

Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

**PROBLEME UND ENTWICKLUNGSMÖGLICHKEITEN
IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER
MITTELSCHULE BEIM THEMA „EXPONENTIELLE
UND LOGARITHMISCHE FUNKTIONEN”**

**PROBLEMS AND DEVELOPMENT POSSIBILITIES BY
TEACHING MATHEMATICS IN THE SECONDARY
GRAMMER SCHOOL IN THE THEME
"EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTIONS"**

Várady Ferenc

Témavezető: Dr. Ambrus András



DEBRECENI EGYETEM

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2017.

Tartalomjegyzék

TÉZISEK MAGYRUL

1. A témaválasztás indoklása	1
2. Elméleti háttér	3
3. Kutatási célok, kutatási háttér, kutatási módszerek ...	5
4. A kutatás hipotézisei	8
5. A kutatás folyamata	9
6. A fejlesztő kísérlet eredményei	10
7. Eredmények a hipotézisek tükrében	19
8. Összegzés, kitekintés	21

THESES IN ENGLISH..... 23

1. Justification of the choice of topic	23
2. Theoretical background	24
3. Research objectives, research background, research methods	26
4. Research hypotheses	29
5. The research process	30
6. The results of the research	31
7. Results in the reflection of the hypotheses	39
8. Summary, review	42
9. Publikációk, Publications.....	44

TÉZISEK MAGYARUL

1. A témaválasztás indoklása

A magyar matematikaoktatás jellemzője volt sokáig az absztrakt, formális tárgyalási mód, a modellezési, gyakorlati feladatok elhanyagolása. A több, mint egy évtizedes, magyar és német nyelven történt tanítás során a tizenegyedikes csoportokban sokszor tapasztaltam, hogy az exponenciális és a logaritmus függvényekkel és folyamatokkal kapcsolatos tananyagnál a tanulók egy része különböző nehézségekkel szembesül. A hatványozás és gyökvonás általánosítása, a racionális és irracionális kitevőkkel történő hatványozás átisméltése és megtanulása után gyakran nem értik az exponenciális folyamatokat, nem tudnak exponenciális függvényekkel, egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel biztonságosan dolgozni, a szöveges feladatokat (problémákat) nem, vagy csak részben tudják helyesen értelmezni, megoldani. Még nagyobb probléma tapasztalható a logaritmus függvénnyel kapcsolatban. A függvény szokatlan írásmódja, a részben meglepő azonosságok (pl.: $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$; $a, b, c > 0$; $a \neq 1$), a számológéppel nem mindig közvetlenül kiszámítható eredmények (l. $\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3}$) és az exponenciális és logaritmus függvény közötti kapcsolat jó néhány diák számára nehezen érthető. Különösen igazak a fenti megállapítások a gyengébb osztályok és csoportok esetében.

A két tanítási nyelvű diákok számára további nehézséget okoz, hogy megismerjék a célnyelvi terminológiát (ezzel párhuzamosan az anyanyelvi szakkifejezések ismerete is

célszerű, hiszen számos gyakorlókönyvet csak az anyanyelvükön álnak rendelkezésükre), megfelelően értelmezzék a feladat utasításait. Utóbbi az algebrai feladatoknál - algebrai kifejezések, egyenletek, egyenlőtlenségek, függvénytani alapfogalmak- a korábbi évekről már részben ismerősek. A szöveges feladatoknál, ahol a szöveg nyelvtani és tartalmi megismerésén és helyes értelmezésén túl a diáknak meg kell értenie a szöveg matematikai tartalmát és a megfelelő problémamegoldó stratégia szerint meg kell oldania, az eredményt értelmeznie és ellenőriznie is kell. A helyes problémamegoldó stratégia véghezvitele nem egy esetben kisebb-nagyobb nehézségekbe ütközik a diákok nagy részénél.

A fejlesztő kísérlet során, a téma adta lehetőségeket kihasználva, lehetőség nyílt a modern technika használatára is. A függvények ábrázolásánál, transzformálásánál, elemzésénél kihasználtuk a GeoGebra nyújtotta előnyöket, így az ikonikus megjelenítés hatására a diákok számára a szimbolikus reprezentáció is elérhetőbbé vált. A függvényeken túl, egyes egyszerű egyenleteknél valamint egyenlőtlenségeknél is eredményesen fel lehetett használni a számítógép nyújtotta vizuális megjelenítés előnyeit. Az exponenciális problémákban, a logaritmus ismerete nélkül lehetett közelítő értékeket meghatározni. A diákok az órán és sokan közülük otthon is szívesen és eredményesen használták a számítógépet.

2. Elméleti háttér

A fejlesztő kísérlet során kiemelten fontos volt a különböző reprezentációkhasználat (Lesh – Post – Behr, 1987). A realiztikus matematikai módszernek (Freudenthal, 1973) az egyik jellemzője, hogy a matematikai tartalmakat az enaktív reprezentációkkal vezeti be, használva közben az ikonikus reprezentációkat is és ezeken keresztül jut el a szimbolikus jelölésekhez. Streefland az egyik tanulmányában rámutat arra (Streefland, 1985), hogy mennyire fontos, hogy diákok a megértés folyamatában a formális és informális síkok között váltani tudjanak és a tanárok a „model of” helyett a „model for” oktatási módszert használják. Később ez az elképzelés, a modellek közötti váltás elengedhetetlen eleme lett a freudenthali oktatási módszernek (Streefland, 1991; Treffers, 1991; Gravemeijer, 1994; Van den Heuvel-Panhuizen, 1995). A problémák ilyen típusú megközelítése segít a diákoknak abban, hogy a megfelelő fogalomképzet (concept image; Tall – Vinner, 1981) alakuljon ki. A problémamegoldás során figyelembe vettük azokat a lépéseket, melyeket Pólya (1979) és Schoenfeld (1985) dolgoztak ki. Az órai munkában és az otthoni felkészülés során is folyamatosan használtuk a számítógépet, elsősorban a GeoGebra szoftvert, mely a vizuális reprezentáció segítségével járult hozzá ahhoz, hogy a diákok a formális matematikát is jobban megérthessék. A számítógép használata a matematikaoktatásban több előnnyel jár, mint egyéb más tantárgyaknál, mert „a rutintevékenységek megkönnyítése által éppúgy segíti a felfedező és kreatív munkát, mint a realiztikus problémák tárgyalását és a tartalmak összekapcsolását” (Leuders, 2010). Tulodziecky is úgy

véli, hogy a technikai eszközöket ösztönzőkként kell használni problémamegoldási, döntéselemzési feladatoknál (Tulodziecky, 2007). Ehhez öt pontban foglalja össze azokat a területeket, melyekben a számítógép megfelelő használata különösen hasznos lehet. Abfalterer (2007) négy lépcsőfokot határoz meg a sikeres számítógépes óra megtartásához: 1. A szoftver előkészítése; 2. Tervezett végrehajtás; 3. A tanár szerepe tisztázott legyen; 4. Feedback. Az órai számítógéphasználatot összefoglaló néven manapság „Blended learning”-ként említi a szakirodalom (Friesen, 2012). Starker és Horn (2012) négy kategóriába sorolta a „Blended learning” módszereit, melyek közül az első és a negyedik inkább a felsőoktatásra, a másik kettő pedig a közoktatásra jellemző: 1. Rotation model; 2. Flex model; 3. A La Carte model; 4. Enriched Virtual model. A fejlesztő kísérlet során fontos szerepet kapott a munkanyelv. A diákok anyanyelve magyar volt, a célnyelv pedig német. A két tanítási nyelvű (bilingvális) csoport megnevezés már korábban problematikusnak bizonyult, ahogyan azt Bach a tanulmányában megjegyzi (Bach, 2000). Az újabb szakirodalmak a terminológiát pontosítva az ilyen típusú oktatásra a CLIL (Content and Language Integrated Learning) mozaikszót használják, melynek jelentését az Európai Bizottság fogalmazta meg. (European Commission, 2006). Szűcs a kétnyelvű (bilingual) matematikaoktatásra a következő definíciót adta meg: „... kétnyelvű (bilingvális) matematikaoktatáson minden olyanfajta oktatást kell érteni, amely során egy második nyelvet (legyen az idegennyelv, regionális nyelv, kisebbségi nyelv és/vagy az adott ország egy további hivatalos nyelve) használunk a

matematikaóra munkanyelvének. ” (Szűcs, 2009) Ezen definíciók alapján használtuk fel a német nyelvet a kísérleti csoport matematika oktatásában.

