



EFFEKTÍV EREDMÉNYEK
A SZUPERELLIPTIKUS
EGYENLETEK ELMÉLETÉBEN

EFFECTIVE RESULTS CONNECTED
WITH SUPERELLIPTIC EQUATIONS

doktori (PhD) értekezés tézisei

Pink István

Debreceni Egyetem,
Debrecen, 2006

1 BEVEZETÉS

A diofantikus egyenletek elméletében központi szerepet játszanak a kétismeretlenes polinomiális egyenletek és az exponenciális egyenletek. A kétismeretlenes egyenletek egy széles, és alkalmazások szempontjából rendkívül fontos osztályát képezik az

$$(1.1) \quad f(x) = wy^n$$

alakú ún. szuperelliptikus egyenletek, ahol $f(X)$ egész együtthatós polinom, $w \neq 0$ és $n \geq 2$ adott egészek, x, y pedig egész ismeretlenek. Mordell, Siegel és mások eredményei után LeVeque 1964-ben kritériumot adott (1.1) megoldásszámának a végeességére. Ez az eredmény azonban ineffektív abban az értelemben, hogy a bizonyítás nem szolgáltat semmilyen eljárást a megoldások megkeresésére. 1969-ben A. Baker elsőként adott effektív felső korlátot (1.1) megoldásaira abban az esetben, amikor az f polinomnak van legalább három egyszeres gyöke. Ezt később Brindza általánosította és LeVeque tételét effektivizálta. Mindkét effektív eredmény bizonyítása Baker nevezetes, mély módszerén, algebrai számok logaritmusainak lineáris kombinációira vonatkozó effektív becsléseken alapszik.

1976-ban Schinzel és Tijdeman [43] az (1.1) egyenletet abban az általánosabb esetben vizsgálták, amikor nem csupán x és y , hanem az n kitevő is ismeretlen, azaz (1.1) egy három ismeretlenes polinomiális-exponenciális egyenlet. Amennyiben $f(X)$ -nek nincs két különböző gyöke, úgy (1.1)-nek tetszőlegesen nagy n kitevő mellett is lehet megoldása. Feltéve, hogy $f(X)$ -nek van legalább két különböző gyöke, Schinzel és Tijdeman a Baker módszer felhasználásával egy csupán f -től és w -tól függő felső korlátot adtak n -re. Vizsgálataikhoz később igen sokan, közöttük Shorey, van der Poorten, Brindza, Evertse, Győry, Turk, Bugeaud, Bérczes, Hajdu, Pintér és Haristoy kapcsolódtak. Az n kitevőre különféle felső korlátok születtek, a w , az f fokszáma, valamint az f magassága, illetve diszkriminánsa függvényében. A nyert eredményeket kiterjesztették arra az esetre is, amikor (1.1)-ben f helyett egy $f(x, z)$ binér formát tekintünk egy újabb z ismeretlennel, illetve amikor f együtthatói, w és az x, y ismeretlenek egy \mathbf{Z} felett végesen generált integritástartomány elemei.

Értekezésünk egyik fő célkitűzése annak tisztázása, hogy az n -re nyert felső korlátokban meddig gyengíthető az f paramétereitől való függés. A 2. fejezetben f főpolinomok esetén megmutatjuk, hogy bizonyos természetes kivételektől eltekintve n -re adható olyan effektív felső korlát, mely csupán f fokszámától, $Q(w)$ -től és $Q(D_f)$ -től függ, ahol D_f az f maximális négyzetmentes

$\mathbf{Z}[X]$ -beli osztójának a diszkriminánása, $Q(a)$ pedig az $a \neq 0$ egész különböző prímosztóinak a szorzata (vagy másképpen a radikálja). Eredményünk már véglegesnek tekinthető abban az értelemben, hogy itt már mindegyik paramétertől való függés külön-külön szükséges, egyik paraméter sem hagyható el. A bizonyítás egyebek között egy önmagában is érdekes és fontos, az S -egységegyenletek és a binom Thue-Mahler egyenletek egy közös általánosítására vonatkozó effektív végességi tételünkön alapszik. A 3. és 4. fejezetben az f fokszáma és magassága, valamint w függvényében a korábbiaknál lényegesen pontosabb felső korlátokat nyerünk az (1.1)-ben szereplő n kitevőre. Ennek felhasználásával csupán w -től, valamint f fokszámától és magasságától függő alsó korlátot adunk az $|f(x) - wy^n|$ különbségre, feltéve hogy az x, y egészekre $f(x) \neq wy^n$. Végül az 5. fejezetben az (1.1) egyenlet összes megoldását meghatározzuk bizonyos másodfokú f polinomok esetén. A bizonyításaink során egyebek között felhasználjuk a Baker-módszer legújabb, legélesebb változatait.

Az alábbiakban röviden vázoljuk az egyes fejezetek legfontosabb eredményeit. Az egyszerűség kedvéért eredményeinket itt csupán egy-egy fontos speciális esetben mutatjuk be.

II

Legyen (1.1)-ben $f \in \mathbf{Z}[X]$ egy m -ed fokú főpolinom legalább két különböző gyökkel és $H(f)$ magassággal. Ha f összes gyökei különbözők, úgy D_f éppen az f $D(f)$ diszkriminánása. Fontos megjegyezni, hogy $|D_f|$ -hez illetve $|D(f)|$ -hez képest $H(f)$ tetszőlegesen nagy lehet.

Mint említettük, Schinzel és Tijdeman majd többen mások az (1.1)-ben szereplő n kitevőre csupán w -től, m -től és $H(f)$ -től függő effektív felső korlátot adtak. Abban az esetben, amikor (1.1)-ben f irreducibilis és $w = 1$, Brindza, Evertse és Győry [12] olyan korlátot nyertek az n kitevőre, mely csak m -től és $D(f)$ -től függ, de nem függ $H(f)$ -től. Újabban ezt az eredményt Haristoy [27] reducibilis főpolinomokra is kiterjesztette.

A 2. fejezetben a [12] és [27]-beli eredményeknek jelentős mértékű finomítását, pontosítását adjuk, mely bizonyos értelemben az ilyen irányú vizsgálatok lezárásának tekinthető. Legyenek p_1, \dots, p_s különböző prímek, legyen $Q = p_1 \cdots p_s$, és jelöljük S -sel azon egészek halmazát, melyek nem oszthatók p_1, \dots, p_s -től különböző prímszámmal. Tekintsük az (1.1) egyenletet abban az általánosabb esetben, amikor x, y, w, n valamennyien ismeretlen egészek az $|y| > 1$, $w \in S$, $n \geq 2$ és $D_f \in S$ tulajdonsággal. A 2.1 Tételünk - bizonyos (explicit módon leírt) kivételes esetektől eltekintve - n -re egy csupán m -től és Q -tól függő

effektív felső korlátot szolgáltat. Tehát a korábbi eredményekkel ellentétben az általunk nyert korlát már $D(f)$ -től sem függ, csupán $Q(D_f)$ -től (és persze m -től és $Q(w)$ -től). Itt az f paramétereitől való függés tovább már nem gyengíthető.

A 2.2 Tételünkben eredményünket kiterjesztjük az általánosabb,

$$(1.2) \quad F(x, z) = wy^n$$

alakú egyenletek esetére is, ahol $F \in \mathbf{Z}[X, Z]$ binér forma, $F(1, 0) = 1$, $F(X, 1)$ -nek van legalább két különböző gyöke, $D_F \in S$, x, z, w, y, n ismeretlenek az $|y| > 1$, $z \in S$, $w \in S$, $\text{lko}(x, z) = 1$, $n \geq 2$ tulajdonsággal. Tételünk lényegesen finomítja, pontosítja Shorey, van der Poorten, Tijdeman és Schinzel [45] egy (1.2)-re vonatkozó klasszikus tételét, melyben az n -re nyert korlát $Q(D_F)$ helyett az F magasságától függ.

A 2.1 és 2.2 Tételünk bizonyításában fontos szerepet játszik a binom Thue-Mahler egyenletekre vonatkozó, algebrai számtestek felett nyert 2.3 Tételünk. Az egyszerűség kedvéért itt csupán egy speciális esetben, \mathbf{Z} felett fogalmazzuk meg. Tekintsük az

$$(1.3) \quad ax^n - by^n = c$$

egyenletet, ahol a, b, c, x, y, n egész ismeretlenek, $a, b, c \in S$, $|xy| > 1$ és $n \geq 3$. Továbbá feltehető, hogy $\text{lko}(ax^n, by^n, c) = 1$. Megjegyezzük, hogy $x = y = 1$ esetén (1.3) éppen egy S -egységegyenlet, míg rögzített a, b mellett (1.3) egy ismeretlen fokszámú binom Thue-Mahler egyenlet. Számos korábbi, S -egységegyenletekre illetve binom Thue-Mahler egyenletekre vonatkozó effektív végességi tétel közös általánosításaként egy csupán Q -tól függő effektív felső korlátot adunk n -re, amiből következik, hogy (1.3)-nak csak véges sok és effektíve meghatározható megoldása van.

A fejezet eredményeit a [25] dolgozatban publikáltuk.

III

A 3.fejezet 3.1 Tételében olyan explicit felső korlátot adunk az (1.1)-ben szereplő n kitevőre, mely w -től, valamint $m = \deg f$ -től és $H(f)$ -től függ. Eredményünk javítja és minden paraméter függvényében explicitté teszi a Bérczes, Brindza és Hajdutól [9] származó, eddig ismert legjobb felső korlátot. Ennek felhasználásával $f(x) \neq wy^n$ esetén explicit alsó korlátot nyerünk $|f(x) - wy^n|$ -re, ahol x, y, w, n egészek, $w \neq 0$, $|y| > 1$ és $n \geq 3$. Bizonyos természetes kivételektől eltekintve a 3.2 és 3.3 Tételeinkben w, m és $H(f)$ -től, valamint n -től illetve $|f(x)|$ -től függő alsó korlátot vezetünk le a tekin-

tett különbségre. Eredményeink általánosítják Bugeaud és Hajdunak [17] az $f(x) = ax^m$ speciális esetben nyert becsléseit.

A 3. fejezet eredményei a [39] cikkünkben kerültek publikálásra.

IV

A 4. fejezetben a másodfokú $f(X)$ főpolinomok esetével foglalkozunk. Ebben az esetben az (1.1) egyenletnek rendkívül kiterjedt irodalma van; a 4. fejezetben áttekintést adunk a korábbi eredményekről.

A 4.1 Tételben az általános 2.1 Tételünk egy éles, explicit változatát adjuk $w = 2$ -re és az

$$f(X) = X^2 + (p_1^{z_1} \dots p_s^{z_s})^2$$

alakú polinomokra, ahol p_1, \dots, p_s adott prímek, z_1, \dots, z_s pedig ismeretlen nemnegatív egészek. Egyben általánosítjuk a szerző és Tengely [42], [47] korábbi idevágó eredményeit. Bizonyos kivételes egyenlet családtól eltekintve a 4.2 Tételünkben az $f(X) = X^2 + AX + B$, $w = 1$, a 4.3 Tételünkben az $f(X) = X^2 + D$, $w \in \{1, 4\}$ esetben nyerünk éles korlátokat az (1.1)-ben szereplő n kitevőre.

A 4. fejezet eredményeit a [40] és [41] dolgozatokban közöltük.

V

Az 5. fejezetben az (1.1) egyenletet abban az esetben vizsgáljuk, amikor $w = 1$ és

$$f(X) = X^2 + 2^{z_1} 3^{z_2} 5^{z_3} 7^{z_4},$$

ahol z_1, z_2, z_3, z_4 nemnegatív egész ismeretlenek. A 4.3 Tételünket Cohn és de Weger bizonyos eredményeivel kombinálva, az 5.1 Tételben a tekintett f és w mellett az (1.1) egyenlet összes olyan $x, y, n, z_1, z_2, z_3, z_4$ megoldását meghatározzuk, melyekben $z_1 \geq 1$. Ezzel általánosítjuk Luca [31] egy újabb eredményét, mely a $z_3 = z_4 = 0$ esetre vonatkozik.

A fejezet eredményeit a [41] cikkünkben publikáltuk.

Végül megjegyezzük, hogy mivel az egyes fejezetek eredményei külön álló cikkekben lettek publikálva s mivel disszertációnkban a cikkek eredeti szerkezeti felépítését követjük, ezért helyenként előfordul, hogy egyes lemmák más és más változatait használjuk a különböző fejezetekben.

2 POLINOMOK HATVÁNYÉRTÉKEI ÉS BINOM THUE-MAHLER EGYENLETEK

A fejezet eredményeinek ismertetéséhez legyen f egy legalább két különböző gyökkel rendelkező egész együtthatós polinom és legyen w egy nemnulla egész szám. Schinzel és Tijdeman [43] bebizonyították, hogy ha az

$$(2.1) \quad f(x) = wy^n$$

egyenlet fennáll valamilyen ismeretlen x , $|y| > 1$ és $n \geq 2$ egészekre, akkor n -re egy, csak f -től és w -től függő, effektív felső korlát adható. Később sokan nyer-felső korlátot n -re, mely csak w -től valamint f magasságától és fokszámától függ (lásd a [46], [13], [49], [11], [14], [9], [39] munkákat és az ott előforduló hivatkozásokat). Az említett eredmények közül egyeseket arra az általánosabb esetre is kiterjesztették, amikor f együtthatói valamilyen algebrai számtest egészei és/vagy w különböző prímosztói fixek.

Amikor (2.1)-ben f irreducibilis főpolinom és $w = 1$, Brindza, Evertse és Győry [12] olyan korlátot adtak az n kitevőre, mely csak az f fokszámától és diszkriminánsától, $D(f)$ -től függ. Nem régen Haristoy [27] általánosította ezt az eredményt tetszőleges főpolinomokra valamint arra az esetre, amikor f együtthatói valamely algebrai számtest egészei.

Ebben a fejezetben egyebek között bebizonyítjuk, hogy ha f egész együtthatós főpolinom 0 -tól különböző diszkriminánssal, és x, y, w ismeretlen egészek, akkor néhány kivételes esettől eltekintve a (2.1) egyenletben n -re egy, csak f fokszámától valamint w és $D(f)$ különböző prímosztóitól függő, effektív felső korlát adható. Eredményünk már végleges abban az értelemben, hogy az említett paraméterektől való függés már tovább nem gyengíthető.

Állításunkat általánosabb formában, tetszőleges algebrai számtest felett bizonyítjuk. Szükségünk lesz az alábbi jelölésekre: Legyen \mathbf{K} egy d -ed fokú algebrai számtest és jelölje $O_{\mathbf{K}}$ az egészek gyűrűjét, $O_{\mathbf{K}}^*$ pedig az $O_{\mathbf{K}}$ egységeinek a csoportját. Legyenek továbbá $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ ($s \geq 0$) $O_{\mathbf{K}}$ különböző prímeideáljai és jelölje S azon $\alpha \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}$ egészek halmazát, amelyre az (α) ideál prímeideál osztói az adott $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ ideálok közül kerülnek ki. Továbbá legyen

$$Q = \begin{cases} N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s), & \text{ha } s > 0, \\ 1, & \text{ha } s = 0. \end{cases}$$

Legyen a (2.1) egyenletben $f \in O_{\mathbf{K}}[X]$ egy m -ed fokú $k \geq 2$ különböző gyökkel rendelkező főpolinom. Jelölje \mathbf{L} a \mathbf{K} felbontási testét és legyen D_f az

f maximális fokszámú négyzetmentes $O_{\mathbf{K}}[X]$ -beli osztójának a diszkriminánsa. Tegyük fel, hogy $D_f \in S$. Tekintsük a (2.1) egyenletet x, y, w, n -ben, ahol $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}, w \in S$ és $n \geq 2$ egész.

Könnyen látható, hogy ha $y \in O_{\mathbf{K}}^*$, akkor n tetszőlegesen nagy lehet. Továbbá, ha

$$(2.2) \quad f(X) = u^m f'(u^{-1}(X + a))$$

alakú, ahol $a \in O_{\mathbf{K}}, u \in S, f' \in O_{\mathbf{K}}[X]$ és $x + a = u = v^n$ teljesül valamilyen $v \in S$ esetén, akkor $y = v^m$ megoldása (2.1)-nek, feltéve hogy $f'(1) \in S$. Ekkor $D_{f'} \in S$ és $u \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$ esetén $y \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$ is teljesül és ezért n tetszőlegesen nagy lehet m, k, Q -hoz és \mathbf{L} paramétereikhez képest. Az f -et *redukált*-nak nevezzük, ha (2.2) nem áll fenn semmilyen a, f' és $u \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$ esetén. A fenti eset kizárható, ha $y \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$ esetén f -ről feltesszük, hogy redukált. Jelölje $D_{\mathbf{L}}$ az \mathbf{L} diszkriminánsát.

2.1. Tétel *Legyen $x, y \neq 0, w, n$ a (2.1) egyenlet olyan megoldása, amelyre $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus O_{\mathbf{K}}^*, w \in S$ és $n \geq 2$. Ha $y \notin S$ vagy $y \in S$ és f redukált, akkor*

$$(2.3) \quad n \leq c_1 Q^{c_2},$$

teljesül, ahol c_1 és c_2 csak m, k, d és $D_{\mathbf{L}}$ -től függő effektív konstansok.

