



KONKRÉT ÉS KÉPI REPREZENTÁCIÓK HASZNÁLATA A HETEDIK OSZTÁLYOS ALGEBRATANÍTÁSBAN

PhD értekezés

Stankov Gordana

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2008.



Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és számítástudományok Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 200.

Tanúsítom, hogy Stankov Gordana doktorjelölt 200.- 200. . . között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika-didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 200.



KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

*Szeretném szívből megköszönni témavezetőmnek és példaképemnek,
Dr. Ambrus András egyetemi docensnek a munkámhoz nyújtott önzetlen
segítségét.*



TARTALOMJEGYZÉK

Bevezetés	1
1. Elméleti háttér	3
1.1. Tanulás pszichológiai alapok	3
1.1.1. Kognitív séma	3
1.1.2. Megértés	3
1.1.3. Asszimiláció és akkomodáció	3
1.1.4. Instrumentális és relációs megértés	3
1.1.5. Reprezentációk	4
1.1.6. Magyar matematika didaktikusok a konkrét, vizuális reprezentációk szükségességéről	4
1.1.7. A matematikai modellezés fő komponensei	5
1.1.8. Fogalomképzet (concept image)	6
1.1.9. Az agykutatás és az oktatás kapcsolata	6
1.2. Matematikadidaktikai alapok	7
1.2.1. Realisztikus matematikaoktatás	7
1.2.2. Az algebra történetének szakaszai	8
1.2.3. Az algebratanítással kapcsolatos felfogások	9
1.2.3.1. Az iskolai algebra meghatározásai	9
1.2.3.2. Az iskolai algebra tevékenységei	9
1.2.3.3. Az iskolai algebra tanításának megközelítési módjai	9
1.2.3.4. A változó fogalmának aspektusai	10
1.2.3.5. Követelmények az algebra tanításával kapcsolatosan az alsóbb osztályokban	11
1.2.3.6. Procept fogalma	11
1.2.3.7. Az algebrai kifejezések jelentése	12
1.2.4. Az iskolai algebra tanulásával kapcsolatos nehézségek	12
1.2.4.1. A betű használatával kapcsolatos nehézségek	12
1.2.4.2. Az egyenlőségjel értelmezése	13
1.2.4.3. Az algebrai kifejezéssel kapcsolatos nehézségek	13
1.2.4.4. A lineáris egyenletek megoldásával és a lineáris egyenletek megoldására visszavezethető szöveges feladatokkal kapcsolatos nehézségek	14
1.2.4.5. Problémamegoldás a lineáris egyenletekkel megoldható szöveges feladatoknál	15
1.3. A nyelv és a kétnyelvűség a matematikaoktatásban	16
1.3.1. Innatista nyelvsajátítási hipotézis	16
1.3.2. Kétnyelvűség	17
2. Nyelvi problémák vizsgálata	19
2.1. A magyar és a szerb matematikai szaknyelv közötti interferenciák	19
2.2. Kérdőív a tizenkettedik osztályos tanulók számára	20
3. A kutatás módszertana	27
3.1. A kutatás kérdései	27
3.2. Hipotézisek	27

3.3. A kutatás menete	27
3.4. A fejlesztő oktatási kísérletek óraterve	27
3.5. A kutatás módszerei	28
3.5.1. Az előteszt és az utóteszt elemzése	28
3.5.2. A tanulók munkájának megfigyelése	28
3.5.3. A délutáni foglalkozások	28
3.5.4. A kísérleti osztályok jellemzése	29
4. Kísérleti tanítás	30
4.1. Előteszt	30
4.1.1. A teszt feladatai	30
4.1.2. Az előteszt eredményeinek elemzése	32
4.1.3. Az előteszt elemzésének összegzése	46
4.2. Kísérleti tanítás részletes bemutatása	48
4.2.1. Aritmetikai kifejezések vizsgálata és nyelvi különbségek	48
4.2.2. Egyenlőségjel helyes értelmezése	54
4.2.3. A változó fogalmának bevezetése gépmodell alkalmazásával	55
4.2.4. Konkrét szituációk reprezentálása algebrai kifejezésekkel	
Algebrai kifejezések kontextusba való helyezése	
Algebrai kifejezések szerkezete	58
4.2.5. Geometriai minták vizsgálata	60
4.2.6. Algebrai kifejezések értékének meghatározása	65
4.2.7. Algebrai kifejezések (értelmezési tartományuk a Q^+) reprezentálása	
szakaszokkal. Algebrai kifejezések a számegyenesen	68
4.2.8. Konkrét szituációk kódolása	73
4.2.9. Az algebrai kifejezések lehetséges konkrét jelentései	81
4.2.10. Algebrai kifejezések összevonása	83
4.2.11. Összeg és különbség hozzáadása és kivonása	88
4.2.12. Kéttagú algebrai kifejezés szorzása egytagúval	91
4.2.13. Kéttagú algebrai kifejezés szorzása egytagúval és összevonás:	
gyakorlat	93
4.2.14. Kéttagú algebrai kifejezés szorzattá alakítása (kiemelés)	95
4.2.15. Lineáris egyenletek megoldása mérlegelvvel	97
4.2.16. Lineáris egyenlet megoldására visszavezethető azonos	
struktúrájú szöveges feladatok	102
4.3. Utóteszt	106
4.3.1. A teszt feladatai	107
4.3.2. Az utóteszt elemzése	108
4.3.3. Az utóteszt elemzésének összegzése	112
Összegzés, kutatási kérdés megválaszolása	114
További kutatási lehetőségek	116
Irodalomjegyzék	117
Összefoglaló	119
Summary	124