3. Kutatási célok, kutatási háttér, kutatási módszerek

A fejlesztő kísérlet célja egy olyan módszer kidolgozása volt, amely segítségével a diákok az exponenciális és a logaritmus függvényt valamint alkalmazásait jobban megérthetik és jobban látják az összefüggéseket, biztonsággal oldanak meg a témakörön belüli feladatokat, problémákat. A tananyag összeállítása során gondosan tanulmányoztam a Nemzeti Alaptantervet, a forgalomban lévő tankönyveket valamint számos, a témával közvetve és közvetlenül foglalkozó szakcikket, szakirodalmat. Megvizsgáltam az utóbbi évek, évtizedek matematikai iskoláit valamint a matematikával kapcsolatban megfogalmazott elvárásokat. A kísérlet a 2010/11-es tanév november elejétől január közepéig zajlott, a pilisvörösvári Friedrich Schiller Gimnáziumban. A kísérleti csoport két osztályból tevődött össze: a 11.c és a 12.s diákjainak egy részéből. A csoportba azok a tanulók kerültek, akik terveik szerint nem kívántak a későbbiekben matematikával foglalkozni, céljuk középtávon a középszintű matematika érettségi sikeres abszolválása volt (az osztályok másik fele külön öt órás emelt szintű matematika csoportba került, ahol az emelt szintű matematika érettségire készültek). Ennek megfelelően a csoport nagyobb része nem volt különösen erős matematikából. A 21 diák matematika átlaga a következőképpen alakult az előző év végén:

10.c	11.s ¹	Össz.:
2,92	2,38	2,71

Mindkét osztály a 9. osztálytól tanulta a matematikát németül, de különböző tanároktól. A 11. osztálytól tanítottam őket, mint új diákok. Hetente négy matematikaóránk volt, a fejlesztő kísérletre összesen, a tesztekkel együtt 33. Ez ugyan több, mint egy átlagos osztályban, azonban részben a célnyelvi tanítás, részben a realiztikus matematikai módszer miatt az időtöbbletre szükség is volt. A tizenegyik év végén a következő átlaguk lett:

11.c	12.s	Össz.:
2,77	2,25	2,57

A tananyag összeállításánál, az új tartalmak bevezetésénél, az összefüggések megvilágításánál fontos volt, hogy a tartalmak megfeleljenek a Nemzeti Alaptantervben foglaltaknak, ugyanakkor amennyire csak lehet, valóságához közeleiek legyenek. Ehhez a holland realiztikus matematikatanítás elemeit használtam felt. Ezen felül segítségül hívtam a számítógépet, hogy a függvényeket, egyenleteket, egyenlőtlenségeket, szöveges feladatokat ábrázolni tudjuk. Különösen nagy figyelmet fordítottam arra, hogy pl. a lineáris és az exponenciális változás közötti kapcsolatra és a különbségére rávilágítsunk valamint, hogy a logaritmus fogalma

¹ Mindkét osztály ugyanazon az évfolyamon volt, az „s” osztály azonban nyelvi előkészítő osztály volt, azaz a 9. évfolyam egy nyelvi előkészítő év volt, a tényleges gimnáziumi tanulmányokat egy évvel később kezdték. Magyarországon a legjobb jegy az 5-ös, a legrosszabb az 1-es.

ugyanazzal a példával kerüljön bevezetésre. Az órákon a gimnáziumban forgalomban lévő tankönyvből tanultunk (Kosztolányi: Sokszívű matematika), az egyenletekhez, egyenlőtlenségekhez, egyenletrendszerekhez részben a meglévő példatárakat (Zusammenfassende Aufgabensammlung Mathematik I-IV., és „Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I’’) használtuk. Ezen felül feladatokat kölcsönöztem a www.mathepower.de oldalról is. A realiztikus bevezetéshez, az összefüggések megvilágításához, a szöveges feladatokhoz, függvényekhez általam összeállított feladatokkal is dolgoztunk.

A kutatási tevékenység és adatgyűjtés során elsősorban a következő módszereket alkalmaztam:

- Hazai és nemzetközi szakirodalom tanulmányozása, értelmezése és értékelése.
- Hazai és nemzetközi konferenciákon való részvétel, valamint előadások tartása.
- Részeredmények publikálása.
- A középiskolai matematika tananyaghoz kapcsolódó segédanyagok készítése, fordítása, szerkesztése.
- A Magyarországon matematikát tanító tanárokkal való folyamatos konzultációk (DePhyMa csoport: <http://www.uni-miskolc.hu/~dephyma/>), továbbképzéseim való részvétel, előadások tartása.
- Interjúk készítése és elemzése olyan tanulókkal, akik két tanítási nyelvű matematikaoktatásban részesültek, az interjúk elemzése.
- Tehetséggondozó, versenyfelkészítő foglalkozások vezetése.

- Német nyelvű matematikaverseny szerkesztése, összeállítása, lebonyolítása (DePhyMa).
- Az órákon folytonos adatgyűjtés: hangfelvételek minden óráról, képi dokumentációk, jegyzetek, óra előtti, alatti, utáni reakciók összegyűjtése.

4. A kutatás hipotézisei

A kutatás során két fő kérdésre koncentráltam: (1) Olyan módszert találni, amelyik a fenti ellentétet feloldja, legalább is enyhíteni képes. Így a gyengébb tanulók se féljenek a valós problémák és a mögötte meghúzódó matematikai gondolkodástól. (2) A megértési folyamat megkönnyítése ebben a témakörben bizonyos feladattípusok esetén, amelyet a számítógépes vizuális reprezentációk órai és otthoni használata nagyban segít. A fenti kérdések alapján a következő kutatási hipotéziseket állítottam fel:

1. A matematikatanítás realiztikus megközelítése gazdagabb concept image-hoz vezet a diákoknál, így a fogalmakat, törvényszerűségeket érthetőbben és hatékonyabban tudják felhasználni.
2. A dinamikus computeralgebrai szoftver, a GeoGebra segítségével a diákok motiváltabban dolgoznak, felhasználásával jobban megértik a fogalmakat, tudásuk és képességeik stabilabbak, rugalmasabbak, gazdagabbak és felhasználhatóbbak lesznek.

5. A kutatás folyamata

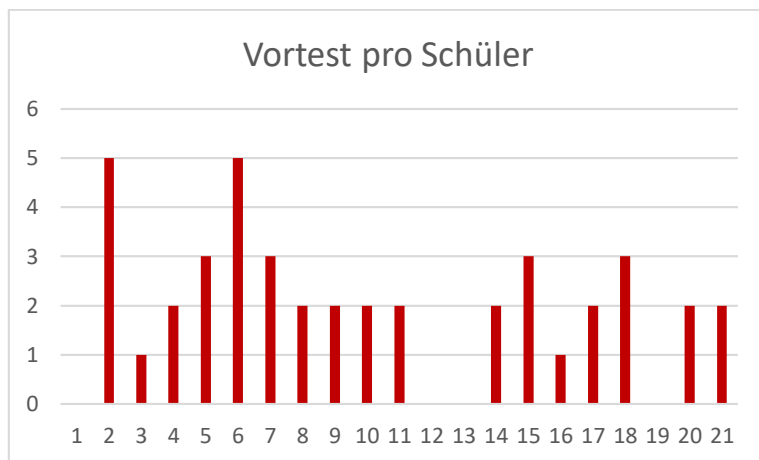
A hipotézisek vizsgálatára a diákokat folyamatosan mértem, az eredményeket, történéseket folyamatosan dokumentáltam:

- (1) A mérés előtesztel kezdődött, melyben azt vizsgáltam, hogy milyen mértékben emlékeznek a diákok a korábban megtanult hatványozási, gyökvonási és függvénytani ismeretekre, illetve mennyire tudják őket használni.
- (2) A kísérlet során minden fontosabb és nagyobb rész után a diákok tesztet írtak, melyben az elsajátított új anyagrészeire vonatkozó tudást mértem.
- (3) A kísérlet végén egy összefoglaló nagydolgozatra került sor, mely magában foglalta a kísérlet egész tananyagát.
- (4) Az órákról jegyzetek készültek, a diákokkal a folyamatos kommunikáció segítségével feltártuk, mely részek mennek könnyebben, és hol van szükség mélyebb magyarázatokra, esetleg még további gyakorlófeladatokra.
- (5) Az órákról hangfelvétel készült, amely segítségével később is fel tudtam idézni az adott tanóra tartalmát.
- (6) A diákok beleegyezésével bizonyos órákról fényképek is készültek a munkaformák, a táblakép rögzítéséhez.
- (7) A kísérlet végén a tanulók többségének füzete fénymásolásra került az órai és az otthoni munkájuk (a házi feladatok megoldása) dokumentálására.

6. A fejlesztő kísérlet eredményei

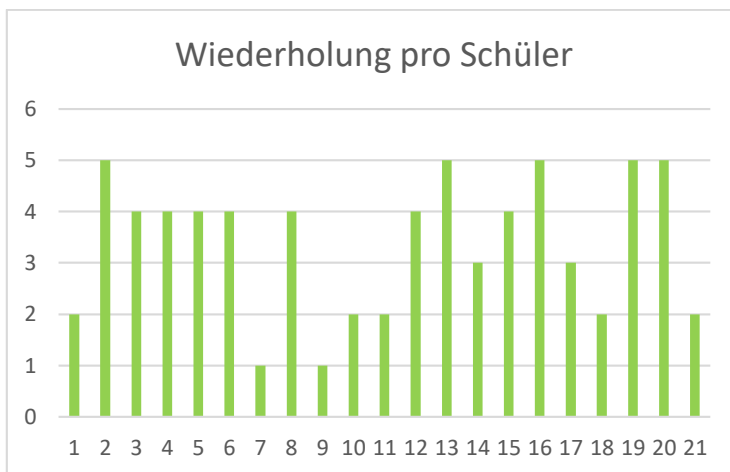
Az *előteszt* eredményei megerősítették a korábbi tapasztalatot. Bár a hatványozás, gyökvonás és függvények témaköröket a diákok már az általános iskolában tanulják, és a gimnázium 9. és 10. évfolyamán hangsúlyosan előfordulnak, mégis 11. osztályban újra át kell őket ismételni, mivel sok tanulónak nehézséget jelentenek. Különösen igaz volt ez a kísérleti csoportban, ahol túlnyomó részt gyengébb képességű diákok voltak. A témakör számukra már túlságosan absztraktnak bizonyult, így megalapozott tudás nélkül már nem tudták kitalálni a műveletek eredményeit. Tipikus hibás következtetéseket tapasztaltam már a legegyszerűbb műveleteknél is, mint például: $25^0 = 25$, vagy $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = -\frac{8}{27}$; és csupán 7 diák ismerte fel, hogy a $b^3 + b^7 = b^{10}$ összefüggés hibás. A komplexebb feladatoknál és a függvénytani alapismereteknél is hasonlóan rossz eredményt értek el. Az előteszt jegyátlagja csupán 2,47 lett 1,09 szórással, amely az egyik legrosszabb relatív szórással párosult, ami 44,2%. Azaz nem csak a diákok átlagos tudása volt nagyon gyenge, hanem a tudás szórása is nagy volt. Összehasonlításképpen a fejlesztő kísérlet végén a diákok 3,19-os eredményt értek el (+29,1%-os eredmény), melyhez 1,01-es szórással és így a mérések legkisebb relatív szórása (31,5%) társult, amely nagyobb átlagos tudásszintet és ezzel párhuzamosan egyenletesebb

csoporton belüli teljesítményt mutat. A diákok eredményei a következők voltak²:



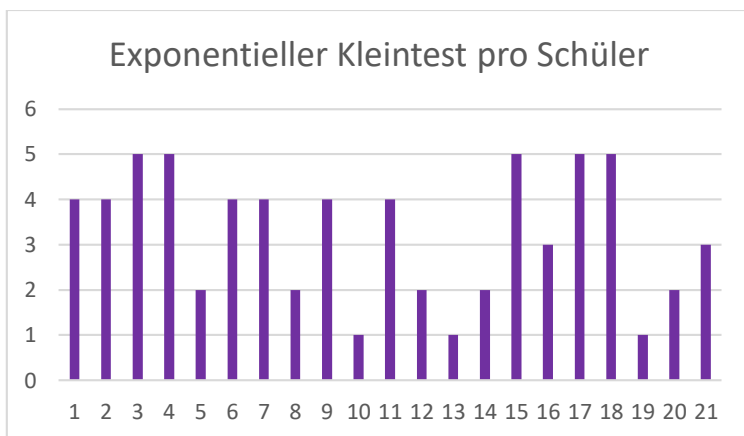
Az előteszt eredményeit figyelembe véve a következő négy órában átismételtük tananyagot és pótoltuk a hiányosságokat. Az ismétlés eredménye a legjobb lett az összes mérés között, 3,39, (szórás 1,33; relatív szórás 39,2%), mely 0,9 jeggyel lett jobb az előtesztnél. Az egyes diákok eredményeit a következő diagram mutatja:

² A diákok nevei helyett sorszám szerepel. A mérések során a diákok sorszáma nem változott.



Az ismétlés után elkezdtek az új anyagot, az exponenciális függvényt és alkalmazásait. Ebben, és az ezt követő fejezetben, a logaritmus függvény és alkalmazásai témakörben a bevezetés során realiztikus matematikai eszközöket használtunk. A bevezető példákban a realiztikus szituációkon keresztül ismertük meg a témakörökhöz tartozó legfontosabb fogalmakat, magukat a függvényeket. A szükséges definíciókat szintén realiztikus példákkal vezettük be és az azonosságok megfogalmazásában is a realiztikus feladatokat hívtuk segítségül. A racionális és valós kitevős hatványozást, valamint az „n-edik” gyök fogalmát is sikerült a realiztikus feladatok segítségével bevezetni. Az azonosságok egzakt bebizonyításához „klasszikus” algebrai eszközöket használtunk. Az exponenciális növekedés, fogyás valamint az exponenciális függvény tulajdonságai és transzformáltjainak megtanulásához aktívan használtuk –a realiztikus példákon túl– a számítógépet, konkrétan az ingyenes és felhasználóbarát

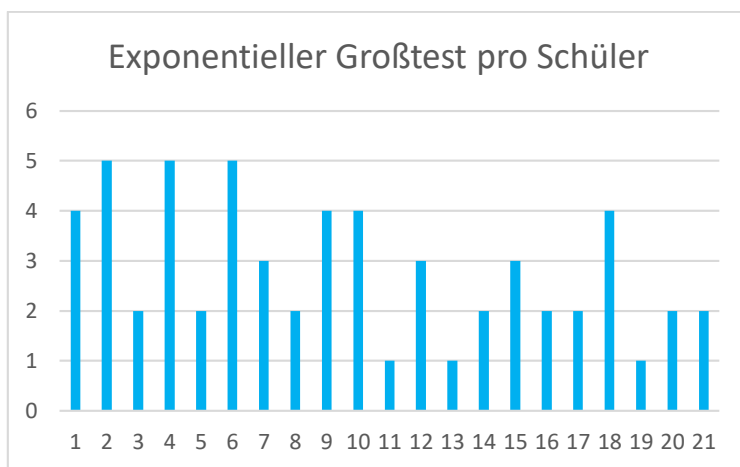
GeoGebra programot. A diákok otthon is letölthették a GeoGebrát, így a függvénytranszformációkat a szoftver segítségével otthon is megoldhatták és kinyomtathatták. Így az órákon előszeretettel használták a számítógépet és a feladatok ellenőrzését saját maguk végezheték el a táblánál a szoftver segítségével. Az exponenciális függvény bevezetése és gyakorlása után következett egy kisdolgozat, mely a racionális kitevős hatványozásra és az exponenciális függvényre terjedt ki. A dolgozat eredménye 3,24 lett, 1,41-es szórással (relatív szórás 43,6%):



A témakörben következett egy erősen algebrai rész: egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek, valamint visszakanyarodva a bevezetéshez és használva a megtanult matematikai eszközöket a realisztikus problémák, a szöveges feladatok. Az első három témakörben különböző feladat megoldási stratégiákat tanultunk meg: hogyan lehet az egyes egyenlet-struktúrákat felismerni és ezekhez a sémákhoz milyen

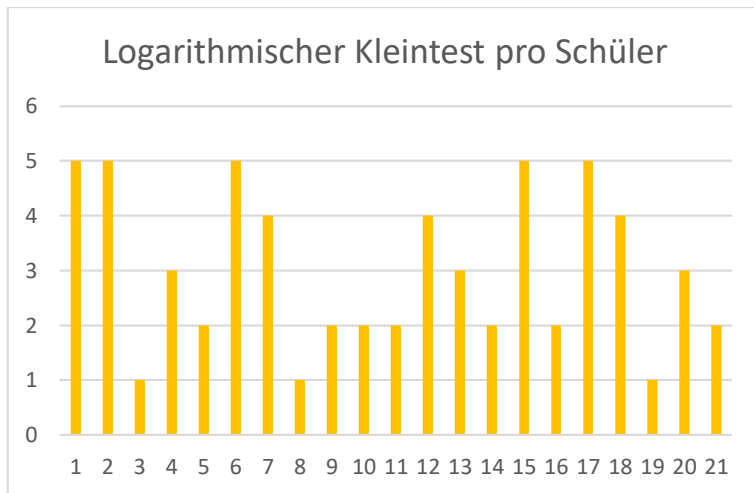
stratégiák tartoznak. Egyszerűbb egyenleteknél szintén használtuk a GeoGebrát, összekapcsolva az ikonikus és szimbolikus reprezentációkat. Még hasznosabb volt a számítógépes ábrázolás az egyenlőtlenségek kapcsán: itt a diákok ábrázolva is láthatták, hogy miért „fordul meg” a reláció olyan pozitív hatványalapok esetén, melyek kisebbek, mint 1, és nem csak megtanulták, hogy ilyen alapok esetén az exponenciális függvény szigorúan monoton csökkenő. Az órákon és a tesztekben realiztikus példák okozták a legnagyobb problémát, mivel egy látszólag nem matematikai nyelven megfogalmazott problémát kell először a matematika nyelvére lefordítani, majd a megtanult matematikai eszközöket felhasználva megoldani. Ezen felül figyelni kell arra, hogy a megkapott eredmény reális-e, vagyis megfelel-e a feladat tartalmi követelményeinek és ezek után az eredményt interpretálniuk is kell, azaz válaszolnia feladat kérdésére, amit a diákok egy része gyakran elfelejt. A Pólya, Schoenfeld probléma-megoldási stratégiák nagy segítséget nyújtottak ebben. A gyakorlás során tudatosan rendszeresen rákérdeztem a megadott hatványérték mellett a kitevő hozzávetőleges értékére is, amihez a speciális eseteket kivéve szükség lenne a logaritmusra. Ilyen esetekben vagy megbecsültük az eredményt két egész szám között, és számológép segítségével közelítettünk, vagy GeoGebra segítségével ábrázoltuk a függvényt és leolvastuk a hozzávetőleges eredményt. Ezzel a módszerrel lehetett segíteni a logaritmus bevezetését valamint új probléma-megoldási stratégiát mutatni a diákoknak. Az órák után a diákok egy összefoglaló dolgozatot írtak a témakör egészéből. Ennek a dolgozatnak az eredménye lett a leggyengébb (az

előtesztet nem számítva), az egyik legnagyobb relatív szórással. A diákinterjúk során kiderült, hogy a diákok egy részének a számon kért anyagmennyiség sok volt, sokfajta stratégia közül kellett a helyeset kiválasztani és a szöveges feladattól alapvetően meg is ijedtek. Az átlag 2,81 lett, szórás: 1,30, relatív szórás: 46,1%. A diákok eredményei az alábbiak szerint alakultak:



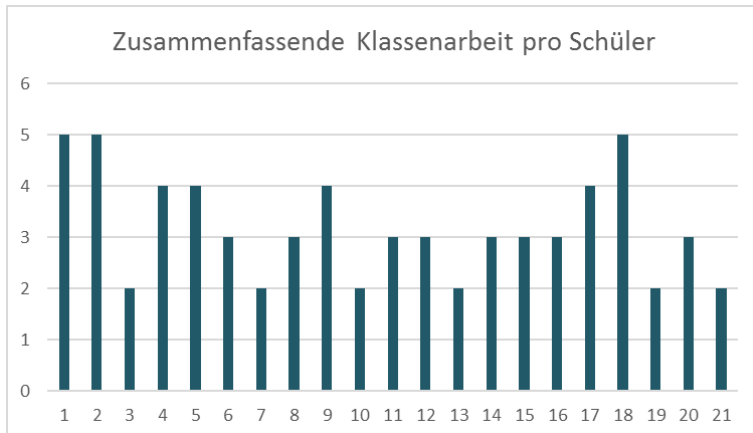
A logaritmus fogalmának bevezetéséhez szintén realizisztikus példát választottam. Ez a példa megegyezett az exponenciális bevezetés példájával, természetesen a kérdéseket „fordítva” tettem fel. A diákok pozitívan jeleztek vissza ezzel kapcsolatban. A diákok többsége felismerte a problémát és magabiztosan fogott a kérdések megválaszolásához. Itt is sokat használtuk a GeoGebrát, mint függvényábrázoló programot. Segített nekik, hogy már az exponenciális fejezetben becsültünk kitevőket függvénygörbék segítségével. A logaritmus fogalmát szintén a növekedés segítségével vezettük be. A logaritmus függvényt ábrázoltuk, összevetettük az

exponenciális függvénnyel és kitértünk az inverz függvény fogalmára is. A logaritmus függvényt elemeztük, transzformáltuk és az eredményeket a diákok a táblánál prezentálták, majd a függvény grafikonját összehasonlítottuk a GeoGebra által rajzolttal. A logaritmus azonosságait szintén a bevezető példa alapján próbáltuk „megsejteni” és megfogalmazni. Ez a diákoknak ebben a környezetben könnyen ment, hamar felismerték a szabályokat, utána őket kértem meg, hogy fogalmazzák meg a logaritmus azonosságait. A gyakorlás után ismét egy kisebb felmérő következett, ahol a logaritmus definíciója illetve azonosságai alapján kellett feladatokat megoldani, valamint egy transzformált logaritmus függvényt kellett ábrázolni és jellemezni. A teszt eredménye 3,0 lett, szórás 1,41, relatív szórás: 47,1%. A diákok eredményei az alábbiak szerint alakultak:



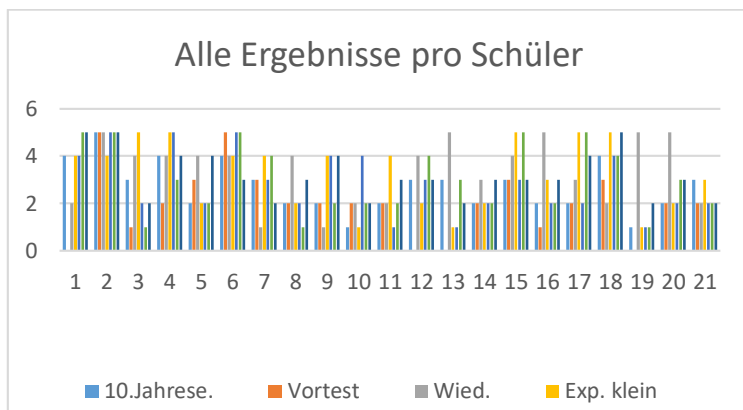
A kísérlet utolsó részében újra az egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek, valamint a szöveges

feladatokkal foglalkoztunk. Az exponenciális fejezethez hasonlóan itt is megoldási stratégiákat tanultunk, használtunk. Ahol lehetett, első sorban az egyenlőtlenségeknél. A szöveges feladatoknál már nem csak becsülni lehetett az eredményt, például a grafikon alapján, hanem logaritmus segítségével meg tudtuk adni a pontosabb közelítő értéket. A fejezet végén egy záró tesztre került sor, amely az előző 32 óra anyagát foglalta magába. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek szerepeltek benne, valamint egy szöveges feladat több alkérdéssel. Habár a feladatsor összetett volt, nagy anyagrészt foglalt magában, a diákok –a korábbi eredményekhez képest- jól teljesítettek. A dolgozatok átlaga 3,19 lett, a szórás 1,01. A jegyek relatív szórása a legkisebb volt az összes mérés között: 31,5%.



Az eredmények diákonkénti kiértékelésénél és összevetésénél néhány érdekes megfigyelést tettem: a 2. számú diák nyújtotta végig a legjobb és legeredményesebb

teljesítményt. A hat eredményt és az előző év végi jegyet összehasonlítva látható, hogy egy négyesen kívül a többi jegye ötös volt, mely 4,86-os átlagot és csupán 7,2%-os relatív szórást jelentett. Ez a diák az év végén is ötöst kapott. A másik véglelet jelentette a 19-es számú, aki már bukott diákként érkezett a csoportba. Az ő átlaga 1,86 lett 1,46-os szórással, mely 79,8%-os (!) relatív szórást takar. A jegyei között szerepel egy ötös az ismétlésből, volt még egy kettese a többi dolgozat egyes lett. Sajnos ez a diák az év végén újra évvisméltésre kényszerült. Összesen 9 diák nyújtott relatív kiegyensúlyozott teljesítményt, 25% körüli vagy az alatti relatív szórással, és három diák 50% feletttel.



A fejlesztő kísérlet kismintás volt, így az eredmények kiértékelése során a szokásos statisztikai elemzések csak korlátozottan alkalmazhatóak.

7. Eredmények a hipotézisek tükrében

A fejlesztő kísérlet első hipotézise:

1. A matematikatanítás realiztikus megközelítése gazdagabb concept image-hoz vezet a diákoknál, így a fogalmakat, törvényszerűségeket érthetőbben és hatékonyabban tudják felhasználni.

A diákok többsége a kísérlet elején komoly nehézségekkel és hiányosságokkal küzdött a hatványozás, gyökvonás és a függvényfogalom terén, a konkrét problémákra az előteszt vizsgálata világosan rámutatott. A kísérlet során próbáltuk a matematikai összefüggéseket realiztikus tartalommal megtölteni, így segítve a téma jobb megértését. Az órai tapasztalatok, valamint a mérések eredményei alapján megfigyelhető volt, hogy az ilyen „gyakorlatias” példák megoldása során olyan diákok is becsatlakoztak a közös gondolkodásba, akiknek különben nagyobb és mélyebb problémájuk volt a hatványozással, gyökvonással. A tesztek eredményei is a hipotézis alátámasztása irányába mutatnak. Külön érdemes kiemelni, hogy a logaritmus bevezetése is az exponenciális példával történt, valamint a logaritmus ismerete nélkül is –az exponenciális függvény grafikonjának felhasználásával– tudtunk kitevőket becsülni. Mindezek miatt a logaritmus fogalmának bevezetés szinte észrevétlenül történt meg, láthatólag nem okozott a hallgatóknak nehézséget, természetesnek vették a logaritmus definícióját és használatát.

A második hipotézis:

2. A dinamikus computeralgebrai szoftver, a GeoGebra segítségével a diákok motiváltabban dolgoznak, felhasználásával jobban megértik a fogalmakat, tudásuk és képességeik stabilabbak, rugalmasabbak, gazdagabbak és felhasználhatóbbak lesznek.

A fejlesztő kísérlet tanterme számítógéppel, kivetítővel, vetítévászonnal volt felszerelve és elérhető volt az internet is. Az órák nagy részénél aktívan használtuk ezeket az eszközöket, elsősorban a GeoGebra szoftvert, de a témához kapcsolódó matematikai videó részleteket is néztünk. Ezen felül online feladatokat oldottunk meg. Az órákon a diákok aktívan használták a számítógépet. Ők ábrázolták a függvényeket, és otthon is sokan töltötték le és használták. Különösen a szöveges feladatoknál volt hasznos, hogy a szükséges függvényeket a megfelelő koordinátarendszerben tudták ábrázolni, így a közelítő megoldást is le tudták olvasni.

A kutatási során a következő aspektusok is fontosak voltak. (1) A diákok fogalmi fejlődése; (2) A diákok függvényfogalmának fejlődése; (3) A diákok problémamegoldó képességének fejlődése. A fogalmi fejlődéssel kapcsolatban elmondható, hogy a realiztikus bevezetés magában foglalja azt a lehetőséget, hogy a diákok megértik a matematikai tartalmat, azonban nem tudják magukat a megfelelő matematikai pontossággal és terminológiával kifejezni. Ezért tudatosan figyeltünk az órákon a szabatos szóhasználatra. A második ponttal kapcsolatban már az előteszten kiderült, hogy a diákoknak komoly problémáik vannak a függvényekkel

kapcsolatban. A függvényeket, grafikonjaikat és tulajdonságaikat a bevezetéstől kezdve az egyenleteken keresztül a szöveges feladatokig használtuk, törekedve arra, hogy tudatosan használjuk a megfelelő fogalmakat. A kísérlet végére a diákok függvényfogalma megfigyelhetően fejlődött. A harmadik terület, a problémamegoldás. A fejlesztő kísérlet témaköre kifejezetten nem a problémamegoldásra irányult, azonban a matematika tanításától elválaszthatatlan a problémamegoldás fejlesztése. Ez a kompetencia talán a legnehezebb a diákok számára. A bevezetésben is találkozhattak a tanulók nyitott kérdésekkel, az utolsó fejezetekben pedig konkrétan szöveges feladatokkal foglalkoztunk. Bár a diákok többségénél megfigyelhető volt a fejlődés ezen a téren is, azonban itt további fejlesztés szükséges.

8. Összegzés, kitekintés

A korábbi tanítási tapasztalataim alapján a tanulóknak komoly nehézségeik vannak a kutatott területen. A fejlesztő kísérlet célja elsősorban az volt, hogy olyan módszert találjak az exponenciális és logaritmikus folyamatok bevezetésére és az ezekkel kapcsolatos matematikai tartalmak megtanítására, megtanulására, amely segítségével a diákok könnyebben elsajátíthatják a vizsgált tananyagot. A számítógép, és az általa nyújtott vizuális reprezentációs előnyöket használtuk ki a tanórákon.

A tesztek eredményei és a diákokkal folytatott beszélgetések alapján a kísérlet során javultak a diákok eredményei. Nagyon jól fogadták a realiztikus

megközelítést és együtt tudtuk feltárni a matematikai összefüggéseket. Jelentősen könnyebben értették meg az exponenciális növekedés fogalmát, a racionális és irracionális kitevőjű hatványozást és a logaritmus fogalmát szinte „természetesnek” vették.