Megjegyezzük, hogy abban az esetben, ha y -nak van egy nagy normájú prímeál osztója vagy $y \in S$ és f redukált, a fenti Tétel bizonyításából sokkal jobb korlát adódik n -re. Továbbá, mivel $D_f \in S$, egyszerűen látható, hogy

$$(2.4) \quad |D_{\mathbf{L}}| \leq c_3 Q^{c_4},$$

ahol c_3 és c_4 csak k, d és $D_{\mathbf{K}}$ -től függő effektív konstansok. Itt $D_{\mathbf{K}}$ a \mathbf{K} diszkriminánsát jelöli. A c_3 és c_4 konstansok explicit módon is megadhatók (lásd 2.5 Megjegyzést a 2.2 Tétel bizonyítása után). Ezért, (2.4)-et a 2.1 Tétellel kombinálva látható, hogy n -re egy olyan korlát is nyerhető, amely csak $m, k, d, D_{\mathbf{K}}$ és Q -tól függ. Az így kapott korlát összehasonlítható [27] 2.2 Tételéből származó becslésekkel, ahol azonban az n -re adott korlát magától D_f -től is függ.

Shorey, van der Poorten, Tijdeman és Schinzel [45] általánosították Schinzel és Tijdeman [43] (2.1) egyenletre vonatkozó eredményeit az

$$(2.5) \quad F(x, z) = wy^n,$$

egyenletre, ahol $F \in \mathbf{Z}[X, Y]$ egy $\overline{\mathbf{Q}}$ fölött legalább két különböző lineáris faktorral rendelkező binér forma, amelyre $F(1, 0) \neq 0$. Továbbá feltételezték, hogy $\text{lko}(x, z)$ korlátos és z, w csak adott, véges sok különböző prímmel osztható. Az $F(1, 0) = 1$ esetben a fenti eredményt [46]-ben Shorey és Tijdeman kiterjesztették algebrai számtestek esetére. Nem régen Haristoy [27] az említett eredmény explicit verzióját adta, ahol azonban az n -re adott korlát az F magasságától is függ.

Az alábbiakban általánosítjuk a 2.1 Tételt. Legyen $F(X, Z)$ egy $O_{\mathbf{K}}$ -beli együtthatókkal rendelkező egy főegyütthatós m -ed fokú binér forma. Tegyük fel, hogy $F(X, 1)$ -nek $k \geq 2$ különböző gyöke van. Jelölje D_F az $F(X, 1) \in O_{\mathbf{K}}[X]$ maximális fokszámú négyzetmentes osztójának a diszkriminánsát és tegyük fel, hogy $D_F \in S$. Legyen továbbá \mathbf{L} az F \mathbf{K} feletti felbontási teste és legyen $D_{\mathbf{L}}$ az \mathbf{L} diszkriminánsa. Tekintsük a (2.5) egyenletet, ahol $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}, z, w \in S, n \geq 2$ ismeretlenek.

Nyilván elegendő az $y \notin O_{\mathbf{K}}^*$ esettel foglalkozni, hiszen különben n tetszőlegesen nagy lehet. Ha $F(1, 1) \in S$, akkor $x = z = v^n, y = v^m$ nyilván megoldása (2.5)-nek minden $v \in S$ és n esetén, ezért n -re nem adható felső korlát. Hasonlóan, ha

$$(2.6) \quad F(X, Z) = F'(X + aZ, uZ),$$

ahol $a \in O_{\mathbf{K}}, u \in S, F' \in O_{\mathbf{K}}[X, Z]$ és $F'(1, 1) \in S$, akkor $D_{F'} \in S$ és $z = 1, x + a = u = v^n, y = v^m$ a (2.5) egyenlet egy megoldását adják bármely $v \in S$ -re, ezért n -re nem adható csak $m, k, d, D_{\mathbf{L}}$ és Q -tól függő felső korlát.

A fenti két esettől eltekintve n -re a 2.1 Tételhez hasonló korlát adható. Az F -et *redukált*-nak nevezzük, ha (2.6) nem teljesül semmilyen a, F' és $u \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$ esetén. Az alábbi Tételnek a 2.1 Tétel speciális este a $z = 1$ és $\mu = 0$ választással.

2.2. Tétel *Ha $x, y \neq 0, z, w, n$ a (2.5) egyenlet egy megoldása, ahol $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus O_{\mathbf{K}}^*, z \in S, w \in S$ és $n \geq 2$, akkor*

$$(2.7) \quad n \leq c_5 Q^{c_6} + \mu c_7 \log Q,$$

ahol $\mu = 0$, ha $y \notin S$, és

$$(2.8) \quad \text{ord}_{\mathbf{p}_i}((x, z)) \leq \mu, \quad i = 1, \dots, s,$$

ha $y \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$ és F redukált.

A (2.7)-ben szereplő felső korlátban a $D_{\mathbf{L}}$ -től való függés a (2.4) felhasználásával kiküszöbölhető.

Binom Thue-Mahler egyenletek. Tekintsük az

$$(2.9) \quad ax^n - by^n = c,$$

egyenletet, ahol a és b $O_{\mathbf{K}}$ adott nemnulla elemei és $x, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}, c \in S, n \geq 3$ ismeretlenek. Ismert, hogy $ax^n + by^n, n = 0, 1, 2, \dots$, egy speciális binér rekurzív sorozatnak is tekinthető. Az irodalomban sok szerző foglalkozott a (2.9) egyenlettel és adott csak a, b és S -től függő korlátot n -re (lásd [46] [52] [16] valamint az itt előforduló hivatkozásokat).

A 2.2 Tétel bizonyításához szükségünk lesz arra az általánosításra, amikor (2.9)-ben a és b S -beli ismeretlenek. Jelölje h és R a \mathbf{K} test ideálosztályszámát illetve regulátorát.

2.3. Tétel *Legyen $a, b, c \in S, x, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}, n \geq 3$ a (2.9) egyenlet egy megoldása és tegyük fel, hogy az x és y közül legalább az egyik nincs $O_{\mathbf{K}}^*$ -ban. Ekkor létezik egy csak d, h és R -től függő effektív pozitív c_8 konstans, amellyel*

$$(2.10) \quad n \leq c_8 Q^{3h} + \nu \log Q,$$

ahol $\nu = 0$, ha $x \notin S$ vagy $y \notin S$, és

$$(2.11) \quad \text{ord}_{\mathfrak{p}_i}((ax^n, by^n, c)) \leq \nu, \quad i = 1, \dots, s$$

különben.

Egyszerűen belátható, hogy az $x, y \in S$ esetben a (2.11) feltétel szükséges.

Megjegyezzük, hogy a 2.3 Tétel bizonyításából lényegesen jobb korlát adódik n -re az alábbi speciális esetekben: $x, y \in S$; x vagy y -nak van egy nagy normájú prímeál osztója vagy $c \in O_{\mathbf{K}}^*$. Az ezekben a speciális esetekben adódó jobb korlátok egyben javítják az n -re adott korlátot az 2.1 és 2.2 Tételben a megfelelő esetekben.

Abban az esetben, ha $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ a 2.3 Tételből adódik, hogy ha a, b, x, y, n olyan nemnulla racionális egészek, amelyekre $|xy| > 1, n \geq 3$ és xy -nak van olyan prímosztója, amelyik nem osztója $ab(ax^n - by^n)$ -nek, akkor $Q(ax^n - by^n)$ -re az alábbi becslés adható :

$$(2.12) \quad |ax^n - by^n| \geq Q(ax^n - by^n) \geq (c_9/Q(ab))n^{1/3},$$

ahol $Q(ax^n - by^n)$ illetve $Q(ab)$ jelölik az $ax^n - by^n$ illetve ab különböző prímosztóinak a szorzatát, valamint c_9 egy effektív abszolút konstans. Összehasonlítva a 2.3 Tételt és (2.12)-t Yu és Hung [52] 2. Tételével láthatjuk,

hogy [52]-ben az n -től való függés jobb, viszont a $Q(ax^n - by^n)$ -re adott alsó becslés nem csak $Q(ab)$ -től, hanem maguktól az a és b -től is függ.

2.1.Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy a fenti c_1 - c_9 konstansok explicit formában is kifejezhetők, felhasználva a bizonyításokban szereplő explicit becsléseket valamint az 2.1-2.8 Lemmák explicit verzióit.

2.2.Megjegyzés. A 2.3 Tétel bizonyításában - egyéb eredmények mellett - felhasználjuk Matveev [32] és Yu [51] lineáris formákra vonatkozó új becsléseit valamint Győry és Yu [26] S-egység egyenletekre vonatkozó új eredményét. A 2.2 Tételt a 2.3 Tételből vezetjük le, ahol felhasználjuk Győry [24] S-beli diszkriminánssal rendelkező binér formákra vonatkozó effektív eredményét. Megjegyezzük, hogy a 2.1 és 2.2 Tétel bizonyítható - más korlátokkal - a 2.3 Tétel felhasználása nélkül is.

3 POLINOMOK ÉRTÉKEI ÉS TELJES HATVÁNYOK KÖZÖTTI KÜLÖNBSÉGEK

Legyenek a, w, x, y, n, m olyan nemnulla racionális egészek, amelyekre $n, m \geq 2$, $|y| \geq 2$ és $ax^m \neq wy^n$. Tekintsük az $|ax^m - wy^n|$ különbséget. Turk [49] volt az első, aki a fenti különbségre x és y -től független explicit alsó korlátot adott az $a = w = 1$ esetben. Ha a és w tetszőlegesen rögzített nemnulla egészek, Shorey [44] eredményéből levezethető egy - csak a, w, m, n -től függő - effektív alsó korlát. Ez a korlát nem teljesen explicit. Később Bugeaud [14] lényegesen megjavította Turk $|x^m - y^n|$ -re adott alsó becslését. Nem régen Bugeaud és Hajdu [17] megjavította és kiterjesztette Bugeaud fenti eredményét tetszőlegesen rögzített a és w esetére.

Ebben a fejezetben általánosítjuk Bugeaud és Hajdu [17] eredményét $|F(x) - wy^n|$ alakú különbségekre, ahol $F \in \mathbf{Z}[X]$ egy $m \geq 2$ fokú polinom. Az F polinomra tett bizonyos természetes feltételek mellett explicit alsó korlátot adunk az $|F(x) - wy^n|$ különbségre (lásd a 3.2 Tételt). Eredményünket a 3.1 Tételünkéből vezetjük le, amely az

$$(3.1) \quad f(x) = wy^n$$

szuperelliptikus egyenlettel foglalkozik, ahol x, y és n ismeretlen egészek, az $|y| \geq 2, n \geq 2$ tulajdonsággal. A 3.1 Tételben az n kitevőre nyerünk teljesen explicit, csak w -től és f magasságától függő felső korlátot.

Mint már említettük, Tijdeman [48] illetve Schinzel és Tijdeman [43] bizonyították be először, hogy a (3.1) egyenletben n -re egy csak w -től és f -től függő effektív felső korlát adható. Később sokan nyertek effektív, de nem teljesen explicit korlátokat n -re; lásd [11], [12], [9] és az itt előforduló hivatkozásokat. A 3.1 Tételünk némileg megjavítja és minden paraméterében explicitté teszi az n -re korábban ismert legjobb felső korlátot (lásd [9]). A 3.1 Tétel bizonyításában Brindza, Evertse és Győry [12] módszerét követjük, akik az n -re csupán az f fokszámától és diszkriminánsától függő felső korlátot adtak.

A továbbiakban bevezetjük a szükséges jelöléseket. Minden s pozitív valós számra legyen $\log_* s = \max\{1, \log s\}$. Ha

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m = a_0 \prod_{i=1}^m (x - \alpha_i), \quad a_0 \neq 0,$$

egy egész együtthatós polinom, úgy jelölje

$$H(f) = \max_{0 \leq i \leq m} |a_i| \quad \text{és} \quad M(f) = |a_0| \prod_{i=1}^m \max(1, |\alpha_i|)$$

az f polinom "klasszikus" illetve Mahler-magasságát.

3.1. Tétel *Legyen $f(X) \in \mathbf{Z}[X]$ egy $m \geq 2$ fokú polinom és legyen w egy adott nemnulla egész szám. Tekintsük a (3.1) egyenletet, ahol az ismeretlenek $x, y, n \in \mathbf{Z}$, amelyekre $|y| \geq 2, n \geq 2$. Ha f -nek van legalább két különböző gyöke, akkor*

$$n \leq 2^{24m+56} m^{7m+17} M(f)^{3m-3} (\log_* M(f))^{3m} (\log_* |w|)^{\frac{5}{2}}.$$

Ahogy már emítettük, a 3.1 Tételünk némileg megjavítja és minden paraméterében explicitte teszi az n -re [9] -ben adott felső korlátot. Abban a speciális esetben, amikor $f(x) = ax^m + c$ alakú Bugeaud és Hajdu [17] a 3.1 Tételhez hasonló felső korlátot nyertek n -re.

Az alábbi tétel a 3.1 Tételünk következménye.

3.2. Tétel *Legyen $F(X) \in \mathbf{Z}[X]$ egy $m \geq 2$ fokú polinom és legyenek w, x, y, n olyan racionális egészek, amelyekre $w \neq 0, n \geq 2, |y| \geq 2$. Tegyük fel, hogy $F(x) \neq wy^n$, és ha $F(X) = t_1(X - t_2)^m + t_3$ alakú valamilyen $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{Z}$ esetén, akkor tételezzük még fel, hogy $F(x) \neq wy^n + t_3$ is fennáll. Ekkor*

$$(3.2) \quad |F(x) - wy^n| \geq n^{\frac{1}{3m}} 2^{-8 - \frac{56}{3m}} m^{-\frac{23}{6} - \frac{17}{3m}} \left(H(F) \log_*^{\frac{5}{6m}} |w| \right)^{-1}.$$

Megjegyezzük, hogy a 3.2 Tételben az $|F(x) - wy^n|$ -re adott alsó becslésben az F polinom $H(F)$ klasszikus magassága szerepel az $M(F)$ Mahler-magasság helyett. Az ok nyilvánvaló (lásd a 3.2 Tétel bizonyítását), hiszen $H(F - k) \leq H(F) + k$ teljesül tetszőleges $k \in \mathbf{Z}$ esetén míg $M(F)$ nem rendelkezik hasonló jó tulajdonsággal.

Bugeaud és Hajdu [17] dolgozatához hasonlóan, a 3.2 Tételt egy a szupereliptikus egyenlet megoldásaira adott felső becsléssel kombinálva alsó korlátot nyerünk az $|F(x) - wy^n|$ különbségre $|F(x)|$ függvényében.

3.3. Tétel *Legyen $F(X) \in \mathbf{Z}[X]$ egy $m \geq 2$ fokú polinom és legyenek w, x, y, n olyan racionális egészek, amelyekre $w \neq 0, n \geq 3, |y| \geq 2$. Tegyük fel, hogy $F(x) \neq wy^n$, és ha $F(X) = t_1(X - t_2)^m + t_3$ alakú valamilyen $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{Z}$ esetén, akkor tételezzük még fel, hogy $F(x) \neq wy^n + t_3$ is fennáll. Ekkor*

$$(3.3) \quad |F(x) - wy^n| \geq c_1 m^{-\frac{23}{6}} H(F)^{-1} (\log_* |w|)^{-\frac{4}{3m+1}} (\log_* \log_* |F(x)|)^{\frac{1}{3m+1}},$$

ahol c_1 egy effektív abszolút konstans.

A 3.2 Tételünk általánosítása a Bugeaud és Hajdu [17] által nyert

$$|ax^m - wy^n| \geq n^{2/5m} (20m)^{-2-11/m} \left(|a| \log_*^{\frac{1}{m}} |b| \right)^{-1}$$

becslésnek. Hasonlóan a 3.3 Tétel kiterjesztése Bugeaud és Hajdu [17] 2. Tételének. A (3.2) -ben szereplő alsó korlát az $F(x) = ax^m$ speciális esetben hasonló erősségű mint [17] -ban, eltekinve az n kitevőjétől. Ennek az az oka, hogy $D(ax^m + k) \leq c_2 |k|^m$, míg általános esetben csak $D(F(x) + k) \leq c_3 |k|^{2m}$ érvényes. Itt $D(g(x))$ egy $g \in \mathbf{Z}[X]$ polinom diszkriminánsát, míg c_2 és c_3 csak a, m és F -től függő effektív konstansokat jelölnek.

4 MÁSODFOKÚ POLINOMOK HATVÁNYÉRTÉKEI

Legyen $S = \{p_1, \dots, p_s\}$ különböző racionális prímelek egy halmaza és legyen

$$S = \{m \in \mathbf{Z} \mid m = \pm p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s}, z_i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, (1 \leq i \leq s)\}.$$

Jelölje továbbá P illetve Q az S -beli prímelek maximumát illetve szorzatát.

