Periodic Ground State in QED_{1+1}

Periodikus alapállapot az 1+1-dimenziós kvantumelektrodinamikában

Doktori (Ph.D.) Értekezés Tézisei

Nagy Sándor

Debrecen, 2004.

Készült:

A Debreceni Egyetem Elméleti Fizikai Tanszékén

Témavezető:

Dr. Sailer Kornél

1 Purpose

The purpose of this Ph.D. thesis was to determine the ground state of a one-dimensional electron system for arbitrary charge density in the framework of the charged massive Schwinger model and to give a detailed analysis of the structure of the ground state.

The periodic structure is quite familiar in solid state physics, the classical example is that the crystals have periodic build-up and it is well-known that the free low density electron gas also has periodic layout (Wigner crystal). In quantum field theory the models are usually treated by perturbation expansion and it is typically assumed that the ground state of the system is homogeneous, structureless. However there are indications in the literature that the ground state may be inhomogeneous for certain models. For example the exact treatment of the interaction of electrons with the classical external field introduces infinitely many non-renormalizable, i.e. irrelevant vertices which may support a non-trivial periodic ground state[1]. Furthermore an inhomogeneous condensate appears in QCD_4 in the large N_c limit at high fermion densities[2]. This result motivated the search for periodic structure in low-dimensional field theoretical models. These models have little importance for the real world and can be regarded as simple toy models in quantum field theory owing to their simplicity, but their investigation usually can be carried out without approximations. It was found that the Gross-Neveu and the t'Hooft models exhibit periodic baryon density in the ground state[3]. The charged massive Schwinger model is not solvable exactly. In the framework of the bosonized version of the model simple analytic arguments lead to the result that the charged massive Schwinger model also have inhomogenous, periodic ground state for a certain regime of the charge density[4]. The Ph.D. thesis gives a systematic numerical search for the ground state in the bosonized model throughout any value of the charge density. The

[1] J. Fingberg, J. Polonyi, Nucl. Phys. **B**486, 315, (1997)

[2] D. V. Deryagin, D. Yu. Grigoriev, V. A. Rubakov, Int. J. Mod. Phys. A**47**, 659, (1992)

[3] V. Schön, M. Thies, Phys. Rev. D**62**, 096002, (2000)

[4] W. Fischler, J. Kogut, L. Susskind Phys. Rev. **D**19, 1188, (1979)

thesis also complements the investigation of the model by determination of the ground state in terms of the original, fermionic degrees of freedom.

2 Methods

The ground state for the massive Schwinger model has been determined in the presence of homogeneous external charge density. The energy density of the ground state has been calculated numerically in the bosonized version of the model as well as in terms of the original degrees of freedom of QED by variational methods. The scalar field configuration and the charge density of the ground state for the bosonized model have been obtained by minimizing the tree-level energy in the presence of static, homogeneous external charge density. The minimization was performed by the conjugate gradient method. In the fermionic approach the finite charge density was realized by the introduction of the chemical potential. The energy of the ground state has been determined as the two-loop expectation value of the T^{00} component of the energy-momentum tensor in the presence of a periodic photon condensate. The interaction of the fermions with the photon condensate was treated non-perturbatively using the exact fermion propagator in the periodic background potential. Using the collective coordinate method we have determined the energy density as the function of the amplitude and the wavelength of a sinusoidal photon condensate. The numerical search for its minimum has provided the vacuum. We complemented our numerical investigations with analytic calculations at the one-loop order for large densities.

3 Results

Our results can be summarized in the following points:

1. The massive sine-Gordon model was investigated in the presence of static homogeneous external charge density at zero temperature [R6].

The ground state was determined numerically by minimizing the tree-level expression of the energy by the conjugate gradient method.

(a) The energy minimum for vanishing external charge density was found for the identically vanishing field configuration, as expected.

(b) For small external charge density the system of finite size shows up a phase with partial screening of the external charge density. This phase disappears in the thermodynamic limit.

(c) The system exhibits a single periodic phase in the thermodynamic limit for arbitrary charge densities. The periodic structure built up in the ground state has decreasing amplitude and wavelength with increasing charge density due to the periodic non-linearity of the classical field equation for the boson field.