A fejlesztő kísérlet utáni évben iskolát és iskolatípust váltottam, a Budapesti Német Iskolában tanítottam tovább. Ebben az iskolában a diákok a németországi Baden-Württemberg tartomány tanterve szerint tanulnak, mely gyökeresen eltér a magyarországi tantervtől. Egy-egy rövid tananyag keretében az exponenciális növekedéssel, a valós kitevős hatványozással és a logaritmussal már a kilencedik osztályban megismerkednek. Habár sajnos nincs lehetőség elmélyedni a tananyagban az órákon sikerrel tudtam felhasználni a kidolgozott exponenciális és logaritmikus bevezetést, így a diákok könnyebben megértették a komplexebb feladatokat is.

Terveim között szerepel, hogy a középiskolai tananyagból azokat a fejezeteket is hasonlóan feldolgozzam, melyekkel a diákok nem mindennap találkoznak, így a megértésük sokkal nehezebb. Ilyen témakörök lehetnek például a trigonometria, sorozatok, de akár a koordinátageometria, algebrai kifejezések vagy a különböző függvénytípusok is idesorolhatók lehetnek. Érdekes és egyben hasznos kísérletet lehetne tervezni a már fentebb említett magyar és Baden-Württembergi alaptanterveket összehasonlítva, közben mindkettőnek az erőnyeit kiemelve.

THESES IN ENGLISH

1. Justification of the choice of topic

Up until now the Hungarian mathematical educational system has been characterized as an abstract formal school system where the demonstrations and the practical exercises were not emphasized enough. Based upon my experience as a calculus teacher for more than one decade, most pupils from class 11 have difficulties with exponential and logarithm functions and their applications. They often do not understand the exponential procedure, cannot manipulate with exponential functions and cannot work confidently with equations, inequations, however the generalization of root and powering and powering with rational and irrational indexes have been already been learnt and reviewed. Furthermore, they cannot or only partly can correctly translate and solve the word problem exercises. The situation is even more serious in connection with logarithm functions. The unfamiliar symbolism of the function, its partly surprising rules (e.g. $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$; $a, b, c > 0$; $a \neq 1$), the fact that the results cannot always be directly calculated with calculator (see $\log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3}$), and the relation between the exponential and logarithm functions are difficult to understand for most pupils. It is especially true in classes and groups that are not very good at mathematics.

Learning the right terminology in the target langue and interpreting the instructions of the exercises appropriately causes further difficulties for bilingual classes. (At the

same time it is practical that they also know the terminology in their native language, as several books are only available in that language). The latter mentioned algebraic exercises -algebraic terms, equations, inequations, terminology of functions- have already been known partly. After pupils understand and translate the meaning of word problems properly, they have to interpret their mathematical content, solve the problem according to the right strategy, and check the results of the exercises. Several pupils struggle with choosing the right problem solving strategy.

During the developmental research pupils had the opportunity to take the opportunities supplied by the topic and use modern technology. They utilized the advantages provided by GeoGebra while plotting, transforming or analysing functions, hence the symbolic representation could be revealed by the pupils as a result of iconic appearance. Besides functions, they could also use the advantages of visualization provided by the computer effectively when they calculated with some equations and inequations as well. In the case of exponential problems, it was possible to determine approximate values without knowing the definition of logarithm. Pupils used the computer in class and many of them at home as well, with pleasure and with good results.

2. Theoretical background

Applying different representations were very important during the research. (Lesh – Post – Behr, 1987). One characteristic of the realistic mathematical method (Freudenthal, 1973) is that the mathematical contents are

introduced on an enactive representations ground using iconic representations and thus arriving at symbolic representations. Streefland points out in one of his studies (Streefland, 1985) that during the understanding process pupils can switch between the formal and informal grounds and that teachers use the „model for“ educational method instead of the „model of“ method. Later this idea, switching between models, became an indispensable element of the Freudenthal educational method (Streefland, 1991; Treffers, 1991; Gravemeijer, 1994; Van den Heuvel-Panhuizen, 1995). This type of approach to problems helps pupils develop the appropriate concept image (Tall – Vinner, 1981). During the problem solving process we took those steps in consideration that were worked out by Pólya (1979) and Schoenfeld (1985). The computer, mostly the GeoGebra software was continuously used during class work and in home preparation too, which helped the understanding of formal mathematics by pupils through visual representation. The usage of computers in mathematics teaching carries more advantages than in the case of other subjects, because „by making the routine activities easier, it helps exploring and creative work as well as the discussion of realistic problems and the connection of contents“ (Leuders, 2010). Tulodziecky also states that technical devices need to be used as incentives in problem solving and decision analysis tasks (Tulodziecky, 2007). He summarizes the areas where the appropriate use of the computer can be advantageous in five points. Abfalterer (2007) defines four steps of giving a successful lesson with a computer: 1. Preparing the software; 2. Transaction according to plans; 3. The role of the teacher is clear; 4. Feedback. The usage

of computers in teaching today is generally called „Blended learning” in technical literature (Friesen, 2012). Starker and Horn (2012) divided the methods of „Blended learning” in four categories, of which the first and the fourth are characteristic mostly of higher education, while the second and the third are rather used in secondary education. 1. Rotation model; 2. Flex model; 3. A La Carte model; 4. Enriched Virtual model. During the developmental research the language of work had a great role. The mother tongue of the pupils was Hungarian, while the target language was German. The definition „bilingual group” had turned out to be problematic earlier as Bach mentions in his study (Bach, 2000). More recent special literature specifies the terminology as CLIL (Content and Language Integrated Learning), the meaning of which is defined by the European Commission. (European Commission, 2006). Szűcs defines bilingual mathematics teaching as the following: „... bilingual mathematics teaching is every kind of education where a second language (either a foreign language, a regional language, a minority language and/or the given country’s official language) are used as the language of work in the mathematics lesson.” (Szűcs, 2009) We used German language in mathematics teaching in the research group based on these definitions.

3. Research objectives, research background, research methods

The objective of the developmental research was to work out a method through which pupils can understand the exponential and the logarithmic functions and their

applications better, which helps them understand and recognize relations and solve problems and do exercises with bigger confidence within the topic. During the creation of the syllabus I carefully examined the National Curriculum, the school books available, and several special articles and books related closely or mediate to the topic. I examined the mathematical schools and requirements of the recent years and decades. The research was being executed from the beginning of November to the middle of January in the 2010/11 school year in Friedrich Schiller Grammar School in Pilisvörösvár. The research group consisted of pupils from two classes: some pupils from 11.c and some from 12.s. The group consisted of those pupils who did not plan to deal with mathematics in their future; their middle-term plan was to absolve the intermediate mathematical maturity examination. (The other part of the class formed a higher level mathematics group with five special mathematics lessons, where pupils were preparing for the higher level mathematics maturity examination. This means that the greater part of the group was not particularly good at mathematics. The average mathematics results of the 21 pupils were the following at the end of the previous year:

10.c	11.s ³	Altogether:
2.92	2.38	2.71

Both classes had been studying mathematics since the 9th grade, but from different teachers. I had been teaching

³ Both classes were in the same grade, however the „s” class had a language preparation year in the 9th grade, so the actual secondary studies began a year later. The best mark in Hungary is 5, the worst is 1.

them since the beginning of the 11th year as new pupils. We had four mathematics lessons a week, during the whole developmental research 33 lessons including the tests. This is more than an average class has, but partly because of bilingual teaching, partly due to the realistic mathematical approach, the extra time was necessary. The average mathematics results were the following at the end of the year 11:

11.c	12.s	Altogether:
2,77	2,25	2,57

During the creation of the syllabus, the introduction of new contents, and the explanation of connections it was important that the content corresponded with the National Curriculum, but at the same time it had to be as realistic as possible. To reach this, I used the elements of the Dutch realistic mathematics teaching. Furthermore, I used the computer as a tool to represent functions, equations, inequation and word problems. I paid special attention to reflect on the relation and difference between the exponential and linear change and that the logarithm was introduced through the same example. In the lessons we used the available school books (Kosztolányi: „Sokszínű matematika” Colourful Mathematics), for equations, inequations and equation systems we partly used the already given exercise books (Zusammenfassende Aufgabensammlung Mathematik I-IV., and „Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I”. „Practice and Exercise Book for the Maturity Examination”). Furthermore, I used some exercises from the www.mathepower.de page. For the realistic

introduction, lighting up relations, for world problems and functions we also used exercises that were created by me.

During collecting of the data and the research I mostly used the following methods:

- Studying, interpreting and evaluating the national and international special literature.
- Attending national and international conferences and giving lectures.
- Publishing partial results.
- Creating, translating and editing extra material in relation to secondary school mathematics.
- Contiguous consultation with teachers of mathematics working in Hungary (DePhyMa group: <http://www.uni-miskolc.hu/~dephyma/>), attending trainings, giving lectures.
- Interviewing pupils who received bilingual mathematics teaching, analysing the interviews.
- Leading talent management and exam preparation courses.
- Editing, compiling and executing German language mathematics competitions (DePhyMa).
- Continuous data collection in the lessons: audio records in each lesson, picture documentation, notes, collecting reactions before, during and after the lesson.

4. Research hypotheses

During the research I concentrated on two main questions:
(1) To find a method that may release or at least ease the contrast described above so that weaker pupils do not

either fear of realistic problems and thinking about them. (2) To make the understanding process easier in the case of some exercise types in the topic, which is greatly helped by visual computer representation used in the lesson and at home as well. Based on the questions above I set up the following research hypotheses:

1. The realistic concept of mathematics teaching leads to a richer concept image of the pupils. They can apply the concepts and theorems more comprehensively and more effectively.
2. GeoGebra, the dynamic computer algebra software, motivates students to solve the exercises which increases their understanding of their concepts. Students' knowledge and skills become more stable, flexible, deeper and more applicable.