Ebben a fejezetben az

$$(4.1) \quad x^2 + D = wy^n$$

egyenlettel foglalkozunk, ahol w adott pozitív egész, az x, y, n, D ismeretlenek pedig olyan pozitív egészek, amelyekre $n \geq 3$, $y > 1$, $D \in S$ és $\text{lnko}(x, y) = 1$. Célunk, hogy w -re és D -re tett bizonyos feltételek mellett jó korlátot nyerjünk (4.1)-ben az n kitevőre, amely korlát csak P -től és s -től vagy P -től és Q -től függ.

Tekintsük először azt az esetet, amikor a (4.1) egyenletben a $w = 1$ és D adott pozitív egész. Ekkor az első eredmény Lebesque [28] nevéhez fűződik, aki bebizonyította, hogy (4.1)-nek $D = 1$ esetén nincs megoldása. Később Ljunggren [29] $D = 2$ esetén, míg Nagell [37], [38] $D \in \{3, 4, 5\}$ esetekben teljesen megoldotta a (4.1) egyenletet. Cohn [21] áttekintő munkájában összefoglalta a (4.1) egyenlettel kapcsolatos addigi eredményeket, sőt egy módszert dolgozott ki, amelynek segítségével $D \leq 100$ esetén a (4.1) összes megoldását meghatározta D 77 különböző értéke esetén. A $D = 74$ és $D = 86$ esetekben Mignotte és de Weger [34] adta meg a (4.1) egyenlet összes megoldását. Később Bennett és Skinner [8] felhasználva a moduláris formák és Galois reprezentációk elméletét teljesen megoldották (4.1)-et a $D = 55$ illetve $D = 95$ esetben. Nem régen Bugeaud, Mignotte és Siksek [19] új ötleteket felhasználva, valamint a Baker-módszert az előbb említett Bennett és Skinner által alkalmazott módszerrel kombinálva, a (4.1) egyenlet összes megoldását meghatározták $D \leq 100$ fennmaradó 19 értéke esetén. Abban az esetben, amikor a (4.1) egyenletben $w \in \{1, 4\}$ és D páratlan pozitív négyzetmentes egész Bugeaud és Shorey [18] felhasználva Bilu, Hanrot és Voutier [10] módszerét teljesen megoldották (4.1)-et abban az esetben, amikor $n \geq 3$ olyan páratlan prím, amely nem osztja a $\mathbf{Q}(\sqrt{-D})$ ideálosztályszámát és $D \not\equiv 7 \pmod{8}$, ha $w = 1$ (lásd a [18]-ben szereplő 3., 5. és 7. Következmenyt).

Tekintsük most azt az esetet, amikor a (4.1) egyenletben D is ismeretlen, pontosabban D olyan pozitív egész, amelyre $D \in S$. Ebben az esetben is nagyon

sok eredmény található a (4.1) egyenlettel kapcsolatban (lásd pl. az [1] - [7], [15], [16], [20], [22], [30], [31], [33], [35], [36] munkákat, valamint az ott előforduló hivatkozásokat). Shorey, van der Poorten, Tijdeman és Schinzel [45] illetve Győry, Pink és Pintér [25] - a 2. Fejezetben ismertetett - eredményeiből adódik, hogy (4.1)-ben n -re egy csak P -től és s -től illetve csak Q -tól függő effektív felső korlát adható. Ezek a korlátok azonban nagyok és nincsenek teljesen explicit módon megadva. A fent felsorolt dolgozatokban egyrészt a Baker-módszer komplex és p -adikus változatát, másrészt Bilu, Hanrot és Voutier [10] rekurzív sorozatokra vonatkozó eredményét használták. Nevezetesen, a [15] illetve [16] cikkekben a szerzők a kétváltozós Baker-módszer komplex és p -adikus változatát kombinálva teljesen explicit, csak P -től és s -től függő korlátokat nyertek (4.1) típusú egyenletekben az n kitevőre. Felhasználva Bilu, Hanrot és Voutier [10] már említett eredményét, lehetőség nyílt (4.1) típusú egyenletek teljes megoldására, amikor $w = 1$ valamint az S konkrét adott prímek halmaza. Cohn [20] illetve Arif és Muriefah [1], [6] az $S = \{2\}$, míg Arif és Muriefah [3] valamint Luca [30] az $S = \{3\}$ esetekben adták meg (4.1) összes megoldását. Ha $q \geq 5$ egy olyan páratlan prím, amelyre $\text{lko}(n, 3h_0) = 1$, ahol h_0 jelöli a $\mathbf{Q}(\sqrt{-q})$ ideálosztályszámát, Arif és Muriefah [7] teljesen megoldották az $x^2 + q^{2k+1} = y^n$ egyenletet. Az $S = \{2, 3\}$ esetben Luca [31] adta meg a (4.1) egyenlet összes megoldását.

Abban az esetben, amikor a (4.1) egyenletben $(w, D) = (2, a^2)$, ahol a adott pozitív egész, Pink és Tengely [42] vizsgálták az

$$(4.2) \quad x^2 + a^2 = 2y^n$$

egyenletet, ahol az x, y, n ismeretlenek olyan pozitív egészek, amelyekre $n \geq 3$, $\text{lko}(x, y) = 1$, és egy, csak a -tól függő, explicit felső korlátot adtak n -re. Ha n páratlan prím a fenti eredményt Tengely [47] -ban megjavította.

Ebben a fejezetben általánosítjuk a [42] és [47]-beli eredményeket arra az esetre, amikor $(w, D) = (2, a^2)$, ahol a olyan pozitív egész, amelyre $a \in \mathcal{S}$. Ekkor a nem fix, hanem $a = p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s}$ alakú, ahol p_1, \dots, p_s különböző racionális prímek, z_1, \dots, z_s pedig ismeretlen nemnegatív egészek. A (4.2) egyenlet általánosításaként tekintsük az

$$(4.3) \quad x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$$

egyenletet, ahol az ismeretlenek x, y, n, z_i ($1 \leq i \leq s$), amelyekre $n \geq 3$, $\text{lko}(x, y) = 1$ valamint $z_1, \dots, z_s \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ teljesül. Nyilvánvaló, hogy

$x = y = 1, z_1 = \dots = z_s = 0$ mindig megoldása (4.3)-nak, amit *triviális* megoldásnak fogunk nevezni. Győry, Pink és Pintér [25] a 2. fejezetben ismertetett eredményeiből adódik, hogy (4.3)-ban az n kitevőre egy csak P, s illetve Q -tól függő korlát adható. Ezek a korlátok azonban nagyok és nincsenek teljesen explicit módon megadva. A jelenleg ismert legjobb kétváltozós Baker-típusú becslés komplex és p -adikus változatát kombinálva, általánosítjuk a [42] -ben és [47] -ben a (4.2) és (4.3) egyenletekkel kapcsolatos eredményeket és teljesen explicit korlátot adunk a (4.3)-ban szereplő n -re.

4.1. Tétel *Tekintsük a (4.3) egyenletet és tegyük fel, hogy n páratlan. Ekkor (4.3) minden nem triviális megoldása esetén*

$$n \leq 90813, \text{ ha } (P, s) = (3, 1),$$

és

$$n < 5371sP(P+1) \log P$$

különben.

A fejezet további eredményeinek ismertetéséhez szükségünk lesz néhány jelölésre és elnevezésre. Legyen $f(x) = x^2 + Ax + B$ egy másodfokú egész együtthatós polinom, és jelölje D_f az f diszkriminánsát. Legyen

$$D = \begin{cases} -\frac{D_f}{4}, & \text{ha } D_f \text{ is páros,} \\ -D_f, & \text{ha } D_f \text{ is páratlan.} \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy $D \in \mathcal{S}$ és $D > 0$. Legyenek c és d olyan pozitív egészek, amelyekre $D = dc^2$, ahol d jelöli a D négyzetmentes részét. Továbbá, $k \in \mathbf{Z}$ és p prím esetén jelölje $\text{ord}_p(k)$ p -nek azt a legmagasabb hatványát, amellyel k osztható.

Tekintsük az

$$(4.4) \quad f(x) = y^n$$

egyenletet, ahol az x, y, n ismeretlenek olyan egészek, amelyekre $y > 1$ és $n \geq 3$ prím. Azt mondjuk, hogy a (4.4) egyenlet egy (x, y, n) megoldása *kivételes*, ha

$$\text{ord}_2(D_f) = 2, \text{ } y \text{ páros és } d \equiv 7 \pmod{8}.$$

Legyen h a $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ test ideálosztályszáma és jelölje $h(-4D)$ a $-4D$ diszkriminánsú pozitív binér kvadratikus formák ekvivalencia osztályainak a számát (a $h(-4D)$ definícióját lásd a 4.3 alfejezetben).

4.2. Tétel Ha (x, y, n) a (4.4) egyenlet egy olyan nem kivételes megoldása, amelyre $x \neq -\frac{A}{2}$ és $\text{luko}(y, D) = 1$, akkor eltekintve az

$$x^2 + Ax + B = y^n$$

végtelen egyenlet családtól, ahol

$$(A, B, x, y, D, n) \in \left\{ \begin{array}{l} (A, (A^2 + 7)/4, (11 - A)/2, 2, 7, 5), \\ (A, (A^2 + 7)/4, (181 - A)/2, 2, 7, 13), \\ (A, (A^2 + 11)/4, (31 - A)/2, 3, 11, 5), \\ (A, (A^2 + 19)/4, (559 - A)/2, 5, 19, 7) \end{array} \right\}$$

ha A páratlan, és

$$(A, B, x, y, D, n) \in \left\{ \begin{array}{l} (A, (A^2 + 76)/4, (44868 - A)/2, 55, 19, 5), \\ (A, (A^2 + 1364)/4, (5519292 - A)/2, 377, 341, 5) \end{array} \right\}$$

ha A páros, akkor

$$n = 3 \quad \text{vagy} \quad n \mid h(-4D).$$

Továbbá, az utóbbi esetben

$$n \leq \max\{3, P\}, \quad \text{ha} \quad n \nmid h$$

és

$$n < \frac{4}{\pi} \sqrt{Q} \log(2e\sqrt{Q}), \quad \text{ha} \quad n \mid h.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti Tételben az $x \neq -\frac{A}{2}$ feltétel szükséges. Ha ugyanis $x = -\frac{A}{2}$ teljesülne a (4.4) egyenletben, akkor páros D_f esetén az

$$y^n = D$$

egyenletet kapnánk. Ekkor viszont $D \in \mathcal{S}$ miatt n -re nem nyerhető felső korlát (4.4)-ben.

Látható, hogy megfelelő helyettesítéssel a (4.4) egyenlet visszavezethető egy (4.1) típusú egyenletre, nevezetesen az

$$(4.5) \quad X^2 + D = wY^n$$

egyenletet nyerjük, ahol $w \in \{1, 4\}$ és

$$(4.6) \quad \text{luko}(X, Y) = \text{luko}(Y, D) = 1,$$

valamint

$$(4.7) \quad \begin{cases} w = 1, \text{ ha } D_f \text{ páros, } w = 4, \text{ ha } D_f \text{ páratlan,} \\ D \in \mathcal{S}, D > 0, X \geq 1, Y > 1, n \geq 3 \text{ prím.} \end{cases}$$

A 4.2 Tételünk az alábbi 4.3 Tétel következménye. Azt mondjuk, hogy a (4.5) egyenlet egy (X, Y, n) megoldása *kivételes*, ha

$$w = 1, \text{ ord}_2(D_f) = 2, Y \text{ páros és } d \equiv 7 \pmod{8}.$$

4.3. Tétel *Tekintsük a (4.5) egyenletet, amelyre teljesülnek a (4.6) és (4.7) feltételek. Ha (X, Y, n) a (4.5) egy nem kivételes megoldása, akkor eltekintve a*

$$(w, Y, D, n) \in \left\{ \begin{array}{l} (4, 2, 7, 5), (4, 2, 7, 13), \\ (4, 3, 11, 5), (4, 5, 19, 7), \\ (1, 55, 19, 5), (1, 377, 341, 5) \end{array} \right\}$$

esetektől (4.5)-ben fennáll, hogy

$$n = 3 \quad \text{vagy} \quad n \mid h(-4D).$$

Továbbá az utóbbi esetben

$$n \leq \max\{3, P\} \quad \text{ha} \quad n \nmid h$$

és

$$n < \frac{4}{\pi} \sqrt{Q} \log(2e\sqrt{Q}) \quad \text{ha} \quad n \mid h.$$

A 4.3 Tétel összevethető Bugeaud és Shorey [18] 5. és 7. Következményével, ahol a szerzők (4.5) típusú egyenleteket vizsgáltak, azonban ezekben az eredményekben $D > 0$ négyzetmentes volt. Az 5. Következményben megmutatták, hogy az $x^2 + 4D = y^n$ egyenletnek nincs megoldása $n \geq 5$ esetén. Itt D négyzetmentes, és n olyan páratlan prím, amely nem osztja a $\mathbf{Q}(\sqrt{-D})$ ideálosztályszámát. Továbbá a 7. Következményben hasonló feltételek mellett megadták a (4.5) egyenlet összes megoldását, amikor

$$w = 1, D \equiv 1 \pmod{4}, n \geq 3 \quad \text{vagy} \quad w = 4, D \equiv 7 \pmod{8}, n \geq 3 \quad \text{vagy}$$

$$w = 4, D \equiv 3 \pmod{8}, n \geq 5.$$

Megjegyezzük, hogy Bugeaud és Shorey [18] dolgozatával ellentétben a 4.3 Tételünkben D nem szükségképpen négyzetmentes.

5 AZ $x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$ EGYENLET MEGOLDÁSA

Megtartva a 4. fejezet jelöléseit, ebben a fejezetben megadjuk a (4.1) típusú egyenlet teljes megoldását abban az esetben, amikor $D \in \mathcal{S}$, ahol $\mathcal{S} = \{2, 3, 5, 7\}$ és $w = 1$. Nevezetesen, tekintsük az

$$(5.1) \quad x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$$

egyenletet, ahol az $x, y, n, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ ismeretlenek olyan nemnegatív egészek, amelyekre $x \geq 1, y \geq 2, n \geq 3$ valamint $\text{lnc}(x, y) = 1$. Kombinálva a 4.3 Tételt Cohn [23] és de Weger [50] eredményeivel, megadjuk az (5.1) egyenlet összes nem kivételes megoldását. Emlékeztetünk, hogy ebben a speciális esetben az (5.1) egy (x, y, n) megoldása *kivételes*, ha $\alpha = 0, y$ páros és a $3^\beta 5^\gamma 7^\delta$ szorzat $7c^2$ vagy $15c^2$ alakú. Megjegyezzük, hogy ha az (5.1) egyenletünk $x^2 + 7c^2 = y^n$ vagy $x^2 + 15c^2 = y^n$ alakú és (x, y, n) az (5.1) egy kivételes megoldása, akkor ebben az esetekben nem használhatjuk az 5.1 Lemma által biztosított paraméterezést (l. pl. [21]). Ezért az (5.1) egyenletben csak a nem kivételes megoldásokkal foglalkozunk. Megjegyezzük még, hogy egy másik módszert használva Bugeaud, Mignote és Siksek [19] teljesen megoldották az $x^2 + 7c^2 = y^n$ és $x^2 + 15c^2 = y^n$ egyenleteket abban az esetben, amikor $1 \leq 7c^2 < 15c^2 \leq 100$.

5.1. Tétel *Az (5.1) egyenlet összes nem kivételes megoldását az 5.1 Táblázat tartalmazza.*

Megjegyezzük, hogy ha az (5.1) egyenletben $\alpha \geq 1$, akkor $\text{lnc}(x, y) = 1$ miatt y páratlan. Ekkor az (5.1) egyenlet (x, y, n) megoldásai mindig nem kivételesek. Így ebben az esetben az (5.1) egyenlet összes megoldása megadható.

5.1. Következmény *Tegyük fel, hogy (5.1)-ben $\alpha \geq 1$. Ekkor az (5.1) egyenlet összes megoldását az 5.1 Táblázat tartalmazza.*

Megjegyezzük, hogy az (5.1) egyenlet $\alpha \geq 1$ feltételnek eleget tevő megoldásai éppen azok a megoldások, amelyek az 5.1 Táblázatban nincsenek * jellel megjelölve. Továbbá ebben az esetben az 5.1 Tétel Luca [31] eredményének az általánosítása, aki $\gamma = \delta = 0$ esetén (5.1) összes megoldását meghatározta.

Az (5.1) egyenlet $\alpha = 0$ feltételnek megfelelő megoldásait * jelöli.