BEVEZETÉS

Matematikatanítási munkám során gyakran szembesülök azzal a problémával, hogy tanulóim koruktól függetlenül sok hibát vétenek elemi algebrai ismereteik alkalmazása közben. Például a kilencedikes Miloš a következőt írta:

$$\begin{array}{l} (n-2) \cdot 180 = 1620 \quad /+2 \\ n \cdot 180 = 1622 \quad /:180 \\ n = 9,1 \end{array}$$

A tizenkettedikes Dušan így egyszerűsített:

$$\frac{n+a}{b_3} = \frac{2+a}{3}$$

A tanulók számára nagy gondot jelentenek az egyenletek megoldására visszavezethető szöveges feladatok. Egy ilyen feladattal kapcsolatosan egy érettségire készülő tanulóm nemrég meglepett a következő kijelentésével: „*En ezt nem csinálom! Bármit írok úgyse lesz jó! Utálok!*” E nehézségek egyik lehetséges magyarázata az, hogy a tanulók gyakran az algebrát, a „betűk világát”, egy minden mástól teljesen elkülönült hasztalan matematikai területként élik meg melyben fejből megtanult érthetetlen szabályok szerint kell kezelni a szimbólumokat. Az algebra ilyen fajta „tanulása” a tanulók nagy erőfeszítései ellenére kevés eredménnyel jár. Gyanítom, hogy téves elképzelésük háttérben tanulási folyamatuk azon időszaka áll, amikor először találkoztak az algebra fogalmaival. Sajnos a tankönyvek hirtelen (fokozatos átvezetés nélkül) térnek át az aritmetikáról az algebrára.

A budapesti Szerb Tanítási Nyelvű Általános Iskolában és Gimnáziumban tanítok. Tanulóim tanulási nehézségeit fokozzák a kétnyelvűségből eredő problémák.

A hivatalos magyar tantervnek megfelelően, használva a magyar nyelvű tankönyveket az iskolában hivatalosan szerb nyelven folyik a tanítás. Számos tanulónk azért iratkozik ebbe az iskolába, hogy megtanulja a szerb nyelvet. (Ők beiratkozáskor nem kellő szinten, vagy egyáltalán nem beszéltek a szerb nyelvet.) A külföldről (Szerbiából, Boszniából, Horvátországból vagy Montenegrből) érkező tanulók viszont nem beszélnek magyarul. Következésképpen, ugyanabban az osztályban az említett két nyelvet igen különböző szinten beszélő tanulók vannak, így a tanítási órákon mindkét nyelvet használnunk kell. A tanulókkal való jobb kommunikációt és megértést gesztusokkal és testbeszéddel segítem elő. Ösztönösen rámutatok bizonyos tárgyakra vagy használom őket a tárgyalt problémák szemléltetésére vagy szóban történő tisztázásakor. A tárgyi szemléltetés során alkalom nyílik a már ismert és elfogadott, a mindennapi élethez kapcsolódó szókinccs mobilizálására és alkalmazására.

Tanulóim tanulási gondjai és speciális igényei ösztönöztek arra, hogy megpróbáljak kifejleszteni egy olyan módszert az algebra alapjainak tanítására, mely lehetővé teszi a tanulók számára, hogy az algebrai fogalmakat képességeik, tapasztalataik és a már elsajátított ismereteik felhasználásával építsék fel. Mivel ösztönösen már sikeresen használtam különböző segédeszközöket a módszer magába foglalja a konkrét és vizuális reprezentációk használatát. Kutatásom során sikerült az algebra alapjait az iskolánk hetedik osztályaiban két oktatási kísérletben e módszer szerint tanítani. A kísérletek során a hivatalos magyar algebra tanterv anyagát tanítottam, melynek részletezése iskolánk helyi tantervében van konkretizálva. Kutatásomban két kérdésre kerestem a választ:

1. *Hogyan hat a konkrét és képi reprezentációk használata az algebra alapjainak elsajátítására az általános iskola hetedik osztályos kétnyelvű tanulók körében?*
2. *Adódnak-e nehézségek a tanulók kétnyelvűségéből az algebra alapjainak elsajátításában és lehet-e a szerb kisebbségi iskolában biztosítani az interferenciáktól mentes szaknyelv és a helyes beszéd elsajátítását a kisebbségi és a magyar nyelven is a kétnyelvű tanulók számára?*