5. The research process

To examine the hypotheses pupils were continually being evaluated, results and events were constantly being recorded.

- (1) The evaluation began with a pre-test, in which I examined to what extent pupils remembered knowledge of exponentiation, evolution and functions that had been learnt previously, and to what extent they could utilize this knowledge.
- (2) During the research pupils wrote a test after each important and greater chapter, in which their knowledge of the studied new topic was measured. Results of the tests were constantly being evaluated, and in case incompleteness came to

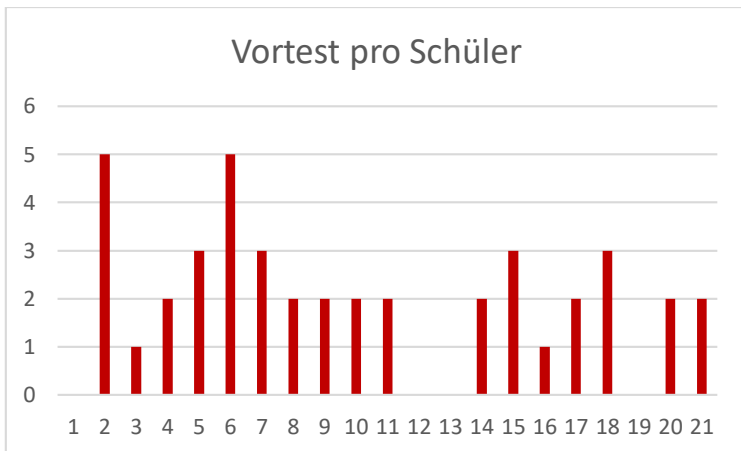
light, we supplemented and replaced the missing information integrated into the syllabus.

- (3) At the end of the research there was a post-test written that included the whole material of the research.
- (4) Minutes were made in the lessons, and through contiguous communication with the pupils we explored which parts were understood better and which parts needed further explanation and practice.
- (5) The lessons were audio recorded, which helped me remember the content of each lesson.
- (6) With the consent of pupils' photos were made of some lessons to record work forms and the blackboard outlook.
- (7) At the end of the research the exercise books of most pupils were photocopied to record their work in the lessons and at home (homework tasks).

6. The results of the research

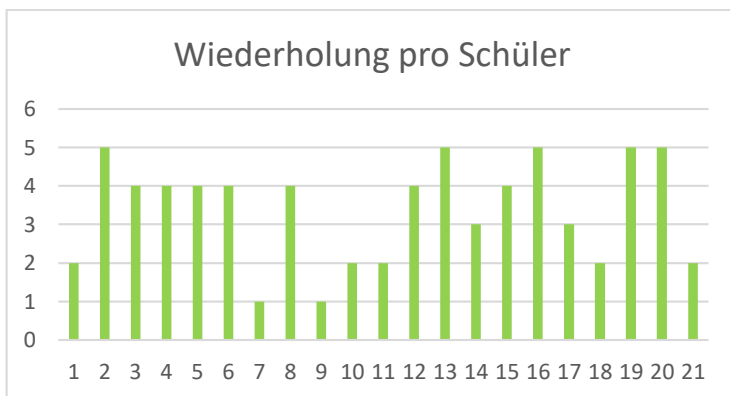
The results of the *pre-test* strengthened the previous experience. Although the topics of powering, roots and functions are already learnt in the primary school and they are emphasized in the 9th and 10th year syllabus as well, in the 11th class they had to be reviewed, because they caused difficulties to several pupils. This was particularly true in the research group, which consisted of mostly weaker pupils. The topic was too abstract for them, thus they were not able to find out the results of the tasks without well-founded knowledge. Typically wrong conclusions were made even in case of the simplest tasks,

for example $25^0 = 25$, or $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = -\frac{8}{27}$; and only seven pupils recognized that the $b^3 + b^7 = b^{10}$ correlation is wrong. They reached similarly bad results with more complex exercises and basic functions. The average pre-test mark was only 2.47 with 1.09 deviations, which was parallel with one of the worst coefficient of variation that were 44.2%. This means that not only pupils' average knowledge was very weak, but deviation of their knowledge was also high. As a contrast, pupils reached 3.19 result at the end of the research (29.1% higher result), which came with 1.01 deviation and the lowest coefficient of variation of the measurements (31.5%). This reflects on a higher average level of knowledge and parallels more even performance within the group. The results of the pupils were the following in table format⁴:



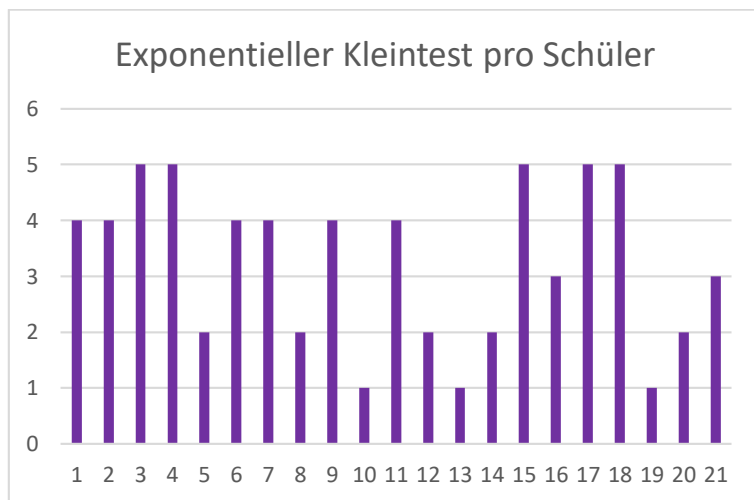
⁴ Instead of names of pupils numbers are used. The number of each pupil remained the same during the research.

In consideration with the results of the pre-test the topic was reviewed and the missing information was replaced in the following four lessons. The result of the review was the best among all the measurements, 3.39, (deviation 1.33; coefficient of variation 39.2%), which was 0.9 mark better than the pre-test result. The result of each pupil is shown in the following diagram:



After the review of the new material, the exponential function and its applications were started. In this and the following chapter, the logarithm function and its applications topic, we used realistic mathematical tools during the introduction. In the introductory tasks pupils got acquainted with the most important phenomena regarding the topic and the functions themselves through realistic situations. The necessary definitions were also introduced through realistic examples and we used realistic examples when explaining identities as well. The phenomena of the rational and real exponentiation and the n th root were also introduced through realistic exercises. For the exact demonstration of identities, we used „classical” algebraic proofs. Besides realistic examples,

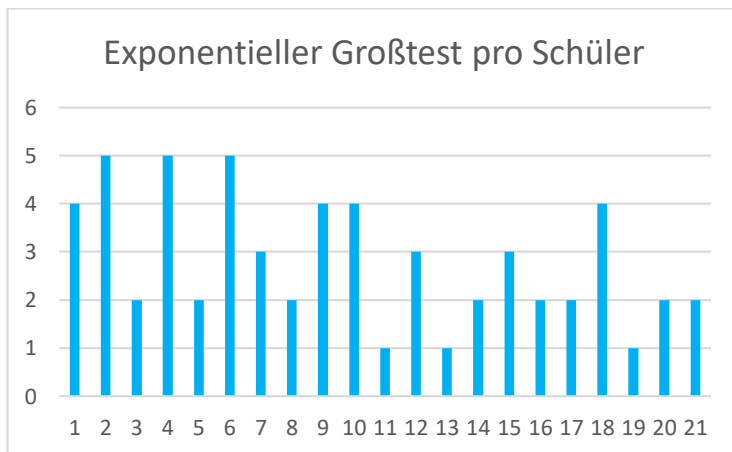
the computer, mostly the free GeoGebra software was used to study the exponential growth and decrease and the characteristics of the exponential function and its transformed figures. Pupils could download GeoGebra at home, so transformations of functions could be solved and printed with the software at home as well. Thus they used the computer in the lessons with pleasure and they could check the solution of exercises themselves at the board with the software. After introducing and practicing the exponential function there was a small test which included the rational exponentiation and the exponential function. The result of the test was 3.24 with 1.41 deviations (coefficient of variation was 43.6):



A strongly algebraic part followed within the topic: equations, systems of equations, inequations, and getting back to the introduction and using the studied mathematic tools, the realistic exercises, world problems. In the first three topics we learned different problem solving

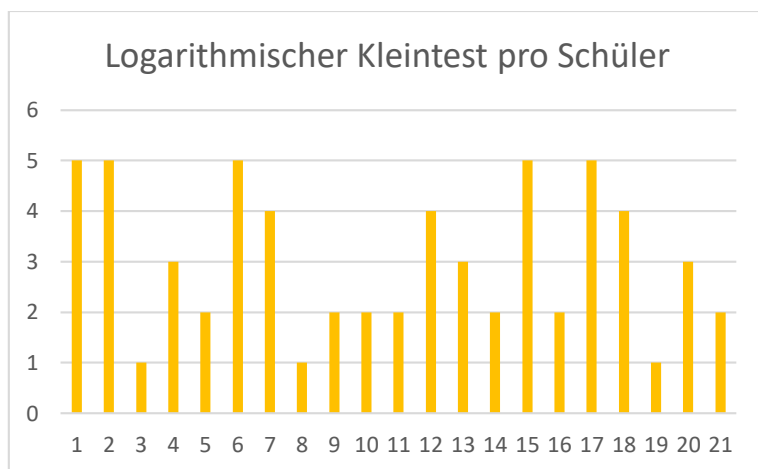
strategies: how to identify different equation structures and which strategies to use for each scheme. For simpler equations we also used GeoGebra, joining iconic and symbolic representational tools. Computer representation was even more useful in the representation of inequations – pupils could see it demonstrated why the relation „turns back” in the case of such positive power bases that are smaller than one, they did not only learn that in the case of such bases the function is strictly monotonously decreasing. In the lessons and in tests realistic exercises caused the greatest problems, as a seemingly not mathematic problem had to be interpreted in the language of mathematics and then solved with the studied mathematic tools. Besides these, they had to pay attention if the received result was real, if it corresponded to the content requirements of the task. After this, pupils had to interpret the result to answer the question, which was often forgotten by many of them. During practice I deliberately asked pupils regularly about the approximate value of the exponent besides the given power value, for which logarithm would be necessary except for some special cases. In these exercises we either estimated the result between two whole numbers and approached with the help of a calculator, or we demonstrated the function with GeoGebra and read the approximate result. This method helped the introduction of logarithm and showed a new problem solving method to pupils. After these lessons pupils had a summarizing test of the whole topic. The result of this test was the weakest (except for the pre-test) with one of the greatest coefficient of variation. It was revealed during the interviews that for several pupils the amount of the material tested was too much, they had to

choose the right strategy from a lot, and basically they were threatened by the world problems themselves. The average result was 2.81, deviation: 1.30, coefficient of variation: 46.1%. The results of pupils were the following:



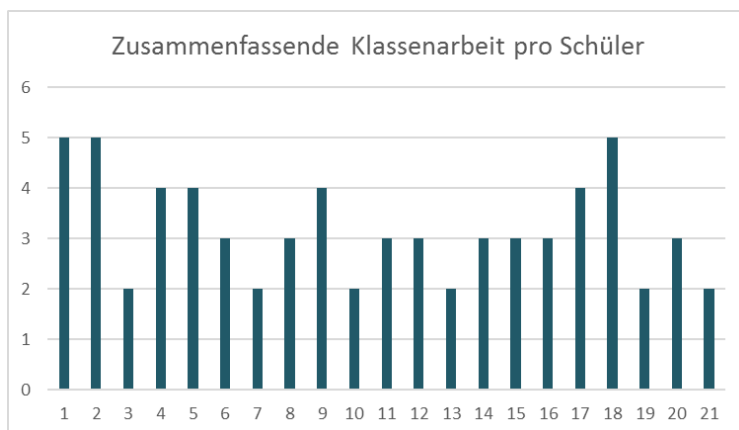
To introduce the phenomena of the logarithm I also used a realistic example. This example was the same as the one used to introduce the exponential, but naturally I asked the questions „the other way round”. Pupils gave positive feedback regarding this method. Most pupils recognized the problem and started solving it confidently. We used GeoGebra a lot here to represent functions. It helped pupils that we had already estimated exponents through function curves in the exponential unit. The phenomena of logarithm were also introduced through the increase. We represented the logarithmic function, compared it to the exponential function and talked about the inverse function too. We analyzed the logarithm function, transformed it and pupils represented the results at the board, and then we compared the graph of the function with the one that

GeoGebra drew. The identities of logarithm were also found out and explained through the introductory example. In this environment pupils found the task easier, they recognized rules in a short time, and then they were asked to explain the identities of logarithm. A short test followed the practice again, in which pupils had to solve problems based on the definition and identities of logarithm, and they had to represent and analyze a transformed logarithm function. The result of the test was 3.0, deviation was 1.41, coefficient of variation: 47.1%. The results of pupils were the following:



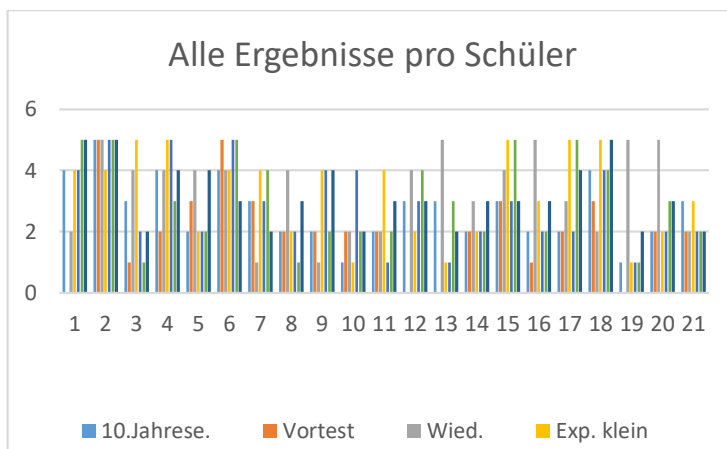
In the last part of the experiment we studied equations, equation systems, inequations and word problems again. Similarly to the exponential unit, here we also used and learned problem solving strategies where it was possible, mostly in the case of inequations. In word problems we could not only estimate the result, for example based on a graph, but we could give a more punctual approximate value with the help of logarithm. At the end of this unit

there was a closing test that included the material of the previous 32 lessons. It contained exponential and logarithm equations, inequations and equation systems and a word problem with several connecting questions. Although the test was complex and included a lot of material, pupils did well compare to previous tests. The average result was 3.19, deviation was 1.01. The coefficient of variation of marks was the smallest among all the evaluation: 31.5%.



During the evaluation and comparison of the results of each pupil I found a few interesting facts: pupil number 2 was the most successful and efficient all through the year. If we compare the six results and his previous end of year mark, we can see that except one four he only received fives, which means an average 4.86 and only 7.2% coefficient of variation. This pupil got a five at the end of the year as well. The other extreme was represented by number 19, who entered the group as a failed pupil. His average was 1.86 with 1.46 deviation and 79.8 %(!) coefficient of variation. His marks included a five for the

review, a two, the other tests were 1. Unfortunately, this pupil had to repeat the school year again. Altogether 9 pupils showed relatively balanced performance with around 25% or lower deviation, and 3 pupils showed over 50% deviation.



The developmental experiment was based on a small sample so in the evaluation of the results the usability of general statistical analyses is limited.

7. Results in the reflection of the hypotheses

The first hypothesis of the developmental research:

1. The realistic concept of mathematics teaching leads to a richer concept image of the pupils. They can apply the concepts and theorems more comprehensively and more effectively.

At the beginning of the research most pupils had serious difficulties with the topics of powering, roots and the phenomena of the function, and the pre-test showed exactly what the actual problems were. During the research we tried to fill the mathematical context with realistic content, thus helping better understanding of the topic. Based on the lessons and the measurements we can say that when we were solving such „practical” exercises those pupils also participated in brainstorming who had bigger and more serious problems with the exponential and roots. The results of the tests also seem to confirm the hypothesis. It has to be emphasized that the introduction of logarithm was also done through the exponential example and that without the knowledge of logarithm – using the exponential function graph- we were also able to estimate exponents. Due to all of these aspects the introduction of logarithm was almost unseen, it did not cause difficulties to pupils, and they took the definition and use of the logarithm for granted.

The second hypothesis:

2. GeoGebra, the dynamic computer algebra software, motivates students to solve the exercises which increases their understanding of their concepts. Students’ knowledge and skills become more stable, flexible, deeper and more applicable.

The classroom of the developmental research was equipped with a computer, a projector and a screen, and the internet was also accessible. In most lessons we actively used these tools, mainly the GeoGebra software, but we watched excerpts of mathematical videos connecting to the topic as well. Furthermore, we solved

online exercises. Pupils actively used the computer in the lessons. They represented the functions and many of them downloaded and used the software at home. It was especially important in the case of word problems that they could represent functions in the appropriate coordinate system, so they could read off the approximate solution.

During the research the following aspects were important: (1) Pupils' conceptual development; (2) Pupil's concept of functions development; (3) Pupils' problem solving abilities development. In connection with the conceptual development it can be stated that the realistic introduction provides the opportunity that pupils understand the mathematical content, but they still cannot express themselves with the suitable mathematical accuracy and terminology. Therefore, we paid attention to the precise usage of terminology in the lessons. Regarding the second question, the pre-test already pointed out that pupils had serious problems with the functions. Functions, their graphs and characteristics were being used from the introduction, through the equations until the word problems, aspiring to use the appropriate expressions consciously. By the end of the research the function concept of the pupils noticeably developed. The third question was problem solving. The topic of the research was not exactly problem solving, but the development of problem solving abilities is inseparable from mathematics teaching. This competence may be the most difficult area for pupils. They met open questions already in the introduction, and in the last unit the topic was concretely word problems. Although most pupils showed improvement in this area as well, further development is necessary here.

8. Summary, review

Based on my previous teaching experiences, pupils have serious difficulties in the researched area. The main purpose of the developmental research was to find a method to introduce the exponential and logarithm processes and to teach and learn the relevant mathematical content that helps pupils learn the material more easily. In the lessons we utilized the computer and the opportunities of visual representation that the computer provides.

Based on the test results and the interviews with pupils results improved during the research. They accepted the realistic approach easily and we could explore the mathematical context together. They understood the exponential increase, the rational and irrational exponential considerably more easily, and they took the logarithm almost „for granted”.

In the school year that followed the developmental research I started teaching in another type of school, in The Budapest German School. Here pupils study according to the syllabus of Baden-Württemberg province in Germany, which is significantly different from the Hungarian curriculum. In a few short materials they meet the exponential increase, real exponent and logarithm already in the ninth grade. Although there is unfortunately no opportunity to deepen their knowledge of this material, I managed to use the exponential and logarithm introduction I had worked out with success, thus pupils also understood more complex exercises easily.

I am planning to process those chapters of the secondary school material similarly that pupils are not exposed to

generally, and the understanding of which is therefore much more difficult. Such topics may be for example trigonometry, sequences, but even coordinate geometry, algebraic expressions or different function types. It might be an interesting and useful experiment in the same time to compare the curriculum of the above mentioned Baden-Württemberg province and the Hungarian curriculum, emphasizing the advantages of both.

