Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

Függvényegyenletek és karakterizációs problémák

Mészáros Fruzsina

Témavezető: Dr. Lajkó Károly

Debreceni Egyetem

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2010

Bevezetés

Függvényegyenletek megoldása az analízis egyik régi problémája. A közgazdaságtan, fizika, statisztika számos területén alkalmazott függvényegyenletek kutatását Magyarországon elsőként Aczél János kezdte. Az első nagyobb átfogó munkák is az ő nevéhez kötődnek (lásd [1], [2]). Függvényegyenletekkel és alkalmazásaikkal azóta is sokan foglalkoznak, közgazdasági téren lásd például Eichhorn [15] könyvét, műszaki téren Castillo és Ruiz-Cobo [10] munkáját, valószínűségelméleti alkalmazásokkal Ramachandran és Lau [53] illetve Yadrenko [56] könyvét, míg információelméleti vonatkozásban Aczél és Daróczy [3] monográfiáját.

A disszertáció eredményei hangsúlyosan kapcsolódnak az úgynevezett korlátozott tartományokon teljesülő függvényegyenletek vizsgálatához. Részben azokhoz, amikor explicite megadjuk a függvényegyenlet tartományának korlátozását. Itt név szerint is ki kell emelni Aczél és Erdős [5], Daróczy és Losonczi [11], Székelyhidi [54], Ger [18] és Páles [52] eredményeit, de más szerzők (lásd [14], [25], [26]) munkásságát is. Másrészt az Erdős [16] felvetése nyomán induló azon vizsgálatokhoz kötődnek, amikor az egyenletek (a Lebesgue-mértékre nézve) majdnem mindenütt teljesülnek az alaphalmazon. Ilyenkor több esetben (pl. a Cauchy-alapegyenlet [12], [13], [23] és a Cauchy exponenciális egyenlet [4] esetén) az általános megoldások is meghatározhatók, melyek majdnem mindenütt megegyeznek a teljes alaphalmazon teljesülő egyenletek megoldásaival. Ugyanakkor, a függvényegyenletek egy szélesebb körénél, Járai [20], [21] igen általános eredményei segítségével belátható, hogy a majdnem mindenütt teljesülő függvényegyenlet mérhető megoldásai majdnem mindenütt megegyeznek az adott egyenlet folytonos megoldásaival, de az általános megoldás meghatározása még nyílt probléma.

A dolgozatban a valószínűségelmélet karakterizációs problémáihoz kapcsolódó függvényegyenleteket vizsgálunk, majd ezeket a karakterizációs problémákat be is mutatjuk a függvényegyenletek megoldása során kapott eredmények felhasználásával a különböző jellemzésekben. Ezzel a témakörrel elsők között Narumi (lásd [50]), majd az ő vizsgálatait pontosítva Arnold, Castillo és Sarabia (lásd [6] és [7]) foglalkozott. Végzett ilyen irányú vizsgálatokat Lajkó (lásd [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33]) és Wesołowski (lásd pl. [55]) is. Az értekezés célja hasonló eredmények igazolása az eddigieknél gyengébb - az alkalmazások szempontjából sokkal természetesebb - feltételek mellett.

1. Egyváltozós eloszlások jellemzése során felhasznált függvényegyenletek

Ebben a fejezetben azon függvényegyenletek általános, illetve mérhető (vagy sűrűségfüggvény) megoldásait vizsgáljuk, amelyekkel egyváltozós eloszlások karakterizációs problémáinak vizsgálata során találkoztunk. A felhasználás szempontjából mindenképp fontos, hogy egyenleteink vizsgálata során maga a függvényegyenlet csak majdnem mindenütt teljesüljön az adott tartományon és a szereplő ismeretlen függvényekről csak annyit feltételezünk, hogy mérhetőek vagy pedig sűrűségfüggvényei valamilyen valószínűségi változónak (azaz mérhetőek, a Lebesgue-mérték szerint majdnem mindenütt nemnegatívak és integráljuk 1).

Járai bevezetésben jelzett eredményének (a disszertáció 1.1.1. tételének) segítségével több majdnem mindenütt teljesülő egyenletnél is megmutatjuk, hogy a mérhető megoldások majdnem mindenütt megegyeznek a mindenütt teljesülő egyenlet folytonos megoldásaival. A Steinhaus tétel egy általánosításával ([17] ill. 1.1.2. tétel) pedig azt látjuk be, hogy a sűrűségfüggvény megoldások majdnem mindenütt pozitívak (vagy mindenütt pozitívak, ha az egyenlet mindenütt teljesül).

Az 1.2. alfejezetben az általunk Olkin-Baker egyenletnek nevezett

$$f(x)\,g(y) = p(x+y)\,q\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}_+^2\right) \tag{1}$$

függvényegyenlettel foglalkozunk, melynek vizsgálatát Olkin [51] vetette fel az f, g, p, $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ismeretlen függvényekre. Az első, eléggé általános eredményeket Baker ([9]) és Lajkó ([28]) érték el. A továbbiakban fontos szerepet játszó mérhető (folytonos) megoldások is ismertek.

Meghatározzuk a majdnem mindenütt teljesülő (1) függvényegyenlet f, g, p, $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mérhető, majd az úgynevezett sűrűségfüggvény megoldásait.

A fejezet eredményeit az [47] közlemény és az [48] előadás tartalmazzák.

Először belátjuk, hogy igaz a következő:

Lemma. *(1.2.1.) Ha az f, g, p, $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mérhető függvények kielégítik az* (1) *függvényegyenletet majdnem minden $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, akkor egyértelműen léteznek $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, $\tilde{p}$, $\tilde{q} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvények, hogy $\tilde{f} = f$, $\tilde{g} = g$, $\tilde{p} = p$ és $\tilde{q} = q$ majdnem mindenütt, és ha az f, g, p, q függvényeket a $\tilde{f}$, $\tilde{g}$, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ függvényekkel helyettesítjük, akkor az* (1) *egyenlet mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+^2$-en.*

Ezután a mindenütt teljesülő (1) egyenlet mérhető (folytonos) megoldásainak segítségével megadjuk a majdnem mindenütt teljesülő egyenlet mérhető (folytonos) megoldásait.

Tétel. *(1.2.2.) Tegyük fel, hogy a mérhető f, g, p, $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ függvények* *kielégítik a* (1) *egyenletet majdnem minden* $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ *esetén, akkor*

$$\begin{aligned} f(x) &= A\exp[ax + b\ln x] \qquad (m.m.\ \ x \in \mathbb{R}_+), \\ g(x) &= B\exp[ax + (c-b)\ln x] \qquad (m.m.\ \ x \in \mathbb{R}_+), \\ p(x) &= C\exp[ax + c\ln x] \qquad (m.m.\ \ x \in \mathbb{R}_+), \\ q(x) &= D\exp[b\ln x - c\ln(x+1)] \qquad (m.m.\ \ x \in \mathbb{R}_+), \end{aligned}$$

ahol $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ *és* $A,\ B,\ C,\ D \in \mathbb{R}_+$ *tetszőleges konstansok, amelyek teljesítik az* $AB = CD$ *feltételt.*

A majdnem mindenütt teljesülő (1) egyenlet sűrűségfüggvény megoldásainak meghatározásához először Járai ([21]), illetve Baker ([9]) módszeréhez hasonlót alkalmazva belátjuk, hogy igaz a következő.

Tétel. *(1.2.3.) Legyenek az* $f,\ g,\ p,\ q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *olyan nemnegatív függvények, amelyek kielégítik a majdnem minden* $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ *esetén teljesülő* (1) *egyenletet és léteznek* $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4 \subset \mathbb{R}_+$ *pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak. Ekkor* $f,\ g,\ p,\ q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *majdnem mindenütt pozitívak.*

Belátjuk, hogy a fenti lemma és tétel érvényes lesz sűrűségfüggvényekre is (lásd 1.2.2. lemma és 1.2.4. tétel a disszertációban).

Az 1.3. alfejezetben a béta eloszlás jellemzéséhez kapcsolódó függvényegyenleteket vizsgálunk, melyeket Wesołowski ([55]) vetett fel.

Kiemeljük az $f_X,\ f_Y,\ f_U,\ f_V : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ sűrűségfüggvényekre minden $(u,v) \in (0,1)^2$ esetén teljesülő

$$f_U(u)\, f_V(v) = f_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) f_Y(1-uv)\, \frac{v}{1-uv} \tag{2}$$

függvényegyenletet. Ezen fejezet célja Wesołowski eredményeinek lényeges általánosítása.

A fejezet eredményeit a [36] közlemény és a [45] és [49] előadások tartalmazzák.

A (2) egyenlet alábbi általános megoldásának meghatározásához használjuk Maksa egy eredményét ([42]) a négy ismeretlen függvényt tartalmazó általánosított információ-alapegyenletről.

Tétel. *(1.3.2.) Az* $f_X,\ f_Y,\ f_U,\ f_V : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ *függvények akkor és csakis akkor teljesítik a* (2) *egyenletet minden* $(u,v) \in (0,1)^2$ *esetén, ha*

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \exp[l_1(x) + l_2(1-x) + a_1] \quad (x \in (0,1)), \\ f_Y(x) &= x\exp[l_1(x) + l_2(x) + l_3(1-x) + a_1 + b_2] \quad (x \in (0,1)), \\ f_U(x) &= \exp[l_2(1-x) + l_3(x) + a_2] \quad (x \in (0,1)), \\ f_V(x) &= x\exp[l_1(1-x) + l_2(x) + l_3(x) + a_2 + b_1] \quad (x \in (0,1)), \end{aligned}$$

ahol az l_i $(i = 1, 2, 3)$ *függvények kielégítik az*

$$l_i(xy) = l_i(x) + l_i(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

logaritmikus egyenletet és a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$ *konstansok, hogy* $2a_1 + b_2 = 2a_2 + b_1$.

Ezek után könnyen kapjuk (2) folytonos vagy mérhető megoldásait (1.3.1. következmény).

A majdnem mindenütt teljesülő (2) egyenlet mérhető megoldásairól először belátjuk, hogy igaz a következő.

Lemma. *(1.3.3.) Ha az* f_X, f_Y, f_U, $f_V : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ *mérhető függvények majdnem minden* $(u,v) \in (0,1)^2$ *esetén teljesítik a (2) egyenletet, akkor egyértelműen léteznek* $\widetilde{f}_X$, $\widetilde{f}_Y$, $\widetilde{f}_U$, $\widetilde{f}_V : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ *folytonos függvények úgy, hogy* $\widetilde{f}_X = f_X$, $\widetilde{f}_Y = f_Y$ $\widetilde{f}_U = f_U$, $\widetilde{f}_V = f_V$ *majdnem mindenütt, és ha az* f_X, f_Y, f_U, f_V *függvényeket sorban az* $\widetilde{f}_X$, $\widetilde{f}_Y$, $\widetilde{f}_U$, $\widetilde{f}_V$ *függvényekkel helyettesítjük, akkor a (2) függvényegyenlet mindenütt teljesül a* $(0,1)^2$ *halmazon.*

Ezután megmutatjuk, hogy igaz az alábbi:

Tétel. *(1.3.3.) Az* f_X, f_Y, f_U, $f_V : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ *mérhető függvények akkor és csakis akkor elégítik ki a (2) egyenletet majdnem minden* $(u,v) \in (0,1)^2$ *esetén, ha léteznek olyan pozitív* p, q, r, ε_i $(i = 1,2,3,4)$ *konstansok az* $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_3\varepsilon_4$ *tulajdonsággal, hogy*

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \varepsilon_1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} && (m.m.\ x \in (0,1)),\\
f_Y(y) &= \varepsilon_2 y^{p+q-1}(1-y)^{r-1} && (m.m.\ y \in (0,1)),\\
f_U(u) &= \varepsilon_3 u^{r-1}(1-u)^{q-1} && (m.m.\ u \in (0,1)),\\
f_V(v) &= \varepsilon_4 v^{q+r-1}(1-v)^{p-1} && (m.m.\ v \in (0,1))
\end{aligned}$$

teljesül.