(d) In the ground state the homogeneous external charge density is neutralized in average by the periodic induced charge density. The wavelength of the periodic structure is found to be equal to the 'specific volume' of the external charges that reflects the complete screening of a test charge being integer multiple of the electron charge.

(e) At large charge densities, where the numerics fails to give reliable results, it was confirmed by analytic calculations that the ground state keeps its periodic structure for arbitrarily large values of the charge density.

2. By diagonalizing numerically the Dirac Hamiltonian in presence of a static, periodic external field, we determined the relativistic one-particle fermionic spectrum [R4] and found a band structure rather similar to that for the non-relativistic case. For undercritical fields, when the amplitude of the background potential is smaller than the electron mass, the mass gap around zero energy separates the infinite towers of bands above and below this gap. For overcritical fields, when the amplitude exceeds the electron mass the two towers of the bands

start to overlap, the mass gap vanishes, and opens the way for electron-positron pair-creation.

3. We applied the collective coordinate method in order to define the generator functional of Green functions for QED in a background field in a consistent method [R1, R4], where one integrates over electromagnetic field configurations which are orthogonal to the background field.

   With this method after integrating out the fermion fields we determined the one-loop effective action of the effective photon theory in the static, homogeneous background field, and showed that it has a maximum, which signals an instability in this approximation [R4]. We could identify this instability as the relativistic analogue of the Peierls instability.

   The one-loop photon polarization function has been determined numerically [R2, R3, R5] for the homogeneous, free relativistic electron system with finite chemical potential $e\mu > m$ for zero energy transfer, e and m are the electric charge and the rest mass of the electron, respectively. We showed that just as in the non-relativistic case, the real part of the one-loop polarization function is singular and the singularities are at the momenta $q_1 = \pm 2k_F$, with the Fermi momentum k_F. Therefore the one-dimensional relativistic electron system is also unstable against static periodic electromagnetic perturbations of the momentum $q_1 = \pm 2k_F$ in its normal ground state and with switched-off electron-electron interaction for any values of the chemical potential.

4. We also determined the one-loop photon polarization function in the presence of a static, periodic external electric field for zero energy transfer [R6]. The electron system in a static, periodic external electric field is also unstable against periodic, static fluctuations of the momentum $q_1 = \pm 2k_F$ if the Fermi-level is positioned in an allowed band. However when the Fermi-level lies in a forbidden band then the value of the polarization function remains finite for any photon

momentum q_1, so a periodic ground state could be stable. A gap can be created by an infitesimally small amplitude of the periodic background field, and results in stability of the relativistic electron system.

5. For not too large charge densities the numerical search for the minimum of the two-loop energy in the framework of QED versus the parameters of the static, periodic electric background field verified reliably once again [R6] that the ground state is periodic. The general trends in the charge-density dependence of the amplitude and that of the wavelength of the periodic structure are in agreement with those found in the framework of the bosonized model.

   Again, a straightforward perturbation expansion enables us to extrapolate the existence of the periodic ground state to arbitrarily large charge densities, at least in the one-loop order.

Summarizing, in this Ph.D. thesis **it is achieved a better understanding of the existence and structure of the periodic ground state of the massive Schwinger model in the presence of static, homogeneous external charge density.**

Publications apperared on the results of the present Ph.D. thesis

[R1] S. Nagy and K. Sailer, Heavy Ion Phys. **11**, 67, (2000)

[R2] S. Nagy and K. Sailer, Phil. Mag. **B 81**, 1583, (2001)

[R3] S. Nagy, J. Polonyi and K. Sailer Acta Phys. et Chim. Debrecina **XXXIV-XXXV**, 249, (2002)

[R4] S. Nagy, J. Polonyi and K. Sailer Heavy Ion Phys., Proc. Non-Euclidean Geometry in Modern Physics, 73, (2002)

[R5] S. Nagy, J. Polonyi and K. Sailer Acta Phys. Hung. A 19/3-4, 247, (2004)

[R6] S. Nagy, J. Polonyi and K. Sailer, hep-th/0405156, accepted for publication in Phys. Rev. D

Talks, Posters

[1] *Itinerary Congress for Physicists*, 1998. Gödöllő, poster: Periodic vacuum in QED_2

[2] *Non-Euclidean Geometry in Modern Physics, 3rd Bolyai-Gauss-Lobachevsky Conference*, Tirgu-Mures - MarosVásárhely, 3-6 July 2002, Romania giving a talk: Linear response of a one-dimensoinal electron system in static periodic background field

[3] *Wigner Centennial Conference In Commemoration Of The 100th Year Of Wigner's Birth In Hungary*, 7-12 July 2002, Pécs, giving a talk: One-dimensional Wigner crystal?

