{m}{s}\right]$ nagyságú kezdősebességgel elhajítunk.

a, Vegyen fel célszerű koordinátarendszert a mozgás leírásához, majd adja meg benne a test helyvektorát az elhajítás után $2[s]$ -al! ($g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$)

b, Milyen távol van ekkor a test az elhajítás helyétől?
c, Mekkora ekkor sebességének nagysága?
d, Milyen távol ér földet a test az elhajítás helyétől?

4.2.1.1/11 Egy pontszerű testet a földfelszínről, a vízszintessel α szöget bezáró, v_0 nagyságú kezdősebességgel elhajítunk. A mozgás leírásához egy koordinátarendszert rögzítünk az alábbi ábra szerint.
Adatok:

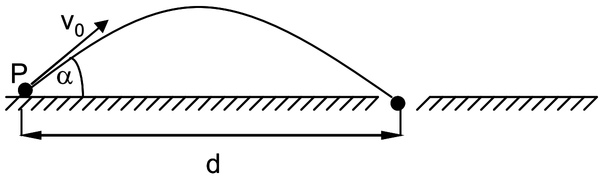
$$x_1 = 100[m]; \;\; y_1 = 50[m]; \;\; \alpha=40°; \;\; g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Mekkora legyen a v_0 kezdősebesség nagysága, hogy a test áthaladjon a koordinátarendszer $P(x_1,y_1)$ pontján? A közegellenállástól eltekintünk.

4.2.1.1/12 A talajszintről egy pontszerű testet, v_0 nagyságú kezdősebességgel elhajítunk a talajba fúrt, d távolságban lévő lyuk irányába.
Adatok:

$$d = 125[m]; \;\; v_0 = 50\left[\frac{m}{s}\right]; \;\; g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Mekkora szöget zárjon be a kezdősebesség a vízszintessel (α=?), hogy a test a lyukba pottyanjon? A közegellenállástól eltekintünk.

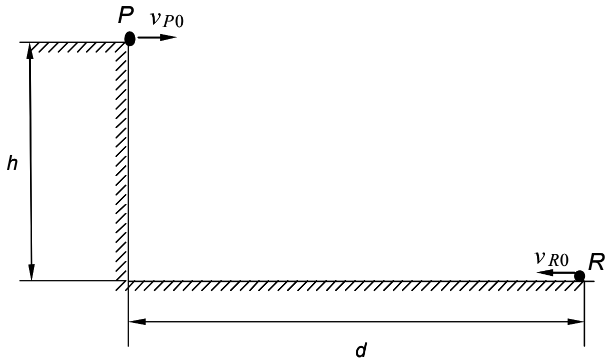
4.2.1.1/13 Az Egyesült Államok hadseregének terrorelhárító kommandója csapást mér a terroristákra. A kommandó aknavetőt használ. Az aknagránát kezdősebessége $200\left[\frac{m}{s}\right]$. A kommandó a cél magasságához képest egy $50\,[m]$-es magaslaton helyezkedik el, a cél tüzelőállástól való vízszintes távolsága $500\,[m]$. ($g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$)
a, Ha eltekintünk a közegellenállástól, a vízszinteshez képet milyen szögbe kell állítani az aknavető csövét, hogy a terroristáknak rossz napja legyen? (A megoldás során célszerű felhasználni a $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1$ trigonometrikus összefüggést)
b, A lövés során milyen maximális magasságot ér el az aknagránát?
c, Mekkora lesz a gránát sebességének abszolút értéke (nagysága) a becsapódáskor?

4.2.1.1/14 A vízszinteshez képest milyen α szögben kell elhajítani egy pontszerű testet, hogy ugyanolyan magasra emelkedjék, mint amilyen távol ér vissza az elhajítás szintjére? A közegellenállástól eltekintünk.
Adatok: $g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$.

4.2.1.1/15 Sík terepen a vízszinteshez képest milyen α szögben kell elhajítani egy pontszerű testet, hogy az a lehető legmesszebbre repüljön?($g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$)

4.2.1.1/16 Az ábrán látható P és R pontokból egyszerre indítunk el két pontszerű testet. Az egyiket h magasságból, vízszintes irányú, v_{p0} nagyságú kezdősebességgel, a másikat a vízszintes, tökéletesen sima (súrlódásmentes) talajon v_{R0} nagyságú kezdősebességgel az ábra szerint.
Adatok:

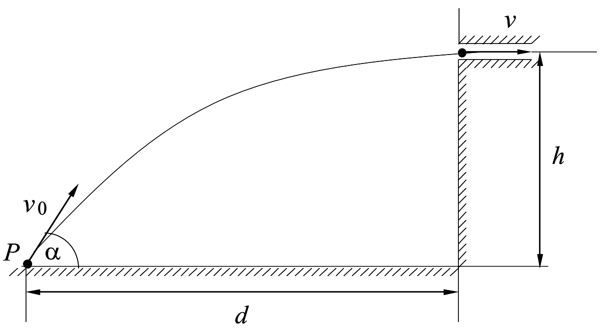
$$d = 1000[m];\ h = 500[m];\ v_{R0} = 40\left[\frac{m}{s}\right].$$



Mekkora legyen v_{p0} értéke, hogy a két test találkozzon?

4.2.1.1/17 Az ábrán látható P pontból, a függőleges, d távolságban lévő fal irányába elhajítunk egy pontszerű testet.
Adatok:

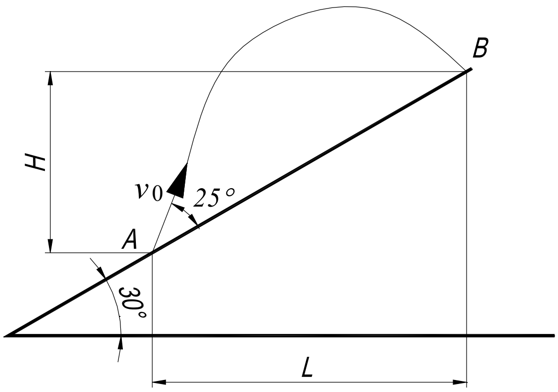
$$d = 100[m];\ h = 50[m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Mekkorára kell választani a $\bar{v}_0$ kezdősebesség nagyságát, és az ábrán látható α szög értékét ahhoz, hogy a test berepüljön a falon h magasságban elhelyezkedő nyílásba? (Ehhez a nyílás szájánál a test sebességének vízszintes irányúnak kell lennie!)

4.2.1.1/18 Az ábrán vázolt lejtőn v_0 nagyságú kezdősebességgel mozgásba hozunk egy pontszerű testet.
Adatok:

$$v_0 = 5\left[\frac{m}{s}\right];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, A feladat megoldásához válasszon megfelelő koordináta-rendszert!
b, A választott koordináta-rendszerben írja fel a lejtő, valamint a test pályájának $y = f(x)$ alakú egyenletét!
c, Határozza meg a két alakzat metszéspontjaként előálló "B" pont koordinátáit, és távolságát az "A" ponttól!
d, Számítsa ki a becsapódás pillanatában a test sebességének nagyságát!

4.2.1.1/19 Egy 30 fokos hajlásszögű lejtőn, felfelé eldobunk egy követ.
a, Mekkora kezdősebességgel, és a lejtőhöz képest milyen szögben kell a követ eldobni, hogy a lejtőn mérve, az eldobáshoz képest 3 méterre, és a lejtőre merőleges szögben csapódjon be a kő? A közegellenállástól eltekintünk. $\left(g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)$
(A feladat egyszerű megoldása érdekében célszerű megfogalmazni a talajra érkezés feltételét.)

4.2.1.1/20 A Prérifarkas $100[m]$-es magaslaton áll. A völgyben a Kengyelfutó Gyalogkakukk fogyasztja a csaliként kihelyezett eleséget. A Prérifarkas vízszintes irányú, $8\left[\frac{m}{s}\right]$ nagyságú kezdősebességgel indítja a sziklát a Gyalogkakukk ellen.
a, Milyen messze helyezte ki a csalit a Prérifarkas, ha jól tudott számolni?
b, Rajzolja meg az így kialakuló vízszintes hajítás sebesség hodográfját, majd adja meg a szikla sebességvektorát a hajítás néhány jellemző pontjában!

4.2.1.1/21 Legalább mekkora kezdősebességgel kell a Föld felszínéről függőlegesen fellőnünk egy lövedéket, hogy az eltalálhassa a $494[km]$ magasságban keringő műholdat? A közegellenállástól eltekintünk. (A feladat megoldásához célszerű a munkatételt felhasználni.)
Adatok:

$$R_{Föld} = 6371[km];\ M_{Föld} = 5.973\cdot 10^{24}[kg];\ \gamma = 6.672\cdot 10^{-11}\left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right].$$

4.2.1.1/22 A Föld felszínén állva legalább mekkora kezdősebességgel kell vízszintes irányba kilőnünk egy lövedéket, hogy az soha többé ne essen le (első kozmikus sebesség)? A közegellenállástól és a Föld forgásától eltekintünk.
Adatok:

$$R_{Föld} = 6371[km];\ M_{Föld} = 5.973 \cdot 10^{24}[kg];\ \gamma = 6.672 \cdot 10^{-11}\left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right].$$

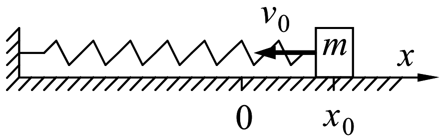
4.2.1.1/23 A Föld felszínéről függőleges irányba fellövünk egy lövedéket. Legalább mekkora legyen a kezdősebesség nagysága, hogy a lövedék soha többé ne essen vissza a Földre (második kozmikus sebesség)? A közegellenállástól eltekintünk. (A feladat megoldásához célszerű a munkatételt felhasználni.)
Adatok:

$$R_{Föld} = 6371[km];\ M_{Föld} = 5.973 \cdot 10^{24}[kg];\ \gamma = 6.672 \cdot 10^{-11}\left[\frac{Nm^2}{kg^2}\right].$$

4.2.1.2 Mozgás rugóerőtérben

4.2.1.2/M1 Egy vízszintes helyzetű, egyik végénél rögzített csavarrugó szabad végéhez m tömegű, pontszerű testet erősítünk. A test a tökéletesen sima (súrlódásmentes) síkon fekszik. Nyújtsuk meg a rugót, majd indítsuk el a testet rugó irányú, a megnyúlással ellentétes értelmű v_0 kezdősebességgel. (A mozgás leírásához rögzítsük az x koordinátatengelyt a rugó hossztengelyében. A rugó terheletlen állapotában a test az origóban van, a mozgás az x_0 koordinátájú pontból indul. A légellenállást hanyagoljuk el!)
Adatok:

$$c = 20000\left[\frac{N}{m}\right];\ m = 2\ [kg];\ x_0 = 0.1\ [m];\ v_0 = -10\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Írjuk fel a test mozgásának differenciálegyenletét, majd adjuk meg annak általános $x(t)$ megoldásfüggvényét!
b, Az $x(t)$ függvény differenciálegyenletbe történő helyettesítésével határozzuk meg a létrejövő lengés körfrekvenciáját, majd adjuk meg a frekvencia és lengésidő értékét!
c, Határozzuk meg a kezdőfázist és amplitúdót a kezdeti mozgásjellemzőkből!
d, Írjuk fel a mozgás $x(t)$ kitérés-idő függvényét és határozzuk meg a kitérés értékét a $t = 5[s]$ időpillanatban!
e, Határozzuk meg a mozgás $v(t)$ pályamenti sebesség-idő függvényét, és a pályasebesség értékét a $t = 5[s]$ időpillanatban!
f, Határozzuk meg a mozgás $a(t)$ pályamenti gyorsulás-idő függvényét, és a pályamenti gyorsulás értékét a $t = 5[s]$ időpillanatban!

Megoldás:
a,
Mivel a sík, amelyen a test mozog, tökéletesen sima, továbbá a légellenállást elhanyagoljuk, a testre x irányban csak a rugó erő hat. A test mozgásegyenlete:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = -c \cdot \Delta l = m \cdot \boldsymbol{a}$$

Felhasználva, hogy a rugó Δl megnyúlása és a test helyét jellemző x koordináta minden pillanatban egyenlő egymással, valamint azt, hogy $a = \ddot{x}$, az alábbi differenciál egyenletet kapjuk:

$$-c \cdot x = m \cdot \ddot{x} \rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{c}{m} \cdot x(t) = 0$$

A fenti differenciálegyenlet általános megoldása az alábbi alakban írható:

$$x(t) = A \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

A fenti függvényben A az amplitúdó (maximális kitérés), φ_0 a kezdőfázis.
b,
A kitérés-idő függvényből a pályamenti sebesség- és gyorsulás-idő függvények deriválással meghatározhatók:

$$v(t) = \dot{x}(t) = A \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Az $x(t)$ és $\ddot{x}(t)$ függvényeket behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$-A \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_0) + \frac{c}{m} \cdot A \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = 0$$

$$-\omega^2 + \frac{c}{m} = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = 100 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

A frekvencia és a lengésidő értéke:

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = 15.92 \left[\frac{1}{s}\right], \qquad T = \frac{1}{f} = 0.0628[s]$$

c,
Írjuk fel a kitérés- és pályamenti sebesség-idő függvényeket a $t = 0$ időpillanatban:

$$x(0) = x_0 = A \cdot sin(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A \cdot sin(\varphi_0)$$

$$v(0) = v_0 = A \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = A \cdot \omega \cdot cos(\varphi_0)$$

Tehát az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$x_0 = A \cdot sin(\varphi_0) \rightarrow {x_0}^2 = A^2 \cdot sin^2(\varphi_0) \rightarrow sin^2(\varphi_0) = \frac{{x_0}^2}{A^2}$$

$$\underline{v_0 = A \cdot \omega \cdot cos(\varphi_0)} \rightarrow {v_0}^2 = A^2 \cdot \omega^2 \cdot cos^2(\varphi_0) \rightarrow cos^2(\varphi_0) = \frac{{v_0}^2}{A^2 \cdot \omega^2}$$

A két egyenletet összeadva:

$$\frac{{x_0}^2}{A^2} + \frac{{v_0}^2}{A^2 \cdot \omega^2} = sin^2(\varphi_0) + cos^2(\varphi_0) = 1$$

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{\omega^2}} = 0.1414[m]$$

$$sin(\varphi_0) = \frac{x_0}{A} = 0.7072 \rightarrow \varphi_{01} = 0.7855, \varphi_{02} = 2.434$$

A II. egyenletet csak a $\varphi_{02} = 2{,}434$ érték elégíti ki, így az a megoldás.

d,

$$x(t) = 0.1414 \cdot sin(100 \cdot t + 2.434)[m]$$
$$x(5) = 0.1414 \cdot sin(100 \cdot 5 + 2.434) = -0.031[m]$$

e,

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = 14.14 \cdot cos(100 \cdot t + 2.434) \left[\frac{m}{s}\right]$$
$$v(5) = 14.14 \cdot cos(100 \cdot 5 + 2.434) = 13.80 \left[\frac{m}{s}\right]$$

f,

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = -1414 \cdot sin(100 \cdot t + 2.434) \left[\frac{m}{s^2}\right]$$
$$a(5) = -1414 \cdot sin(100 \cdot t + 2.434) = -309.7 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

4.2.1.2/2 Egy $0.5[kg]$ tömegű, pontszerű testet $20000 \left[\frac{N}{m}\right]$ rugómerevségű csavarrugóhoz erősítünk. A testet egyensúlyi helyzetéből $0{,}1$ [m]-el kitérítjük, majd elengedjük ($v(0) = 0$). A mozgás leírásához rögzítsük az x koordinátatengelyt ugyanúgy, mint a 4.2.1.2/M1 feladat esetében!
a, Számítsuk ki a pont kitérését, pályamenti sebességét és gyorsulását a megfigyelés kezdete után $10[s]$ és $20[s]$ elteltével!
b, Rajzoljuk fel a mozgás foronómiai függvényeit!

4.2.1.2/3 Egy rugalmasan felfüggesztett, pontszerű gépalkatrész $y(t) = 0.06\,sin\,(7t)[m]$ kitérés-idő függvény szerint harmonikus rezgőmozgást végez. Az időt másodpercben mérjük.
a, Határozza meg a test pályamenti sebesség-idő, és a pályamenti gyorsulás-idő függvényét!
b, Számítsa ki a pályamenti sebesség és a gyorsulás értékét a $t = 12[s]$ időpillanatban.
c, Számítsa ki, mely t időpontokban változtatja meg a test mozgásának irányát!

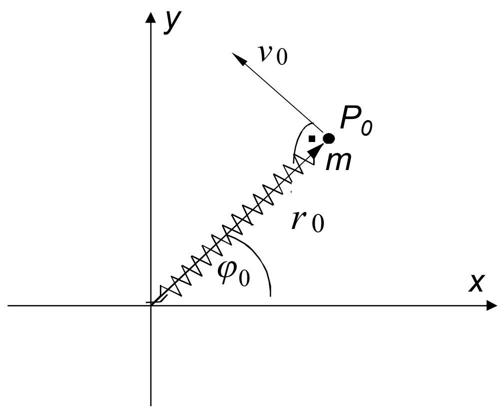
4.2.1.2/4 Egy extrém sportokat kedvelő fiatalembert, bokájához erősített, $25[m]$ hosszú gumikötéllel, egy $50[m]$ magas daruból függőlegesen kilógatnak. Ezután lehúzzák egészen a földig, elengedik, és magára hagyják. A fiatalember harmonikus lengőmozgást végez, legnagyobb sebessége a lengés során $14\left[\frac{m}{s}\right]$.
a, Határozza meg a fiatalember lengésének körfrekvenciáját, valamint adja meg a lengésidőt!
b, Számítsa ki a fiatalember gyorsulásának maximális értékét, és adja meg a maximális gyorsulás helyét is!

4.2.1.2/5 Egy anyagi pont $T = 0.1256[s]$ periódusidővel harmonikus rezgőmozgást végez. A maximális, és a $t = 0$ időpillanatban vett kitérés értéke $0.2[m]$ és $-0.173[m]$. A $t = 0$ időpillanatban a test egyensúlyi helyzete felé közeledik.
a, Mennyi a kezdőfázis értéke? Írja fel a test kitérés-idő függvényét!
b, Mennyi a pont kitérésének, pályamenti sebességének és gyorsulásának értéke a $t = 5[s]$ időpillanatban? Rajzoljuk fel a mozgás foronómiai függvényeit!

4.2.1.2/6 Egy anyagi pont harmonikus rezgőmozgást végez, kitérés-idő függvénye $y = 0.02 \cdot sin\,(\omega \cdot t + \varphi_0)[m]$ alakú. A $t = 0$ időpillanatban a test az egyensúlyi helyzettől távolodik, kitérése ekkor $0{,}01[\mathrm{m}]$, pályagyorsulása $-36\left[\frac{m}{s^2}\right]$.
Határozza meg a kezdőfázis értékét, a körfrekvenciát, valamint a maximális sebességet!

4.2.1.2/7 Egy csavarrugó egyik végét egy vízszintes, tökéletesen sima síklap O pontjához rögzítjük, másik végéhez egy pontszerű, m tömegű testet erősítünk. A rugót megnyújtva, a testet az $\boldsymbol{r}_0$ helyvektorú P_0 pontból v_0 nagyságú, a síkba eső, és a rugó hossztengelyére merőleges irányú sebességgel elindítjuk. A rugó által kifejtett erő nagysága egyenesen arányos a rugó megnyúlásával, a rugó terheletlen hossza – a mozgás minden pillanatában – elhanyagolható a rugó megnyúlása mellett.
Adatok:

$$c = 20000\left[\frac{N}{m}\right];\ m = 2\ [kg];\ r_0 = 0.2\ [m];\ \varphi_0 = 45^\circ;\ v_0 = 10\left[\frac{m}{s}\right].$$

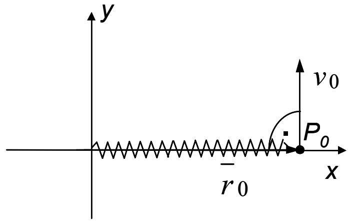


a, Írja fel a test mozgásának differenciálegyenletét x és y irányban!
b, Határozza meg a létrejövő lengés körfrekvenciájának és frekvenciájának értékét!
c, Határozza meg az x és y irányú amplitúdó és kezdőfázis értékét!
d, Írja fel a mozgás $x(t)$ és $y(t)$ kitérés-idő függvényeit, majd adja meg a test $\boldsymbol{r}(t)$ hely-idő függvényét! Adja meg a test origótól mért távolságát a $t = 5[s]$ időpillanatban!
e, Határozza meg a mozgás $v_x(t)$ és $v_y(t)$ sebességkoordináta-idő függvényeit, majd írja fel a test $\boldsymbol{v}(t)$ sebesség-idő függvényét! Adja meg a test sebességének nagyságát a $t = 5[s]$ időpillanatban!
f, Határozza meg a mozgás $a_x(t)$ és $a_y(t)$ gyorsuláskoordináta-idő függvényeit, majd írja fel a test $\boldsymbol{a}(t)$ gyorsulás-idő függvényét! Adja meg a test gyorsulásvektorának nagyságát a $t = 5[s]$ időpillanatban!
g, Mekkora a test mechanikai energiája a lengés során?

4.2.1.2/8 Egy csavarrugó egyik végét egy vízszintes, tökéletesen sima síklap O pontjához rögzítjük, másik végéhez egy pontszerű, m tömegű testet erősítünk. A rugót megnyújtva, a testet az $\boldsymbol{r}_0$ helyvektorú P_0 pontból v_0 nagyságú, a síkba eső, és a rugó hossztengelyére merőleges irányú sebességgel elindítjuk. A rugó által kifejtett erő nagysága egyenesen

arányos a rugó megnyúlásával, a rugó terheletlen hossza – a mozgás minden pillanatában – elhanyagolható a rugó megnyúlása mellett.
Adatok:

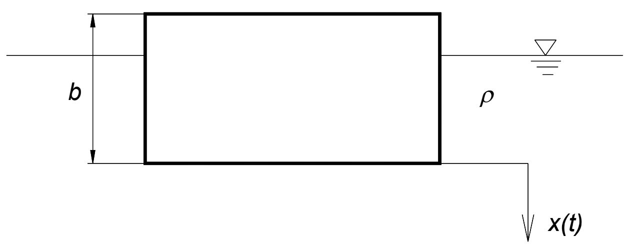
$$c = 20000\left[\frac{N}{m}\right];\ m = 2\,[kg];\ r_0 = 0.2\,[m];\ v_0 = 10\left[\frac{m}{s}\right].$$



a, Írja fel a test mozgásának differenciálegyenletét x és y irányban!
b, Határozza meg a létrejövő lengés körfrekvenciájának és frekvenciájának értékét!
c, Határozza meg az x és y irányú amplitúdó és kezdőfázis értékét!
d, Írja fel a mozgás $x(t)$ és $y(t)$ kitérés-idő függvényeit, majd adja meg a test $\boldsymbol{r}(t)$ hely-idő függvényét! Adja meg a test origótól mért távolságát a $t = 5[s]$ időpillanatban!
e, Határozza meg a test pályájának $y = f(x)$ alakú egyenletét! Milyen alakzat a pálya?
f, Határozza meg a test sebességének nagyságát, amikor a rugó y irányú! A megoldáshoz alkalmazza a munkatételt!
g, Mekkorának kell választani a v_0 kezdősebesség nagyságát, hogy a test körpályán haladjon?

4.2.1.2/9 Egy ρ_h sűrűségű, b magasságú, négyzet alapú hasáb ρ_f sűrűségű folyadék felszínén lebeg. A hasábot függőleges irányban, $0.05\,[m]$-el lejjebb nyomjuk, majd magára hagyjuk. A hasáb ezt követően függőleges irányban lengőmozgást végez. A kitérést a nyugvó hasáb alsó lapjától mérjük, a kitérés pozitív értelme az ábrán adott.
Adatok:

$$\rho_h = 979.038\left[\frac{kg}{m^3}\right];\ \rho_f = 998\left[\frac{kg}{m^3}\right];\ b = 0.5\,[m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



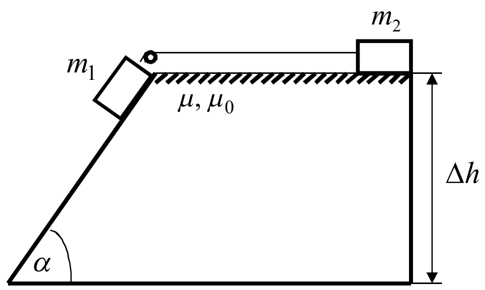
a, Archimedes törvényének felhasználásával írjuk fel a hasáb mozgásának differenciálegyenletét!
b, Bizonyítsa be, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása $x(t) = A \cdot sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$ alakú. Határozza meg ω értékét, valamint a hasáb lengésidejét!
c, Számítsa ki az A és φ_0 konstansok értékét!

4.2.2 Kényszermozgások

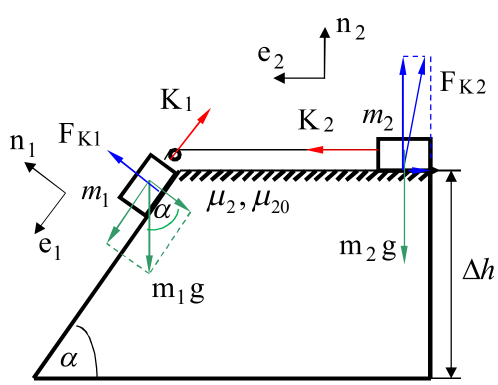
4.2.2.1 Mozgás egyenes vonalú kényszerpályán

4.2.2.1/M1 Az ábrán látható elrendezésben magára hagyjuk az összekötött m_1 és m_2 tömegű pontszerű testeket. Az m_2 tömegű test és a talaj közti csúszási és tapadási súrlódási tényező μ_2 és μ_{02}. Az m_1 tömegű test és a lejtő közti súrlódás elhanyagolható. A testeket egymáshoz kapcsoló kötél, és a dob ideálisak (a kötél nyújthatatlan, elhanyagolhat tömegű és tökéletesen hajlékony, a dob ellenállásmentesen forog, elhanyagolható tömegű, továbbá a kötél a dobon nem csúszhat meg).
Adatok:

$$m_2 = 100\,[kg];\ \mu_{01} = 0;\ \mu_1 = 0;\ \mu_{02} = 0.25;\ \mu_2 = 0{,}2;\ \alpha = 60°;\ \Delta h = 20[m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora lehet maximálisan az m_1 tömeg, ha azt akarjuk, hogy a testek ne mozduljanak el?
b, Mekkora a két testből álló mechanikai rendszer gyorsulása, ha $m_1 = 70[kg]$?
c, A gyorsulás ismeretében számítsuk ki, hogy mennyi idő alatt csúszik le az m_1 tömegű test a lejtő tetejéről annak aljára! (A rendszer nyugalomból indul.) Mekkora a sebessége a lejtő alján?
d, Írjuk fel az m_1 tömegű test mozgására vonatkozó munkatételt, majd ellenőrizzük le az előző pontban kapott sebességértéket!
Megoldás:
Rajzoljuk be a testekre hat erőket, valamint vegyünk fel koordinátarendszert külön az egyik, és külön a másik test mechanikai vizsgálatához.



