

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Rigidity properties and transformations of Finsler manifolds

Kertész Dávid Csaba

Témavezető: Dr. Szilasi József



Debreceni Egyetem
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2017.

1. Előzmények és célok

A Finsler-sokaságok a Riemann-sokaságok általánosításai. Egy Riemann-sokaság minden érintőterén adva van egy pozitív definit skaláris szorzat. Ha a skaláris szorzatokat (esetleg aszimmetrikus) normákra cseréljük, Finsler-sokasághoz jutunk. A változás közvetlenül csak az érintőtereken észlelhető, természetes módon vetődik fel tehát a kérdés: az alapsokaságok geometriája mennyiben különbözik a Riemann és a Finsler esetben? Ez az alapvető kérdés volt a fő motivációja kutatómunkánknak, amelynek fontosabb eredményeit mutatja be ez a disszertáció. A problémát két irányból közelítettük meg.

1. Vizsgáltuk azokat a Finsler-sokaságokat, amelyek valamilyen értelemben ‘közel vannak’ a Riemann-sokaságokhoz. A Finsler- és a Riemann-geometriában egyaránt a geodetikusok azok legegyszerűbb objektumok, amelyek az alapsokaságon élnek. A geodetikusok leírhatók egy másodrendű differenciálegyenlet segítségével. Előremutatóbb megfogalmazásban: a geodetikusok mindkét geometriában egy másodrendű vektormező, a kanonikus spray, alapintegrálgörbéi. A Riemann-esetben a kanonikus spray szükségképpen affin. Egy (nem Riemann) Finsler-sokaság kanonikus sprayje is lehet affin, ekkor a Finsler-sokaságok egy speciális osztályához, a Berwald-sokaságok osztályához jutunk. Érdekes kérdés, hogy a kanonikus spray mely Finsler-sokaságok esetén lesz csupán projektíven affin. A feltételnek ez a gyengítése azt jelenti, hogy a geodetikusok egy affin spray geodetikusainak az átparaméterezései. A probléma metrikus struktúráktól függetlenül is megfogalmazható, mivel nincs szükség a geodetikusok kitüntetett (egységpályasebességű) paraméterezésére. Így a projektíven affin sprayk jellemzésének problémájához jutunk. J. Douglas felfedezett [15] egy később róla elnevezett projektíven invariáns tenzort, amelynek eltűnése garantálja a megfelelő affin sprayk lokális létezését. Többen is adtak globális konstrukciót az irányíthatóság feltételezése mellett [40, 46]. Első eredményünk az, hogy az irányíthatóság feltétele elhagyható.

Ezt követően Einstein-tulajdonságú Berwald-sokaságok létezésének kérdésével foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy a Berwald-sokaságok között csak nagyon speciális Einstein-tulajdonságúak léteznek: a klasszikus Einstein-sokaságok és olyan Berwald-sokaságok, amelyeknek a görbületi függvénye zérus.

Végül olyan ‘Riemann-sokaságokhoz közeli’ Finsler-sokaságokkal foglalko-

zunk, melyeknek érintőterei, mint (aszimmetrikus) normált terek, egymással lineárisan izometrikusak. Ez a tulajdonság nyilvánvalóan teljesül a Riemann-esetben. Új bizonyítást adunk Y. Ichijyō egy tételére [21], amely szerint ezek a Finsler-sokaságok – megfelelő simasági feltételek mellett – éppen az általánosított Berwald-sokaságok. (Megjegyezzük, hogy N. Bartelmeß and V. Matveev egy nem publikált eredménye szerint a simasági feltétel elhagyható.) Eredményünk egyben általánosítja is Y. Ichijyō tételét, mivel nem csak Finsler-függvényekre, hanem az érintősokaságon adott bármely C^1 -osztályú függvényre érvényes.

2. A másik irányú megközelítésben az affinitások és izometriák szemszögéből keressük a Riemann- és Finsler-geometria közötti kapcsolatokat. Egy transzformáció affin, ha bármely geodetikust (mint parametrizált görbét) geodetikusra visz át. Hasonló tartalmú fogalom a spray-automorfizmus fogalma: ez olyan transzformáció, amely a sprayt őrzi meg. Mivel a spray az érintősokaságon van értelmezve, itt fel kell tenni a simaságot. Valójában ez a lényeges fogalmi különbség az affinitások és a spray-automorfizmusok között, ugyanis egy sima affinitás szükségképpen spray-automorfizmus. F. Brickell megmutatta [8], hogy ha egy affinitás homeomorfizmus is, akkor automatikusan sima. Hasonló mondható az izometriákról. Egy transzformációt akkor nevezünk izometriának, ha megőrzi az alapsokaság Finsler-függvényből származó távolságfüggvényét. Beszélhetünk Finsler-izometriáról is: ez olyan transzformáció, amely (pontosabban amelynek deriváltja) a Finsler-függvényt őrzi meg. Szintén Brickell igazolta, hogy az automatikus simaság izometriákra is teljesül, és így az izometriák megegyeznek a Finsler-izometriákkal. A Riemann-geometriában az analóg eredményt S.B. Myers és N. Steenrod [35] klasszikus tétele adja. Disszertációnkban technikai egyszerűsítésekkel rekonstruáljuk Brickell bizonyítását.

Úgynevezett távolságkoordináták segítségével egy, az előbbtől teljesen független bizonyítást is találtunk az izometriák simaságára. Az ötlet valójában a Riemann-geometriából származik: Peter Petersen kiváló Riemann-geometria tankönyvében [38] távolságkoordinátákat alkalmazó bizonyítás található a Myers–Steenrod tételre. Azonban a Finsler-esetben a távolságkoordináták létezése lényegesen részletesebb indoklást igényel a geodetikusok aszimmetrikus természete miatt. Egy további alkalmazását is adjuk a távolságkoordinátáknak: megmutatjuk, hogy a reverzibilis Finsler-sokaságok kö-

zötti szubmetriák differenciálhatóak egy bizonyos regularitási feltétel mellett. Ezzel általánosítjuk V.N. Berestovskii és L. Guijarro egy tételét [6]. Megjegyezzük azonban, hogy állításunk A. Lytchak egy metrikus terek közötti szubmetriákról szóló tételéből is következik [30]; a mi bizonyításunk előnye az, hogy kizárólag differenciálgeometriai eszközökre támaszkodik.

Miután tisztáztuk, hogy a két-két értelemben vett affinitás és izometria lényegében ekvivalens, a továbbiakban nem teszünk különbséget köztük. A Riemann-geometriában több nevezetes tétel ad elégséges feltételt arra, hogy az affinitások és az izometriák egybeessenek. Két ilyen tételre találtunk Finsler-geometriai általánosítást. Az egyik J.-I. Hano tétele, amely szerint *egy teljes Riemann-sokaság minden korlátos affin vektormezője (infinitézimális affinitása) Killing-vektormező (infinitézimális izometria)*. Kiderült, hogy ez a tétel Finsler-sokaságokra is átvihető, és – meglepő módon – egészen elemi eszközökkel igazolható. Kobayashi mutatta meg, hogy *az 1-dimenziós euklideszi tér kivételével a teljes és irreducibilis Riemann-sokaságok affinitásai és izometriái egybeesnek*. Ennek az állításnak már a megfogalmazása is problémát okoz a Finsler-esetben, mert az irreducibilitásnak nincs egyértelmű megfelelője. Megmutatjuk, hogy ha az irreducibilitás feltételét a kanonikus spray egyértelmű metrizálhatóságának, az ún. affin merevségnek feltételére cseréljük ki, akkor Kobayashi tétele a Finsler-esetben is igaz. Az eredmény értékét sajnos csökkenteti, hogy kevés elegendő feltétel ismert Finsler-sokaságok affin merevségére, néhány ilyen azonban sikerült igazolnunk.

Zárásként olyan Finsler-sokaságokkal foglalkozunk, melyeknek sok izometriája van abban az értelemben, hogy minden pont körül létezik Killing-vektormezőkből álló n -élmező. Megmutatjuk, hogy egy ilyen Finsler-sokaság általánosított Berwald-sokaság, és ha a Killing-vektormezőkből származó párhuzamosítás kompatibilis a Finsler-függvénnyel, akkor a Finsler-sokaság Berwald-sokaság.

~ o ~

Egy technikai megjegyzés: valamennyi eredmény azzal a sorszámmal szerepel, mint a disszertációban. Ha egy tétel, lemma, következmény vagy állítás nem új eredmény, az eredeti szerző nevét zárójelben jelezzük a tétel legelején. A publikált új eredményeink kimondásakor szintén zárójelben jelezzük a föllelhetőségüket.

2. Fogalmi háttér és eszközök

Kanonikus objektumok az érintőnyalábon

A disszertációban megszámlálható bázisú, sima Hausdorff-sokaságokon dolgozunk, ezeket az egyszerűség kedvéért sokaságoknak hívjuk. Ha mást nem mondunk, egy sokaságok közötti leképezést simának (végtelen sokszor differenciálhatónak) tételezünk fel. Tetszőleges M sokaság esetén használjuk az alábbi jelöléseket:

- (1) $C^\infty(M)$ az M -en értelmezett valós értékű sima függvények gyűrűje;
- (2) $\tau: TM \rightarrow M$ az M sokaság érintőnyalábja;
- (3) $\mathring{TM} \subset TM$ a nemnulla érintővektorok részsokasága, $\mathring{\tau} := \tau \upharpoonright \mathring{TM}$ a hasított érintőnyaláb;
- (4) $\tau_{TM}: TTM \rightarrow TM$ a TM érintősokaság érintőnyalábja.

További jelölések:

- (5) Fl^X az X vektormező folyama, Fl_t^X ($t \in \mathbb{R}$) a t -edik stádiuma.
- (6) $\Gamma(\pi)$ vagy $\Gamma(B)$ jelöli egy $\pi: E \rightarrow M$ vektornyaláb (sima) szeléseinek $C^\infty(M)$ -modulusát. Speciálisan $\mathfrak{X}(M) := \Gamma(TM)$ az M sokaság vektormezőinek $C^\infty(M)$ -modulusa.
- (7) $\varphi_*: TM \rightarrow TN$ egy sokaságok közötti $\varphi: M \rightarrow N$ leképezés deriváltja.

Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőnek értelmezzük a *vertikális liftjét*, a

$$(t, v) \in \mathbb{R} \times TM \longmapsto v + tX(\tau(v)) \in TM.$$

folyam sebesség-vektormezőjeként. Ez egy vektormező a TM érintősokaságon, amelyet $X^\vee$ -vel jelölünk. Szintén alkalmazzuk X *teljes liftjét*, a

$$(t, v) \in \tilde{\mathcal{D}}_X \longmapsto (\text{Fl}_t^X)_*(v) \in TM$$

folyam sebesség-vektormezőjét. Itt $\text{Fl}^X: \mathcal{D}_X \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ az X vektormező folyama és

$$\tilde{\mathcal{D}}_X := \{(t, v) \in \mathbb{R} \times TM \mid (t, \tau(v)) \in \mathcal{D}_X\}.$$

A teljes lift szintén egy vektormező az érintősokaságon, jelölése X^c .

A TM érintősokaság $(t, v) \in \mathbb{R} \times TM \mapsto e^t v \in TM$ pozitív nyújtásai által generált vektormezőt *Liouville-vektormező*nek hívjuk és C -vel jelöljük.

A TTM érintőnyaláb *vertikális résznyalábja* $VTM := \ker(\tau_*)$, ennek $\dot{TM}$ -re való természetes leszűkítését $V\dot{TM}$ -mel jelöljük.

A $\dot{\tau}^* \tau$ pull-back nyalábot *Finsler-nyalábnak* nevezzük. Ennek alapsokasága $\dot{TM}$, teljes sokasága

$$\dot{TM} \times_M TM := \{(u, v) \in \dot{TM} \times TM \mid \dot{\tau}(u) = \tau(v)\},$$

fibruma egy $u \in \dot{TM}$ pont fölött az $\{u\} \times T_{\dot{\tau}(u)}M$ vektortér. Az M sokaság egy X vektormezőjéből természetes módon származtatható a Finsler-nyaláb

$$\hat{X}: \dot{TM} \rightarrow \dot{TM} \times_M TM, \quad \hat{X}(u) := (u, X(\dot{\tau}(u)))$$

szelése. Ezt az X vektormező *bázikus liftjének* nevezzük. Hasonló módon az M sokaság minden tenzora felemelhető a Finsler-nyalábra.

A Finsler-nyaláb és $V\dot{TM}$ nyaláb szeléseinek modulusai természetes módon izomorfak. Ezt az $\mathbf{i}$ -vel jelölt izomorfizmust egyértelműen meghatározza az $\mathbf{i}\hat{X} = X^\vee$ összefüggés. Hallgatólagosan minden ilyen típusú modulus-homomorfizmust nyalábleképezésnek tekintünk, ha szükséges. Ily módon $\mathbf{i}$ felfogható egy fibrumonként lineáris leképezésnek is $\dot{TM} \times_M TM$ -ből $V\dot{TM}$ -be.

A Finsler-nyaláb *kanonikus szelése*

$$\tilde{\delta}: \dot{TM} \rightarrow \dot{TM} \times_M TM, \quad \tilde{\delta}(u) := (u, u),$$

erre teljesül, hogy $\tilde{\mathbf{i}}\tilde{\delta} = C$.

A Finsler-nyaláb ellátható egy természetes derivációval, amely lényegében a fibrumokon adott természetes deriválásból származik. A precíz megadásához a Finsler-nyaláb minden $\tilde{X}$ szeléséhez tekintjük ennek $\underline{X}: \dot{TM} \rightarrow TM$ fő részét, amelyet az $\tilde{X}(u) = (u, \underline{X}(u))$ előírás ad meg. Ezután definiálunk egy

$$\begin{aligned} \nabla^\vee: \Gamma(\dot{\tau}^* \tau) \times \Gamma(\dot{\tau}^* \tau) &\rightarrow \Gamma(\dot{\tau}^* \tau) \\ \nabla_{\tilde{X}}^\vee \tilde{Y}(u) &:= (u, (\underline{Y} \upharpoonright \dot{T}_p M)'(u)(\underline{X}(u))) \end{aligned}$$

leképezést. Ez a klasszikus tenzorderivációkhoz hasonló módon kiterjeszthető a Finsler-tenzorok nyalábjára, ha megállapodunk abban, hogy tetszőleges $f \in C^\infty(\dot{TM})$ függvény esetén $\nabla_{\tilde{X}}^\vee f := \mathbf{i}\tilde{X}f$. Ezt a derivációt *kanonikus*

*vertikális derivált*nak nevezzük. A lokális számolásokban ∇^ν egyszerűen ‘ y^i -szerinti deriválásként’ jelentkezik. Például: adva egy $f \in C^\infty(\mathring{T}M)$ függvényt,

$$\nabla^\nu f = \frac{\partial f}{\partial y^i} \widehat{du^i}, \quad \nabla^\nu \nabla^\nu f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j} \widehat{du^i} \otimes \widehat{du^j}, \quad \text{stb.}$$

Ehresmann-konnexiók és sprayk

2.1. Legyen M egy sokaság. Egy

$$\mathcal{H}: \mathring{T}M \times_M TM \rightarrow T\mathring{T}M, \quad (u, v) \mapsto \mathcal{H}(u, v),$$

leképezést $\mathring{T}M$ -en adott *Ehresmann-konnexiónak* nevezünk, ha

(E1) $\mathcal{H}(u, v) \in T_u TM$ minden $(u, v) \in \mathring{T}M \times_M TM$ esetén;

(E2) a $v \mapsto \mathcal{H}(u, v)$ leképezés $\mathbb{R}$ -lineáris minden $u \in \mathring{T}M$ esetén;

(E3) $\tau_* \mathcal{H}(u, v) = v$ minden $(u, v) \in \mathring{T}M \times_M TM$ esetén.

