Doktori (PhD) értekezéstézisei

Lokálisan konstans ortonormált rendszerekre vonatkozó Fourier sorok szummálhatósági kérdéseinek vizsgálata

Lucskai Gábor

Témavezető: Prof. Dr. Gát György Tamás

DEBRECENI EGYETEM
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2021.

Bevezetés

A disszertáció két fő fejezetet tartalmaz, egy függeléket és egy hivatkozásokat tartalmazó részt. A disszertáció során a diadikus analízis szokásos jelöléseit alkalmazzuk. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $I := [0, 1)$. Ekkor

$$n = \sum_{n=0}^{\infty} n_j 2^j \quad \text{és} \quad x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n 2^{-(n+1)}$$

az $x \in I$ és $n \in \mathbb{N}$ számok diadikus alakja, ahol $n_k, x_k \in \{0, 1\}$.

Definiáljunk már karakterrendszert az $(I, +)$ halmazon. Első lépésként az $\omega = (\omega_n, n \in \mathbb{N})$ Walsh–Paley- és $\kappa = (\kappa_n, n \in \mathbb{N})$ Walsh–Kaczmarz-rendszer n-edik tagját az alábbi módon definiáljuk:

$$\omega_n(x) := \prod_{j=0}^{\infty} (-1)^{x_j n_j} \quad \text{és} \quad \kappa_n(x) := r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_{|n|-1-k}}.$$

Ezek a rendszerek karakterrendszert alkotnak az $(I, +)$ halmazon, ahol a $+$ művelet az úgynevezett diadikus vagy logikai összeget jelöli.

Ezen a halmazon a harmadik karakterrendszer a $v = (v_n, n \in \mathbb{N})$ 2-adikus egészek rendszere. Ebben az esetben a $+$ művelet a 2-adikus vagy más néven aritmetikai összeget jelöli. A rendszer n-edik tagja az alábbi módon írható fel,

$$v_n := \prod_{n=0}^{\infty} v_{2^j}^{n_j}, \quad \text{ahol} \quad v_{2^n}(x) := \varepsilon\left(\frac{x_n}{2} + \ldots + \frac{x_0}{2^{n+1}}\right).$$

Mindhárom esetben n_j és x_j $(j \in \mathbb{N})$ jelöli rendre az $n \in \mathbb{N}$ és $x \in I$ számok bináris együtthatóit.

Legyen $\varphi \in \{\omega, \kappa, v\}$. A Dirichlet-magfüggvényt, illetve az $f \in L^1(I)$ n-edik Fourier-együtthatóját és Fourier-sorának n-edik részletösszegét rendre az alábbi módon definiáljuk:

$$D_n^{\varphi} := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k \qquad \hat{f}^{\varphi}(n) := \int_I f(x)\bar{\varphi}_n(x)\, d\lambda(x),$$

$$S_n^{\varphi} f(y) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\varphi_k(y), \qquad \sigma_n^{\varphi} f(y) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f(y).$$

Az első rész. A disszertáció első részében a Fejér-magfüggvények maximáloperátorát vizsgáltuk a Walsh–Paley-rendszerben és a Riesz–logaritmikus közepeket vizsgáltuk a Walsh–Paley- illetve a Walsh–Kaczmarz-rendszerekben.

Az említett magfüggvényeket rendre az alábbi módon definiáljuk:

$$K_n^{\varphi} := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k^{\varphi}, \quad R_n^{\varphi} := \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{D_k^{\varphi}}{k},$$

ahol $K_0 := 0$ és $\varphi \in \{\omega, \kappa\}$.

Walsh–Paley-rendszerben 1955-ben N.J. Fine bizonyította a Fejér-közepek majdnem mindenütti konvergenciát integrálható függvényekre ([3]). 1997-ben Gát a Fejér-magfüggvény maximáloperátorára adott becslés segítségével bizonyította a Fejér-közepek majdnem mindenütti konvergenciát a Walsh–Paley-rendszerben ([4]).

Fejér-magfüggvény maximáloperátorának vizsgálata. Ezután térjünk át a Fejér-magfüggvények maximáloperátorának a vizsgálatára. Az első ezzel kapcsolatos egyenlőtlenség Gát nevéhez fűződik, aki 1997-ben igazolta az alábbi egyenlőtlenséget.

TÉTEL ([4]). *Minden $a \leq A \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\int_{I \setminus I_a} \sup_{|n| \geq A} |K_n(x)|\, dx \leq C\sqrt{2^{a-A}}.$$

Goginava 2004-ben jobb felső becslést adott az előző eredményhez képest. Ő az alábbi állítást bizonyította.

TÉTEL ([9]). *Minden $a < A \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\int_{I \setminus I_a} \sup_{|n| \geq A} |K_n(x)|\, dx \leq C\frac{A-a}{2^{A-a}}.$$

Az első eredmény, hogy a Goginava által adott becslés tovább nem javítható.

TÉTEL (Gát–Lucskai [A]).

$$\int_{\delta}^{1} \sup_{n \geq N} |K_n(x)|\, dx \geq c\frac{\log(N\delta)}{N\delta} \quad \left(N > \frac{1}{\delta}\right).$$

Riesz-logaritmikus magfüggvények vizsgálata Trigonometrikus esetben a Fejér-magfüggvények csak pozitív értéket vehetnek fel, így ezt a tulajdonságot felhasználva könnyen igazolhatjuk, hogy a Riesz-logaritmikus közepek csak pozitív értéket vesznek fel.

Azonban a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerben a Fejér-magfüggvények negatív értéket is felvehetnek. Így az említett rendszerekben nem használható a trigonometrikus rendszerbeli bizonyítás. Ennek ellenére a Walsh–Paley-rendszerben sikerült igazolni az alábbi tételt, amely bizonyítása sokkal összetettebb, mint a trigonometrikus rendszerre vonatkozó bizonyítás.