Mivel a két test össze van kapcsolva fontos, hogy az e_1 és e_2 koordinátatengelyeket azonosan irányítsuk. (Például mutathat mindkettő a valódi mozgásirányába, vagy akár azzal ellentétesen.)
A testeket összekötő kötél és a dob ideálisak, ebből adódóan a két testre ható kötélerő, valamint a testek gyorsulásának nagysága egymással egyenlő:

$$|\boldsymbol{K}_1| = |\boldsymbol{K}_2| = K, \quad |\bar{a}_1| = |\bar{a}_1| = a$$

Írjuk fel az egyensúlyi egyenletet külön az m_1 és külön az és m_2 tömegű testre:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m_1 \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{k1} + \boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{0}$$

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m_2 \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{k2} + \boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{0}$$

Az ábrán adott koordinátarendszerekben a fenti egyenletek az alábbi alakot öltik:

$$\begin{pmatrix} m_1 \cdot g \cdot sin\alpha \\ -m_1 \cdot g \cdot cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_{t2} \\ F_{n2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Innen az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - K = 0 \;\rightarrow\; K = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha$$

$$-m_1 \cdot g \cdot cos\alpha + F_{n1} = 0$$

$$-F_{t2} + K = 0 \;\rightarrow\; F_{t2} = K = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha$$

$$-m_2 \cdot g + F_{n2} = 0 \;\rightarrow\; F_{n2} = m_2 \cdot g$$

Az m_2 tömegű test akkor és csakis akkor marad nyugalomban, ha:

$$|F_{t2}| \le \mu_{02} \cdot F_{n2}$$

Tehát:

$$|m_1 \cdot g \cdot sin\alpha| \le \mu_{02} \cdot m_2 \cdot g$$

$$-\mu_{02} \cdot m_2 \cdot g \le m_1 \cdot g \cdot sin\alpha \le \mu_{02} \cdot m_2 \cdot g$$

$$-\frac{\mu_{02}}{sin\alpha} \cdot m_2 \le m_1 \le \frac{\mu_{02}}{sin\alpha} \cdot m_2$$

$$-28.87[kg] \le m_1 \le 28.87[kg]$$

Tehát az m_1 tömeg maximálisan $28{,}87[kg]$ lehet.
b,
A feladat a, részének megoldásából adódóan, ha $m_1 = 70[kg]$ akkor a rendszer elmozdul.
Írjuk fel a két test mozgásegyenletét:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m_1 \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{k1} + \boldsymbol{K}_1 = m_1 \cdot \boldsymbol{a}_1$$

$$\sum_i \bar{F}_i = m_2 \cdot \bar{g} + \bar{F}_{k2} + \bar{K}_2 = m_2 \cdot \boldsymbol{a}_2$$

$$\begin{pmatrix} m_1 \cdot g \cdot sin\alpha \\ -m_1 \cdot g \cdot cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_{n1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K \\ 0 \end{pmatrix} = m_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{e1} \\ a_{n1} \end{pmatrix} = m_1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_{t2} \\ F_{n2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix} = m_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{e2} \\ a_{n2} \end{pmatrix} = m_2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés:
Egyenes pálya esetén a görbületi sugár minden pontban végtelen, ebből adódóan a normális irányú gyorsulás zérus:

$$r = \infty \;\rightarrow\; a_{n1} = a_{n2} = \frac{v^2}{r} = 0$$

Innen az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - K = m_1 \cdot a \;\rightarrow\; K = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - m_1 \cdot a$$

$$-m_1 \cdot g \cdot cos\alpha + F_{n1} = 0$$

$$-F_{s2} + K = m_2 \cdot a \;\rightarrow\; F_{s2} = K - m_2 \cdot a$$

$$-m_2 \cdot g + F_{n2} = 0 \;\rightarrow\; F_{n2} = m_2 \cdot g$$

$$\underline{F_{s2} = \mu_2 \cdot F_{n2} = \mu_2 \cdot m_2 \cdot g}$$

$$\mu_2 \cdot m_2 \cdot g = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - m_1 \cdot a - m_2 \cdot a$$

$$(m_1 + m_2) \cdot a = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - \mu_2 \cdot m_2 \cdot g$$

$$a = \frac{m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - \mu_2 \cdot m_2 \cdot g}{(m_1 + m_2)} = 2.34 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

c,

Jelölje Δt^* a lecsúszás időtartamát. A mozgás egyenletesen változó, tehát:

$$v_1(\Delta t^*) = v_1(0) + a \cdot \Delta t^* \;\rightarrow\; \Delta t^* = \frac{v_1(\Delta t^*) - v_1(0)}{a}$$

$$\underline{\Delta s_1 = s_1(t^*) - s_1(0) = \overbrace{v_1(0)}^{0} \cdot \Delta t^* + \frac{a}{2} \cdot \Delta t^{*2}}$$

$$II.\; \Delta s_1 = \frac{a}{2} \cdot \Delta t^{*2} \rightarrow \Delta t^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta s_1}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\sin\alpha \cdot a}} = 4.44[s]$$

$$v_1(\Delta t^*) = \overbrace{v_1(0)}^{0} + a \cdot \Delta t^* = 10.39 \left[\frac{m}{s}\right]$$

d,

A munkát az erő érintő irányú komponense végzi, a normális irányú komponens munkavégzése zérus. A gravitációs, a kényszer- és a kötélerő által az m_1 tömegű testen végzett munka:

$$W_{m \cdot g}^{0 \rightarrow s_1(t^*)} = \int_0^{s_1(t^*)} m_1 \cdot g \cdot sin\alpha ds = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha \cdot \int_0^{s_1(t^*)} ds = m_1 \cdot g \cdot sin\alpha \cdot \Delta s_1 = m_1 \cdot g \cdot \Delta h = 13734[J]$$

$$W_{F_{k1}}^{0 \rightarrow s_1(t^*)} = \int_0^{s_1(t^*)} 0 ds = 0[J]$$

$$W_K^{0 \rightarrow s_1(t^*)} = \int_0^{s_1(t^*)} -K ds = -K \cdot \int_0^{s_1(t^*)} ds = -K \cdot \Delta s_1 = -(m_1 \cdot g \cdot sin\alpha - m_1 \cdot a) \cdot \Delta s_1 = -9951\,[J]$$

A munkatétel:

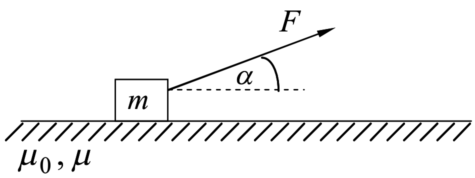
$$\sum_i W_{F_i}^{0 \rightarrow s_1(t^*)} = W_{m \cdot g}^{0 \rightarrow s_1(t^*)} + W_{F_{k1}}^{0 \rightarrow s_1(t^*)} + W_K^{0 \rightarrow s_1(t^*)} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1(\Delta t^*)^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot 0^2$$

$$3783 = \frac{1}{2} \cdot 70 \cdot v_1(\Delta t^*)^2 \;\rightarrow\; v_A = 10.39 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Tehát a c, és d, pontban kapott eredmény megegyezik egymással.

4.2.2.1/2 Egy érdes, vízszintes síkon nyugvó m tömegű, pontszerű testet állandó $\boldsymbol{F}$ erővel hatunk az alábbi ábra szerint.
Adatok:

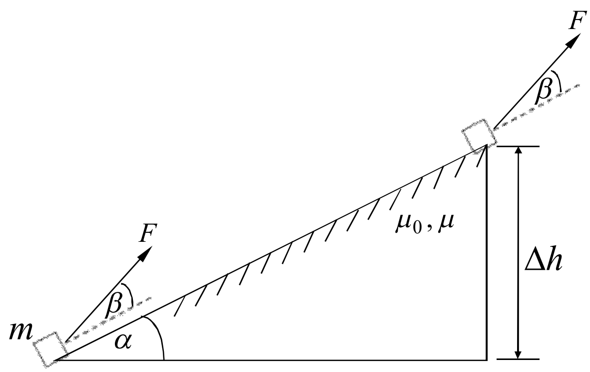
$$F = 5[kN];\ m = 1000\ [kg];\ v_0 = 5\left[\frac{m}{s}\right];\ \Delta t = 10[s];\ \mu_0 = 0.3;\ \mu = 0.1;\ \alpha = 15^{\circ};\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Elegendő-e a megadott erő nagysága a test megmozdításához?
b, Ha igen, akkor mekkora a test gyorsulása, és a talaj által kifejtett kényszererő nagysága a mozgás során?
c, Mekkora lesz a test pályamenti sebessége Δt idő elteltével? (A feladatot oldja meg a gyorsulás ismeretében, valamint annak hiányában, az impulzustétel felhasználásával!).
d, Mekkora pályaszakaszt fut be a test a megadott Δt idő alatt?
e, Mennyi munkát végez az $\boldsymbol{F}$ erő, a gravitációs erő, a talaj által kifejtett kényszererő külön-külön, és együttesen, a fenti pályaszakaszon?
f, A c, kérdésre adott válaszát ellenőrizze a munkatétel felhasználásával!

4.2.2.1/3 Egy m tömegű, pontszerű testre – amely a vízszintessel α szöget bezáró, egyenes vonalú, érdes kényszerpálya alsó pontjában nyugszik – állandó $\boldsymbol{F}$ erővel hatunk az alábbi ábra szerint.
Adatok:

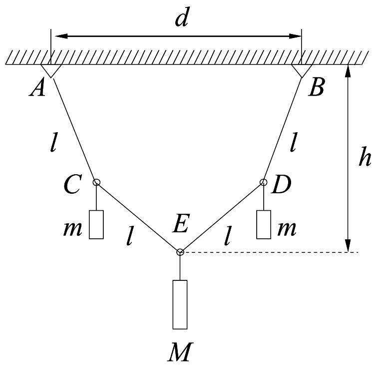
$$F = 5[kN];\ m = 500\ [kg];\ \mu_0 = 0.4;\ \mu = 0.1;\ \alpha = 20^{\circ};\ \beta = 10^{\circ};\ \Delta h = 10\ [m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Elegendő-e a megadott erő nagysága a test megmozdításához?
b, Ha igen, akkor mekkora a test gyorsulása, és a talaj által kifejtett kényszererő nagysága a mozgás során?
c, Mekkora lesz a test pályamenti sebessége a kiinduló ponttól mért Δh magasságban? (A feladatot oldja meg a gyorsulás ismeretében, valamint a munkatétel felhasználásával is!)
d, Mennyi idő alatt ér fel a test a Δh magasságba? (A feladatot oldja meg a gyorsulás ismeretében, valamint annak hiányában, az impulzustétel felhasználásával!).

4.2.2.1/4 Az alábbi ábrán az A és B pontok távolsága d, a négy kötéldarab mindegyikének hossza l. A C és D pontokban egy-egy m, míg az E pontban egy M tömegű teher függ. Az E pont h mélységben van az AB egyenes alatt. Az M tömegű testet lassan, állandó nagyságú sebességgel emeljük függőleges irányban, amíg az E pont egy magasságba nem kerül a C és D pontokkal.
Adatok:

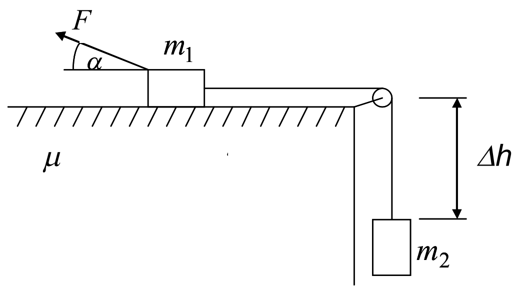
$$d = 14\ [m];\ l = 5\ [m];\ m = 7\ [kg];\ h = 7\ [m].$$



a, Mekkora az M tömeg?
b, Mennyi munkát végeztünk az emelés során?

4.2.2.1/5 Egy m_1 tömegű, pontszerű testet – amely egyenes vonalú, vízszintes, érdes kényszerpályán nyugszik – állandó $\boldsymbol{F}$ erővel meghúzunk az ábra szerint. A testhez egy ideális (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) dobon átvetett, ideális (tökéletesen hajlékony, nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű) kötéllel egy m_2 tömegű test csatlakozik.
Adatok:

$$F = 500[N];\ m_1 = 100\ [kg];\ m_2 = 25\ [kg];\ \alpha = 10^\circ;\ \mu_0 = 0.3;\ \mu = 0.2;\ \Delta h = 50\ [m];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

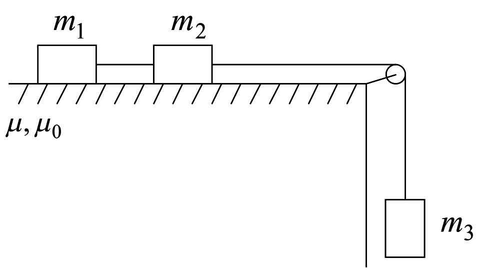


a, Elmozdul-e a rendszer?
b, Ha elmozdul, akkor mekkora gyorsulással mozog és mekkorák a kötélágakat feszítő erők?
c, Határozzuk meg, majd ábrázoljuk az m_1 tömegű test foronómiai függvényeit $(a(t), v(t), s(t))$!
d, Mennyi idő alatt húzza fel az 1-es test a 2-es testet Δh mélységből?

4.2.2.1/6 Az alábbi elrendezésben az m_1 és m_2 tömegű testek μ_0 tapadási és μ csúszási súrlódási tényezővel jellemzett, vízszintes, érdes felületen fekszenek. A testeket egymáshoz kapcsoló kötelek, és a dob ideálisak (lásd 4.2.2.1/M1 feladat).

Adatok:

$$m_1 = 2\,[kg];\ m_2 = 3\,[kg];\ m_3 = 2\,[kg];\ \mu_0 = 0.2;\ \mu = 0{,}1;\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Elmozdul-e a rendszer, ha magára hagyjuk?

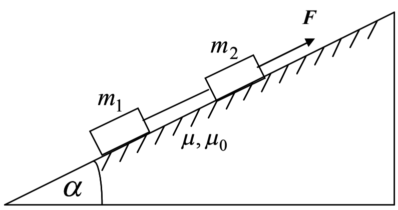
b, Ha elmozdul, mekkora gyorsulással mozog és mekkorák a kötélágakat feszítő erők a mozgás során?

c, Határozzuk meg, és ábrázoljuk közös koordináta rendszerben az 1-es és 2-es test foronómiai függvényeit, ha tudjuk, hogy az őket összekötő kötélág hossza $1m$. Legyen az 1-es test kiinduló helyénél $s = 0$.

4.2.2.1./7 Egy ideális kötéllel (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) egymáshoz kötött, m_1 és m_2 tömegű testeket $\boldsymbol{F}$ lejtő irányú erővel húzunk felfelé a μ_0 tapadási és μ csúszási súrlódási tényezővel jellemzett érdes lejtőn.

Adatok:

$$F = 0.5[kN];\ \alpha = 30^\circ;\ m_1 = 20\,[kg];\ m_2 = 40\,[kg];\ \mu_0 = 0.12;\ \mu = 0.1;\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



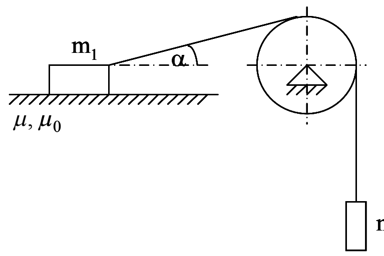
a, Mekkora gyorsulással mozog a rendszer és mekkora a kötelet feszítő erő nagysága?

b, Adja meg, és ábrázolja közös koordináta rendszerben az 1-es és 2-es testek forónómiai függvényeit, ha tudjuk, hogy az őket összekötő kötélág hossza $2m$. Legyen az 1-es test kiinduló helyénél $s = 0$!

4.2.2.1/8 Az ábrán látható elrendezésben magára hagyjuk az összekötött m_1 és m_2 tömegű pontszerű testeket. Ezt követően a rendszer elmozdul. Az m_1 tömegű test és a talaj közti csúszási és tapadási súrlódási tényező μ és μ_0. A testeket egymáshoz kapcsoló kötél, és a dob ideálisak (lásd 4.2.2.1/M1 feladat).

Adatok:

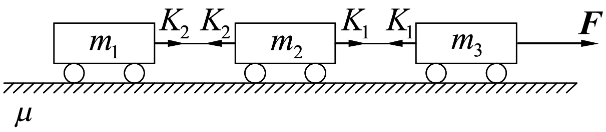
$$m_1 = 2\,[kg];\ m_2 = 1\,[kg];\ \mu_0 = 0.15;\ \mu = 0.1;\ \alpha = 20^\circ;\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Számítsuk ki, hogy mennyi idő múlva lesz a m_1 tömegű test sebessége $2\frac{m}{s}$! (Tegyük fel, hogy a csiga az m_1 tömegű testtől nagyon messze van, így a kötél talajjal bezárt szöge a mozgás során változatlan.)
b, Mennyi idő alatt tesz meg az m_1 tömegű test $1m$ utat?
c, Mekkora az a maximális m_2 tömeg, amely esetén a rendszer még nyugalomban marad?

4.2.2.1/9 Egy három kocsiból álló vasúti szerelvényt vízszintes irányú $\boldsymbol{F}$ vonóerővel gyorsítunk. Az ellenállások elhanyagolhatóak.
Adatok:

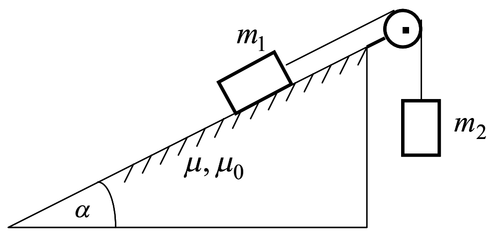
$$m_1 = 10^4\ [kg];\ m_2 = 3 \cdot 10^4\ [kg];\ m_3 = 2 \cdot 10^4\ [kg];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora legyen $\boldsymbol{F}$ nagysága, hogy $\Delta t = 2\ [min]$ idő alatt $v = 60 \left[\frac{km}{h}\right]$ nagyságú sebességet érjen el a szerelvény?
b, Határozzuk meg a gyorsítás közben a vonóhorgokban fellépő erők nagyságát (K_1, K_2)!
c, Mekkora lesz a szerelvény fékútja, ha az összes kereket fékezzük, és a csúszási súrlódási tényező értéke $\mu = 0{,}1$? (A fékezett kerekek nem forognak, csúszva haladnak, a fékezés közben a vonóerő zérus.)
d, Mekkora lesz a fékút, ha csak az első és utolsó kocsi kerekeit fékezzük?

4.2.2.1/10 Az ábrán látható elrendezésben magára hagyjuk az összekötött m_1, m_2 tömegpontokat. Az m_1 tömegpont és a talaj közti csúszási és tapadási súrlódási tényező μ és μ_0. A testeket egymáshoz kapcsoló kötél, és a dob ideálisak (lásd 4.2.2.1/M1 feladat).
Adatok:

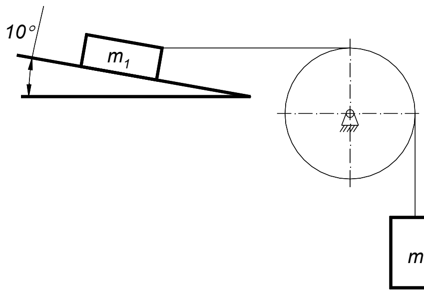
$$m_1 = 100\ [kg];\ m_2 = 80\ [kg];\ \mu_0 = 0.25;\ \mu = 0.2;\ \alpha = 30°;\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Elmozdul-e a rendszer, ha magára hagyjuk? Ha igen merre?
b, Ha elmozdul, mekkora gyorsulással mozog és mekkora a kötelet feszítő erő nagysága?
c, Határozzuk meg, és ábrázoljuk az m_1 tömegű test foronómiai függvényeit!
d, Mennyi idő alatt tesznek meg a tömegpontok $5m$ utat, és mekkora lesz a fenti idő elteltével sebességük nagysága?

4.2.2.1/11 Az ábrán látható elrendezésben magára hagyjuk az összekötött m_1 és m_2 tömegű pontszerű testeket. Ezt követően azok elmozdulnak. Az m_1 tömegpont és a talaj közti csúszási súrlódási tényező μ. A pontokat egymáshoz kapcsoló kötél, és a dob ideálisak (lásd 4.2.2.1/M1 feladat).
Adatok:

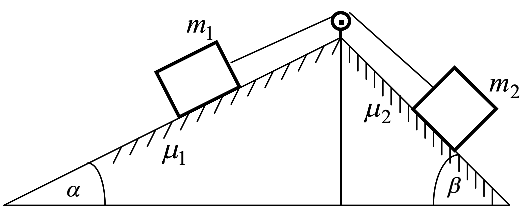
$$m_1 = 10\,[kg];\ m_2 = 1\,[kg];\ \mu = 0.2;\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Számítsa ki, hogy $1{,}5\,[s]$ múlva mekkora lesz az egyes testek sebessége és az általuk megtett út! (Tegyük fel, hogy a dob nagyon messze van az m_1 ponttól, így az őket összekötő kötél vízszintesnek tekinthető végig a mozgás során.)
b, Milyen értékű csúszási súrlódási tényező esetén valósul meg az állandó sebességű mozgás?
c, Legalább mekkora legyen a tapadási súrlódási tényező értéke az m_1 tömegű test és a talaj között, hogy a rendszer nyugalomban maradjon?

4.2.2.1/12 Az ábrán látható elrendezésben magára hagyjuk az összekötött m_1 és m_2 tömegű, pontszerű testeket, amelyek ezt követően elmozdulnak. Az m_1 és m_2 tömegű testek és a talaj közti csúszási súrlódási tényező μ_1 és μ_2. A pontokat egymáshoz kapcsoló kötél, és a dob ideálisak (lásd 4.2.2.1/M1 feladat).
Adatok:

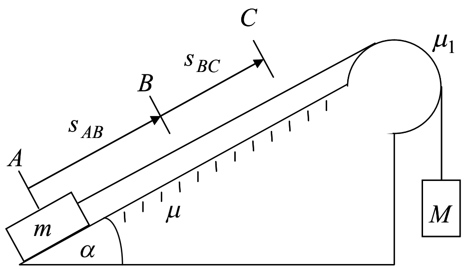
$$m_1 = 150\,[kg];\ m_2 = 300\,[kg];\ \mu_1 = 0.1;\ \mu_2 = 0{,}15;\ \alpha = 30°;\ \beta = 45°;\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Számítsuk ki, hogy $3\,[s]$ múlva mekkora lesz a testek sebessége, valamint az általuk megtett út!

4.2.2.1/13 Az ábrán látható elrendezésben magára hagyjuk az összekötött m és M tömegű pontszerű testeket. Az m tömegű test és a talaj közti csúszási súrlódási tényező μ, az érdes hengerfelület és a kötél közötti μ_1. A testeket egymáshoz kapcsoló kötél ideális (lásd 4.2.2.1/M1 feladat).
Adatok:

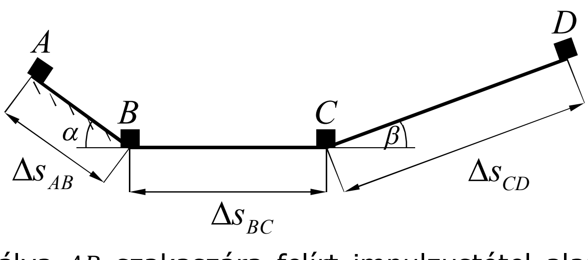
$$m = 20\,[kg];\;\; \alpha = 30^\circ;\; \mu = 0.3;\;\; \mu_1 = 0.4;\; S_{AB} = 5[m];\; g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozzuk meg, mekkora M értéke, ha az m tömeg az A pontból nyugalmi helyzetből indulva $2s$ alatt jut el a B pontba!
b, Határozzuk meg, mekkora a tömegek gyorsulása!
c, Határozzuk meg az egyes kötélágakat feszítő erőket!
d, Határozzuk meg, hogy mekkora utat tesz még meg a m tömeg felfelé a lejtőn, ha amikor a B pontba ér, hirtelen elvágjuk a kötelet! (S_{BC}).

4.2.2.1/14 Az ábrán látható pálya AB szakaszra érdes, BC és CD szakasza súrlódásmentes. Egy pontszerű testet az A pontban magára hagyunk, amely ezt követően az α hajlásszögű AB lejtős szakaszon felgyorsul, sebessége a B pontban v_B nagyságú lesz. A vízszintes BC pályaszakasz megtétele utána a test az ismeretlen β hajlásszögű CD lejtőn S_{CD} út megtétele után megáll.
Adatok:

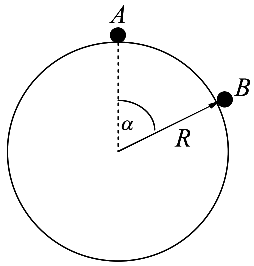
$$m = 0.5\,[kg];\; v_B = 10\left[\frac{m}{s}\right];\; \mu_{AB} = 0.125;\;\; \Delta S_{BC} = 10[m];\; S_{CD} = 10[m]; sin\,\alpha = 0.6;\; g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozza meg a pálya AB szakaszára felírt impulzustétel alapján, hogy mennyi idő alatt ért a tömegpont az A pontból a B pontba!
b, Számítsa ki a pálya CD szakaszára felírt munkatétel alapján a pályaszakasz β hajlásszögét!
c, Számítsa ki a még ismeretlen mozgásjellemző adatokat, majd rajzolja meg jelleghelyesen a mozgás foronómiai függvényeit!

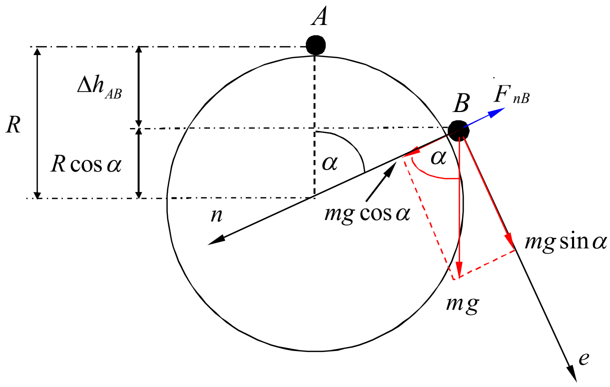
4.2.2.2 *Mozgás görbe vonalú kényszerpályán*

4.2.2.2/M1 Az ábrán látható függőleges síkú, súrlódásmentes R sugarú körpálya felső A pontjából, nyugalomból indulva lecsúszik egy m tömegű, pontszerű test.



Határozzuk meg, hogy mekkora α szögnél válik el a test pályától!

Megoldás:



Írjuk fel a B pontban Newton II törvényét:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_{iB} = m \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{nB} = m \cdot \boldsymbol{a}_B$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ m \cdot g \cdot cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_{nB} \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a_{Be} \\ a_{Bn} \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a_B \\ \frac{v_B{}^2}{R} \end{pmatrix}$$

$$0 = m \cdot a_B$$

$$\underline{m \cdot g \cdot cos\alpha - F_{nB} = m \cdot \frac{v_B{}^2}{R}}$$

$$II. \qquad F_{nB} = m \cdot g \cdot cos\alpha - m \cdot \frac{v_B{}^2}{R} = m \cdot \left(g \cdot cos\alpha - \frac{v_B{}^2}{R} \right)$$

A test a B pontban válik el a pályától, ha ott a nyomóerő zérussá válik:

$$g \cdot cos\alpha - \frac{v_B{}^2}{R} = 0 \rightarrow v_B{}^2 = R \cdot g \cdot cos\alpha$$

Most számítsuk ki a gravitációs és a pálya által kifejtett nyomóerő munkavégzését az AB szakaszon, majd írjuk fel a munkatételt:

Az ábra alapján:

$$\Delta h_{AB} = R - R \cdot cos\alpha = R \cdot (1 - cos\alpha)$$

A gravitációs erő munkája:

$$W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = m \cdot g \cdot \Delta h_{AB} = m \cdot g \cdot R \cdot (1 - cos\alpha)$$

A kényszererő a AB pályaszakasz minden egyes pontjában merőleges a pályagörbe érintőjére, azaz a pillanatnyi elmozdulás (sebesség) irányára. Ebből adódóan munkavégzése zérus:

$$W_{F_n}^{A\to B} = 0$$

Az AB pályaszakaszra vonatkozó munkatétel:

$$\sum_i W_{F_i}^{A\to B} = W_{m\cdot g}^{A\to B} + W_{F_n}^{A\to B} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot {v_B}^2 - \overbrace{\frac{1}{2}\cdot m\cdot {v_A}^2}^{0}$$

$$m\cdot g\cdot \Delta h_{AB} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot {v_B}^2 \;\to\; {v_B}^2 = 2\cdot g\cdot \Delta h_{AB} = 2\cdot g\cdot R\cdot (1 - cos\alpha)$$

A fenti kifejezést összevetve a ${v_B}^2$-re korábban kapott összefüggéssel:

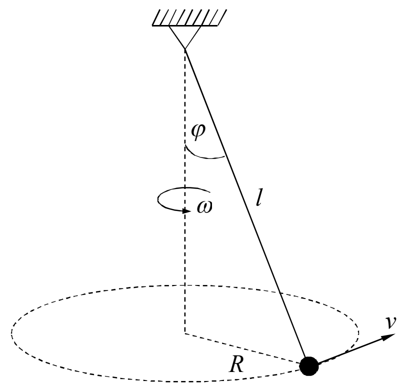
$$R\cdot g\cdot cos\alpha = 2\cdot g\cdot R\cdot (1 - cos\alpha)$$

$$cos\alpha = 2\cdot (1 - cos\alpha) \;\to\; cos\alpha = \frac{2}{3} \to \alpha = 48.19°$$

4.2.2.2/M2 Az ábrán látható m tömegű kúpinga függőleges tengely körül állandó ω szögsebességgel forog. A fenti szögsebesség mellett az l hosszúságú ideális fonál (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) a függőlegessel φ szöget zár be.

Adatok:

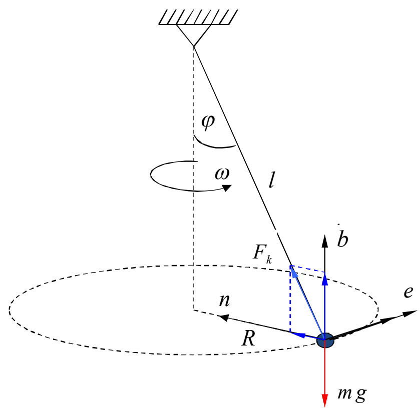
$$m = 2[kg];\; l = 5\,[m];\; \varphi = 30°;\; g = 9{,}81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora az ω szögsebesség nagysága?

b, Mekkora a kötélerő nagysága a fenti szögsebesség mellett?