A majdnem mindenütt teljesülő (2) egyenlet sűrűségfüggvény megoldásairól előbb belátjuk, hogy majdnem mindenütt pozitívak (lásd 1.3.4. tétel).

Továbbá érvényes marad az előbbi lemma és tétel sűrűségfüggvényekre is (lásd 1.3.4. lemma és 1.3.5. tétel).

Ebben az alfejezetben vizsgáljuk még (2) általános megoldását ha minden $(u,v) \in (0,1)^2$-re teljesül, f_X, f_Y, f_U, f_V nemnegatívak és léteznek A, B, C, $D \subset (0,1)$ pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak (lásd 1.3.6. tétel).

Az 1.4. alfejezetben a normális eloszlás jellemzéséhez kapcsolódó sokak által vizsgált (pl. Baker [8] és Lajkó [29])

$$f(x)\,g(y) = h(ax+by)\,k(cx+dy) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right) \tag{3}$$

függvényegyenletet tekintjük, ahol f, g, h, $k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vagy $\mathbb{R}$ függvények, a, b, c, d pedig rögzített nullától különböző valós számok az $\Delta := ad - bc \neq 0$ tulajdonsággal.

Baker meghatározta az összes mérhető és nem majdnem mindenütt nulla $f,\ g,\ h,\ k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényt, amely kielégíti a (3) egyenletet, Lajkó pedig megadta (3) összes olyan $f,\ g,\ h,\ k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldását, amely nem majdnem mindenütt nulla. Itt meghatároztuk a majdnem mindenütt teljesülő (3) egyenlet összes mérhető $f,\ g,\ h,\ k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ megoldását, illetve a sűrűségfüggvény megoldásokat is.

Az alfejezet eredményei az [46] dolgozatban és az [48] előadásban találhatók meg.

Fő eredményünk (melyhez több lépésen keresztül jutunk) a következő.

Tétel. *(1.4.4.) Tegyük fel, hogy az $f,\ g,\ h,\ k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvények kielégítik a (3) egyenletet majdnem mindenütt, ekkor*

$$\begin{aligned}
f(x) = &\quad \alpha_1 \exp\left[a_1 x + b_1 x^2\right] \qquad (m.m.\ x \in \mathbb{R}),\\
g(x) = &\quad \alpha_2 \exp\left[a_2 x - \frac{bd}{ac} b_1 x^2\right] \qquad (m.m.\ x \in \mathbb{R}),\\
h(x) = &\quad \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \exp\left[\frac{a_1 d - a_2 c}{ad - bc} x + \frac{d}{a} b_1 x^2\right] \qquad (m.m.\ x \in \mathbb{R}),\\
k(x) = &\quad \beta_2 \alpha_1 \alpha_2 \exp\left[\frac{a_2 a - a_1 b}{ad - bc} x - \frac{b}{c} b_1 x^2\right] \qquad (m.m.\ x \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

teljesül, ahol $a_1,\ a_2,\ b_1 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok és $\alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ tetszőleges, az $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 = 1$ feltételt kielégítő konstansok.

Az 1.5. alfejezetben a majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő

$$f(u + v) = g(u)\, h(v) \tag{4}$$

exponenciális Pexider egyenletet vizsgáljuk az ismeretlen $f,\ g,\ h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mérhető függvényekre, ahol $g,\ h$ nem azonosan 0, illetve a majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő

$$f(uv) = g(u) + h(v) \tag{5}$$

logaritmikus Pexider egyenletet az ismeretlen $f,\ g,\ h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mérhető függvényekre.

Ismeretesek (lásd [4]), a minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő (4) egyenlet nemtriviális mérhető (folytonos) megoldásai illetve a minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülő (5) egyenlet mérhető (folytonos) megoldásai.

Az alfejezet eredményeit a [37] és [43] cikkekben közöltük.

Fő eredményeink:

Tétel. *(1.5.1.) Tegyük fel, hogy az $f,\ g,\ h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mérhető függvények, ahol $g,\ h$ nem azonosan 0, majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén kielégítik a (4) egyenletet, akkor*

$$f(t) = abe^{ct}, \quad g(t) = ae^{ct}, \quad h(x) = be^{ct} \qquad (m.m.\ t \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{R}$.

Tétel. *(1.5.2.) Tegyük fel, hogy az f, g, $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mérhető függvények majdnem minden $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén kielégítik az (5) egyenletet, akkor*

$$f(t) = c \ln t + a + b, \quad g(t) = c \ln t + a, \quad h(t) = c \ln t + b \qquad (m.m.\ t \in \mathbb{R}_+),$$

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Feltételesen meghatározott kétdimenziós eloszlások jellemzése során felhasznált függvényegyenletek

A 2.1. alfejezetben a

$$h_1\left(\frac{x}{c(y)}\right)\frac{1}{c(y)} f_Y(y) = h_2\left(\frac{y}{d(x)}\right)\frac{1}{d(x)} f_X(x) \tag{6}$$

függvényegyenlet vizsgáljuk a h_1, h_2, f_Y, f_X ismeretlen függvényekre, a c és d pozitív függvények speciális választásai esetén.

(6) a feltételesen meghatározott kétdimenziós eloszlások jellemzésében játszik szerepet. Arnold, Castillo és Sarabia ([7]) az ismeretlen függvények kétszeri differenciálhatósága mellett vizsgálták az egyenletet, speciális esetekben, feltéve, hogy azok minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülnek.

Itt először a c és d függvények speciális választásai esetén, csak a pozitív ismeretlen h_1, h_2, f_Y, f_X függvények mérhetőségét tételezzük fel, illetve azt, hogy a kapott egyenletek majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesülnek. Eredményeinket két különböző módon is megkaphatjuk, a disszertációban szerepel mindkét módszer leírása.

Belátjuk, hogy a majdnem mindenütt teljesülő (6) egyenlet mérhető megoldásai – a különböző speciális esetekben – egyértelműen „kiterjeszthetőek” folytonos függvényekké és ha a mérhető függvényeket a folytonosakkal helyettesítjük, akkor az egyenlet már mindenütt teljesülni fog $\mathbb{R}_+^2$-en. Ezután vizsgáljuk a kapott speciális egyenletek sűrűségfüggvény megoldásait is.

Eredményeinket a [37] és [38] dolgozatokban, valamint a [34] és [35] előadások során közöltük.

Az első speciális esetben a c, d függvények

$$c(y) = \frac{1}{\alpha + y}, \qquad d(x) = \frac{1}{\beta + x} \quad (x, y > 0)$$

alakúak, ahol α, β nemnegatív konstansok. Ekkor (6)-ból kapjuk, hogy

$$h_1((\alpha + y)x)(\alpha + y) f_Y(y) = h_2((\beta + x)y)(\beta + x) f_X(x) \tag{7}$$

teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ahol h_1, h_2, f_X, $f_Y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mérhető ismeretlen függvények, α, $\beta \geq 0$ tetszőleges konstansok.

A megoldásokat $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ esetén az egyik módszerrel a 2.1.2. tétel, a másikkal a 2.1.4., 2.1.6., 2.1.8. tételek, míg az $\alpha = \beta = 0$ esetben a 2.1.9. tétel írja le.

Megadjuk a majdnem mindenütt teljesülő (7) egyenlet sűrűségfüggvény megoldásait is. Először (esetszétválasztással) belátjuk, hogy teljesül a következő

Tétel. *(2.1.11.) Legyenek a h_1, h_2, f_X, $f_Y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ nemnegatív (7)-et majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$-re kielégítő olyan mérhető függvények, hogy léteznek $\mathbb{R}_+$-nak olyan Lebesgue mérhető és pozitív mértékű részhalmazai, amin a függvények pozitívak. Ekkor a h_1, h_2, f_X, f_Y függvények majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}_+$-on.*

Emellett igaz a következő is:

Tétel. *(2.1.12.) Ha a nemnegatív h_1, h_2, f_X, $f_Y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mérhető függvények majdnem mindenütt pozitívak $\mathbb{R}_+$-on és majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén teljesítik a (7) függvényegyenletet, akkor egyértelműen léteznek $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$, $\tilde{f}_X$, $\tilde{f}_Y$ folytonos (és pozitív) függvények, hogy $\tilde{h}_1 = h_1$, $\tilde{h}_2 = h_2$, $\tilde{f}_X = f_X$, $\tilde{f}_Y = f_Y$ majdnem mindenütt, és ha a h_1, h_2, f_X, f_Y függvényeket a $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$, $\tilde{f}_X$, $\tilde{f}_Y$ függvényekkel helyettesítjük, akkor (7) már mindenütt teljesül $\mathbb{R}_+$-on.*

Az utóbbi két tétel (a mindenütt teljesülő (7) egyenlet megoldásait használva) adja fő eredményünket.

Tétel. *(2.1.13.) Ha az $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ esetben a h_1, h_2, f_X, $f_Y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ nemnegatív (7)-et majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$-re kielégítő mérhető függvények, hogy vannak $\mathbb{R}_+$-nak olyan Lebesgue mérhető és pozitív mértékű halmazai, amin a függvények pozitívak, akkor*

$$
\begin{aligned}
h_1(x) &= x^{c_1} \exp(\gamma x + \delta_1) \qquad (m.m.\ x \in \mathbb{R}_+), \\
h_2(x) &= x^{c_2} \exp(\gamma x + \delta_2) \qquad (m.m.\ x \in \mathbb{R}_+), \\
f_Y(y) &= \frac{y^{c_2}}{(y + \alpha)^{c_1 + 1}} \exp(\gamma \beta y + \delta_3) \qquad (m.m.\ y \in \mathbb{R}_+), \\
f_X(x) &= \frac{x^{c_1}}{(x + \beta)^{c_2 + 1}} \exp(\gamma \alpha x + \delta_4) \qquad (m.m.\ x \in \mathbb{R}_+),
\end{aligned}
$$

ahol c_1, c_2, γ, δ_1, δ_2, δ_3, $\delta_4 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, a $\delta_1 + \delta_3 = \delta_2 + \delta_4$ tulajdonságot kielégítő konstansok.

A második speciális esetben a (6) egyenletben szereplő c és d függvények lineárisak, azaz

$$c(y) = \lambda_1 (\alpha + y), \qquad d(x) = \lambda_2 (\beta + x) \quad (x, y > 0),$$

ahol λ_1, λ_2 pozitív, α és β nemnegatív konstansok.

Így (6)-ból a

$$(8) \quad h_1\left(\frac{x}{\lambda_1(\alpha + y)}\right) \frac{1}{\lambda_1(\alpha + y)} f_Y(y) = h_2\left(\frac{y}{\lambda_2(\beta + x)}\right) \frac{1}{\lambda_2(\beta + x)} f_X(x)$$

egyenletet kapjuk majdnem minden $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$-re, ahol h_1, h_2, f_X, $f_Y:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ mérhető ismeretlen függvények, λ_1, $\lambda_2\in\mathbb{R}_+$, α, $\beta\geq 0$ tetszőleges konstansok.