5.1 Táblázat

| | | | | | | | | |
|--------------------------|----------|-----|-------------------|------|-----|-------------------------|----------|-----|
| D | y | n | D | y | n | D | y | n |
| 2^2 | 5 | 3 | $3^5 *$ | 7 | 3 | $2^4 3^5 5^4$ | 601 | 3 |
| $3^4 *$ | 13 | 3 | $3^5 5^2 *$ | 19 | 3 | $3^9 5^4 *$ | 679 | 3 |
| $7^2 *$ | 65 | 3 | $2^2 3^5$ | 13 | 3 | $2^2 3^5 5^4 7^2$ | 709 | 3 |
| $2^4 3^4$ | 193 | 3 | $2^2 3^5 7^2$ | 37 | 3 | $2^8 3^3 5^4 7^2$ | 849 | 3 |
| $3^6 7^2 *$ | 585 | 3 | $2^2 3^7 5^2$ | 61 | 3 | $2^2 3^9 7^2$ | 757 | 3 |
| $3^6 5^2 *$ | 2701 | 3 | $2^4 3^5 5^2$ | 49 | 3 | $2^2 3^7 5^2 7^4$ | 2221 | 3 |
| $2^6 3^4 7^2$ | 37633 | 3 | $3^5 5^2 *$ | 31 | 3 | $2^6 3^5 7^4$ | 2353 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | $2^4 3^5 5^2 7^2$ | 169 | 3 | $3^3 5^4 7^4 *$ | 2451 | 3 |
| 25^4 | 11 | 3 | $3^5 7^2 *$ | 43 | 3 | $2^8 3^1 17^4$ | 4993 | 3 |
| $2^3 5^2$ | 9 | 3 | $2^2 3^5 5^2 7^2$ | 109 | 3 | $3^9 5^2 7^4 *$ | 2671 | 3 |
| $2^3 4^5 2$ | 19 | 3 | $3^7 7^2 *$ | 67 | 3 | $2^{10} 3^5 5^2 7^4$ | 3361 | 3 |
| $2^5 5^2$ | 41 | 3 | $3^5 5^2 7^2 *$ | 79 | 3 | $2^4 3^{11} 5^4 7^2$ | 5161 | 3 |
| $2^7 5^6$ | 129 | 3 | $2^6 3^7 7^2$ | 193 | 3 | $2^{10} 3^7 7^2$ | 4033 | 3 |
| $2^3 3^4$ | 97 | 3 | $2^4 3^7$ | 73 | 3 | $2^6 3^{11} 5^2$ | 6481 | 3 |
| $2^3 3^4 5^4$ | 121 | 3 | $3^7 5^2 *$ | 91 | 3 | $3^9 5^6 7^4 *$ | 12979 | 3 |
| $2^3 6^5 2$ | 211 | 3 | $2^8 3^9 5^2$ | 889 | 3 | $3^7 5^6 7^2 *$ | 15751 | 3 |
| $2^5 3^4 5^4$ | 409 | 3 | $2^4 3^9 5^2 7^2$ | 1009 | 3 | $2^{12} 3^5 5^6$ | 16009 | 3 |
| $2^9 5^2$ | 681 | 3 | $2^8 3^5 5^2 7^2$ | 1129 | 3 | $2^{12} 3^9 5^2 7^2$ | 17329 | 3 |
| $2^3 3^6 5^8$ | 1489 | 3 | $2^2 3^7 5^2 7^2$ | 1261 | 3 | $2^{10} 3^9 5^6 7^2$ | 27721 | 3 |
| $2 \cdot 3^4 5^6 7^2$ | 1051 | 3 | $2^4 3^7 5^2 7^4$ | 2041 | 3 | $2^{14} 3^{11} 5^4 7^2$ | 51361 | 3 |
| $2 \cdot 3^4 5^2 7^2$ | 1171 | 3 | $3^7 5^2 7^2 *$ | 151 | 3 | $2^8 3^7 5^4 7^2$ | 50401 | 3 |
| $2 \cdot 3^8 5^6$ | 1819 | 3 | $2^4 3^5 5^4 7^4$ | 1801 | 3 | $3^{13} 5^2 7^4 *$ | 59539 | 3 |
| $2^9 3^4 5^{12}$ | 21769 | 3 | $3^5 5^2 7^2 *$ | 211 | 3 | $3^{13} 5^6 7^2 *$ | 60799 | 3 |
| $2^9 3^6 5^2$ | 6129 | 3 | $2^6 3^5 5^2$ | 241 | 3 | $2^2 3^{13} 5^4 7^6$ | 93349 | 3 |
| $2^5 3^4 5^2$ | 9601 | 3 | $2^6 3^7 5^4$ | 481 | 3 | $2^8 3^5 5^6 7^6$ | 129649 | 3 |
| $2^7 3^6 5^4$ | 13849 | 3 | $2^6 3^5 5^2 7^2$ | 361 | 3 | $2^{10} 3^7 5^8 7^4$ | 362401 | 3 |
| $2^5 3^4 5^8 7^2$ | 19441 | 3 | $3^7 5^4 7^2 *$ | 499 | 3 | $2^{18} 3^5 5^2 7^6$ | 1053721 | 3 |
| $2^3 3^6 5^4 7^2$ | 42361 | 3 | $2^2 3^5 5^2 7^2$ | 421 | 3 | $2^8 3^5 5^4 7^8$ | 5762401 | 3 |
| $2 \cdot 3^6 5^{14} 7^4$ | 440491 | 3 | $2^2 3^9 5^2 7^2$ | 589 | 3 | $3^{17} 5^8 7^2 *$ | 19136251 | 3 |
| $2^7 3^4 5^2 7^4$ | 92198401 | 3 | $2^2 3^5 5^4 7^2$ | 541 | 3 | $5 \cdot 7^2 *$ | 9 | 3 |

| D | y | n | D | y | n | D | y | n |
|-------------------------|--------|-----|-----------------------|-----------|-----|----------------------|--------|-----|
| $2^2 5 \cdot 7^2$ | 29 | 3 | $2^4 3^6 7$ | 12097 | 3 | $2^3 3^7 5$ | 169 | 3 |
| $3^4 \cdot 5 *$ | 61 | 3 | $2^2 3^8 5^6 7^3$ | 26341 | 3 | $2^3 3^{11} 5$ | 241 | 3 |
| $3^4 5 \cdot 7^4 *$ | 109 | 3 | $2^2 5^8 7^5$ | 89429 | 3 | $2^5 3^7 5$ | 649 | 3 |
| $2^2 5 \cdot 7^6$ | 141 | 3 | $2^4 5^{14} 7^3$ | 182441 | 3 | $2 \cdot 3^{11} 5^3$ | 919 | 3 |
| $2^2 5^3 7^2$ | 669 | 3 | $2^8 3^6 5^{12} 7$ | 209161 | 3 | $2^3 3^5 5$ | 1441 | 3 |
| $2^4 3^4 5 \cdot 7^4$ | 1009 | 3 | $2^{12} 3^4 5^4 7^3$ | 16859161 | 3 | $2^7 3^{15} 5$ | 3289 | 3 |
| $2^6 3^4 \cdot 5$ | 3841 | 3 | $2 \cdot 5^7 2$ | 11 | 3 | $23^7 5^5$ | 24991 | 3 |
| $5^5 7^6 *$ | 4281 | 3 | $25^3 7^2$ | 331 | 3 | $2^5 3^{11} 5^7 2$ | 31441 | 3 |
| $2^4 3^6 5 \cdot 7^4$ | 8689 | 3 | $2^3 3^4 5$ | 481 | 3 | $2^3 3^{23} 5^7 2$ | 66889 | 3 |
| $3^6 5^3 7^8 *$ | 15901 | 3 | $2^3 3^4 5^7 4$ | 529 | 3 | $2^3 3^{15} 5^3 7^2$ | 196729 | 3 |
| $2^8 3^4 5 \cdot 7^8$ | 17761 | 3 | $2^5 3^4 5^7 4$ | 1969 | 3 | $2^9 3^7 5^3$ | 256009 | 3 |
| $3^8 5 \cdot 7^2 *$ | 238141 | 3 | $2^3 3^6 5^7 8$ | 6721 | 3 | $2^4 3^4 5 \cdot 7$ | 6721 | 3 |
| $2 \cdot 3^3$ | 7 | 3 | $2^7 3^4 5^3 7^{12}$ | 309649 | 3 | $23^5 5^6 7$ | 379 | 3 |
| $2^3 3^3 7^2$ | 25 | 3 | $2^9 3^6 5^7 4$ | 276529 | 3 | $23^5 5^2 7$ | 499 | 3 |
| $2 \cdot 3^3 5^2 7^4$ | 151 | 3 | $2^3 3^8 5^3 7^4$ | 972049 | 3 | $2^5 3^3 5^4 7^3$ | 721 | 3 |
| $2 \cdot 3^5 7^2$ | 79 | 3 | $2^3 3^4 7$ | 673 | 3 | $2^3 3^5 5^4 7$ | 2041 | 3 |
| $2^5 3^3 7^2$ | 121 | 3 | $2 \cdot 3^{10} 7^3$ | 122479 | 3 | $2^7 3^3 5^8 7$ | 4209 | 3 |
| $2 \cdot 3^3 5^2$ | 199 | 3 | $2^3 3^{10} 5^4 7$ | 306180001 | 3 | $2^3 3^5 5^{12} 7$ | 17641 | 3 |
| $2 \cdot 3^5 7^6$ | 415 | 3 | $3^3 5 *$ | 19 | 3 | $23^9 5^2 7$ | 40819 | 3 |
| $2^3 3^3 7^4$ | 337 | 3 | $2^6 3^7 5$ | 103681 | 3 | $2^{11} 3^3 5^4 7^3$ | 57169 | 3 |
| $2^7 3^3 7^2$ | 505 | 3 | $3^5 7 *$ | 25 | 3 | $23^3 5^6 7^5$ | 134331 | 3 |
| $2 \cdot 3^7 7^2$ | 655 | 3 | $3^7 7 *$ | 37 | 3 | $23^7 5^{10} 7^3$ | 219139 | 3 |
| $2^5 3^5$ | 1153 | 3 | $2^2 3^9 7$ | 85 | 3 | $2^7 3^5 5^2 7$ | 806401 | 3 |
| $2^9 3^3 7^6$ | 1705 | 3 | $2^2 3^5 7$ | 109 | 3 | $2^3 3^4 5 \cdot 7$ | 3361 | 3 |
| $2^3 3^5 5^2 7^4$ | 7249 | 3 | $3^5 7 *$ | 253 | 3 | $2^4 3^5 5^7$ | 20161 | 3 |
| $2^3 3^3 5^2 7^2$ | 39201 | 3 | $2^4 3^{15} 7$ | 1177 | 3 | $2^3 3^7 5^7$ | 1129 | 3 |
| $2^7 3^7 7^8$ | 43873 | 3 | $2^4 3^7 7^3$ | 385 | 3 | $2^3 3^{11} 5^7$ | 1201 | 3 |
| $2 \cdot 3^{11} 7^{10}$ | 69295 | 3 | $2^4 3^7 7$ | 457 | 3 | $2^5 3^{15} 5^7$ | 5209 | 3 |
| $2^{15} 3^3 7^2$ | 131065 | 3 | $3^5 5^2 7^3 *$ | 721 | 3 | $2^3 3^{23} 5^3 7$ | 87049 | 3 |
| $5^2 7 *$ | 11 | 3 | $3^{11} 5^2 7 *$ | 781 | 3 | $2^7 3^7 5^7$ | 17929 | 3 |
| $2^2 5^4 7$ | 29 | 3 | $2^6 3^{11} 7$ | 1873 | 3 | $2^3 3^5 5^3 7$ | 252001 | 3 |
| $2^2 7$ | 37 | 3 | $2^2 3^5 7^3$ | 5485 | 3 | $2^6 3^2$ | 5 | 4 |
| $3^4 5^2 7 *$ | 79 | 3 | $2^8 3^{11} 7^3$ | 6601 | 3 | $7^2 *$ | 5 | 4 |
| $5^{10} 7^3 *$ | 1499 | 3 | $2^4 3^7 5^2 7$ | 11209 | 3 | $2^6 3^2 5^2 7^2$ | 29 | 4 |
| $3^6 5^6 7 *$ | 631 | 3 | $2^8 3^5 7$ | 64513 | 3 | $2^6 3^2 5^2$ | 13 | 4 |
| $2^4 3^4 5^4 7$ | 1369 | 3 | $2^2 3^9 5^4 7^3$ | 70189 | 3 | $2^8 3^2 5^2$ | 17 | 4 |
| $2^4 3^4 5^8 7$ | 1969 | 3 | $2^4 3^{23} 5^2 7^3$ | 607849 | 3 | $2^8 3^2 7^2$ | 25 | 4 |
| $3^4 5^2 7^3 *$ | 4111 | 3 | $2^{10} 3^{19} 5^2 7$ | 723361 | 3 | $2^6 3^2 5^2 7^2$ | 37 | 4 |
| $2^6 3^4 5^4 7$ | 5401 | 3 | $3^{31} 5^4 7$ | 4800469 | 3 | $2^6 3^4 5^2 7^2$ | 53 | 4 |
| $2^{10} 5^2 7^3$ | 9569 | 3 | $2 \cdot 3^7 5$ | 31 | 3 | $2^8 3^4 5^2$ | 41 | 4 |

| D | y | n |
|---------------------|------|-----|
| $2^{10}3^47^2$ | 65 | 4 |
| $2^{10}3^25^27^2$ | 113 | 4 |
| $2^{12}3^45^47^2$ | 337 | 4 |
| $2^{10}3^25^47^4$ | 1201 | 4 |
| 2^5 | 3 | 4 |
| 2^77^2 | 9 | 4 |
| $2^53^27^2$ | 11 | 4 |
| 2^73^2 | 17 | 4 |
| $2^53^25^27^2$ | 43 | 4 |
| $2^55^27^4$ | 51 | 4 |
| $2^95^27^2$ | 57 | 4 |
| $2^93^47^4$ | 113 | 4 |
| $2^55^27^2$ | 99 | 4 |
| 2^53 | 5 | 4 |
| 2^63 | 7 | 4 |
| $2^43^55^27^2$ | 49 | 4 |
| 2^837^2 | 97 | 4 |
| $2^43^35^47^2$ | 133 | 4 |
| 2^45 | 3 | 4 |
| 2^43^25 | 7 | 4 |
| 2^65 | 9 | 4 |
| $5^37^2 *$ | 21 | 4 |
| $2^43^25 \cdot 7^2$ | 47 | 4 |
| 2^83^45 | 161 | 4 |
| 2^535^2 | 7 | 4 |
| 2^735^2 | 11 | 4 |
| $2^53^35^4$ | 29 | 4 |
| $2^7 \cdot 35^2$ | 49 | 4 |
| $2^93^35^2$ | 59 | 4 |
| $2^735^47^2$ | 73 | 4 |
| $2^53^35^27^2$ | 103 | 4 |
| $2^{11}35^6$ | 131 | 4 |
| $2^33^77^2$ | 175 | 4 |
| $2^935^27^4$ | 4801 | 4 |
| $7 *$ | 2 | 4 |
| 2^37 | 3 | 4 |
| $5^27 *$ | 4 | 4 |
| 2^63^27 | 11 | 4 |
| $5^47^3 *$ | 22 | 4 |
| 2^83^47 | 23 | 4 |

| D | y | n |
|-------------------|-----|-----|
| 2^63^67 | 29 | 4 |
| $2^63^25^27$ | 53 | 4 |
| $2^{10}3^27$ | 127 | 4 |
| $2^63^{10}5^27^3$ | 443 | 4 |
| $2^{12}3^85^27$ | 431 | 4 |
| 2^53^25 | 7 | 4 |
| 2^53^45 | 11 | 4 |
| 2^93^65 | 37 | 4 |
| 2^73^25 | 13 | 4 |
| 2^53^25 | 19 | 4 |
| $2^73^457^2$ | 89 | 4 |
| $2^53^65^37^2$ | 223 | 4 |
| $2^53^{10}57^2$ | 247 | 4 |
| $2^{11}3^25^3$ | 253 | 4 |
| 2^33^27 | 5 | 4 |
| 2^55^27 | 9 | 4 |
| 2^33^47 | 13 | 4 |
| 2^77 | 15 | 4 |
| 2^95^47 | 39 | 4 |
| $2^33^27^3$ | 19 | 4 |
| $2^53^25^27$ | 23 | 4 |
| $2^33^87^5$ | 173 | 4 |
| $2^53^25^67$ | 127 | 4 |
| $2^73^45^47$ | 137 | 4 |
| $2^93^25^27$ | 449 | 4 |
| $3 \cdot 5 *$ | 2 | 4 |
| $3^35 *$ | 4 | 4 |
| $35^3 *$ | 8 | 4 |
| 2^6357^2 | 17 | 4 |
| $2^83 \cdot 5$ | 31 | 4 |
| $2^63^357^2$ | 47 | 4 |
| $375^3 *$ | 34 | 4 |
| $2^43 \cdot 7$ | 5 | 4 |
| 2^435^27 | 11 | 4 |
| $2^43^35^27$ | 17 | 4 |
| $2^63 \cdot 5^47$ | 31 | 4 |
| 2^635^27 | 19 | 4 |
| 2^435^27 | 23 | 4 |
| 2^835^27 | 37 | 4 |
| 2^63^37 | 55 | 4 |

| D | y | n |
|---------------------------|------|-----|
| $2^{10}3^35^67$ | 721 | 4 |
| $2^43^55^47^7$ | 293 | 4 |
| $2^{14}35^27^3$ | 2053 | 4 |
| $2^53 \cdot 57^2$ | 13 | 4 |
| $2^53 \cdot 5$ | 11 | 4 |
| $2^73 \cdot 57^2$ | 23 | 4 |
| $2^53^357^4$ | 59 | 4 |
| $2^{11}3^357^2$ | 263 | 4 |
| $2^935^37^6$ | 407 | 4 |
| $2^53^55^37^2$ | 493 | 4 |
| $2^63^25 \cdot 7$ | 71 | 4 |
| $2^53 \cdot 7$ | 13 | 4 |
| $2^53^75^47$ | 8749 | 4 |
| $2^53^25 \cdot 7$ | 17 | 4 |
| $2^53^45 \cdot 7$ | 19 | 4 |
| $2^73^65 \cdot 7$ | 43 | 4 |
| $2^93^25 \cdot 7$ | 67 | 4 |
| $2^53^{10}5^37$ | 257 | 4 |
| $2^53^25^37$ | 251 | 4 |
| $2^63 \cdot 5 \cdot 7$ | 11 | 4 |
| $2^83 \cdot 5 \cdot 7$ | 13 | 4 |
| $2^{10}3 \cdot 5 \cdot 7$ | 19 | 4 |
| $2^63^35 \cdot 7$ | 31 | 4 |
| $2^63 \cdot 5 \cdot 7$ | 41 | 4 |
| $2^{14}3^35 \cdot 7$ | 71 | 4 |
| $2^{12}3^35^3 \cdot 7$ | 157 | 4 |
| $2^{10}35^37^3$ | 359 | 4 |
| $2^{20}3 \cdot 57^3$ | 517 | 4 |
| $2^53 \cdot 5 \cdot 7$ | 29 | 4 |

1 INTRODUCTION

The polynomial equations in two unknowns and exponential equations play a central role in the theory of diophantine equations. The so-called superelliptic equations constitute a very important class of equations from the point of view of applications. These equations are of the form

$$(1.1) \quad f(x) = wy^n,$$

where $f(X)$ is a polynomial with integral coefficients, $w \neq 0$ and $n \geq 2$ are given integers and x, y are unknown integers. After the results of Mordell, Siegel and others, in 1964 LeVeque gave a finiteness criteria for the number of solutions of equation (1.1). This result is ineffective in the sense that the proof does not provide any algorithm to compute the solutions. In 1969 A. Baker was the first to give an effective upper bound for the size of the solutions of (1.1) in the case when the polynomial f has at least three simple roots. Later, this result was generalized by Brindza, who also gave an effective version of LeVeque's result. The proofs of the above effective results involve the deep method of Baker, which provides effective estimates for the linear combination of the logarithms of algebraic numbers.