Megoldás:



a,

Írjuk fel Newton II törvényét az ingára:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_k = m \cdot \boldsymbol{a}$$

A mozgás vizsgálatához célszerű az ábrán rögzített (e, n, b) természetes koordinátarendszert használnunk. A fenti koordinátarendszerben Newton II törvénye az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_k \cdot sin\varphi \\ F_k \cdot cos\varphi \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a_e \\ a_n \\ a_b \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a \\ \frac{v^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Innen az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$0 = m \cdot a \ \rightarrow a = 0$$

$$F_k \cdot sin\varphi = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot \frac{\omega^2 \cdot R^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$-m \cdot g + F_k \cdot cos\varphi = 0 \ \rightarrow \ F_k = \frac{m \cdot g}{cos\varphi} = 22.66[N]$$

$$II. \qquad \frac{m \cdot g}{cos\varphi} \cdot sin\varphi = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

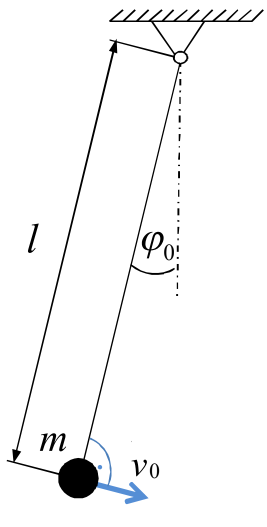
$$II. \qquad g \cdot tan\varphi = \omega^2 \cdot R$$

$$II. \qquad \omega = \sqrt{\frac{g \cdot tan\varphi}{R}} = \sqrt{\frac{g \cdot tan\varphi}{l \cdot sin\varphi}} = \sqrt{\frac{g}{l \cdot cos\varphi}} = 1.505 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

4.2.2.2/M3 Egy l hosszúságú ideális (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) fonálra felfüggesztünk egy m tömegű pontszerű testet. Az így kapott matematikai ingát φ_0 szöggel kitérítjük, majd v_0 nagyságú, a fonálra merőleges irányú kezdősebességgel mozgásba hozzuk az ábra szerint. A felfüggesztési pontban ébredő súrlódást, valamint a légellenállást hanyagoljuk el.

Adatok:

$$m = 20\,[kg];\ l = 8[m];\ v_0 = 0.535\,\left[\frac{m}{s}\right];\ \varphi_0 = -2^\circ;\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora lesz az inga maximális szögkitérése?
b, Mekkora a fonalat feszítő erő nagysága a maximális szögkitérés mellett?
c, Írjuk fel az inga mozgásának differenciálegyenletét, majd adjuk meg annak általános $\varphi(t)$ megoldásfüggvényét!
d, Határozzuk meg a $\varphi(t)$függvényben szereplő ismeretlen paraméterek értékét, valamint az inga lengésidejét!
e, Számítsuk ki, hogy az indítástól mérve mennyi idő alatt éri el először az inga szélső helyzetét!

Megoldás:

a,

Az inga maximális szögkitérését a munkatételből számítjuk ki, felhasználva, hogy a kötélerő munkavégzése zérus.

$$\sum_i W_{F_i}^{A\to B} = W_{m\cdot g}^{\varphi_0\to\varphi_{max}} + \overbrace{W_{F_k}^{\varphi_0\to\varphi_{max}}}^{0} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot {v_0}^2$$

Az inga szélső helyzetében a test sebessége zérus, így az alábbi egyenlet adódik:

$$-m\cdot g\cdot \Delta h = -m\cdot g\cdot (h_{max} - h_0) = -\frac{1}{2}\cdot m\cdot {v_0}^2$$

A h_0 és h_{max} magasságokat az inga alsó helyzetétől mérjük, így azok értéke:

$$h_0 = l - l\cdot \cos\varphi_0 = l\cdot(1-\cos\varphi_0),\quad h_{max} = l - l\cdot\cos\varphi_{max} = l\cdot(1-\cos\varphi_{max})$$

Tehát:

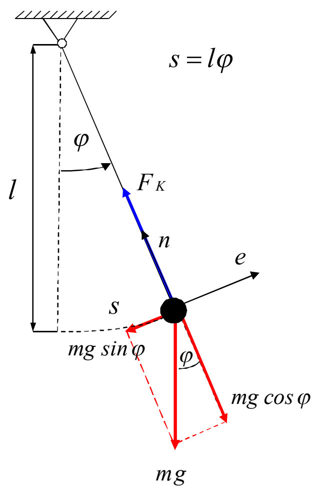
$$-m\cdot g\cdot l\cdot\big((1-\cos\varphi_{max}) - (1-\cos\varphi_0)\big) = -\frac{1}{2}\cdot m\cdot {v_0}^2$$

$$2\cdot g\cdot l\cdot(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_{max}) = {v_0}^2$$

$$\cos\varphi_0 - \cos\varphi_{max} = \frac{{v_0}^2}{2\cdot g\cdot l}$$

$$\cos\varphi_{max} = \cos\varphi_0 - \frac{{v_0}^2}{2\cdot g\cdot l} = 0.9976 \;\rightarrow\; \varphi_{max} = 0.0698[rad] = 4°$$

b,



A kötélerő nagysága a maximális szögkitérés esetén:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m\cdot\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_k = m\cdot\boldsymbol{a}$$

$$\begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot sin\varphi_{max} \\ -m \cdot g \cdot cos\varphi_{max} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_k \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a_e \\ a_n \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a \\ \frac{0^2}{l} \end{pmatrix}$$

$$-m \cdot g \cdot sin\varphi_{max} = m \cdot a$$

$$\underline{-m \cdot g \cdot cos\varphi_{max} + F_k = 0} \rightarrow F_k = m \cdot g \cdot cos\varphi_{max} = 195.7\,[N]$$

c,

A b, pontban szereplő egyenletből tetszőleges φ szögkitérés esetén az alábbi adódik:

$$-m \cdot g \cdot sin\varphi(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \ddot{s}(t) = m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}(t)$$

$\varphi \leq 5°$ esetén alkalmazható a $sin\varphi = \varphi$ közelítés:

Tehát:

$$-m \cdot g \cdot \varphi(t) = m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}(t)$$

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \cdot \varphi(t) = 0$$

A fenti differenciálegyenlet ugyanolyan szerkezetű, mint amilyet a 4.2.1.2/M1 feladat esetében kaptunk. Ebből adódóan az általános megoldása is egyező:

$$\varphi(t) = \varphi_{max} \cdot sin(w \cdot t + \delta_0)$$

d,

A maximális szögkitérést az a, pontban már meghatároztuk. A körfrekvencia és a lengésidő értéke a 4.2.1.2/M1 feladat alapján:

$$w = \sqrt{\frac{g}{l}} = 1.107\left[\frac{rad}{s}\right],\quad T = \frac{2 \cdot \pi}{w} = 5.676[s]$$

A kezdőfázist is úgy határozzuk meg, mint a 4.2.1.2/M1 feladat esetében:

A szögkitérés-idő függvényből a szögsebesség- és szöggyorsulás-idő függvények deriválással meghatározhatók:

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \varphi_{max} \cdot w \cdot cos(w \cdot t + \delta_0)$$

$$\varepsilon(t) = \dot{\omega}(t) = -\varphi_{max} \cdot w^2 \cdot sin(w \cdot t + \delta_0)$$

Írjuk fel a szögkitérés- és szögsebesség-idő függvényeket a $t = 0$ időpillanatban:

$$\varphi(0) = \varphi_0 = \varphi_{max} \cdot sin(w \cdot 0 + \delta_0) = \varphi_{max} \cdot sin(\delta_0)$$

$$\omega(0) = \omega_0 = \frac{v_0}{l} = \varphi_{max} \cdot w \cdot cos(w \cdot 0 + \delta_0) = \varphi_{max} \cdot w \cdot cos(\delta_0)$$

Tehát az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\varphi_0 = \varphi_{max} \cdot sin(\delta_0) \rightarrow sin(\delta_0) = \frac{\varphi_0}{\varphi_{max}} = -0{,}5 \rightarrow \delta_{01} = -\frac{\pi}{6}, \delta_{02} = -\frac{5 \cdot \pi}{6}$$

$$\underline{\frac{v_0}{l} = \varphi_{max} \cdot w \cdot cos(\delta_0)}$$

A második egyenletet csak a $\delta_{01} = -\frac{\pi}{6}$ érték elégíti ki, így az a valódi kezdőfázis. Ezt követően az alábbi szögkitérés-idő függvény adódik:

$$\varphi(t) = 0{,}0698 \cdot sin(1{,}107 \cdot t - 0{,}524)[rad]$$

e,

Jelöljük t^*-al az indítástól a szélső helyzet eléréséig eltelt időt. Ekkor:

$$0{,}0698 = \varphi(t^*) = 0{,}0698 \cdot sin(1{,}107 \cdot t^* - 0{,}524)[rad]$$

$$1 = sin(1{,}107 \cdot t^* - 0{,}524)$$

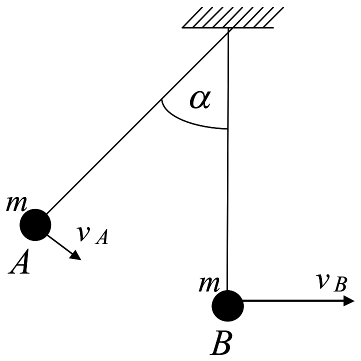
$$1{,}571 = \frac{\pi}{2} = 1{,}107 \cdot t^* - 0{,}524$$

$$t^* = 1{,}892[s]$$

Tehát az inga $1{,}892[s]$ alatt éri el először a szélső helyzetét.

4.2.2.2/4 Egy l hosszúságú ideális (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) fonálra felfüggesztünk egy m tömegű pontszerű testet. Ezt követően a testet α szöggel kitérítjük az A pontba, ahonnan v_A nagyságú, a kötélre merőleges irányú, az ábrán adott értelmű kezdősebességgel elindítjuk.
Adatok:

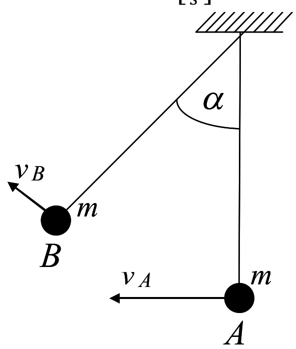
$$m = 20\,[kg];\ l = 8[m];\ v_A = 10\left[\frac{m}{s}\right];\ \alpha = 40^{\circ};\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Mekkora a test sebessége, és a kötelet feszítő erő nagysága a pálya alsó, B pontjában?

4.2.2.2/5 Egy l hosszúságú ideális (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) fonálra felfüggesztünk egy m tömegű, pontszerű testet. Ezt követően a testet a pálya alsó, A pontjából v_A nagyságú, a kötélre merőleges irányú, az ábrán adott értelmű kezdősebességgel elindítjuk.
Adatok:

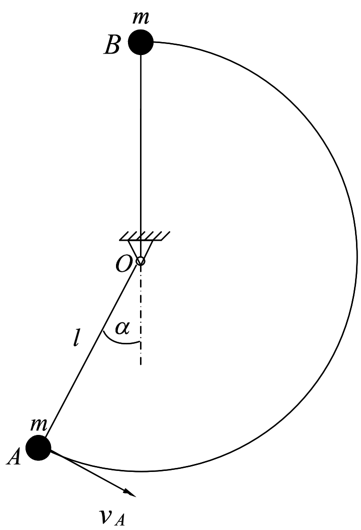
$$m = 20\,[kg];\ l = 6[m];\ v_A = 10\left[\frac{m}{s}\right];\ \alpha = 35^{\circ};\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Mekkora a test sebessége, és a kötelet feszítő erő nagysága a pálya α szöggel jellemzett, B pontjában?

4.2.2.2/6 A függőleges síkú ingát az α szöggel jellemzett A pontból, a függőleges helyzetéhez tartozó B pontba kell jutatnunk az ábra szerint. (A $\boldsymbol{v}_A$ kezdősebesség merőleges az OA szakaszra.)
Adatok:

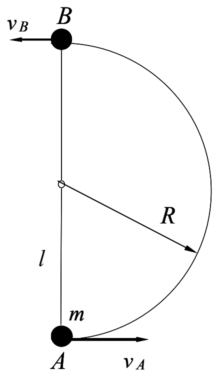
$$m = 2\,[kg];\ l = 1.2\,[m];\ \ \alpha = 30^{\circ};\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Mekkora legyen a $\boldsymbol{v}_A$ kezdősebesség nagysága, ha
a, az OA kar ideális (merev, elhanyagolhat tömegű, ideálisan vékony) rúd?
b, az OA kar ideális fonál (lásd 4.2.2.1/M1 feladat)?

4.2.2.2/7 Az m tömegű anyagi pontból és ideális, l hosszúságú fonálból (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) álló, függőleges síkú ingát az alsó, A pontból $\boldsymbol{v}_A$ kezdősebességgel indítjuk az ábra szerint.
Adatok:

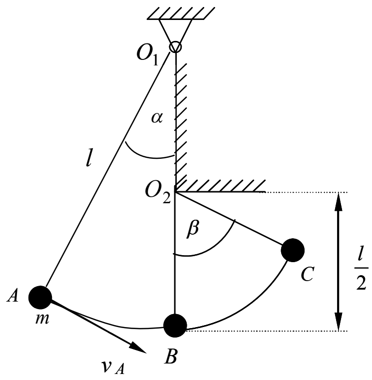
$$l = 0.5\ [m];\ m = 0.5\ [kg];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Mekkorának kell választani a $\mathbf{v}_\mathrm{A}$ kezdősebesség nagyságát, hogy a felső, B pontban a kötélerő nagysága $20\mathrm{N}$ legyen?

4.2.2.2/8 Az l hosszúságú ideális fonál (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) végén m tömegű, pontszerű test van, amelyet az ábrán vázolt A pontból kezdősebesség nélkül indítunk. Függőleges helyzetében a fonál egy akadálynak ütközik, majd a test folytatja tovább mozgását.
Adatok:

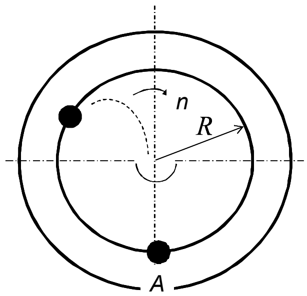
$$m = 0.5\ [kg];\ l = 0.8\ [m];\ \alpha = 30^\circ;\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozzuk meg, hogy milyen helyzetig lendül tovább az inga! (β=?)
b, Határozzuk meg a fonálerő maximális értékét!

4.2.2.2/9 Az ábrán látható R sugarú hengert n fordulatszámon járatjuk.
Adatok:

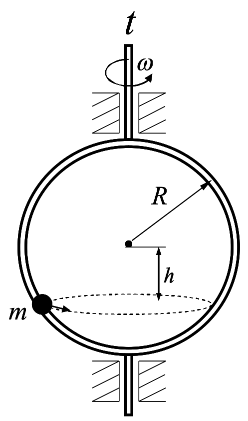
$$R = 0.5\ [m];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Mekkora n értéke, ha a henger mélyedésébe az A pontban elhelyezett golyócska éppen a forgástengelyben lévő vályúba pottyan?

4.2.2.2/10 Az ábrán látható kör alakú merev keret a függőleges t tengely körül ellenállásmentesen forog. A keretre egy m tömegű fémgömb van felfűzve, amely a szögsebesség változása esetén, a kereten súrlódás nélkül elmozdul.
Adatok:

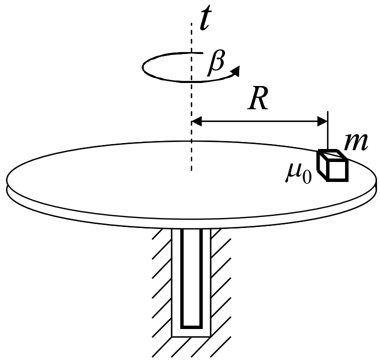
$$R = 1\ [m];\ m = 2[kg];\ h = 0.5[m]\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora szögsebességgel kell forgatni a keretet, hogy a fémgömb a keret középpontja alatt h távolságban elhelyezkedő vízszintes síkban mozogjon?
b, Mekkora a keret által a fémgömbre kifejtett kényszererő nagysága a fenti szögsebesség mellett?

4.2.2.2/11 Az ábrán látható vízszintes korong a függőleges t tengely körül ellenállásmentesen foroghat. A nyugvó korongra egy m tömegű, pontszerű testet helyezünk, annak középpontjától R távolságba. Ezt követően a korongot állandó ε szöggyorsulással megforgatjuk. A korong és a test között a tapadási súrlódási tényező értéke μ_0.
Adatok:

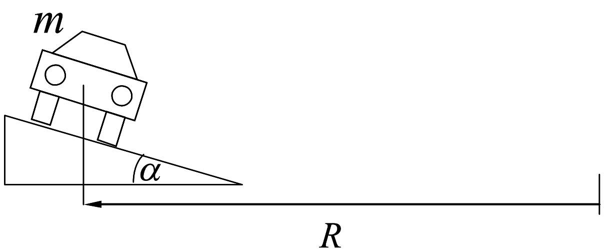
$$R = 0.5\ [m];\ \mu_0 = 0.4;\ \varepsilon = 2 \left[\frac{rad}{s^2}\right];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Mekkora szögsebességnél, és mennyi idővel az indulás után csúszik meg a test korongon?

4.2.2.2/12 Egy sportkocsi az R sugarú, kör alakú versenypályán halad. Az úttest α fokos szögben, sugárirányban lejt a pálya belseje felé. A tapadási súrlódási tényező értéke a gumiabroncsok és az úttest között μ_0.
Adatok:

$$R = 324\ [m];\ \alpha = 10^\circ;\ \mu_0 = 0.3;\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



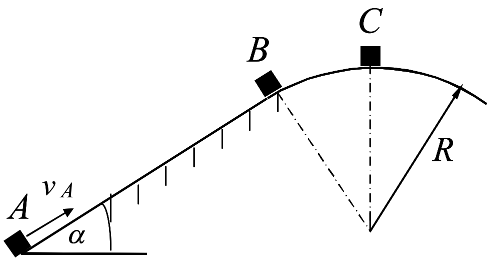
Mekkora sebességgel haladhat maximálisan a sportkocsi, hogy ne csússzon ki a pályáról sugárirányban? Tekintsük a gépkocsit pontszerűnek.

4.2.3 Összetett feladatok

4.2.3/M1 Az ismert függőleges síkú kényszerpályán egy m tömegű anyagi pont mozog. A pálya Δs_{AB} hosszúságú egyenes szakasza μ_{AB} csúszási súrlódási tényezővel jellemzett, a BC köríves pályaszakaszon eltekintünk a súrlódástól. A testet a pálya A pontjából ismeretlen $\mathrm{v_A}$ kezdősebességgel indítjuk, a test sebessége a B pontban ismert.

Adatok:

$$R = 2\,[m];\ \alpha = 30^{\circ};\ \mu_{AB} = 0.2;\ m = 1[kg],\ \Delta s_{AB} = 3[m],\ v_B = 3\left[\frac{m}{s}\right],\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Számítsuk ki a pont pályamenti gyorsulását, valamint a pálya által az anyagi pontra kifejtett kényszererő nagyságát az AB szakaszon!

b, A gyorsulás ismeretében számítsuk ki a pont kezdősebességének nagyságát az A pontban!

c, Számítsuk ki a gravitációs és kényszererők által végzett munkát az AB pályaszakaszon!

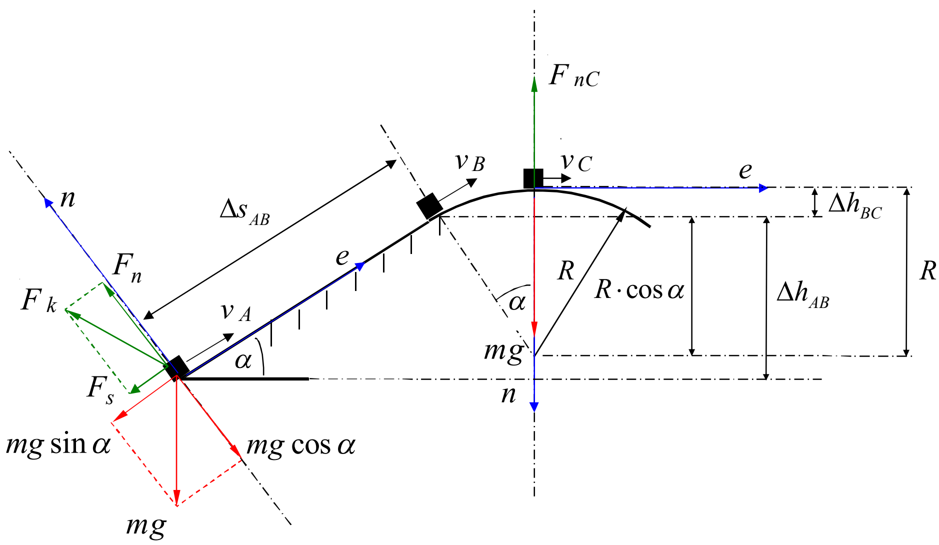
d, Írjuk fel az AB pályaszakaszra vonatkozó munkatételt, majd számítsuk ki belőle a kezdősebesség nagyságát az A pontban! Hasonlítsuk össze a b, és d, pontban kapott eredményt!

e, Számítsuk ki a pont sebességének nagyságát a C pontban!

f, Számítsuk ki a pálya által a pontra kifejtett nyomóerő nagyságát a C pontban

Megoldás:

a,



$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_k = m \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot sin\alpha \\ -m \cdot g \cdot cos\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_s \\ F_n \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a_e \\ a_n \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés:
Egyenes pálya esetén a görbületi sugár minden pontban végtelen, ebből adódóan a normális irányú gyorsulás zérus:

$$r = \infty \ \rightarrow \ a_n = \frac{v^2}{r} = 0$$

$$-m \cdot g \cdot sin\alpha - F_s = m \cdot a$$

$$-m \cdot g \cdot cos\alpha + F_n = 0 \ \rightarrow \ F_n = m \cdot g \cdot cos\alpha$$

$$\underline{F_s = \ \mu_{AB} \cdot F_n} \rightarrow \ \mu_{AB} \cdot m \cdot g \cdot cos\alpha$$

$$-m \cdot g \cdot sin\alpha - \ \mu_{AB} \cdot m \cdot g \cdot cos\alpha = m \cdot a$$

$$a = -g \cdot sin\alpha - \ \mu_{AB} \cdot g \cdot cos\alpha = -6.604 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$|\boldsymbol{F}_k| = F_k = \sqrt{{F_s}^2 + {F_n}^2} = \sqrt{{\mu_{AB}}^2 \cdot {F_n}^2 + {F_n}^2} = F_n \cdot \sqrt{{\mu_{AB}}^2 + 1} = m \cdot g \cdot cos\alpha \cdot \sqrt{{\mu_{AB}}^2 + 1} = 8.664 [N]$$

b,
A mozgás egyenletesen változó, tehát:

$$v_B = v_A + a \cdot \Delta t_{AB} \ \rightarrow \ \Delta t_{AB} = \frac{v_B - v_A}{a}$$

$$\underline{\Delta r_{AB} = s_B - s_A = v_A \cdot \Delta t_{AB} + \frac{a}{2} \cdot {\Delta t_{AB}}^2}$$

$$II. \ \Delta r_{AB} = v_A \cdot \frac{v_B - v_A}{a} + \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{v_B - v_A}{a}\right)^2 = v_A \cdot \frac{v_B - v_A}{a} + \frac{(v_B - v_A)^2}{2 \cdot a}$$

$$II. \ 0 = \frac{(v_B - v_A)^2}{2 \cdot a} + v_A \cdot \frac{v_B - v_A}{a} - \Delta r_{AB}$$

$$II. \ 0 = \frac{(3 - v_A)^2}{2 \cdot (-6.604)} + v_A \cdot \frac{3 - v_A}{-6.604} - 3$$

$$II. 0 = (3 - v_A)^2 + 2 \cdot v_A \cdot (3 - v_A) + 39.62$$

$$II. 0 = -{v_A}^2 + 48.62 \ \rightarrow \ v_A = 6.973 \left[\frac{m}{s}\right]$$

c,
A munkát az erők érintő irányú komponense végzi, a normális irányú komponens munkavégzése zérus:

$$W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = -m \cdot g \cdot sin\alpha \cdot \Delta s_{AB} = -m \cdot g \cdot \Delta h_{AB} - 14.71 \ [J]$$

$$W_{F_k}^{A \rightarrow B} = -F_s \cdot \Delta s_{AB} = - \ \mu_{AB} \cdot F_n \cdot \Delta s_{AB} = \ -\mu_{AB} \cdot m \cdot g \cdot cos\alpha \cdot \Delta s_{AB} = -5.097 \ [J]$$

Megjegyzés:
A gravitációs erő munkavégzésére minden esetben érvényes az $W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} = \pm m \cdot g \cdot \Delta h$ összefüggés.

d,

$$\sum_i W_{F_i}^{A \rightarrow B} = W_{m \cdot g}^{A \rightarrow B} + W_{F_k}^{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} \cdot \ m \cdot {v_B}^2 - \frac{1}{2} \cdot \ m \cdot {v_A}^2$$

$$-19.81 = \frac{1}{2} \cdot \ 1 \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot \ 1 \cdot {v_A}^2 \ \rightarrow \ v_A = 6.973 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Tehát a b, és d, pontban kapott eredmények egymással megegyeznek.

e,

Az ábra alapján:

$$\Delta h_{BC} = R - R \cdot cos\alpha = R \cdot (1 - cos\alpha) = 0.268[m]$$

A gravitációs erő munkája:

$$W_{m \cdot g}^{B \to C} = -m \cdot g \cdot \Delta h_{BC} = -m \cdot g \cdot R \cdot (1 - cos\alpha) = -2.629[J]$$

A kényszererő a BC pályaszakasz minden egyes pontjában merőleges a pályagörbe érintőjére, azaz a pillanatnyi elmozdulás (sebesség) irányára. Ebből adódóan munkavégzése zérus:

$$W_{F_k}^{B \to C} = 0$$

A BC pályaszakaszra vonatkozó munkatétel:

$$\sum_i W_{F_i}^{B \to C} = W_{m \cdot g}^{B \to C} + W_{F_k}^{B \to C} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C{}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B{}^2$$

$$-2.629 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v_C{}^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6.973^2 \rightarrow v_C = 1.934 \left[\frac{m}{s}\right]$$

f,

$$\sum_i \overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{iC}} = \mathrm{m} \cdot \overline{\mathrm{g}} + \overline{\mathrm{F}}_{\mathrm{nC}} = \mathrm{m} \cdot \overline{\mathrm{a}}_{\mathrm{C}}$$

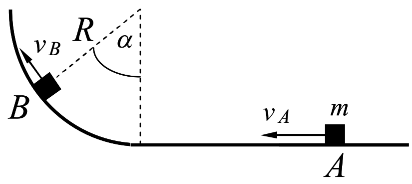
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathrm{F}_{\mathrm{nC}} \end{pmatrix} = \mathrm{m} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{\mathrm{Ce}} \\ \mathrm{a}_{\mathrm{Cn}} \end{pmatrix} = \mathrm{m} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{\mathrm{C}} \\ \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{C}}{}^2}{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{m} \cdot \mathrm{g} - \mathrm{F}_{\mathrm{nC}} = \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{C}}{}^2}{\mathrm{R}} \rightarrow \mathrm{F}_{\mathrm{nC}} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{g} - \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{C}}{}^2}{\mathrm{R}} = \mathrm{m} \cdot \left(\mathrm{g} - \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{C}}{}^2}{\mathrm{R}}\right) = 7.940[N]$$

4.2.3/2 Az m tömegű pontszerű testet az ábrán látható súrlódásmentes pálya A pontjából $\boldsymbol{v}_A$ kezdősebességgel indítjuk az ábra szerint.

Adatok:

$$R = 10\ [m];\ \alpha = 50^\circ;\ v_A = 100\ \left[\frac{m}{s}\right];\ m = 15\ [kg];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

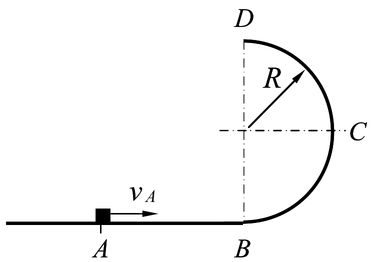


Mekkora a test sebessége, és a pálya által a testre kifejtett kényszererő nagysága az α szöggel jellemzett B pontban?

4.2.3/3 A függőleges síkú súrlódásmentes AD pálya A pontjából $\boldsymbol{v}_A$ kezdősebességgel elindítunk egy m tömegű anyagi pontot az alábbi ábra szerint.

Adatok:

$$R = 0.5\ [m];\ m = 0.5\ [kg];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



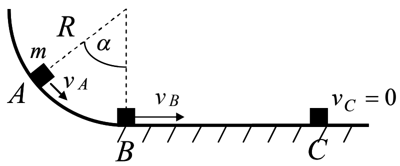
a, Legalább mekkora legyen a $\boldsymbol{v}_A$ kezdősebesség nagysága, ha az akarjuk, hogy az anyagi pont egészen a D pontig a pályán maradjon?

b, A fenti, minimális v_A kezdősebesség esetén mekkora a B és C pontokban a pálya által a pontra kifejtett kényszererő nagysága? (A B pont már az íves BC pályaszakaszhoz tartozik.)