A $H\mathring{T}M := \text{Im } \mathcal{H}$ képhalmaz a $T\mathring{T}M$ egy $n = \dim M$ -rangú résznyalábja, melyre

$$T\mathring{T}M = V\mathring{T}M \oplus H\mathring{T}M$$

teljesül. Ezt a $\mathcal{H}$ -hoz tartozó *horizontális résznyalábnak* nevezzük.

Értelmezzük a $\mathbf{h}: T\mathring{T}M \rightarrow H\mathring{T}M$ és $\mathbf{v}: T\mathring{T}M \rightarrow V\mathring{T}M$ projekciókat oly módon, hogy $\text{Ker } \mathbf{v} = H\mathring{T}M$, $\text{Ker } \mathbf{h} = V\mathring{T}M$. Szintén definiáljuk a $\mathcal{V} := \mathbf{i}^{-1} \circ \mathbf{v}$ *vertikális leképezést*, amely az $\mathbf{i}$ egy balinverze. Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, *horizontális lifte* az $X^h := \mathcal{H}X \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M)$ vektormező. Az Ehresmann-konnexió *pozitív-homogén*, ha a horizontális liftek 1^+ -homogének, azaz $[C, X^h] = 0$ minden $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén.

2.2. Azt mondjuk, hogy $S \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M)$ *sprayje* M -nek, ha

(S1) $\tau_* \circ S = \text{id}_{\mathring{T}M}$;

(S2) $[C, S] = S$, azaz S 2^+ -homogén.

Ekkor az (M, S) párt *spray-sokaságnak* nevezzük. Ha $\mathcal{H}$ pozitív-homogén Ehresmann-konnexió, akkor $S := \mathcal{H}\tilde{\delta}$ spray. Megfordítva, ha S egy spray, akkor létezik olyan $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió, hogy

$$\mathcal{H}(\hat{X}) = X^h = \frac{1}{2}(X^c + [X^\vee, S])$$

minden $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén. Ezt az Ehresmann-konnexiót a spray-sokaság *Berwald-konnexiójának* nevezzük. Ekkor $\mathcal{H}\tilde{\delta} = S$ teljesül. A részleteket illetően ld. [45, 7.3.3].

Egy Ehresmann-konnexió *torziója* az az $(1, 2)$ -típusú $\mathbf{T}$ Finsler-tenzormező, amelyre

$$\mathbf{i}\mathbf{T}(\hat{X}, \hat{Y}) = [X^h, Y^\vee] - [Y^h, X^\vee] - [X, Y]^\vee; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

teljesül. Könnyen látható, hogy egy spray-sokaság Berwald-konnexiójának a torziója eltűnik. Megmutatható, hogy minden torziómentes Ehresmann-konnexió egy spraynek a Berwald-konnexiója.

2.3. Egy (M, S) spray-sokaság *Jacobi-endomorfizmusa* a

$$\mathbf{K}(\tilde{X}) := \mathcal{V}[S, \mathcal{H}\tilde{X}], \quad \tilde{X} \in \Gamma(\dot{\tau}^* \tau)$$

előírással definiált $(1, 1)$ -típusú Finsler-tenzormező. Ha $n = \dim M \geq 2$, akkor a

$$K := \frac{1}{n-1} \operatorname{tr} \mathbf{K} \quad (1)$$

függvény a spray-sokaság *görbületi függvénye*.

2.4. Legyen $\mathcal{H}$ egy $\dot{T}M$ -en adott pozitív-homogén Ehresmann-konnexió, $I \subset \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, és $\gamma: I \rightarrow M$ egy sima görbe. Egy γ -menti $X: I \rightarrow \dot{T}M$ vektormező *párhuzamos $\mathcal{H}$ szerint* (röviden *$\mathcal{H}$ -párhuzamos* vagy *párhuzamos*), ha

$$\dot{X}(t) = \mathcal{H}(X(t), \dot{\gamma}(t)) \quad (t \in I).$$

Minden $t_0 \in I$ és $v \in \dot{T}_{\gamma(t_0)}M$ esetén létezik egy és csak egy X párhuzamos vektormező γ mentén úgy, hogy $X(t_0) = v$. Ekkor $X(t)$ a v *párhuzamos eltoltja* γ mentén $\dot{T}_{\gamma(t)}M$ -be. Így értelmezhetünk egy

$$P(\gamma)_{t_0}^t: \dot{T}_{\gamma(t_0)}M \rightarrow \dot{T}_{\gamma(t)}M$$

leképezést, amely minden $v \in \mathring{T}_{\gamma(t_0)}M$ vektort a párhuzamos eltoltjába viszi át. Ekkor $P(\gamma)_{t_0}^t$ sima és 1^+ -homogén minden $t \in I$ esetén [45, 7.6]. A $P(\gamma)_{t_0}^t$ leképezés természetes módon kiterjeszthető az egész $T_{\gamma(t_0)}M$ érintőtérre, ha a zérus vektormezőt párhuzamosnak tekintjük. Így $P(\gamma)_{t_0}^t(0) = 0$ adódik.

2.5. Egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió birtokában bevezetünk egy

$$\nabla^h: \Gamma(\mathring{\tau}^*\tau) \times \Gamma(\mathring{\tau}^*\tau) \rightarrow \Gamma(\mathring{\tau}^*\tau)$$

operátort, a $\nabla_{\tilde{X}}^h \tilde{Y} := \mathcal{V}[\mathcal{H}\tilde{X}, \mathbf{i}\tilde{Y}]$ előírással. Bázikus liftekre ekkor azt kapjuk, hogy

$$\nabla_{\hat{X}}^h \hat{Y} = \mathbf{i}^{-1}[X^h, Y^v]. \quad (2)$$

A ∇^h és ∇^v operátorokból előállítható egy

$$\nabla: \mathfrak{X}(\mathring{TM}) \times \Gamma(\mathring{\tau}^*\tau) \rightarrow \Gamma(\mathring{\tau}^*\tau)$$

kovariáns deriválás a Finsler-nyalábon. Ezt jellemzik a

$$\nabla_{\mathcal{H}\tilde{X}} \tilde{Y} = \nabla_{\tilde{X}}^h \tilde{Y}, \quad \nabla_{\mathbf{i}\tilde{X}} \tilde{Y} = \nabla_{\tilde{X}}^v \tilde{Y}$$

összefüggések. A ∇ kovariáns deriválást a $\mathcal{H}$ által indukált *Berwald-deriválás*-nak nevezzük. Az Ehresmann-konnexió *Berwald-tenzorát* a

$$\mathbf{B}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} := \nabla_{\tilde{X}}^v \nabla_{\tilde{Y}}^h \tilde{Z} - \nabla_{\tilde{Y}}^h \nabla_{\tilde{X}}^v \tilde{Z} - \nabla_{[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathcal{H}\tilde{Y}]} \tilde{Z}.$$

képlet definiálja. A bázikus lifteken ez az

$$\mathbf{i}\mathbf{B}(\hat{X}, \hat{Y})\hat{Z} = [[X^v, Y^h], Z^v]$$

alakra redukálódik [45, 7.13].

2.6. Legyen (M, S) egy spray-sokaság. Ha $\sigma: I \rightarrow TM$ S -nek integrálgörbéje, akkor az (S1) feltétel alapján a $\gamma := \tau \circ \sigma$ görbe sebességvektormezője éppen σ . Az ilyen γ görbéket nevezzük S *geodetikusainak*. Egy $\gamma: I \rightarrow M$ görbe pontosan akkor geodetikusa S -nek, ha $S \circ \gamma = \ddot{\gamma}$. A konstans görbéket szintén geodetikusoknak tekintjük.

Lineáris konnexiók és affin sprayk

Egy $\mathring{T}M$ -en adott Ehresmann-konnexiót *lineárisnak* mondjuk, ha az alábbi ekvivalens feltételek valamelyike (és ezért mindegyike) teljesül.

- (L1) $\mathcal{H}$ pozitív-homogén és létezik sima kiterjesztése TM -re.
- (L2) $\mathcal{H}$ Christoffel-szimbólumai lineáris függvények a fibrumokon.
- (L3) A $\mathcal{H}$ által indukált Berwald-deriválás Christoffel-szimbólumai konstans függvények a fibrumokon.
- (L4) $\mathcal{H}$ Berwald-tenzora eltűnik.
- (L5) Bármely $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén $[X^h, Y^v] \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M)$ megkapható vertikális liftként.
- (L6) Egyértelműen létezik olyan D kovariáns deriválás M -en, amelyre

$$(D_X Y)^v = [X^h, Y^v] \stackrel{(2)}{=} \mathbf{i}\nabla_{X^h} \widehat{Y}; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

- (L7) A $\mathcal{H}$ -párhuzamos eltolások lineárisak.

Mivel az Ehresmann-konnexiókat csak $\mathring{T}M$ -en értelmeztük, a fenti feltételekben több objektumot is ki kell terjeszteni a zérus vektorokra, ez azonban mindig természetes módon lehetséges.

A továbbiakban lineáris Ehresmann-konnexió helyett egyszerűen *lineáris konnexióról* szólunk.

Egy S sprayt *affinnak* hívunk ha az alábbi ekvivalens feltételek valamelyike teljesül.

- (A1) S -nek van sima kiterjesztése TM -re.
- (A2) S együtthatói kvadratikus formák a fibrumokon.
- (A3) Az S -ből származó Berwald-konnexió lineáris.

(A3) alapján az affin sprayk a Berwald-konnexiójuk segítségével is jellemezhetőek, az (L1)–(L7) feltételek bármelyikével.

Finsler-sokaságok

Legyen M sokaság. Egy $F: TM \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt *Finsler-függvénynek* nevezzük (M fölött) ha:

(F1) F folytonos TM -en, és sima $\mathring{TM}$ -en,

(F2) F 1^+ -homogén,

(F3) $F(v) > 0$ ha $v \neq 0$,

(F4) a $g := \frac{1}{2} \nabla^\vee \nabla^\vee F^2$ *fundamentális tenzor* (fibrumonként) pozitív definit.

Ekkor az (M, F) párt *Finsler-sokaságnak* hívjuk. $E := \frac{1}{2} F^2$ az F -hez csatolt *energia-függvény*. Azt mondjuk, hogy egy Finsler-sokaság *Riemann-sokaságra redukálódik*, ha energia-függvénye minden érintőtéren kvadratikussá válik.

Egy $\gamma: I \rightarrow M$ sima görbe a Finsler-sokaság *geodetikusa*, ha teljesíti a

$$\left(\frac{\partial E}{\partial y^i} \circ \dot{\gamma} \right)' - \frac{\partial E}{\partial x^i} \circ \dot{\gamma} = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

Euler–Lagrange egyenletet minden, a γ képét metsző térkép esetén. Az (M, F) geodetikusai szintén a geodetikusai egy egyértelműen meghatározott spray-nek, ezt nevezzük az Finsler-sokaság *kanonikus sprayjének*. S -sel jelölve a kanonikus sprayt, (3) az

$$SX^\vee E - X^c E = 0, \quad X \in \mathfrak{X}(M) \quad (4)$$

alakba írható. Az Euler–Lagrange egyenletnek ezt a formáját M. Crampin találta [11, 348. oldal].

A kanonikus spray Berwald-konnexióját a Finsler-sokaság *kanonikus konnexiójának* nevezzük. Egy $\mathring{TM}$ -en adott $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió pontosan akkor a kanonikus konnexiója (M, F) -nek, ha

(CC1) $\mathcal{H}$ pozitív-homogén,

(CC2) $\mathcal{H}$ torziója eltűnik,

(CC3) $H\mathring{TM} := \text{Im}(\mathcal{H}) \subset \ker dF$.

(részletekért lásd [45, Theorem 9.3.5]). A (CC3) feltétel garantálja, hogy F konstans a párhuzamos vektormezők mentén, és így a $\mathcal{H}$ -párhuzamos eltolások megőrzik a Finsler-függvényt (lásd Lemma 2.3.1). Tehát a kanonikus konnexió analóg a Riemann-sokaságok Levi-Civita konnexiójával.

Az exponenciális leképezés

Legyen (M, S) spray-sokaság. Tetszőleges $v \in TM$ esetén jelölje γ_v azt a maximális geodetikust, amely kezdősebessége v . Legyen $\widetilde{TM}$ azon $v \in TM$ érintővektorok halmaza, amelyekre γ_v értelmezve van az 1-ben. Ekkor

$$\exp: \widetilde{TM} \rightarrow M, \quad v \mapsto \exp(v) := \gamma_v(1)$$

az S által generált *exponenciális leképezés*.

3. Az értekezés új eredményei

Projektíven affin sprayk

Legyenek S és $\bar{S}$ sprayk egy M sokaságon. S és $\bar{S}$ *projektíven csatolt*, ha

$$\bar{S} = S - 2PC,$$

ahol P egy függvény $\overset{\circ}{TM}$ -en. Ekkor azt is mondjuk, hogy $\bar{S}$ az S *spray egy projektív változtatása, P faktorral*.

Egyszerű számolással igazolható, hogy ha egy spray projektíven csatolt egy affin sprayhez, akkor a

$$\mathbf{D} := \mathbf{B} - \frac{1}{n+1} ((\nabla^\vee \operatorname{tr} \mathbf{B}) \otimes \tilde{\delta} + (\operatorname{tr} \mathbf{B}) \odot \operatorname{id}_{\Gamma(\overset{*}{\tau}^* \tau)})$$

képlettel definiált *Douglas-tenzor* eltűnik. *Megmutattuk, hogy a megfordítás is igaz*. Ehhez szükségünk volt a *vertikálisan invariáns* térfogati formák bevezetésére. Ezek olyan térfogati formák az M érintősokaságán, amelyeknek a vertikális liftek szerinti Lie-deriváltjai eltűnnek.

2.1.8. Tétel ([45]). *Ha (M, S) eltűnő Douglas-tenzorú spray-sokaság, és egy vertikálisan invariáns térfogati forma TM -en, akkor*

$$\bar{S} := S - 2PC \quad \text{ahol} \quad P := \frac{1}{2(n+1)} \operatorname{div}_\omega S$$

affin spray.