Először (esetszétválasztással) kétféle módszerrel is leírtuk (8) mérhető és pozitív megoldásait a 2.1.15., 2.1.16. és 2.1.17. illetve 2.1.19., 2.1.21., 2.1.23. és 2.1.24. tételekben.

(8) sűrűségfüggvény megoldásainak megadásához (a 2.1.25. tétel és néhány korábbi eredmény felhasználásával) beláttuk, hogy igaz:

Tétel. *(2.1.26.) Ha a h_1, h_2, f_X, $f_Y:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ függvények majdnem minden $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$-re teljesítik a (8) egyenletet, nemnegatívak és az A_1, A_2, A_3, $A_4\subset\mathbb{R}_+$ pozitív Lebesgue mértékű halmazokon rendre pozitívak, akkor $\mathbb{R}_+$-on majdnem mindenütt pozitívak.*

Majd bizonyítottuk, hogy teljesül a

Tétel. *(2.1.27.) Ha a h_1, h_2, f_X, $f_Y:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ mérhető, nemnegatív függvények az $\alpha>0$, $\beta>0$ esetben majdnem minden $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ esetén teljesítik a (8) függvényegyenletet és léteznek A_1, A_2, A_3, $A_4\subset\mathbb{R}_+$ pozitív Lebesgue mértékű halmazok, hogy azokon rendre pozitívak, akkor*

$$\begin{aligned}
h_1(x) &= e^{-d_2}\left(\frac{\lambda_1\alpha}{\beta}\right)^{p_2}x^{p_2+q}\left(x+\frac{\beta}{\lambda_1\alpha}\right)^{-q} \quad (m.m.\;\; x\in\mathbb{R}_+),\\
h_2(x) &= e^{-d_1}\left(\frac{\lambda_2\beta}{\alpha}\right)^{p_1}x^{p_1+q}\left(x+\frac{\alpha}{\lambda_2\beta}\right)^{-q} \quad (m.m.\;\; x\in\mathbb{R}_+),\\
f_X(x) &= e^{d_4}\frac{\lambda_2}{\beta^{p_1+p_2+q}}x^{p_2+q}(x+\beta)^{p_1+1} \quad (m.m.\;\; x\in\mathbb{R}_+),\\
f_Y(x) &= e^{d_3}\frac{\lambda_1}{\alpha^{p_1+p_2+q}}x^{p_1+q}(x+\alpha)^{p_2+1} \quad (m.m.\;\; x\in\mathbb{R}_+),
\end{aligned}$$

ahol p_1, p_2, q, d_1, d_2, d_3, $d_4\in\mathbb{R}$ tetszőleges konstansok a $d_1+d_3=d_2+d_4$ tulajdonsággal.

Az $\alpha=0$, $\beta>0$ esetben a 2.1.28. tétel, míg az $\alpha>0$, $\beta=0$ esetben a 2.1.29. tétel teljesül.

A 2.2. alfejezetben a

$$g_1\left[\frac{x-a(y)}{c(y)}\right]\frac{1}{c(y)}f_Y(y)=g_2\left[\frac{y-b(x)}{d(x)}\right]\frac{1}{d(x)}f_X(x) \tag{9}$$

egyenletet vizsgáljuk, ahol a, b adott, c és d adott pozitív függvények. Ebben a fejezetben ezen függvények speciális választása mellett csak a g_1, g_2, f_Y, f_X ismeretlen pozitív függvények mérhetőségét tesszük fel, illetve azt, hogy az egyenlet majdnem minden (x,y) esetén teljesül $\mathbb{R}^2$ egy nyílt részhalmazán.

A fejezet eredményeit a [39] dolgozatban tervezzük megjelentetni.

Azt az esetet tekintettük, amikor a, b c és d

$$a(y)=m_1y+c_1,\quad b(x)=m_2x+c_2,$$

$$c(y) = \lambda_1 (y + a_1), \quad d(x) = \lambda_2 (x + a_2)$$

alakú lineáris függvények (azaz a lineáris regresszió és feltételes szórás esete, lásd [7]).

Eredményeinket a 2.2.1. lemmában, valamint a 2.2.1., 2.2.2., 2.2.3. és 2.2.4. tételekben adtuk meg.

3. Egyváltozós eloszlások karakterizációja

Vizsgálataink során feltételezzük, hogy az eloszlások abszolút folytonosak, azaz léteznek a sűrűségfüggvények, továbbá használjuk a jól ismert transzformációs tételt ([19]).

Tétel. *(3.1.1.) Legyen $X = (X_1, \ldots, X_n)$ abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozó az $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvénnyel, mely az $\Omega_x \subset \mathbb{R}^N$ tartományon kívül zérus. Legyen $\psi : \Omega_x \to \Omega_y \subset \mathbb{R}^n$ kölcsönösen egyértelmű leképezés Ω_y-ra és jelölje ψ^{-1} az inverzét.*

Ha a $J(y) = \det\left(\frac{\partial \psi^{-1}(y)}{\partial y}\right)$ Jacobi determináns létezik, folytonos és nem vált előjelet Ω_y-ban, akkor az $Y = \psi(X)$ valószínűségi változó is abszolút folytonos a következő g sűrűségfüggvénnyel

$$g(y) = \begin{cases} f\left(\psi^{-1}(y)\right) |J(y)| & , \textit{ha} \quad y \in \Omega_y \textit{ m.m.} \\ 0 & , \textit{ha} \quad y \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_y. \end{cases}$$

A karakterizációkat a [36], [43], [46] és [47] cikkekben és a [45], [48] és [49] előadások keretében közöltük.

A 3.2. alfejezetben a gamma eloszlás karakterizációival foglalkozunk.

Előbb a gamma eloszlás jól ismert Lukács-féle (lásd [41]) karakterizációját bizonyítjuk. A $\psi : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+^2$, $\psi(x, y) = \left(x + y, \frac{x}{y}\right)$ transzformáció és a transzformációs tétel segítségével kapott

$$\frac{y^2}{x+y} f_X(x) f_Y(y) = f_U(x+y) f_V\left(\frac{x}{y}\right) \quad \left(\text{m.m. } (x, y) \in \mathbb{R}_+^2\right)$$

függvényegyenlet megoldása azonnal jön az Olkin-Baker egyenlet megoldásaiból, ami adja a következő jellemzési tételt:

Tétel. *(3.2.1.) Az X, Y független és abszolút folytonos valószínűségi változók akkor és csakis akkor gamma eloszlásúak (ugyanazzal a paraméterrel) ha $X + Y$ és $\frac{X}{Y}$ függetlenek.*

A gamma eloszlás egy másik Kotlarskitól származó jellemzését ([24]) is megadjuk a 3.2.2. tételben.

A 3.3. alfejezetben a béta eloszlás egy karakterizációjával foglalkozunk, melyet Wesołowski ([55]) vizsgált a

$$\psi : (0,1)^2 \to (0,1)^2, \quad \psi(x, y) = \left(\frac{1-y}{1-xy}, 1 - xy\right)$$

transzformáció és a transzformációs tétellel kapott (az 1.3. fejezetben szereplő)

$$f_U(u)\, f_V(v) = f_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) f_Y(1-uv)\,\frac{v}{1-uv} \tag{10}$$

függvényegyenlet segítségével, az ismeretlen $f_X,\ f_Y,\ f_U,\ f_V : (0,1) \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényekkel.

Wesołowski vizsgálataiban feltételezte azt is, hogy (10) minden $(u,v) \in (0,1)^2$ esetén teljesül. Itt, összhangban a transzformációs tétellel csak azt tesszük fel, hogy a (10) egyenlet majdnem minden $(u,v) \in (0,1)^2$ esetén teljesül és $f_X,\ f_Y,\ f_U,\ f_V$ olyan (sűrűség)függvények, hogy nemnegatívak, mérhetőek és Lebesgue integráljuk 1.

Igaz a következő jellemzés:

Tétel. *(3.3.1.) Ha X és Y abszolút folytonos és független valószínűségi változók (ahol X és Y tartója a $(0,1)$ intervallum) úgy, hogy az*

$$U = \frac{1-Y}{1-XY}, \quad V = 1 - XY$$

szerint definiált valószínűségi változók szintén függetlenek, akkor X, Y, U és V a béta eloszláscsaládba tartoznak. Azaz X, Y, U és V béta eloszlásúak sorra a p, q; $p+q, r$; r, q és $q+r, p$ paraméterekkel.

A 3.4. alfejezetben a normális eloszlás egy jól ismert Lukács-féle ([40]) jellemzését bizonyítjuk, itt is feltételezve, hogy X és Y abszolút folytonosak.

A $\psi(x,y) = (x+y, x-y)$ $\left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$ transzformációt és a transzformációs tételt használva kapjuk az

$$f_X(x)\, f_Y(y) = 2 f_U(x+y)\, f_V(x-y) \quad \left(\text{m.m } (x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

egyenletet, amely a (3) egyenlet speciális esete az $a = b = c = 1$ és $d = -1$ konstansválasztással.

Ennek megoldásai (lásd 1.4. fejezet) adják, hogy igaz a következő jellemzés:

Tétel. *(3.4.1.) Az X és Y független és abszolút folytonos valószínűségi változók pontosan akkor normális eloszlásúak, ha $X+Y$ és $X-Y$ függetlenek.*

A 3.5. alfejezetben az exponenciális eloszlás egy karakterizációja szerepel. Megadjuk az összes f sűrűségfüggvényt, ami kielégíti az alábbi két feltételt (lásd Maksa és Mészáros [43])

1. Tulajdonság. *$f(u) = 0$ majdnem minden $u \in (-\infty, 0)$ esetén (a Lebesgue mérték szerint)* és

2. Tulajdonság. *Létezik olyan $0 \le n \in \mathbb{Z}$ (az egész számok halmaza) és $-1 < \beta \in \mathbb{R}$, hogy az $\mathbb{R}^2$-en az alábbi módon definiált p függvény:*

$p(u,v) = 0$ ha $u < 0$ vagy $v < 0$ és

$$p(u,v) = \int_0^{+\infty} f(u)\left(F(u) - F(s+u)\right)^n f(s+u) f(s+u+v) F(s+u+v)^\beta ds \tag{11}$$

ha $u, v \in [0, +\infty)$*, ahol* $F(u) = \int_u^{+\infty} f$*,* $u \geq 0$ *az ún. túlélő függvény, az együttes sűrűségfüggvénye két független valószínűségi változónak.*

Belátjuk, hogy minden f sűrűségfüggvény, ami pozitív $[0, +\infty)$-en és rendelkezik az 1–2 tulajdonságokkal, az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye. Továbbá, adunk egy szükséges és elégséges feltételt a (11)-ben szereplő n és β paraméterekre, hogy a (11)-ben definiált p függvény, egy f exponenciális sűrűségfüggvénnyel, maga is sűrűségfüggvény legyen.

4. Feltételesen meghatározott kétdimenziós abszolút folytonos eloszlások karakterizációja

Legyen (X, Y) egy abszolút folytonos kétdimenziós valószínűségi vektorváltozó. Jelölje $f_{(X,Y)}$, f_X, f_Y, $f_{X|Y}$ és $f_{Y|X}$ az együttes, a marginális és a feltételes sűrűségfüggvényeket. Ismeretes, hogy

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{X|Y}(x, y) f_Y(y) = f_{Y|X}(x, y) f_X(x) \tag{12}$$

majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (vagy pozitív tartójú vektorváltozó esetén majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$) esetén.