4.2.3/4 Egy m tömegű pontszerű testet az ábrán látható R sugarú, negyed körív alakú súrlódásmentes pálya α szöggel jellemzett A pontjából $\boldsymbol{v}_A$ kezdősebességgel indítunk az ábra szerint. A pálya alsó B pontját elérve a test a vízszintes μ_{BC} súrlódási tényezővel jellemzett BC szakaszon halad tovább.

Adatok:

$$R = 30\ [m];\ \alpha = 60^\circ;\ \mu_{BC} = 0.2;\ \ v_A = 15\left[\frac{m}{s}\right];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



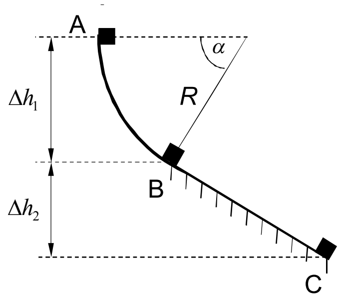
a, Mekkora a test sebessége a B pontban?

b, A B ponttól számítva mekkora út megtétele után áll meg a test?

4.2.3/5 Az m tömegű pontszerű test pályája egy R sugarú függőleges síkú súrlódásmentes AB körív és egy ahhoz kapcsolódó μ_{BC} csúszási súrlódási tényezővel jellemzett BC lejtő. A test az A pontból nyugalomból indul.

Adatok:

$$R = 10\ [m];\ \alpha = 60^\circ;\ m = 2\ [kg];\ \mu_{BC} = 0.1;\ \Delta h_2 = 6\ [m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$

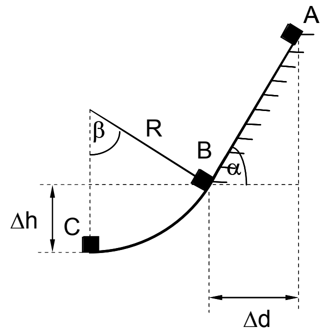


a, Számítsa ki az ábrán szereplő Δh_1 távolságot, majd írja fel az AB szakaszra vonatkozó munkatételt és határozza meg a test sebességének nagyságát a B pontban!

b, Számítsa ki a testre ható erők által a BC szakaszon külön-külön végzett munkákat!
c, írja fel a BC szakaszra vonatkozó munkatételt, majd határozza meg a test sebességének nagyságát a C pontban!
d, Feltételezve, hogy a B pont még az íves AB pályaszakaszhoz tartozik, határozza meg ott a pálya által a testre kifejtett kényszererő nagyságát!

4.2.3/6 Az m tömegű pontszerű test pályája egy α hajlásszögű μ_{AB} csúszási súrlódási tényezővel jellemzett AB lejtő, és egy ahhoz kapcsolódó R sugarú függőleges síkú súrlódásmentes BC körív. A test az A pontból nyugalomból indul.
Adatok:

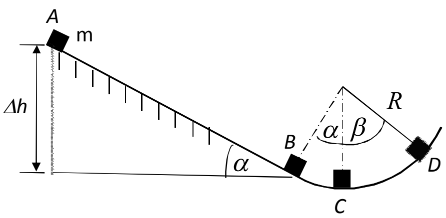
$$R = 10\,[m];\ \alpha = \beta = 60^\circ;\ m = 2\,[kg];\ \mu_{AB} = 0.1;\ \Delta d = 6\,[m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Rajzolja be az A pontban a testre ható erőket, majd számítsa ki az általuk az AB szakaszon külön-külön végzett munkákat!
b, írja fel az AB szakaszra vonatkozó munkatételt, majd határozza meg a test sebességének nagyságát a B pontban!
c, írja fel a BC szakaszra vonatkozó munkatételt, majd határozza meg a test sebességének nagyságát a C pontban!
d, Adja meg a C pontban a pálya által a testre kifejtett kényszererő nagyságát!

4.2.3/7 Egy m tömegű pontszerű testet az ábrán látható α hajlásszögű $\Delta\mathrm{h}$ magasságú μ_{AB} csúszási súrlódási tényezővel jellemzett érdes lejtő tetejéről nyugalomból indítunk. A test elérve a lejtő alsó B pontját útját egy R sugarú függőleges síkú súrlódásmentes BD köríven folytatja.
Adatok:

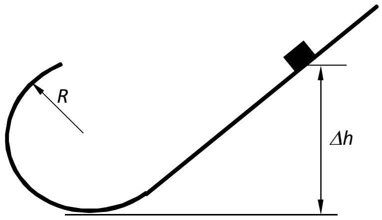
$$\mathrm{m} = 500\,[\mathrm{kg}];\ \mu_{\mathrm{AB}} = 0{,}1;\ \alpha = 30^\circ;\ \beta = 50^\circ;\ \mathrm{R} = 7\,[\mathrm{m}];\ \Delta\mathrm{h} = 10\,[\mathrm{m}];\ \mathrm{g} = 9{,}81\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$



a, Mekkora a test sebessége a B, C és D pontokban?
b, Határozzuk meg a pálya által kifejtet kényszererő nagyságát a D pontban!

4.2.3/8 Egy R sugarú függőleges síkú körpályára Δh magasságból engedünk rácsúszni egy pontszerű testet az ábra szerint. A súrlódás a pálya teljes hosszában elhanyagolható.
Adatok:

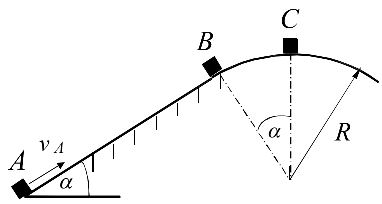
$$R = 30\ [cm];\ h = 60\ [m];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Milyen magasságban válik el a test a körpályától?
b, Mekkora a sebessége az elválás pillanatában?

4.2.3/9 Az ismert függőleges síkú kényszerpályán egy m tömegű anyagi pont mozog. A pálya AB szakasza μ_{AB} csúszási súrlódási tényezővel jellemzett, a BC szakaszon eltekintünk a súrlódástól.
Adatok:

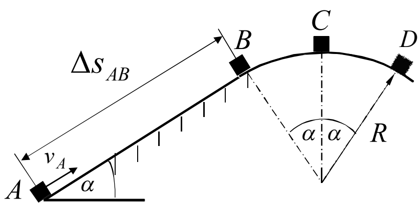
$$R = 2\ [m];\ \ \alpha = 30^{\circ}; \mu_{AB}\ = 0.2;\ m = 1\ [kg];\ \ v_A = 5\ \left[\frac{m}{s}\right];\ v_B = 3\ \left[\frac{m}{s}\right];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Írja fel az AB szakaszra érvényes impulzustételt!
b, Számítsa ki mennyi idő alatt ér fel a tömegpont a görbült pályaszakasz B kezdőpontjához!
c, Írja fel a BC szakaszra érvényes munkatételt!
d, Számítsa ki a tömegpont sebességét a C pontban!
e, Határozza meg a C pontban a pálya által kifejtett kényszererő nagyságát!

4.2.3/10 Az ismert függőleges síkú kényszerpályán egy m tömegű anyagi pont mozog. A pálya AB szakaszán a μ_{AB}csúszási súrlódási tényező ismert, a körív alakú BD szakaszon eltekintünk a súrlódástól. Az anyagi pontot az A pontból v_A nagyságú kezdősebességgel indítjuk az ábra szerint.
Adatok:

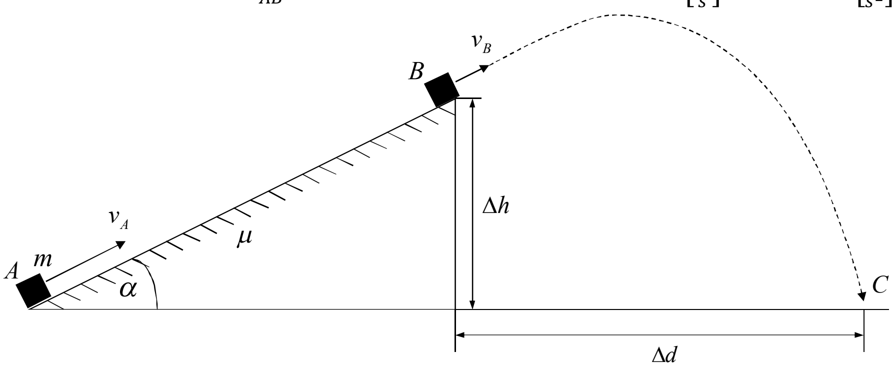
$$R = 2\ [m];\ \ \alpha = 30^{\circ};\ \mu_{AB} = 0.18;\ m = 5\ [kg];\ \ v_A = 8.1 \left[\frac{m}{s}\right];\ \ \Delta s_{AB} = 4\ [m];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora az anyagi pont sebessége a B pontban?
b, Mennyi idő alatt ér fel a B pontba?
c, Ha feltételezzük, hogy a B pont az íves a BD pályaszakaszhoz tartozik, akkor mekkora ott a pálya által kifejtett kényszererő nagysága?
d, Mekkora az anyagi pont sebessége a C pontban?
e, Legfeljebb mekkora v_A kezdősebesség esetén marad a tömegpont végig a pályán (azaz a teljes AD szakaszon)?

4.2.3/11 Egy m tömegű anyagi pontot az ábrán látható α hajlásszögű h magasság μ_{AB} csúszási súrlódási tényezővel jellemzett érdes lejtő aljáról v_A nagyságú kezdősebességgel indítunk az ábra szerint. A lejtő tetejét (B pont) elhagyva a test a homogén gravitációs térben szabad mozgást végez. A közegellenállástól eltekintünk.
Adatok:

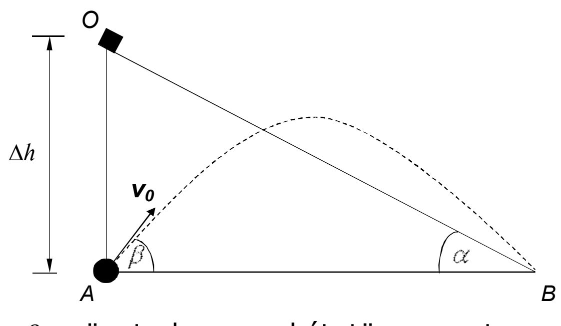
$$\alpha = 30^\circ; \Delta h = 10\ [m];\ \mu_{AB} = 0.2;\ m = 100\ [kg];\ v_A = 55.91 \left[\frac{m}{s}\right];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora a test sebességének nagysága a lejtő tetején (B pont)?
b, Mekkora az ábrán jelölt Δd távolság?

4.2.3/12 Az A és az O pontokból egyszerre indítunk el két anyagi pontot. Az egyik nyugalomból indulva lecsúszik az α hajlásszögű tökéletesen sima lejtőn, a másik a vízszintessel β szöget bezáró v_0 nagyságú kezdősebességgel indul, majd a homogén gravitációs erőtérben szabad mozgást végez.
Adatok:

$$\alpha = 30^\circ; h = 10\ [m];\ v_0 = 20 \left[\frac{m}{s}\right];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

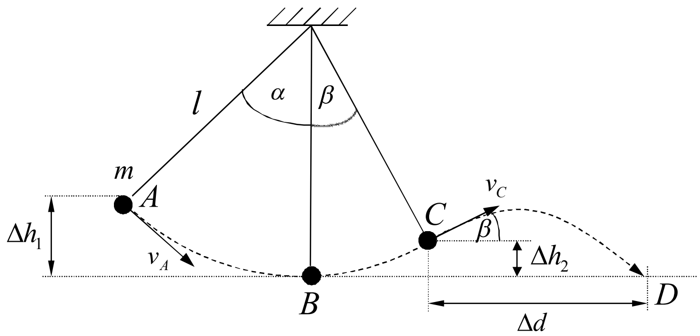


Mekkorára válasszuk a β szöget, hogy a két tömegpont egyszerre érkezzen a lejtő aljához?

4.2.3/13 Az ábrán látható l hosszúságú fonál végére erősített m tömegű pontszerű testet az A pontból a fonálra merőleges $\boldsymbol{v}_A$ kezdősebességgel indítjuk. Amikor a test a C pontba ér a fonalat egy pisztollyal ellőjük. Ezt követően a test a homogén gravitációs erőtérben szabad mozgást végez. A fonál ideális (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) a közegellenállástól eltekintünk.

Adatok:

$$\alpha = 45^{\circ}; \beta = 30^{\circ};\ l = 20\ [m];\ \ v_A = 10 \left[\frac{m}{s}\right];\ \ m = 2\ [kg];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozzuk meg az ábrán látható Δh_1 és Δh_2 távolságokat!

b, írjuk fel az AB szakaszra vonatkozó munkatételt, majd határozzuk meg a test sebességének nagysádát a B pontban!

c, írjuk fel a BC szakaszra vonatkozó munkatételt, majd határozzuk meg a test sebességének nagyságát a C pontban!

d, Vegyünk fel célszerű koordinátarendszert a CD szakaszon történő mozgás leírásához, majd határozzuk meg az ábrán jelölt $\Delta \mathrm{d}$ távolságot!

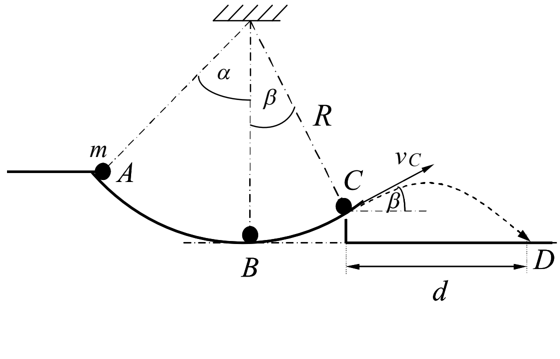
e, Mekkora a test sebességének nagysága a D pontban?

f, Az AC pályaszakasz mely pontjában maximális a kötélerő nagysága, és mekkora ott az értéke?

4.2.3/14 Az m tömegű anyagi pont először az ABC függőleges síkú súrlódásmentes pályán kényszermozgást végez, majd a C pontot elhagyva szabadon mozog a homogén gravitációs erőtérben, végül a körpálya legmélyebben fekvő B pontjával azonos magasságban (D pont) mozgása véget ér. Az anyagi pont sebessége a C pontban ismert.

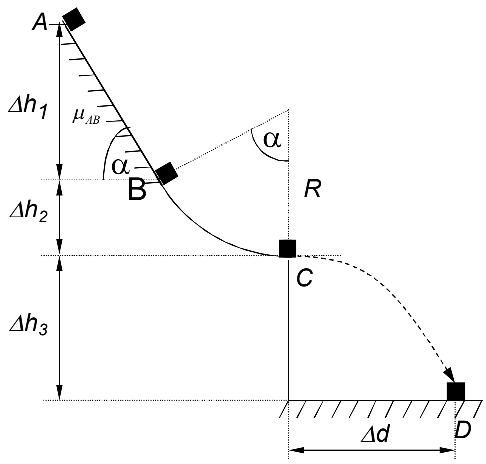
Adatok:

$$\alpha = 45^{\circ}; \beta = 30^{\circ};\ R = 0.8\ [m];\ \ v_C = 3 \left[\frac{m}{s}\right];\ m = 2\ [kg];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozzuk meg a C pontbeli sebesség ismeretében az A pontbeli kezdősebességet!
b, Határozzuk meg a síkra érkezés helyét kijelölő d távolságot!
c, Határozzuk meg a pálya által kifejtett kényszererő nagyságát a B és C pontokban!

4.2.3/15 Az m tömegű pontszerű test pályája egy α hajlásszögű μ_{AB} csúszási súrlódási tényezővel jellemzett AB lejtő és egy ahhoz kapcsolódó R sugarú függőleges síkú súrlódásmentes BC körív. A test a C pontot elhagyva a homogén gravitációs erőtérben szabad mozgást végez.
Adatok:
$R = 10\,[m];\ v_A = 0\left[\frac{m}{s}\right];\ m = 2\,[kg];\ \mu_{AB} = 0.1;\ \Delta h_1 = 12\,[m];\ \Delta h_3 = 10\,[m];\ \alpha = 60°;\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$.



a, Határozza meg az ábrán látható Δs_{AB} és Δh_2 távolságokat!
b, Rajzolja be az A pontban a testre ható erőket, majd számítsa ki az általuk az AB szakaszon külön-külön végzett munkákat!
c, írja fel az AB szakaszra vonatkozó munkatételt, majd határozza meg a test sebességének nagyságát a B pontban!
d, Feltételezve, hogy a B pont már az íves a BC pályaszakaszhoz tartozik, határozza meg a B pontban a pálya által kifejtett kényszererő nagyságát!
e, írja fel a BC szakaszra vonatkozó munkatételt, majd határozza meg a test sebességének nagyságát a C pontban!
f, A v_C sebességnagyság és Δh_3 távolság ismeretében határozza meg az ábrán látható Δd távolságot!
g, Mekkora a test sebességének nagysága a D pontban?

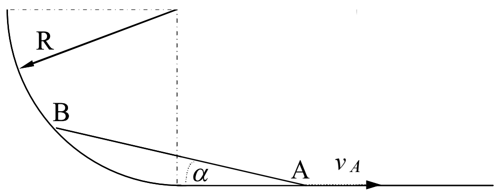
4.3 Merev testek kinematikája

4.3.1 Mozgásállapot vizsgálata

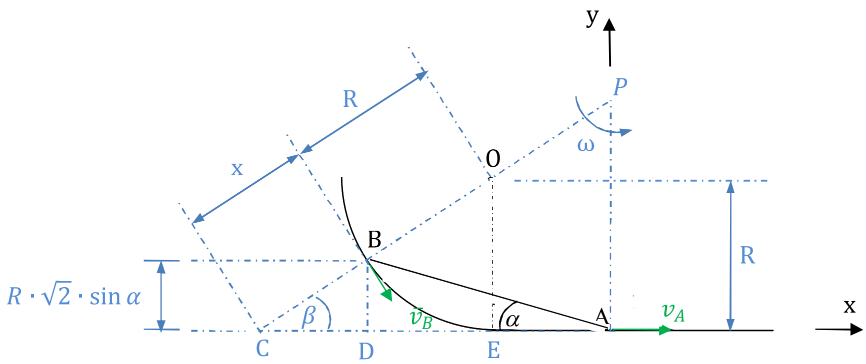
4.3.1.1 Egyetlen tárcsa

4.3.1.1/M1 Az $R\sqrt{2}$ hosszúságú pálca A végpontja egy egyenes, míg B végpontja egy R sugarú, körív alakú kényszerpályán halad. Az ábrán vázolt pillanatban az A pont v_A sebessége ismert.
Adatok:

$$R = 0.5\,[m];\ \alpha = 15°;\ v_A = 0.2\left[\frac{m}{s}\right].$$



a, Számítsuk ki a rúd szögsebességének, valamint a B pont sebességének nagyságát!
b, Számítsuk ki az A pontból a sebességpólusba mutató vektort, majd szerkesszük is meg a sebességpólust!
Megoldás:
a,



Először számítsuk ki az ábrán látható x távolságot, alkalmazva az ábrán látható β szög száraira a párhuzamos szelők tételét! (A szögszárakat átmetsző párhuzamos szakaszok legyenek a BD és OE szakaszok!)

$$\frac{x}{x+R} = \frac{R \cdot \sqrt{2} \cdot sin\,\alpha}{R} \rightarrow x = R \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot sin\,\alpha}{1 - \sqrt{2} \cdot sin\,\alpha} = 0.289\,[m]$$

Az x távolság ismeretében a β szög kiszámítható:

$$sin\,\beta = \frac{R \cdot \sqrt{2} \cdot sin\,\alpha}{x} = 0.634 \rightarrow \beta = 39.34°$$

A β szög segítségével a $\bar{v}_B$ sebességvektor az alábbi alakban írható:

$$\boldsymbol{v}_B = \begin{pmatrix} v_B \cdot sin\,\beta \\ -v_B \cdot cos\,\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Most írjuk fel az A pont sebességének ismeretében a $\boldsymbol{v}_B$ sebességvektort:

$$\begin{pmatrix} v_B \cdot sin\,\beta \\ -v_B \cdot cos\,\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{r}_{AB} = \begin{pmatrix} v_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \cdot \sqrt{2} \cdot cos\,\alpha \\ R \cdot \sqrt{2} \cdot sin\,\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A - \omega_r \cdot R \cdot \sqrt{2} \cdot sin\,\alpha \\ -\omega_r \cdot R \cdot \sqrt{2} \cdot cos\,\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

A fenti vektoregyenletből az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$v_B \cdot \sin\beta = v_A - \omega_r \cdot R \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\alpha$$

$$\underline{-v_B \cdot \cos\beta = -\omega_r \cdot R \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\alpha} \;\rightarrow\; -\omega_r \cdot R \cdot \sqrt{2} = -v_B \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$v_B \cdot \sin\beta = v_A - v_B \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha$$

$$v_B \cdot \sin\beta + v_B \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = v_A$$

$$v_B \cdot (\sin\beta + \cos\beta \cdot \tan\alpha) = v_A$$

$$v_B = \frac{v_A}{(\sin\beta + \cos\beta \cdot \tan\alpha)} = 0.238 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$\omega_r = \frac{v_B \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot R \cdot \sqrt{2}} = 0.269 \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$$

b,

Az A pontból a sebességpólusba mutató vektort:

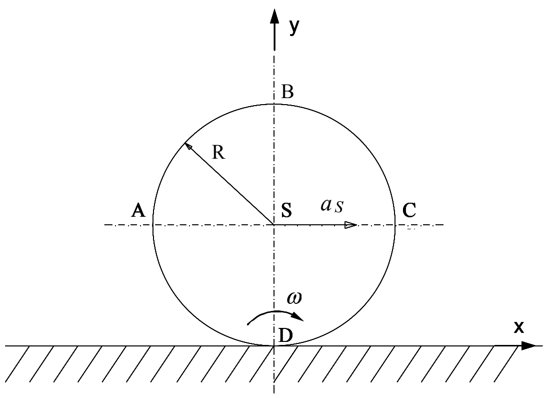
$$\boldsymbol{r}_{AP} = \frac{\boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{v}_A}{\omega_r^2} = \frac{1}{(0.269)^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.269 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.743 \\ 0 \end{pmatrix} [m]$$

A szerkesztés esetén a sebességpólust a $\boldsymbol{v}_A$ és $\boldsymbol{v}_B$ sebességvektorokra az A és B pontokban állított merőlegesek metszéspontja adja (lásd ábra).

4.3.1.1/M2 Az R sugarú korong a vízszintes síkon tisztán gördül. Az ábrán látható pillanatban a korong középpontjának $\boldsymbol{a}_S$ gyorsulása, valamint szögsebességének ω nagysága ismert. A szögsebesség értelme az ábrán adott.

Adatok:

$$R = 0.5\,[m];\;\; a_S = 2\left[\frac{m}{s^2}\right];\;\; \omega = 1\left[\frac{rad}{s}\right].$$

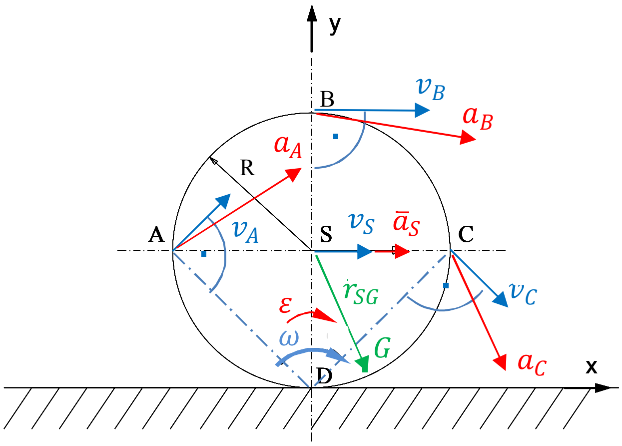


a, Számítsuk ki a bejelölt pontok sebességvektorait!

b, Számítsuk ki a korong szöggyorsulás vektorát, majd számítsuk ki az A, B, és C pontok gyorsulásvektorait!

c, Számítsuk ki a korong középpontjából a gyorsuláspólusába mutató vektort! Hol lenne a gyorsuláspólus, ha a korong szöggyorsulása zérus lenne?

Megoldás:



a,

Csak az A pont sebességvektorát számítjuk ki, a B és C pontok esetében az eljárás ugyanaz. A korong szögsebesség vektora a z tengellyel azonos irányú, de ellentétes értelmű, tehát:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Továbbá:

$$r_{DA} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} [m]$$

$$\boldsymbol{v}_A = \overbrace{\boldsymbol{v}_D}^{\mathbf{0}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Tiszta gördülés esetén a D pont a tárcsa sebességpólusa, tehát $\boldsymbol{v}_D = \mathbf{0}$.

b,

Tiszta gördülés esetén a tárcsa S (görbületi) középpontjának gyorsulása az alábbi, összefüggéssel számítható:

$$\boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{DS} - \frac{R}{R + r_k} \cdot \omega^2 \cdot \boldsymbol{r}_{DS}$$

A fenti összefüggésben r_k azon görbe görbületi sugara a D pontban, amelyen az R sugarú korong gördül. Mivel esetünkben a fenti görbe egyenes, így $r_k = \infty \ \rightarrow \ \frac{R}{R+r_k} = 0$. Tehát:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{DS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \cdot \varepsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

A fenti vektoregyenletből az alábbi skaláregyenlet adódik:

$$2 = -0.5 \cdot \varepsilon \ \rightarrow \ \varepsilon = -4 \left[\frac{m}{s^2}\right] \ \rightarrow \ \bar{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Az A pont gyorsulása a S pont gyorsulásának ismeretében az alábbi, általános összefüggéssel számítható:

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_S + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{SA} - \omega^2 \cdot \boldsymbol{r}_{SA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0.,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1^2 \cdot \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

A másik két pont esetében hasonlóan:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_S + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{SB} - \omega^2 \cdot \boldsymbol{r}_{SB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} - 1^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_S + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{SC} - \omega^2 \cdot \boldsymbol{r}_{SC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1^2 \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

c,

A korong S középpontjából a G gyorsuláspólusába mutató vektort az alábbi, általános összefüggéssel számíthatjuk:

$$\boldsymbol{r}_{SG} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{a}_S + \omega^2 \cdot \boldsymbol{a}_S}{\omega^4 + \varepsilon^2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{1^4 + (-4)^2} = \begin{pmatrix} 0.118 \\ -0.471 \\ 0 \end{pmatrix} [m]$$

Írjuk fel most az $\boldsymbol{r}_{SG}$ vektort abban az esetben, ha $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}$:

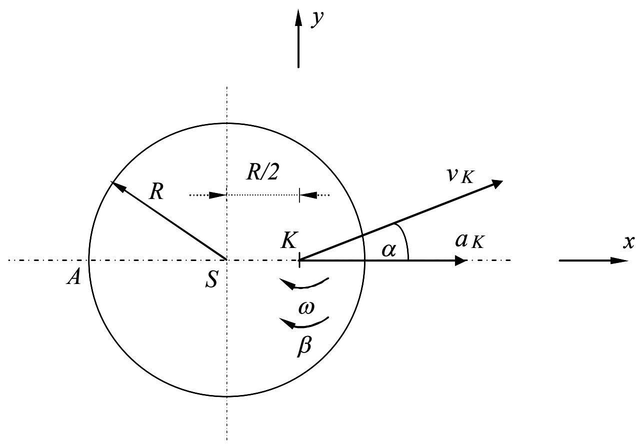
$$\boldsymbol{r}_{SG} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{a}_S + \omega^2 \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{DS})}{\omega^4 + \varepsilon^2} = \frac{\boldsymbol{0} \times \boldsymbol{a}_S + \omega^2 \cdot (\boldsymbol{0} \times \boldsymbol{r}_{DS})}{\omega^4 + \varepsilon^2} = \boldsymbol{0}$$

Tehát ekkor a gyorsuláspólus a korong S középpontjában van.

4.3.1.1/3 A vázolt pillanatban a síkmozgást végző R sugarú korong K pontjának $\boldsymbol{v}_K$ sebessége és $\boldsymbol{a}_k$ gyorsulása ismert. Továbbá ismert a korong szögsebessége és szöggyorsulása.

Adatok:

$$\alpha = 30^{\circ};\ R = 0.6\,[m];\ \ v_K = 4\left[\frac{m}{s}\right];\ a_K = 3\left[\frac{m}{s^2}\right];\ \omega = 10\left[\frac{rad}{s}\right];\ \varepsilon = 2\left[\frac{rad}{s^2}\right].$$



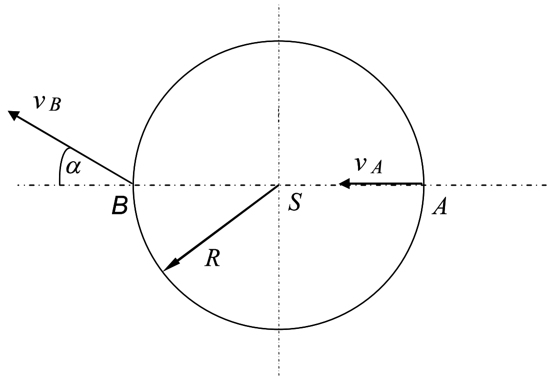
a, Számítsuk ki az A pont sebesség- és gyorsulásvektorát az ábrán adott koordinátarendszerben!

b, Számítsuk ki a korong K pontjából a sebesség- és gyorsuláspólusba mutató vektort!