In 1976 Schinzel and Tijdeman [43] considered equation (1.1) in a more general situation, namely in the case, when in (1.1) the exponent n is also unknown. Then equation (1.1) is an exponential-polynomial equation in three unknowns. If f does not have two distinct roots then equation (1.1) can have a solution with n arbitrary large. If $f(X)$ has at least two distinct roots, Schinzel and Tijdeman gave an upper bound for n , which depends only on f and w . Their proof is based on Baker's method. Later, equation (1.1) was also studied by Shorey, van der Poorten, Brindza, Evertse, Győry, Turk, Bugeaud, Bérczes, Hajdu, Pintér and Haristoy. For the exponent n several upper bounds were obtained. These bounds depend only on w , the degree of f , and either on the height or on the discriminant of f . The results were extended to the case when in equation (1.1) a binary form $f(x, z)$ was considered instead of f and where z is also an unknown integer. Another extension of the above results is the case, when in (1.1) the coefficients of f , w and the unknowns x, y belong to an integral domain which is finitely generated over \mathbf{Z} .

One of the main purposes of the present dissertation is to clarify that, in the bounds obtained for n to which extent can we weaken the dependence on the parameters of the polynomial f . In Chapter 2 we show that if f is monic, then apart from some natural exceptions, one can give an effective upper bound for n which depends only on the degree of f , on $Q(w)$ and on $Q(D_f)$. Here

D_f denotes the discriminant of the maximal square free divisor in $\mathbf{Z}[X]$ of f , and for an integer $a \neq 0$, $Q(a)$ denotes the product of the distinct prime factors of a (called sometimes the radical of a). Our result is definitive in the sense that the dependence of each parameter is separately necessary, we cannot get rid of any of these parameters. The proof is based among others on an effective finiteness theorem concerning binomial Thue-Mahler equations. In Chapters 3 and 4 we obtain in (1.1) upper bounds for n , depending only on the degree of f , the height of f and on w , respectively. These results are much sharper than the bounds in the earlier results. By using the above results, we obtain explicit lower bound for the difference $|f(x) - wy^n|$, which depends only on $w, n, \deg f$ and $H(f)$, provided that $f(x) \neq wy^n$. Finally, in Chapter 5 we give all solutions of equation (1.1) in the case when f is a quadratic polynomial of special form. In our proofs we use among others the newest and sharpest versions of Baker's method.

In what follows, we give a brief outline of our main results chapter by chapter. For simplicity, here we present our results only in some important special cases.

II

Consider equation (1.1), where $f(x) \in \mathbf{Z}[X]$ is a polynomial with $\deg f = m$ and with at least two distinct zeros. Further, denote by $H(f)$ the height of f , that is the maximum of the absolute values of the coefficients of f . If all zeros of f are distinct then D_f is exactly the discriminant $D(f)$ of the polynomial f . We note that $H(f)$ can be arbitrary large compared to $|D_f|$ and $|D(f)|$.

As we mentioned, Schinzel and Tijdeman, and later several others gave effective upper bounds in (1.1) for the exponent n which depend only on w, m and $H(f)$. In the case when in (1.1) f is irreducible and $w = 1$, Brindza, Evertse and Győry [12] derived an upper bound for the exponent n depending only on m and $D(f)$, but not on $H(f)$. This result has been recently extended by Haristoy [27] to the case when f is reducible.

In Chapter 2 we improve and refine considerably the results of [12] and [27]. Let p_1, \dots, p_s be distinct primes, and let $Q = p_1 \cdots p_s$. Denote by S the set of those rational integers which are not divisible by primes different from p_1, \dots, p_s . We consider equation (1.1) in the case when x, y, w, n are integer unknowns with $|y| > 1, w \in S, n \geq 2$ and $D_f \in S$. Apart from certain exceptional cases, which are explicitly described, our Theorem 2.1 provides an effective upper bound for n which depends only on m and Q . Thus, in contrast with the earlier results, our bound does not depend on $D(f)$, but only on $Q(D_f), m$ and $Q(w)$. Here the dependence of the bound on the parameters of f cannot be weakened anymore.

In Theorem 2.2 we extend our result to the more general equation

$$(1.2) \quad F(x, z) = wy^n,$$

where $F \in \mathbf{Z}[X, Z]$ is a binary form such that $F(1, 0) = 1$, $F(X, 1)$ has at least two distinct zeros and $D_F \in S$. Further, x, z, w, y, n are unknowns with $|y| > 1, z \in S, w \in S, \gcd(x, z) = 1$ and $n \geq 2$. This theorem is a refinement of the classical result of Shorey, van der Poorten, Tijdeman and Schinzel [45] concerning equation (1.2), where the upper bound for n depends on the height of F instead of $Q(D_F)$.

Our Theorem 2.3 is concerned with binomial Thue-Mahler equations considered over number fields. It plays an important role in the proofs of Theorems 2.1 and 2.2. For simplicity, we present here this theorem only in a special case, namely over \mathbf{Z} . Consider the equation

$$(1.3) \quad ax^n - by^n = c,$$

where a, b, c, x, y, n are integer unknowns such that $a, b, c \in S, |xy| > 1$ and $n \geq 3$. Further, we may assume that $\gcd(ax^n, by^n, c) = 1$. We note that if $x = y = 1$ then equation (1.3) is just an S -unit equation, while if a, b are fixed then (1.3) is a Thue-Mahler equation with unknown exponent n . As a common generalization of several earlier effective finiteness results concerning S -unit equations and Thue-Mahler equations, we give an upper bound for n in (1.3) which depends only on Q . This implies that equation (1.3) has only finitely many, effectively computable solutions.

The results of this chapter were published in [25].

III

In Theorem 3.1 of Chapter 3, we give an explicit upper bound for n in equation (1.1), which depends only on $w, m = \deg f$ and $H(f)$. This result improves and makes explicit in each parameter the previously best known bound due to Bérczes, Brindza and Hajdu [9]. By using the above result, we establish an explicit lower bound for the difference $|f(x) - wy^n|$ in the case when $f(x) \neq wy^n$. Here $w \neq 0$ is a given integer, and x, y, n are unknown integers with $|y| > 1$ and $n \geq 3$. Apart from some natural exceptions, in our Theorems 3.2 and 3.3 we provide lower bounds for the differences under consideration, depending only on $w, m, H(f)$, and $n, |f(x)|$, respectively. Our theorems generalize the results of Bugeaud and Hajdu [17] concerning the special case $f(x) = ax^m$.

The results of Chapter 3 have appeared in [39].

IV

Chapter 4 is concerned with equation (1.1) in the special case when $f(X)$ is a quadratic monic polynomial. There is a very extensive literature in this special situation; the previous results will be presented in Chapter 4.

In Theorem 4.1 we obtain a sharp, explicit version of our more general Theorem 2.1 in the case when $w = 2$ and

$$f(X) = X^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2,$$

where p_1, \dots, p_s are given primes and z_1, \dots, z_s are unknown non-negative integers. This theorem generalizes the previous results of the author and Tengely [42] and the results of [47]. In Theorem 4.2 and 4.3 we obtain sharp explicit upper bounds for the exponent n in (1.1) when $f(X) = X^2 + AX + B, w = 1$ and $f(X) = X^2 + D, w \in \{1, 4\}$, respectively.

The results of Chapter 4 have been published in [40] and [41].

V

In Chapter 5 we deal with equation (1.1) in the case when $w = 1$ and

$$f(X) = X^2 + 2^{z_1} 3^{z_2} 5^{z_3} 7^{z_4},$$

where z_1, z_2, z_3, z_4 are unknown non-negative integers. By combining Theorem 4.3 with some results of Cohn [23] and de Weger [50], in our Theorem 5.1 we solve completely equation (1.1) in the case when $x, y, n, z_1, z_2, z_3, z_4$ are integer unknowns satisfying $z_1 \geq 1, |y| \geq 2, n \geq 3$ and $\gcd(x, y) = 1$. Our Theorem 5.1 generalizes the result of Luca [31] concerning the case $z_3 = z_4 = 0$.

The results of this chapter were published in [41].

We note that the results of the chapters were published in separate papers. In the present dissertation we adapt the organization of the original papers, hence sometimes it happens that in different chapters different versions of our lemmas are utilized.

2 POWER VALUES OF POLYNOMIALS AND BINOMIAL THUE-MAHLER EQUATIONS

Let f be a polynomial with integer coefficients and with at least two distinct zeros, and let w be a given non-zero integer. Schinzel and Tijdeman [43] proved that if the integers x, y, n with $|y| > 1$ and $n \geq 2$ satisfy the equation

$$(2.1) \quad f(x) = wy^n,$$

then n can be bounded above by an effectively computable number depending only on f and w . Several upper bounds were later obtained for n which depend on w and the height and degree of f ; see [46], [13], [49], [11], [14], [9], [39] and the references given there. Some of these results were established in more general form, over number fields and/or assuming only on w that its distinct prime factors are fixed.

For $w = 1$ and irreducible monic f , Brindza, Evertse and Győry [12] derived an explicit upper bound for n which depends only on the degree and discriminant, $D(f)$, of f . Recently Haristoy [27] extended this to arbitrary monic polynomials as well as to the number field case.

In our Theorem 2.1 we show that, apart from certain exceptions which will be described explicitly below, in (2.1) n can be estimated from above by an effectively computable bound which depends only on $\deg f$ and the product of distinct prime factors of w and $D(f)$. We prove this in a more general form, over number fields.

To formulate our results, we have to introduce some notation. Throughout this paper, \mathbf{K} denotes an algebraic number field of degree d with ring of integers $O_{\mathbf{K}}$ and unit group $O_{\mathbf{K}}^*$. Let $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ ($s \geq 0$) be distinct prime ideals of $O_{\mathbf{K}}$ and denote by S the set of those $\alpha \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}$ for which the ideal (α) has no prime ideal divisors other than $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$. Further, let

$$Q = \begin{cases} N_{\mathbf{K}/\mathbf{Q}}(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s), & \text{ha } s > 0, \\ 1, & \text{ha } s = 0. \end{cases}$$

Let $f \in O_{\mathbf{K}}[X]$ denote in (2.1) a monic polynomial of degree m with $k \geq 2$ distinct zeros and splitting field \mathbf{L} over \mathbf{K} , and suppose that D_f , the discriminant of the square-free monic polynomial divisor of maximal degree of f in $O_{\mathbf{K}}[X]$ is contained in S . Consider the solutions of equation (2.1) in $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}, w \in S$ and $n \geq 2$.

For $y \in O_{\mathbf{K}}^*$, n can be arbitrarily large. Further, if

$$(2.2) \quad f(X) = u^m f'(u^{-1}(X + a))$$

for some $a \in O_{\mathbf{K}}, u \in S, f' \in O_{\mathbf{K}}[X]$ and $x + a = u = v^n$ with some $v \in S$, then $y = v^m$ yields a solution of (2.1), provided that $f'(1) \in S$. In this case $D_{f'} \in S, y \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$ if $u \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$, and n can be again arbitrarily large compared to m, k, Q and the parameters of \mathbf{L} . To exclude the above situation, in the case $y \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$ we assume that f is *reduced*, that is that (2.2) does not hold for any a, f', u with $u \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$. Let $D_{\mathbf{L}}$ denote the discriminant of \mathbf{L} .

Theorem 2.1. *Let $x, y \neq 0, w, n$ be a solution of (2.1) with $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus O_{\mathbf{K}}^*, w \in S, n \geq 2$. If $y \notin S$ or if $y \in S$ and f is reduced, then*

$$(2.3) \quad n \leq c_1 Q^{c_2},$$

where c_1, c_2 are effectively computable positive numbers which depend only on m, k, d and the discriminant $D_{\mathbf{L}}$ of \mathbf{L} .

We note that much better upper bounds come for n from our proof if y has a prime ideal divisor of large norm or if $y \in S$ and f is reduced. Further, in view of $D_f \in S$ we have

$$(2.4) \quad |D_{\mathbf{L}}| \leq c_3 Q^{c_4},$$

where c_3, c_4 are effectively computable positive numbers depending only on k, d and the discriminant $D_{\mathbf{K}}$ of \mathbf{K} ; for explicit values of c_3 and c_4 , see Remark 5 after the proof of Theorem 2.2 in Chapter 2. Hence, together with (2.4), Theorem 2.1 provides also a bound for n which depends only on $m, k, d, D_{\mathbf{K}}$ and Q . These bounds can be compared with Theorem 2.2 of [27], where the bound depends also on D_f .

Shorey, van der Poorten, Tijdeman and Schinzel [45] generalized the above-mentioned result of [43] on equation (2.1) for the equation

$$(2.5) \quad F(x, z) = wy^n,$$

where $F \in \mathbf{Z}[X, Y]$ is a binary form with $F(1, 0) \neq 0$ and with at least two distinct linear factors over $\overline{\mathbf{Q}}$, subject to the conditions that $\gcd(x, z)$ is bounded and z, w are divisible by finitely many fixed primes only. In the *monic* case, when $F(1, 0) = 1$, this was extended in [46] to the number field case. An explicit version has been recently given by Haristoy [27], where the bound on n depends on the height of F .

We give now a generalization of Theorem 2.1 for equation (2.5). Let $F(X, Z)$ denote a monic binary form of degree m with coefficients in $O_{\mathbf{K}}$ such that $F(X, 1)$ has $k \geq 2$ distinct zeros and that D_F , the discriminant of the square-free polynomial divisor of maximal degree of $F(X, 1)$ in $O_{\mathbf{K}}[X]$ is contained in S . Let \mathbf{L} be the splitting field of F over \mathbf{K} , and $D_{\mathbf{L}}$ the discriminant of \mathbf{L} . Consider the solutions of (2.5) in $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}, z, w \in S, n \geq 2$.

It suffices to deal with the case $y \notin O_{\mathbf{K}}^*$, since otherwise n can be arbitrarily large. If $F(1, 1) \in S$, then $x = z = v^n, y = v^m$ is a solution of (2.5) for every $v \in S$ and n , that is n cannot be bounded. Similarly, if

$$(2.6) \quad F(X, Z) = F'(X + aZ, uZ)$$

with $a \in O_{\mathbf{K}}, u \in S, F' \in O_{\mathbf{K}}[X, Z]$ and $F'(1, 1) \in S$, then $D_{F'} \in S$ and $z = 1, x + a = u = v^n, y = v^m$ is a solution of (2.5) for any $v \in S$, and n cannot be bounded above in terms of $m, k, d, D_{\mathbf{L}}$ and Q only.

Excluding these two cases, n can be estimated from above as in Theorem 2.1. We say that F is *reduced* if (2.6) does not hold for any a, F' and u with $u \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$.

The following theorem contains Theorem 2.1 as a special case with the choice $z = 1, \mu = 0$.