Ha a feltételes sűrűségfüggvényeket valamilyen (pl. gyakorlati vagy valószínűségelméleti szempontból érdekes) speciális alakú függvények között definiáljuk, olyan függvényegyenleteket kapunk, melyek megoldása (X, Y) egy jellemzéséhez vezetnek.

Elsőként Narumi ([50]), majd Arnold, Castillo és Sarabia ([7]) alkalmazott függvényegyenleteket feltételesen meghatározott kétdimenziós eloszlások karakterizációja során.

Az eredmények a [37] és [38] dolgozatokban szerepelnek, illetve [39]-ban kívánjuk megjelentetni.

A 4.2. alfejezetben eltolásparaméter jellegű feltételt vizsgálunk, speciálisan lineáris regressziós függvényekkel. Ekkor a feltételes sűrűségfüggvényeknek az $f_{X|Y}(x, y) = g_1(x - a_1 y - a_2)$, $f_{Y|X}(x, y) = g_2(y - b_1 x - b_2)$ alakot kell öltenie (feltételezve, hogy a feltételes varianciák konstansok).

Ebben az esetben kapjuk az

$$f_Y(y)\, g_1(x - a_1 y - a_2) = f_X(x)\, g_2(y - b_1 x - b_2) \tag{13}$$

egyenletet. Narumi megoldotta (13)-at, de erős regularitási feltételek mellett.

Tételezzünk fel csak annyit, amennyi természetes. Az ismeretlen függvények legyenek sűrűségfüggvények és az egyenlet teljesüljön majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

(13) megoldásai visszavezethetők az 1.4. fejezetben szereplő egyenlet megoldásaira, amiből azonnal kapjuk az

$$f_{(X,Y)}(x, y) =$$

$$= \alpha_1 \alpha_2 \exp \left[(A_1 - A_2 b_1)\, x + A_2 y - \frac{a_1 B_1}{1 - a_1 b_1} \left(\frac{x^2}{a_1} - 2xy + \frac{y^2}{b_1} \right) \right]$$

együttes sűrűségfüggvényt majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén.

Így ugyanarra a következtetésre juthatunk, amire [7]-ben is, hogy X és Y vagy függetlenek vagy (X, Y) kétváltozós normális eloszlású.

A 4.3. alfejezetben a skálaparaméter jellegű feltétel esetét vizsgáljuk. Arnold, Castillo és Sarabia [7] tekintette azt az esetet is, amikor a feltételes sűrűségfüggvények $f_{X|Y}(x, y) = h_1 \left(\frac{x}{c(y)} \right) \frac{1}{c(y)}$, $f_{Y|X}(x, y) = h_2 \left(\frac{y}{d(x)} \right) \frac{1}{d(x)}$ alakúak, adott pozitív c és d függvényekkel, ahol h_1, h_2 ismeretlen pozitív függvények.

Ekkor (12)-ből kapjuk a

$$h_1 \left(\frac{x}{c(y)} \right) \frac{1}{c(y)} f_Y(y) = h_2 \left(\frac{y}{d(x)} \right) \frac{1}{d(x)} f_X(x) \tag{14}$$

függvényegyenletet, amit a 2.1. fejezetben vizsgáltunk.

A c, d függvények 2.1.-beli első speciális választásával (14)-ből kapjuk, hogy a 2.1.-beli

$$h_1 ((\alpha + y)\, x)\, (\alpha + y)\, f_Y(y) = h_2 ((\beta + x)\, y)\, (\beta + x)\, f_X(x) \tag{15}$$

egyenlet teljesül majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, ahol h_1, h_2, f_X, f_Y : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mérhető ismeretlen függvények, α, $\beta \geq 0$ tetszőleges konstansok.

Ekkor a 2.1. fejezet eredményeit felhasználva kapjuk az alábbi eredményt:

Tétel. *(4.3.1.) Az adott speciális esetben, ha $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ a h_1 és h_2 függvények a gamma eloszlás sűrűségfüggvényei (rendre $-\gamma$, $c_1 + 1$ és $-\gamma$, $c_2 + 1$ paraméterekkel), azaz (X, Y) gamma feltételes eloszlásokkal rendelkezik. Továbbá az együttes sűrűségfüggvény*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \exp(\delta_1 + \delta_3)\, x^{c_1} y^{c_2} \exp(\gamma (\alpha x + xy + \beta y))$$

alakú majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, azaz a megoldások osztálya (ha $c(y) = \frac{1}{\alpha + y}$, $d(x) = \frac{1}{\beta + x}$) egybeesik a MODEL II gamma feltételes osztállyal (lásd [7]).

Illetve a 2.1.-beli másik speciális választással a

$$h_1 \left(\frac{x}{\lambda_1 (\alpha + y)} \right) \frac{1}{\lambda_1 (\alpha + y)} f_Y(y) = h_2 \left(\frac{y}{\lambda_2 (\beta + x)} \right) \frac{1}{\lambda_2 (\beta + x)} f_X(x), \tag{16}$$

egyenletet kapjuk majdnem minden $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$-re, ahol h_1, h_2, f_X, f_Y : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mérhető ismeretlen függvények, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, α, $\beta \geq 0$ tetszőleges konstansok.

Ekkor kapjuk az alábbi eredményeket:

Tétel. *(4.3.2.) Az $\alpha > 0$, $\beta > 0$ esetben a h_1 és h_2 függvények (rendre $c_2 + 1$, $\frac{\gamma}{\alpha\beta} - c_2 - 1$ és $c_1 + 1$, $\frac{\gamma}{\alpha\beta} - c_1 - 1$ paraméterű) Pearson típusú VI eloszlással rendelkeznek, amit másodrendű béta eloszlásnak is neveznek (lásd [7]). Ebben* *az esetben az f_X és f_Y marginális sűrűségfüggvények is ugyanolyan eloszlásúak. Továbbá az együttes sűrűségfüggvény*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \exp(d_3 - d_2)\, x^{c_2} y^{c_1} (\alpha x + \beta y + \alpha\beta)^{-\frac{\gamma}{\alpha\beta}}$$

alakú majdnem minden $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén, azaz a megoldások osztálya egybeesik a Mardia által bevezetett kétváltozós Pareto eloszlás egy kiterjesztésével (lásd [7], [44]).

Az $\alpha = 0$, $\beta > 0$ esetben az együttes sűrűségfüggvény

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \exp(d_3 - d_2)\, x^{c_2} y^{c_1} e^{-\frac{\gamma}{\beta^2}\frac{\beta+x}{y}}$$

alakú majdnem minden $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

Míg az $\alpha > 0$, $\beta = 0$ esetben az együttes sűrűségfüggvény

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \exp(d_3 - d_2)\, x^{c_2} y^{c_1} e^{-\frac{\gamma}{\alpha^2}\frac{\alpha+y}{x}}$$

alakú majdnem minden $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ esetén.

A 4.4. alfejezetben az eltolás- és skálaparaméter jellegű feltételt tekintjük, amikor a feltételes sűrűségfüggvények

$$f_{X|Y}(x,y) = g_1\left[\frac{x - a(y)}{c(y)}\right]\frac{1}{c(y)}, \quad f_{Y|X}(x,y) = g_2\left[\frac{y - b(x)}{d(x)}\right]\frac{1}{d(x)}$$

alakúak adott a, b és adott pozitív c, d függvényekkel, ahol g_1, g_2 ismeretlen függvények.

Ekkor (12)-ből a 2.2.-beli

$$g_1\left[\frac{x - a(y)}{c(y)}\right]\frac{1}{c(y)} f_Y(y) = g_2\left[\frac{y - b(x)}{d(x)}\right]\frac{1}{d(x)} f_X(x) \tag{17}$$

egyenletet kapjuk. Tételezzünk most is csak annyit fel, amennyit természetes. Az ismert függvények speciális választása mellett, a g_1, g_2, f_Y, f_X ismeretlen függvények legyenek sűrűségfüggvények (mérhetőek 1 Lebesgue integrállal), és a (17) egyenlet teljesüljön majdnem minden (x,y) esetén $\mathbb{R}^2$ egy nyílt részhalmazából.

Ha az a, b, c és d függvények lineárisak, g_1, g_2, f_Y, f_X sűrűségfüggvények, akkor a 2.2. fejezet eredményeit felhasználva a 4.4.1., 4.4.2. és 4.4.3. tételek megadják az (X,Y) együttes sűrűségfüggvényének lehetséges alakját.

Introduction

Solution of functional eqautions is an old problem of mathematical analysis. In Hungary János Aczél was the first who investigated intensively functional equations. The first comprehensive works are also due to him (see [1], [2]). These functional equations and their applications are widely studied and can be applied in economics, physics and statistics as well. In economics see for example the book of Eichhorn [15], in engineering see the work of Castillo and Ruiz-Cobo [10], with applications in probability theory the books of Ramachandran and Lau [53] or Yadrenko [56] can be considered, in connection with information theory the monography of Aczél and Daróczy [3] is notable.

The results of the dissertation are partly connected to the investigation of functional equations with restricted domains, for example when the restriction of the domain is explicitly given. Here we can mention the results of Aczél and Erdős [5], Daróczy and Losonczi [11], Székelyhidi [54], Ger [18] and Páles [52], but there are a lot more (see [14], [25], [26]). On the other hand the results are also connected to the examinations (raised by Erdős [16]), where the equations are satisfied only almost everywhere (with respect to the Lebesgue-measure) on their domain. In more cases the general solution of the almost everywhere satisfied equations can also be determined (for example in the case of the Cauchy-equation [12], [13], [23] and the Cauchy exponential equation [4]), and these solutions are almost everywhere equal to solutions of the everywhere satisfied equations. In more cases by the help of a general result of Járai [20], [21] it can be proved that the measurable solutions of the almost everywhere satisfied functional equations are almost everywhere equal to the continuous solutions of the everywhere satisfied equations, but the determination of the general solution is an open problem.

The dissertation consists of four parts. In the first two sections functional equations are investigated, in the latter two we deal with characterization problems of probability theory by the help of our functional equations. This topic was investigated among the first by Narumi ([50]), then refining his work by Arnold, Castillo and Sarabia ([6] and [7]). Lajkó ([27], [28], [29], [30], [31], [32], [33]) and Wesołowski ([55]) also examined this topic. Our purpose is to get similar results, but with more natural assumptions.

1. Functional equations connected to characterization problems of univariate distributions

In this section we study the general or measurable (density function) solutions of those functional equations that are connected to characterization problems of univariate distributions. It is important that our equations are satisfied only almost everywhere on their domain and the unknown functions are measurable and positive or density functions of some random variable (hence almost everywhere nonnegative and measurable with integral 1).

By the help of Járai's result (theorem 1.1.1. of the dissertation) we can show for several almost everywhere satisfied functional equations that the measurable solutions are almost everywhere equal to the continuous solutions of the everywhere satisfied equations. With a generalization of the Steinhaus theorem ([17] and theorem 1.1.2.) we can prove that the density function solutions are positive almost everywhere (or everywhere, if the equation is satisfied everywhere).

In subsection 1.2. we deal with the Olkin-Baker functional equation

$$f(x)\,g(y) = p(x+y)\,q\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \left((x,y)\in\mathbb{R}_+^2\right), \tag{1}$$

which was raised by Olkin [51] for unknown functions f, g, p, $q:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$. The first general results are due to Baker ([9]) and Lajkó ([28]). The measurable (continuous) solutions are also known.