A tanítások elején és végén a tanulók tudásfelmérő tesztekkel írtak. Dolgozatomban ezek eredményeit és az első kísérleti tanítást részletesen elemeztem. A második kísérleti tanításból csak néhány jellegzetes tanulói megoldást mutattam be. Összegezve a tesztek eredményeit a tanítások tapasztalatait és a tanulók munkáját az órákon, a fenti kérdésekre megfogalmaztam a válaszokat és ezeket összevettem a megfelelő hipotézisekkel. A dolgozat végén néhány további kutatási lehetőséget jelöltem ki remélve, hogy e dolgozat jelenthet egy csekély lépést annak a kutatási folyamatnak a kezdetén mely lehetővé teszi e tanítási módszer széleskörű alkalmazását az algebra alapjainak tanításában.

1. ELMÉLETI HÁTTÉR

A tanítási kísérleteim tervezését, kivitelezését és elemzését az alábbiakban bemutatott elméleti háttér alapján végeztem el.

1.1 TANULÁSPSZICHOLÓGIAI ALAPOK

1.1.1. Kognitív séma

Skemp (1975) a sémákat, mint az ismeretek és magatartásokat szervező és integráló szellemi struktúrákat értelmezi.

Szerinte a matematika fogalmi sémák képzéséből és alkalmazásából áll.

Wittman (1981) szerint a séma egy rugalmasan szervezett, összefüggő, átalakítható, műveleti, gondolati, leíró vagy magyarázó minta, mely az egyén önszerveződésében integrált és az egyén aktivitását irányítja.

Ambrus (1995) a sémák következő jellemzőit sorolja fel:
alakíthatóak, nem merevek;

- nem izoláltan, hanem a kognitív struktúrába beágyazottan lépnek fel;
- általánosíthatók, korlátozhatók;
- absztrakt és ökonomikus jellegűek.

A kísérletünk egyik fontos célja volt a tanulók relációs megértésének fejlesztése.

1.1.2. Megértés

A megértés a feldolgozandó információ beépítését jelenti a meglévő sémákba. Ily módon az információ kapcsolatba kerül a séma más elemeivel. A megértés mértéke a kapcsolatok számától függ. Az alapos megértésnél a kapcsolatok száma nagy. A sémába nem, vagy csak lazán bekapcsolódó információkat meg nem értettek, illetve gyengén megértettek, tekintjük.

1.1.3. Asszimiláció és akkomodáció

Sok esetben a meglévő sémákat módosítani kell, illetve új sémákat kell létrehozni. *Piaget* (1967) asszimilációról és akkomodációról beszél:

- az *asszimilációnál* a meglévő sémák alapján történik a környezeti hatások magyarázata és beépülése
- az *akkomodációra* akkor kerül sor, ha a környezet megértésére nem áll rendelkezésre asszimilációs séma. Az egyén a sémáit korrigálja, vagy új sémát hoz létre a jelenség feldolgozása céljából.

1.1.4. Instrumentális és relációs megértés

Skemp (1978) különbséget tesz *instrumentális* és *relációs megértés* között:

- az *instrumentális megértéskor* a tanuló tudja, *hogyan oldjon meg feladatokat (tudja az eljárást)*;
- a *relációs megértéskor* a tanuló tudja *mit és miért kell csinálni*.

A kizárólag instrumentális ismeretekkel rendelkező tanulóknak komoly nehézségeket okoz különböző feladatok alternatív megoldási módjának megtalálása, továbbá könnyen tehetlenné válnak, ha a feladat kicsit eltér a megszokottól. A relációs megértést alkalmazni tudó diákok új megoldásokat alkotnak. Ez a tanulókat elégedettséggel tölti el és önbizalmuk is megnő. A már említetteken túl, a diákok motiváltakká válnak tanulmányaik és ismeretszerzésük folyamata során.

A tanulók algebra megértése gyakran instrumentális. A bemagolt szabályokat és begyakorolt eljárásokat használva oldják meg a feladatokat. *A fejlesztő kísérletünk során nagy hangsúlyt helyeztünk a tanulók relációs megértésének fejlesztésére.*

1.1.5. Reprezentációk

Bruner (1966) szerint bármely (egy ismeretterületen belüli) ismeretnek, tudásnak három különböző reprezentációs módja létezik:

- *materiális (enaktív) sík*: egy bizonyos eredmény eléréséhez konkrét objektumokkal végzett megfelelő tevékenységsor általi szemléltetés;
- *ikonikus sík*: egy fogalmat, elvet, ismeretet annak teljes meghatározása nélkül jelképező összefoglaló képek, grafikonok, táblázatok, diagramok összessége;
- *szimbolikus sík*: szimbolikus vagy logikai állítások összessége, melyek egy pozíciók ki- és átalakítására szolgáló szabályok által meghatározott szimbolikus rendszerből származnak.