TÉTEL (Gát–Lucskai, [A]). *Legyen* $t, n \in \mathbb{N}$ *és* $x \in I_t \setminus I_{t+1}$. *Ekkor*

$$R_n(x) \geq \frac{2^t}{16 \log n}, \quad \text{ha } n > 2^t \quad \text{és} \quad R_n(x) = \frac{n-1}{\log n}, \quad \text{ha } n \leq 2^t.$$

A bizonyítás során a MATLAB komputeralgebrai programot használtuk, hogy az $n \in \{1, \ldots 127\}$ és $t \leq 6$ esetekben is igazoljuk a tétel állítását.

A tételnek két következménye van.

KÖVETKEZMÉNY (Gát–Lucskai, [A]). *A Walsh–Paley-rendszerre vonatkozó Riesz-logaritmikus magfüggvény pozitív* $n \in \mathbb{N}$ *és minden* $x \in [0, 1)$ *esetén.*

A másik következmény egy komoly eltérést mutat a Walsh–Fejér és a Walsh-logaritmikus közepek között.

KÖVETKEZMÉNY (Gát-Lucskai [A]). *Legyen* $t, a \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy* $t \geq a$ *teljesüljön. Ekkor*

$$\int_{2^{-a}}^{1} \sup_{n \geq 2^t} |R_n(x)| \, dx = \infty.$$

fennáll a Walsh–Paley-rendszer esetén.

A következő eredményünk egy újabb eltérés mutat a a Walsh–Paley- és a Walsh–Kaczmarz-rendszerek között. Utóbbi rendszerben megadható a Riesz-logaritmikus magfüggvényeknek egy olyan sorozata, amely valamely intervallumon negatív értéket vesz fel. Pontosabban teljesül az alábbi tétel.

TÉTEL (Gát–Lucskai [B]). *Legyen* $A = 2^n + 2^{n-1}, \leq n \in \mathbb{N}$ *és* $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}$. *Ekkor*

$$\log(A) R_A^{\kappa}(x) \leq -0.02 \cdot 2^n.$$

A bizonyításban a Young-egyenlőtlenségnek egy következménye játszik fontos szerepet.

Lemma (Young-egyenlőtlenség, [17]). *Legyen $n \in \mathbb{P}$, akkor*

$$\frac{1}{2(n+1)} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) - \gamma < \frac{1}{2n},$$

ahol $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n)\right)$.

Következmény. *Legyen $n, N \in \mathbb{N}$ és $N > n$. Ekkor fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:*

$$0 < \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{k} - \log\left(\frac{N}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Második rész.

Ebben a részben igazoljuk az egydimenziós Riesz-közepek és a kétdimenziós (C, α)-közepek majdnem mindenütti konvergenciáját.

Egydimenziós eset. A Fejér-közepet és a Riesz-összegzési eljárás $K_n^{\alpha,\gamma}$ magfüggvényét a következőképpen definiáljuk:

$$K_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k, \quad K_n^{\alpha,\gamma} := \frac{1}{n^{\alpha\gamma}}\sum_{k=0}^{n-1}(n^\gamma - k^\gamma)^\alpha v_k,$$

ahol $K_0 := 0$, $n \in \mathbb{N}$ és $0 < \min\{\alpha, \gamma\} \le 1 \le \max\{\alpha, \gamma\} < \infty$. Az f integrálható függvény Riesz-közepe:

$$\sigma_n^{\alpha,\gamma} f(y) := \frac{1}{n^{\alpha\gamma}}\sum_{j=0}^{n-1}(n^\gamma - k^\gamma)^\alpha \hat{f}(j).$$

Ha $\alpha = \gamma = 1$, akkor Fejér-középről beszélünk.

Taibleson kérdése az volt, hogy a 2-adikus egészek rendszerében teljesül-e a $\sigma_n f \to f$ majdnem mindenütti konvergencia minden $f \in L^1$ esetén. Több mint húsz évvel később, 1997-ben Gát a [5] cikkében igazolta Taibleson sejtését, 2007-ben pedig a [6] cikkében általánosította az előző eredményét minden $\alpha > 0$ esetén.

A Riesz-közepek majdnem mindenütti konvergenciáját a trigonometrikus rendszerben Riesz igazolta ([13, 19]). A Walsh–Paley-rendszerben a $0 < \gamma \le 1 \le \alpha$ esetet Weisz bizonyította ([16]). Weisz eredményét bizonyítottuk a 2-adikus egészek körében.

Tétel (Gát–Lucskai [C]). *Legyen* $0 < \gamma \le 1 \le \alpha$. *Ekkor* $\sigma_n^{\alpha,\gamma} f \to f$ *majdnem mindenütt minden* $f \in L^1(I)$ *esetén, ahol* I *jelöli a 2-adic egészek csoportját.*