We give the measurable and the density function solutions f, g, p, $q:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ of the almost everywhere satisfied functional equation (1).

The results of this subsection can be found in [47] and [48].

First we show the following

Lemma. *(1.2.1.) If the measurable functions f, g, p, $q:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ satisfy equation (1) for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$, then there exist unique continuous functions $\tilde f$, $\tilde g$, $\tilde p$, $\tilde q:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ such that $\tilde f=f$, $\tilde g=g$, $\tilde p=p$ and $\tilde q=q$ almost everywhere, and if f, g, p, q are replaced by $\tilde f$, $\tilde g$, $\tilde p$, $\tilde q$, respectively, then (1) is satisfied everywhere on $\mathbb{R}_+^2$.*

By the help of the continuous solutions of the everywhere satisfied equation (1) we can give the measurable solutions of the equation satisfied for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$.

Theorem. *(1.2.2.) Suppose that the measurable functions f, g, p, $q:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ satisfy functional equation (1) for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$. Then*

$$\begin{aligned}
f(x) &= A\exp\left[ax+b\ln x\right] && (a.e.\ \ x\in\mathbb{R}_+),\\
g(x) &= B\exp\left[ax+(c-b)\ln x\right] && (a.e.\ \ x\in\mathbb{R}_+),\\
p(x) &= C\exp\left[ax+c\ln x\right] && (a.e.\ \ x\in\mathbb{R}_+),\\
q(x) &= D\exp\left[b\ln x-c\ln(x+1)\right] && (a.e.\ \ x\in\mathbb{R}_+),
\end{aligned}$$

where a, b, $c\in\mathbb{R}$ and A, B, C, $D\in\mathbb{R}_+$ are arbitrary constants with $AB=CD$.

To determine the density function solutions of the almost everywhere satisfied equation (1) first we show (similarly as Járai ([21]), and Baker ([9])) the following

Theorem. *(1.2.3.) Let the nonnegative functions $f,\ g,\ p,\ q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ satisfy equation (1) for almost all $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ and let $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4 \subset \mathbb{R}_+$ be sets with positive Lebesgue measure, on which the functions are positive, respectively. Then $f,\ g,\ p,\ q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ are almost everywhere positive.*

The above lemma and theorem remain true with density functions as well (see lemma 1.2.2. and theorem 1.2.4.).

In subsection 1.3. we study functional equations arisen from the characterization of beta distribution, raised by Wesołowski ([55]).

We emphasize the functional equation

$$(2) \qquad f_U(u)\, f_V(v) = f_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) f_Y(1-uv)\, \frac{v}{1-uv}$$

for all $(u, v) \in (0, 1)^2$ and with density functions $f_X,\ f_Y,\ f_U,\ f_V : (0, 1) \to \mathbb{R}_+$.

The purpose of this subsection is the generalization of Wesołowski's results.

The results of this subsection can be found in [36], [45] and [49].

To get the general solution of equation (2) we use a result from Maksa ([42]) in connection with the generalized fundamental equation of information with four unknown functions.

Theorem. *(1.3.2.) Functions $f_X,\ f_Y,\ f_U,\ f_V : (0, 1) \to \mathbb{R}_+$ satisfy the functional equation (2) for all $(u, v) \in (0, 1)^2$ if and only if*

$$\begin{aligned} f_X(x) =&\quad \exp\left[l_1(x) + l_2(1-x) + a_1\right] \quad (x \in (0,1)), \\ f_Y(x) =&\quad x \exp\left[l_1(x) + l_2(x) + l_3(1-x) + a_1 + b_2\right] \quad (x \in (0,1)), \\ f_U(x) =&\quad \exp\left[l_2(1-x) + l_3(x) + a_2\right] \quad (x \in (0,1)), \\ f_V(x) =&\quad x \exp\left[l_1(1-x) + l_2(x) + l_3(x) + a_2 + b_1\right] \quad (x \in (0,1)), \end{aligned}$$

where function l_i $(i = 1, 2, 3)$ satisfies the Cauchy logarithmic equation

$$l_i(xy) = l_i(x) + l_i(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

and $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$ are constants, such that $2a_1 + b_2 = 2a_2 + b_1$.

Then we get easily the continuous or measurable solutions of (2) (corollary 1.3.1.).

First we prove, for the measurable solutions of the almost everywhere satisfied equation (2), the following

Lemma. *(1.3.3.) If the measurable functions $f_X,\ f_Y,\ f_U,\ f_V : (0, 1) \to \mathbb{R}_+$ satisfy equation (2) for almost all $(u, v) \in (0, 1)^2$, then there exist unique continuous functions $\widetilde{f}_X,\ \widetilde{f}_Y,\ \widetilde{f}_U,\ \widetilde{f}_V : (0, 1) \to \mathbb{R}_+$, such that $\widetilde{f}_X = f_X$, $\widetilde{f}_Y = f_Y$ $\widetilde{f}_U = f_U$, $\widetilde{f}_V = f_V$ almost everywhere, and if $f_X,\ f_Y,\ f_U,\ f_V$ are replaced by $\widetilde{f}_X,\ \widetilde{f}_Y,\ \widetilde{f}_U,\ \widetilde{f}_V$ respectively, then equation (2) is satisfied everywhere on $(0, 1)^2$.*

Then the following result is valid.

Theorem. *(1.3.3.) The measurable functions* $f_X,\ f_Y,\ f_U,\ f_V : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ *satisfy functional equation* (2) *for almost all* $(u,v) \in (0,1)^2$ *if and only if there exist positive constants* $p,\ q,\ r,\ \varepsilon_i\ (i = 1,2,3,4)$ *with* $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_3\varepsilon_4$ *such that*

$$\begin{aligned}
f_X(x) = &\quad \varepsilon_1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \qquad (a.e.\ x \in (0,1)),\\
f_Y(y) = &\quad \varepsilon_2 y^{p+q-1}(1-y)^{r-1} \qquad (a.e.\ y \in (0,1)),\\
f_U(u) = &\quad \varepsilon_3 u^{r-1}(1-u)^{q-1} \qquad (a.e.\ u \in (0,1)),\\
f_V(v) = &\quad \varepsilon_4 v^{q+r-1}(1-v)^{p-1} \qquad (a.e.\ v \in (0,1)).
\end{aligned}$$

On the density function solutions of equation (2) satisfied almost everywhere we can show that they are almost everywhere positive (see theorem 1.3.4.).

Furthermore similar lemma and theorem are valid with density functions as well (see lemma 1.3.4. and theorem 1.3.5.).

We also investigate the general solution of equation (2) satisfied for all $(u,v) \in (0,1)^2$, with nonnegative functions $f_X,\ f_Y,\ f_U,\ f_V$ where there exist sets $A,\ B,\ C,\ D \subset (0,1)$ with positive Lebesgue measure, on which the functions are positive, respectively (see theorem 1.3.6.).

In subsection 1.4. we consider the functional equation

$$(3) \qquad f(x)\,g(y) = h(ax+by)\,k(cx+dy) \qquad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$$

with unknown functions $f,\ g,\ h,\ k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ and arbitrary fixed nonzero real constants $a,\ b,\ c,\ d$ with the property $\Delta := ad - bc \neq 0$. This equation is connected to the characterization of the normal distribution, it was investigated for example by Baker [8] and Lajkó [29].

Baker determined all measurable and not almost everywhere zero functions $f,\ g,\ h,\ k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisfying functional equation (3), Lajkó gave all solutions $f,\ g,\ h,\ k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ of (3), which are not almost everywhere zero.

Here our purpose is to determine all measurable (and the density function) solutions $f,\ g,\ h,\ k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ of the almost everywhere satisfied equation (3).

The results of this subsection can be found in [46] and [48].

The main result is the following

Theorem. *(1.4.4.) Suppose that the density functions* $f,\ g,\ h,\ k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfy equation* (3) *almost everywhere, then*

$$\begin{aligned}
f(x) = &\quad \alpha_1 \exp\left[a_1 x + b_1 x^2\right] \qquad (a.e.\ x \in \mathbb{R}),\\
g(x) = &\quad \alpha_2 \exp\left[a_2 x - \frac{bd}{ac} b_1 x^2\right] \qquad (a.e.\ x \in \mathbb{R}),\\
h(x) = &\quad \beta_1\alpha_1\alpha_2 \exp\left[\frac{a_1 d - a_2 c}{ad - bc} x + \frac{d}{a} b_1 x^2\right] \qquad (a.e.\ x \in \mathbb{R}),\\
k(x) = &\quad \beta_2\alpha_1\alpha_2 \exp\left[\frac{a_2 a - a_1 b}{ad - bc} x - \frac{b}{c} b_1 x^2\right] \qquad (a.e.\ x \in \mathbb{R}),
\end{aligned}$$

where $a_1,\ a_2,\ b_1 \in \mathbb{R}$ are arbitrary constants and $\alpha_i,\ \beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ are arbitrary constants, satisfying $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 = 1$.

In subsection 1.5. we examine the exponential Pexider equation

$$f(u+v) = g(u)\, h(v) \tag{4}$$

for almost all $(u, v) \in \mathbb{R}^2_+$ with unknown measurable functions $f,\ g,\ h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, where $g,\ h$ are not identically equal to 0. We also consider the logarithmic Pexider equation

$$f(uv) = g(u) + h(v) \tag{5}$$

for almost all $(u, v) \in \mathbb{R}^2_+$ with unknown measurable functions $f,\ g,\ h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

The non-trivial measurable (continuous) solutions of equation (4) satisfied for all $(u, v) \in \mathbb{R}^2_+$ ([4]) and the measurable (continuous) solutions of equation (5) satisfied for all $(u, v) \in \mathbb{R}^2_+$ are known.

The results of this subsection can be found in [37] and [43].

Our main results:

Theorem. *(1.5.1.) Suppose that the measurable functions $f,\ g,\ h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, where $g,\ h$ are not identically equal to 0, satisfy functional equation (4) for almost all $(u, v) \in \mathbb{R}^2_+$. Then*

$$f(t) = abe^{ct}, \quad g(t) = ae^{ct}, \quad h(x) = be^{ct} \qquad (a.e.\ t \in \mathbb{R}_+),$$

where $a, b \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{R}$.

Theorem. *(1.5.2.) Suppose that the measurable functions $f,\ g,\ h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ satisfy functional equation (5) for almost all $(u, v) \in \mathbb{R}^2_+$, then*

$$f(t) = c\ln t + a + b, \quad g(t) = c\ln t + a, \quad h(t) = c\ln t + b \qquad (a.e.\ t \in \mathbb{R}_+),$$

where $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. Functional equations connected to characterization problems of conditionally specified bivariate distributions

In subsection 2.1. equation

$$h_1\left(\frac{x}{c(y)}\right)\frac{1}{c(y)} f_Y(y) = h_2\left(\frac{y}{d(x)}\right)\frac{1}{d(x)} f_X(x) \tag{6}$$

is studied for the unknown functions $h_1,\ h_2,\ f_Y,\ f_X$ with special choices for the positive functions c and d.

Equation (6) arisen from the characterization problems of conditionally specified bivariate distributions. Arnold, Castillo and Sarabia ([7]) investigated the equation in special cases with the assumptions that the unknown functions are twice differentiable and the equations are satisfied for all $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$.