4.3.1.1/4 Síkmozgást végző R sugarú korong B pontjának $\boldsymbol{v}_B$ sebessége ismert, továbbá ismert az A pont sebességének irányát.

Adatok:

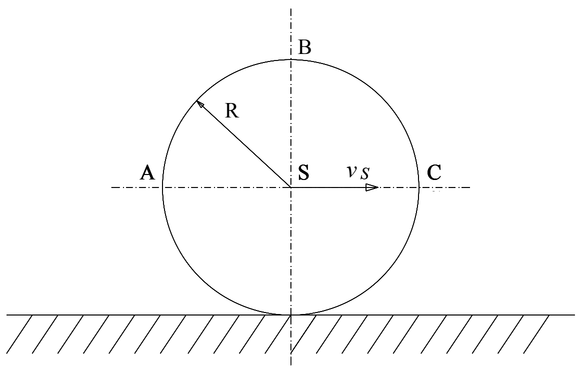
$$\alpha = 30^{\circ};\ R = 0.8\,[m];\ \ v_B = 5\left[\frac{m}{s}\right].$$



a, Válasszunk célszerű koordinátarendszert, majd számítsuk ki az A pont sebességének nagyságát, valamint a korong szögsebesség vektorát!
b, Határozzuk meg a sebességpólus helyét számítással, majd szerkesszük is meg!

4.3.1.1/5 Az R sugarú korong a vízszintes síkon tisztán gördül, középpontjának $\boldsymbol{v}_S$ sebessége állandó.
Adatok:

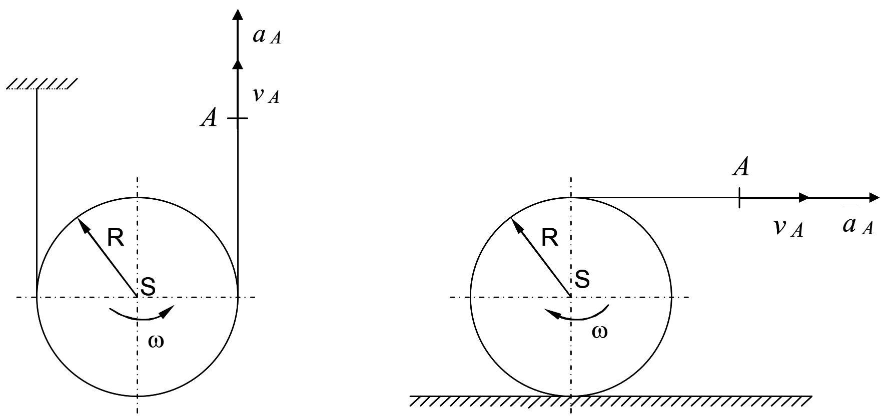
$$R = 0.5\,[m];\ \ v_S = 1\left[\frac{m}{s}\right].$$



a, Hol van a korong pillanatnyi forgásközéppontja? Válasszunk célszerű koordinátarendszert, és számítsuk ki a korong szögsebesség vektorát!
b, Számítsuk ki a bejelölt pontok sebességvektorait, majd rajzoljuk is be őket az ábrába!
c, Hol van a pillanatnyi gyorsulásközéppont? Számítsuk ki a bejelölt pontok gyorsulásvektorait, majd rajzoljuk be őket az ábrába!

4.3.1.1/6 Az ábrán látható elrendezéseknél az ideális kötél (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) A végpontjának sebessége és gyorsulása ismert.
Adatok:

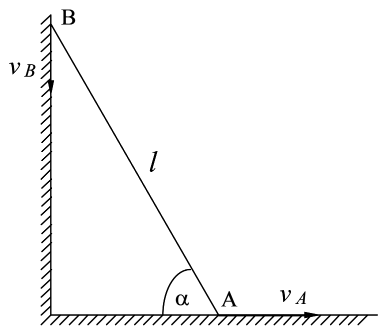
$$R = 0.8\,[m];\ \ v_A = 2\left[\frac{m}{s}\right];\ \ a_A = 0.5\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora az R sugarú korong szögsebessége és szöggyorsulása?
b, Mekkora és milyen irányú az S súlypont sebessége és gyorsulása?

4.3.1.1/7 Az ábrán látható l hosszúságú rúd B végpontjának sebessége ismert.
Adatok:

$$l = 1.5\ [m];\ \alpha = 60^{\circ};\ v_B = 2\left[\frac{m}{s}\right].$$

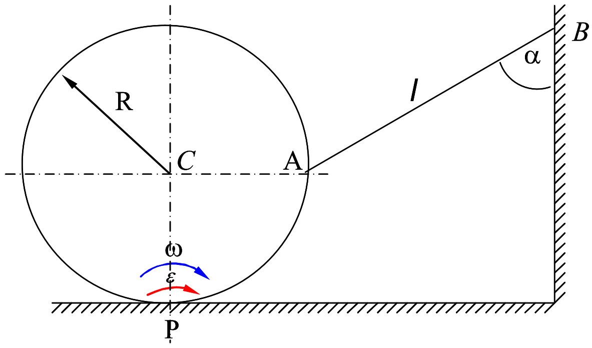


a, Válasszunk célszerű koordinátarendszert, majd számítsuk ki az A pont sebességének nagyságát, valamint a rúd szögsebesség vektorát!
b, Határozzuk meg a sebességpólus helyét számítással, majd szerkesszük is meg!
c, Számítsa ki a rúd középpontjának sebességvektorát, és annak nagyságát!

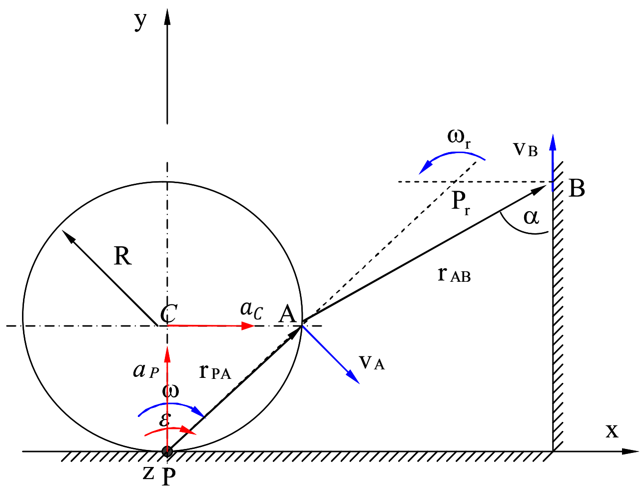
4.3.1.2 Több, együtt mozgó tárcsa

4.3.1.2/M1 Az ábrán látható C középpontú korong vízszintes síkon tisztán gördül. A korong A pontjához egy l hosszúságú rúd kapcsolódik, amelynek B végpontja függőleges, sima falnak támaszkodik. Az ábrán látható helyzetben a korong szögsebessége és szöggyorsulása ω és ε nagyságú, értelmük az ábrán adott.
Adatok:

$$R = 1\ [m];\ l = 2\ [m];\ \alpha = 60^{\circ};\ \omega = 5\left[\frac{rad}{s}\right];\ \varepsilon = 2\left[\frac{rad}{s^2}\right].$$



a, Vegyünk fel célszerű koordinátarendszert, és határozzuk meg az A pont sebességvektorát és sebességnagyságát!
b, Határozzuk meg a B pont sebességvektorát és az AB rúd $\boldsymbol{\omega}_r$ szögsebesség vektorát!
c, Határozzuk meg az A pontból a rúd P_r sebességpólusába mutató helyvektort számítással, majd szerkesszük is meg a sebességpólust!
d, Határozzuk meg a C, majd a P pont gyorsulásvektorát, továbbá a P pontból a korong G gyorsuláspólusába mutató helyvektort!
Megoldás:
a,



a, A korong szögsebesség vektora a z tengellyel azonos irányú, de ellentétes értelmű, tehát:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Továbbá:

$$\boldsymbol{r}_{PA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} [m], \ \boldsymbol{r}_{AB} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \sin 60° \\ 2 \cdot \cos 60° \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.732 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} [m]$$

$$\boldsymbol{v}_A = \overbrace{\boldsymbol{v}_P}^{0} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{PA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$|\boldsymbol{v}_A| = \sqrt{5^2 + (-5^2) + 0^2} = 7.071 \left[\frac{m}{s}\right]$$

b, Írjuk fel a B pont sebességvektorát:

$$\begin{pmatrix}0\\v_B\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{r}_{AB}=\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\omega_r\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1.732\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\omega_r\\1.73\cdot\omega_r\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-\omega_r\\-5+1.73\cdot\omega_r\\0\end{pmatrix}$$

A fenti vektoregyenletből az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$0=5-\omega_r$$
$$v_B=-5+1{,}73\cdot\omega_r$$

Ebből: $\omega_r=5\left[\frac{rad}{s}\right]$, $\quad v_B=3.65\left[\frac{m}{s}\right]$.

Tehát:

$$\boldsymbol{\omega}_r=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\left[\frac{rad}{s}\right],\ \boldsymbol{v}_B=\begin{pmatrix}0\\3.65\\0\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s}\right]$$

c, Az A pontból a rúd P_r sebességpólusába mutató helyvektor:

$$\boldsymbol{r}_{AP_r}=\frac{\boldsymbol{\omega}_r\times\boldsymbol{v}_A}{\omega_r^2}=\frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}[m]$$

A szerkesztésnél a rúd P_r sebességpólusát a $\boldsymbol{v}_A$ és $\boldsymbol{v}_B$ sebességvektorokra állított merőlegesek metszéspontja adja az ábra szerint.

d,

Tiszta gördülés esetén a tárcsa C (görbületi) középpontjának gyorsulása az alábbi, összefüggéssel számítható:

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_{PC}-\frac{R}{R+r_k}\omega^2\cdot\boldsymbol{r}_{PC}$$

A fenti összefüggésben r_k azon görbe görbületi sugara a P pontban, amelyen az R sugarú korong gördül. Mivel esetünkben a fenti görbe egyenes, így $r_k=\infty\ \rightarrow\ \frac{R}{R+r_k}=0$. Tehát:

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_{PC}=\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s}\right]$$

A P pont gyorsulása a C pont gyorsulásának ismeretében az alábbi, általános összefüggéssel számíthat:

$$\boldsymbol{a}_P=\boldsymbol{a}_C+\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_{CP}-\omega^2\cdot\boldsymbol{r}_{CP}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}-25\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\25\\0\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s^2}\right]$$

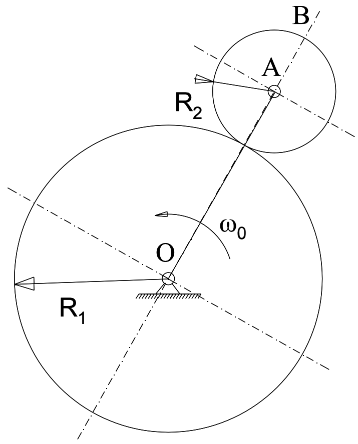
Tehát a P sebességpólus a C középpont felé gyorsul. A P pontból a korong G gyorsuláspólusába mutató helyvektort:

$$\boldsymbol{r}_{PG}=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{a}_P+\omega^2\cdot\boldsymbol{a}_P}{\omega^4+\varepsilon^2}=\begin{pmatrix}0.079\\0.994\\0\end{pmatrix}[m]$$

4.3.1.2/2 Az R_1 sugarú, álló fogaskeréken az OA kar segítségével legördítjük az R_2 sugarú fogaskereket. Az OA kar ω_0 szögsebessége állandó.

Adatok:

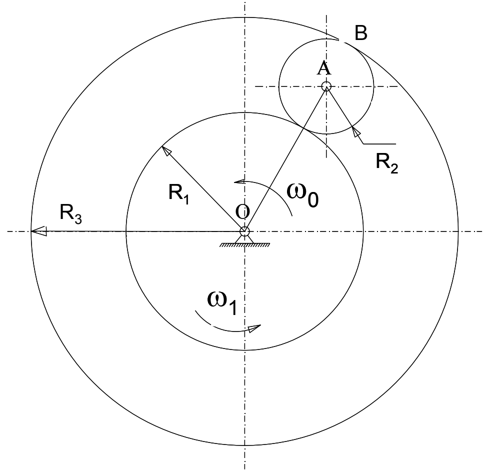
$$R_1=0.5\ [m];\ \ R_2=0.2\ [m];\ \ \omega_0=2\left[\frac{rad}{s}\right].$$



a, Mekkora a kis kerék szögsebessége?
b, Mekkora a kis kerék B pontjának sebessége és gyorsulása?
c, Határozza meg a kis kerék gyorsuláspólusának helyét számítással!
d, Számítsa ki a kis kerék szögsebességét a forgó karhoz viszonyítva!

4.3.1.2/3 Az állandó ω_1 szögsebességgel forgó R_1 sugarú fogaskeréken az OA kar segítségével legördítjük az R_2 sugarú fogaskereket. Az OA kar ω_0 szögsebessége állandó. Adatok:

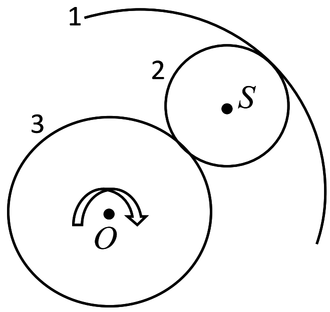
$$R_1 = 0.2\ [m];\ \ R_2 = 0.06\ [m];\ \ \omega_0 = 3\left[\frac{rad}{s}\right];\ \ \omega_1 = 2\left[\frac{rad}{s}\right].$$



a, Számítsuk ki a kis kerék szögsebességének nagyságát, valamint pillanatnyi forgásközéppontjának helyét! A pillanatnyi forgásközéppontot szerkesszük is meg!
b, Számítsuk ki a kettes kerékhez csatlakozó R_3 sugarú fogaskerék szögsebességét!
c, Fejezzük ki az OA kar szögsebességét az egyes és hármas kerék szögsebességével!

4.3.1.2/4 Az ábrán egy golyócsapágy kinematikai modellje látható. A csapágy 1-es jelű külső gyűrűje áll, 3-as jelű belső gyűrűje n fordulatszámmal forog. A 2-es jelű golyó mind a külső, mind a belső gyűrűn csúszásmentesen gördül.
Adatok:

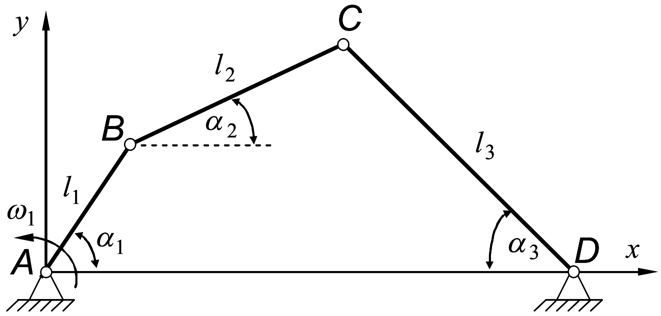
$$R_1 = 0.3\ [m];\ \ R_3 = 0.1[m];\ R_2 = \text{adódik};\ n = 1440\ \left[\frac{fordulat}{min}\right].$$



a, Számítsa ki, hogy a golyó S súlypontja milyen nagyságú sebességgel mozog, valamint mekkora a golyó súlypontjának gyorsulása (a pályairányú és az arra merőleges komponens nagyságát is adja meg)!
b, Rajzolja be az ábrára a súlypont sebességvektorát és gyorsulásvektorát jelleghelyesen!

4.3.1.2/5 Az ábrán vázolt négycsuklós mechanizmus AB, BC és CD rúdjainak hosszúsága, valamint vízszintessel bezárt szöge ismert. Továbbá ismert az AB rúd szögsebessége és szöggyorsulása.
Adatok:

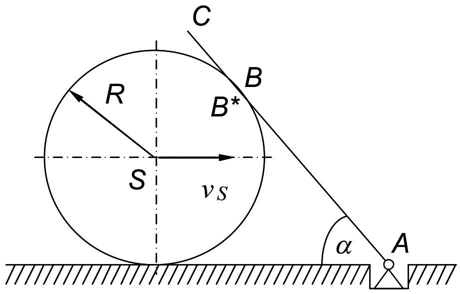
$$l_1 = 5\ [m];\ \ l_2 = 7\ [m];\ l_3 = 6\sqrt{2}\ [m];\ \alpha_1 = 60°;\ \alpha_2 = 30°;\ \alpha_3 = \text{adódik};\ \ \omega_1 = 5\left[\frac{rad}{s}\right]\ ;\ \ \varepsilon_1 = 0\left[\frac{rad}{s^2}\right].$$



a, Számítsuk ki a B és C pontok sebességvektorát, valami a 2-es és 3-as rudak szögsebesség vektorát az ábrán vázolt pillanatban!
b, Számítsuk ki a B és C pontok gyorsulásvektorát, valami a 2-es és 3-as rudak szöggyorsulás vektorát!
c, Határozzuk meg a 2-es rúd sebességpólusát számítással, majd szerkesszük is meg azt!

4.3.1.2/6 Az ábrán látható AC rúd a vízszintes síkon tisztán gördülő korongra támaszkodik, a rúd A végpontja egy csukló körül szabadon elfordulhat.
Adatok:

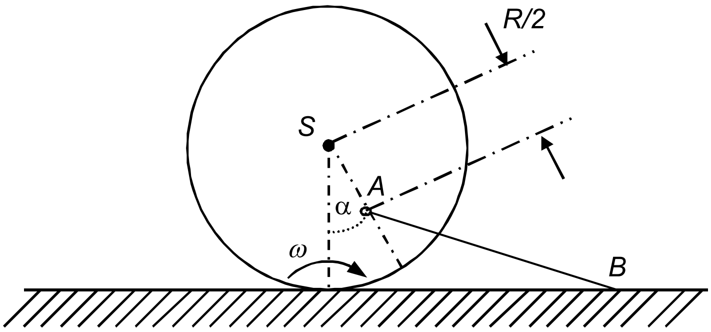
$$R = 1\,[m];\; AC = 3\,[m];\;\; v_s = 2\left[\frac{m}{s}\right];\; \alpha = 45^\circ\,.$$



a, Válasszon célszerű koordináta rendszert, majd határozza meg a korong rúddal érintkező B^* pontjának sebességvektorát!
b, Határozza meg a rúd B pontjának sebességvektorát, valamint a rúd szögsebesség vektorát!
c, Határozza meg a rúd C végpontjának sebességvektorát valamint annak nagyságát!

4.3.1.2/7 Az R sugarú korong a vízszintes síkon állandó ω nagyságú szögsebességgel tisztán gördül. Egy vékony rúd A végpontját a koronghoz rögzítjük, annak középpontjától $R/2$ távolságban. A rúd másik vége a vízszintes sima síkon ellenállás nélkül csúszik.
Adatok:

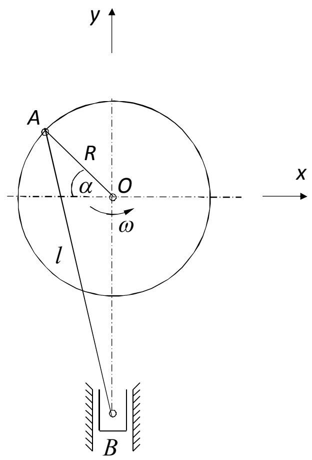
$$R = 1\,[m];\; AB = 1.5\,[m];\; v_s = 2\left[\frac{m}{s}\right];\; \alpha = 30^\circ.$$



a, Válasszunk célszerű koordinátarendszert, majd számítsuk ki az A pont sebességvektorát az ábrán vázolt pillanatban!
b, Számítsuk ki a rúd szögsebesség vektorát, valamint a B pont sebességvektorát és annak nagyságát! Tüntessük fel az ábrán a rúd forgásértelmét!
c, Számítsuk ki az A pontból a rúd sebességpólusába mutató vektort, majd szerkesszük is meg a sebességpólust!

4.3.1.2/8 A vázolt forgattyús mechanizmus OA forgattyúkarjának másodpercenkénti fordulatszáma (n) ismert.
Adatok:

$$R = 80\ [mm];\ l = 250[mm];\ \alpha = 30°;\ n = 5000\ \left[\frac{ford}{min}\right].$$

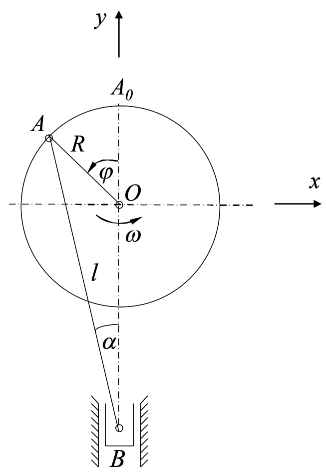


a, Számítsuk ki az A és B pontok sebességvektorait, valamint az AB csatlórúd szögsebesség vektorát!
b, Határozzuk meg a csatlórúd sebességpólusának helyét számítással és szerkesztéssel! Tüntessük fel az ábrán a rúd forgásértelmét!
c, Számítsuk ki az A és B pontok gyorsulásvektorait, valamint a csatlórúd szöggyorsulás vektorát!
d, Határozzuk meg a csatlórúd gyorsuláspólusának helyét számítással és szerkesztéssel!

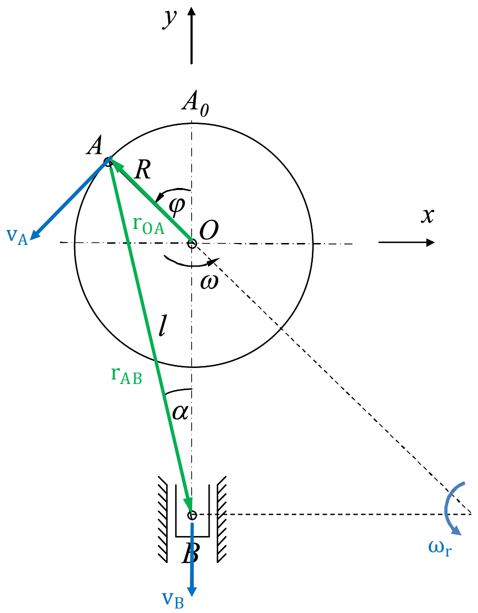
4.3.2 Véges mozgás vizsgálata

4.3.2/M1 A vázolt forgattyús mechanizmus R hosszúságú, OA forgattyúkarja állandó, ω szögsebességgel forog.
Adatok:

$$R = 80\ [mm];\ l = 250[mm];\ \omega = 524\left[\frac{rad}{s}\right].$$



a, Adjuk meg az A pont sebességvektorát, mint az idő függvényét, ha a $t = 0$ időpillanatban a forgattyúkar éppen a felső, OA_0 pozíción halad át!
b, Adja meg az l hosszúságú, AB csatlórúd ω_r szögsebességét, valamint a B dugattyú pályamenti sebességét az idő függvényében.
Megoldás:
a,



$$\boldsymbol{v}_A(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{r}_{OA}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \cdot sin\,\overbrace{(\omega \cdot t)}^{\varphi(t)} \\ R \cdot cos\,\overbrace{(\omega \cdot t)}^{\varphi(t)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 524 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0.08 \cdot sin(524 \cdot t) \\ 0.08 \cdot cos(524 \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -41.92 \cdot \cos(524 \cdot \mathrm{t}) \\ -41.92 \cdot \sin(524 \cdot \mathrm{t}) \\ 0 \end{pmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

b,
A B pont sebességvektorát az idő függvényében az alábbi összefüggés szolgáltatja:

$$\boldsymbol{v}_B(t) = \boldsymbol{v}_A(t) + \boldsymbol{\omega}_r(t) \times \boldsymbol{r}_{AB}(t)$$

Határozzuk meg először az összefüggésben szereplő $\boldsymbol{r}_{AB}(t)$függvényt!

$$\boldsymbol{r}_{AB}(t) = \begin{pmatrix} l \cdot sin\,\alpha(t) \\ -l \cdot cos\,\alpha(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot sin\,\varphi(t) \\ -\sqrt{l^2 - (R \cdot sin\,\varphi(t))^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot sin(\omega \cdot t) \\ -\sqrt{l^2 - (R \cdot sin(\omega \cdot t))^2} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.08 \cdot sin(524 \cdot t) \\ -\sqrt{0.0625 - 0.0064 \cdot sin^2(524 \cdot t)} \\ 0 \end{pmatrix} [m]$$

Most már felírhatjuk a $\boldsymbol{v}_B(t)$ függvényt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_B(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}_A(t) + \boldsymbol{\omega}_r(t) \times \boldsymbol{r}_{AB}(t)$$

$$=\begin{pmatrix}-41.92\cdot cos(524\cdot t)\\ -41.92\cdot sin(524\cdot t)\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \omega_r(t)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0.08\cdot sin(524\cdot t)\\ -\sqrt{0.0625-0.0064\cdot sin^2(524\cdot t)}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-41.92\cdot cos(524\cdot t)+\omega_r(t)\cdot\sqrt{0.0625-0.0064\cdot sin^2(524\cdot t)}\\ -41.92\cdot sin(524\cdot t)+\omega_r(t)\cdot 0.08\cdot sin(524\cdot t)\\ 0\end{pmatrix}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Innen az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$0=-41.92\cdot cos(524\cdot t)+\omega_r(t)\cdot\sqrt{0.0625-0.0064\cdot sin^2(524\cdot t)}$$

$$\underline{v_B(t)=-41.92\cdot sin(524\cdot t)+\omega_r(t)\cdot 0.08\cdot sin(524\cdot t)}$$

$$\omega_r(t)=\frac{41.92\cdot cos(524\cdot t)}{\sqrt{0.0625-0.0064\cdot sin^2(524\cdot t)}}$$

$$v_B(t)=-41.92\cdot sin(524\cdot t)+\frac{41.92\cdot cos(524\cdot t)}{\sqrt{0.0625-0.0064\cdot sin^2(524\cdot t)}}\cdot 0.08\cdot sin(524\cdot t)$$

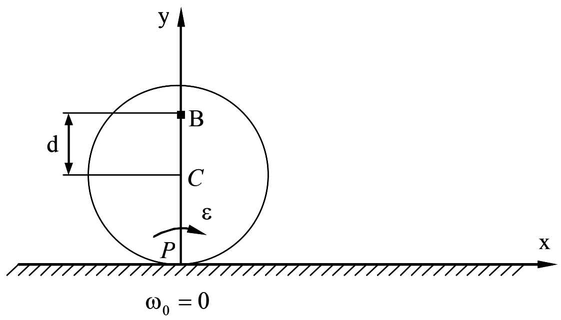
$$=-41.92\cdot sin(524\cdot t)+\frac{1.677\cdot\overbrace{2\cdot sin(524\cdot t)\cdot cos(524\cdot t)}^{sin(1048\cdot t)}}{\sqrt{0.0625-0.0064\cdot sin^2(524\cdot t)}}$$

$$=-41.92\cdot sin(524\cdot t)+1.677\cdot\frac{sin(1048\cdot t)}{\sqrt{0.0625-0.0064\cdot sin^2(524\cdot t)}}\left[\frac{m}{s}\right]$$

4.3.2/2 Az ábrán látható R sugarú korong, az ábrán vázolt pozícióból, zérus kezdeti szögsebességgel indul, és állandó nagyságú, az ábrán jelzett értelmű szöggyorsulással tisztán gördülve halad.

Adatok:

$$R=0.4\,[m];\;\;\omega_0=0\left[\frac{rad}{s}\right];\;\varepsilon=0.5\left[\frac{rad}{s^2}\right];\;d=0.3[m]\,.$$

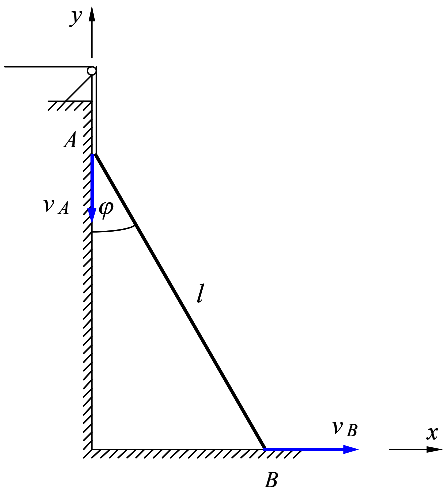


Adjuk meg az ábrán vázolt koordináta rendszerben a korong középpontjától d távolságban lévő B pont sebesség- és gyorsulásvektorát, mint az indulástól eltelt idő függvényét!