Tekintsük át a bizonyítás főbb lépéseit. Először, a Riesz-magfüggvényre az alábbi felső becslést adtuk:

$$\left|K_n^{\alpha,\gamma}\right| \le \sum_{j=1}^{11} T_j,$$

ahol

$$T_1 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{t-1} n_k \sum_{l=0}^{2^k-1} (l+2) \left|\Delta_2 a_{n,n^{(k)}-l-1}\right| |K_l|,$$

$$T_2 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{l=0}^{2^t-1} (l+2) \left|\Delta_2 a_{n,n^{(k)}-l-1}\right| |K_l|,$$

$$T_3 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{l=2^t}^{2^k-1} (l+2) \left|\Delta_2 a_{n,n^{(k)}-l-1}\right| |K_l|,$$

$$T_4 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{t-1} n_k (2^k+1) \left|\Delta_1 a_{n,n^{(k)}} - 2^k\right| \cdot \left|K_{2^k}\right|,$$

$$T_5 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k (2^k+1) \left|\Delta_1 a_{n,n^{(k)}-2^k}\right| \cdot \left|K_{2^k}\right|,$$

$$T_6 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{t-1} n_k \left|a_{n,n^{(k)}-2^k}\right| D_{2^k}, \qquad T_7 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|} n_k \left|a_{n,n^{(k)}-2^k}\right| D_{2^k},$$

$$T_8 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=0}^{2^t-1} (i+2) \left|\Delta_2 a_{n,i}\right| \cdot |K_{i+1}|,$$

$$T_9 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=2^t}^{2^{|n|}-1} (i+2) \left|\Delta_2 a_{n,i}\right| \cdot |K_{i+1}|,$$

$$T_{10} := n^{-\alpha\gamma} (2^{|n|}+1) \left|\Delta_1 a_{n,2^{|n|}}\right| \cdot \left|K_{2^{|n|}}\right|, \quad T_{11} := n^{-\alpha\gamma} \left|a_{n,2^{|n|}}\right| D_{2^{|n|}}.$$

Ezt a felső becslést felhasználva kapjuk a következő két lemmát.

Lemma. *Legyen* $f \in L^1(I)$ *olyan, hogy* $\operatorname{supp} f \subset I_t$ *és* $\int\limits_{I_t} f = 0$ *teljesül. Ekkor*

$$\int\limits_{\bar{I}_t} \sup_{n \geq 2^t} \left| f * K_n^{\alpha,\gamma} \right| d\lambda \leq C_{\alpha,\gamma} \|f\|_1 .$$

Lemma. *Legyen* $f \in L^1(I)$. *Ekkor az* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| f * K_n^{\alpha,\gamma} \right|$ *operátor* (L^∞, L^∞)*- és* (L^1, L^1)*- típusú.*

Innen a tétel bizonyítása a [14] könyvben található érvelésen alapul (azaz, az egy-dimenziós polinomok, azaz a v_n függvények véges lineáris kombinációja, az $L^1(I)$ térben sűrű halmazt alkot). Ezt a tényt és az előző két lemmát felhasználva megkapjuk a tétel állítását.

Kétdimenziós eset. Ezután tekintsük a 2-adikus egészek csoportján definiált kétdimenziós Fourier-sorokkal kapcsolatos fogalmakat. A normált Haar-mérték egybeesik egydimenziós esettel. A kétdimenziós Fourier együtthatókat, a kétdimenziós Fourier-sor téglalap felett vett részletösszeget és a (C, α) Marcinkiewicz magfüggvényt és közepet az alábbi módon definiáljuk:

$$\hat{f}(n^1, n^2) := \int\limits_{I\times I} f(x^1, x^2) \bar{v}_{n^1}(x^1) \bar{v}_{n^2}(x^2)\, d\lambda(x^1, x^2),$$

$$S_{n^1,n^2} f(y^1, y^2) := \sum_{k^1=0}^{n^1-1} \sum_{k^2=0}^{n^2-1} \hat{f}(k^1, k^2) v_{k^1}(y^1) v_{k^2}(y^2),$$

$$K_n^\alpha(y^1, y^2) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} D_j(y^1) D_j(y^2),$$

$$\sigma_n^\alpha f(y^1, y^2) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} S_{j,j} f(y^1, y^2),$$

$$K_n^1(x^1, x^2) := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(x^1) D_j(x^2),$$

ahol $n, n^1, n^2 \in \mathbb{N}$ és $x^1, x^2, y^1, y^2 \in I$.

A $(C, 1)$ Marczinkiewicz közepek majdnem mindenütti konvergenciáját tetszőleges integrálható függvény esetén Blahota és Gát igazolta

2009-ben ([1]). Ezt az eredmény trigonometrikus rendszerben Grünwald ([12]) és Zhizhiashvili ([18]) igazolta. 2006-ban Gát és Goginava igazolta minden integrálható függvény esetén a kvadratikus részletösszegek (C, α) közepének konvergenciáját kétdimenziós Vilenkin-Fourier sorokra ([7]). Az alábbi eredményünk általánosítja Blahota és Gát eredményét minden $\alpha > 0$ esetén, amely eredményt Goginava igazolta a Walsh–Paley-rendszerben ([8], [10], [11]).

Tétel (Gát-Lucskai, [D]). *Legyen* $0 < \alpha < 1$. *Ekkor* $\sigma_n^\alpha f \to f$ *teljesül majdnem mindenütt, minden* $f \in L^1(I^2)$ *esetén ahol, I jelöli a 2-adikus egészek csoportját.*

A következő lemma az egydimenziós (C, α) Cesaro-közép maximáloperátorának becslését adja meg.

Lemma (Gát-Lucskai [D]). *Legyen* $A, k \in \mathbb{N}$ *és* $A \geq k$. *Ekkor*

$$\int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} \left| K_n^\alpha \right| \, d\lambda \leq C_\alpha \left(\frac{2^k}{2^A} \right)^\delta ,$$

ahol $\delta = \min \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{4} \right\}$.