2.1.9. Állítás ([45]). *Bármely sokaság érintősokaságán létezik vertikálisan invariáns térfogati forma.*

2.1.10. Következmény ([45]). *Ha egy spray-sokaság Douglas-tenzora eltűnik, akkor a spray projektíven csatolt egy affin sprayhez.*

Ezt az állítást lokálisan J. Douglas igazolta [15]. Globálisan Z. Shen [40, 5.2] továbbá Szilasi József és Vattamány Szabolcs adtak bizonyítást [46], de feltételezték a sokaság irányíthatóságát. A mi változatunk erősebb annyiban, hogy ez a feltétel nem szerepel.

Nem léteznek valódi Einstein–Berwald-sokaságok

Egy *Berwald-sokaság* olyan Finsler-sokaság, amelynek a kanonikus sprayje affin, vagy – ekvivalens módon – a kanonikus konnexiója lineáris.

Egy (M, F) Finsler-sokaság *Einstein–Finsler-sokaság*, ha a (1) görbületi függvény és a Finsler-függvény között fennáll a

$$K = (\lambda \circ \tau)F^2$$

összefüggés, ahol $\lambda \in C^\infty(M)$. Megmutattuk, Berwald-sokaságok között csak nagyon speciális Einstein–Finsler sokaságok léteznek.

2.2.1. Lemma ([14]). *Egy Berwald-sokaság görbületi függvénye kvadrátikus forma minden érintőtéren.*

2.2.2. Tétel ([14]). *Ha egy összefüggő Einstein–Finsler-sokaság egyben Berwald-sokaság is, akkor vagy Riemann-sokaságra redukálódik, vagy pedig a görbületi függvénye eltűnik.*

Monokromatikus Finsler-sokaságok

Legyen M sokaság, $\mathcal{U}$ pedig az M -nek nyílt részsokasága. Tekintsünk egy $(X_i)_{i=1}^n$ n -élmezőt $\mathcal{U}$ -n. Ekkor az $(X_i)_{i=1}^n$ $\mathbb{R}$ -lineáris burkát M $\mathcal{U}$ fölötti *lokális párhuzamosításának* nevezzük. Egy $\mathcal{U}$ fölötti P lokális párhuzamosítás elemei a P -szerinti *párhuzamos vektormezők*. Minden $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$ esetén egyértelműen létezik olyan $v_P \in P$ vektormező, melyre $v_P(\tau(v)) = v$. Ha p és q $\mathcal{U}$ -nak pontjai, akkor a

$$P_{qp}(v) := v_P(q)$$

előírással adott $P_{qp}: T_p M \rightarrow T_q M$ leképezés lineáris. Egy nem feltétlenül sima $f: \mathring{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *kompatibilis P -vel*, ha $f \circ P_{qp} = f \upharpoonright \mathring{T}_p M$ minden $p, q \in \mathcal{U}$ esetén. Ezzel ekvivalens, hogy $f \circ X$ konstans, ha $X \in P$.

Egy nem feltétlenül sima $f: \mathring{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *monokromatikus*, ha minden $p, q \in M$ esetén létezik egy $L_{qp}: T_p M \rightarrow T_q M$ lineáris izomorfizmus úgy, hogy $f \circ L_{qp} = f \upharpoonright \mathring{T}_p M$. Az f függvény *simán monokromatikus*, ha minden $p \in M$ pontnak van olyan környezete, amely fölött létezik f -fel kompatibilis lokális párhuzamosítás. Könnyen látható, hogy egy simán monokromatikus függvény monokromatikus is, ha M is összefüggő.

Hasonlóan, egy nem feltétlenül sima $f: \mathring{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ függvény is *kompatibilis egy $\mathcal{H}$ homogén Ehresmann-konnexióval*, ha a $\mathcal{H}$ szerinti párhuzamos eltolások megőrzik f -et. Ezzel ekvivalens, hogy f konstans a $\mathcal{H}$ -párhuzamos vektormezők mentén.

2.3.1. Lemma. *Egy C^1 -osztályú $f: \mathring{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor kompatibilis egy homogén Ehresmann-konnexióval, ha $\ker df$ tartalmazza a konnexióhoz tartozó horizontális résznyalábbot.*

2.3.3. Tétel. *Ha egy C^1 -osztályú $f: \mathring{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ függvény simán monokromatikus, akkor kompatibilis egy lineáris konnexióval.*

A megfordítás teljesül anélkül, hogy bármit feltennénk a függvényről.

2.3.6. Állítás. *Ha egy nem feltétlenül sima $f: \mathring{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ függvény kompatibilis egy lineáris konnexióval, akkor f simán monokromatikus.*

Egy (M, F) Finsler-sokaság *általánosított Berwald-sokaság*, ha F kompatibilis egy $\mathring{T}M$ -en adott lineáris konnexióval. A fenti két eredményből azonnal adódik az általánosított Berwald-sokaságok alábbi jellemzése.

2.3.7. Tétel (Y. Ichijō [21]). *Egy Finsler-sokaság pontosan akkor általánosított Berwald-sokaság, ha simán monokromatikus.*

Y. Ichijō bizonyítása a G -struktúrákkal kompatibilis konnexiókra támaszkodott. A mi bizonyításunkban csak az Ehresmann-konnexiók egyszerű tulajdonságaira, és a Finsler-függvény differenciálhatóságára van szükség.

E szakasz záró eredménye H. Weyl egy fontos, de kissé elfeledett tételének modern átfogalmazása.

2.3.9. Tétel (Weyl). *Legyen M sokaság, f pedig egy Finsler-norma egy $T_p M$ érintőtéren (azaz f folytonos, 1^+ -homogén, a $T_p M \setminus \{0\}$ halmazon sima és pozitív, továbbá $f''(v)$ pozitív definit bármely $v \in T_p M \setminus \{0\}$ esetén). Minden $\mathcal{U} \subset M$ feletti P párhuzamosítás esetén (ahol $p \in \mathcal{U}$), definiáljunk egy $F_P: T\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ Finsler-függvényt az*

$$F_P(v) := f(v_P(p))$$

előírással. Ha minden ilyen P párhuzamosítás esetén $(\mathcal{U}, F_P)$ Berwald-sokaság, akkor f euklideszi norma.

Az affinitások és az izometriák simák

Legyen adva egy (M, F) Finsler-sokaság vagy egy (M, S) spray sokaság. Egy (nem feltétlenül sima) bijektív $\varphi: M \rightarrow M$ leképezést *affinitásnak* nevezünk, ha megőrzi a geodetikusokat. Pontosabban: φ affinitás, ha minden γ geodetikus esetén $\varphi \circ \gamma$ is geodetikus. Hasonlóan, ha (M, F) Finsler-sokaság, egy (nem feltétlenül sima) $\varphi: M \rightarrow M$ leképezés *izometria*, ha $\varrho(\varphi(p), \varphi(q)) = \varrho(p, q)$ minden $p, q \in M$ esetén. Itt ϱ az (általában nem szimmetrikus) Finsler-távolság M -en, amelyet a p -ből q -ba futó szakaszonként sima görbék ívhosszai halmazának infimumaként definiálunk.

F. Brickell megmutatta [8], hogy spray-sokaságok affin homeomorfizmusai, és Finsler-sokaságok izometriái szükségképpen simák. A bizonyítása egyszerűsíthető az alábbi (önmagában is érdekes) lemma segítségével.

3.1.1. Lemma. *Legyen (M, S) spray-sokaság, $p \in M$. Legyenek (a_n) és (b_n) a p ponthoz konvergáló sorozatok, és definiáljuk a*

$$L_n := \exp_{a_n}^{-1}(b_n), \quad A_n := \exp_p^{-1}(a_n), \quad B_n := \exp_p^{-1}(b_n), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

sorozatokat. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n - A_n - L_n}{\|L_n\|} = 0,$$

és így $\frac{\|B_n - A_n\|}{\|L_n\|} \rightarrow 1$. Továbbá, ha a

$$\left(\frac{B_n - A_n}{\|B_n - A_n\|} \right), \quad \left(\frac{L_n}{\|L_n\|} \right)$$

sorozatok egyike konvergens, akkor a másik is az, és a határértékük megegyezik.

Itt $\|\cdot\|$ a norma függvény egy M -en adott tetszőleges Riemann-metrikára nézve.

Távolság-koordinátarendszerek

Legyen (M, F) Finsler-sokaság, és $(p_i)_{i=1}^n$ az M pontjainak egy olyan sorozata amelyre teljesül, hogy az

$$u_\varrho: q \mapsto (\varrho(p_1, q), \dots, \varrho(p_n, q))$$

leképezés diffeomorfizmus M egy $\mathcal{U}$ nyílt részhalmazából $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazába. Ekkor $(\mathcal{U}, u_\varrho)$ -t *távolság-koordinátarendszernek* nevezzük. Megmutattuk:

3.3.1. Lemma ([3]). *Egy Finsler-sokaság minden pontja körül létezik távolság-koordinátarendszer.*

Távolságkoordináták segítségével új, egyszerű bizonyítást adtunk az izometriák simaságára. A bizonyítás ötlete P. Petersen Riemann-esetre való bizonyításából származik [38, Ch. 5.10].

A távolság-koordinátarendszereknek egy további alkalmazásaként igazoltuk, hogy *reverzibilis Finsler-sokaságok közötti reguláris szubmetriák differenciálhatóak* (3.3.3 Tétel). Ez az állítás következik egy metrikus terekben ismert tételből is (lásd [30]), de az általunk talált bizonyítás közvetlenebb és differenciálgeometriai szemléletű. Először tisztáznunk kell egyes elnevezéseket.

Legyenek M_1 és M_2 metrikus terek. Mindkettőben $\mathcal{B}$ -vel jelöljük a metrikus gömböket. Egy $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ leképezést *szubmetriának* hívunk, ha M_1 minden p pontja esetén létezik olyan δ pozitív szám, melyre

$$\varphi(\mathcal{B}_\varepsilon(p)) = \mathcal{B}_\varepsilon(\varphi(p)),$$

ha $\varepsilon \in]0, \delta[$. Az ilyen δ számok szupremumát jelölje δ_p (ez lehet végtelen is). A szubmetria *reguláris*, ha minden $\mathcal{K} \subset M_1$ kompakt halmaz esetén

$$\delta_{\mathcal{K}} := \inf_{p \in \mathcal{K}} \delta_p > 0.$$

Egy Finsler-sokaság *reverzibilis*, ha $F(-v) = F(v)$ bármely $v \in TM$ vektor esetén. Ebben az esetben ϱ szimmetrikus, és így (M, ϱ) metrikus tér.

3.3.2. Lemma ([3]). *Legyen (M, F) reverzibilis Finsler-sokaság, p M -nek egy pontja, és $\mathcal{U}$ a p -nek egy normálkörnyezete. Ekkor a ϱ_p távolságfüggvény leszűkítése az $\mathcal{U} \setminus \{p\}$ halmazra reguláris szubmetria az $\mathbb{R}$ kanonikus távolságára nézve.*

3.3.3. Tétel (A. Lytchak [30],[3]). *Egy reverzibilis Finsler-sokaságok közötti reguláris szubmetria differenciálható.*

A bizonyítás fő lépéseiben a [6] dolgozatot követi, amelyben az analóg állítás a Riemann-esetben lett igazolva.

Kapcsolatok affinitások és izometriák között

A Riemann-geometriában több nevezetes tétel ad elégséges feltételt arra, hogy az affinitások és az izometriák egybeessenek (lásd például [25, 242–244. oldal]). Két ilyen tétel Finsler-geometriai általánosítását adjuk meg az alábbiakban.

Az első tételünk infinitezimális affinitásokról és izometriákról szól. Ezek olyan vektormezők az alapsokaságon, melyek stádiumai a megfelelő típusú leképezések. Az infinitezimális affinitásokat *affin vektormezők*nek, az infinitezimális izometriákat *Killing-vektormezők*nek hívjuk. Mindkét tulajdonság kifejezhető a vektormező teljes liftjével: ha (M, F) egy Finsler-sokaság és S a kanonikus spray, akkor $X \in \mathfrak{X}(M)$ pontosan akkor affin, ha $\mathcal{L}_{X^c}S := [X^c, S] = 0$, és pontosan akkor Killing-vektormező, ha $\mathcal{L}_{X^c}F := X^cF = 0$.

Általánosítását adtuk J.-I. Hano tételének, amely szerint *egy teljes Riemann-sokaság minden korlátos affin-vektormezője Killing-vektormező*. Hano bizonyítása a de Rham-felbontáson, és az irreducibilis Riemann-sokaságok speciális tulajdonságain alapszik. Hano tétele Finsler-sokaságokra is átvihető, s meglepő módon egészen elemi eszközökkel, a de Rham-felbontás és az irreducibilitásnak megfelelő fogalom bevezetése nélkül. Kulcsfontosságú a következő észrevétel:

3.4.5. Lemma ([23]). *Legyen (M, F) Finsler-sokaság, X egy affin vektormező és γ egy geodetikus. Ekkor*

$$X^\vee E(\dot{\gamma}(t)) = X^\vee E(\dot{\gamma}(t_0)) + (t - t_0)X^c E(\dot{\gamma}(t_0))$$

teljesül a γ görbe értelmezési tartományának minden t és t_0 pontjára.

Bár nem nyilvánvaló, ez a lemma valójában egy speciális esete az 5.4.3(c) feladatnak a [4] könyvből. Ez a következőt állítja: ha J Jacobi-mező egy γ geodetikus mentén, akkor

$$g_{\dot{\gamma}}(J, \dot{\gamma})(t) = g_{\dot{\gamma}}(J(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) + (t - t_0)g_{\dot{\gamma}}(J'(t_0), \dot{\gamma}(t_0)),$$

ahol J' a J a γ -menti kovariáns deriváltja a Berwald- vagy a Chern-deriválásra nézve. Azonban a lemmánkat egyszerűbb közvetlenül igazolni, mint levezetni idézett feladatból.

3.4.6. Tétel ([23]). *Legyen (M, F) Finsler-sokaság, X egy affin vektormező, és tegyük fel, hogy az alábbi két feltétel valamelyike teljesül.*

- (1) $F \circ X$ korlátos és (M, F) teljes;
- (2) $F \circ X$ és $F \circ (-X)$ korlátos, továbbá (M, F) 'forward' teljes.

Ekkor X Killing-vektormező.

Ebből következik:

3.4.7. Tétel (J.-I. Hano). *Legyen (M, g) egy teljes Riemann-sokaság és X egy olyan affin vektormező M -en, hogy a $g(X, X)$ függvény korlátos. Ekkor X Killing-vektormező.*

Mivel a kompakt Finsler-sokaságok teljesek, szintén azonnal adódik a következő:

3.4.8. Tétel ([23]). *Egy kompakt Finsler-sokaság affin vektormezői Killing-vektormezők.*

Az utóbbi tételt a Riemann-esetben először K. Yano igazolta [52].

Kobayashi-tól származik egy további érdekes tétel az affinitások és izometriák kapcsolatáról. Megmutatta, hogy az 1-dimenziós euklideszi teret kivételével egy teljes és irreducibilis Riemann-sokaság affinitásai és izometriák egybeesnek.