4.3.2/3 Egy rúd falnak támaszkodó A végpontját egy kötél segítségével állandó nagyságú függőleges irányú sebességgel eresztjük lefelé. A rúd kezdetben a függőlegessel φ_0 szöget zár be, majd függőleges síkban lefelé halad, miközben B végpontja a vízszintes talajon csúszik.

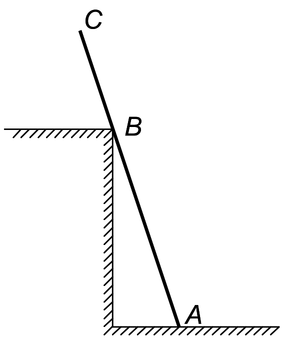
Adatok:

$$l=5\,[m];\;\;v_A=0.1\left[\frac{m}{s}\right]\;;\;\;\varphi_0=0.175[rad].$$



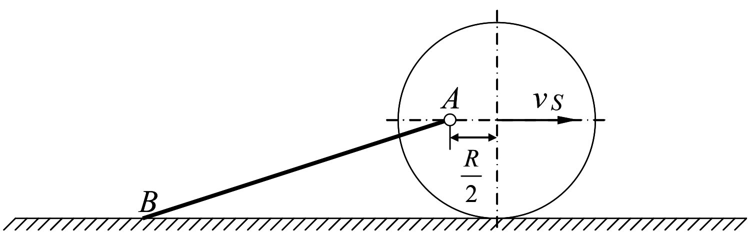
Adjuk meg a rúd szögsebességét és szögelfordulását, mint az indulástól eltelt idő függvényét!

4.3.2/4 A merev AC rúd úgy végzi mozgását, hogy A végpontja a vízszintes síkon csúszik, miközben feltámaszkodik a B élre.



a, Pausz papír segítségével modellezze a mozgó síkot a rajta lévő rúddal!
b, Rajzolja meg a nyugvó alapsíkon az álló, és a mozgó síkon (pausz papír) a mozgó pólusgörbe egy-egy szakaszát!

4.3.2/5 A vízszintes síkon gördülő R sugarú merev tárcsa excentrikusan elhelyezett $(e = R/2)$ csapjához merev rúd csatlakozik, melynek másik vége a vízszintes síkon csúszik.



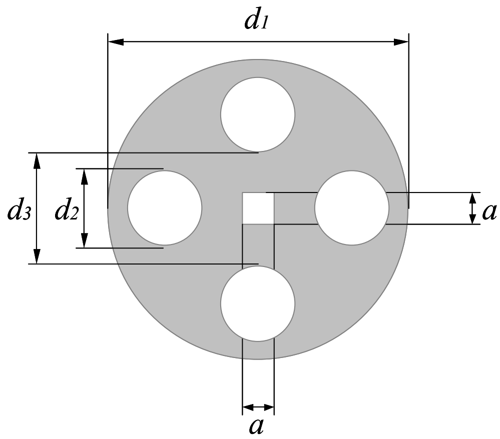
a, Pausz papír segítségével modellezze a mozgó síkot a rajta lévő rúddal!
b, Rajzolja meg a nyugvó alapsíkon az álló, és a mozgó síkon (pausz papír) a mozgó pólusgörbe egy-egy szakaszát!

4.4 Merev testek kinetikája

4.4.1 Tehetetlenségi nyomaték számítása

4.4.1/M1 Az ábrán látható v vastagságú acélból készült kerék geometriai méretei ismertek.
Adatok:

$$d_1 = 0.8\,[m];\ d_2 = 0.2\,[m];d_3 = 0.3\,[m];\ a = 0.085[m]\,;\ v = 0.05[m]\,;\rho = 7800\left[\frac{kg}{m^3}\right].$$



Számítsa ki a kerék tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő, síkjára merőleges tengelyre vonatkozóan!
Megoldás:
A kivágott részek tömegét tekintsük negatívnak, amelyből kivágjuk őket azok tömegét pozitívnak. A d_1 átmérőjű tömör korong, a d_2 átmérőjű, kör alakú könnyítés, valamint az a oldalhosszúságú négyzet alakú könnyítés tömegei sorrendben az alábbiak:
$m_1 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot v \cdot \rho = 196.04[kg]$, $m_2 = -\left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot v \cdot \rho = -12.25[kg]$, $m_3 = -a^2 \cdot v \cdot \rho = -2.82[kg]$
Jelöljük a kerék középpontját S-el, az egyik kör alakú könnyítés középpontját pedig S_2-el.
Az egyes alakzatok saját középpontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai sorrendben az alábbiak:

$$\mathrm{J_{1S}} = \frac{1}{2}\mathrm{m_1} \cdot \left(\frac{\mathrm{d_1}}{2}\right)^2 = 15.68[\mathrm{kg \cdot m^2}],\ \mathrm{J_{2S_2}} = \frac{1}{2}\mathrm{m_2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d_2}}{2}\right)^2 = -0.061[\mathrm{kg \cdot m^2}],$$

$$\mathrm{J_{3S}} = \frac{1}{12} \cdot \mathrm{m_3} \cdot (\mathrm{a^2 + a^2}) = -0.003[\mathrm{kg \cdot m^2}]$$

A fenti összefüggések integrálszámítással származtathatók, de ez itt most nem részletezzük. A kör alakú könnyítés tehetetlenségi nyomatéka Steiner tételével átszámítható a kerék középpontjára:

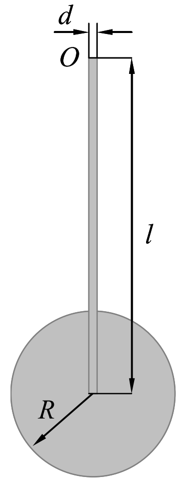
$$J_{2S} = J_{2S_2} + m_2 \cdot \left(\frac{d_3}{2} + \frac{d_2}{2}\right)^2 = -0.827[kg \cdot m^2]$$

A kerék S pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka az egyes részei S pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékainak összege:

$$J_S = J_{1S} + 4 \cdot J_{2S} + J_{3S} = 12.37[kg \cdot m^2]$$

4.4.1/2 Az ábrán látható inga tányérja v vastagságú, R sugarú rézkorong, szára l hosszúságú kör keresztmetszetű d átmérőjű rézrúd.
Adatok:

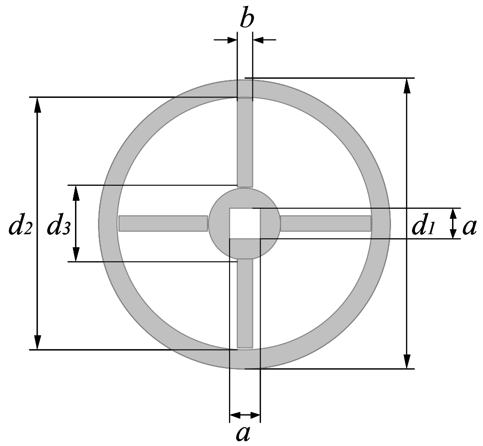
$$R = 0.1\,[m];\ l = 0.4\,[m];\ \ d = 0.01\,[m];\ v = 0.005[m];\ \ \rho_{réz} = 8920\left[\frac{kg}{m^3}\right].$$



a, Számítsa ki az inga tehetetlenségi nyomatékát az O végpontján átmenő, síkjára merőleges tengelyre vonatkozóan!
b, Számítsa ki az inga súlypontjának O-tól mért távolságát, majd számítsa ki a tehetetlenségi nyomatékot a súlyponton átmenő, az előbbivel párhuzamos tengelyre!

4.4.1/3 Az ábrán látható v vastagságú alumíniumból készült kerék geometriai méretei ismertek. A kerék küllői négyzet keresztmetszetű ideálisan vékony rudak.
Adatok:

$$d_1 = 0.8\,[m];\ d_2 = 0.7\,[m]; d_3 = 0.2\,[m];\ a = 0.085[m]\,;\ b = 0.042[m]\,;\ v = 0.05[m]\,; \rho = 2702\left[\frac{kg}{m^3}\right].$$

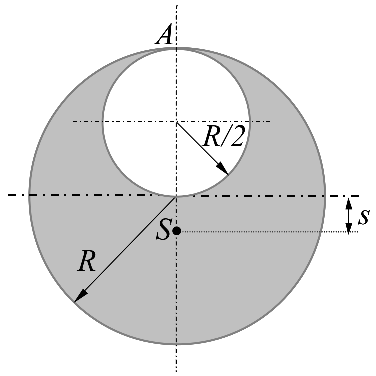


4.4.1/3 ábra

Számítsa ki a kerék tehetetlenségi nyomatékát a középpontján átmenő, síkjára merőleges tengelyre vonatkozóan!

4.4.1/4 Az ábra egy v vastagságú rézlemezből kivágott tárcsát szemléltet.

Adatok: $R = 0.2\ [m]$; $v = 5[mm]$; $\rho_{réz} = 8920\left[\frac{kg}{m^3}\right]$.



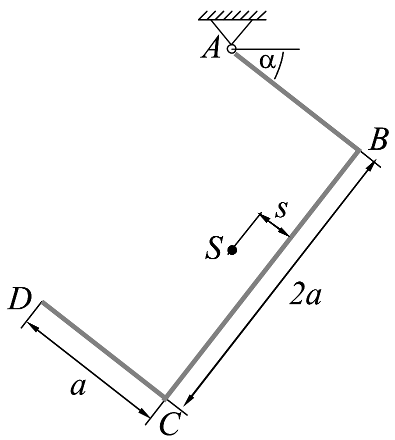
a, Számítsa ki a tárcsa súlypontjának helyzetét jellemző s távolságot!

b, Határozza meg a súlyponton átmenő (rajz síkjára merőleges) tengelyre a korong tehetetlenségi nyomatékát!

4.4.1/5 Az ábrán látható AB, BC és CD ideálisan vékony, egyenként m, $2m$ és m tömegű rudakból álló szerkezetet az A pontjában felfüggesztjük. A szerkezet az A pont körül ellenállásmentesen elfordulhat.

Adatok:

$$m = 2\ [kg];\ \ a = 2\ [m].$$



a, Számítsuk ki a szerkezet tehetetlenségi nyomatékát az A pontján átmenő, síkjára merőleges tengelyre vonatkozóan!

b, Határozzuk meg a súlypont helyzetét jellemző s távolságot!

c, Számítsuk ki a szerkezet S súlypontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

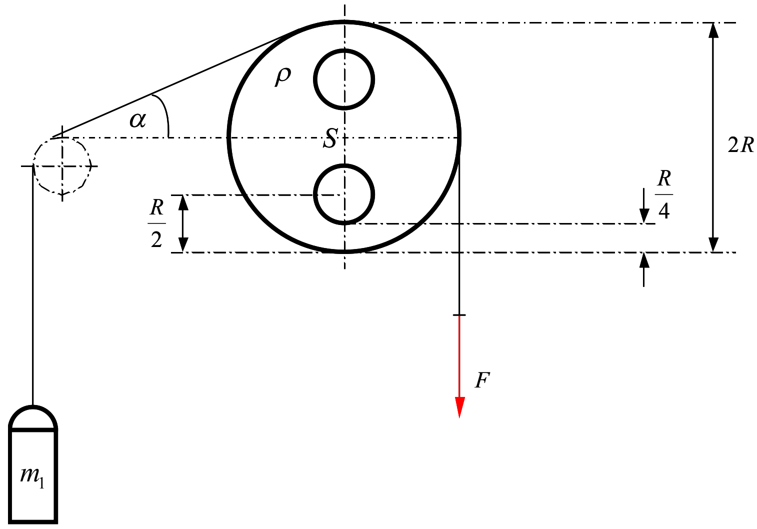
d, Mekkora α szöget zár be az AB rúd a vízszintessel, amikor a szerkezet egyensúlyban van?

4.4.2 Álló tengely körüli forgás, lengés

4.4.2/M1 Az ábrán látható szerkezettel egy ideális kötélre (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) függesztett m_1 tömegű vödröt húzunk fel állandó nagyságú $\boldsymbol{F}$ erővel. A kötél egy súlytalan dobon, és egy furatokkal könnyített, R sugarú, ρ sűrűségű, v vastagságú tárcsán van átvetve. A dob és a tárcsa ellenállásmentesen forog, rajtuk a kötél nem csúszik meg.

Adatok:

$$R = 0.25[m],\ v = 0.03[m],\ \rho = 7200\left[\frac{kg}{m^3}\right],\ m_1 = 10[kg],\ F = 100[N],\ \alpha = 30°,\ g = 9.81\frac{m}{s^2}.$$



a, Határozzuk meg a tárcsa tehetetlenségi nyomatékát a súlypontján (S) átmenő, síkjára merőleges tengelyre vonatkozóan!

b, Határozzuk meg a korong szöggyorsulását, a kötelet feszítő erő, valamint a forgástengelyénél (S pont) ébredő kényszererő nagyságát a felhúzás közben!

c, A felhúzás során a korong tíz teljes fordulatot tesz meg. Mekkora lesz a szögsebessége a felhúzás végén, ha nyugalomból indul?

Megoldás:

a,

A kör alakú könnyítések tömegét tekintsük negatívnak, a tárcsa tömegét, amelyből kivágjuk őket, pozitívnak. A R sugarú tömör tárcsa és az $\frac{R}{4}$ sugarú, kör alakú könnyítés tömegei sorrendben az alábbiak:

$$m_T = R^2 \cdot \pi \cdot v \cdot \rho = 42.41[kg],\ m_K = -\left(\frac{R}{4}\right)^2 \cdot \pi \cdot v \cdot \rho = -2.65[kg]$$

Jelöljük az egyik kör alakú könnyítés középpontját S_2-vel. A tömör tárcsa és a könnyítés saját középpontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai sorrendben az alábbiak:

$$J_{TS} = \frac{1}{2}m_T \cdot R^2,\ J_{KS_2} = \frac{1}{2}m_K \cdot \left(\frac{R}{4}\right)^2$$

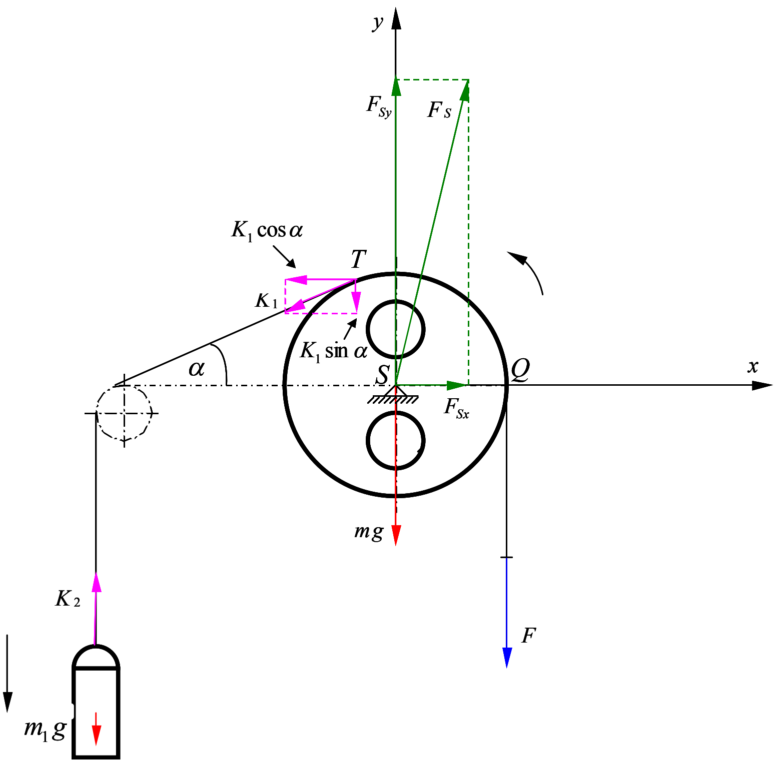
A kör alakú könnyítés tehetetlenségi nyomatéka Steiner tételével átszámítható a kerék S középpontjára:

$$J_{KS} = J_{KS_2} + m_K \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m_K \cdot \left(\frac{R}{4}\right)^2 + m_K \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} \cdot m_K \cdot R^2$$

A két furattal könnyített tárcsa S pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$J_S = J_{TS} + 2 \cdot J_{KS} = \frac{1}{2} m_T \cdot R^2 + \frac{3}{4} \cdot m_K \cdot R^2 = 1.232 [kg \cdot m^2]$$

b,



Először kiszámoljuk a korong tömegét:

$$m = m_T + 2 \cdot m_K = 37.11 [kg]$$

Mivel a dob és a kötél ideálisak, a $\boldsymbol{K}_1$ és $\boldsymbol{K}_2$ kötélerők nagysága egyenlő:

$$|\boldsymbol{K}_1| = |\boldsymbol{K}_2| = K$$

Mivel a kötél ideális, ebből adódóan nyújthatatlan, valamint a kötél a tárcsán nem csúszik meg, a vödör a_1 pályamenti gyorsulása minden pillanatban egyenlő a tárcsa kerületi pontjainak gyorsulásával:

$$a_1 = \varepsilon \cdot R$$

A fenti egyenletben ε a tárcsa szöggyorsulása.

Ezt követően felírjuk a könnyített tárcsa és a vödör mozgásegyenleteit:

A tárcsa mozgásegyenletei:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{F}_S + \boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K \cdot cos\alpha \\ -K \cdot sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Sx} \\ F_{Sy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i M_{Si} = K \cdot R - F \cdot R = J_S \cdot \varepsilon$$

A vödör pályamenti mozgásegyenlete:

$$\sum_i F_i = m \cdot g - K = m_1 \cdot a_1$$

A fentiekből az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$-K \cdot cos\alpha + F_{Sx} = 0$$
$$-m \cdot g - K \cdot sin\alpha + F_{Sy} - F = 0$$
$$K \cdot R - F \cdot R = J_S \cdot \varepsilon$$
$$m_1 \cdot g - K = m_1 \cdot a_1 \;\rightarrow K = m_1 \cdot g - m_1 \cdot a_1$$
$$\underline{a_1 = \varepsilon \cdot R}$$
$$(m_1 \cdot g - m_1 \cdot a_1) \cdot R - F \cdot R = J_S \cdot \varepsilon$$
$$(m_1 \cdot g - m_1 \cdot \varepsilon \cdot R) \cdot R - F \cdot R = J_S \cdot \varepsilon$$
$$m_1 \cdot g \cdot R - m_1 \cdot \varepsilon \cdot R^2 - F \cdot R = J_S \cdot \varepsilon$$
$$(m_1 \cdot g - F) \cdot R = (J_S + m_1 \cdot R^2) \cdot \varepsilon$$
$$\varepsilon = R \cdot \frac{m_1 \cdot g - F}{J_S + m_1 \cdot R^2} = -0.256 \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

A kötélerő nagysága a IV. egyenletből:

$$K = m_1 \cdot g - m_1 \cdot a_1 = m_1 \cdot g - m_1 \cdot \varepsilon \cdot R = 98.74[N]$$

Az S pontban ébredő kényszererő (támaszerő) komponensei az I. és II. egyenletből:

$$F_{Sx} = K \cdot cos\alpha = 85.51[N]$$
$$F_{Sy} = K \cdot sin\alpha + m \cdot g + F = 513.4[N]$$

A kényszererő nagysága:

$$|\boldsymbol{F}_S| = F_S = \sqrt{{F_{Sx}}^2 + {F_{Sy}}^2} = 520.5[N]$$

c,

A végső szögsebességet meghatározhatjuk a szöggyorsulás ismeretében, vagy attól függetlenül a munkatétel alkalmazásával:

A szöggyorsulás ismeretében:

Vegyük figyelembe, hogy a korong szögelfordulása, szögsebessége és szöggyorsulása a korong negatív forgásértelméből adódóan negatív:

$$\varphi(t^*) = \overbrace{\varphi(0)}^{0} + \overbrace{\omega(0) \cdot t^*}^{0} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot t^{*2} \;\rightarrow\; t^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \varphi(t^*)}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (-20 \cdot \pi)}{-0.256}} = 22.16[s] \;\rightarrow$$

$$\omega(t^*) = \overbrace{\omega(0)}^{0} + \varepsilon \cdot t^* = -5.67 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Tehát a szögsebesség nagysága $5.67 \left[\frac{rad}{s}\right]$.

A munkatétel alkalmazásával:

A gravitációs és kényszererő munkavégzése zérus, mivel hatásvonaluk áthalad az S forgásponton. Tehát csak a kötélerő és az F erő munkavégzése szerepel a munkatételben:

$$\sum_i W_{F_i}^{0\to\varphi(t^*)} = W_F^{0\to\varphi(t^*)} + W_K^{0\to\varphi(t^*)} = \frac{1}{2} \cdot J_S \cdot \omega(t^*)^2 - \overbrace{\frac{1}{2} \cdot J_S \cdot \omega(0)^2}^{0}$$

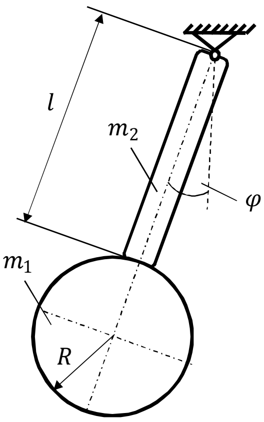
$$\int_0^{\varphi(t^*)} -F \cdot R d\varphi + \int_0^{\varphi(t^*)} K \cdot R d\varphi = -F \cdot R \int_0^{\varphi(t^*)} d\varphi + K \cdot R \int_0^{\varphi(t^*)} d\varphi = (K \cdot R - F \cdot R) \cdot \varphi(t^*) = \frac{1}{2} \cdot J_S \cdot \omega(t^*)^2$$

Tehát a szögsebesség nagysága:

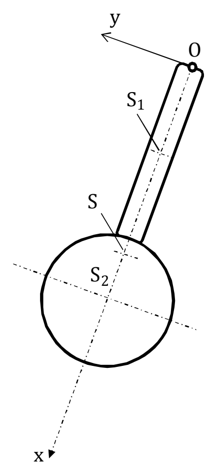
$$|\omega(t^*)| = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot (K - F) \cdot \varphi(t^*)}{J_S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.25 \cdot (98.74 - 100) \cdot (-20 \cdot \pi)}{1.232}} = 5.67 \left[\frac{rad}{s}\right]$$

4.4.2/M2 Az ábrán látható inga rúdjának valamint korongjának vastagsága elhanyagolható az inga egyéb méreteihez képest. Az O csap súrlódásától és a légellenállástól eltekintünk.
Adatok:

$$l = 0.5\,[m];\ m_1 = 0.3\,[kg];\ R = 0.1\,[m]; m_2 = 1\,[kg];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozza meg az inga súlypontjának távolságát a felfüggesztési ponttól!
b, Számítsa ki az inga tehetetlenségi nyomatékát a felfüggesztési ponton átmenő, az inga síkjára merőleges tengelyre!
c, Határozza meg az inga redukált hosszát, valamint lengésidejét kis szögkitérések ($\varphi \leq 5^\circ$) esetén!
d, Térítsük ki az ingát $\varphi^* = 30^\circ$ szöggel, majd engedjük el. Határozzuk meg az A pontban ébredő normálirányú kényszererő nagyságát, amikor $\varphi = 15^\circ$, valamint az inga alsó helyzetében ($\varphi = 0^\circ$)!
Megoldás:
a,
Az inga súlypontjának távolságát a felfüggesztési ponttól:



$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i \cdot x_{Si}}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1 \cdot x_{S1} + m_2 \cdot x_{S2}}{m_1 + m_2} = \frac{0.3 \cdot \frac{0.5}{2} + 1 \cdot (0.5 + 0.1)}{0.3 + 1} = 0.519[m]$$

b,

Az inga rúdjának és korongjának tehetetlenségi nyomatéka a saját S_1 és S_2súlypontjaikra:

$$J_{1S_1} = \tfrac{1}{12} \cdot m_1 \cdot l^2, \quad J_{2S_2} = \tfrac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R^2$$

A rúd és a korong tehetetlenségi nyomatéka Steiner tételével átszámítható az inga O felfüggesztési pontjára:

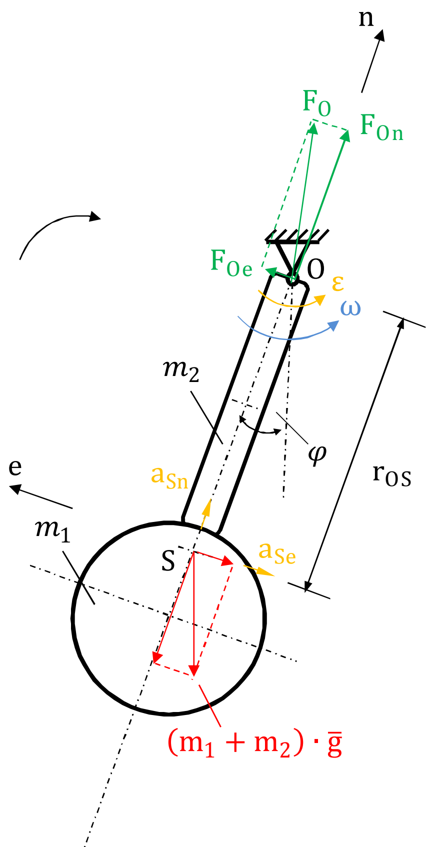
$$J_{1O} = J_{1S_1} + m_1 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} \cdot m_1 \cdot l^2 + m_1 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot m_1 \cdot l^2$$

$$J_{2O} = J_{2S_2} + m_2 \cdot (l+R)^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R^2 + m_2 \cdot (l+R)^2$$

Ezt követően az inga O pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$J_O = J_{1O} + J_{2O} = \frac{1}{3} \cdot m_1 \cdot l^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R^2 + m_2 \cdot (l+R)^2 = 0{,}390[kg \cdot m^2]$$

c,



Írjuk fel az inga mozgásegyenleteit, figyelembe véve, hogy annak tömege $m = m_1 + m_2$:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_O = m \cdot \boldsymbol{a}_S$$

$$\sum_i M_{Si} = m \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot r_{OS} = J_O \cdot \varepsilon$$

A fenti egyenletek az árán adott természetes koordinátarendszerben:

$$\begin{pmatrix} -m\cdot g\cdot sin\,\varphi \\ -m\cdot g\cdot cos\,\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Oe} \\ F_{On} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\cdot a_{Se} \\ m\cdot a_{Sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\cdot a_S \\ m\cdot \dfrac{{v_S}^2}{r_{OS}} \end{pmatrix}$$

$$-m\cdot g\cdot sin\,\varphi\cdot r_{OS} = J_O\cdot\varepsilon$$

Innen az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$-m\cdot g\cdot sin\,\varphi + F_{Oe} = m\cdot a_S = m\cdot r_{OS}\cdot\varepsilon = m\cdot r_{OS}\cdot\ddot{\varphi}$$

$$-m\cdot g\cdot cos\,\varphi + F_{On} = m\cdot\frac{{v_S}^2}{r_{OS}} = m\cdot\frac{(\omega\cdot r_{OS})^{\cdot 2}}{r_{OS}} = m\cdot\omega^2\cdot r_{OS} = m\cdot\dot{\varphi}^2\cdot r_{OS}$$

$$\underline{-m\cdot g\cdot sin\,\varphi\cdot r_{OS} = J_O\cdot\varepsilon = J_O\cdot\ddot{\varphi}}$$

Ha az inga szögkitérése kicsi ($\varphi_{max} \leq 5° = 0.087\,[rad]$), akkor igen jó közelítéssel teljesül a $sin\,\varphi = \varphi$ egyenlőség. Ekkor a III. egyenlet:

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{m\cdot g\cdot r_{OS}}{J_O}\cdot\varphi(t) = 0$$

Ez ugyanolyan szerkezetű differenciálegyenlet, mint amilyet a matematikai inga (4.2.2.2/M3 feladat) esetén kaptunk. Tehát a megoldás is egyező:

$$\varphi(t) = \varphi_{max}\cdot sin(w\cdot t + \delta_0)$$

Az egyenletben φ_{max} a maximális szögkitérés, w a körfrekvencia, δ_0 a kezdőfázis. Ha a $\varphi(t)$ függvényt, és annak második deriváltját visszahelyettesítjük a fenti egyenletbe, akkor megkapjuk a körfrekvenciára, abból pedig a lengésidőre vonatkozó összefüggést:

$$-w^2\cdot\varphi_{max}\cdot sin(w\cdot t + \delta_0) = -\frac{m\cdot g\cdot r_{OS}}{J_O}\cdot\varphi_{max}\cdot sin(w\cdot t + \delta_0)$$

$$w^2 = \frac{m\cdot g\cdot r_{OS}}{J_O}$$

$$w = \sqrt{\frac{m\cdot g\cdot r_{OS}}{J_O}},\quad T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{J_O}{m\cdot g\cdot r_{OS}}}$$

Tehát esetünkben a lengésidő:

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{J_O}{(m_1+m_2)\cdot g\cdot r_{OS}}} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{0.390}{1.3\cdot 9.81\cdot 0.519}} = 1.525[s]$$

Redukált hossz alatt annak a matematikai ingának a hosszát értjük, amelynek lengésideje – kis szögkitérések esetén – a fizikai ingáéval egyező. Azaz ilyen szempontból a fizikai inga helyettesíthető a matematikai ingával. A matematikai és fizikai inga lengésidejére vonatkozó összefüggéseket egymással egyenlővé téve, a redukált hossz meghatározható:

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{J_O}{m\cdot g\cdot r_{OS}}} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l_{red}}{g}}$$

$$\frac{J_O}{(m_1+m_2)\cdot g\cdot r_{OS}} = \frac{l_{red}}{g}$$

Azaz a fizikai inga redukált hossza:

$$l_{red} = \frac{J_O}{m\cdot r_{OS}}$$

Esetünkben:

$$l_{red} = \frac{J_O}{(m_1+m_2)\cdot r_{OS}} = \frac{0.390}{1.3\cdot 0.519} = 0.578[m]$$

d,

Itt csak az $\varphi = 15^{\circ}$ esettel foglalkozunk, az $\varphi = 0^{\circ}$ eset hasonlóan kiszámítható. Először számítsuk ki a munkatétel segítségével az inga szögsebességét a $15°$-os szöghöz tartozó pozícióban. Az O pontban ébredő kényszererő munkavégzése zérus, mivel hatásvonala minden pillanatban áthalad az O forgásponton. Tehát csak a gravitációs erő munkavégzése szerepel a munkatételben:

$$\sum_i W_{F_i}^{h(30°)\to h(15°)} = W_{m\cdot g}^{h(30°)\to h(15°)} = \frac{1}{2}\cdot J_O\cdot\left(\omega(15°)\right)^2 - \overbrace{\frac{1}{2}\cdot J_O\cdot\left(\omega(30°)\right)^2}^{0}$$

$$m\cdot g\cdot\left(h(30°)-h(15°)\right) = m\cdot g\cdot\left(r_{OS}\cdot(1-\cos 30°) - r_{OS}\cdot(1-\cos 15°)\right) = \frac{1}{2}\cdot J_O\cdot\left(\omega(15°)\right)^2$$

$$m\cdot g\cdot r_{OS}(\cos 15° - \cos 30°) = \frac{1}{2}\cdot J_O\cdot\left(\omega(15°)\right)^2$$

$$\omega(15°) = \sqrt{\frac{2\cdot m\cdot g\cdot r_{OS}\cdot(\cos 15° - \cos 30°)}{J_O}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1.3\cdot 9.81\cdot 0.519\cdot(\cos 15° - \cos 30°)}{0.390}} = 1.841\left[\frac{rad}{s}\right]$$

A normálirányú kényszererőt a c, pontban felírt II-es egyenletből határozzuk meg:

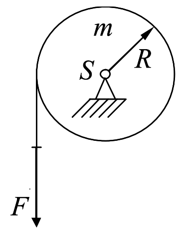
$$-m\cdot g\cdot\cos 15° + F_{On} = m\cdot\left(\omega(15°)\right)^2\cdot r_{OS}$$

$$F_{On} = m\cdot g\cdot\cos 15° + m\cdot\left(\omega(15°)\right)^2\cdot r_{OS} = 1.3\cdot 9.81\cdot\cos 15° + 1.3\cdot(1.841)^2\cdot 0.519 = 14.61[N]$$

4.4.2/3 Egy m tömegű R sugarú tömör dobra feltekert kötelet állandó $\boldsymbol{F}$ erővel húzunk az ábra szerint. A dob csapjának súrlódása elhanyagolható, a kötél ideális (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) és a dobon nem csúszik meg.