A következő részben legyen $0 < \alpha < 1$ és $|n| := B$. Először definiáljuk a M_n^α magfüggvényt az alábbi módon:

$$M_n^\alpha(x^1, x^2) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^{2^B} A_{n-j}^{\alpha-1} D_j(x^1) D_j(x^2) \qquad (x^1, x^2 \in I).$$

Lemma (Gát-Lucskai [D]). *Legyen* $n \in \mathbb{N}, z^1, z^2 \in I$. *Ekkor*

$$\left| M_n^\alpha(z^1, z^2) \right| \leq T_B^1(z^1, z^2) + \sum_{u=2}^{5} \sum_{i=1}^{2} T_B^u(z^i, z^{3-i}) + T_B^6(z^1, z^2) + T_B^7(z^1, z^2),$$

ahol

$$T_B^1(z^1, z^2) := D_{2^B}(z^1) D_{2^B}(z^2),$$

$$T_B^2(z^i, z^{3-i}) := (1 - \alpha) D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{A_t^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \left| K_t^1(z^i) \right|,$$

$$T_B^3(z^i, z^{3-i}) := D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} \left| K_{2^{l+1}}^1(z^i) \right|,$$

$$T_B^4(z^i, z^{3-i}) := (1-\alpha) D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} \left| K_{2^l}^1(z^i) \right|,$$

$$T_B^5(z^i, z^{3-i}) := D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} \left| K_{2^l}^1(z^i) \right|,$$

$$T_B^6(z^1, z^2) := (1-\alpha) \frac{1}{A_{2^B}^{\alpha}} \sum_{t=0}^{2^B-1} A_t^{\alpha-1} \left| K_t(z^1, z^2) \right|,$$

$$T_B^7(z^1, z^2) := \left| K_{2^B-1}(z^1, z^2) \right|,$$

és $i = 1$ vagy 2.

Ezt a becslést felhasználva igazolhatóak az alábbi lemmák.

Lemma (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $f \in L^1(I^2)$ olyan, hogy* $\operatorname{supp} f \subset I_k \times I_k$ *és* $\int f = 0$. *Ekkor*

$$\int_{I_k \times I_k} \sup_{n \geq 2^k} \left| f * T_B^u \right| \, d\lambda \leq C_\alpha \cdot \|f\|_1 ,$$

ahol $u = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Lemma (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $f \in L^1(I^2)$. Ekkor $u = 1, 2, \ldots, 7$ esetén a $\sup_{B \in \mathbb{N}} \left| f * T_B^u \right|$ operátorok (L^∞, L^∞)-típusúak.*

Lemma (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $f \in L^1(I^2)$. Ekkor $u = 1, 2, \ldots, 7$ esetén a $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| f * T_B^u \right|$ operátor gyengén (L^1, L^1)-típusú.*

Következmény 0.1 (Gát-Lucskai [D]). *A $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| f * M_n^\alpha \right|$ operátor gyengén (L^1, L^1)-típusú.*

A bizonyítás utolsó lépése a $K_n^\alpha(x^1, x^2)$ operátor vizsgálata.

Lemma (Gát-Lucskai [D]). *Legyen $n \in \mathbb{N}$, ekkor*

$$\left| K_n^\alpha(x^1, x^2) \right| \leq G_1(x^1, x^2) + \sum_{z=\tau}^{s} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{z-1})} \sum_{j=2}^{5} G_(x^1, x^2) + G_6(x^1, x^2),$$

ahol

$$G_1(x^1, x^2) = \left| M_{n^{(s)}}^\alpha(x^1, x^2) \right|,$$

$$G_2(x^1, x^2) = D_{2^{h_z}}(x^1) D_{2^{h_z}}(x^2),$$

$$
\begin{aligned}
G_3(x^1, x^2) &= D_{2^{h_z}}(x^2)\left|K^{1,\alpha}_{n^{(z-1)}}(x^1)\right|, \\
G_4(x^1, x^2) &= D_{2^{h_z}}(x^1)\left|K^{1,\alpha}_{n^{(z-1)}}(x^2)\right|, \\
G_5(x^1, x^2) &= \left|M^{\alpha}_{n^{(z-1)}}(x^1, x^2)\right|, \\
G_6(x^1, x^2) &= \prod_{j=\tau}^{s}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_s-h_{z-1})}\left|K^{\alpha}_{n^{(\tau-1)}}(x^1, x^2)\right|.
\end{aligned}
$$

Az utolsó lemma, amelyet megemlítünk a bizonyítás legfontosabb állomása.

Lemma (Gát-Lucskai [D]). *Az* $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|f * K^{\alpha}_n\right|$ *operátor gyengén* (L^1, L^1)*-típusú, ahol* $f \in L^1(I^2)$*, .*

A $v_n v_m$ függvények lineáris kombinációja sűrű halmazt alkot az $L^1(I^2)$ térben. Ezt a tény és a Lemma igazolja a tétel. Az eljárás részletesen a [14] könyvben megtalálható.

Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

Investigation of some summability methods of Fourier series on locally constans orthonormal systems

by Lucskai Gábor

Supervisor: Prof. Dr. Gát György Tamás

UNIVERSITY OF DEBRECEN
Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

Debrecen, 2021.

Introduction

My dissertation contains two sections, an Appendix and a bibliography. During my dissertitaton I use the standard notation of dyadic analysis. Let $n \in \mathbb{N}$ and $I := [0, 1)$. Then

$$n = \sum_{n=0}^{\infty} n_j 2^j \qquad \text{and} \qquad x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n 2^{-(n+1)}$$

the dyadic expansion of $x \in I$ and $n \in \mathbb{N}$, where $n_k, x_k \in \{0, 1\}$.

Now, we define three character systems on $(I, +)$, which are used during the dissertation. First step, the nth term of Walsh–Paley $\omega = (\omega_n, n \in \mathbb{N})$ and Walsh–Kaczmarz system $\kappa = (\kappa_n, n \in \mathbb{N})$ are defined in the following way

$$\omega_n(x) := \prod_{j=0}^{\infty} (-1)^{x_j n_j} \qquad \text{and} \qquad \kappa_n(x) := r_{|n|}(x)(-1)^{\sum_{k=0}^{|n|-1} n_k x_{|n|-1-k}}.$$

These systems are a character system on $(I, +)$, where the group operation $+$ is the so-called dyadic or logical addition.