Theorem 2.2. *There exist effectively computable positive numbers c_5, c_6 and c_7 which depend only on m, k, d and $D_{\mathbf{L}}$ such that if $x, y \neq 0, z, w, n$ is a solution of (2.5) with $x \in O_{\mathbf{K}}, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus O_{\mathbf{K}}^*, z \in S, w \in S, n \geq 2$, then*

$$(2.7) \quad n \leq c_5 Q^{c_6} + \mu c_7 \log Q,$$

where $\mu = 0$ if $y \notin S$, and

$$(2.8) \quad \text{ord}_{\mathfrak{p}_i}((x, z)) \leq \mu \quad \text{for } i = 1, \dots, s$$

if $y \in S \setminus O_{\mathbf{K}}^*$ and F is reduced.

The dependence on $D_{\mathbf{L}}$ in (2.7) can be eliminated again by means of (2.4).

Binomial Thue-Mahler equations. Consider now the equation

$$(2.9) \quad ax^n - by^n = c,$$

where a, b are fixed non-zero elements of $O_{\mathbf{K}}$, and $x, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}, c \in S, n \geq 3$ are unknowns. As is known, for $n = 0, 1, 2, \dots$, $ax^n + by^n$ can be regarded as a

special binary recurrence sequence. Several upper bounds have been derived for n in (2.9) in terms of a, b and S ; see [46], [52], [16] and the references occurring there.

To prove our Theorem 2.2, we shall need the following extension in which a and b are also unknowns, taken from S . Denote by h and R the class number and regulator of \mathbf{K} , respectively.

Theorem 2.3. *Let $a, b, c \in S, x, y \in O_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}, n \geq 3$ be a solution of (2.9), and suppose that at least one of x and y is not contained in $O_{\mathbf{K}}^*$. There exists an effectively computable positive constant c_8 which depends only on d, h and R such that*

$$(2.10) \quad n \leq c_8 Q^{3h} + \nu \log Q,$$

where $\nu = 0$ if $x \notin S$ or $y \notin S$, and

$$(2.11) \quad \text{ord}_{\mathfrak{p}_i}((ax^n, by^n, c)) \leq \nu \quad \text{for } i = 1, \dots, s$$

otherwise.

It is clear that in the case $x, y \in S$ the condition (2.11) is necessary.

We remark that in our proof much better upper bounds are obtained in the following special cases: $x, y \in S$; x or y has a prime ideal divisor of large norm; $c \in O_{\mathbf{K}}^*$. These better bounds enable one to improve the bounds of Theorems 2.1 and 2.2 in the corresponding special cases.

In the particular case $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ it follows from Theorem 2.3 that if a, b, x, y, n are non-zero rational integers with $|xy| > 1, n \geq 3$ such that xy has a prime factor which does not divide $ab(ax^n - by^n)$, then $Q(ax^n - by^n)$, the product of distinct prime factors of $ax^n - by^n$ satisfies

$$(2.12) \quad |ax^n - by^n| \geq Q(ax^n - by^n) \geq (c_9/Q(ab))n^{1/3},$$

where $Q(ab)$ denotes the product of distinct prime factors of ab , and c_9 is an effectively computable absolute constant. Theorem 2.3 and (2.12) should be compared with Theorem 2 of Yu and Hung [52], where the dependence on n is better, but the lower bound obtained for $Q(ax^n - by^n)$ depends not only on $Q(ab)$ but also on a and b themselves.

Remark 2.1. We note that the above constants c_1 to c_9 can be easily expressed in explicit form by using the explicit estimates in our proofs as well as explicit versions of Lemmas 2.1 to 2.8 of Chapter 2.

Remark 2.2. In the proof of Theorem 2.3 we utilize among other things some new estimates of Matveev [32] and Yu [51] on linear forms in logarithms of algebraic numbers and a recent bound of Györy and Yu [26] on the solutions of S -unit equations. Theorem 2.2 will be deduced from Theorem 2.3 with the help of a recent effective theorem of Györy [24] concerning monic binary forms having discriminants contained in S . We remark that Theorems 2.1 and 2.2 can be proven, with other bounds, without the use of Theorem 2.3 as well.

3 ON THE DIFFERENCES BETWEEN POLYNOMIAL VALUES AND PERFECT POWERS

Let a, w, x, y, n, m be non-zero integers with $n, m \geq 2$, $|y| \geq 2$ and $ax^m \neq wy^n$. The first effective lower bound for $|ax^m - wy^n|$ which is independent of x and y was proved by Turk [49], in case of $a = w = 1$. A result of similar strength valid for arbitrary a and w , however not completely explicit, can also be deduced from the work of Shorey [44]. Later, Bugeaud [14] considerably sharpened Turk's estimate for $|x^m - y^n|$. Recently, thanks to some refined arguments, Bugeaud and Hajdu [17] improved and extended Bugeaud's result to arbitrary a and w . The purpose of this Chapter is to generalize the results of Bugeaud and Hajdu [17] to differences of the form $|F(x) - wy^n|$, where $F(X) \in \mathbf{Z}[X]$ is a polynomial of degree $m \geq 2$.

Under certain natural assumptions on F , we derive explicit lower bounds for $|F(x) - wy^n|$ (cf. Theorem 3.2) from our Theorem 3.1 which provides an explicit upper bound for the exponent n in the equation

$$(3.1) \quad f(x) = wy^n$$

where the unknown integers x, y, n satisfy the conditions $|y| \geq 2, n \geq 2$. The bound obtained in Theorem 3.1 for n depends only on w and the height of f .

The first results proving that n is bounded were given by Tijdeman [48] and Schinzel and Tijdeman [43]. Later, several effective but not completely explicit upper bounds were obtained for n ; see [11], [12], [9] and the references given there. Our Theorem 3.1 slightly improves and makes explicit in each parameter the previously best known bound (cf. [9]) on n . In our proof we will follow the approach of Brindza, Evertse and Győry [12]. They gave an estimate for n from above in terms of the discriminant of f .

Throughout the Chapter, we use the following notation. For every positive real number s , we put $\log_* s = \max\{1, \log s\}$. Let

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m = a_0 \prod_{i=1}^m (x - \alpha_i), \quad a_0 \neq 0,$$

be a polynomial with integer coefficients. We write

$$H(f) = \max_{0 \leq i \leq m} |a_i| \quad \text{and} \quad M(f) = |a_0| \prod_{i=1}^m \max(1, |\alpha_i|)$$

for the "classical" height and the Mahler-height of f , respectively.

Theorem 3.1. *Let $f(X) \in \mathbf{Z}[X]$ be a polynomial of degree $m \geq 2$ and w a non-zero integer. If f has at least two distinct roots, then equation (3.1) with $x, y, n \in \mathbf{Z}$ and $|y| \geq 2, n \geq 2$ implies*

$$n \leq 2^{24m+56} m^{7m+17} M(f)^{3m-3} (\log_* M(f))^{3m} (\log_* |w|)^{\frac{5}{2}}.$$

As was mentioned above, our Theorem 3.1 slightly improves and makes completely explicit the previously best known result of this type, established in [9]. In the special case $f(x) = ax^m + c$, a similar result was proved in [17].

We obtain the following result as a consequence of Theorem 3.1.

Theorem 3.2. *Let $F(X) \in \mathbf{Z}[X]$ be a polynomial of degree $m \geq 2$, and let w, x, y, n be integers with $w \neq 0, n \geq 2, |y| \geq 2$. Suppose that $F(x) \neq wy^n$, and if $F(X)$ is of the special form $F(X) = t_1(X - t_2)^+ t_3$ with $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{Z}$, then also assume that $F(x) \neq wy^n + t_3$. Then we have*

$$(3.2) \quad |F(x) - wy^n| \geq n^{\frac{1}{3m}} 2^{-8 - \frac{56}{3m}} m^{-\frac{23}{6} - \frac{17}{3m}} \left(H(F) \log_*^{\frac{5}{6m}} |w| \right)^{-1}.$$

We note that to give a lower bound for $|F(x) - wy^n|$, we need to use the classical height instead of the Mahler-height. The reason is that for every $k \in \mathbf{Z}$, plainly $H(F - k) \leq H(F) + |k|$, but $M(f)$ does not have a similar nice property. However, the use of the classical height already in Theorem 3.1 would result in a worse estimate for $|F(x) - wy^n|$.

As in [17], we derive a lower bound for $|F(x) - wy^n|$ in terms of $|F(x)|$, by combining Theorem 3.2 with an estimate for the size of the solutions of superelliptic equations.

Theorem 3.3. *Let $F(X) \in \mathbf{Z}[X]$ be a polynomial of degree $m \geq 2$, and let w, x, y, n be integers with $w \neq 0, n \geq 3, |y| \geq 2$. Suppose that $F(x) \neq wy^n$, and if $F(X)$ is of the special form $F(X) = t_1(X - t_2)^m + t_3$ with $t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{Z}$, then also assume that $F(x) \neq wy^n + t_3$. Then*

$$(3.3) \quad |F(x) - wy^n| \geq c_1 m^{-\frac{23}{6}} H(F)^{-1} (\log_* |w|)^{-\frac{4}{3m+1}} (\log_* \log_* |F(x)|)^{\frac{1}{3m+1}},$$

where c_1 denotes an effectively computable absolute constant.

Theorem 3.2 generalizes the estimate

$$|ax^m - wy^n| \geq n^{2/5m} (20m)^{-2-11/m} \left(|a| \log_*^{\frac{1}{n}} |w| \right)^{-1}$$

of Bugeaud and Hajdu [9]. Similarly, our Theorem 3.3 is an extension of Theorem 2 of [9]. Observe that our bound in (3.2) in the special case $F(x) = ax^m$ yields an estimate of similar strength as in [9], up to the exponent of n . This difference comes from the fact that $D(ax^m + k) \leq c_2|k|^m$, while in general we only have $D(F(x) + k) \leq c_3|k|^{2m}$. Here $D(g(x))$ denotes the discriminant of a polynomial $g \in \mathbf{Z}[X]$ and c_2, c_3 are constants depending on a, m and F , respectively.

4 POWER VALUES OF QUADRATIC POLYNOMIALS

Let $S = \{p_1, \dots, p_s\}$ be a set of distinct rational primes and let

$$S = \{m \in \mathbf{Z} \mid m = \pm p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s}, z_i \in \mathbf{Z}_{\geq 0}, (1 \leq i \leq s)\}.$$

Denote by P and Q the greatest and the product, respectively, of the primes lying in S .

In this chapter we deal with the equation

$$(4.1) \quad x^2 + D = wy^n,$$

where w is a given positive integer and the unknowns $x, y, n, D \in \mathbf{Z}$ satisfy that $n \geq 3, y > 1, D \in \mathcal{S}$ and $\gcd(x, y) = 1$. The purpose of this chapter is to give in (4.1) explicit upper bounds for n , which depend only on P and s or P and Q . First consider the case when in equation (4.1) $w = 1$ and $D > 0$ is a given integer. Then the first result was due to V. A. Lebesgue [28] who proved that there are no solutions for $D = 1$. Ljunggren [29] solved (4.1) for $D = 2$, and Nagell [38],[38] solved it for $D = 3, 4$ and 5 . In his elegant paper [21], Cohn gave a fine summary of work on equation (4.1). Further, he developed a method by which he found all solutions of the above equation for 77 positive values of $D \leq 100$. For $D = 74$ and $D = 86$, equation (1) was solved by Mignotte and de Weger [34]. By using the theory of Galois representations and modular forms Bennett and Skinner [8] solved (4.1) for $D = 55$ and $D = 95$. On combining the theory of linear forms in logarithms with Bennett and Skinner's method and with several additional ideas, Bugeaud, Mignotte and Siksek [19] gave all the solutions of (1) for the remaining 19 values of $D \leq 100$. Bugeaud and Shorey [18] used a beautiful result of Bilu, Hanrot and Voutier [10] to solve completely several equations of type (4.1) both for $w = 1$ and for $w = 4$ when D is an odd positive square-free integer, $n \geq 3$ is an odd prime not dividing the class number of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ and $D \not\equiv 7 \pmod{8}$ if $w = 1$ (see Corollaries 3, 5 and 7 of [18]).

In recent years, equation (4.1) has been considered also in the more general case when D is no longer fixed but $D \in \mathcal{S}$ with $D > 0$. It follows from Theorem 2 of [45] that in (4.1) n can be bounded from above by an effectively computable constant depending only on f, P and s . In [25] an effective upper bound was derived for n which depends only on Q . By using the powerful method of Bilu,

Hanrot and Voutier [10] equation (4.1) can be completely solved for $w = 1$ and some special sets of primes S . Namely, if in (4.1) $D \in \mathcal{S}$ with $S = \{2\}$ then all solutions of (1) were given by Cohn [20] and Arif and Muriefah [1] and [6]. For $S = \{3\}$, equation (4.1) was solved completely by Arif and Muriefah [3] and Luca [30]. When $S = \{q\}$, where $q \geq 5$ is an odd prime with $q \not\equiv 7 \pmod{8}$, Arif and Muriefah [7] determined all solutions of the equation $x^2 + q^{2k+1} = y^n$, where $\gcd(n, 3h_0) = 1$ and $n \geq 3$. Here h_0 denotes the class number of the field $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$. For $S = \{2, 3\}$, Luca [31] gave the complete solution of (4.1).

If in equation (4.1) $(w, D) = (2, a^2)$, where a is a given positive integer Pink and Tengely [42] considered the equation

$$(4.2) \quad x^2 + a^2 = 2y^n,$$

where the unknowns $x, y, n \in \mathbf{Z}$ satisfy that $n \geq 3, \gcd(x, y) = 1$. The authors gave an explicit upper bound for n depending only on a . If in (4.2) n is an odd prime this bound was improved by Tengely [47].

In this chapter we generalize these results of [42] and [47] to the case when $(w, D) = (2, a^2)$, where a is a positive integer with $a \in \mathcal{S}$. In this case a is not fixed, but is of the form $a = p_1^{z_1} \dots p_s^{z_s}$, where p_1, \dots, p_s are given primes and z_1, \dots, z_s are also unknown non-negative integers. As a generalization of (4.2) consider the equation

$$(4.3) \quad x^2 + (p_1^{z_1} \dots p_s^{z_s})^2 = 2y^n,$$

where the unknowns x, y, n and z_i ($1 \leq i \leq s$) satisfy that $n \geq 3, \gcd(x, y) = 1$ and $z_1, \dots, z_s \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. It is clear that $x = y = 1, z_1, \dots, z_s = 0$ is always a solution which will be called *trivial*. It follows from Theorem 2 of [45] (see also Theorem 1 of [25]), that apart from the trivial solution, in (4.3) $n \leq C(P, s)$ holds with an effectively computable constant C depending only on P and s . We make this constant C explicit, and prove the following generalization of Theorem 1 of [42] and Theorem 1 of [47].

Theorem 4.1. *For every non-trivial solution of (4.3) with n odd, we have*

$$n \leq 90813 \quad \text{if } (P, s) = (3, 1),$$

and

$$n < 5371sP(P+1)\log P$$

otherwise.

To formulate our further results we introduce some notation. Let $f(x) = x^2 + Ax + B$ where $A, B \in \mathbf{Z}$ and denote by D_f the discriminant of f . Set

$$D = \begin{cases} -\frac{D_f}{4} & \text{if } D_f \text{ is even,} \\ -D_f & \text{if } D_f \text{ is odd.} \end{cases}$$

Suppose that $D \in \mathcal{S}$ and $D > 0$. Let c and d be non-zero integers such that $D = dc^2$ and $d > 0$ denotes the square-free part of $D > 0$. Further, for any $k \in \mathbf{Z}$ and rational prime p denote by $\text{ord}_p(k)$ the greatest power of p to which p divides k .

Consider the equation

$$(4.4) \quad f(x) = y^n$$

in integer unknowns x, y, n with $n \geq 3$ prime and $y > 1$. We say that a solution (x, y, n) of (4.4) is *exceptional* if

$$\text{ord}_2(D_f) = 2, \quad y \text{ is even and } d \equiv 7 \pmod{8}.$$

Write h for the class number of the imaginary quadratic field $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$. Further, denote by $h(-4D)$ the number of classes of positive binary quadratic forms with discriminant $-4D$.

Theorem 4.2. *If (x, y, n) is a non-exceptional solution of (4.4) with $x \neq -\frac{A}{2}$ and $\gcd(y, D) = 1$, then except for the infinite families of equations*

$$x^2 + Ax + B = y^n,$$

where

$$(A, B, x, y, D, n) \in \left\{ \begin{array}{l} (A, (A^2 + 7)/4, (11 - A)/2, 2, 7, 5), \\ (A, (A^2 + 7)/4, (181 - A)/2, 2, 7, 13), \\ (A, (A^2 + 11)/4, (31 - A)/2, 3, 11, 5), \\ (A, (A^2 + 19)/4, (559 - A)/2, 5, 19, 7) \end{array} \right\}$$

if A is odd and

$$(A, B, x, y, D, n) \in \left\{ \begin{array}{l} (A, (A^2 + 76)/4, (44868 - A)/2, 55, 19, 5), \\ (A, (A^2 + 1364)/4, (5519292 - A)/2, 377, 341, 5) \end{array} \right\}$$

if A is even, then

$$n = 3 \quad \text{or} \quad n \mid h(-4D).$$

Further, in the latter case

$$n \leq \max\{3, P\}, \quad \text{if} \quad n \nmid h$$

and

$$n < \frac{4}{\pi} \sqrt{Q} \log(2e\sqrt{Q}), \quad \text{if} \quad n \mid h.$$

We note that the assumption $x \neq -\frac{A}{2}$ is necessary. Otherwise using (4.4) and supposing that D_f is even we get

$$y^n = D,$$

whence by $D \in \mathcal{S}$ we see that n cannot be bounded.