Az algebra tanítása rendszerint a szimbolikus szinten zajlik.

Célunk a kísérleti tanítás során az volt, hogy az enaktív és az ikonikus reprezentációkat a Magyarországon megszokottnál hosszabb ideig alkalmazzuk.

Wittmann (1998) kihangsúlyozza, hogy a *tárgyi és a képi reprezentációk* nem csak segéd-eszközök az úgynevezett „lassú tanulók” számára; az alkalmazásuk sincs korlátozva csak az első lépésekre a tanulási folyamatban, *fontosak minden gyermek számára és hasznosak az egész tanulási folyamat során.* Nem automatikusan jobbak a „tökéletes” reprezentációk, mert ellentétes hatást érhetnek el. Hasznosabbak azok, a reprezentációk, melyek bizonyos „homályosságot” is tartalmaznak.

1.1.6. Magyar matematika didaktikusok a konkrét, vizuális reprezentációk szükségességéről

Dienes Zoltán: *„A perceptív (észlelési) változatosság vagy többszörös konkretizálás elve.*

Célszerű a fogalmi struktúrákat lehetőleg sok ekvivalens, de az észlelés számára különböző formában bemutatni a gyerekeknek, hogy a fogalmak kialakításában minél jobban érvényesülhessenek az egyéni különbségek, és hogy a gyerekek egy-egy fogalom absztrakt matematikai tartalmát minél inkább megragadhassák.” (Dienes, 1973)

„...a gyerekek inkább konstruktívan gondolkodnak, mint analitikusan. A gyerek előbb az egészet látja, előbb konstruál, és csak azután analizál. Rájöttem egy nagy ellentmondásra, arra, hogy az egész matematikatanítás az analízisre épül.

A „New Math” alapelve, hogy a matematika egy nyelv, s ha ennek a nyelvnek a szerkezetét a gyerek megtanulja, akkor a jelentését is érteni fogja, s tudja alkalmazni is. Olyan ez mintha a kocsit húzná a lovat, mert előbb jön az absztrakció, azután a konkrétum. A valóságban ez éppen fordítva van, a konkrétumtól megyünk az absztrakt felé.

Az én szisztémám azon az elven alapszik, hogy a gyerek előbb konkrét tapasztalatainak alapján, valóságos játékok keretében, érzéletes tevékenykedés közben ismerje meg, fedezze fel a komplikált matematikai fogalmakat, struktúrákat. És nálam nem csak arról van szó, hogy megtanuljuk a matematikát szűkebb értelemben, hanem egy teljesen újfajta lelki beállítódásról, arról is, hogyan tanuljunk a legjobb módon tanulni. Mégpedig a tapasztalatokra építve tanulni!

Attól még nem tanulok meg biciklizni, ha ismerem a bicikli szerkezetét, de ha tudok biciklizni, könnyebben megtanulom a szerkezetét is.” (Győri, 1973)

Varga Tamás: „Absztrahálni csak konkrétumokból lehet, s ahhoz, hogy valaki jól tudjon absztrahálni sokféle konkrétummal, kell megismerkednie. A matematika nagyon absztrakt, éppen ez a fő erőssége, hiszen ez azt jelenti, hogy nagyon sokféle konkrét jelenség közös lényegét sűríti magába. Ehhez a nagyon absztrakthoz nagyon konkrét kiindulással tudjuk a legsikeresebben elvezetni a gyerekeket, úgy, hogy elegendő számú és elég változatos konkrét tapasztalatban részesítjük őket. Kezdő fokon, kisgyerekeknél ez a nagyon konkrét az érzékszervi-mozgásos élményeket jelenti. A manuális (mozgásos, tapintási, akaratot is bekapcsoló) tevékenység ennek egyik fő tere.

Kísérletünk alapelve: *dolgokkal való műveletekből jutni el a jelekkel való műveletekhez.*

Műveletek dolgokkal



Műveletek jelekkel

Nyíl helyett cikk-cakkot is húzhattam volna annak jelzésére, hogy ide-oda közlekedünk a kettő között, vissza-visszamegyünk a dolgokkal végzett manuális tevékenységhez, *valahányszor a jelekkel végzett tevékenység értelmessé tétele ezt kívánja.*” (Klein, 1980)

Pólya György (1977): „... nem szabad semmi olyat elmulasztani, aminek valami esélye van arra, hogy a diákokhoz közelebb hozza a matematikát. A matematika nagyon absztrakt tudomány – éppen ezért nagyon konkrétan kell előadni. ”

Szendrei Julianna (2005): „A kéz és a tevékenység bevonása a gondolkodásba nem alacsony szintű gondolkodást jelent, hanem éppen az adott témakörben való absztrahálás lehetőségéhez való alkalmazkodást. ...az eszközök használata éppen az absztrahálás folyamatának egy fokozatos megvalósítását teszi lehetővé. ”

1.1.7. A matematikai modellezés fő komponensei

A matematikai fogalmak bevezetésénél modellek segítségével Filloy (2008) a modellezés következő fő komponenseit emeli ki:

- *lefordítás*: az absztrakt matematikai objektumokat és műveleteket azonosítani lehet a megfelelő objektumokkal és műveletekkel a konkrét modellben és fordítva, a modell objektumait és műveleteit azonosítani lehet a matematikai objektumokkal és műveletekkel.
- *elkülönítés*: az újonnan bevezetett matematikai objektumok és műveletek elkülönítése a konkrét jelentésektől a modellben.