Adatok:

$$m = 100\ [kg];\ F = 2\ [kN];\ R = 0.5\ [m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozzuk meg, majd ábrázoljuk a dob $\varepsilon(t), \omega(t), \varphi(t)$ függvényeit, ha azt nyugvó helyzetből indul!

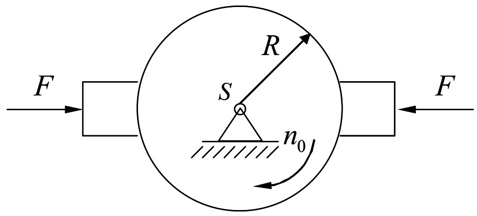
b, Mekkora lesz a dob szögsebessége tíz teljes fordulat megtétele után?

c, Mekkora az S pontban ébredő kényszererő (támaszerő) nagysága a mozgás során?

4.4.2/4 Az R sugarú m tömegű tömör tárcsát, amely a súlypontján átmenő vízszintes tengely körül n_0 fordulatszámmal forog, a kerületére szorított fékpofákkal, F nagyságú erőkkel lefékezünk. A csúszási súrlódási tényezőt a tárcsa és a fékpofák között μ-vel jelöltük.

Adatok:

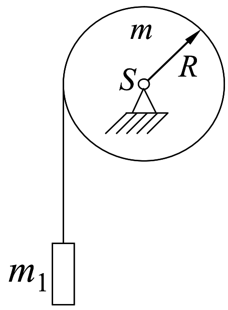
$$F = 100\ [N];\ m = 50\ [kg]; R = 800\ [mm];\ \mu = 0.1;\ n_0 = 800\left[\frac{fordulat}{perc}\right].$$



a, Mekkora a tárcsa szöggyorsulása a fékezés ideje alatt?
b, Mennyi idő alatt, és hány teljes fordulat megtétele után áll meg a tárcsa?

4.4.2/5 Egy m tömegű R sugarú tömör dobra feltekert kötél végére egy m_1 tömegű súlyt erősítünk. (A dobra és kötélre vonatkozó feltételeket lásd 4.2.2.1/M1 feladatban.)
Adatok:

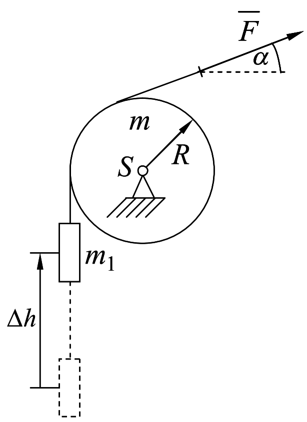
$$m = 200\ [kg];\ m_1 = 25\ [kg]; R = 0.6\ [m];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozzuk meg, majd ábrázoljuk a dob $\varepsilon(t), \omega(t), \varphi(t)$ függvényeit, miután azt nyugvó helyzetben magára hagyjuk!
b, Mekkora az S pontban ébredő kényszererő (támaszerő), valamint a kötélerő nagysága a mozgás során?
c, Mekkora lesz a dob szögsebessége tíz teljes fordulat megtétele után?

4.4.2/6 Egy m tömegű R sugarú dobra felcsévélt kötél egyik végére egy m_1 tömegű súlyt erősítünk, másik végét pedig állandó $\boldsymbol{F}$ erővel húzzuk az ábra szerint. (A dobra és kötélre vonatkozó további feltételeket lásd a 4.2.2.1/M1 feladatban.)
Adatok:

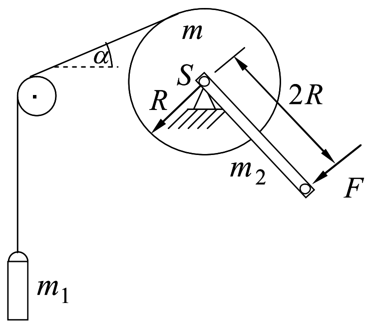
$$F = 2\ [kN];\ m = 100\ [kg];\ m_1 = 5\ [kg]; R = 0.5\ [m];\ \alpha = 30; \Delta h = 10\ [m];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozzuk meg az m_1 tömegű testre ható kötélerő nagyságát a felhúzás során!
b, Határozzuk meg a test sebességét a felső pozícióban, ha lentről nyugalomból indul!
c, Mennyi időt vett igénybe a felhúzás?
d, Mekkora az S pontban ébredő kényszererő (támaszerő) nagysága a felhúzás során?

4.4.2/7 A vázolt szerkezettel, egy vízzel telt m_1 tömegű vödröt húzunk fel egy kútból. Az R sugarú m tömegű dobra egy $2R$ hosszúságú elhanyagolható tömegű ideálisan vékony hajtókar van hegesztve. A hajtókar végét rá merőleges irányú, állandó F nagyságú erővel nyomjuk. (A bal oldali kisméretű dob tömege elhanyagolható. A dobokra és kötélre vonatkozó további feltételeket lásd 4.2.2.1/M1 feladatban.)
Adatok:

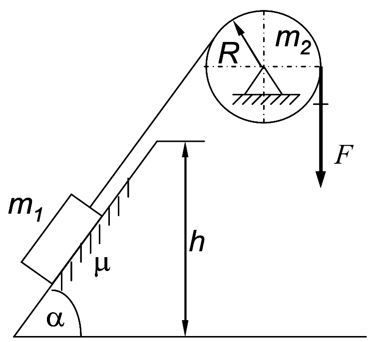
$$m = 200\,[kg];\ m_1 = 25\,[kg]; m_2 = 0\,[kg]; F = 100\,[N]; R = 0.6\,[m];\ \alpha = 30°; g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozzuk meg a dob szöggyorsulását és a vödörre ható kötélerő nagyságát a mozgás során!
b, Adjuk meg, majd ábrázoljuk a vödör $a(t), v(t), s(t)$ függvényeit, ha az nyugalomból indul.
c, Mekkora lesz a dob szögsebessége tíz teljes fordulat megtétele után?

4.4.2/8 Az ábrán látható elrendezésben az m_1 tömegű ládát felhúzzuk a h magasságú érdes lejtő aljáról annak tetejére. A felhúzáshoz alkalmazott kötél ideális (lásd 4.2.2.1/M1 feladat).
Adatok:

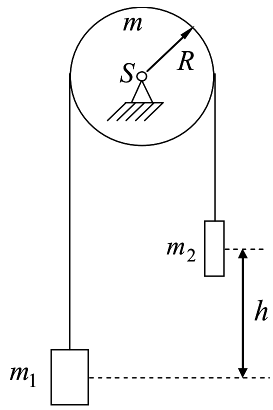
$$m_1 = 50\,[kg]; m_2 = 25\,[kg]; F = 700\,[N]; R = 0.3\,[m];\ \mu = 0.2;\ \alpha = 60°;\ h = 30\,[m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozzuk meg az m_1 tömegű testre ható kötélerő nagyságát a felhúzás során!
b, Határozzuk meg a test sebességét a lejtő tetején, ha lentről nyugalomból indul!
c, Mennyi időt vesz igénybe a felhúzás?

4.4.2/9 Egy m tömegű dobon átvetett kötél két végéhez egy m_1 és m_2 tömegű testet erősítünk az ábra szerint. (A dobra és kötélre vonatkozó további feltételeket lásd a 4.2.2.1/M1 feladatban.)
Adatok:

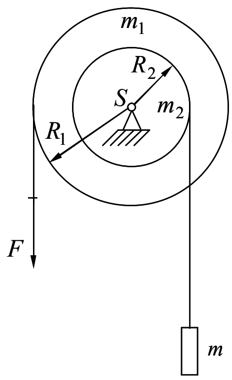
$$m = 200\ [kg];\ m_1 = 25\ [kg];\ m_2 = 10\ [kg];\ R = 0.6\ [m]; h = 2\ [m];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Azonos magasságból nyugalomból indítva mennyi idő múlva lesz az m_1 és m_2 tömegű testek egymástól mért függőleges távolsága h?
b, Mekkora az S pontban ébredő támaszerő nagysága a mozgás során? Mekkora lenne a támaszerő nagysága, ha a dob tengelye berozsdásodna, és nem tudna elfordulni?

4.4.2/10 Az ábra egy lépcsős dobot szemléltet. Az elhanyagolható tömegű R_1 sugarú dobra csévélt kötelet állandó $\boldsymbol{F}$ erővel húzunk, az R_2 sugarú dobra csévélten pedig egy m tömegű test függ. (A dobra és kötélre vonatkozó további feltételeket lásd 4.2.2.1/M1 feladatban.)
Adatok:

$$F = 500\ [N];\ m_1 = 0\ [kg];\ m_2 = 50\ [kg]; m = 10\ [kg];\ \ R_1 = 0.8\ [m];\ R_2 = 0.5\ [m];\ g = 9.81 \left[\frac{m}{s^2}\right].$$

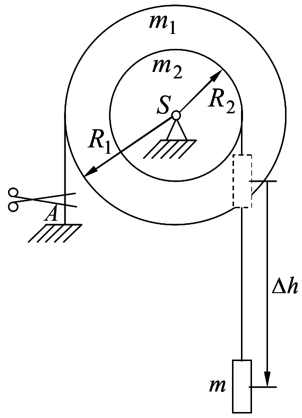


a, Mekkora az m tömegű testre ható kötélerő nagysága a felhúzás során?
b, Mennyi munkát végez az F erő és a kötélerő a dobon külön-külön, mialatt az 5-ször körbefordul?
c, Mekkora lesz a dob szögsebessége ötszöri körbefordulás után, ha nyugalomból indul?
d, Mennyi időt vesz igénybe az ötszöri körbefordulás?

4.4.2/11 Az ábra egy lépcsős dobot szemléltet, amelyet az R_1 sugarú dobra csévélt ideális kötéllel (lásd 4.2.2.1/M1 feladat) az A ponthoz rögzítettünk. Az R_2 sugarú dobra csévélt (szintén ideális) kötélen egy m tömegű teher függ.

Adatok:

$$m_1 = 20\,[kg];\ m_2 = 50\,[kg]; m = 10\,[kg];\ \ R_1 = 0.8\,[m];\ R_2 = 0.5\,[m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



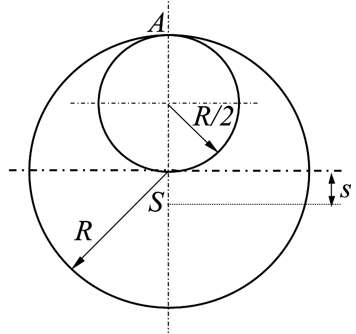
a, Mekkora lesz az m tömegű teher sebessége, ha az A ponthoz rögzített kötelet elvágjuk, és várunk 10 másodpercet?

b, Mekkora Δh távolságot fut be a teher a 10 másodperc alatt?

4.4.2/12 Az ábrán látható v vastagságú ρ sűrűségű vízszintes helyzetű tárcsát súlypontjában csapágyazva, nyugalmi helyzetéből indítva, állandó M nyomatékkal Δt ideig gyorsítjuk.

Adatok:

$$R = 0.2\,[m];\ v = 20\,[mm];\ \rho = 7.85 \cdot 10^3 \left[\frac{kg}{m^3}\right];\ M = 0.2\,[Nm];\ \Delta t = 3\,[s];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Számítsa ki a tárcsa súlypontjának helyzetét jellemző s távolságot!

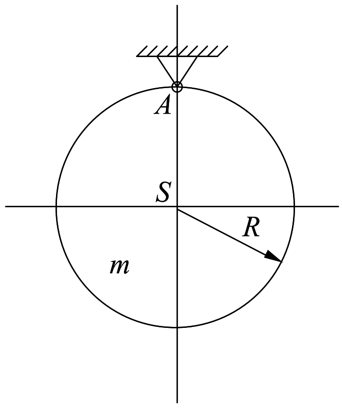
b, Határozza meg a súlyponton átmenő, rajz síkjára merőleges tengelyre a korong tehetetlenségi nyomatékát!

c, Számítsa ki a tárcsa szöggyorsulását, valamint Δt idő elteltével a szögsebességét!

e, Határozza meg az A pont vektoriális sebességét és gyorsulását az indulása után Δt idővel egy olyan koordináta rendszerben, amelynek origója az S pont, és amelyben az A pont koordinátái az indulás pillanatában $A_0 = (0; R + s)[m]$!

4.4.2/13 Az m tömegű korongot felfüggesztjük a kerületén átmenő (A pont), vízszintes tengelyre. Az A csap súrlódásától és a légellenállástól eltekintünk.
Adatok:

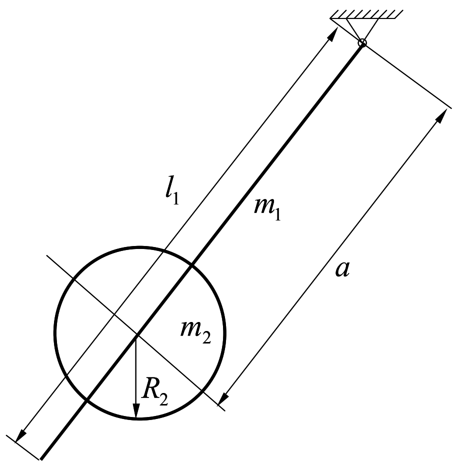
$$m = 5\,[kg]\,; R = 0.15\,[m];\;\; g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozzuk meg az így kapott fizikai inga redukált hosszát, valamint kis szögkitérésű ($\varphi \le 5^\circ$) lengésekre vonatkozó lengésidejét! (A megadott kis szögkitérések esetén alkalmazható a $\sin\varphi = \varphi$ közelítés.)
b, Mekkora lenne a korong súlypontjának sebessége a jelölt (alsó) helyzetben, ha a felső holtponti helyzetből, nyugalomból indulna?
c, Számítsa ki ekkor a jelölt (alsó) helyzetben a tengely által az ingára kifejtett kényszererő nagyságát!

4.4.2/14 Egy l_1 hosszúságú m_1 tömegű ideálisan vékony rúdból és egy R_2 sugarú m_2 tömegű korongból ingát készítünk az ábra szerint.
Adatok:

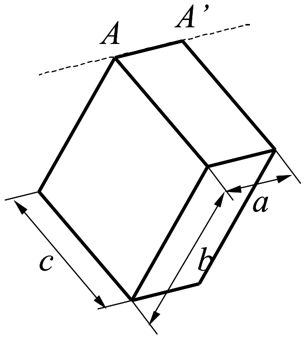
$$l_1 = 0.8\,[m];\; m_1 = 0.2\,[kg];\;\; R_2 = 0.2\,[m]; m_2 = 0.8\,[kg]; T = 0.5[s];\; g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Hol helyezzük el a rúdon a korongot (a =?), hogy az inga lengésideje éppen a megadott T legyen?

4.4.2/15 Az $A - A'$ élen átmenő vízszintes tengely körül elfordíthatóan felfüggesztett homogén téglatest kis szögkitérésű ($\varphi \leq 5°$) lengéseket végez. A tengely súrlódásától és a légellenállástól eltekintünk.
Adatok:

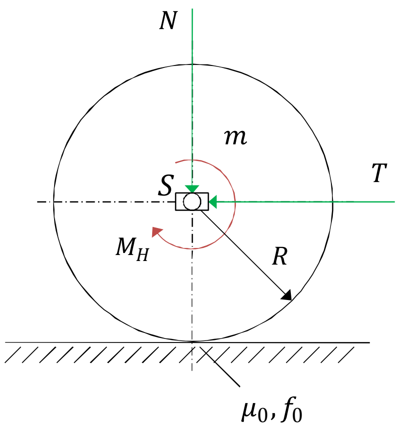
$$a = 15\,[cm];\ b = 36\,[cm];\ c = 27\,[cm];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Határozza meg az így kapott fizikai inga redukált hosszát!
b, Határozza meg az inga lengésidejét!

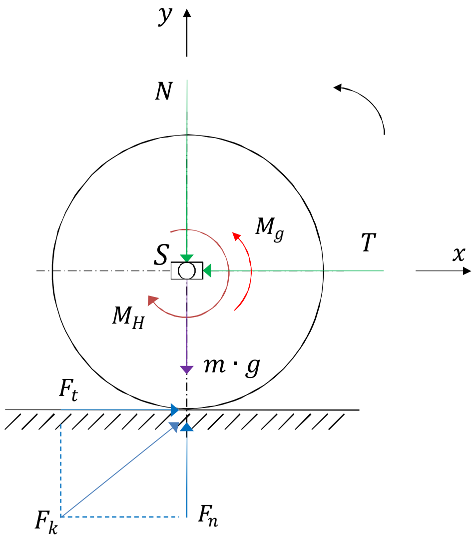
4.4.3 Gördülés

4.4.3/M1 Az ábra egy vízszintes országúton haladó gépkocsi kerekét szemlélteti. A vázolt pillanatban a sofőr gázt ad, így a motor a hajtáson keresztül M_H nyomatékot fejt ki a kerékre. A menetirányú és arra merőleges kerékterheléseket T és N jelöli. Az m tömegű kerék homogén tömegeloszlású, a tapadási súrlódási tényezőt μ_0 a gördülési ellenállás karját f_0 jelöli. A csapsúrlódástól eltekintünk.
Adatok: $M_H = 320[Nm]$, $T = 1000[N]$, $N = 6000[N]$, $\mu_0 = 0{,}9$, $f_0 = 0{,}01[m]$, $m = 8[kg]$, $R = 0{,}25[m]$, $g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right]$.



a, Tiszta gördülést feltételezve számítsuk ki a korong szöggyorsulását és súlypontjának gyorsulását a vázolt pillanatban!
b, Mekkora lehet maximálisan az M_H nyomaték nagysága a korong tiszta gördülése mellett?

Megoldás:
a,



Írjuk fel a korong mozgásegyenleteit feltételezve a korong tiszta gördülését:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = m \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N} = m \cdot \boldsymbol{a}_S$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_t \\ F_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -N \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} a_S \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i M_{Si} = F_t \cdot R - M_H + M_g = J_S \cdot \varepsilon$$

Továbbá a tiszta gördülés kinematikai feltétele:

$$\begin{pmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{PS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \cdot R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \quad a_S = -\varepsilon \cdot R$$

Innen az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$I. \qquad F_t - T = m \cdot a_S = -m \cdot \varepsilon \cdot R \;\rightarrow\; F_t = T - m \cdot \varepsilon \cdot R$$

$$II. \qquad -m \cdot g + F_n - N = 0 \;\rightarrow\; F_n = m \cdot g + N$$

$$III. \qquad F_t \cdot R - M_H + M_g = J_S \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \varepsilon \;\rightarrow\; F_t = \frac{M_H - M_g + \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \varepsilon}{R}$$

$$IV. \qquad a_S = -\varepsilon \cdot R$$

A gördülési ellenállási nyomaték az alábbi összefüggéssel számítható:

$$V. \qquad M_g = f_0 \cdot F_n = f_0 \cdot (m \cdot g + N) = 60.78[N]$$

Az I és III egyenletekből meghatározhatjuk az ε szöggyorsulást:

$$T - m \cdot \varepsilon \cdot R = \frac{M_H - M_g + \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \varepsilon}{R}$$

$$T \cdot R - m \cdot \varepsilon \cdot R^2 = M_H - M_g + \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \varepsilon$$

$$T \cdot R - M_H + M_g = \frac{3}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot \left(T \cdot R - M_H + M_g\right)}{3 \cdot m \cdot R^2} = \frac{2 \cdot \left(T \cdot R - M_H + M_g\right)}{3 \cdot m \cdot R^2} = -12.29 \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Ezt követően a kerék középpontjának gyorsulása:

$$a_S = -\varepsilon \cdot R = 3{,}072 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

b,

Tiszta gördülést feltételezve adjuk meg az F_t tapadási komponenst az M_H nyomaték függvényében, felhasználva a szöggyorsulásra kapott összefüggést:

$$F_t = T - m \cdot \varepsilon \cdot R = T - m \cdot \frac{2 \cdot (T \cdot R - M_H + M_g)}{3 \cdot m \cdot R^2} \cdot R$$

Továbbá a második egyenletből:

$$F_n = m \cdot g + N$$

A gördülés akkor és csakis akkor tiszta (azaz csúszásmentes), ha:

$$|F_t| \le \mu_0 \cdot F_n$$

$$-\mu_0 \cdot F_n \le F_t \le \mu_0 \cdot F_n$$

Behelyettesítve az $\mathrm{F_t}$-re és $\mathrm{F_n}$-re kapott összefüggéseket:

$$-\mu_0 \cdot (m \cdot g + N) \le T - m \cdot \frac{2 \cdot (T \cdot R - M_H + M_g)}{3 \cdot m \cdot R^2} \cdot R \le \mu_0 \cdot (m \cdot g + N)$$

$$-3 \cdot \mu_0 \cdot (m \cdot g + N) \cdot m \cdot R^2 \le T - m \cdot 2 \cdot (T \cdot R - M_H + M_g) \cdot R \le 3 \cdot \mu_0 \cdot (m \cdot g + N) \cdot m \cdot R^2$$

$$-3 \cdot \mu_0 \cdot (m \cdot g + N) \cdot R \le \frac{T}{2 \cdot m \cdot R} - (T \cdot R - M_H + M_g) \le 3 \cdot \mu_0 \cdot (m \cdot g + N) \cdot R$$

Behelyettesítve az adatokat:

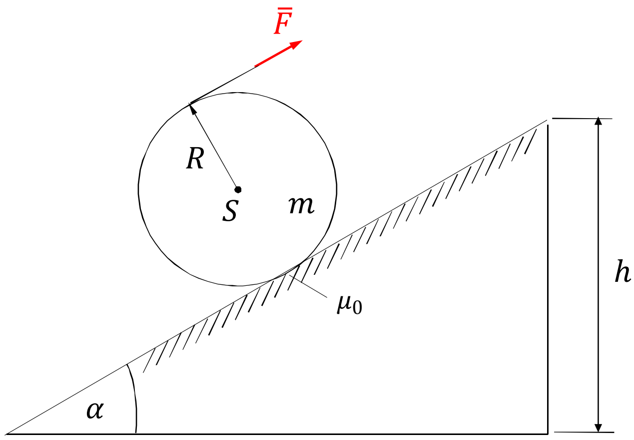
$$-4102.97 \le M_H - 60.78 \le 4102.97$$

Innen:

$$-4042.19[Nm] \le M_H \le 4163.75[Nm]$$

Tehet az $\mathrm{M_H}$ nyomaték nagysága maximálisan $4163.75[Nm]$ lehet a korong tiszta gördülése mellett.

4.4.3/M2 Az ábrán látható α hajlásszögű h magasságú érdes lejtőre helyezett mg súlyú R sugarú korongra lejtőirányú $\boldsymbol{F}$ erővel hatunk az ábra szerint. A lejtő és a korong közötti tapadási súrlódási tényezőt μ_0 jelöli, a gördülési ellenállástól eltekintünk.



a, Milyen határok közt változhat az $\boldsymbol{F}$ erő nagysága a korong tiszta gördülése mellett?

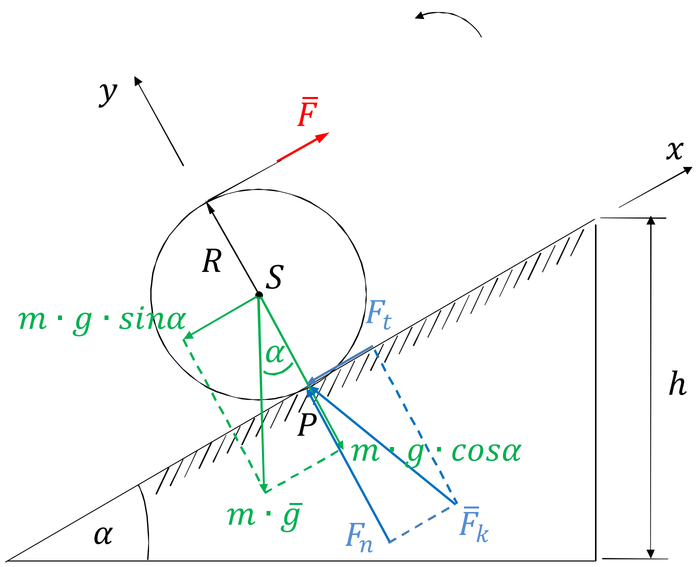
b, Mekkora a korong szöggyorsulása és súlypontjának gyorsulása, ha $F = 1300[N]$?

c, Mennyi idő alatt ér fel a korong a b, esetben a lejtő aljáról annak tetejére, ha nyugalomból indul?

Adatok:

$$m \cdot g = 5000\ [N];\ R = 0.2\ [m]; \alpha = 30°; h = 10\ [m];\ \mu_0 = 0.3.$$

Megoldás:



a,

Írjuk fel a korong mozgásegyenleteit feltételezve a korong tiszta gördülését:

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F} + m \cdot \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_k = m \cdot \boldsymbol{a}_S$$

$$\binom{F}{0} + \binom{-m \cdot g \cdot \sin\alpha}{-m \cdot g \cdot \cos\alpha} + \binom{-F_t}{F_n} = m \cdot \binom{a_S}{0}$$

$$\sum_i M_{Si} = -F \cdot R - F_t \cdot R \ = J_S \cdot \varepsilon$$

Továbbá a tiszta gördülés kinematikai feltétele:

$$\begin{pmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{PS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \cdot R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ a_S = -\varepsilon \cdot R$$

Innen az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$I. \qquad F - m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_t = m \cdot a_S = -m \cdot \varepsilon \cdot R \ \rightarrow \ \varepsilon = \frac{F - m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_t}{-m \cdot R}$$

$$II. \qquad -m \cdot g \cdot \cos\alpha + F_n = 0 \ \rightarrow \ F_n = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$III. \qquad -F \cdot R - F_t \cdot R \ = J_S \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \varepsilon \ \rightarrow \ \varepsilon = \frac{2 \cdot (-F \cdot R - F_t \cdot R\,)}{m \cdot R^2}$$

$$IV. \qquad a_S = -\varepsilon \cdot R$$

(A IV egyenlet a tiszta gördülés kinematikai feltétele.)