With special choices for the functions c and d we assume only the measurability of the positive unknown functions h_1, h_2, f_Y, f_X and that the resulted equations are satisfied for almost all $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. We can prove our results in two different ways, both can be found in the dissertation.

We prove that the measurable solutions of the almost everywhere satisfied functional equation (6) – in the different special cases – can be „extended" uniquely to continuous functions and if the measurable functions are replaced by the continuous ones, then the equation will be satisfied everywhere on $\mathbb{R}_+^2$.

We get our results in two different ways: First we show, that the continuous solutions are differentiable infinitely many times, then we solve differential equations. On the other hand we give the continuous solutions of our equations by the help of the known continuous solutions of these equations. Then we also investigate the density function solutions of the special equations.

We also give the density function solutions of the equation in the special cases.

The results of this subsection can be found in [37], [38], [34] and [35].

First we study the case, when

$$c\,(y) = \frac{1}{\alpha + y}, \qquad d\,(x) = \frac{1}{\beta + x} \quad (x, y > 0)$$

where α, β are nonnegative constants. Then we get the equation

$$h_1\left(\left(\alpha + y\right) x\right) \left(\alpha + y\right) f_Y\left(y\right) = h_2\left(\left(\beta + x\right) y\right) \left(\beta + x\right) f_X\left(x\right) \tag{7}$$

for almost all $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, where $h_1,\ h_2,\ f_X,\ f_Y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ are measurable unknown functions and α, $\beta \geq 0$ are arbitrary constants.

In case $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ with the first method we get the solutions which can be found in theorem 2.1.2., with the other way in theorems 2.1.4., 2.1.6., 2.1.8. In case $\alpha = \beta = 0$ our result can be found in theorem 2.1.9.

We give the density function solution of equation (7) satisfied almost everywhere. First we show the following

Theorem. *(2.1.11.) Let $h_1,\ h_2,\ f_X,\ f_Y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ be nonnegative measurable functions satisfying equation* (7) *for almost all $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, such that there exist subsets of $\mathbb{R}_+$ with positive Lebesgue measure on which the functions are positive, respectively. Then $h_1,\ h_2,\ f_X,\ f_Y$ are positive almost everywhere on $\mathbb{R}_+$.*

Furthermore the following results are valid, too.

Theorem. *(2.1.12.) If the nonnegative measurable functions $h_1,\ h_2,\ f_X,\ f_Y :$ $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ are positive almost everywhere on $\mathbb{R}_+$ and satisfy functional equation* (7) *for almost all $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, then there exist unique continuous (and positive) functions $\tilde{h}_1,\ \tilde{h}_2,\ \tilde{f}_X,\ \tilde{f}_Y$ such that $\tilde{h}_1 = h_1$, $\tilde{h}_2 = h_2$, $\tilde{f}_X = f_X$, $\tilde{f}_Y = f_Y$ almost everywhere, and if $h_1,\ h_2,\ f_X,\ f_Y$ are replaced by $\tilde{h}_1,\ \tilde{h}_2,\ \tilde{f}_X,\ \tilde{f}_Y$, then equation* (7) *is satisfied everywhere on $\mathbb{R}_+$.*

The last two theorems (with the solution of the everywhere satisfied equation (7)) give our main result.

Theorem. *(2.1.13.) In case $\alpha^2+\beta^2\neq 0$ if the nonnegative measurable functions $h_1, h_2, f_X, f_Y:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ satisfying equation (7) for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$, such that there exist subsets of $\mathbb{R}_+$ with positive Lebesgue measure on which the functions are positive, then*

$$\begin{aligned}
h_1(x) &= x^{c_1}\exp(\gamma x+\delta_1) \qquad (a.e.\ \ x\in\mathbb{R}_+),\\
h_2(x) &= x^{c_2}\exp(\gamma x+\delta_2) \qquad (a.e.\ \ x\in\mathbb{R}_+),\\
f_Y(y) &= \frac{y^{c_2}}{(y+\alpha)^{c_1+1}}\exp(\gamma\beta y+\delta_3) \qquad (a.e.\ \ y\in\mathbb{R}_+),\\
f_X(x) &= \frac{x^{c_1}}{(x+\beta)^{c_2+1}}\exp(\gamma\alpha x+\delta_4) \qquad (a.e.\ \ x\in\mathbb{R}_+),
\end{aligned}$$

where $c_1, c_2, \gamma, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\in\mathbb{R}$ are arbitrary constants with the property $\delta_1+\delta_3=\delta_2+\delta_4$.

In the second special case let the functions c and d in (6) be linear, that is

$$c(y)=\lambda_1(\alpha+y), \qquad d(x)=\lambda_2(\beta+x) \quad (x,y>0),$$

where λ_1, λ_2 are positive, α and β are nonnegative constants.

So from (6) we get equation

$$(8)\quad h_1\left(\frac{x}{\lambda_1(\alpha+y)}\right)\frac{1}{\lambda_1(\alpha+y)}f_Y(y)=h_2\left(\frac{y}{\lambda_2(\beta+x)}\right)\frac{1}{\lambda_2(\beta+x)}f_X(x)$$

for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$, where $h_1, h_2, f_X, f_Y:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ are measurable unknown functions, $\lambda_1, \lambda_2\in\mathbb{R}_+$, $\alpha, \beta\geq 0$ are arbitrary constants.

First we give the measurable and positive solutions of (8) in two different ways in theorems 2.1.15., 2.1.16. and 2.1.17. and in theorems 2.1.19., 2.1.21., 2.1.23. and 2.1.24.

To get the density function solutions of (8) (by the help of theorem 2.1.25 and other previous results) we show the following

Theorem. *(2.1.26.) If the nonnegative functions $h_1, h_2, f_X, f_Y:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ satisfy equation (8) for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ and there exist sets $A_1, A_2, A_3, A_4\subset\mathbb{R}_+$ with positive Lebesgue measure on which the functions are positive, respectively, then they are positive almost everywhere on $\mathbb{R}_+$.*

Theorem. *(2.1.27.) In case $\alpha>0$, $\beta>0$, if the nonnegative measurable functions $h_1, h_2, f_X, f_Y:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ satisfy equation (8) for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ and there exist sets $A_1, A_2, A_3, A_4\subset\mathbb{R}_+$ of positive Lebesgue measure on* *which the functions are positive, then*

$$
\begin{aligned}
h_1(x) = &\quad e^{-d_2}\left(\frac{\lambda_1\alpha}{\beta}\right)^{p_2} x^{p_2+q}\left(x+\frac{\beta}{\lambda_1\alpha}\right)^{-q} \quad (a.e.\ \ x\in\mathbb{R}_+),\\
h_2(x) = &\quad e^{-d_1}\left(\frac{\lambda_2\beta}{\alpha}\right)^{p_1} x^{p_1+q}\left(x+\frac{\alpha}{\lambda_2\beta}\right)^{-q} \quad (a.e.\ \ x\in\mathbb{R}_+),\\
f_X(x) = &\quad e^{d_4}\frac{\lambda_2}{\beta^{p_1+p_2+q}} x^{p_2+q}(x+\beta)^{p_1+1} \quad (a.e.\ \ x\in\mathbb{R}_+),\\
f_Y(x) = &\quad e^{d_3}\frac{\lambda_1}{\alpha^{p_1+p_2+q}} x^{p_1+q}(x+\alpha)^{p_2+1} \quad (a.e.\ \ x\in\mathbb{R}_+),
\end{aligned}
$$

where $p_1,\ p_2,\ q,\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4\in\mathbb{R}$ *are arbitrary constants with the property* $d_1+d_3=d_2+d_4$.

In case $\alpha=0$, $\beta>0$ theorem 2.1.28. and in case $\alpha>0$, $\beta=0$ theorem 2.1.29. are valid.

In subsection 2.2. equation

$$
g_1\left[\frac{x-a(y)}{c(y)}\right]\frac{1}{c(y)}f_Y(y)=g_2\left[\frac{y-b(x)}{d(x)}\right]\frac{1}{d(x)}f_X(x) \tag{9}
$$

is investigated, where a, b are given, c and d are given positive functions. With the special choice of these functions we only suppose the measurability of the unknown positive functions g_1, g_2, f_Y, f_X and that the equation is satisfied for almost all (x,y) from an open subset of $\mathbb{R}^2$.

The results of this subsection can be found in the manuscript [39].

We considered the case, when a,b, c and d are linear functions (see [7]), i.e.

$$
a(y)=m_1y+c_1,\quad b(x)=m_2x+c_2,
$$

$$
c(y)=\lambda_1(y+a_1),\quad d(x)=\lambda_2(x+a_2).
$$

The main results can be found in lemma 2.2.1. and in theorems 2.2.1., 2.2.2., 2.2.3. and 2.2.4.

3. Characterizations of univariate distributions

Throughout in the dissertation we suppose that the probability distributions are absolutely continuous, that is, they have density function, and so we can use the well-known transformation theorem of probability theory ([19]).

Theorem. *(3.1.1.) Let* $X=(X_1,\dots,X_n)$ *be an absolutely continuous random variable with density function* $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$*, which is zero outside of a region* $\Omega_x\subset\mathbb{R}^N$*. Let* $\psi:\Omega_x\to\Omega_y\subset\mathbb{R}^n$ *be a one-to-one transformation onto* Ω_y *and denote* ψ^{-1} *its inverse transformation.*

If the Jacobi determinant $J(y) = \det\left(\frac{\partial\psi^{-1}(y)}{\partial y}\right)$ *exists, is continuous and does not change sign in* Ω_y*, then the random variable* $Y = \psi(X)$ *is absolutely continuous with density function* g *such that*

$$g(y) = \begin{cases} f\left(\psi^{-1}(y)\right)|J(y)| & , \textit{if} \quad y \in \Omega_y \ a.e. \\ 0 & , \textit{if} \quad y \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega_y. \end{cases}$$

The characterizations can be found in [36], [43], [46], [47], [45], [48] and [49].

In subsection 3.2. we consider the characterization of the gamma distribution.

First we prove the Lukács characterization of the gamma distribution ([41]), where we use the transformation $\psi : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+^2$, $\psi(x,y) = \left(x+y, \frac{x}{y}\right)$ and the transformation theorem and get the functional equation

$$\frac{y^2}{x+y} f_X(x) f_Y(y) = f_U(x+y) f_V\left(\frac{x}{y}\right) \quad \left(\text{a.e. } \ (x,y) \in \mathbb{R}_+^2\right)$$

which can be solved by the help of Olkin-Baker equation, hence we get the following

Theorem. *(3.2.1.) The absolutely continuous and independent random variables* X *and* Y *are gamma distributed (with the same scale parameter) if and only if* $X+Y$ *and* $\frac{X}{Y}$ *are independent.*

We also prove an other characterization of the gamma distribution due to Kotlarski ([24]) in theorem 3.2.2.

In subsection 3.3. we give a characterization of the beta distribution (raised by Wesołowski [55]) by means of the transformation $\psi : (0,1)^2 \to (0,1)^2$, $\psi(x,y) = \left(\frac{1-y}{1-xy}, 1-xy\right)$ and the transformation theorem. We get the functional equation

$$f_U(u) f_V(v) = f_X\left(\frac{1-v}{1-uv}\right) f_Y(1-uv) \frac{v}{1-uv} \tag{10}$$

(investigated in subsection 1.3.) for the unknown density functions f_X, f_Y, f_U, $f_V : (0,1) \to \mathbb{R}$.