[4] *Nuclear Physics Day*, Budapest, 30 April 2003, giving a talk: Periodic Ground State of a One-dimensional Electron System

[5] *Jubilee International Scientific Conference, Condensed Matter Section*, 29-31 May 2003, Oradea - Nagyvárad, giving a talk: Peierls-type Instability in the Ground State of Electrons, contribution to proceedings

4. Célkitűzés

Célom az, hogy meghatározzam az egydimenziós elektronrendszer alapállapotát, tetszőleges külső homogén töltéssűrűség esetén a tömeges Schwinger-modell keretében, és az alapállapot szerkezetének részletes leírását adjam.

Periodikus struktúra gyakran jelenik meg a szilárdtestfizikában, ennek klasszikus példája a kristályos anyagok periodikus szerkezete. Emellett régóta ismert, hogy a kis sűrűségű szabad elektrongáz szintén periodikus struktúrát mutat (Wigner-kristály). Kvantumtérelméleti modellek esetében is feltehető a kérdés, hogy az alapállapota periodikus szerkezetű-e. Amennyiben a modellt perturbatív módon kezeljük, általában feltesszük, hogy a fizikai rendszer alapállapota homogén, szerkezet nélküli. Vannak azonban olyan nem-perturbatív módon kapott eredmények, amelyek azt mutatják, hogy bizonyos modellekben az alapállapot inhomogén. Például, ha egy elektronrendszer külső térrel való kölcsönhatását nem-perturbatív módon, egzaktul vesszük figyelembe, akkor az végtelen sok nem-renormálható, irreleváns kölcsönhatási tagot generál a modell Lagrange-függvényébe, és ezek ereményezhetnek periodikus alapállapotot[5]. Inhomogén alapállapot alakul ki a négydimenziós kvantumszíndinamikában is nagy bariontöltések esetén, ha nagyon sokféle színtöltés létezését feltételezzük[6]. A periodikus struktúra kialakulásának megvilágítására alacsony dimenziós térelméleti modellekben kezdték el tanulmányozni az alapállapotot. Ezek a modellek ugyan nem alkalmasak konkrét fizikai rendszerek közvetlen leírására, viszont elég egyszerűek, és gyakran közelítés nélkül megoldhatóak. Azt találták, hogy a Gross-Neveu- és a 't Hooft-modell szintén periodikus alapállapottal rendelkezik[7]. A töltött tömeges Schwinger-modell nem oldható meg egzakt módon. A modell bozonizált változatának keretében egyszerű analitikus megfontolásokból jutottak arra a következtetésre, hogy meghatározott töltéssűrűség-tartományban az alapállapot inhomogén, periodikus[8]. A

[5] J. Fingberg, J. Polonyi, Nucl. Phys. **B**486, 315, (1997)

[6] D. V. Deriagin, D. Yu. Grigoriev, V. A. Rubakov, Int. J. Mod. Phys. A**47**, 659, (1992)

[7] V. Schön, M. Thies, Phys. Rev. D**62**, 096002, (2000)

[8] W. Fischler, J. Kogut, L. Susskind Phys. Rev. **D**19, 1188, (1979)

dolgozatom ezt az eredményt vizsgálja numerikus eszközökkel, és egészíti ki tetszőleges töltéssűrűségre. A vizsgálatom annyiban is többletet hordoz az irodalomban ismert eddigi eredményekhez képest, hogy a töltött tömeges Schwinger-modell alapállapotát a modell eredeti megfogalmazásában, a fermionikus szabadsági fokok használatánál maradva is meghatároztam.