The third character system on $(I, +)$ is the group of 2-adic integers $v = (v_n, n \in \mathbb{N})$. Here the group operation $+$ is the 2-adic (or arithmetic) sum. The nth term of this system is

$$v_n := \prod_{n=0}^{\infty} v_{2^j}^{n_j}, \qquad \text{where} \qquad v_{2^n}(x) := \varepsilon\left(\frac{x_n}{2} + \ldots + \frac{x_0}{2^{n+1}}\right).$$

Both cases n_j and x_j $(j \in \mathbb{N})$ are the binary coefficients of $n \in \mathbb{N}$ and $x \in I$, respectively.

Let $\varphi \in \{\omega, \kappa, v\}$. The Dirichlet kernels and the nth Fourier coefficients, the partial sum of the Fourier series, the $(C, 1)$ or the Fejér means of $f \in L^1(I)$ are

$$D_n^{\varphi} := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k, \qquad \hat{f}^{\varphi}(n) := \int_I f(x)\bar{\varphi}_n(x)\, d\lambda(x),$$

$$S_n^{\varphi} f(y) := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\varphi_k(y), \qquad \sigma_n^{\varphi} f(y) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f(y)$$

respectively.

First part.

The maximal operator of Fejér kernels for Walsh–Paley system and the Riesz-logaritmic kernels for Walsh–Paley and Walsh–Kaczmarz system are investigated in the first part of my dessertation.

Now define Fejér kernel and Riesz-logaritmic kernel in the following way:

$$K_n^{\varphi} := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k^{\varphi}, \qquad R_n^{\varphi} := \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k^{\varphi}}{k},$$

respectively, where $K_0 := 0$ and $\varphi \in \{\omega, \kappa\}$.

The maximal operator of Fejér kernels. In 1955, N.J. Fine proved that the almost everywhere convergence $\sigma_n^1 f \to f$ holds for $f \in L^1$ ([2]). By the help of the maximal operator of Fejér kernels, Gát proved this theorem for Walsh–Paley system in 1997 ([4]). He proved the following ineqaulity in connection with the maximaloperator of Walsh–Fejér means.

Theorem ([4]). Let $a \leq A \in \mathbb{N}$. Then

$$\int_{I\setminus I_a} \sup_{|n|\geq A} |K_n(x)|\, dx \leq C\sqrt{2^{a-A}}.$$

The following result was proved by Goginava in 2004.

Theorem ([9]). Let $a < A \in \mathbb{N}$. Then

$$\int_{I\setminus I_a} \sup_{|n|\geq A} |K_n(x)|\, dx \leq C\frac{A-a}{2^{A-a}}.$$

First our result, Goginava's upper estimation cannot improve and it sshows that an another difference between the Walsh–Paley and the trigonometric system.

Theorem (Gát–Lucskai, [A]).

$$\int_{\delta}^{1} \sup_{n\geq N} |K_n(x)|\, dx \geq c\frac{\log(N\delta)}{N\delta} \qquad \left(N > \frac{1}{\delta}\right).$$

Riesz-logarithmic means. After that we investigated Riesz-logarithmic kernels in both systems. These kernels have only positive values in the trigonometric system. The proof of this result uses the positivity of Fejér kernels. However, the Fejér kernels can take negative values the Walsh–Paley and the Walsh–Kaczmarz systems, therefore we don't use the proof of the trigonometric case. But we proved that the Riesz logaritmic kernels can take only positive values also in the Walsh–Paley system. The proof of the following theorem is more complicated than in the case of the trigonometric system.

Theorem (Gát–Lucskai, [A]). Let $t, n \in \mathbb{N}$ and $x \in I_t \setminus I_{t+1}$. Then

$$R_n(x) \geq \frac{2^t}{16 \log n}, \text{ if } n > 2^t \qquad \text{and} \qquad R_n(x) = \frac{n-1}{\log n}, \text{ if } n \leq 2^t.$$

During the proof, we used the computer algebra program MATLAB to prove the case of $n \in \{1, \dots 127\}$ and $t \leq 6$. The neccessarary codes can be found on Appendix of the dissertation.

This theorem have two corollaries.

Corollary (Gát–Lucskai [A]). The Walsh–Riesz-logarithmic kernels are positive for each $n \in \mathbb{N}$ and for all $x \in [0, 1[$.

The next corollary shows a sharp contrast between the Walsh–Fejér and Walsh–logarithmic kernels.

Corollary (Gát–Lucskai [A]).

$$\int_{2^{-a}}^{1} \sup_{n \geq 2^t} |R_n(x)| \, dx = \infty.$$

The next our result shows that the Walsh–Kaczmarz system is different from the Walsh–Paley system in this point of view. More precisely, we give a sequence of the Riesz-logarithmic kernels such that all of them take negative values on some intervals.

Theorem (Gát–Lucskai, [B]). Let $A = 2^n + 2^{n-1}$, $11 \leq n \in \mathbb{N}$ and $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}$. Then

$$\log(A) R_A^{\kappa}(x) \leq -0.02 \cdot 2^n.$$

A corollary of Young-inequality plays an important role during the proof.

Lemma (Young-inequality, [17]). Let $n \in \mathbb{P}$. Then

$$\frac{1}{2(n+1)} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) - \gamma < \frac{1}{2n},$$

where $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n) \right)$.

Corollary. Let $n, N \in \mathbb{N}$ and $N > n$. Then

$$0 < \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{k} - \log\left(\frac{N}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Second part

In this part, we investigated the one-dimensional Riesz means and the two-dimensional (C, α)-means on the group of 2-adic integers.

One-dimensional case Firstly, we consider the one-dimensional Riesz means.