Az általunk használt modelleknél ezen komponensre külön felfigyeltünk (a modellben levő munkával párhuzamosan az algebrai szimbolizációt is használtuk, és a modellek használatának elhagyását mindig követte a munka, kizárólagosan szimbólikus síkon).

1.1.8. Fogalomképzet (concept image)

A tárgyi és a képi reprezentációk segítik a *fogalom mentális képének* létrehozását. A mentális képek nem egyszerű másolatai a külső reprezentációknak, hiszen az egyén konstruktív aktivitása révén jönnek létre. A megalkotott mentális kép függ az egyén által szerzett tapasztalatoktól és a tudásától is.

A fogalommal kapcsolatos teljes kognitív séma leírása céljából, mely magába foglalja a fogalommal kapcsolatos összes gondolati képet, a fogalomhoz kapcsolódó tulajdonságokkal, tapasztalatokkal és eljárásokkal együtt. *Tall & Vinner (1981)* bevezették a *fogalomképzet* elnevezést. A fogalomképzet magába foglalja a fogalom nevével, a gondolatunkban kapcsolatba hozott képeket, példákat, tapasztalatokat, élményeket.

Célunk a kísérleti tanítás során az volt, hogy lehetőséget biztosítsunk a tanulók számára *minden algebrai fogalom minél gazdagabb fogalomképzetének megalkotására.*

1.1.9. Az agy kutatás és az oktatás kapcsolata

Josef Kraus (2006, szerkesztette Caspary) a modern agy kutatás alapján az oktatás számára az alábbi követelményeket fogalmazta meg:

- A tanulói aktivitás kiemelkedően fontos; ezért *a tanítás legyen nagymértékben aktivizáló.* Idézi a következő kínai mondást: „*Hallom és elfelejtem; látom, akkor megjegyzem; csinálom és megértem.*”
- *A tanítás-tanulási folyamat többszoros legyen.* A megfigyelések alapján a felvett információkból az emlékezetünkben a következő arányokban maradnak meg az információk: a csak olvasott információkból 10%; a hallott információkból 20%; a látott információkból 30%; a látott és hallott információkból 50%; a látott, hallott és saját maguk által elmondott információkból 70%; a saját maguk által végzett tevékenységekből az információk 90%-a marad meg. *A fenti adatok is bizonyítják a konkrét és képi reprezentációk használatának fontosságát.*
- *Gyakorlat teszi a mestert. Az algebrai technikák alapvető fontosságúak.*
- A tanulás folyamán *biztosítani kell lazább pihentető szakaszokat.*
- A tanítás-tanulási folyamatban *szükség van a tanulók figyelmének provokálására* (meglepő, váratlan szituációk használata).
- *Megfelelő környezetet kell biztosítani, hogy a tanítás-tanulási folyamat hatékony legyen* (osztályklíma fontossága; a dicséret fontosabb, mint a büntetés). *Jókedvvel végzett tanulás serkenti az emlékezetet.*
- A tanítás-tanulási folyamatban *kulcsfontosságú legyen a tanulói kíváncsiság.*
- *A testi aktivitás serkenti a tanítás-tanulási folyamatot, ezért legyen e folyamat része.*

A Kraus által megfogalmazott követelményeket didaktikai hitvallásom alapjának tartom.

1.2. MATEMATIKADIDAKTIKAI ALAPOK

1.2.1. Realisztikus matematikaoktatás

Ezt a matematikaoktatási koncepciót Ambrus (1995) jegyzete alapján mutatom be: Ez a tanítási irányzat Freudenthal irányításával Hollandiában alakult ki az Utrechti Egyetemen.

Az irányzat fontos céljai:

- hozzájárulni, hogy a tanulók megértsék a matematika szerepét a saját életükben és a társadalomban;
- a tanulók matematikához való pozitív hozzáállásának kialakulása.

Az irányzat jellemző vonásai:

- az alkotómunka hangsúlyozása a tényszerű ismeretek helyett;
- elvek fontossága a technikák helyett;
- sok lehetőség biztosítása matematikai problémák megoldására.

Freudenthal (Ambrus idézi Fischert 1976) didaktikai credója a realisztikus matematikaoktatással kapcsolatban: „Helyezd a tanulókat olyan szituációba hogy:

- érintkezésbe kerüljenek olyan valós jelenségekkel, melyekben bizonyos matematikai struktúra a rendező elv;
- a tanulók lehetőleg maguk találják meg, fedezzék fel a matematikai struktúrát;
- tanulják meg e matematikai struktúrák használatát és használják fel a matematikai rendező eszközöket a matematikai elmélet megalkotásában.”