Wesołowski supposed that equation (10) is satisfied for all $(u,v) \in (0,1)^2$, but now we suppose only that equation (10) is satisfied for almost all $(u,v) \in (0,1)^2$ with the density functions f_X, f_Y, f_U, f_V.

We have the following

Theorem. *(3.3.1.) If* X *and* Y *are absolutely continuous and independent random variables (and the support of* X *and* Y *are equal to* $(0,1)$*) such that the random variables, defined by*

$$U = \frac{1-Y}{1-XY}, \quad V = 1-XY$$

are also independent, then X, Y, U and V belong to the family of beta distributions. That is, X, Y, U and V have beta distributions with parameters p, q; $p+q, r$; r, q and $q+r, p$, respectively.

In subsection 3.4. we prove the Lukács characterization of the normal distribution ([40]), where we use the transformation $\psi(x,y) = (x+y, x-y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ and the transformation theorem to get the functional equation

$$f_X(x)\, f_Y(y) = 2 f_U(x+y)\, f_V(x-y) \quad \left(\text{m.m } (x,y) \in \mathbb{R}^2\right),$$

which is a special case of equation (3) with the constants $a = b = c = 1$ and $d = -1$.

So we get the following

Theorem. *(3.4.1.) The absolutely continuous and independent random variables X and Y have normal distributions if and only if $X+Y$ and $X-Y$ are independent.*

In subsection 3.5. a characterization of the exponential distribution can be found.

We give all density functions f satisfying the following two properties (Maksa and Mészáros [43])

Property 1. *$f(u) = 0$ for almost all $u \in (-\infty, 0)$ (with respect to the Lebesgue measure)* and

Property 2. *There exist $0 \le n \in \mathbb{Z}$ (the set of all integers) and $-1 < \beta \in \mathbb{R}$ such that the function p defined on $\mathbb{R}^2$ by $p(u,v) = 0$ if $u < 0$ or $v < 0$ and*

$$\text{(11)} \quad p(u,v) = \int_0^{+\infty} f(u)\left(F(u) - F(s+u)\right)^n f(s+u) f(s+u+v) F(s+u+v)^{\beta} ds$$

if $u, v \in [0, +\infty)$, where $F(u) = \int_u^{+\infty} f$, $u \ge 0$ is the survival function, is the joint density function of some two independent random variables.

We give a solution of the problem by proving that all density functions f which are positive on $[0, +\infty)$ and have properties 1–2 are exponential density functions. Furthermore we give a necessary and sufficient condition for the parameters n and β in (11) in order to the function p defined in (11), with some exponential density function f, be a density function itself, too.

4. Characterizations of conditionally specified absolutely continuous bivariate distributions

Let (X, Y) be an absolutely continuous bivariate random variable, whose joint, marginal and conditional density functions are denoted by $f_{(X,Y)}$, f_X, f_Y, $f_{X|Y}$

and $f_{Y|X}$ respectively. One can write $f_{(X,Y)}$ in two different ways and obtain the functional equation

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_{X|Y}(x,y)\, f_Y(y) = f_{Y|X}(x,y)\, f_X(x) \tag{12}$$

for almost all $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (or for almost all $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ if we restrict our investigations to the random variable (X,Y) with support in the positive quadrant).

If the conditional densities are defined among important special functions, then we get functional equations which lead us to a characterization of (X,Y).

First Narumi ([50]), then Arnold, Castillo and Sarabia ([7]) used functional equations in characterizations of conditionally specified absolutely continuous bivariate distributions.

The results can be found in [37], [38] and in manuscript [39].

In subsection 4.2. we consider the case of linear regressions with conditionals in location families, when the conditional densities have the form $f_{X|Y}(x,y) = g_1(x - a_1 y - a_2)$, $f_{Y|X}(x,y) = g_2(y - b_1 x - b_2)$.

In this case we get equation

$$f_Y(y)\, g_1(x - a_1 y - a_2) = f_X(x)\, g_2(y - b_1 x - b_2)\,. \tag{13}$$

Narumi solved (13) under strong regularity assumptions.

Now we suppose only what is natural. Let the unknown functions be density functions and let the equation be satisfied for almost all $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

We can give the solutions of (13) by the help of the equation in subsection 1.4., which gives us immediately the joint density function

$$f_{(X,Y)}(x,y) =$$
$$= \alpha_1\alpha_2 \exp\left[(A_1 - A_2 b_1)\, x + A_2 y - \frac{a_1 B_1}{1 - a_1 b_1}\left(\frac{x^2}{a_1} - 2xy + \frac{y^2}{b_1}\right)\right]$$

for almost all $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

So we get the same conclusion as [7], that either X and Y are independent or (X,Y) has bivariate normal distribution.

In subsection 4.3. the case of specified regression with conditionals in scale families is also investigated, when the conditional densities have the form

$$f_{X|Y}(x,y) = h_1\left(\frac{x}{c(y)}\right)\frac{1}{c(y)},$$

$$f_{Y|X}(x,y) = h_2\left(\frac{y}{d(x)}\right)\frac{1}{d(x)},$$

where c and d are given positive functions and h_1 and h_2 are unknown positive functions.

Hence from (12) we obtain equation

$$h_1\left(\frac{x}{c(y)}\right)\frac{1}{c(y)} f_Y(y) = h_2\left(\frac{y}{d(x)}\right)\frac{1}{d(x)} f_X(x)\,, \tag{14}$$

which was investigated in subsection 2.1.

With the first special choice (in 2.1.) of the functions c, d we get equation

$$h_1\left(\left(\alpha+y\right)x\right)\left(\alpha+y\right)f_Y\left(y\right)=h_2\left(\left(\beta+x\right)y\right)\left(\beta+x\right)f_X\left(x\right) \tag{15}$$

for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$, where $h_1,\ h_2,\ f_X,\ f_Y:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ are unknown measurable functions, $\alpha,\ \beta\geq 0$ are arbitrary constants.

Using the results of subsection 2.1. the following theorem is valid.

Theorem. *(4.3.1.) In the given special case if $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, the functions h_1 and h_2 are gamma densities (with parameters $-\gamma$, c_1+1 and $-\gamma$, c_2+1), that is (X,Y) has gamma conditionals. Furthermore the joint density function is*

$$f_{(X,Y)}\left(x,y\right)=\exp\left(\delta_1+\delta_3\right)x^{c_1}y^{c_2}\exp\left(\gamma\left(\alpha x+xy+\beta y\right)\right)$$

for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$, hence in this case the class of all solutions coincides with the MODEL II gamma conditionals class (see [7]).

With the second special choice (in 2.1.) of the functions c, d we get equation

$$h_1\left(\frac{x}{\lambda_1\left(\alpha+y\right)}\right)\frac{1}{\lambda_1\left(\alpha+y\right)}f_Y\left(y\right)=h_2\left(\frac{y}{\lambda_2\left(\beta+x\right)}\right)\frac{1}{\lambda_2\left(\beta+x\right)}f_X\left(x\right), \tag{16}$$

for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$, where $h_1,\ h_2,\ f_X,\ f_Y:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ are measurable unknown functions, $\lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbb{R}_+$, $\alpha,\ \beta\geq 0$ are arbitrary constants.

The following result is valid.

Theorem. *(4.3.2.) In the case $\alpha>0$, $\beta>0$ the functions h_1 and h_2 have Pearson-type VI distribution (with the parameters c_2+1, $\frac{\gamma}{\alpha\beta}-c_2-1$ and c_1+1, $\frac{\gamma}{\alpha\beta}-c_1-1$), which is also called beta distribution of the second kind (see [7]). In this case the marginal densities f_X and f_Y have the same distribution. The joint density function is*

$$f_{(X,Y)}\left(x,y\right)=\exp\left(d_3-d_2\right)x^{c_2}y^{c_1}\left(\alpha x+\beta y+\alpha\beta\right)^{-\frac{\gamma}{\alpha\beta}}$$

for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$, hence in this case the class of all solutions coincides with an extension of the bivariate Pareto distribution introduced by Mardia (see [7], [44]).

In case $\alpha=0$, $\beta>0$ the joint density function is

$$f_{(X,Y)}\left(x,y\right)=\exp\left(d_3-d_2\right)x^{c_2}y^{c_1}e^{-\frac{\gamma}{\beta^2}\frac{\beta+x}{y}}$$

for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$.

In case $\alpha>0$, $\beta=0$ the joint density function is

$$f_{(X,Y)}\left(x,y\right)=\exp\left(d_3-d_2\right)x^{c_2}y^{c_1}e^{-\frac{\gamma}{\alpha^2}\frac{\alpha+y}{x}}$$

for almost all $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$.

In subsection 4.4. we consider the case of conditionals in location-scale families with specified moments, when the conditional densities have the form

$$f_{X|Y}(x,y) = g_1\left[\frac{x-a(y)}{c(y)}\right]\frac{1}{c(y)}, \quad f_{Y|X}(x,y) = g_2\left[\frac{y-b(x)}{d(x)}\right]\frac{1}{d(x)}$$

with given functions a, b and given positive functions c, d, where g_1, g_2 are unknown functions.

Then we get equation

$$g_1\left[\frac{x-a(y)}{c(y)}\right]\frac{1}{c(y)}f_Y(y) = g_2\left[\frac{y-b(x)}{d(x)}\right]\frac{1}{d(x)}f_X(x), \tag{17}$$

which was investigated in subsection 2.2.

With special choice of the known functions let the unknown functions g_1, g_2, f_Y, f_X be density functions and let equation (17) be satisfied for almost all (x, y) from an open subset of $\mathbb{R}^2$.

If the functions a, b, c and d are linear, g_1, g_2, f_Y, f_X are density functions, then using the results of subsection 2.2. we get theorems 4.4.1., 4.4.2. and 4.4.3. for the joint density function of (X, Y).

Irodalomjegyzék

[1] Aczél, J., Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen, Birkhäuser, Basel, 1961.

[2] Aczél, J., Lectures on Functional Equations and Their Applications, Academic Press, New York, 1966.

[3] Aczél J. and Daróczy, Z., On measures of information and their characterizations, Academic Press, New York, 1975.

[4] Aczél, J. and Dhombres, J., Functional Equations in Several Variables, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[5] Aczél, J. and Erdős, P., *The non-existence of a Hamel-basis and the general solution of Cauchy's functional equation for non-negative numbers*, Publ. Math. Debrecen *12* (1965), 259–263.

[6] Arnold, B. C., Castillo, E. and Sarabia, J. M., Conditionally specified distributions, Lecture Notes in Statistics 73, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Hong Kong - Budapest, 1992.

[7] Arnold, B. C., Castillo, E. and Sarabia, J. M., Conditional Specification of Statistical Models, Springer-Verlag, New York, 1999.

[8] Baker, J. A., *On the functional equation* $f(x)\,g(y) = \prod_{i=1}^{n} h_i\,(a_i x + b_i y)$, Aequationes Math. **11** (1974), 154–162.

[9] Baker, J. A., *On the functional equation* $f(x)\,g(y) = p\,(x+y)\,q\left(\frac{x}{y}\right)$, Aequationes Math. **14** (1976), 493–506.

[10] Castillo, E. and Ruiz-Cobo, R., Functional equations in science and engineering, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 161., Marcel Dekker, New York, 1992.

[11] Daróczy, Z., Losonczi, L., *Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additiven Funktionen*, Publ. Math. Debrecen **14** (1967), 239–245.

[12] De Bruijn, N. G., *On almost additive functions*, Colloq. Math. *15* (1966), 59–63.

[13] Denny, J. L., *Sufficient conditions for a family of probabilities to be exponential*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *57* (1967), 1184–1187.