The Fejér kernels and the kernel $K_n^{\alpha,\gamma}$ of the Riesz summability method are

$$K_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k, \quad K_n^{\alpha,\gamma} := \frac{1}{n^{\alpha\gamma}} \sum_{k=0}^{n-1} (n^\gamma - k^\gamma)^\alpha v_k,$$

where $K_0 := 0$, $n \in \mathbb{N}$ and $0 < \min\{\alpha, \gamma\} \leq 1 \leq \max\{\alpha, \gamma\} < \infty$. The Riesz-means of the integrable functions f are

$$\sigma_n^{\alpha,\gamma} f(y) := \frac{1}{n^{\alpha\gamma}} \sum_{j=0}^{n-1} (n^\gamma - k^\gamma)^\alpha \hat{f}(j).$$

The Riesz means are called Fejér means if $\alpha = \gamma = 1$.

For the character system of the group of 2-adic integers, Fejér means related to Taibleson ([15]). This question was open for a long time. In 1997, Gát gave an affirmative answer the Taibleson's question ([5]).

For the trigonometric system, the almost everywhere convergence of Riesz-means was proved by Riesz ([13, 19]). The case $0 < \gamma \leq 1 \leq \alpha$ was proved in the case of the Walsh–Paley system by Weisz [16]. We proved the same result in the 2-adic case.

Theorem (Gát–Lucskai, [C]). Let $0 < \gamma \le 1 \le \alpha$. Then we have $\sigma_n^{\alpha,\gamma} f \to f$ almost everywhere for every $f \in L^1(I)$, where I is the group of 2-adic integers.

Consider the main steps of the proof.

In the first step, we give an upper estimation of Riesz kernel.

Lemma (Gát–Lucskai, [C]). *An upper bound for the Riesz kernel can be written in the following form.*

$$\left|K_n^{\alpha,\gamma}\right| \le \sum_{j=1}^{11} T_j,$$

where

$$T_1 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{t-1} n_k \sum_{l=0}^{2^k-1} (l+2) \left|\Delta_2 a_{n,n^{(k)}-l-1}\right| |K_l|,$$

$$T_2 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{l=0}^{2^t-1} (l+2) \left|\Delta_2 a_{n,n^{(k)}-l-1}\right| |K_l|,$$

$$T_3 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k \sum_{l=2^t}^{2^k-1} (l+2) \left|\Delta_2 a_{n,n^{(k)}-l-1}\right| |K_l|,$$

$$T_4 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{t-1} n_k (2^k+1) \left|\Delta_1 a_{n,n^{(k)}} - 2^k\right| \cdot \left|K_{2^k}\right|,$$

$$T_5 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|-1} n_k (2^k+1) \left|\Delta_1 a_{n,n^{(k)}-2^k}\right| \cdot \left|K_{2^k}\right|,$$

$$T_6 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=0}^{t-1} n_k \left|a_{n,n^{(k)}-2^k}\right| D_{2^k}, \qquad T_7 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{k=t}^{|n|} n_k \left|a_{n,n^{(k)}-2^k}\right| D_{2^k},$$

$$T_8 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=0}^{2^t-1} (i+2) \left|\Delta_2 a_{n,i}\right| \cdot |K_{i+1}|,$$

$$T_9 := n^{-\alpha\gamma} \sum_{i=2^t}^{2^{|n|}-1} (i+2) \left|\Delta_2 a_{n,i}\right| \cdot |K_{i+1}|,$$

$$T_{10} := n^{-\alpha\gamma} (2^{|n|}+1) \left|\Delta_1 a_{n,2^{|n|}}\right| \cdot \left|K_{2^{|n|}}\right|, \quad T_{11} := n^{-\alpha\gamma} \left|a_{n,2^{|n|}}\right| D_{2^{|n|}}.$$

By the help of this upper estimation, we proved the following lemmas

Lemma (Gát–Lucskai, [C]). *Let be* $f \in L^1(I)$. *Then operator* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|f * K_n^{\alpha,\gamma}\right|$ *is of type* (L^∞, L^∞) *and of type* (L^1, L^1).

Lemma (Gát–Lucskai, [C]). *Let* $f \in L^1(I)$ *be with* $\operatorname{supp} f \subset I_k$ *and* $\int f = 0$. *Then*

$$\int_{\bar{I}_t} \sup_{n\geq 2^t} \left|f * K_n^{\alpha,\gamma}\right| \, d\lambda \leq C_{\alpha,\gamma} \cdot \|f\|_1 .$$

The proof of the theorem is the standard density argument (that is, the set of one-dimensional polynomials, i.e. finite linear combinations of the functions v_n is dense in $L^1(I)$) (see [14]). This fact and the previous two Lemmas complete the proof.

Two-dimensional case Next we introduce some notation for two-dimensional Fourier series on the group of 2-adic integers. The normalized Haar measure is just as in the one-dimensional case. The two-dimensional Fourier coefficients, the retangular partial sums of the Fourier series, the (C, α) Marcinkiewicz kernels and means, and Fejér kernels are defined as follows

$$\hat{f}(n^1, n^2) := \int_{I\times I} f(x^1, x^2)\bar{v}_{n^1}(x^1)\bar{v}_{n^2}(x^2) \, d\lambda(x^1, x^2),$$

$$S_{n^1,n^2} f(y^1, y^2) := \sum_{k^1=0}^{n^1-1} \sum_{k^2=0}^{n^2-1} \hat{f}(k^1, k^2)v_{k^1}(y^1)v_{k^2}(y^2),$$

$$K_n^\alpha(y^1, y^2) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} D_j(y^1)D_j(y^2),$$

$$\sigma_n^\alpha f(y^1, y^2) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} S_{j,j} f(y^1, y^2),$$

$$K_n^1(x^1, x^2) := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} D_j(x^1)D_j(x^2),$$

where $n, n^1, n^2 \in \mathbb{N}$ and $x^1, x^2, y^1, y^2 \in I$.