5. Vizsgálati módszerek

A tömeges Schwinger-modell alapállapotát határoztam meg külső, homogén töltéssűrűség jelenlétében. Az alapállapot energiasűrűségét numerikusan számoltam ki részben az eredetivel ekvivalens bozonikus modellben, másrészt az eredeti, fermionikus szabadsági fokok segítségével. Először a bozonikus modellben a sztatikus térkonfigurációk között kerestem meg az alapállapoti térkonfigurációt rögzített külső töltés jelenlétében, mint a fagráf-közelítésben számolt energiafunkcionál minimumhelyét. A numerikus minimalizáláshoz konjugált gradiens módszert használtam. A fermionikus számolás során a véges töltéssűrűséget véges kémiai potenciál segítségével vezettem be. A fermionikus modellben az alapállapotot úgy kerestem meg, hogy a kéthurok-közelítésben, numerikusan számolt energiát minimalizáltam a létrejövő periodikus, elektrosztatikus tér amplitúdója és hullámszáma függvényében. Az elektronok periodikus háttértérrel való kölcsönhatását nem-perturbatív módon vettem figyelembe úgy, hogy a számolás során a periodikus potenciál jelenlétében számolt egzakt fermionpropagátort használtam. Nagy sűrűségekre egyhurok-közelítésben végzett analitikus számolással határoztam meg az alapállapotot.

6. Eredmények

Kutatásaim eredményeit az alábbi pontokban foglalom össze:

1. A tömeges sine-Gordon-modellt vizsgáltam háttértöltés jelenlétében zérus hőmérsékleten [R6]. Az alapállapoti térkonfigurációt az energiafunkcionál fagráf-közelítésben számolt kifejezésének minimalizálásával

határoztam meg, konjugált gradiens módszerrel. Ez a következő eredményeket adta:

(a) Zérus töltéssűrűség esetén az energia minimumát az azonosan zérus térkonfigurációnál találtam meg, a várakozásnak megfelelően.

(b) Kis töltéssűrűség esetén a véges méretű rendszer alapállapotában a külső homogén töltéssűrűség csak részlegesen van leárnyékolva. Megmutattam, hogy a termodinamikai határesetben ez a részleges leárnyékolással jellemzett fázis eltűnik.

(c) Termodinamikai határesetben egyetlen, periodikus töltéssűrűséggel jellemezhető fázist találunk minden töltésűrűségre. A kialakult periodikus szerkezet amplitúdója és hullámhossza csökken a töltéssűrűség növelésével.

(d) A periodikus alapállapotban a homogén háttértöltést teljesen leárnyékolja az indukált töltéssűrűség. A periodikus alapállapot hullámhossza egyenlő a külső töltés fajtérfogatával. Ez azt jelenti, hogy a rendszerbe helyezett próbatöltés teljesen leárnyékolódik, ha a próbatöltés az elektrontöltésnek egész számú többszöröse.

2. Sztatikus, periodikus potenciál jelenlétében numerikusan megoldottam a kétdimenziós téridőben a Dirac-egyenletet, meghatároztam a fermionok egyrészecskés spektrumát és az energia-sajátállapotokhoz tartozó Dirac-spinorokat [R4]. A diszperziós reláció sávszerkezetet mutat ugyanúgy, mint nem-relativisztikus esetben. Ha a periodikus tér amplitúdója kisebb, mint az elektrontömeg, akkor a zérus energia körül kialakuló energiarés szétválasztja a pozitív- és a negatívfrekvenciás egyrészecskés energiákat. Ellenkező esetben a rés eltűnik, és a pozitív- és negatívfrekvenciás egyrészecskés energiák átlapolnak, ekkor elektron-pozitron párképződés történhet.

3. A kollektív koordináták módszerével konzisztens módon definiáltam a Green-függvények generáló funkcionálját elektrosztatikus háttértér jelenlétében.

Ennek segítségével meghatároztam az effektív hatást egyhurok-közelítésben homogén külső elektrosztatikus tér jelenlétében és megmutattam, hogy annak maximuma van, ami instabilitást jelez ebben a közelítésben [R4]. A kapott instabilitás a Peierls-féle instabilitás relativisztikus analógiájának tekinthető.