Az I és III egyenletekből határozzuk meg az F_t tapadási komponenst:

$$\frac{F - m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_t}{-m \cdot R} = \frac{2 \cdot (-F \cdot R - F_t \cdot R\,)}{m \cdot R^2}$$

$$-R \cdot (F - m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_t) = 2 \cdot (-F \cdot R - F_t \cdot R\,)$$

$$-F \cdot R + m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot R + F_t \cdot R = -2 \cdot F \cdot R - 2 \cdot F_t \cdot R$$

$$3 \cdot F_t \cdot R = -F \cdot R - m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot R$$

$$F_t = \frac{-F \cdot R - m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot R}{3 \cdot R} = -\frac{F}{3} - \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha}{3}$$

A gördülés akkor és csakis akkor tiszta (azaz csúszásmentes), ha:

$$|F_t| \le \mu_0 \cdot F_n$$
$$-\mu_0 \cdot F_n \le F_t \le \mu_0 \cdot F_n$$
$$-\mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \le -\frac{F}{3} - \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha}{3} \le \mu_0 \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$
$$3 \cdot m \cdot g \cdot \left(-\mu_0 \cdot \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{3}\right) \le -F \le 3 \cdot m \cdot g \cdot \left(\mu_0 \cdot \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{3}\right)$$
$$3 \cdot m \cdot g \cdot \left(\mu_0 \cdot \cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{3}\right) \ge F \ge 3 \cdot m \cdot g \cdot \left(-\mu_0 \cdot \cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{3}\right)$$
$$-6397[N] \le F \le 1379[N]$$

b,

A feladat a, részében kapott eredményből adóan, ha $F = 1300[N]$, akkor a korong tisztán gördül. Ekkor a tapadási komponens értéke:

$$F_t = -\frac{F}{3} - \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha}{3} = -1266.6[N]$$

Ezt követően a szöggyorsulás:

$$\varepsilon = \frac{F - m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_t}{-m \cdot R} = -0.653 \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

A súlypont gyorsulása:

$$a_S = -\varepsilon \cdot R = 0.131 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

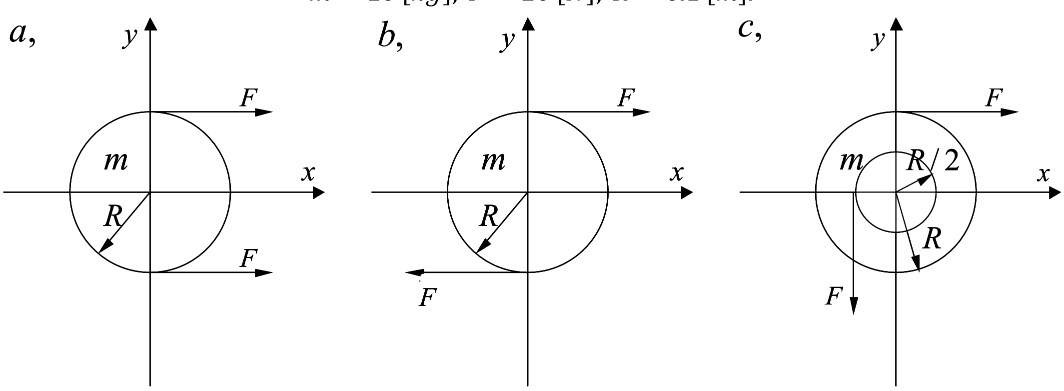
c,

$$20[m] = \frac{h}{\sin\alpha} = \Delta s = \overbrace{v_S(0)}^{0} \cdot \Delta t + \frac{a_S}{2} \cdot \Delta t^2 \rightarrow \Delta t = 17.5[s]$$

4.4.3/3 Vízszintes sima síkra m tömegű R sugarú korongokat fektetünk. A korongok, amelyekre a vázolt erők hatnak, a $t = 0$ időpillanatban nyugalomból indulnak.

Adatok:

$$m = 10\ [kg];\ F = 20\ [N];\ R = 0.1\ [m].$$



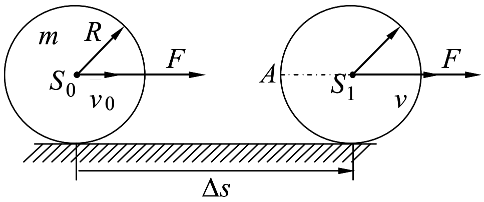
a, Adjuk meg a korongok szöggyorsulását, valamint súlypontjuk gyorsulását a megadott koordinátarendszerben!

b, Adjuk meg a korongok szögsebességét, valamint súlypontjuk sebességét a $t_1 = 3[s]$ időpillanatban!

c, Adjuk meg a korongok súlypontjuk helyvektorát a fenti időpillanatban, továbbá határozzuk meg a korong szögelfordulását a $[0{,}3]$ $[s]$ időtartamon.

4.4.3/4 Egy m tömegű R sugarú tömör korongra állandó $\boldsymbol{F}$ erővel hatunk az ábra szerint. A korong $\boldsymbol{v}_0$ kezdősebességről indulva tisztán, ellenállásmentesen gördül.
Adatok:

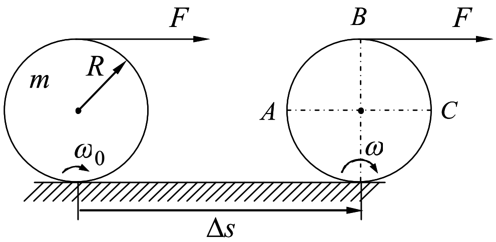
$$m = 100\ [kg];\ R = 0.5\ [m];\ F = 600\ [N];\ \mu_0 = 0.3;\ v_0 = 2\ \left[\frac{m}{s}\right];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora a korong szöggyorsulása és súlypontjának gyorsulása?
b, Az a, pont eredményének ismeretében számítsuk ki a korong szögsebességét $10\ [s]$ elteltével? Mekkora a korong szögelfordulása és a súlypontja által megtett út (Δs) ez idő alatt?
c, A korongra felírt perdület- és munkatétel segítségével ellenőrizzük a b, pontban kapott eredményeket!
d, Mekkora a talaj által a korongra kifejtett kényszererő nagysága a gyorsítás ideje alatt?
f, Adja meg az $\boldsymbol{F}$ erő maximális értékét, amelynél a korong még tisztán gördül!

4.4.3/5 Egy m tömegű R sugarú tömör korongra állandó $\boldsymbol{F}$ erővel hatunk az ábra szerint. A korong ω_0 kezdeti szögsebességről indulva tisztán, ellenállásmentesen gördül.
Adatok:

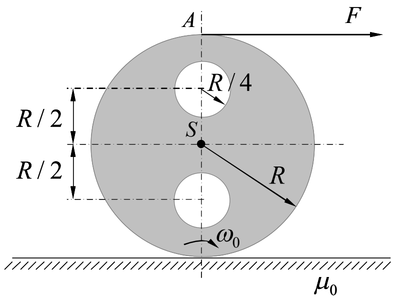
$$m = 100\ [kg];\ R = 0.5\ [m];\ F = 600\ [N];\ \mu_0 = 0.3;\ \omega_0 = 5\ \left[\frac{rad}{s}\right];\ \Delta s = 20\ [m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora lesz a korong szögsebessége az ábrán jelzett Δs hosszúságú út befutása után? Mennyi ideig tart a befutás?
b, Mekkora lesz az A, B és C pontok sebessége a mozgás végén?
c, Adja meg az F erő maximális értékét, amelynél a korong még tisztán gördül!

4.4.3/6 Az R sugarú v vastagságú ρ sűrűségű két furattal gyengített korongot a vízszintes, érdes síkon állandó $\boldsymbol{F}$ erővel gyorsítjuk az ábra szerint. A korong tisztán, ellenállásmentesen gördül. Az ábrán vázolt $t = 0$ időpillanatban a korong szögsebessége ω_0 nagyságú.
Adatok:

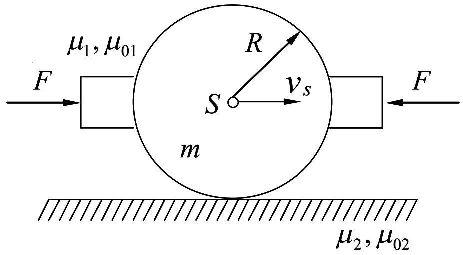
$$R = 0.25\ [m];\ v = 100\ [mm];\ \rho = 7.2\ \left[\frac{g}{cm^3}\right];\ F = 300\ [N];\ \mu_0 = 0.3;\ \omega_0 = 2\left[\frac{rad}{s}\right];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora a korong tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő, síkjára merőleges tengelyre vonatkozóan?
b, Mekkora a korong szöggyorsulása és súlypontjának gyorsulása?
c, Mekkora lesz a korong szögsebessége a $t = 5\,[s]$ időpillanatban? Mekkora ekkor a korong tetőpontjának gyorsulása, valamint a gyorsulás függőlegessel bezárt szöge?
d, Mekkora lehet az F erő nagysága maximálisan, hogy a korong még tisztán gördüljön?

4.4.3/7 Egy vízszintes, érdes síkon gördülő korongot az egymással szemközt elhelyezkedő fékpofákkal kívánunk lefékezni.
Adatok:

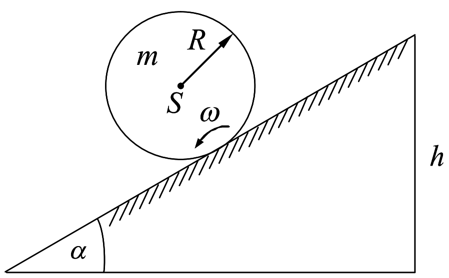
$$m = 20\,[kg]; R = 300\,[mm]; \mu_{01} = 0.15;\ \mu_{02} = 0.1;\ \mu_1 = 0.12;\ \mu_2 = 0.08;\ v_s = 1.5\left[\frac{m}{s}\right].$$



a, Számítsa ki az $\boldsymbol{F}$ erő maximális nagyságát, amelynél a korong a síkon még tisztán gördül, azaz nem csúszik meg!
b, Számítsa ki a fékutat az a, pontban kiszámolt maximális erő alkalmazása esetén!
c, Számítsa ki a fékutat, ha a fékpofák blokkolják a korongot, így az csúszik a síkon!

4.4.3/8 Egy m tömegű R sugarú tömör korong az ábrán látható érdes lejtőn tisztán, ellenállásmentesen gördül lefelé.
Adatok:

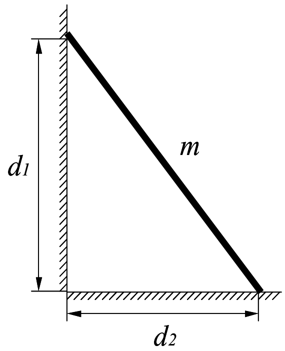
$$m = 100\,[kg];\ R = 0.5[m];\ \alpha = 30°;\ \mu_0 = 0.3;\ h = 10[m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora a henger szöggyorsulása és súlypontjának gyorsulása?
b, Mekkora lesz a lejtő alján a korong súlypontjának sebessége, ha fentről nyugalomból indul? Mennyi ideig tart a mozgás?
c, Mekkora lehet az α szög maximális értéke, hogy a henger még tisztán gördüljön?
d, Hogyan mozogna, és mennyi idő alatt érne le a korong a lejtő aljára, ha a lejtő tökéletesen sima volna? ($\mu_0 = 0,\ \mu = 0$)

4.4.3/9 Az ismert m tömegű rúd a függőleges és vízszintes síkon egyaránt ellenállás nélkül elcsúszhat ($\mu_1, \mu_2 = 0$). A rudat a vázolt helyzetben magára hagyjuk.
Adatok:

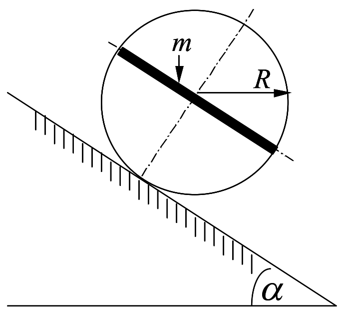
$$m = 20\ [kg];\ d_1 = 3[m];\ \ d_2 = 2[m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Mekkora a rúd szögsebessége, és fallal érintkező végpontjának sebessége a földet érés pillanatában (vízszintes helyzet)?

4.4.3/10 Az ábrán látható súlytalannak tekinthető R sugarú karika két átellenes pontja közé m tömegű rudat erősítettünk. A karikát az α hajlásszögű lejtőre helyezve magára hagyjuk.
Adatok:

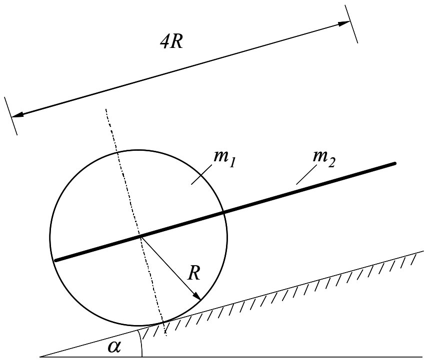
$$m = 2\ [kg];\ R = 0.1[m];\ \alpha = 30^{\circ};\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Feltételezve, hogy a karika nem csúszik meg, határozza meg annak szöggyorsulását!
b, Határozza meg, minimálisan mekkorának kell lennie a karika és a lejtő közötti tapadási súrlódási tényezőnek, hogy a karika tisztán gördüljön!

4.4.3/11 Az R sugarú korongra $4R$ hosszúságú rudat erősítünk, és α hajlásszögű érdes lejtőre helyezzük az ábra szerint.
Adatok:

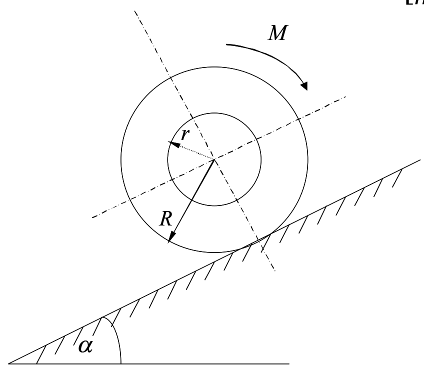
$$m_1 = 2\,[kg];\ m_2 = 0.5\,[kg];\ R = 0.1[m];\ \alpha = 30°;\ \mu_0 = 0.45;\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



Tisztán kezd-e gördülni a karika a lejtőn? Ha igen, akkor mekkora a kezdeti szöggyorsulása? Lefelé vagy felfelé indul-e el a lejtőn? (A gördülési ellenállás elhanyagolható.)

4.4.3/12 Az érdes lejtőre helyezett v vastagságú ρ sűrűségű középen átfúrt korongra a maximális M nyomatékot fejtjük ki, amely mellett az még tisztán gördül. A gördülési ellenállás értéke elhanyagolható.
Adatok:

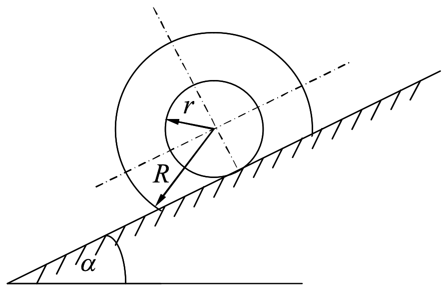
$$R = 300[mm];\ r = 100[mm];\ v = 5\,[mm];\ \rho = 7.85 \cdot 10^{\,3}\left[\frac{kg}{m^3}\right];\ \alpha = 15°;\ \mu_0 = 0.35.$$



a, Számítsa ki a fenti maximális M nyomaték értékét!
b, Határozza meg a korong szöggyorsulását és súlypontjának gyorsulását a fenti maximális nyomaték mellett!

4.4.3/13 Az ábrán vázolt homogén forgástest egy r sugarú l hosszúságú csapból és a csapra felhúzott R külső sugarú v vastagságú gyűrűből ál. A forgástestet az α hajlásszögű lejtőre helyezzük az alábbi ábra szerint, majd magára hagyjuk. A gördülési ellenállás értéke elhanyagolható.
Adatok:

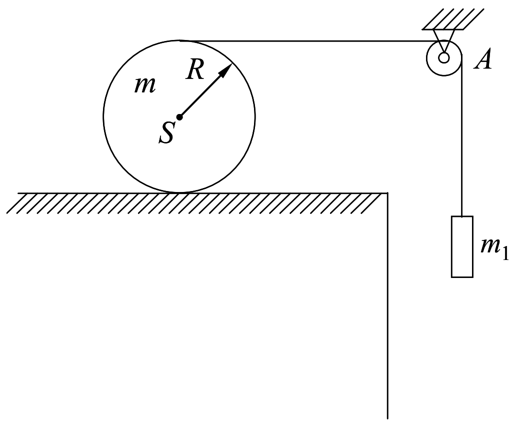
$$R = 60[mm];\ r = 30[mm];\ v = 20\,[mm];\ l = 80\,[mm];\ \rho = 7.85 \cdot 10^{\,3}\left[\frac{kg}{m^3}\right];\ \alpha = 15°.$$



a, Feltételezve, hogy a csap nem csúszik meg a lejtőn, határozza a forgástest szöggyorsulást!
b, Határozza meg, hogy minimálisan mekkorának kell lennie a csap és a lejtő közötti súrlódási tényező értékének, hogy a csap tiszta gördülő mozgást végezzen!

4.4.3/14 Egy m tömegű R sugarú korongra ideális kötelet csévélünk és átvetjük azt az A tengelyű ideális dobon. Ezt követően a kötél végére egy m_1 tömegű súlyt függesztünk, majd a rendszert magára hagyjuk. A korong a vízszintes, érdes talajon tisztán, ellenállásmentesen gördül, a dobra és kötélre vonatkozó további feltételeket lásd a 4.2.2.1/M1 feladatban.
Adatok:

$$R = 0.5[m];\ m = 100[kg];\ m_1 = 25\ [kg];\ \mu_0 = 0.4;\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$

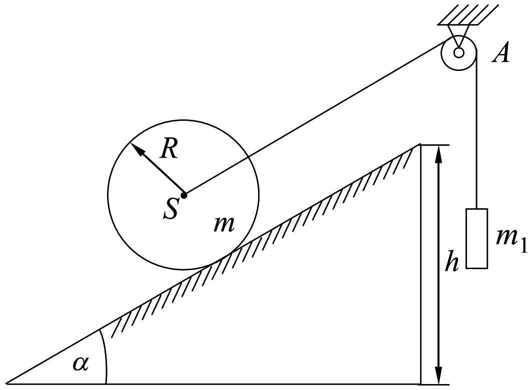


a, Mekkora a korong szöggyorsulása és a kötélerő nagysága a mozgás során?
b, Adja meg, majd ábrázolja a korong $\varepsilon(t), \omega(t)$ és $\varphi(t)$ függvényeit!
c, A fenti függvényekből számítsa ki, hogy mekkora lesz a korong szögsebessége és szögelfordulása $5\ [s]$ elteltével! Mennyi utat tesz meg az m_1 tömegű test ez idő alatt?
d, Az impulzus és munkatétel felhasználásával ellenőrizze a c, pontban kapott eredményeket!
e, Mekkora lehet az m_1 tömeg maximálisan, hogy a koron még tisztán gördüljön?

4.4.3/15 Egy m tömegű R sugarú korong középpontján átmenő tengelyhez ideális kötelet erősítünk, majd átvetjük azt az ábrán látható A tengelyű ideális dobon. Ezt követően a kötél végére egy m_1 tömegű terhet függesztünk, majd a rendszert magára hagyjuk. A

korong az α hajlásszögű érdes lejtőn tisztán, ellenállásmentesen gördül. Az A tengelyű dobra és kötélre vonatkozó feltételeket lásd a 4.2.2.1/M1 feladatban.
Adatok:

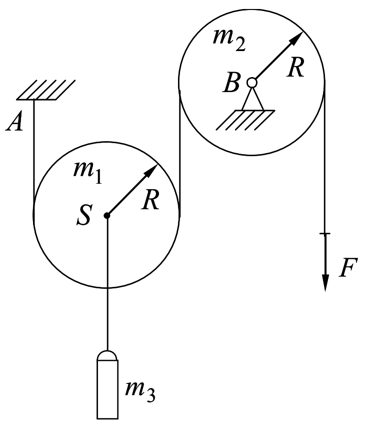
$$m = 40[kg];\ m_1 = 16\ [kg];\ R = 0.5[m];\ \mu_0 = 0.4;\ \alpha = 20°; h = 25[m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Merre indul el a korong a lejtőn? Tiszta gördülést feltételezve számítsuk ki a korong szöggyorsulását és súlypontjának gyorsulását!
b, Mekkora lesz az m_1 tömegű teher sebessége az ábrán jelzett h magasságban, ha lentről nyugalomból indul? Mennyi ideig tart mozgása?
c, Milyen határok között változhat az m_1 tömeg, hogy a koron tisztán gördüljön a lejtőn?

4.4.3/16 Az ábrán látható – egy mozgó, és egy álló dobból álló – egyszerű gép az m_3 tömegű vödör felhúzására szolgál. A kötél ideális, a csigákon nem csúszik meg, az m_2 tömegű csiga ellenállásmentesen forog (a feltételeket lásd részletesen a 4.2.2.1/M1 feladatban).
Adatok:

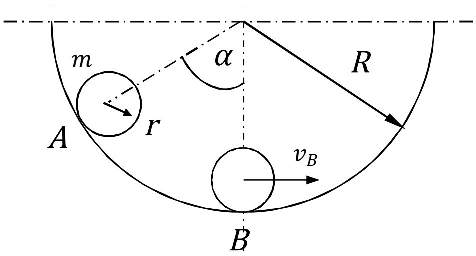
$$m_1 = 5\ [kg];\ m_2 = 5\ [kg];\ \ m_3 = 15\ [kg];\ R = 0.1[m];\ g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora erő szükséges a vödör egyensúlyban tartásához? Ekkora erő alkalmazásával mennyi munkavégzés árán húzható fel a vödör $10m$ mélységből?
b, Mekkora lesz a vödör gyorsulása, ha $F = 120N$?
c, Mekkora a baloldali, és középső kötélágban ébredő kötélerő nagysága a b, esetben?
d, Miért célszerű a fenti, egyszerű gépet használni egy építkezésen?

4.4.3/17 Az ábrán látható R sugarú kényszerpálya α szöggel jellemzett A pontjából, nyugalomból indulva, legördül egy r sugarú m tömegű tömör korong. A gördülés tiszta és ellenállásmentes.
Adatok:

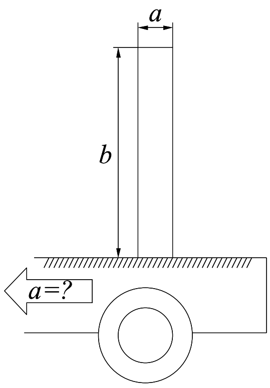
$$R = 6[m];\ r = 1[m]; m = 100[kg];\ \alpha = 60°; g = 9.81\left[\frac{m}{s^2}\right].$$



a, Mekkora a korong szögsebessége és középpontjának sebessége a pálya alsó B pontjában?
b, Mekkora a pálya által a korongra kifejtett kényszererő nagysága a B pontban?

4.4.3/18 Az ábrán látható láda egy teherautó rakfelületén áll.
Adatok:

$$\mathrm{a} = 0.3[\mathrm{m}];\ \mathrm{b} = 1.8[\mathrm{m}]; \mathrm{g} = 9.81\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$



Legfeljebb mekkora gyorsulással indulhat a teherautó, hogy a láda a rakfelülethez képest ne mozduljon meg, ha a tapadási együttható értéke:
a, $\mu_0 = 0.15$
b, $\mu_0 = 0.2$?

5. ALKALMAZOTT JELÖLÉSEK JEGYZÉKE

Általános jelölések

x	skalármennyiség
$\boldsymbol{x}$	vektormennyiség
$\lvert x \rvert$	skalármennyiség nagysága (abszolút értéke)
$\lvert \boldsymbol{x} \rvert$	vektor nagysága (hossza)
$\dot{x}$	skalármennyiség idő szerinti deriváltja
$\ddot{x}$	skalármennyiség idő szerinti kétszeres deriváltja
$\dot{\boldsymbol{x}}$	vektormennyiség idő szerinti deriváltja
$\ddot{\boldsymbol{x}}$	vektormennyiség idő szerinti kétszeres deriváltja
$x\ [y]$	az x mennyiség mértékegysége y
Δx	az x mennyiség megváltozása

További jelölések

$a\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$	pályamenti gyorsulás
$\boldsymbol{a}\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$	gyorsulásvektor
$A\ [m]$	amplitúdó (maximális kitérés)
$a_e\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$	érintő irányú gyorsulás
$a_n\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$	normális irányú gyorsulás
$c\ \left[\frac{N}{m}\right]$	rugómerevség (rugóállandó)
$d\ [m]$	távolság (általában), átmérő
$\boldsymbol{e}$	érintő irányú egységvektor
$f\ \left[\frac{1}{s}\right]$	rezgésszám (frekvencia)
$f_0\ [m]$	gördülési ellenállási kar
$F_n\ [N]$	kényszererő nyomó komponense
$F_s\ [N]$	kényszererő súrlódási komponense
$F_t\ [N]$	kényszererő tapadási komponense
$\boldsymbol{F}\ [N]$	erővektor
$\boldsymbol{F}_k\ [N]$	kényszererő
$\boldsymbol{g}\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$	gravitációs gyorsulás
G	gyorsuláspólus
$h\ [m]$	magasság (általában)
$J_O\ [kg \cdot m^2]$	tehetetlenségi nyomaték az O pontra
$\boldsymbol{K}\ [N]$	kötélerő
$l[m]$	hosszúság (általában)
$l_{red}[m]$	fizikai inga redukált hossza
$m\ [kg]$	tömeg

M_g $[N \cdot m]$ gördülési ellenállási nyomaték

M_O $[N \cdot m]$ skaláris forgatónyomaték az O pontra

$\boldsymbol{M}_O$ $[N \cdot m]$ forgatónyomaték vektor az O pontra

n $\left[\frac{1}{s}\right]$ fordulatszám

$\boldsymbol{n}$ normális irányú egységvektor

P sebességpólus

r $[m]$ görbületi sugár

$\boldsymbol{r}$ $[m]$ helyvektor

R $[m]$ sugár

s $[m]$ pályakoordináta (ívkoordináta)

t $[s]$ idő

T $[s]$ periódusidő

v $\left[\frac{m}{s}\right], [m]$ pályamenti sebesség, vastagság

$\boldsymbol{v}$ $\left[\frac{m}{s}\right]$ sebességvektor

w $\left[\frac{rad}{s}\right]$ körfrekvencia

W $[J]$ mechanikai munka

γ $\left[\frac{N \cdot m^2}{kg^2}\right]$ gravitációs állandó

δ_0 $[rad]$ kezdőfázis

ε $\left[\frac{rad}{s^2}\right]$ szöggyorsulás

$\boldsymbol{\varepsilon}$ $\left[\frac{rad}{s^2}\right]$ szöggyorsulás vektor

η $\left[\frac{kg}{m \cdot s}\right]$ dinamikus viszkozitás

μ csúszási súrlódási tényező

μ_0 tapadási súrlódási tényező

ρ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ tömegsűrűség

φ $[rad]$ szögkoordináta (szögelfordulás)

φ_0 $[rad]$ kezdőfázis

ω $\left[\frac{rad}{s}\right]$ szögsebesség, körfrekvencia

$\boldsymbol{\omega}$ $\left[\frac{rad}{s}\right]$ szögsebesség vektor

6. FELHASZNÁLT SZAKIRODALOM

[1] Szíki G.Á. - Fekete Szűcs D.: *Kinematikai és kinetikai példatár.* Debreceni Egyetem Műszaki Kar, Kiadó: Ceze Kft. 2009. -ISBN 978 615 5088 06 3.
[2] Kassai L.: *Statika*, Nemzeti tankönyvkiadó, 1994.
[3] Kassai L.: *Mechanika I (segédlet)*, 1995.
[4] Kassai L. – Somorjai T.: *Mechanika I*, 1989.
[5] Somorjai T.: *Statika példatár*, Debrecen Egyetem MFK, 2003.
[6] Béda Gy. – Bezák A.: *Kinematika dinamika*, Műegyetemi kiadó, 1999.
[7] Huszár I.: *Mechanika I Statika*, Gödöllő Agrártudományi Egyetem, 1972.
[8] Kassai L.: *Példák mechanikából*, Tankönyvkiadó, 1976.
[9] M. Csizmadia B. – Nándori E.: *Statika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1996.
[10] M. Csizmadia B. – Nándori E.: *Szilárdságtan*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 1999.
[11] Égert J. – Jezsó K.: Mechanika, *Szilárdságtan*, Széchenyi István Egyetem, 2006.