A következőkben Kobayashi tételének Finsler-általánosításait tárgyaljuk. Ennek az állításnak már a megfogalmazása is problémát okoz a Finsler-esetben, mert az irreducibilitásnak nincs egyértelmű megfelelője. Egy lehetséges út az irreducibilitási feltétel kicserélése az *affin merevség* feltételére.

Ennek definíciója a következő. Egy M sokaság S sprayje *egyértelműen metrizálható*, ha S kanonikus sprayje egy F Finsler-függvénynek, és ha $\tilde{F}$ olyan további Finsler-függvény, amelynek szintén S a kanonikus sprayje, akkor M minden komponensén $\tilde{F}$ az F -nek skalárszorosa (más szóval, $d(F/\tilde{F}) = 0$). Egy Finsler-sokaság *affin merev*, ha a kanonikus sprayje egyértelműen metrizálható. A következő eredmény a [25, p. 242, Lemma 1] közvetlen megfelelője.

3.4.9. Lemma. *Egy összefüggő affin merev Finsler-sokaság minden affinitása homotécia.*

Itt a homotécia olyan φ diffeomorfizmust jelent, melyre $F \circ \varphi_* = cF$ teljesül, ahol c konstans. Mivel a ‘forward’ teljes Finsler-sokaság között egyedül a Finsler-vektortereken léteznek olyan homotéciák amelyek nem izometriák [29], adódik a következő:

3.4.10. Következmény. *Egy összefüggő ‘forward’ teljes affin merev Finsler-sokaság affinitásai és izometriák egybeesnek.*

Sajnos Kobayashi tételének ez az általánosítása nem túl hasznos, mert kevés elégséges feltétel ismert a Finsler-sokaságok affin merevségére. A folytatásban ezzel a problémával foglalkozunk.

Affin merev Finsler-sokaságok

Ebben a szakaszban (M, F) végig egy összefüggő Finsler-sokaság.

A kanonikus konnexió párhuzamos eltolásait felhasználva egy Finsler-sokaságnak is értelmezhetjük a holonómia-csoportját, ugyanúgy, mint a Riemann-esetben. Rögzítve egy $p \in M$ pontot, Hol_p a $\dot{T}_p M$ sima 1^+ -homogén diffeomorfizmusainak egy részcsoportja.

3.5.1. Állítás. *Ha Hol_p tranzitíven hat az $U(T_p M) := F^{-1}(\{1\}) \cap T_p M$ egységgömbön, akkor (M, F) affin merev.*

Jól ismert, hogy az irreducibilis Riemann-sokaságok affin merevek. Berger holonómia-tétele [7, 36] szerint léteznek olyan irreducibilis Riemann-sokaságok, melyek holonómia-csoportja nem hat tranzitíven az egységgömbön. Ebből következik, hogy a 3.5.1 Állítás megfordítása nem igaz, tehát Hol_p tranzitivitása gyengíthető.

A további eredményeink ismertetéséhez fel kell idéznünk néhány szinguláris disztribúciókkal kapcsolatos fogalmat [32]. Rögzítve egy M sokaságot, rendeljük hozzá minden $p \in M$ ponthoz egy $\mathcal{E}_p \subset T_p M$ alteret. Ekkor az $\mathcal{E} = \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{E}_p$ diszjunkt uniót *szinguláris disztribúciónak* nevezzük M -en. Jelölje $\mathfrak{X}_{loc}(M)$ azon vektormezők halmazát, amelyek csak M egy nyílt részalmazán vannak értelmezve, $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}}$ pedig azon vektormezőket $\mathfrak{X}_{loc}(M)$ -ben melyek csak $\mathcal{E}$ -ben vesznek fel értékeket. A $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}}$ egy $\mathcal{V}$ részhalmaza *kifeszíti* $\mathcal{E}$ -t, ha minden $p \in M$ esetén $\mathcal{E}_p$ az $\{X(p) \in T_p M \mid X \in \mathcal{V}\}$ lineáris burka. (Megállapodunk abban, hogy az üres halmaz lineáris burka a vektortér zérus eleme.) Azt mondjuk hogy $\mathcal{E}$ *sima*, ha $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}}$ kifeszíti.

Egy $\mathcal{E}$ sima szinguláris disztribúció *integrálsokasága* olyan $i: N \rightarrow M$ immergált részsokaság, amelyre $i_*(T_p N) = \mathcal{E}_{i(p)}$ minden $p \in N$ esetén. Valójában az ilyen részsokaságok szükségképpen gyengén beágyazottak [32, 2.13], és így nem kell megadni az i immerziót.

Rögzítve $\mathfrak{X}_{loc}(M)$ egy $\mathcal{W}$ részhalmazát, jelölje $\mathcal{S}(\mathcal{W})$ a

$$(\mathrm{Fl}_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ \mathrm{Fl}_{t_k}^{X_k})_{\#} Y$$

alakú lokális vektormezők halmazát, ahol $X_1, \dots, X_k, Y \in \mathcal{W}$, $k \in \mathbb{N}$.

Legyen $\mathcal{D}^h$ az a sima szinguláris disztribúció, amelyet $\mathcal{S}(\mathfrak{X}_{HTM})$ feszít fel, ahol HTM az (M, F) kanonikus konnexiójához tartozó horizontális disztribúció.

3.5.2. Lemma. *A bevezett jelölésekkel $\mathcal{D}^h \subset \ker(dF)$ teljesül.*

3.5.3. Következmény. *Az F Finsler-függvény konstans a $\mathcal{D}^h$ szinguláris disztribúció összefüggő integrálsokaságain.*

3.5.5. Állítás. *Ha $\mathcal{D}^h$ dimenziója $2n - 1$ $\mathring{T}M$ egy sűrű részhalmaza felett, akkor (M, F) affin merev.*

3.5.6. Állítás. *Ha $U(TM) := F^{-1}(\{1\})$ $\mathcal{D}^h$ -nak megszámlálható részsokaságát tartalmazza, akkor (M, F) affin merev.*

A szakasz eredményeit, a korábbi 3.4.9 Lemmát és 3.4.10 Következményt összefoglalva kapjuk az alábbi tételt.

3.5.7. Tétel. *Legyen (M, F) összefüggő Finsler-sokaság amelyre a következők valamelyike teljesül.*

- (1) Hol_p tranzitíven hat a $U(T_p M) := F^{-1}(\{1\}) \cap T_p M$ egységgyömbön;
- (2) $\mathcal{D}^h$ dimenziója $2n - 1$ $\dot{T}M$ egy sűrű részhalmaza felett;
- (3) $U(TM) := F^{-1}(\{1\})$ $\mathcal{D}^h$ -nak megszámlálható részsokaságát tartalmazza.

Ekkor (M, F) minden affinitása homotécia. Ha ráadásul (M, F) ‘forward’ teljes is, akkor minden affinitás izometria.

Egyes fenti eredmények speciális esetei már előfordultak az irodalomban. Szenthe János a [43] dolgozatban a $\mathbf{v}[\xi, \eta]$ vektormezők által felfeszített disztribúciót vizsgálta, ahol $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_{H\dot{T}M}$. Megmutatta, hogy ha ennek a disztribúciónak a rangja mindenütt $n - 1$, akkor minden affin transzformáció homotécia. Ez következik a 3.5.7 Tétel (2) esetéből, mert $\mathcal{S}(\mathfrak{X}_{H\dot{T}M})$ zárt a Lie-zárójel műveletére nézve (lásd [32, 3.27 Lemma]), és a $\mathcal{D}^h$ dimenziója pontosan akkor $2n - 1$, ha $\mathbf{v}\mathcal{D}^h$ dimenziója $n - 1$. A [17] dolgozatban a szerzők a $\mathfrak{X}_{H\dot{T}M}$ által generált Lie-algebrát vizsgálták, pontosabban az általa kifeszített disztribúciót. Kapcsolatot találtak ennek a disztribúciónak a dimenziója és a kanonikus spray metrizáló funkcionálisan független Finsler-függvények maximális száma között. Speciálisan igazolták, hogy ha a disztribúció kodimenziója 1, akkor a kanonikus spray egyértelműen metrizálható. A 3.5.5 Állítás ennek közvetlen általánosítása, egyrészt mert bővebb disztribúciót tekintünk, másrészt mert nem tesszük fel, hogy a dimenzió mindenütt $2n - 1$.

A 3.5.5 Állítás alábbi megfordítása igaznak tűnik:

Ha $\mathcal{D}^h$ dimenziója $\dot{T}M$ egy nyílt részhalmazán kisebb mint $2n - 1$, akkor (M, F) nem affin merev.

Indoklás: ha $\mathcal{D}^h$ dimenziója a maximálisnál kisebb egy nyílt részhalmazon, akkor megszámlálhatónál több integrálsokasága létezhet, és ez kisebb merevséget kényszerít a kanonikus spray metrizáló a Finsler-függvényekre. Azonban nem ez a helyzet: egy sima szinguláris disztribúció, amelynek dimenziója maximálisnál kisebb egy nyílt halmazon, még egyértelműen meghatározhatja azokat a folytonos függvényeket, amelyek konstansok az integrálsokaságain. Például létezik olyan sima szinguláris disztribúció a kanonikus (x, y) koordináta-rendszerrel ellátott $\mathbb{R}^2$ sokaságon, melynek maximális integrálsokaságai az alábbiak:

- (a) az $y < 0$ és $y > 1$ egyenlőtlenségekkel megadott félsíkok;

- (b) az $\{(x_0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1\}$ ‘vertikális’ szakaszok, ahol $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges;
- (c) az $y = 0$ és $y = 1$ egyenletű egyenesek pontjai, mint nulla dimenziós sokaságok.

Könnyen látható, hogy a folytonos függvények között csak a mindenütt konstans függvények konstansok az összes integrálsokaságon. Az nyitott kérdés, hogy ilyen konfiguráció előfordulhat-e $\mathcal{D}^h$ esetében.

Finsler-sokaságok sok Killing-vektormezővel

Legyen (M, F) Finsler-sokaság. Egy M egy nyílt halmaza fölötti P párhuzamosítást *Killing-párhuzamosításnak* nevezünk, ha Killing-vektormezők $\mathbb{R}$ -lineáris burkaként áll elő.

Egy (M, F) Finsler-sokaság *Killing-tulajdonságú* (v.ö. [51]), ha M minden pontja körül van Killing-párhuzamosítható nyílt környezet. Továbbá egy (M, F) Finsler-sokaság *konstans Killing-tulajdonságú*, ha M minden pontja körül van olyan Killing-párhuzamosítható nyílt környezet, amely kompatibilis F -fel.

A fenti fogalmakat a [12] dolgozat motiválta, ahol a szerzők olyan Riemann-sokaságokat vizsgáltak, melyekben minden pont körül van Killing-vektormezőkből álló orthonormált n -élmező. A konstans Killing-tulajdonságú Finsler-sokaságok ezek közvetlen általánosításai.

3.6.1. Tétel. *Egy Killing-tulajdonságú Finsler-sokaság általánosított Berwald-sokaság.*

3.6.2. Tétel. *Egy konstans Killing-tulajdonságú Finsler-sokaság Berwald-sokaság.*

Megjegyezzük, hogy az utóbbi tétel [1, Theorem 3.21 és 3.22] egy közös következményének egy általánosítása.

1 History and aims

Finsler manifolds are generalizations of Riemannian manifolds. In a Riemannian manifold we attach a positive definite scalar product to each of the tangent spaces. If we replace the scalar products by nonsymmetric norms, we obtain a Finsler manifold. Since the generalization happens on the tangent manifold, it is not immediately clear what new phenomena can occur on the manifold itself. This question was the main motivation behind the research whose results are presented in the Thesis. We attempt to tackle the issue from two directions: by examining Finsler manifolds that are ‘close’ to Riemannian manifolds, namely, Berwald and generalized Berwald manifolds, and by investigating how theorems about affinities and isometries in Riemannian geometry can be carried over into Finsler geometry.

Possibly the simplest (but most important) geometric objects attached to a Riemannian or to a Finsler manifold, who live on base manifold, are their geodesics. On a Finsler manifold, the length of a smooth curve segment $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ is defined by the arclength integral

$$\int_a^b F \circ \dot{\gamma}.$$

It is invariant under orientation preserving reparametrizations of γ . A curve γ is called a geodesic if it is a stationary point of the arclength functional, and it has constant velocity, i.e., the function $F \circ \dot{\gamma}$ is constant. In some cases, the parametrization of the geodesics is not important, then we refer to them (following [8]) as oriented geodesic paths. Through the Euler–Lagrange equation, the geodesics can be obtained as solutions of a second-order differential equation. In an induced local coordinate system $((x^i)_{i=1}^n, (y^i)_{i=1}^n)$ on the tangent manifold, it takes the form

$$\ddot{\gamma}^i + 2G^i \circ \dot{\gamma} = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (5)$$

where the G^i 's are 2^+ -homogeneous functions and are smooth outside the zero vectors. In the Riemannian case, the functions G^i become smooth everywhere, and hence they are fibrewise quadratic forms. The functions G^i give a local description of the globally defined canonical spray S via the formula

$$S \underset{\text{locally}}{=} y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Then (5) can be rewritten as $\ddot{\gamma} = S \circ \dot{\gamma}$. When the functions G^i are fibrewise quadratic forms, the spray S is called affine. Due to the work of Z.I. Szabó [42], Finsler manifolds with affine canonical spray, called Berwald manifolds, are well understood. Their geodesic structures carry no novelty, because for any Berwald manifold, there is a Riemannian manifold with the same geodesics. We can relax the affinity of the canonical spray by assuming only that the geodesic paths are specified by an affine spray. Since this problem requires no special parametrization of the geodesics, there is no need for a Finsler structure: it can be formulated in the framework of sprays manifolds. So we arrive at the following problem: *characterize sprays that have the same geodesic paths as an affine spray*. (Then we say that the spray is projectively equivalent to an affine spray.) This is an old problem, a local solution was given by J. Douglas [15]. He proved that if a suitable projectively invariant tensor attached to a spray S vanishes, then, locally, there exists an affine spray projectively equivalent to S . Global constructions were found by Z. Shen [40] and J. Szilasi and Sz. Vattamány [46], but they still assumed the orientability of the manifold. We present a method that works without any restriction on the manifold.

Next we turn to the problem of finding Finslerian generalizations of Einstein manifolds. Most of the currently known Einstein–Finsler manifolds are either of Randers type or have vanishing curvature function, see e.g., [5, 9, 39, 41, 53]. We obtain a negative result by showing that among Berwald manifolds, the only non-Riemannian Einstein manifolds have vanishing curvature function.