9. Publikációk, Publications



DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR



Nyilvántartási szám: DEENK/23/2017.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Várady Ferenc
Neptun kód: EHY77U
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10033299

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű hazai könyvrészletek (3)

- Várady, F.:** Solving differential calculus problems with graphic calculators in a secondary grammar school.
In: Problem Solving in Mathematics Education : Proceedings of the 15th ProMath conference 30 August-1 September, 2013 in Eger. Eds.: András Ambrus, Éva Vásárhelyi, Eötvös Loránd University, Faculty of Science, Institute of Mathematics ; Eger : Mathematics Teaching and Education Center Eszterházy Károly College Institute of Mathematics and Informatics, Budapest, 209-231, 2014.
ME2015a.00095 (teljes kötet)
- Várady, F.:** Using graphical calculators in teaching functions.
In: Proceedings of the 4th International Conference of Economic Sciences : Kaposvár University - Kaposvár - Hungary - 9-10 May 2013. Eds.: katalin Szendrő, Mihály Soós, Kaposvár University, Faculty of Economic Sciences, Kaposvár, 96-103, 2013. ISBN: 9789639821620
- Várady, F.:** Computergestützter Unterricht von Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Anwendungen.
In: Proceedings of the Conference on the History of Mathematics and Teaching of Mathematics [elektronikus dokumentum] : CEEPUS coordination meeting of the network : Active Methods in Teaching Mathematics and Informatics ; Sárospatak 24-26 May 2012, Miskolci Egyetem, Miskolc, 23-32, 2012. ISBN: 9789636619886

Magyar nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

- Várady, F.:** A differenciálszámítás bevezetésének és a függvényelemzés megértésének segítése a GeoGebra szoftver alkalmazásával.
Economica (Szolnok). 2011 (4), 90-96, 2011. ISSN: 1585-6216.

Cím: 4032 Debrecen, Egyetem tér 1. ☐ Postacím: 4010 Debrecen, Pf. 39. ☐ Tel.: (52) 410-443
E-mail: publikacio@lib.unideb.hu ☐ Honlap: www.lib.unideb.hu



Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (3)

5. **Várady, F.:** Introduction of differential calculus in the class 10 with graphical calculator.
Ann. Math. Inform. 45, 161-177, 2015. ISSN: 1787-5021.
ME2016a.00811
6. **Várady, F.:** Ein anderer Weg bei dem Logarithmusunterricht: Ein entwickelndes Unterrichtsexperiment.
Teach. Math. Comput. Sci. 12 (1), 1-16, 2014. ISSN: 1589-7389.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2014.0344>
ME2015a.00268
7. **Várady, F.:** Das Verstehen der Begriffe Stetigkeit einer Funktion und Differenzialquotienten mit Unterstützung von GeoGebra.
Agora. 9, 113-133, 2012. ISSN: 1789-2643.

További közlemények

Magyar nyelvű absztrakt kiadványok (3)

8. Végh, Á., **Várady, F.**, Lőrincz, S.: A hallgatói munka alternatív lehetőségei operációkutatásban.
In: Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók XXXVI. konferenciája (MAFIOK) :
[elektronikus dokumentum] : Gyöngyös, 2012. augusztus 27-29. / [rend., közread.] Károly Róbert Főiskola, Károly Róbert Főiskola, Gyöngyös, 71, 2013. (Károly Róbert Főiskola tudományos közleményei, ISSN 2062-8269) ISBN: 9789639941595
9. **Várady, F.:** Az exponenciális függvény és alkalmazásai.
In: Informatika Didaktikai Kutatások 2013 : Programfüzet és absztraktok, Oradea, Románia, 2013.01.25-2013.01.27. Partiumi Keresztény Egyetem, Nagyvárád, 13, 2013.
10. **Várady, F.:** A folytonosság és differenciálhányados fogalmának megértése GeoGebra segítségével.
In: Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások 2012 : Programfüzet és absztraktok : Katolikus Egyetem Pedagógiai Kar, Juraj Páleš Intézet Lőcse-Levoča, Szlovákia 2012. január 20-22. Eds.: Ján Guncága, Herendiné Kónya Eszter, Katolikus Egyetem Pedagógiai Kar, Matematikai Tanszék, Levoča, 21-22, 2012.





Idégen nyelvű absztrakt kiadványok (2)

11. **Várady, F.:** The exponential function and its applications: In: E. Herendiné Kónya, E. Debreñti (Comp.): Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences January 25-27, 2013 Oradea, Romania.
Teach. Math. Comput. Sci. 11 (1), 138, 2013. ISSN: 1589-7389.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2013.R020>
12. **Várady, F.:** The understanding of the meaning of continuous functions and differential through the support of the software GeoGebra: In: E. Herendiné Kónya (comp.): Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences January 20 - January 22, 2012, Levocá, Slovakia.
Teach. Math. Comput. Sci. 10 (1), 224, 2012. ISSN: 1589-7389.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2012.R019>

A DEENK a Jelölt által az IDEa Tudósterbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománytermi ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2017.02.10.





Registry number: DEENK/23/2017.PL
Subject: PhD Publikációs Lista

Candidate: Ferenc Várady
Neptun ID: EHY77U
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10033299

List of publications related to the dissertation

Foreign language Hungarian book chapters (3)

- Várady, F.:** Solving differential calculus problems with graphic calculators in a secondary grammar school.
In: Problem Solving in Mathematics Education : Proceedings of the 15th ProMath conference 30 August-1 September, 2013 in Eger. Eds.: András Ambrus, Éva Vásárhelyi, Eötvös Loránd University, Faculty of Science, Institute of Mathematics ; Eger : Mathematics Teaching and Education Center Eszterházy Károly College Institute of Mathematics and Informatics, Budapest, 209-231, 2014.
ME2015a.00095 (full proceeding)
- Várady, F.:** Using graphical calculators in teaching functions.
In: Proceedings of the 4th International Conference of Economic Sciences : Kaposvár University - Kaposvár - Hungary - 9-10 May 2013. Eds.: katalin Szendrő, Mihály Soós, Kaposvár University, Faculty of Economic Sciences, Kaposvár, 96-103, 2013. ISBN: 9789639821620
- Várady, F.:** Computergestützter Unterricht von Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Anwendungen.
In: Proceedings of the Conference on the History of Mathematics and Teaching of Mathematics [elektronikus dokumentum] : CEEPUS coordination meeting of the network : Active Methods in Teaching Mathematics and Informatics : Sárospatak 24-26 May 2012, Miskolci Egyetem, Miskolc, 23-32, 2012. ISBN: 9789636619886

Hungarian scientific articles in Hungarian journals (1)

- Várady, F.:** A differenciálszámítás bevezetésének és a függvényelemzés megértésének segítése a GeoGebra szoftver alkalmazásával.
Economica (Szolnok). 2011 (4), 90-96, 2011. ISSN: 1585-6216





Foreign language scientific articles in Hungarian journals (3)

5. **Várady, F.:** Introduction of differential calculus in the class 10 with graphical calculator.
Ann. Math. Inform. 45, 161-177, 2015. ISSN: 1787-5021.
ME2016a.00811
6. **Várady, F.:** Ein anderer Weg bei dem Logarithmusunterricht: Ein entwickelndes Unterrichtsexperiment.
Teach. Math. Comput. Sci. 12 (1), 1-16, 2014. ISSN: 1589-7389.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2014.0344>
ME2015a.00268
7. **Várady, F.:** Das Verstehen der Begriffe Stetigkeit einer Funktion und Differenzialquotienten mit Unterstützung von GeoGebra.
Agora. 9, 113-133, 2012. ISSN: 1789-2643.

List of other publications

Hungarian abstracts (3)

8. Végh, Á., **Várady, F.**, Lőrincz, S.: A hallgatói munka alternatív lehetőségei operációkutatásban.
In: Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók XXXVI. konferenciája (MAFIOK) :
[elektronikus dokumentum] : Gyöngyös, 2012. augusztus 27-29. / [rend., közread.] Károly Róbert Főiskola, Károly Róbert Főiskola, Gyöngyös, 71, 2013. (Károly Róbert Főiskola tudományos közleményei, ISSN 2062-8269) ISBN: 9789639941595
9. **Várady, F.:** Az exponenciális függvény és alkalmazásai.
In: Informatika Didaktikai Kutatások 2013 : Programfüzet és absztraktok, Oradea, Románia, 2013.01.25-2013.01.27. Partiumi Keresztény Egyetem, Nagyvárad, 13, 2013.
10. **Várady, F.:** A folytonosság és differenciálhányados fogalmának megértése GeoGebra segítségével.
In: Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások 2012 : Programfüzet és absztraktok : Katolikus Egyetem Pedagógiai Kar, Juraj Páleš Intézet Lőcse-Levoča, Szlovákia 2012. január 20-22. Eds.: Ján Guncága, Herendiné Kónya Eszter, Katolikus Egyetem Pedagógiai Kar, Matematikai Tanszék, Levoča, 21-22, 2012.

Foreign language abstracts (2)

11. **Várady, F.:** The exponential function and its applications: In: E. Herendiné Kónya, E. Debrénti (Comp.): Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences January 25-27, 2013 Oradea, Romania.



Teach. Math. Comput. Sci. 11 (1), 138, 2013. ISSN: 1589-7389.

DOI: <http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2013.R020>

12. **Várady, F.**: The understanding of the meaning of continuous functions and differential through the support of the software GeoGebra: In: E. Herendiné Kónya (comp.): Report of Meeting Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences January 20 - January 22, 2012, Levocsa, Slovakia.

Teach. Math. Comput. Sci. 10 (1), 224, 2012. ISSN: 1589-7389.

DOI: <http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2012.R019>

The Candidate's publication data submitted to the IDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of Web of Science, Scopus and Journal Citation Report (Impact Factor) databases.

10 February, 2017