Didaktikai alapelvek a realisztikus matematikaoktatásban Ambrus (1995) szerint:

- A tanulók matematikai aktivitása egy konkrét kontextusban megy végbe. A cél: olyan intuitív fogalmak összegyűjtése a kontextus alapján, amelyekben a kívánt matematikai elmélet, illetve struktúrák lényeges szempontjai tükröződnek. Ez a konkrét szituáció az alapja az elmélet megalkotásának. A tanulás kezdeti szakaszában egy konkrét orientációs bázis kell a kialakítandó fogalommal kapcsolatban.
- Horizontális és vertikális matematizáció: az intuitív, informális, kontextus függő szintről a reflektív, formális, szisztematikus szintre való áttérés, vizuális modellek, modell-szituációk, különböző anyagok, sémák, diagramok és szimbólumok segítségével történik. Ez a folyamat a horizontális matematizáció. A vertikális matematizáció a struktúrák, a szisztematikus, formális ismeretek kiépítését jelenti.
- A tanulók saját konstrukcióinak, produktumainak a fontossága: az irányzat alapvető elve, hogy a tanulóknak lehetőséget kell kapniuk arra, hogy a matematikai elveket, koncepciókat a valóságból vett problémák megoldása révén saját maguk fejlesszék ki. Fontos, hogy a tanulók lehetőséget kapjanak saját megoldási stratégiáik alkalmazására.
- Szociális kontextus, interakciók: a tanulók saját produktumaikat összehasonlítják, konfrontálják társaik produktumaival. Ez lerövidítheti a tanulási folyamatot, tudatosulnak a tanulóban a saját produktum előnyei, hibái. Csoportdiskussziók, a saját gondolat prezentálása, különböző konstrukciók értékelése, összevetése a tanár magyarázatával. Az irányzat kiemeli, hogy a tanulás nem szóló aktivitás, hanem egy adott társadalomban fordul elő és a szociokulturális környezet által befolyásolt.

- *Összefüggések, kapcsolatok: az új szempontokat, mentális objektumokat a meglévő ismeretrendszerbe kell illeszteni. A különböző területek globális kapcsolatainak észrevétele, fejlesztése alapvetően fontos e felfogásban.*

1.2.2. Az algebra történetének szakaszai

I. Retorikus algebra - Diophantosz (250 körül) előtti szakasz

Jellemzői: a problémák speciális típusainak megoldására vonatkozó leírások. Nem használtak szimbólumokat, illetve speciális jeleket az ismeretlenek reprezentálására.

II. Második szakasz (angolul: syncopated period)

Diophantosz a fő képviselője, ő vezette be a betűket az ismeretlen mennyiségekre. A 3. századtól kezdve a 16. századig terjedő időszak algebristái számára a betűk önálló objektumként való azonosítása volt a fő eredmény. Itt még ritkán találkozunk a betűk általánosságot kifejező szerepével. Diophantosznál nem találkozunk általános módszerekkel. *Arithmetica* című könyvében található 189 problémára különböző megoldásokat mutat be. Ezek eljárásokra vonatkozó szövegek, útmutatások, mit és hogyan kell csinálni az adott feladat megoldásánál. Az 1500-as években Diophantosz munkáját lefordították latinra, így hozzáférhetővé vált az európai iskolák számára is.

III. Változó fogalmának bevezetése, betű, mint változó.

A szimbolikus algebra kialakulása.

Jelentősebb képviselők: *Viète (1540-1603), Newton (1642-1727), Leibniz (1646 - 1716)*

Viète elsőként jelöli betűkkel az adott számokat és az ismeretlen számokat is. Lehetővé vált az általános megoldás kifejezése, továbbá számok közötti relációk, szabályszerűségek bizonyítása, a paraméter bevezetése. A szimbolikus algebra a függvények fogalmának fejlődésére döntő hatással volt. A másik fontos momentum az algebra és geometria kapcsolatának az analitikus geometriának a kialakulása. Viétenél a szimbólumok extrémisan sűrített jelölést jelentenek, ezzel az algebra többé válhatott, mint csak eljárásokra vonatkozó eszköz. Lehetővé vált a szimbolikus kifejezéseknek, mint objektumoknak a használata. Ez tette lehetővé a függvény fogalmának a fejlődését is.

IV. Modern algebra, absztrakt algebra

A XIX. és XX. században fejlődött ki a brit formális iskola vezetésével (De Morgan, Peacock, Gregory). A betűknek nincs semmiféle jelentése. A szimbólumokra vonatkozó műveletek, a műveletek kombinációja áll az érdeklődés középpontjában. Absztrakt struktúrák: csoport, gyűrű, mezőelmélet.