Clearly, in a Riemannian manifold, there is a linear isomorphism between any two tangent spaces which preserves the inner product. This does not hold for Finsler manifolds in general. When it does, the Finsler manifold is called monochromatic (an expressive term of D. Bao and Z. Shen). Y. Ichijyō proved that such Finsler manifolds are generalized Berwald manifolds. This means that the linear isomorphisms can be chosen as parallel translations with respect to a single linear connection. His proof relied on G -structures and their compatible connections, while our proof uses only simple properties of Ehresmann connections. To obtain the result we assumed, and so did Ichijyō, that the Finsler manifold is monochromatic in a smooth way. Informally, this means that the linear isomorphisms ‘depend smoothly’ on the

points. N. Bartelmeß and V. Matveev announced to prove that the condition is redundant, as it follows from the smoothness of the Finsler function. However, this result has not been published yet.

In the remainder of the Thesis we discuss isometries and affinities of Finsler manifolds and some relations between them. A bijection on a Finsler manifold is called affine, if it preserves the geodesics as parametrized curves, and an isometry, if it preserves the Finslerian distance function. Both conditions are formulated using objects living on the base manifold. They have counterparts that are defined in terms of objects living on the tangent manifold. The analogue of an affine mapping is an automorphism of the canonical spray S , that is, a diffeomorphism $\varphi: M \rightarrow M$ such that $\varphi_{**} \circ S = S \circ \varphi_*$. The analogue of an isometry is a Finsler isometry, that is, a diffeomorphism $\varphi: M \rightarrow M$ satisfying $F \circ \varphi_* = F$, where F is the Finsler function. The ‘tangent manifold counterparts’ are a priori more special, as they require differentiability. F. Brickell proved in the somewhat forgotten paper [8] that if an affine transformation is also a homeomorphism, then it is necessarily smooth, and hence an automorphism of the spray. Since isometries are automatically affinities and also homeomorphisms, they are also necessarily smooth, and hence Finsler isometries. The latter result was proved also by S. Deng and Z. Hou [13] much later, independently from Brickell. With the help of Lemma 3.1.1 we provide a simplified version of Brickell’s argument. We give another, more direct proof of the smoothness of isometries. It is based on a very elegant proof from [38] of the same result for Riemannian manifolds. It utilizes coordinate systems, whose coordinate functions are distance functions. We show that such coordinate systems do exist in the Finslerian case. Using these special coordinates we show also that under some regularity condition, submetries between reversible Finsler manifolds are differentiable. This is in fact a special case of a result about submetries between metric spaces [30], however we believe it is beneficial to have a purely differential geometric proof. Our argument mostly follows [6], where the same theorem is proved for Riemannian manifolds, although in that case, the argument yields that the submetries are of class $C^{1,1}$.

We continue by examining how some theorems of Riemannian geometry about the relations between affinities and isometries can be generalized to Finsler geometry. K. Yano showed that infinitesimal affinities (i.e., affine

vector fields) on a compact orientable Riemannian manifold are infinitesimal isometries (i.e., Killing vector fields) [52]; his proof is based on integral formulas. J.-I. Hano found a generalization: bounded affine vector fields on a complete Riemannian manifold are Killing vector fields. Hano's proof relies on the de Rham decomposition and special properties of irreducible Riemannian manifolds. Our Theorem 3.4.6 is a generalization of Hano's result to Finsler manifolds. Surprisingly, the proof is significantly simpler than the ones in [25, 19] for the more special Riemannian case, it utilizes only the Euler–Lagrange equation and the ‘fundamental inequality’ ([4, p. 7] or [45, Proposition 9.1.37]), and perhaps most notably, it does not need any concept analogous to irreducibility.

Another famous theorem about affinities and isometries is due to S. Kobayashi [24]. He proved that in a complete irreducible Riemannian manifold any affinity is an isometry, except for the 1-dimensional Euclidean space. We attempt to generalize this result to Finsler manifolds. Since there is no good analogue of irreducibility in Finsler geometry, we propose to replace it by one of its consequences: if the holonomy group of a Riemannian manifold is irreducible, then it determines the metric tensor up to a scalar factor. This property can be translated to Finsler geometry: we say that a Finsler manifold is affinely rigid, if its canonical spray determines the Finsler function up to a scalar factor (this translation indeed carries the intended meaning, since the canonical spray completely determines the holonomy). Affine rigidity turns out to be a suitable replacement of irreducibility in the theorem of Kobayashi, see Corollary 3.4.10. This suggests that affine rigidity should be examined further in order to properly understand the relation between affinities and isometries. We collect our results in Theorem 3.5.7 and we formulate an open question at the end of the section.

Our final results are about Finsler manifolds that admit local frame fields consisting of Killing vector fields. Such Finsler manifolds have been studied by M. Xu and S. Deng in [51]. We show that these Finsler manifolds are generalized Berwald manifolds, and hence monochromatic. We also show that if the Finsler function is compatible with the local parallelizations induced by the Killing frame fields, then the Finsler manifold is a Berwald manifold. This was already known in the special case when the whole manifold admits

a Killing frame field [1].

$\sim \circ \sim$

A technical remark about the Thesis. If a theorem, lemma, corollary or proposition is not new, we write the name of the original author right at the beginning of the statement between parentheses. If a result of ours have been already published, we cite the publication also at the beginning of the theorem.

2 Basic concepts and tools

Canonical constructions on the tangent bundle

By a manifold we mean a finite-dimensional smooth manifold whose underlying topology is second countable and Hausdorff. Mappings between manifolds are assumed to be smooth (infinitely many times differentiable), if not specified otherwise. For a manifold M we use the following notation:

- (1) $C^\infty(M)$ is the ring of smooth real-valued functions on M ;
- (2) $\tau: TM \rightarrow M$ is the tangent bundle of M ;
- (3) $\mathring{TM}$ is the submanifold of TM consisting of the nonzero tangent vectors to M , $\mathring{\tau} := \tau \upharpoonright \mathring{TM}$ is the slit tangent bundle of M ;
- (4) $\tau_{TM}: TTM \rightarrow TM$ is the tangent bundle of TM .

Some further notation:

- (5) For a vector field X , Fl^X is its maximal flow, Fl_t^X ($t \in \mathbb{R}$) is the t th stage of the flow.
- (6) For a vector bundle $\pi: B \rightarrow M$, $\Gamma(\pi)$ or $\Gamma(B)$ denotes the $C^\infty(M)$ -module of its (smooth) sections. In particular, $\mathfrak{X}(M) := \Gamma(TM)$ is the $C^\infty(M)$ -module of vector fields on M .
- (7) The derivative or tangent map of a map $\varphi: M \rightarrow N$ is $\varphi_*: TM \rightarrow TN$.

The *vertical lift* of a vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ is the velocity field $X^\vee$ of the global flow

$$(t, v) \in \mathbb{R} \times TM \longmapsto v + tX(\tau(v)) \in TM$$

on TM . If $\text{Fl}^X: \mathcal{D}_X \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ is the maximal flow of $X \in \mathfrak{X}(M)$ and

$$\tilde{\mathcal{D}}_X := \{(t, v) \in \mathbb{R} \times TM \mid (t, \tau(v)) \in \mathcal{D}_X\},$$

then

$$(t, v) \in \tilde{\mathcal{D}}_X \longmapsto (\text{Fl}_t^X)_*(v) \in TM$$

is a flow on TM , whose velocity field X^c is called the *complete lift* of X .

The *Liouville vector field* on TM is the velocity field C of the flow of the positive dilations

$$(t, v) \in \mathbb{R} \times TM \longmapsto e^t v \in TM.$$

The *vertical subbundle* of TTM is $VTM := \ker(\tau_*)$. It restricts naturally to a subbundle of $T\mathring{TM}$, denoted by $V\mathring{TM}$.

The pull-back $\mathring{\tau}^*\tau$ of τ by $\mathring{\tau}$ is a vector bundle over $\mathring{TM}$, called the *Finsler bundle*. Its total manifold is

$$\mathring{TM} \times_M TM := \{(u, v) \in \mathring{TM} \times TM \mid \mathring{\tau}(u) = \tau(v)\},$$

and its fibre over $u \in \mathring{TM}$ is $\{u\} \times T_{\mathring{\tau}(u)}M$. Every vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ can be lifted to a section

$$\widehat{X}: \mathring{TM} \rightarrow \mathring{TM} \times_M TM, \quad \widehat{X}(u) := (u, X(\mathring{\tau}(u)))$$

of the Finsler bundle, called the *basic lift* of X . All tensors on M can be lifted similarly to the Finsler bundle.

We have a natural $C^\infty(\mathring{TM})$ -linear injection $\mathbf{i}: \Gamma(\mathring{\tau}^*\tau) \rightarrow \Gamma(V\mathring{TM})$ specified by the rule $\mathbf{i}\widehat{X} = X^\vee$. We agree to identify such module homomorphisms with bundle maps, so we may regard $\mathbf{i}$ as a fibrewise linear mapping from $\mathring{TM} \times_M TM$ to $V\mathring{TM}$.

We denote by $\tilde{\delta}$ the *canonical section*

$$\tilde{\delta}: u \in \mathring{TM} \mapsto (u, u) \in \mathring{TM} \times_M TM$$

of $\mathring{\tau}^*\tau$. The Liouville vector field can be expressed as $\mathbf{i}\tilde{\delta} = C$.

We can construct a covariant-derivative-like operator

$$\nabla^\vee: \Gamma(\mathring{\tau}^*\tau) \times \Gamma(\mathring{\tau}^*\tau) \rightarrow \Gamma(\mathring{\tau}^*\tau)$$

on the Finsler bundle from the canonical differentiation on the fibres. For a section $\tilde{X}$ of $\tilde{\tau}^*\tau$, there exists a unique map $\underline{X}: \mathring{TM} \rightarrow TM$ such that $\tilde{X}(u) = (u, \underline{X}(u))$ for all $u \in \mathring{TM}$. Define

$$\nabla_{\tilde{X}}^\vee \tilde{Y}(u) := (u, (\underline{Y} \upharpoonright \mathring{T}_p M)'(u)(\underline{X}(u))), \quad p \in M, u \in T_p M,$$

and for a function $f \in C^\infty(\mathring{TM})$, set $\nabla_{\tilde{X}}^\vee f := \mathbf{i}\tilde{X}f$. Then $\nabla^\vee$ can be extended to a derivation of the tensors of $\tilde{\tau}^*\tau$ in the usual way. We call this derivation the *canonical vertical derivative*. In local coordinates, $\nabla^\vee$ is just ‘differentiation with respect to the y^i coordinates’. For example, if $f \in C^\infty(\mathring{TM})$, $(\mathcal{U}, (u^i))$ is a chart on M and $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i), (y^i))$ is the induced TM , then

$$\nabla^\vee f \underset{(\mathcal{U})}{=} \frac{\partial f}{\partial y^i} \widehat{du^i}, \quad \nabla^\vee \nabla^\vee f \underset{(\mathcal{U})}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j} \widehat{du^i} \otimes \widehat{du^j}, \quad \text{etc.} \quad (6)$$

Ehresmann connections and sprays

2.1. Let M be a manifold. By an *Ehresmann connection* in $\mathring{TM}$ we mean a smooth mapping

$$\mathcal{H}: \mathring{TM} \times_M TM \rightarrow T\mathring{TM}, \quad (u, v) \mapsto \mathcal{H}(u, v),$$

which satisfies the following conditions:

- (E1) $\mathcal{H}(u, v) \in T_u TM$ for all $(u, v) \in \mathring{TM} \times_M TM$;
- (E2) the mapping $v \mapsto \mathcal{H}(u, v)$ is $\mathbb{R}$ -linear for each fixed $u \in \mathring{TM}$;
- (E3) $\tau_* \mathcal{H}(u, v) = v$ for all $(u, v) \in \mathring{TM} \times_M TM$.

The image $H\mathring{TM} := \text{Im } \mathcal{H}$ of $\mathcal{H}$ is a subbundle of $T\mathring{TM}$ of rank $n = \dim M$, called the *horizontal subbundle corresponding to $\mathcal{H}$* . It is complementary to $V\mathring{TM}$, i.e.,

$$T\mathring{TM} = V\mathring{TM} \oplus H\mathring{TM}.$$

We have the projections $\mathbf{h}: T\mathring{TM} \rightarrow H\mathring{TM}$, $\mathbf{v}: T\mathring{TM} \rightarrow V\mathring{TM}$, characterized by

$$\text{Ker } \mathbf{v} = H\mathring{TM}, \quad \text{Ker } \mathbf{h} = V\mathring{TM}.$$

We also define the *vertical mapping* $\mathcal{V} := \mathbf{i}^{-1} \circ \mathbf{v}$; it is a left inverse for $\mathbf{i}$. For a vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$, $X^{\mathbf{h}} := \mathcal{H}\widehat{X}$ is the *horizontal lift* of X . The Ehresmann connection is *positive-homogeneous*, if the horizontal lifts are 1^+ -homogeneous, that is $[C, X^{\mathbf{h}}] = 0$ for all $X \in \mathfrak{X}(M)$.

2.2. A spray for M is a smooth vector field on $\mathring{T}M$ satisfying the following conditions:

$$(S1) \quad \tau_* \circ S = \text{id}_{\mathring{T}M}.$$

$$(S2) \quad [C, S] = S, \text{ that is, } S \text{ is } 2^+\text{-homogeneous.}$$

A *spray manifold* is a manifold M together with a spray for M . If $\mathcal{H}$ is a positive-homogeneous Ehresmann connection, then $S := \mathcal{H}\tilde{\delta}$ is a spray. Conversely, if S is a spray, there is an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ such that

$$\mathcal{H}(\widehat{X}) = X^{\mathbf{h}} = \frac{1}{2}(X^{\mathbf{c}} + [X^{\mathbf{v}}, S]) \quad \text{for all } X \in \mathfrak{X}(M).$$

We call this Ehresmann connection the *Berwald connection* of the spray manifold. Then $\mathcal{H}\tilde{\delta} = S$. For details, see [45, 7.3.3].

We define the *torsion* of an Ehresmann connection by

$$\mathbf{i}\mathbf{T}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = [X^{\mathbf{h}}, Y^{\mathbf{v}}] - [Y^{\mathbf{h}}, X^{\mathbf{v}}] - [X, Y]^{\mathbf{v}}; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

It is easy to check that the torsion of the Berwald connection of a spray manifold vanishes. In fact, one can show that every positive-homogeneous and torsion-free Ehresmann connection is the Berwald connection of a spray (for a proof, see [45, Theorem 7.8.7]).

2.3. The *Jacobi endomorphism* of a spray manifold (M, S) is the type $(1, 1)$ Finsler tensor field $\mathbf{K}$ defined by $\mathbf{K}(\tilde{X}) := \mathcal{V}[S, \mathcal{H}\tilde{X}]$, $\tilde{X} \in \Gamma(\mathring{\tau}^*\tau)$. If $n = \dim M \geq 2$, the function

$$K := \frac{1}{n-1} \text{tr } \mathbf{K} \tag{7}$$

is called the *curvature function* of (M, S) .