Equation (4.4) can be reduced to an equation of the type (4.1), namely we obtain the following equation

$$(4.5) \quad X^2 + D = wY^n,$$

where $w \in \{1, 4\}$,

$$(4.6) \quad \gcd(X, Y) = \gcd(Y, D) = 1$$

and

$$(4.7) \quad \begin{cases} w = 1, \text{ if } D_f \text{ is even, } w = 4, \text{ if } D_f \text{ is odd,} \\ D \in \mathcal{S}, D > 0, X \geq 1, Y > 1, n \geq 3 \text{ prime.} \end{cases}$$

We shall deduce Theorem 4.2 from the following Theorem 4.3. We say that a solution (X, Y, n) of (4.5) is *exceptional* if

$$w = 1, \text{ ord}_2(D_f) = 2, Y \text{ is even and } d \equiv 7 \pmod{8}.$$

Theorem 4.3. *Consider the equation (4.5) under the assumptions (4.6) and (4.7). If (X, Y, n) is a non-exceptional solution of (4.5), then except for*

$$(w, Y, D, n) \in \left\{ \begin{array}{l} (4, 2, 7, 5), (4, 2, 7, 13), \\ (4, 3, 11, 5), (4, 5, 19, 7), \\ (1, 55, 19, 5), (1, 377, 341, 5) \end{array} \right\}$$

we have

$$n = 3 \quad \text{or} \quad n \mid h(-4D).$$

Further, in the latter case

$$n \leq \max\{3, P\} \quad \text{if} \quad n \nmid h$$

and

$$n < \frac{4}{\pi} \sqrt{Q} \log(2e\sqrt{Q}) \quad \text{if} \quad n \mid h.$$

This should be compared with Corollaries 5 and 7 of Bugeaud and Shorey [18], where equations of type (4.5) were considered with square-free $D > 0$. In Corollary 5 they showed that the equation $x^2 + 4D = y^n$ has no solution with $n \geq 5$. Here D is square-free and n is an odd prime not dividing the class number of the field $\mathbf{Q}(\sqrt{-D})$. Further, in Corollary 7 of [18] the authors considered the equation (4.5), where $w \in \{1, 4\}$, D is an odd positive square-free integer and $n \geq 3$ is an odd prime not dividing the class number of the field $\mathbf{Q}(\sqrt{-D})$. Under these assumptions they solved completely equation (4.5) in the case when

$$w = 1, D \equiv 1 \pmod{4}, n \geq 3 \quad \text{or} \quad w = 4, D \equiv 7 \pmod{8}, n \geq 3 \quad \text{or}$$

$$w = 4, D \equiv 3 \pmod{8}, n \geq 5.$$

In contrast with [18], in our Theorem 4.3 it is not assumed that D is square-free.

5 THE RESOLUTION OF THE DIOPHANTINE EQUATION $x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$

We keep the notations of Chapter 4. In this Chapter we give all solutions of an equation of type (4.1) in the case when $D \in \mathcal{S}$, where $S = \{2, 3, 5, 7\}$ and $w = 1$. Namely, we consider the equation

$$(5.1) \quad x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n,$$

where the unknowns $x, y, n, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ satisfy the conditions $x \geq 1, y \geq 2, n \geq 3$ and $\gcd(x, y) = 1$. By combining Theorem 4.3 with some results of Cohn [23] and de Weger [50], we give all non-exceptional solutions of equation (5.1). We recall that in this special case a solution is called *exceptional* if $\alpha = 0$, y is even and $3^\beta 5^\gamma 7^\delta$ is either of the form $7c^2$ or of the form $15c^2$. We note that if our equation (5.1) is of the form $x^2 + 7c^2 = y^n$ or $x^2 + 15c^2 = y^n$ and (x, y, n) is an exceptional solution of (5.1), then we cannot use the parametrization for (x, y) provided by Lemma 5.1 (see e.g. [21]). Hence we consider only the non-exceptional solutions of (5.1). We note that using another approach Bugeaud, Mignotte and Siksek [19] solved the equations $x^2 + 7c^2 = y^n$ and $x^2 + 15c^2 = y^n$ when $1 \leq 7c^2 < 15c^2 \leq 100$.

Theorem 5.1. *All non-exceptional solutions of equation (5.1) are listed in the Table 5.1.*

We note that if in (5.1) $\alpha \geq 1$ is assumed then, by $\gcd(x, y) = 1$, y is odd. Hence the solutions (x, y, n) of (5.1) are always non-exceptional. Thus in this case we can list all the solutions of equation (5.1).

Corollary 5.1. *All solutions of (5.1) with $\alpha \geq 1$ are listed in the Table 5.1*

We note that the solutions of equation (5.1) with $\alpha \geq 1$ are those which are not marked with an asterisk in the Table. Further, in this case our Theorem 5.1 is a generalization of a result of Luca [31] mentioned above.

The solutions of (5.1) with $\alpha = 0$ are marked with an asterisk.

Table 5.1

| | | | | | | | | |
|--------------------------|----------|-----|-------------------|------|-----|-------------------------|----------|-----|
| D | y | n | D | y | n | D | y | n |
| 2^2 | 5 | 3 | $3^5 *$ | 7 | 3 | $2^4 3^5 5^4$ | 601 | 3 |
| $3^4 *$ | 13 | 3 | $3^5 5^2 *$ | 19 | 3 | $3^9 5^4 *$ | 679 | 3 |
| $7^2 *$ | 65 | 3 | $2^2 3^5$ | 13 | 3 | $2^2 3^5 5^4 7^2$ | 709 | 3 |
| $2^4 3^4$ | 193 | 3 | $2^2 3^5 7^2$ | 37 | 3 | $2^8 3^3 5^4 7^2$ | 849 | 3 |
| $3^6 7^2 *$ | 585 | 3 | $2^2 3^7 5^2$ | 61 | 3 | $2^2 3^9 7^2$ | 757 | 3 |
| $3^6 5^2 *$ | 2701 | 3 | $2^4 3^5 5^2$ | 49 | 3 | $2^2 3^7 5^2 7^4$ | 2221 | 3 |
| $2^6 3^4 7^2$ | 37633 | 3 | $3^5 5^2 *$ | 31 | 3 | $2^6 3^5 7^4$ | 2353 | 3 |
| 2 | 3 | 3 | $2^4 3^5 5^2 7^2$ | 169 | 3 | $3^3 5^4 7^4 *$ | 2451 | 3 |
| 25^4 | 11 | 3 | $3^5 7^2 *$ | 43 | 3 | $2^8 3^1 17^4$ | 4993 | 3 |
| $2^3 5^2$ | 9 | 3 | $2^2 3^5 5^2 7^2$ | 109 | 3 | $3^9 5^2 7^4 *$ | 2671 | 3 |
| $2^3 4^5 2$ | 19 | 3 | $3^7 7^2 *$ | 67 | 3 | $2^{10} 3^5 5^2 7^4$ | 3361 | 3 |
| $2^5 5^2$ | 41 | 3 | $3^5 5^2 7^2 *$ | 79 | 3 | $2^4 3^{11} 5^4 7^2$ | 5161 | 3 |
| $2^7 5^6$ | 129 | 3 | $2^6 3^7 7^2$ | 193 | 3 | $2^{10} 3^7 7^2$ | 4033 | 3 |
| $2^3 3^4$ | 97 | 3 | $2^4 3^7$ | 73 | 3 | $2^6 3^{11} 5^2$ | 6481 | 3 |
| $2^3 3^4 5^4$ | 121 | 3 | $3^7 5^2 *$ | 91 | 3 | $3^9 5^6 7^4 *$ | 12979 | 3 |
| $2^3 6^5 2$ | 211 | 3 | $2^8 3^9 5^2$ | 889 | 3 | $3^7 5^6 7^2 *$ | 15751 | 3 |
| $2^5 3^4 5^4$ | 409 | 3 | $2^4 3^9 5^2 7^2$ | 1009 | 3 | $2^{12} 3^5 5^6$ | 16009 | 3 |
| $2^9 5^2$ | 681 | 3 | $2^8 3^5 5^2 7^2$ | 1129 | 3 | $2^{12} 3^9 5^2 7^2$ | 17329 | 3 |
| $2^3 3^6 5^8$ | 1489 | 3 | $2^2 3^7 5^2 7^2$ | 1261 | 3 | $2^{10} 3^9 5^6 7^2$ | 27721 | 3 |
| $2 \cdot 3^4 5^6 7^2$ | 1051 | 3 | $2^4 3^7 5^2 7^4$ | 2041 | 3 | $2^{14} 3^{11} 5^4 7^2$ | 51361 | 3 |
| $2 \cdot 3^4 5^2 7^2$ | 1171 | 3 | $3^7 5^2 7^2 *$ | 151 | 3 | $2^8 3^7 5^4 7^2$ | 50401 | 3 |
| $2 \cdot 3^8 5^6$ | 1819 | 3 | $2^4 3^5 5^4 7^4$ | 1801 | 3 | $3^{13} 5^2 7^4 *$ | 59539 | 3 |
| $2^9 3^4 5^{12}$ | 21769 | 3 | $3^5 5^2 7^2 *$ | 211 | 3 | $3^{13} 5^6 7^2 *$ | 60799 | 3 |
| $2^9 3^6 5^2$ | 6129 | 3 | $2^6 3^5 5^2$ | 241 | 3 | $2^2 3^{13} 5^4 7^6$ | 93349 | 3 |
| $2^5 3^4 5^2$ | 9601 | 3 | $2^6 3^7 5^4$ | 481 | 3 | $2^8 3^5 5^6 7^6$ | 129649 | 3 |
| $2^7 3^6 5^4$ | 13849 | 3 | $2^6 3^5 5^2 7^2$ | 361 | 3 | $2^{10} 3^7 5^8 7^4$ | 362401 | 3 |
| $2^5 3^4 5^8 7^2$ | 19441 | 3 | $3^7 5^4 7^2 *$ | 499 | 3 | $2^{18} 3^5 5^2 7^6$ | 1053721 | 3 |
| $2^3 3^6 5^4 7^2$ | 42361 | 3 | $2^2 3^5 5^2 7^2$ | 421 | 3 | $2^8 3^5 5^4 7^8$ | 5762401 | 3 |
| $2 \cdot 3^6 5^{14} 7^4$ | 440491 | 3 | $2^2 3^9 5^2 7^2$ | 589 | 3 | $3^{17} 5^8 7^2 *$ | 19136251 | 3 |
| $2^7 3^4 5^2 7^4$ | 92198401 | 3 | $2^2 3^5 5^4 7^2$ | 541 | 3 | $5 \cdot 7^2 *$ | 9 | 3 |

| D | y | n | D | y | n | D | y | n |
|-------------------------|--------|-----|-----------------------|-----------|-----|----------------------|--------|-----|
| $2^2 5 \cdot 7^2$ | 29 | 3 | $2^4 3^6 7$ | 12097 | 3 | $2^3 3^7 5$ | 169 | 3 |
| $3^4 \cdot 5 *$ | 61 | 3 | $2^2 3^8 5^6 7^3$ | 26341 | 3 | $2^3 3^{11} 5$ | 241 | 3 |
| $3^4 5 \cdot 7^4 *$ | 109 | 3 | $2^2 5^8 7^5$ | 89429 | 3 | $2^5 3^7 5$ | 649 | 3 |
| $2^2 5 \cdot 7^6$ | 141 | 3 | $2^4 5^{14} 7^3$ | 182441 | 3 | $2 \cdot 3^{11} 5^3$ | 919 | 3 |
| $2^2 5^3 7^2$ | 669 | 3 | $2^8 3^6 5^{12} 7$ | 209161 | 3 | $2^3 3^5 5$ | 1441 | 3 |
| $2^4 3^4 5 \cdot 7^4$ | 1009 | 3 | $2^{12} 3^4 5^4 7^3$ | 16859161 | 3 | $2^7 3^{15} 5$ | 3289 | 3 |
| $2^6 3^4 \cdot 5$ | 3841 | 3 | $2 \cdot 5^7 2$ | 11 | 3 | $23^7 5^5$ | 24991 | 3 |
| $5^5 7^6 *$ | 4281 | 3 | $25^3 7^2$ | 331 | 3 | $2^5 3^{11} 5^7 2$ | 31441 | 3 |
| $2^4 3^6 5 \cdot 7^4$ | 8689 | 3 | $2^3 3^4 5$ | 481 | 3 | $2^3 3^{23} 5^7 2$ | 66889 | 3 |
| $3^6 5^3 7^8 *$ | 15901 | 3 | $2^3 3^4 5^7 4$ | 529 | 3 | $2^3 3^{15} 5^3 7^2$ | 196729 | 3 |
| $2^8 3^4 5 \cdot 7^8$ | 17761 | 3 | $2^5 3^4 5^7 4$ | 1969 | 3 | $2^9 3^7 5^3$ | 256009 | 3 |
| $3^8 5 \cdot 7^2 *$ | 238141 | 3 | $2^3 3^6 5^7 8$ | 6721 | 3 | $2^4 3^4 5 \cdot 7$ | 6721 | 3 |
| $2 \cdot 3^3$ | 7 | 3 | $2^7 3^4 5^3 7^{12}$ | 309649 | 3 | $23^5 5^6 7$ | 379 | 3 |
| $2^3 3^3 7^2$ | 25 | 3 | $2^9 3^6 5^7 4$ | 276529 | 3 | $23^5 5^2 7$ | 499 | 3 |
| $2 \cdot 3^3 5^2 7^4$ | 151 | 3 | $2^3 3^8 5^3 7^4$ | 972049 | 3 | $2^5 3^3 5^4 7^3$ | 721 | 3 |
| $2 \cdot 3^5 7^2$ | 79 | 3 | $2^3 3^4 7$ | 673 | 3 | $2^3 3^5 5^4 7$ | 2041 | 3 |
| $2^5 3^3 7^2$ | 121 | 3 | $2 \cdot 3^{10} 7^3$ | 122479 | 3 | $2^7 3^3 5^8 7$ | 4209 | 3 |
| $2 \cdot 3^3 5^2$ | 199 | 3 | $2^3 3^{10} 5^4 7$ | 306180001 | 3 | $2^3 3^5 5^{12} 7$ | 17641 | 3 |
| $2 \cdot 3^5 7^6$ | 415 | 3 | $3^3 5 *$ | 19 | 3 | $23^9 5^2 7$ | 40819 | 3 |
| $2^3 3^3 7^4$ | 337 | 3 | $2^6 3^7 5$ | 103681 | 3 | $2^{11} 3^3 5^4 7^3$ | 57169 | 3 |
| $2^7 3^3 7^2$ | 505 | 3 | $3^5 7 *$ | 25 | 3 | $23^3 5^6 7^5$ | 134331 | 3 |
| $2 \cdot 3^7 7^2$ | 655 | 3 | $3^7 7 *$ | 37 | 3 | $23^7 5^{10} 7^3$ | 219139 | 3 |
| $2^5 3^5$ | 1153 | 3 | $2^2 3^9 7$ | 85 | 3 | $2^7 3^5 5^2 7$ | 806401 | 3 |
| $2^9 3^3 7^6$ | 1705 | 3 | $2^2 3^5 7$ | 109 | 3 | $2^3 3^4 5 \cdot 7$ | 3361 | 3 |
| $2^3 3^5 5^2 7^4$ | 7249 | 3 | $3^5 7 *$ | 253 | 3 | $2^4 3^5 5^7$ | 20161 | 3 |
| $2^3 3^3 5^2 7^2$ | 39201 | 3 | $2^4 3^{15} 7$ | 1177 | 3 | $2^3 3^7 5^7$ | 1129 | 3 |
| $2^7 3^7 7^8$ | 43873 | 3 | $2^4 3^7 7^3$ | 385 | 3 | $2^3 3^{11} 5^7$ | 1201 | 3 |
| $2 \cdot 3^{11} 7^{10}$ | 69295 | 3 | $2^4 3^7 7$ | 457 | 3 | $2^5 3^{15} 5^7$ | 5209 | 3 |
| $2^{15} 3^3 7^2$ | 131065 | 3 | $3^5 5^2 7^3 *$ | 721 | 3 | $2^3 3^{23} 5^3 7$ | 87049 | 3 |
| $5^2 7 *$ | 11 | 3 | $3^{11} 5^2 7 *$ | 781 | 3 | $2^7 3^7 5^7$ | 17929 | 3 |
| $2^2 5^4 7$ | 29 | 3 | $2^6 3^{11} 7$ | 1873 | 3 | $2^3 3^5 5^3 7$ | 252001 | 3 |
| $2^2 7$ | 37 | 3 | $2^2 3^5 7^3$ | 5485 | 3 | $2^6 3^2$ | 5 | 4 |
| $3^4 5^2 7 *$ | 79 | 3 | $2^8 3^{11} 7^3$ | 6601 | 3 | $7^2 *$ | 5 | 4 |
| $5^{10} 7^3 *$ | 1499 | 3 | $2^4 3^7 5^2 7$ | 11209 | 3 | $2^6 3^2 5^2 7^2$ | 29 | 4 |
| $3^6 5^6 7 *$ | 631 | 3 | $2^8 3^5 7$ | 64513 | 3 | $2^6 3^2 5^2$ | 13 | 4 |
| $2^4 3^4 5^4 7$ | 1369 | 3 | $2^2 3^9 5^4 7^3$ | 70189 | 3 | $2^8 3^2 5^2$ | 17 | 4 |
| $2^4 3^4 5^8 7$ | 1969 | 3 | $2^4 3^{23} 5^2 7^3$ | 607849 | 3 | $2^8 3^2 7^2$ | 25 | 4 |
| $3^4 5^2 7^3 *$ | 4111 | 3 | $2^{10} 3^{19} 5^2 7$ | 723361 | 3 | $2^6 3^2 5^2 7^2$ | 37 | 4 |
| $2^6 3^4 5^4 7$ | 5401 | 3 | $3^{31} 5^4 7$ | 4800469 | 3 | $2^6 3^4 5^2 7^2$ | 53 | 4 |
| $2^{10} 5^2 7^3$ | 9569 | 3 | $2 \cdot 3^7 5$ | 31 | 3 | $2^8 3^4 5^2$ | 41 | 4 |