[14] Dhombres, J. G., Ger, R., *Conditional Cauchy equations*, Glas. Mat. Ser. III **13(33)** (1978), no. 1, 39–62.

[15] Eichhorn, W., Functional equations in economics, Addison-Wesley, London, 1978.

[16] Erdős, P., *P 310*, Colloq. Math. *7* (1960), 311.

[17] Erdős, P., Oxtoby, J. C., *Partitions of the plane into sets having positive measure in every non-null measurable product set*, Trans. Amer. Math. Soc. *79* (1955), 91–102.

[18] Ger, R., *On some functional equations with a restricted domain I.; II.*, Fund. Math. **89** (1975), 131–149.; **98** (1978), no. 3, 250–272.

[19] Giri, N. C., Introduction to probability and statistics, Marcel Dekker, New York, 1974.

[20] Járai, A., *Measurable solutions of functional equations satisfied almost everywhere*, Mathematica Pannonica *10/1* (1999), 103–110.

[21] Járai, A., Regularity Properties of Functional Equations in Several Variables, Springer, Adv. Math. Dordrecht, Vol. 8, 2005.

[22] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N., Continuous univariate distributions, Vol. 2, 2nd Edition., John Wiley, New York, 1994.

[23] Jurkat, W. B., *On Cauchy's functional equation*, Proc. Amer. Math. Soc. *16* (1965), 683–686.

[24] Kotlarski, I. I., *Una caratterizzazione della distribuzione gamma per mezzo di statistiche indipendenti*, Rendiconti di Matematica **3–4/2** (1969), 671–675.

[25] Kuczma, M., Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Państwowe Wydawnictwo Naukowe – Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

[26] Lajkó, K., *Applications of extensions of additive functions*, Aequationes Math. *11* (1974), 68–76.

[27] Lajkó, K., *A characterization of generalized normal and gamma distributions*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 21. Analytic Function Methods in Prob. Theory (1979), 199–225.

[28] Lajkó, K., *Remark to a paper by J. A. Baker*, Aequationes Math. *19* (1979), 227–231.

[29] Lajkó, K., *On the functional equation* $f(x)\,g(y) = h(ax+by)\,k(cx+dy)$, Periodica Mathematica Hungarica, **11/3** (1980), 187–195.

[30] Lajkó, K., Nevezetes problémák függvényegyenletei és azok általánosításai, Habilitációs Tézisek, Debrecen, 2000.

[31] Lajkó, K., *Functional equations in the theory of conditionally specified distributions*, Publ. Math. Debrecen **58/1-2** (2001), 241–248.

[32] Lajkó, K., *The general solution of a functional equation related to the characterizations of bivariate distributions*, (joint work with T. Glavosits), Report of Meeting, Aequationes Math. **69** (2005), 173.

[33] Lajkó, K., *Remarks to a paper by S. Narumi*, (joint work with F. Mészáros), Report of Meeting, Annales Mathematicae Silesianae **19** (2005), 70–71.

[34] Lajkó, K. and Mészáros, F., *Density function solutions of a functional equation*, (presented by K. Lajkó), 47th ISFE, Gargnano, 2009.

[35] Lajkó, K. and Mészáros, F., *Applications of a generalized Steinhaus-type theorem in solving functional equations*, (presented by K. Lajkó), 23rd Summer Conference on Real Functions Theory, 2009.

[36] Lajkó, K. and Mészáros, F., *Functional equations arisen from the characterization of beta distributions*, Aequationes Math., **78** (2009), 87–99.

[37] Lajkó, K. and Mészáros, F., *Some new functional equations connected with characterization problems*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, **25** (2009), 221–239.

[38] Lajkó, K. and Mészáros, F., *Functional equations stemming from probability theory*, Tatra Mountains Mat. Journal, in print.

[39] Lajkó, K., Mészáros, F. and Pap, Gy., *Functional equations satisfied almost everywhere connected with characterization problems*, manuscript.

[40] Lukács, E., *A characterization of the normal distribution*, Ann. Math. Statist., **13** (1942), 91–93.

[41] Lukács, E., *A characterization of the gamma distribution*, Ann. Math. Statist., **26** (1955), 319–324.

[42] Maksa, Gy., *Solution on the open triangle of the generalized fundamental equation of information with four unknown functions*, Utilitas Math. *21* (1982), 267–282.

[43] Maksa, Gy. and Mészáros, F., *A characterization of the exponential distribution through functional equations*, Inequalities and Applications '07, International Series of Numerical Mathematics, Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland, 157 (2008), 291-298.

[44] Mardia, K. V., *Multivariate Pareto Distributions*, Annals of Mathematical Statistics **33** (1962), 1008–1015.

[45] Mészáros, F., *A functional equation arisen from the characterization of beta distributions*, Report of Meeting, Aequationes Math., **75** (2008), 174.

[46] Mészáros, F., *A functional equation related to characterization problems*, Mathematica Pannonica, **20/1** (2009), 129–138.

[47] Mészáros, F., *A functional equation and its application to the characterization of gamma distributions*, Aequationes Math., submitted.

[48] Mészáros, F. and Lajkó, K., *Density function solutions of functional equations satisfied almost everywhere*, (presented by F. Mészáros), 47th ISFE, Gargnano, 2009.

[49] Mészáros, F. and Lajkó, K., *Density function solutions of a functional equation*, (presented by F. Mészáros), 13th ICFEI, Małe Ciche, 2009.

[50] Narumi, S., *On the General Form of Bivariate Frequency Distributions which are Mathematically Possible when Regression and Variation are Subjected to Limiting Conditions I.,II*, Biometrika **15** (1923), 77–88, 209–221.

[51] Olkin, I., *Problem (P128)*, Aequationes Math. **12** (1975), 290–292.

[52] Páles, Zs., *Extension theorem for functional equations with bisymmetric operations*, Aequationes Math., **63** (2002), 266–291.

[53] Ramachandran, B. and Lau K-S., Functional equations in probability theory, Academic Press, New York, 1991.

[54] Székelyhidi, L., *The general representation of an additive function on an open point set*, (in Hungarian), Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. **21** (1972), 503–509.

[55] Wesołowski, J., *On a functional equation related to an independence property for beta distributions*, Aequationes Math., **66** (2003), 156–163.

[56] Yadrenko, M. I., Spectral Theory of Random Fields, Optimization software, INC. Publications Division, New York, 1983.

Publikációk

Referált dolgozatok:

[1] Zs. Ádám, K. Lajkó, Gy. Maksa, F. Mészáros, *Sequenced problems for functional equations*, Teaching Mathematics and Computer Science, **4/1**, (2006) 179–192.

[2] Zs. Ádám, K. Lajkó, Gy. Maksa, F. Mészáros, *Two functional equations on group*, Annales Mathematicae Silesiana, **21**, (2007) 7–13. MR 2009m:39038

[3] Gy. Maksa, F. Mészáros, *A characterization of the exponential distribution through functional equations*, Inequalities and Applications '07, International Series of Numerical Mathematics, Birkhauser Verlag Basel/Switzerland, **157**, (2008) 291–298.

[4] F. Mészáros, *A functional equation related to characterization problems*, Mathematica Pannonica, **20/1**, (2009) 129–138. MR 2517717

[5] K. Lajkó, Gy. Maksa, F. Mészáros, *On a generalized Hosszú functional equation*, Publ. Math. Debrecen, **74**, (2009) no. 1-2, 101–106. MR 2009k:39025

[6] K. Lajkó, F. Mészáros, *Functional equations arisen from the characterization of beta distributions*, Aequationes Math., **78**, (2009) 87–99.

[7] K. Lajkó, F. Mészáros, *Some new functional equations connected with characterization problems*, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, **25** (2009), 221–239.

Nem referált dolgozatok:

[8] F. Mészáros, *Majdnem mindenütt teljesülő függvényegyenletek és karakterizációs problémák*, tudományos diákköri dolgozat, Debrecen, (2004).

[9] F. Mészáros, *Majdnem mindenütt teljesülő függvényegyenletek és karakterizációs problémák*, Doktoranduszok Fóruma kiadvány, (Miskolci Egyetem, 2005), Miskolc, (2006) 136–141.

Közlésre elfogadott dolgozatok:

[10] K. Lajkó, F. Mészáros, *Functional equations stemming from probability theory*, Tatra Mountains Mat. Journal

[11] F. Mészáros, *A functional equation and its application to the characterization of gamma distributions*, Aequationes Math.

Előadások

[1] *Functional equations satisfied almost everywhere*, The 1st International Students Conference on Analysis, Szczyrk (Poland), 2005.

[2] *Majdnem mindenütt teljesülő függvényegyenletek és karakterizációs problémák*, XXVII. Országos Tudományos Diákköri Konferencia Fizika-Földtudományok-Matematika Szekció, Budapest (Hungary), 2005.

[3] *Majdnem mindenütt teljesülő függvényegyenletek és karakterizációs problémák*, Doktoranduszok Fóruma, Miskolc (Hungary), 2005.

[4] *Functional equations arising from characterization problems*, intézeti szeminárium, Karlsruhe (Germany), 2006.

[5] *Functional equations satisfied almost everywhere relating to characterization problems*, The 6th Debrecen-Katowice Winter Seminar, Berekfürdő (Hungary), 2006.

[6] *Sequenced problems for functional equations*, The 2nd International Students Conference on Analysis, Síkfőkút (Hungary), 2006.

[7] *Functional equations on group*, 11th ICFEI, Bedlewo (Poland), 2006.

[8] *Further generalizations in connection with an old problem of J. Aczél*, The 7th Katowice-Debrecen Winter Seminar, Bedlewo (Poland), 2007.

[9] *Functional equations on group*, The 3rd International Students Conference on Analysis, Szczyrk (Poland) 2007.

[10] *A béta eloszlás jellemzése kapcsán felmerült függvényegyenletekről*, tanszéki szeminárium, Debrecen (Hungary), 2007.

[11] *A functional equation arisen from the characterization of beta distributions*, 45th ISFE, Bielsko-Biala (Poland), 2007.

[12] *Functional equations connected with beta distributions*, Conference on Inequalities and Applications '07, Noszvaj (Hungary), 2007.

[13] *A characterization of the exponential distribution through functional equations*, The 8th Debrecen-Katowice Winter Seminar, Poroszló (Hungary), 2008.

[14] *A functional equation connected with exponential distribution*, The 4th International Students Conference on Analysis, Zamárdi (Hungary), 2008.

[15] *A functional equation and its application to the characterization of gamma distributions*, Numbers, Functions, Equations '08, Noszvaj (Hungary), 2008.

[16] *A functional equation related to characterization problems in probability theory*, 46th ISFE, Opava (Czech Republic), 2008.

[17] *Functional equations stemming from probability theory*, 12th ICFEI, Bedlewo (Poland), 2008.

[18] *Functional equations related to characterization problems of probability theory*, intézeti szeminárium, Bonn (Germany), 2008.

[19] *Functional equations arising from the characterization problems of probability theory*, The 9th Katowice-Debrecen Winter Seminar, Bedlewo (Poland), 2009.

[20] *Functional equations in the characterization problems of probability theory*, The 5th International Students Conference on Analysis, Szare (Poland), 2009.

[21] *Density function solutions of functional equations satisfied almost everywhere*, 47th ISFE, Gargnano (Italy), 2009.

[22] *Density function solutions of a functional equation*, 13th ICFEI, Male Ciche (Poland), 2009.