2.4. Let $\mathcal{H}$ be a positive-homogeneous Ehresmann connection in $\mathring{T}M$, $I \subset \mathbb{R}$ an open interval and $\gamma: I \rightarrow M$ a smooth curve. A vector field $X: I \rightarrow \mathring{T}M$

along γ is said to be *parallel with respect to $\mathcal{H}$* (briefly *$\mathcal{H}$ -parallel*, or simply *parallel*) if

$$\dot{X}(t) = \mathcal{H}(X(t), \dot{\gamma}(t)) \quad \text{for all } t \in I.$$

For each $t_0 \in I$ and $v \in \mathring{T}_{\gamma(t_0)}M$, there is a unique parallel vector field X along γ such that $X(t_0) = v$. Then $X(t)$ is the *parallel transport* of v along γ to $\mathring{T}_{\gamma(t)}M$. In this way we obtain a mapping $P(\gamma)_{t_0}^t: \mathring{T}_{\gamma(t_0)}M \rightarrow \mathring{T}_{\gamma(t)}M$ that sends each $v \in \mathring{T}_{\gamma(t_0)}M$ to its parallel transport. Then $P(\gamma)_{t_0}^t$ is smooth and 1^+ -homogeneous (in the obvious sense) for all $t \in I$. For details, see [45, 7.6]. It is natural to extend $P(\gamma)_{t_0}^t$ to $T_{\gamma(t_0)}M$ by declaring the zero vector fields to be parallel, and hence setting $P(\gamma)_{t_0}^t(0) = 0$.

2.5. An Ehresmann connection $\mathcal{H}$ induces a covariant-derivative-like operator $\nabla^h: \Gamma(\dot{\tau}^*\tau) \times \Gamma(\dot{\tau}^*\tau) \rightarrow \Gamma(\dot{\tau}^*\tau)$, given by $\nabla_{\tilde{X}}^h \tilde{Y} := \mathcal{V}[\mathcal{H}\tilde{X}, \mathbf{i}\tilde{Y}]$. For basic lifts we have

$$\nabla_{\hat{X}}^h \hat{Y} = \mathbf{i}^{-1}[X^h, Y^\vee]. \quad (8)$$

From ∇^h and $\nabla^\vee$ we build a covariant derivative operator

$$\nabla: \mathfrak{X}(\dot{T}M) \times \Gamma(\dot{\tau}^*\tau) \rightarrow \Gamma(\dot{\tau}^*\tau)$$

on the Finsler bundle such that $\nabla_{\mathcal{H}\tilde{X}} \tilde{Y} = \nabla_{\tilde{X}}^h \tilde{Y}$ and $\nabla_{\mathbf{i}\tilde{X}} \tilde{Y} = \nabla_{\tilde{X}}^\vee \tilde{Y}$. It is called the *Berwald derivative* induced by $\mathcal{H}$.

The *Berwald tensor* of $\mathcal{H}$ is

$$\mathbf{B}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} := \nabla_{\tilde{X}}^\vee \nabla_{\tilde{Y}}^h \tilde{Z} - \nabla_{\tilde{Y}}^h \nabla_{\tilde{X}}^\vee \tilde{Z} - \nabla_{[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathcal{H}\tilde{Y}]} \tilde{Z}.$$

On basic lifts, it acts simply by $\mathbf{i}\mathbf{B}(\hat{X}, \hat{Y})\hat{Z} = [[X^\vee, Y^h], Z^\vee]$, see [45, 7.13].

2.6. Let (M, S) be a spray manifold. By condition (S1), each integral curve $\sigma: I \rightarrow TM$ of S is of the form $\sigma = \dot{\gamma}$, where $\gamma := \tau \circ \sigma$. Such a curve γ is called a *geodesic* of S . Equivalently, a curve $\gamma: I \rightarrow M$ is a geodesic of S if $S \circ \dot{\gamma} = \ddot{\gamma}$. We declare the constant curves to be geodesics as well.

Linear connections and affine sprays

An Ehresmann connection $\mathcal{H}$ in $\dot{T}M$ is called *linear* if any of the following equivalent conditions holds:

- (L1) $\mathcal{H}$ is positive-homogeneous and can be extended smoothly to TM .
- (L2) The Christoffel symbols of $\mathcal{H}$ are fibrewise linear functions with respect to any chart of M .
- (L3) The Christoffel symbols of the Berwald derivative induced by $\mathcal{H}$ are constant on the fibres with respect to any chart of M .
- (L4) The Berwald tensor of $\mathcal{H}$ vanishes.
- (L5) For any two vector fields X, Y on M , their Lie bracket $[X^h, Y^v]$ is a vertical lift.
- (L6) There exists a unique covariant derivative D on M such that

$$(D_X Y)^v = [X^h, Y^v] \stackrel{(8)}{=} \mathbf{i}\nabla_{X^h} \widehat{Y}; \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

- (L7) The $\mathcal{H}$ -parallel translations along any smooth curve are linear mappings.

We note that we defined Ehresmann connections only on $\mathring{TM}$, hence in the statements above, many objects need to be extended smoothly to the zero vectors. These extensions can be carried out in an obvious way.

From now on, we will simply refer to linear Ehresmann connections as *linear connections*.

A spray S is called *affine* if any of the following equivalent conditions holds:

- (A1) S can be smoothly extended to TM .
- (A2) The coefficients of S are fibrewise quadratic forms.
- (A3) The Berwald connection determined by S is linear.

Condition (A3) implies that we can characterize affine sprays through their Berwald connection, by any of (L1)–(L7).

Finsler manifolds

Let M be a manifold. A function $F: TM \rightarrow \mathbb{R}$ is called a *Finsler function* (for M) if it satisfies the following conditions:

- (F1) F is continuous on TM and smooth on $\mathring{TM}$,
- (F2) F is 1^+ -homogeneous,
- (F3) $F(v) > 0$ if $v \neq 0$,
- (F4) the *fundamental tensor* $g := \frac{1}{2}\nabla^v\nabla^v F^2$ is (fibrewise) positive definite.

A *Finsler manifold* is a pair (M, F) consisting of a manifold M and a Finsler function F on TM . We say that $E := \frac{1}{2}F^2$ is the *energy function* associated to F or the energy function (briefly *energy*) of (M, F) . A Finsler manifold *reduces to a Riemannian manifold* if its energy is a quadratic form on each tangent space.

A smooth curve γ in M is a *geodesic* of the Finsler manifold, if it satisfies the Euler–Lagrange equation

$$\left(\frac{\partial E}{\partial y^i} \circ \dot{\gamma}\right)' - \frac{\partial E}{\partial x^i} \circ \dot{\gamma} = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (9)$$

for any chart that intersects the image of γ . There is unique spray S for M whose geodesics are the geodesics of the Finsler manifold. We call it the *canonical spray* of (M, F) . Then we can write (9) as

$$SX^v E - X^c E = 0 \quad \text{for all } X \in \mathfrak{X}(M). \quad (10)$$

This form of the Euler–Lagrange equation is due to M. Crampin, see [11, p. 348].

The Berwald connection $\mathcal{H}$ of the canonical spray is called the *canonical connection* of the Finsler manifold. It is the only Ehresmann connection in $\mathring{TM}$ which satisfies the following conditions:

- (CC1) $\mathcal{H}$ is positive-homogeneous;
- (CC2) the torsion of $\mathcal{H}$ vanishes;
- (CC3) $H\mathring{TM} := \text{Im}(\mathcal{H}) \subset \ker dF$.

(For details, see [45, Theorem 9.3.5].) Condition (CC3) guarantees that F is constant along parallel vector fields, thus the parallel translations with respect to the canonical connection preserve the Finsler function (see Lemma 2.3.1). Hence the canonical connection is a direct analogue of the Levi-Civita connection of a Riemannian manifold.

The exponential map of a spray

Let (M, S) be a spray manifold and let $\widetilde{TM}$ be the set of tangent vectors $v \in TM$ such that γ_v , the maximal geodesic of S with initial velocity v is defined at 1. The *exponential map* for S is the mapping

$$\exp: \widetilde{TM} \rightarrow M, \quad v \mapsto \exp(v) := \gamma_v(1).$$

3 New results of the Thesis

Projectively affine sprays

Two sprays S and $\bar{S}$ for a manifold M are *projectively related* if $\bar{S} = S - 2PC$ for some function P on $\mathring{TM}$. Then we also say that $\bar{S}$ is a *projective change of S with factor P* .

It can be shown by simple calculations that if a spray is projectively related to an affine spray, then its *Douglas tensor*

$$\mathbf{D} := \mathbf{B} - \frac{1}{n+1}((\nabla^v \operatorname{tr} \mathbf{B}) \otimes \tilde{\delta} + (\operatorname{tr} \mathbf{B}) \odot \operatorname{id}_{\Gamma(\tilde{\tau}^* \tau)})$$

vanishes. Our aim is to prove the converse. To do this, we need the notion of *vertically invariant volume forms*. These are volume forms on the tangent manifold of M , whose Lie-derivatives with respect to vertical lifts vanish.

Theorem 2.1.8 ([45]). *Let (M, S) be a spray manifold with vanishing Douglas tensor and let ω be a vertically invariant volume form on TM . Then*

$$\bar{S} := S - 2PC, \quad \text{where} \quad P := \frac{1}{2(n+1)} \operatorname{div}_\omega S,$$

is an affine spray.

Proposition 2.1.9 ([45]). *The tangent manifold of a manifold admits a vertically invariant volume form.*

Corollary 2.1.10 ([45]). *If the Douglas tensor of a spray manifold vanishes, then the spray is projectively related to an affine spray.*

Locally this was first proved by J. Douglas [15]. Global versions are due to Z. Shen [40, 5.2] and J. Szilasi and Sz. Vattamány [46]. However they assumed that the base manifold orientable. In our version this assumption is eliminated.

There are no proper Einstein–Berwald manifolds

A *Berwald manifold* is a Finsler manifold whose canonical spray is affine, or, equivalently, whose canonical connection is linear.

A Finsler manifold (M, F) is called an *Einstein–Finsler manifold* if the curvature function of its canonical spray given by (7) is related to the Finsler function by $K = (\lambda \circ \tau)F^2$, where $\lambda \in C^\infty(M)$. We have obtained a negative result on the existence of Einstein–Finsler manifolds among Berwald manifolds.

Lemma 2.2.1 ([14]). *The curvature function of a Berwald manifold is a quadratic form on each tangent space.*

Theorem 2.2.2 ([14]). *If a connected Einstein–Finsler manifold is a Berwald manifold, then it is either a Riemannian manifold or its curvature function vanishes.*

Monochromatic Finsler manifolds

Let M be a manifold and $\mathcal{U}$ an open submanifold of M . Consider a frame field $(X_i)_{i=1}^n$ on $\mathcal{U}$. Then the $\mathbb{R}$ -linear span of $(X_i)_{i=1}^n$ is called a *local parallelization (of M) over $\mathcal{U}$* . Given a local parallelization P over $\mathcal{U}$, a vector field in P is called *parallel* with respect to P . For any $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$, there is a unique parallel vector field v_P (w.r.t. P), such that $v_P(\tau(v)) = v$. For each $p, q \in \mathcal{U}$, we obtain a mapping $P_{qp}: T_p M \rightarrow T_q M$ by setting $P_{qp}(v) := v_P(q)$. The construction guarantees that these mappings are linear. A (not necessarily smooth) function $f: \mathring{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ is *compatible with P* , if $f \circ P_{qp} = f$ over $\mathring{T}_p M$ for all $p, q \in \mathcal{U}$. Equivalently, $f \circ X$ is constant for all $X \in P$.

We say that a (not necessarily smooth) function $f: \mathring{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ is *monochromatic*, if for any $p, q \in M$, there is a linear mapping L_{qp} from $T_p M$ to $T_q M$ such that $f \circ L_{qp} = f$ over $\mathring{T}_p M$. We say that f is *smoothly monochromatic*, if for any point $p \in M$ there is a local parallelization over an open neighbourhood of p , which is compatible with f . It is easy to see that smoothly monochromatic functions are monochromatic if M is connected.

Similarly, we say that a (not necessarily smooth) function $f: \mathring{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ is *compatible with a homogeneous Ehresmann connection $\mathcal{H}$* if the parallel translations with respect to $\mathcal{H}$ preserve f .

Lemma 2.3.1. *A function $f: \mathring{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ of class C^1 is compatible with a homogeneous Ehresmann connection if and only if the corresponding horizontal subbundle is a subset of $\ker df$.*

We establish some basic relations between functions compatible with linear connections and monochromatic functions.

Theorem 2.3.3. *If a function $f: \mathring{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ of class C^1 is smoothly monochromatic, then it is compatible with a linear connection.*

The converse is true without any restriction on the function.

Proposition 2.3.6. *If a not necessarily smooth function $f: \mathring{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ is compatible with a linear connection, then f is smoothly monochromatic.*

A Finsler manifold (M, F) is a *generalized Berwald manifold* if there is a linear connection in $\mathring{T}M$ compatible with F . From our two results above, the following characterization of generalized Berwald manifolds follows immediately.

Theorem 2.3.7 (Y. Ichijō [21]). *A Finsler manifold is a generalized Berwald manifold if and only if it is smoothly monochromatic.*

We note that Y. Ichijō's proof relied on G -structures and their compatible connections. Our proof relies merely on simple properties of Ehresmann connections and utilizes only the differentiability of the Finsler function, and so is very simple.

Finally we have a modern reformulation of a classical result that goes back to H. Weyl.

Theorem 2.3.9 (Weyl). *Let $f: T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ be a Finsler norm. (Then f is continuous, 1^+ -homogeneous, smooth and positive on $T_pM \setminus \{0\}$, and $f''(v)$ is positive definite for all $v \in T_pM \setminus \{0\}$.) For each parallelization P over an open subset $\mathcal{U} \subset M$ containing p , define a Finsler function F_P for $\mathcal{U}$ by*

$$F_P(v) := f(v_P(p)).$$

Assume that for each such parallelization P , $(\mathcal{U}, F_P)$ is a Berwald manifold. Then f is an Euclidean norm.

Affinities and isometries are smooth

Given a Finsler manifold (M, F) or a spray manifold (M, S) , we define an *affinity* as a (not necessarily smooth) bijective mapping $\varphi: M \rightarrow M$ that preserves geodesics. More precisely, φ is an affinity if for any geodesic γ , $\varphi \circ \gamma$ is also a geodesic. Similarly, for a Finsler manifold (M, F) , a (not necessarily smooth) bijective mapping $\varphi: M \rightarrow M$ is an *isometry* if $\varrho(\varphi(p), \varphi(q)) = \varrho(p, q)$, for all $p, q \in M$. Here $\varrho(p, q)$ is the (generally non-symmetric) Finslerian distance, defined as the infimum of the set of lengths of the piecewise smooth curves connecting p with q (in this order).

F. Brickell proved [8] that affine homeomorphisms of spray manifolds, and isometries of Finsler manifolds are necessarily smooth. His proof can be simplified using the lemma below, which may be interesting in its own right.