The convergence of $(C, 1)$ Marczinkiewicz means was proved in 2009 by Blahota and Gát ([1]). For the trigonometric system this result was proved by Grünwald ([12]) and Zhizhiashvili ([18]). In 2006 Gát and Goginava ([7]) proved the convergence of the (C, α)-means of quadratical partial sums of double Vilenkin-Fourier series for every integrable function. The following result will generalize the result of Blahota and Gát for every $\alpha > 0$, which for the Walsh–Paley system is due to Goginava ([8], [10], [11]).

Tétel (Gát–Lucskai, [D]). *Let* $0 < \alpha < 1$. *Then we have* $\sigma_n^\alpha f \to f$ *almost everywhere for every* $f \in L^1(I^2)$, *where* I *is the group of* 2*-adic integers.*

In the first part we investigated the maximal function of one-dimensional (C, α) Cesàro-kernels, where $0 < \alpha < 1$. The next lemma was proved.

Lemma (Gát–Lucskai, [D]). *Let be* $A, k \in \mathbb{N}$, $A \geq k$, *then*

$$\int_{\bar{I}_k} \sup_{n \geq 2^A} \left| K_n^\alpha \right| \, d\lambda \leq C_\alpha \left(\frac{2^k}{2^A} \right)^\delta ,$$

where $\delta = \min \left\{ \dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{1}{4} \right\}$.

In the next part, we define the kernel function M_n^α in the following way:

$$M_n^\alpha(x^1, x^2) := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{j=0}^{2^B} A_{n-j}^{\alpha-1} D_j(x^1) D_j(x^2) \qquad (x^1, x^2 \in I).$$

Lemma. *Let be* $n \in \mathbb{N}, z^1, z^2 \in I$. *Then we get*

$$\left| M_n^\alpha(z^1, z^2) \right| \leq T_B^1(z^1, z^2) + \sum_{u=2}^{5} \sum_{i=1}^{2} T_B^u(z^i, z^{3-i}) + T_B^6(z^1, z^2) + T_B^7(z^1, z^2),$$

where

$$T_B^1(z^1, z^2) := D_{2^B}(z^1) D_{2^B}(z^2),$$

$$T_B^2(z^i, z^{3-i}) := (1 - \alpha) D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{t=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{A_t^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \left| K_t^1(z^i) \right|,$$

$$T_B^3(z^i, z^{3-i}) := D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} \left| K_{2^{l+1}}^1(z^i) \right|,$$

$$T_B^4(z^i, z^{3-i}) := (1 - \alpha) D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} \left| K_{2^l}^1(z^i) \right|,$$

$$T_B^5(z^i, z^{3-i}) := D_{2^B}(z^{3-i}) \sum_{l=0}^{B-1} 2^{(l+1-B)\alpha} \left| K_{2^l}^1(z^i) \right|,$$

$$T_B^6(z^1, z^2) := (1-\alpha) \frac{1}{A_{2^B}^{\alpha}} \sum_{t=0}^{2^B-1} A_t^{\alpha-1} \left| K_t(z^1, z^2) \right|,$$

$$T_B^7(z^1, z^2) := \left| K_{2^B-1}(z^1, z^2) \right|,$$

and $i = 1$ *or* 2*.*

We used this upper estimation to prove the following lemmas.

Lemma. *Let be* $f \in L^1(I^2)$ *with* $\operatorname{supp} f \subset I_k \times I_k$ *and* $\int f = 0$*. Then*

$$\int_{\overline{I_k \times I_k}} \sup_{n \geq 2^k} \left| f * T_B^u \right| \, d\lambda \leq C_\alpha \cdot \|f\|_1 ,$$

where $u = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$*.*

Lemma. *Let* $f \in L^1(I^2)$*, then the operator* $\sup_{B \in \mathbb{N}} \left| f * T_B^u \right|$ *is of type* (L^∞, L^∞)*, where* $u = 1, 2, \ldots, 7$*.*

Lemma. *Let be* $f \in L^1(I^2)$*, then the operators* $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| f * T_B^u \right|$ *is of weak type* (L^1, L^1)*.*

Corollary. The $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| f * M_n^\alpha \right|$ operator is of weak type (L^1, L^1).

The last step we investigated the kernel $K_n^\alpha(x^1, x^2)$. We also gave an upper estimation for this kernel. It shows the following lemma.

Lemma. *Let* $n \in \mathbb{N}$*, then*

$$\left| K_n^\alpha(x^1, x^2) \right| \leq G_1(x^1, x^2) + \sum_{z=\tau}^{s} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{\alpha(h_s - h_{z-1})} \sum_{j=2}^{5} G_j(x^1, x^2) + G_6(x^1, x^2),$$

where

$$G_1(x^1, x^2) = \left| M_{n^{(s)}}^\alpha(x^1, x^2) \right|;$$

$$G_2(x^1, x^2) = D_{2^{h_z}}(x^1) D_{2^{h_z}}(x^2);$$

$$G_3(x^1, x^2) = D_{2^{h_z}}(x^2) \left| K_{n^{(z-1)}}^{1,\alpha}(x^1) \right|;$$

$$G_4(x^1, x^2) = D_{2^{h_z}}(x^1) \left| K_{n^{(z-1)}}^{1,\alpha}(x^2) \right|;$$

$$G_5(x^1, x^2) = \left| M_{n^{(z-1)}}^\alpha(x^1, x^2) \right|;$$

$$G_6(x^1, x^2) = \prod_{j=\tau}^{s} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha(h_s - h_{z-1})} \left|K^{\alpha}_{n^{(\tau-1)}}(x^1, x^2)\right|.$$

The next lemma is the most important step in the proof of Theorem
.