| D | y | n |
|---------------------|------|-----|
| $2^{10}3^47^2$ | 65 | 4 |
| $2^{10}3^25^27^2$ | 113 | 4 |
| $2^{12}3^45^47^2$ | 337 | 4 |
| $2^{10}3^25^47^4$ | 1201 | 4 |
| 2^5 | 3 | 4 |
| 2^77^2 | 9 | 4 |
| $2^53^27^2$ | 11 | 4 |
| 2^73^2 | 17 | 4 |
| $2^53^25^27^2$ | 43 | 4 |
| $2^55^27^4$ | 51 | 4 |
| $2^95^27^2$ | 57 | 4 |
| $2^93^47^4$ | 113 | 4 |
| $2^55^27^2$ | 99 | 4 |
| 2^53 | 5 | 4 |
| 2^63 | 7 | 4 |
| $2^43^55^27^2$ | 49 | 4 |
| 2^837^2 | 97 | 4 |
| $2^43^35^47^2$ | 133 | 4 |
| 2^45 | 3 | 4 |
| 2^43^25 | 7 | 4 |
| 2^65 | 9 | 4 |
| $5^37^2 *$ | 21 | 4 |
| $2^43^25 \cdot 7^2$ | 47 | 4 |
| 2^83^45 | 161 | 4 |
| 2^535^2 | 7 | 4 |
| 2^735^2 | 11 | 4 |
| $2^53^35^4$ | 29 | 4 |
| $2^7 \cdot 35^2$ | 49 | 4 |
| $2^93^35^2$ | 59 | 4 |
| $2^735^47^2$ | 73 | 4 |
| $2^53^35^27^2$ | 103 | 4 |
| $2^{11}35^6$ | 131 | 4 |
| $2^33^77^2$ | 175 | 4 |
| $2^935^27^4$ | 4801 | 4 |
| $7 *$ | 2 | 4 |
| 2^37 | 3 | 4 |
| $5^27 *$ | 4 | 4 |
| 2^63^27 | 11 | 4 |
| $5^47^3 *$ | 22 | 4 |
| 2^83^47 | 23 | 4 |

| D | y | n |
|-------------------|-----|-----|
| 2^63^67 | 29 | 4 |
| $2^63^25^27$ | 53 | 4 |
| $2^{10}3^27$ | 127 | 4 |
| $2^63^{10}5^27^3$ | 443 | 4 |
| $2^{12}3^85^27$ | 431 | 4 |
| 2^53^25 | 7 | 4 |
| 2^53^45 | 11 | 4 |
| 2^93^65 | 37 | 4 |
| 2^73^25 | 13 | 4 |
| 2^53^25 | 19 | 4 |
| $2^73^457^2$ | 89 | 4 |
| $2^53^65^37^2$ | 223 | 4 |
| $2^53^{10}57^2$ | 247 | 4 |
| $2^{11}3^25^3$ | 253 | 4 |
| 2^33^27 | 5 | 4 |
| 2^55^27 | 9 | 4 |
| 2^33^47 | 13 | 4 |
| 2^77 | 15 | 4 |
| 2^95^47 | 39 | 4 |
| $2^33^27^3$ | 19 | 4 |
| $2^53^25^27$ | 23 | 4 |
| $2^33^87^5$ | 173 | 4 |
| $2^53^25^67$ | 127 | 4 |
| $2^73^45^47$ | 137 | 4 |
| $2^93^25^27$ | 449 | 4 |
| $3 \cdot 5 *$ | 2 | 4 |
| $3^35 *$ | 4 | 4 |
| $35^3 *$ | 8 | 4 |
| 2^6357^2 | 17 | 4 |
| $2^83 \cdot 5$ | 31 | 4 |
| $2^63^357^2$ | 47 | 4 |
| $3^75^3 *$ | 34 | 4 |
| $2^43 \cdot 7$ | 5 | 4 |
| 2^435^27 | 11 | 4 |
| $2^43^35^27$ | 17 | 4 |
| $2^63 \cdot 5^47$ | 31 | 4 |
| 2^635^27 | 19 | 4 |
| 2^435^27 | 23 | 4 |
| 2^835^27 | 37 | 4 |
| 2^63^37 | 55 | 4 |

| D | y | n |
|---------------------------|------|-----|
| $2^{10}3^35^67$ | 721 | 4 |
| $2^43^55^47^7$ | 293 | 4 |
| $2^{14}35^27^3$ | 2053 | 4 |
| $2^53 \cdot 57^2$ | 13 | 4 |
| $2^53 \cdot 5$ | 11 | 4 |
| $2^73 \cdot 57^2$ | 23 | 4 |
| $2^53^357^4$ | 59 | 4 |
| $2^{11}3^357^2$ | 263 | 4 |
| $2^935^37^6$ | 407 | 4 |
| $2^53^55^37^2$ | 493 | 4 |
| $2^63^25 \cdot 7$ | 71 | 4 |
| $2^53 \cdot 7$ | 13 | 4 |
| $2^53^75^47$ | 8749 | 4 |
| $2^53^25 \cdot 7$ | 17 | 4 |
| $2^53^45 \cdot 7$ | 19 | 4 |
| $2^73^65 \cdot 7$ | 43 | 4 |
| $2^93^25 \cdot 7$ | 67 | 4 |
| $2^53^{10}5^37$ | 257 | 4 |
| $2^53^25^37$ | 251 | 4 |
| $2^63 \cdot 5 \cdot 7$ | 11 | 4 |
| $2^83 \cdot 5 \cdot 7$ | 13 | 4 |
| $2^{10}3 \cdot 5 \cdot 7$ | 19 | 4 |
| $2^63^35 \cdot 7$ | 31 | 4 |
| $2^63 \cdot 5 \cdot 7$ | 41 | 4 |
| $2^{14}3^35 \cdot 7$ | 71 | 4 |
| $2^{12}3^35^3 \cdot 7$ | 157 | 4 |
| $2^{10}35^37^3$ | 359 | 4 |
| $2^{20}3 \cdot 57^3$ | 517 | 4 |
| $2^53 \cdot 5 \cdot 7$ | 29 | 4 |

REFERENCES

- [1] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *On the Diophantine equation $x^2 + 2^k = y^n$* , Internat. J. Math. Math. Sci. **20** (1997), 299–304.
- [2] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *On a Diophantine equation*, Bull. Austral. Math. Soc. **57** (1998), 189–198.
- [3] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *The Diophantine equation $x^2 + 3^m = y^n$* , Internat. J. Math. Math. Sci. **21** (1998), 619–620.
- [4] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *The Diophantine equation $x^2 + 5^{2k+1} = y^n$* , Indian J. Pure Appl. Math. **30** (1999), 229–231.
- [5] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *The Diophantine equation $x^2 + q^{2k} = y^n$* , Arab. J. Sci. Eng. Sect. A Sci. **26** (2001), 53–62.
- [6] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *On the Diophantine equation $x^2 + 2^k = y^n$ II*, Arab J. Math. Sci. **7** (2001), 67–71.
- [7] S.A. Arif and F.S.A. Muriefah, *On the Diophantine equation $x^2 + q^{2k+1} = y^n$* , J. Number Theory **95** (2002), 95–100.
- [8] M.A. Bennett and C.M. Skinner, *Ternary diophantine equations via Galois representations and modular forms*, Canad. J. Math. **56**/1 (2004) 23–54.
- [9] A. Bérczes, B. Brindza and L. Hajdu, *On power values of polynomials*, Publ. Math. Debrecen **53** (1998), 375–381.
- [10] Y. Bilu, G. Hanrot and P.M. Voutier, *Existence of primitive divisors of Lucas and Lehmer numbers. With an appendix by M. Mignotte.*, J. Reine Angew. Math. **539** (2001), 75–122.
- [11] B. Brindza, *Zeros of polynomials and exponential Diophantine equations*, Compositio Math. **61** (1987), 135–157.
- [12] B. Brindza, J.-H. Evertse and K. Győry, *Bounds for the solutions of some diophantine equations in terms of discriminants*, J. Austral Math. Soc. **51** (1991), 8–26.
- [13] B. Brindza, K. Győry and R. Tijdeman, *The Fermat equation with polynomial values as base variables*, Invent. Math. **80** (1985), 139–151.
- [14] Y. Bugeaud, *Sur la distance entre deux puissances pures*, C. R. Acad. Sci. Paris, **322** (1996), 1119–1121.
- [15] Y. Bugeaud, *On the diophantine equation $x^2 - p^m = \pm y^n$* , Acta Arith. **80** (1997), 213–223.
- [16] Y. Bugeaud and K. Győry, *On binomial Thue-Mahler equations*, Periodica Math. Hungar. **49** (2004), 25–34.
- [17] Y. Bugeaud and L. Hajdu, *Lower bounds for the difference $|ax^n - by^m|$* , Acta Math. Hungar. **87** (2000), 279–286.

-
- [18] Y. Bugeaud and T.N. Shorey, *On the number of solutions of the generalized Ramanujan-Nagell equation*, J. reine angew. Math. **539** (2001), 55-74.
- [19] Y. Bugeaud, M. Mignotte and S. Siksek, *Classical and modular approaches to exponential and diophantine equations II. The Lebesgue-Nagell equation*, Preprint.
- [20] J.H.E. Cohn, *The diophantine equation $x^2 + 2^k = y^n$* , Arch. Math (Basel) **59** (1992), 341-344.
- [21] J.H.E. Cohn, *The diophantine equation $x^2 + C = y^n$* , Acta Arith. **65** (1993), 367-381.
- [22] J.H.E. Cohn, *The Diophantine equation $x^2 + 2^k = y^n$ II.*, Int. J. Math. Math. Sci. **22** (1999), 459-462.
- [23] J.H.E. Cohn, *The diophantine equation $x^2 + C = y^n$* , Acta Arith. **109** (2003), 205-206.
- [24] K. Györy, *Polynomials and binary forms with given discriminant*, (to appear).
- [25] K.Györy, I. Pink and Á. Pintér, *Power values of polynomials and binomial Thue-Mahler equations*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), 341-362.
- [26] K. Györy and Kunrui Yu, *Bounds for the solutions of S -unit equations and decomposable form equations*, Acta. Arith. (to appear).
- [27] J. Haristoy, *Équations diophantiennes exponentielles*, Thèse de docteur, Strasbourg, (2003).
- [28] V.A. Lebesgue, *Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation $x^m = y^2 + 1$* , Nouvelle Annales des Mathématiques (1) **9** (1850), 178-181.
- [29] W. Ljunggren *On a diophantine equation*, Kong. Norske Videnskabers Selskab Forhandl. v. 18, Nr. 32 Trondheim (1945), 125-128.
- [30] F. Luca, *On a diophantine equation*, Bull. Austral. Math. Soc. **61** (2000), 241-246.
- [31] F. Luca, *On the equation $x^2 + 2^a 3^b = y^n$* , Int. J. Math. Sci. **29** (2002), 239-244.
- [32] E. M. Matveev, *An explicit lower bound for a homogeneous rational linear form in the logarithms of algebraic numbers II.*, Izvestiya: Mathematics **64** (2000), 1217-1269.
- [33] M. Mignotte, *On the Diophantine equation $D_1 x^2 + D_2^m = 4y^n$* , Portugal. Math. **54** (1997), 457-460.
- [34] M. Mignotte and B.M.M de Weger, *On the equations $x^2 + 74 = y^5$ and $x^2 + 86 = y^5$* , Glasgow Math. J. **38**/1 (1996), 77-85.

-
- [35] F.S.A. Muriefah, *On the Diophantine equation $px^2 + 3^n = y^p$* , Tamkang J. Math. **31** (2000), 79–84.
- [36] F.S.A. Muriefah, *On the Diophantine equation $Ax^2 + 2^{2m} = y^n$* , Int. J. Math. Math. Sci. **25** (2001), 373–381.
- [37] T. Nagell, *Verallgemeinerung eines Fermatschen Satzes*, Arch. Math. **5** (1954), 153–159.
- [38] T. Nagell *Contributions to the theory of a category of diophantine equations of the second degree with two unknowns*, Nova Acta Reg. Soc. Upsal. IV Ser. 16, Uppsala 1955, pp. 1–38.
- [39] I. Pink, *On the differences between polynomial values and perfect powers*, Publ. Math. Debrecen **63** (2003), 461–472.
- [40] I. Pink, *On the diophantine equation $x^2 + (p_1^{z_1} \dots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$* , Publ. Math. Debrecen **65** (2004), 205–213.
- [41] I. Pink, *On the diophantine equation $x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$* , Publ. Math. Debrecen, (to appear).
- [42] I. Pink and Sz. Tengely, *Full powers in arithmetic progressions*, Publ. Math. Debrecen **57** (2000), 535–545.
- [43] A. Schinzel and R. Tijdeman, *On the equation $y^m = P(x)$* , Acta Arith. **31** (1976), 199–204.
- [44] T. N. Shorey, *On the greatest prime factor of $ax^n + by^m$* Acta Arith. **36** (1980), 21–25.
- [45] T.N. Shorey, A.J. van der Poorten, R. Tijdeman and A. Schinzel, *Applications of the Gelfond-Baker method to Diophantine equations*, in: Transcendence Theory: Advances and Applications, Academic Press, London-New York, San Francisco, (1977), 59–77.
- [46] T.N. Shorey and R. Tijdeman, *Exponential Diophantine Equations*, Cambridge University Press, Cambridge (1986).
- [47] Sz. Tengely, *On the Diophantine equation $x^2 + a^2 = 2y^p$* , Indag. Math. (N.S.) **15** (2004), 291–304.
- [48] R. Tijdeman, *Applications of the Gelfond-Baker method to rational number theory*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 13 (1974), 399–416.
- [49] J. Turk, *On the difference between perfect powers*, Acta Arith. **45** (1986), 289–307.
- [50] B.M.M de Weger, *Algorithms for diophantine equations*, **65** of CWI Tract, Stichting Mathematisch Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1989.
- [51] Kunrui Yu, *p -adic logarithmic forms and group varieties III*, (to appear).

- [52] Kunrui Yu and Ling-kei Hung, *On binary recurrence sequences*, Indag. Math. **6** (1995), 341–354.

List of publications of the author

1. I. Pink and Sz. Tengely, *Full powers in arithmetic progressions*, Publ. Math. Debrecen **57** / 3-4, (2000), 535-545.
2. I. Pink, *On the differences between polynomial values and perfect powers*, Publ. Math. Debrecen **633** /3, (2003), 461-472.
3. I. Pink *On the diophantine equation $x^2 + (p_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s})^2 = 2y^n$* , Publ. Math. Debrecen **65** /1-2, (2004), 205-213.
4. K. Györy, I. Pink and Á. Pintér *Power values of polynomials and binomial Thue-Mahler equations*, Publ. Math. Debrecen **65** / 3-4, (2004), 341-362.
5. I. Pink *On the diophantine equation $x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$* , Publ. Math. Debrecen, közlésre elfogadva.

List of talks given by the author

1. On the difference $|F(x) - by^m|$, 15th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Ostravice, September 3-8, 2001.
2. On the differences between polynomial values and perfect powers, Explicit Algebraic Number Theory: NWO-OTKA workshop, Leiden, September 27-October 2, 2002.
3. Polinomok és teljes hatványok távolságáról, Kiss Péter, az egri és debreceni számelmélész. Számelméleti tudományos emlékülés, Eger 2002. november 22-23.
4. Teljes hatványok és binom Thue-Mahler egyenletek, Soproni Diofantikus Nap, Sopron 2004. október 9.
5. Az $x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$ diofantikus egyenletről, Nyíregyházi Diofantikus Napok, Nyíregyháza 2005. április 29 - május 1.
6. On the diophantine equation $x^2 + 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma 7^\delta = y^n$, 17th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Malenovice, September 3-8, 2005.