Lemma 3.1.1. *Let (M, S) be a spray manifold, p a point in M . Suppose that (a_n) and (b_n) are sequences converging to p , and let*

$$L_n := \exp_{a_n}^{-1}(b_n), \quad A_n := \exp_p^{-1}(a_n), \quad B_n := \exp_p^{-1}(b_n); \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n - A_n - L_n}{\|L_n\|} = 0,$$

and hence $\frac{\|B_n - A_n\|}{\|L_n\|} \rightarrow 1$. Furthermore, if one of the sequences

$$\left(\frac{B_n - A_n}{\|B_n - A_n\|} \right), \quad \left(\frac{L_n}{\|L_n\|} \right)$$

converges, then so does the other, and their limits coincide.

Here $\|\cdot\|$ is the norm with respect to an arbitrarily chosen Riemannian metric on M .

Distance coordinates

Let (M, F) be a Finsler manifold and $(p_i)_{i=1}^n$ a family of points in M such that the mapping

$$u_\varrho: q \mapsto (\varrho(p_1, q), \dots, \varrho(p_n, q))$$

is a diffeomorphism from an open subset $\mathcal{U}$ of M onto an open subset of $\mathbb{R}^n$. Then $(\mathcal{U}, u_\varrho)$ is called a *distance chart* for (M, F) .

Lemma 3.3.1 ([3]). *Any point of a Finsler manifold has a neighbourhood that admits a distance chart.*

Using distance charts, we give a simple new proof for the smoothness of isometries which does not rely on the smoothness of affinities. We borrowed the idea of proof from P. Petersen's book [38, Ch. 5.10].

As a further application of distance charts, we show that regular submetries between reversible Finsler manifolds are differentiable (Theorem 3.3.3 below). This result is known in the more general setting of metric spaces (see [30]). We believe, however, that our proof is more accessible and more interesting for experts in differential geometry. First we clarify the terminology.

Let M_1 and M_2 be metric spaces. We denote by $\mathcal{B}$ the metric balls in both of them. We say that a mapping $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ is a *submetry* if for any p in M_1 , there is a positive number δ such that for every $\varepsilon \in]0, \delta[$ we have $\varphi(\mathcal{B}_\varepsilon(p)) = \mathcal{B}_\varepsilon(\varphi(p))$. For each $p \in M_1$, the supremum of these positive numbers δ will be denoted by δ_p (note that δ_p can be infinite). We say that a submetry is *regular* if for any compact set $\mathcal{K} \subset M_1$ we have

$$\delta_{\mathcal{K}} := \inf_{p \in \mathcal{K}} \delta_p > 0.$$

Recall that a Finsler manifold is *reversible*, if $F(-v) = F(v)$ for every $v \in TM$. In case of such a Finsler manifold, the distance function ϱ is symmetric, and hence (M, ϱ) is a metric space.

Lemma 3.3.2 ([3]). *Let (M, F) be a reversible Finsler manifold, p a point in M , and $\mathcal{U}$ a normal neighbourhood of p . Then the distance function ϱ_p at p restricted to $\mathcal{U} \setminus \{p\}$ is a regular submetry into $\mathbb{R}$ with respect to its canonical distance.*

Theorem 3.3.3 (A. Lytchak [30],[3]). *A surjective regular submetry between reversible Finsler manifolds is differentiable.*

In the proof we borrowed some ideas from [6] where the analogous result is proved in Riemannian setting.

Relations between affinities and isometries

In Riemannian geometry, some celebrated results give sufficient conditions for the equivalence of affinities and isometries (see, e.g., [25, pp. 242–244]). We present some Finslerian counterparts.

Our first result is about infinitesimal affinities and isometries. These are vector fields on the base manifold, whose stages have the corresponding property. Infinitesimal affinities are called *affine vector fields*, and infinitesimal isometries are called *Killing vector fields*.

First we generalize a theorem of J.-I. Hano to Finsler manifolds. Hano proved that *bounded affine vector fields on a complete Riemannian manifold are Killing fields*. His proof relies on the de Rham decomposition theorem and special properties of irreducible Riemannian manifolds.

Rather surprisingly, Hano's theorem can be proved for Finsler manifolds without introducing any analogue of irreducibility (or decomposition). In fact, our proof is elementary, it relies merely on the Euler–Lagrange equation (10). The key is the following simple observation.

Lemma 3.4.5 ([23]). *If X is an affine vector field on a Finsler manifold (M, F) and γ is a geodesic, then for all t and t_0 in the domain of γ we have*

$$X^\vee E(\dot{\gamma}(t)) = X^\vee E(\dot{\gamma}(t_0)) + (t - t_0)X^c E(\dot{\gamma}(t_0)).$$

This lemma is in fact a disguised special case of Exercise 5.4.3(c) from [4], which states the following: if J is a Jacobi field along a geodesic γ , then

$$g_\gamma(J, \dot{\gamma})(t) = g_\gamma(J(t_0), \dot{\gamma}(t_0)) + (t - t_0)g_\gamma(J'(t_0), \dot{\gamma}(t_0)),$$

where J' is the covariant derivative of J along γ with respect to the Berwald or the Chern derivative. However, it is easier to prove the lemma directly, than from the quoted exercise.

Theorem 3.4.6 ([23]). *Let (M, F) be a Finsler manifold, X an affine vector field on M , and suppose that one of the following conditions holds:*

- (1) $F \circ X$ is bounded, and (M, F) is complete;
- (2) $F \circ X$ and $F \circ (-X)$ are bounded, and (M, F) is forward complete.

Then X is a Killing vector field.

As a simple corollary we have

Theorem 3.4.7 (J.-I. Hano). *Let (M, g) be a complete Riemannian manifold, and X an affine vector field on M such that the function $g(X, X)$ is bounded. Then X is a Killing vector field.*

Since compact Finsler manifolds are complete, we also have

Theorem 3.4.8 ([23]). *An affine vector field on a compact Finsler manifold is a Killing vector field.*

The Riemannian version of the last theorem is due to K. Yano [52].

Another interesting result about the relation between affinities and isometries is due to S. Kobayashi. He proved that *the affinities and isometries of a complete irreducible Riemannian manifold coincide, except for the 1-dimensional Euclidean space.*

We propose a possible generalization of Kobayashi's theorem to Finsler manifolds, by replacing irreducibility with affine rigidity, defined as follows. We say that a spray S for M is *uniquely metrizable*, if it is the canonical spray of a Finsler function F for M , and if $\tilde{F}$ is another Finsler function whose canonical spray is also S , then on each component of M , $\tilde{F}$ is a scalar multiple of F (in other words, $d(F/\tilde{F}) = 0$). We say that a Finsler manifold (M, F) is *affinely rigid*, if its canonical spray S is uniquely metrizable. The following result is a direct Finslerian analogue of [25, p. 242, Lemma 1].

Lemma 3.4.9. *An affinity of a connected affinely rigid Finsler manifold is a homothety.*

Here by a homothety we mean a diffeomorphism φ satisfying $F \circ \varphi_* = cF$ for some constant c . Since the only forward complete Finsler manifold admitting homotheties that are not isometries are the Finsler vector spaces [29], we have:

Corollary 3.4.10. *The affinities and isometries of a connected forward complete affinely rigid Finsler manifold coincide.*

This generalization of Kobayashi's theorem is not very efficient, as little is known about affinely rigid Finsler manifolds. We continue with exploring some sufficient conditions.

Affinely rigid Finsler manifolds

Assume that (M, F) is connected Finsler manifold.

We may construct the holonomy group of a Finsler manifold, analogously to that of a Riemannian manifold, using the parallel translation with respect to the canonical connection (see 2.4). In this way, for a fixed $p \in M$, we obtain a subgroup Hol_p of the group of diffeomorphisms of $\hat{T}_p M$.

Proposition 3.5.1. *If Hol_p acts transitively on the unit sphere*

$$U(T_p M) := F^{-1}(\{1\}) \cap T_p M,$$

then (M, F) is affinely rigid.

It is well-known that irreducible Riemannian manifolds are affinely rigid. By Berger's holonomy theorem [7, 36] there are irreducible Riemannian manifolds whose holonomy groups are not transitive on the unit sphere. This implies that the converse of Proposition 3.5.1 is not true, and the transitivity of Hol_p should be replaced by a weaker condition.

To prepare the formulation of our results, we have to recall a few concepts and results about singular distributions from [32]. Given a manifold M , we denote by $\mathfrak{X}_{loc}(M)$ the set of vector fields that are defined only on an open subset of M . Suppose that for each $p \in M$ we have selected a subspace $\mathcal{E}_p$ of $T_p M$. Then the disjoint union $\mathcal{E} = \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{E}_p$ is a *singular distribution* on M . We denote by $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}}$ the set of (smooth) local vector fields in $\mathfrak{X}_{loc}(M)$, that take values only in $\mathcal{E}$. We say that a subset $\mathcal{V}$ of $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}}$ *spans* $\mathcal{E}$, if at each $p \in M$, $\mathcal{E}_p$ is the linear span of $\{X(p) \in T_p M \mid X \in \mathcal{V}\}$. (We agree that the linear span of the empty set is $\{0\}$.) We say that $\mathcal{E}$ is *smooth* if it is spanned by $\mathfrak{X}_{\mathcal{E}}$.

An *integral manifold* of a smooth singular distribution $\mathcal{E}$ on M is an immersed submanifold $i: N \rightarrow M$ such that $i_*(T_p N) = \mathcal{E}_{i(p)}$ for all $p \in N$. It turns out that these integral manifolds are actually initial submanifolds [32, 2.13], so we need not to specify the immersion i .

For a set $\mathcal{W} \subset \mathfrak{X}_{loc}(M)$, $\mathcal{S}(\mathcal{W})$ denotes the set of local vector fields of the form

$$(\text{Fl}_{t_1}^{X_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{X_k})_{\#} Y,$$

where $X_1, \dots, X_k, Y \in \mathcal{W}$, $k \in \mathbb{N}$.

Let $\mathcal{D}^h$ be the smooth singular distribution spanned by $\mathcal{S}(\mathfrak{X}_{H\dot{T}M})$, where $H\dot{T}M$ is the horizontal subbundle corresponding to the canonical connection of (M, F) .

Lemma 3.5.2. *With the introduced notation, $\mathcal{D}^h \subset \ker(dF)$.*

Corollary 3.5.3. *The Finsler function F is constant on the connected integral manifolds of $\mathcal{D}^h$.*

Proposition 3.5.5. *If $\mathcal{D}^h$ has dimension $2n - 1$ over a dense subset of $\dot{T}M$, then (M, F) is affinely rigid.*

Proposition 3.5.6. *If $U(TM) := F^{-1}(\{1\})$ contains countably many maximal integral manifolds of $\mathcal{D}^h$, then (M, F) is affinely rigid.*

To summarize, from the results of this section, Lemma 3.4.9 and Corollary 3.4.10 we obtain:

Theorem 3.5.7. *Let (M, F) be a connected Finsler manifold satisfying any of the following conditions:*

- (1) Hol_p acts transitively on the unit sphere $U(T_pM) := F^{-1}(\{1\}) \cap T_pM$;
- (2) $\mathcal{D}^h$ has dimension $2n - 1$ over a dense subset of $\dot{T}M$;
- (3) $U(TM) := F^{-1}(\{1\})$ contains countably many maximal integral manifolds of $\mathcal{D}^h$.

Then any affine transformation of (M, F) is a homothety. If, in addition, (M, F) is forward complete, then any affine transformation of it is an isometry.

Some special cases of these results have been appeared in the literature. J. Szenthe in [43] considered (in our terminology) the singular distribution spanned by the vector fields $\mathbf{v}[\xi, \eta]$ where $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_{H\dot{T}M}$. He proved that if it is a distribution and its rank is $n - 1$, then any affine transformation is a homothety. This is a special case of our result, because $\mathcal{S}(\mathfrak{X}_{H\dot{T}M})$ is closed under Lie brackets by [32, 3.27 Lemma], and the dimension of $\mathcal{D}^h$ is $2n - 1$ if and only if the dimension of $\mathbf{v}\mathcal{D}^h$ is $n - 1$. In [17], the authors considered the singular distribution spanned by all the successive Lie brackets of the vector

fields in $\mathfrak{X}_{HTM}$, and assumed that it is a distribution. They have found a connection between the codimension of this distribution and the maximal number of functionally independent Finsler functions that have the same canonical spray as F . As a special case, they obtained that if the codimension is 1, then the canonical spray is uniquely metrizable. Our Proposition 3.5.5 is a generalization of this result, because we allow the distribution to be singular, and it is also larger, thus it has a better chance to have the maximal dimension $2n - 1$ (almost) everywhere.

The following converse of Proposition 3.5.5 is quite tempting:

If the dimension of $\mathcal{D}^h$ is less than $2n - 1$ on an open subset of TM , then (M, F) is not affinely rigid.

If $\mathcal{D}^h$ has a nonmaximal dimension on an open subset, it can have (uncountably) many integral manifolds, which forces less rigidity on the Finsler functions that metrize the canonical spray. However, even if a smooth singular distribution has nonmaximal dimension on an open subset, it can still uniquely determine the continuous functions that are constant on the integral manifolds. For example, there is a smooth singular distribution on $\mathbb{R}^2$ (endowed with the canonical coordinate system (x, y)) whose maximal integral manifolds are

- (a) the half-planes given by the inequalities $y < 0$ and $y > 1$;
- (b) the ‘vertical’ line segment $\{(x_0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1\}$, for each $x_0 \in \mathbb{R}$;
- (c) each point of the straight lines given by $y = 0$ and $y = 1$.

It is easy to see that the only continuous functions that are constant on each of these integral manifolds are the constant functions. However, we do not know whether a similar configuration can occur or not in the case of $\mathcal{D}^h$.

Finsler manifolds with many Killing vector fields

Let (M, F) be a Finsler manifold. A local parallelization P over an open subset of M is called a *Killing parallelization* if it is the $\mathbb{R}$ -linear span of Killing vector fields.

We say that a Finsler manifold (M, F) has the *Killing property* (cf. [51]), if each point in M has an open neighbourhood that admits a Killing parallelization. We say that (M, F) has the *constant Killing property* if it has the Killing property, and the Killing parallelizations are also compatible with F .

These concepts were motivated by the paper [12] where the authors examined Riemannian manifolds which admit local orthonormal frame fields consisting of Killing vector fields. Finsler manifolds with constant Killing property are direct generalizations of these Riemannian manifolds. We give simple proofs for the following two theorems.

Theorem 3.6.1. *A Finsler manifold with Killing property is a generalized Berwald manifold.*

Theorem 3.6.2. *A Finsler manifold with constant Killing property is a Berwald manifold.*

We note that the last result is a generalization of a corollary of Theorems 3.21 and 3.22 in [1].