LEMMA. *The operator* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|f * K_n^{\alpha}\right|$ $(f \in L^1(I^2))$ *is of weak type* (L^1, L^1).

The proof of Theorem is the standard density argument (that is, the set of two-dimensional polynomials, i.e. finite linear combinations of the functions $v_n v_m$ is dense in $L^1(I^2)$). This fact and previous lemma complete the proof.

The author's publications in the topic:

[A] G. Gát, G. Lucskai. Estimation on the Walsh-Fejer and Walsh logarithmic kernels. Publ. Math. Debr. 95 (3-4), 415-435, 2019.

[B] G. Gát, G. Lucskai. On the negativity of the Walsh-Kaczmarz-Riesz logarithmic kernels. *Acta Math. Acad. Paedag. Nyíregyh.* 1-7, 2020. (Megjelenés alatt áll.)

[C] G. Gát, G. Lucskai. Almost everywhere convergence of Riesz means of one-dimensional Fourier series on the group of 2-adic integers. *Novi Sad Journal of Mathematics*. 1-12, 2021. (Közlésre elfogadva)

[D] G. Gát, G. Lucskai. Almost everywhere convergence of Cesàro-Marczinkiewicz means of two-dimensional Fourier series on the group of 2-adic integers. 1-23. (Benyújtva 2018-ban)

Further references to the thesis compilation:

[1] I. Blahota and G. Gát. Almost everywhere convergence of Marcinkiewicz means of Fourier series on the group of 2-adic integers. *Studia Mathematica*, 191:215–222, 2009.

[2] N. J. Fine. Cesaro summability of Walsh-Fourier series. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 41:588–591, 1955.

[3] N. J. Fine. Cesaro summability of Walsh-Fourier series. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 41(8):588, 1955.

[4] G. Gát. On the Fejér kernel functions with respect to the Walsh–Paley system. *Acta Acad. Paed. Agriensis Sectio Matematicae*, 24:105–110, 1997.

[5] G. Gát. On (C, 1) summability of integrable functions with respect to the Walsh-Kaczmarz system. *Studia Math*, 130(2):135–148, 1998.

[6] G. Gát. Almost everywhere convergence of Cesaro means of Fourier series on the group of 2-adic integers. *Acta Mathematica Hungarica*, 116(3):209–221, 2007.

[7] G. Gát and U. Goginava. Almost Everywhere Convergence of (C, α)-Means of Quadratical Partial Sums of Double Vilenkin–Fourier Series. *Georgian Mathematical Journal*, 13(3):447–462, 2006.

[8] U. Goginava. Marcinkiewicz–Fejér means of d-dimensional Walsh–Fourier series. *Journal of mathematical analysis and applications*, 307(1):206–218, 2005.

[9] U. Goginava. Almost everywhere convergence of (C, α)-means of cubical partial sums of d-dimensional Walsh–Fourier series. *Journal of Approximation Theory*, 141(1):8–28, 2006.

[10] U. Goginava. Weak type inequality for the maximal operator of the (C, α) means of two-dimensional Walsh-Fourier series. *Analysis Mathematica*, 36(1):1–31, 2010.

[11] U. Goginava. The martingale Hardy type inequality for Marcinkiewicz-Fejér means of two-dimensional conjugate Walsh-Fourier series. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 27(10):1949–1958, 2011.

[12] G. Grünwald. Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen Doppelreihe, 1939.

[13] M. Riesz. Sur la sommation des séries de Fourier. *Acta Sci. Math.(Szeged)*, 1:104–113, 1923.

[14] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, and J. Pál. *Walsh series: an introduction to dyadic harmonic analysis*. Adam Hilger Bristol and New York, 1990.

[15] M. H. Taibleson. *Fourier Analysis on Local Fields.(MN-15)*. Princeton University Press, 1975.

[16] F. Weisz. *Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy spaces*, volume 541. Springer Science & Business Media, 2013.

[17] R. M. Young. Euler's Constant. *The Mathematical Gazette*, 75 (472):187–190, 1991.

[18] L. Zhizhiashvili. Generalization of a theorem of Marcinkiewicz. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32.

[19] A. Zygmund. Trigonometric Series, Univ. *Press, Cambridge*, 1959.

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/376/2021.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Lucskai Gábor
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

1. Gát, G., **Lucskai, G.**: Estimation on the Walsh-Fejer and Walsh logarithmic kernels.
   Publ. Math. Debr. 95 (3-4), 415-435, 2019. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2019.8535
   IF: 0.672

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (1)

2. Gát, G., **Lucskai, G.**: Almost everywhere convergence of Riesz means of one-dimensional Fourier series on the group of 2-adic integers.
   Novi Sad J. Math. [Epub], 1-14, 2021. ISSN: 1450-5444.
   DOI: http://dx.doi.org/10.30755/NSJOM.12069

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 0,672
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 0,672

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2021.07.05.

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/376/2021.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Gábor Lucskai

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

1. Gát, G., **Lucskai, G.**: Estimation on the Walsh-Fejer and Walsh logarithmic kernels.
   Publ. Math. Debr. 95 (3-4), 415-435, 2019. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2019.8535
   IF: 0.672

Foreign language scientific articles in international journals (1)

2. Gát, G., **Lucskai, G.**: Almost everywhere convergence of Riesz means of one-dimensional Fourier series on the group of 2-adic integers.
   Novi Sad J. Math. [Epub], 1-14, 2021. ISSN: 1450-5444.
   DOI: http://dx.doi.org/10.30755/NSJOM.12069

Total IF of journals (all publications): 0,672
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 0,672

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

05 July, 2021