Homogén, relativisztikus elektronrendszerre meghatároztam a polarizációs függvényt egyhurok-közelítésben, véges kémiai potenciál jelenlétében, zérus energiaátadásnál [R2, R3, R5]. Megmutattam, hogy annak valós része szinguláris a $q_1 = \pm 2k_F$ impulzusoknál (k_F a Fermi-impulzus), ami azt jelenti, hogy az egydimenziós elektronrendszer normál alapállapota instabil a $q_1 = \pm 2k_F$ impulzusú sztatikus periodikus elektromágneses perturbációval szemben.

4. Külső, periodikus elektrosztatikus tér jelenlétében szintén meghatároztam az elektronrendszer polarizációs függvényét egyhurok-közelítésben, zérus energiaátadásnál [R6]. Az elektronrendszer továbbra is instabil $q_1 = \pm 2k_F$ impulzusú sztatikus periodikus elektromágneses perturbációval szemben, ha a Fermi-szint egy megengedett sávban van. Ha azonban a Fermi-szint tiltott sávba esik, akkor a polarizációs függvény véges, ebben az esetben a periodikus alapállapot stabillá válhat.

5. Numerikusan megkeresve a kéthurok-közelítésben számolt energia minimumát a sztatikus periodikus elektromos háttértér paramétereinek függvényében, a bozonikus számolás eredményeivel egybehangzóan azt találtam, hogy a periodikus szerkezetű alapállapot energetikailag kedvezőbb, mint a homogén. A kialakult periodikus szerkezet amplitúdója és hullámszáma, a bozonikus esethez hasonlóan, csökken a töltéssűrűség növelésével. Ezért a numerikus eredmény kis töltéssűrűségnél megbízható.

   Nagy töltéssűrűségeknél a perturbációs sorfejtéssel analitikusan egyhurok-közelítésben kapott eredmények azt mutatják, hogy ebben a sűrűségtartományban is a periodikus alapállapot az energetikailag kedvezőbb.

Összefoglalva, a doktori dolgozatomban **több oldalról is alátámasztottam, hogy a töltött tömeges Schwinger-modellben az alapállapot periodikus, és a periodikus szerkezet jobb megértését segítő eredményeket szolgáltattam.**

A tézisek alapjául szolgáló közlemények

[R1] S. Nagy and K. Sailer, Heavy Ion Phys. **11**, 67, (2000)

[R2] S. Nagy and K. Sailer, Phil. Mag. **B 81**, 1583, (2001)

[R3] S. Nagy, J. Polonyi and K. Sailer Acta Phys. et Chim. Debrecina **XXXIV-XXXV**, 249, (2002)

[R4] S. Nagy, J. Polonyi and K. Sailer Heavy Ion Phys., Proc. Non-Euclidean Geometry in Modern Physics, 73, (2002)

[R5] S. Nagy, J. Polonyi and K. Sailer Acta Phys. Hung. A 19/3-4, 247, (2004)

[R6] S. Nagy, J. Polonyi and K. Sailer, hep-th/0405156, elfogadva közlésre a Phys. Rev. **D** folyóiratnál

Előadások, Poszterek

[1] *Itinerary Congress for Physicists*, 1998. Gödöllő, poszter: Periodic Vacuum in QED_2

[2] *Non-Euclidean Geometry in Modern Physics, 3rd Bolyai-Gauss-Lobachevsky Conference*, Tirgu-Mures - MarosVásárhely, 2002 július 3-6., Románia, előadás: Linear Response of a One-dimensional Electron System in Static Periodic Background Field

[3] *Wigner Centennial Conference In Commemoration Of The 100th Year Of Wigner's Birth In Hungary*, 2002 július 7-12., Pécs, előadás: One-dimensional Wigner Crystal?

[4] *Magfizika nap*, Budapest, 2003. április 30., előadás: Egydimenziós Elektronrendszer Periodikus Alapállapota

[5] *Jubileumi Tudományos Nemzetközi Konferencia, Kondenzált Anyagok Fizikája szekció*, 2003 május 29-31., Oradea - Nagyvárad, meghívott előadóként előadás: Peierls-type Instability in the Ground State of Electrons, megjelenik a konferencia proceedings kiadványában