Publikációk

- (1) J. SZILASI, R. L. LOVAS AND D. CS. KERTÉSZ, *Several ways to a Berwald manifold – and some steps beyond*, Extracta Mathematicae, **26** (2011), 89–130.
- (2) T. Q. BINH, D. CS. KERTÉSZ AND L. TAMÁSSY, *On Projectively Flat Finsler Spaces*, Acta Math. Hung., **141**(4) (2013), 383–400.
- (3) B. ARADI AND D. CS. KERTÉSZ, *Isometries, Submetries and Distance Coordinates on Finsler Manifolds*, Acta Math. Hung., **143**(2) (2014), 337–350.
- (4) B. ARADI AND D. CS. KERTÉSZ, *A characterization of holonomy invariant functions on tangent bundles*, Balkan J. Geom. Appl., **19**(2) (2014), 1–10.
- (5) J. SZILASI, R. L. LOVAS AND D. CS. KERTÉSZ, *Connections, Sprays, and Finsler Structures*, World Scientific, 2014.
- (6) S. DENG, D. CS. KERTÉSZ AND Z. YAN, *There are no proper Berwald–Einstein manifolds*, Publ. Math. Debrecen, **86** (2015), 245–249.
- (7) D. CS. KERTÉSZ, *Finslerian Lie derivative and Landsberg manifolds*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.), **31**(2) (2015).

- (8) D. CS. KERTÉSZ AND L. TAMÁSSY, *Differentiable distance spaces*, Acta Math. Hung., **148**(2) (2016), 405–424.
- (9) D. CS. KERTÉSZ AND R. L. LOVAS, *A generalization and short proof of a theorem of Hano on affine vector fields*, benyújtva.

Fontosabb szakmai előadások

- (1) *A characterization of holonomy invariant functions on tangent bundles* (joint work with B. Aradi),
The 8th Bilateral Workshop on Differential Geometry and its Applications, Balatonföldvár, 2012. október 12–14.
- (2) *Projectively affine sprays and the Douglas tensor*,
Colloquium on Differential Geometry and its Applications, 2013. augusztus 26–30.
- (3) *The Thomas–Veblen Theorem in Vector Bundle Setting*,
A Debreceni és az „Alexandru Ioan Cuza” egyetem geometriai tanszékeinek közös szemináriuma, Iasi, 2013. november 29.
- (4) *The Isabelle proof assistant*,
The 15th Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Będlewo, Lengyeleország, 2015. január 28–31.
- (5) *A generalization and short proof of a theorem of Hano on affine vector fields*,
New methods in Finsler geometry, Lipcse, 2016. július 5–9.

Hivatkozások

- [1] B. ARADI, *Parallelisms and Finsler structures*, PhD thesis, University of Debrecen, 2015.
- [2] B. ARADI AND D. CS. KERTÉSZ, *A characterization of holonomy invariant functions on tangent bundles*, Balkan J. Geom. Appl., **19** (2014), 1–10.
- [3] ———, *Isometries, submetries and distance coordinates on Finsler manifolds*, Acta Math. Hungar., **143** (2014), 337–350.
- [4] D. BAO, S.-S. CHERN, AND Z. SHEN, *An Introduction to Riemann–Finsler geometry*, Springer, 2000.
- [5] D. BAO, C. ROBLES, AND Z. SHEN, *Zermelo navigation on Riemannian manifolds*, J. Differential Geom., **66** (2004), 377–435.

- [6] V. BERESTOVSKII AND L. GUIJARRO, *A metric characterization of Riemannian submersions*, Annals of Global Analysis and Geometry, **18** (2000), 577–588.
- [7] M. BERGER, *Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France, **83** (1955), 279–330.
- [8] F. BRICKELL, *On the differentiability of affine and projective transformations*, Proc. Amer. Math. Soc., **16** (1965), 567–574.
- [9] X. CHENG, Z. SHEN, AND Y. TIAN, *A class of Einstein (α, β) -metrics*, Israel J. Math., **192** (2012), 221–249.
- [10] M. CRAMPIN, *On the construction of Riemannian metrics for Berwald spaces by averaging*, Houston J. Math., **40** (2014), 737–750.
- [11] M. CRAMPIN AND F. A. E. PIRANI, *Applicable differential geometry*, vol. 59, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [12] J. E. D'ATRI AND H. K. NICKERSON, *The existence of special orthonormal frames*, J. Differential Geometry, **2** (1968), 393–409.
- [13] S. DENG AND Z. HOU, *The group of isometries of a Finsler space*, Pac. J. Math., **207** (2002), 149–155.
- [14] S. DENG, D. CS. KERTÉSZ, AND Z. YAN, *There are no proper Berwald–Einstein manifolds*, Publ. Math. Debrecen, **86** (2015), 245–249.
- [15] J. DOUGLAS, *The general geometry of paths*, Ann. of Math., **29** (1927/28), 143–168.
- [16] L. D. DRAGER, J. M. LEE, E. PARK, AND K. RICHARDSON, *Smooth distributions are finitely generated*, Ann. Global Anal. Geom., **41** (2012), 357–369.
- [17] S. G. ELGENDI AND Z. MUZSNAY, *Freedom of $h(2)$ -variationality and metrizability of sprays*, Diff. Geom. Appl., (2017).
- [18] W. GREUB, S. HALPERIN, AND R. VANSTONE, *Connections, Curvature and Cohomology*, vol. 1, Academic Press, New York and London, 1972.
- [19] J.-I. HANO, *On affine transformations of a Riemannian manifold*, Nagoya Math. J., **9** (1955), 99–109.
- [20] J. HILGERT AND K.-H. NEEB, *Structure and Geometry of Lie Groups*, Springer, 2012.
- [21] Y. ICHIJYŌ, *Finsler manifolds modeled on Minkowski spaces*, J. Math. Kyoto Univ., **16** (1976), 639–652.
- [22] M. KELL, *A note on non-negatively curved Berwald spaces*, arXiv:1502.03764, (2015).

- [23] D. CS. KERTÉSZ AND R. L. LOVAS, *A generalization and short proof of a theorem of Hano on affine vector fields*, submitted, (2016).
- [24] S. KOBAYASHI, *A theorem on the affine transformation group of a Riemannian manifold*, Nagoya Math. J., **9** (1955), 39–41.
- [25] S. KOBAYASHI AND K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry. Vol. I*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.
- [26] L. KOZMA, *Holonomy structures in Finsler geometry*, in Handbook of Finsler geometry. Vol. 1, 2, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003, 445–488.
- [27] S. LANG, *Differential and Riemannian Manifolds*, vol. 160 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [28] D. LAUGWITZ, *Differential and Riemannian geometry*, Translated by Fritz Steinhardt, Academic Press, New York-London, 1965.
- [29] R. L. LOVAS AND J. SZILASI, *Homotheties of Finsler manifolds*, SUT J. Math., **46** (2010), 23–34.
- [30] A. LYTCHAK, *Differentiation in metric spaces*, St. Petersburg Math. J., **16** (2004), 1017–1041.
- [31] V. S. MATVEEV, *Riemannian metrics having common geodesics with Berwald metrics*, Publ. Math. Debrecen, **74** (2009), 405–416.
- [32] P. W. MICHOR, *Topics in Differential Geometry*, vol. 93 of Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2008.
- [33] Z. MUZSNAY AND P. T. NAGY, *Finsler manifolds with non-Riemannian holonomy*, Houston J. Math., **38** (2012), 77–92.
- [34] ———, *Finsler 2-manifolds with maximal holonomy group of infinite dimension*, Differential Geom. Appl., **39** (2015), 1–9.
- [35] S. B. MYERS AND N. STEENROD, *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Ann. of Math., **40** (1939), 400–416.
- [36] C. OLMOS, *A geometric proof of the Berger holonomy theorem*, Ann. of Math. (2), **161** (2005), 579–588.
- [37] B. O’NEILL, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.
- [38] P. PETERSEN, *Riemannian Geometry, 2nd ed.*, Springer, 2006.
- [39] M. RAFIE-RAD AND B. REZAEI, *On Einstein Matsumoto metrics*, Nonlinear Anal. Real World Appl., **13** (2012), 882–886.
- [40] Z. SHEN, *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

- [41] ———, *On projectively related Einstein metrics in Riemann-Finsler geometry*, Math. Ann., **320** (2001), 625–647.
- [42] Z. I. SZABÓ, *Positive definite Berwald spaces (Structure theorems on Berwald spaces)*, Tensor N.S., **35** (1981), 25–39.
- [43] J. SZENTHE, *Symmetries of Lagrangian fields are homotheties in the homogeneous case*, in Differential geometry and applications (Brno, 1995), Masaryk Univ., Brno, 1996, 321–328.
- [44] J. SZILASI, R. L. LOVAS, AND D. CS. KERTÉSZ, *Several ways to a Berwald manifold – and some steps beyond*, Extracta Mathematicae, **26** (2011), 89–130.
- [45] ———, *Connections, Sprays and Finsler Structures*, World Scientific, 2014.
- [46] J. SZILASI AND S. VATTAMÁNY, *Erratum to: „On the projective geometry of sprays”[Differential Geom. Appl. 12 (2000) 185–206]*, Differential Geometry and its Applications, **13** (2000), 97–118.
- [47] R. E. TRABER, *A fundamental lemma on normal coordinates and its applications*, Quart. J. Math. Oxford, **8** (1937), 142–147.
- [48] CS. VINCZE, *A new proof of Szabó’s theorem on the Riemann-metrizability of Berwald manifolds*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.(NS), **21** (2005), 199–204.
- [49] J. H. C. WHITEHEAD, *Convex regions in the geometry of paths*, Quart. J. Math. Oxford, **3** (1932), 33–42.
- [50] ———, *Convex regions in the geometry of paths – addendum*, Quart. J. Math. Oxford, **4** (1933), 226–227.
- [51] M. XU AND S. DENG, *Killing frames and S-curvature of homogeneous Finsler spaces*, Glasg. Math. J., **57** (2015), 457–464.
- [52] K. YANO, *On harmonic and Killing vector fields*, Ann. of Math. (2), **55** (1952), 38–45.
- [53] Y. YU AND Y. YOU, *On Einstein m -th root metrics*, Differential Geom. Appl., **28** (2010), 290–294.



Nyilvántartási szám: DEENK/106/2017.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Kertész Dávid Csaba

Neptun kód: FTZYDK

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

MTMT azonosító: 10038224

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű, külföldi könyvek (1)

1. Szilasi, J., Lovas, R. L., **Kertész, D. C.**: Connections, sprays and Finsler structures. World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ, 709 p., 2013. ISBN: 9789814440097

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (2)

2. Deng, S., **Kertész, D. C.**, Yan, Z.: There are no proper Berwald-Einstein manifolds.
Publ. Math.-Debr. 86 (1-2), 245-249, 2015. ISSN: 0033-3883.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2015.7102>
IF: 0.438
3. Aradi, B., **Kertész, D. C.**: Isometries, submetries and distance coordinates on Finsler manifolds.
Acta Math. Hung. 143 (2), 337-350, 2014. ISSN: 0236-5294.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10474-013-0381-1>
IF: 0.429





További közlemények

Idegen nyelvű közlemények hazai folyóiratban (3)

4. **Kertész, D. C.**, Tamássy, L.: Differentiable distance spaces.
Acta Math. Hung. 148 (2), 405-424, 2015. ISSN: 0236-5294.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10474-015-0577-7>
IF: 0.469
5. **Kertész, D. C.**: Finslerian Lie derivative and Landsberg manifolds.
Acta math. Acad. Paedagog. Nyházi. 31 (2), 297-308, 2015. ISSN: 1786-0091.
6. Tran Quoc, B., **Kertész, D. C.**, Tamássy, L.: On projectively flat Finsler spaces.
Acta Math. Hung. 141 (4), 383-400, 2013. ISSN: 0236-5294.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10474-013-0327-7>
IF: 0.401

Idegen nyelvű közlemények külföldi folyóiratban (3)

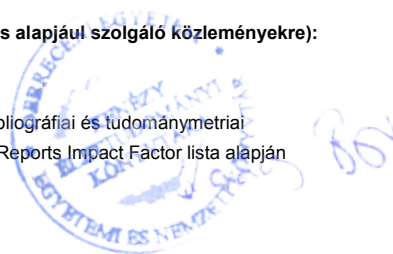
7. **Kertész, D. C.**, Lovas, R. L.: A generalization and short proof of a theorem of Hano on affine vector fields.
ArXiv e-print [Epub], 1-3, 2016.
8. Aradi, B., **Kertész, D. C.**: A characterization of holonomy invariant functions on tangent bundles.
Balk. J. Geom. Appl. 19 (2), 1-10, 2014. ISSN: 1224-2780.
9. Szilasi, J., Lovas, R. L., **Kertész, D. C.**: Several ways to a Berwald manifold and some steps beyond.
Extr. Math. 26 (1), 89-130, 2011. ISSN: 0213-8743.

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 1,737

**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):
0,867**

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudományometriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2017.04.20.





Registry number:
Subject:

DEENK/106/2017.PL
PhD Publikációs Lista

Candidate: Dávid Csaba Kertész

Neptun ID: FTZYDK

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

MTMT ID: 10038224

List of publications related to the dissertation

Foreign language international books (1)

1. Szilasi, J., Lovas, R. L., **Kertész, D. C.**: Connections, sprays and Finsler structures. World Scientific Publishing Co., Hackensack, NJ, 709 p., 2013. ISBN: 9789814440097

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (2)

2. Deng, S., **Kertész, D. C.**, Yan, Z.: There are no proper Berwald-Einstein manifolds.
Publ. Math.-Debr. 86 (1-2), 245-249, 2015. ISSN: 0033-3883.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2015.7102>
IF: 0.438
3. Aradi, B., **Kertész, D. C.**: Isometries, submetries and distance coordinates on Finsler manifolds.
Acta Math. Hung. 143 (2), 337-350, 2014. ISSN: 0236-5294.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10474-013-0381-1>
IF: 0.429





List of other publications

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (3)

4. **Kertész, D. C.**, Tamássy, L.: Differentiable distance spaces.
Acta Math. Hung. 148 (2), 405-424, 2015. ISSN: 0236-5294.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10474-015-0577-7>
IF: 0.469
5. **Kertész, D. C.**: Finslerian Lie derivative and Landsberg manifolds.
Acta math. Acad. Paedagog. Nyházi. 31 (2), 297-308, 2015. ISSN: 1786-0091.
6. Tran Quoc, B., **Kertész, D. C.**, Tamássy, L.: On projectively flat Finsler spaces.
Acta Math. Hung. 141 (4), 383-400, 2013. ISSN: 0236-5294.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10474-013-0327-7>
IF: 0.401

Foreign language scientific articles in international journals (3)

7. **Kertész, D. C.**, Lovas, R. L.: A generalization and short proof of a theorem of Hano on affine vector fields.
ArXiv e-print [Epub], 1-3, 2016.
8. Aradi, B., **Kertész, D. C.**: A characterization of holonomy invariant functions on tangent bundles.
Balk. J. Geom. Appl. 19 (2), 1-10, 2014. ISSN: 1224-2780.
9. Szilasi, J., Lovas, R. L., **Kertész, D. C.**: Several ways to a Berwald manifold and some steps beyond.
Extr. Math. 26 (1), 89-130, 2011. ISSN: 0213-8743.

Total IF of journals (all publications): 1,737

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 0,867

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóster have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

20 April, 2017