Algebra történetének szerepe az algebra tanításában

Az úgynevezett *Biogenetikus Törvény*, mely különösen népszerű volt a XX. század elején kimondja, hogy a matematika tanulása során, az egyén fejlődésében is ugyanazok a szakaszok jelennek meg, mint a matematika történetében. Ezzel ellentétes álláspontot vall például *Harper (1987)*, aki kísérletei alapján állítja, hogy a tanulóknál az egyenletek megoldásánál, fejlődésük során, nem jelennek meg ugyanazok a fázisok, mint az egyenletek megoldásának történetében.

A nagyon szigorú Biogenetikus Törvény állításával, mint a többség, mi sem érthetünk egyet, de az algebra történetének megismerése alapján elfogadjuk *Sfard (1991)* álláspontját, aki szerint elvárható az egyén fogalomalkotásánál, hogy az eljárási felfogásmód (konceptió), megelőzze a strukturális felfogásmódot.

A tanítási kísérletünk szempontjából az alábbi lényeges következtetéseket is levonhatjuk:

Az algebrai szimbólumok használatának bevezetésénél nagyon fontos a köznyelv, illetve az, hogy a tanulók szavakkal is megfogalmazzák gondolataikat, hiszen az algebra történetében a szimbólumok használatát megelőzte a retorikus szakasz. Az algebra alapfogalmainak (különösen a változó) és a szimbólumok használatának hosszantartó fejlődése a fogalmak komplexitásukról vallanak, és arra utalnak, hogy e fogalmaknak különböző aspektusait tanításunk során ki kell hangsúlyozni.

1.2.3. Az algebra tanítással kapcsolatos felfogások

1.2.3.1. Az iskolai algebra meghatározásai

Usiskin (1988) szerint az iskolai algebrát meghatározhatjuk úgy mint:

- általánosított aritmetikát;
- a probléma megoldásokra alkalmas eljárások elsajátítását;
- a különböző mennyiségek viszonyának tanulmányozását;
- a struktúrák tanulmányozását.

1.2.3.2. Az iskolai algebra tevékenységei

Kieran (1996) a következő algebrai tevékenységeket különbözteti meg az általános és a középiskolákban egyaránt:

- *Általánosító tevékenységek*, melyek magukba foglalják a minták és sorozatok alapján történő általánosításokat, az aritmetikából eredő általánosításokat, az algebrai kifejezések és az egyenletek felállítását, melyek a mennyiségek viszonyát és a numerikus kapcsolatokat fejezik ki.
- *Transzformációs tevékenységek* melyek lehetnek műveletek algebrai kifejezésekkel, algebrai kifejezések egyszerűsítése (például: egynemű tagok összevonása, szorzattá alakítása), inverz műveletek végzése, egyenletek és egyenletrendszerek megoldása - hangsúlyt helyezve az egyenletekre, mint önálló „objektumokra” melyekkel ekvivalens átalakításokat lehet végezni, ismeretlennel való munka, kapcsolatok (táblázatos, grafikus, szimbolikus) reprezentálása, az egyik reprezentációról a másikra való áttérés.
- *Globális, meta szintű, tevékenységek* melyek a következők: a matematikai struktúra tudatosítása, a problémaszituáció alkotóelemeinek tudatossága, előrelátás (ha elvégzek bizonyos tevékenységet, hova jutok el), fordított irányú okoskodás, problémamegoldás, magyarázatok, indoklások, bizonyítások.

Sutherland (1997) kihangsúlyozza, hogy az említett tevékenységeket nem lehet elkülöníteni egymástól; s különösen fontos szerinte, hogy a tanárok ösztönözzék a tanulókat a globális, meta szintű, tevékenységekre akkor is, ha a tanulók a másik két csoportba tartozó tevékenységeket végeznek.

1.2.3.3. Az iskolai algebra tanításának megközelítési módjai

A nemzetközi tanítási gyakorlatban négy domináns megközelítés létezik. Bednarz (1996) ezekről a következőket írja:

- Algebra megközelítése általánosításokon keresztül
Ez a megközelítés kihangsúlyozza az általánosságot a geometriai mintákban és számsorozatokban, illetve a számok közötti relációkat kifejező szabályokat. Lényeges hogy a tanuló, megértse mi az általános. A tanulók először találkoznak az algebrával, mint a számok tulajdonságainak és egymáshoz való viszonyainak kifejező módjával. Az ilyen fajta megközelítés jobb eredményeket ad, ha a tanulók a megfelelő aritmetikai foglalkozásokkal megalapozzák az algebrai fogalmaikat. Az ilyen megközelítést a következő tevékenységek alapjának tekinthetjük: a matematikai struktúra észrevételének, sejtéseknek, indoklásoknak és bizonyításoknak.
- Algebra, mint probléma megoldási eszköz
Ennek a felfogásnak a középpontjában a szöveges feladatok, egyenletek felállításával való megoldása áll, melynek kulcsszerepe van az aritmetikáról az algebra való átmenetben. A lényeg a problémák elemzése, a tanulók okoskodása és a saját megoldási stratégiák kialakítása. Az egyenletek felállítása mellett, fontos szerepük van a megoldási algoritmusoknak is.
- Algebra, mint modellalkotás
A modellezésnél fontos kifejezni a mennyiségek közti viszonyokat. Az algebraiak ilyenfajta megközelítésénél a tanulók képesek kell, hogy legyenek a körülöttük levő világ jelenségeinek rugalmas értelmezésére és leírására. Ez magába foglalja azt is, hogy jelentést kell adni különböző reprezentációknak (például: táblázat, formula) és át kell térni az egyik reprezentációról a másikra. Ez a megközelítés a magyar matematikaoktatásban egyre fontosabb szerepet kap (érettségi vizsgapéldák).
- Függvényszerű megközelítés
A számítógépek alkalmazásával került előtérbe ez a felfogás (táblázatok használata, grafikus lehetőségek könnyű elérhetősége). Sok valós jelenség matematikai modellje egy-egy függvény.

Azzal a véleménnyel értek egyet mely szerint mind a négy megközelítési mód szükséges az algebra tanítása során, hiszen a tanulók számára fontos hogy használják az algebra problémák megoldásánál és a modellezésnél, megértsék mi az általános, s értsék és használják a függvényeket.

1.2.3.4. A változó fogalmának aspektusai

Malle (1986) a változó fogalmának három aspektusát különbözteti meg:

- *Tárgyi aspektus: a változó egy ismeretlen szám;*
- *Behelyettesítési aspektus: a változó üres helyet jelent, melybe számokat helyettesíthetünk;*
- *Kalkulus aspektus: a változó jelentés nélküli jel, mellyel meghatározott szabályok szerint műveleteket lehet végezni.*

Példa:

Tárgyi aspektus: *Gondoltam egy számot hozzáadtam ötöt, az eredményt megszoroztam hárommal és ebből kivontam az elképzelt szám háromszorosát. Az eredmény tizenöt volt. Melyik számra gondoltam?*

$$3(x+5)-3x=15$$

Behelyettesítési aspektus: *Helyettesítsd be a természetes számokat egytől hétig és dönts el mikor lesz igaz a következő kijelentésforma: $2x-3=11!$*

$$2 \cdot 1 - 3 = 11; 2 \cdot 2 - 3 = 11; 2 \cdot 3 - 3 = 11; 2 \cdot 4 - 3 = 11; 2 \cdot 5 - 3 = 11; 2 \cdot 6 - 3 = 11; 2 \cdot 7 - 3 = 11$$

Kalkulus aspektus:

$$2x + 5 = x + 15 / -x$$

$$x + 5 = 15 / -5$$

$$x = 10$$

Malle szerint az algebrai kifejezéseknek és az egyenleteknek is megvan az említett három aspektusa:

	tárgyi aspektus	behelyettesítési aspektus	kalkulus aspektus
változó	ismeretlen szám	helyfoglaló (üres hely)	jel
algebrai kifejezés	szám	számforma	jelsorozat
egyenlet	kijelentés	kijelentésforma	jelsorozat

1.2.3.5. Követelmények az algebra tanításával kapcsolatban az alsóbb osztályokban

Malle (1986) a következő követelményeket fogalmazta meg:

- először a változó, az algebrai kifejezések, és az egyenletek használata a fontos, és ezekkel kapcsolatban csak később kell beszélni a tanulókat;
- fontos a korai és sokféle tevékenység a változókkal (nem csak átalakítások, hanem szituációk leírása, problémamegoldás és argumentálás);
- külön figyelmet kell fordítani a képletek (formulák) felállítására és interpretálására;
- fontos a változó fogalom minden aspektusának figyelembevétele, de kezdetben a tárgyi aspektus kihangsúlyozása az elsődleges;
- a képletek (formulák) függvényyszerű aspektusának kihangsúlyozása;
- nem az algoritmusok öncélú használata a fontos, hanem azok tartalmának megfontolása;
- a szabályok tudatosabb és precízebb alkalmazására való törekvés.

1.2.3.6. Procept fogalma

Gray és Tall (1994) vezették be a „procept” fogalmát, melyet az, az elképzelés határoz meg, hogy egy kifejezést, mint például a $3+2$ -t, tekinthetünk egy eljárásnak (műveletként), és az eljárás eredményeként, egy objektumként (összegként) is. A *procept* elnevezés a „folyamat” és a „fogalom” angol megfelelőinek összevonásából származik: *process* + *concept*. Az aritmetikában a $3+2$ eljárásnak az eredménye mindig egy szám (5). Az algebraiban a $3+2b$ eljárást jelent (a háromhoz add hozzá a b kétszeresét), és ennek az összeadásnak az eredményét is, egy objektumot, melyet manipulálhatunk (például összeadhatjuk egy másik algebrai kifejezéssel). Ha ismerjük a b értékét, meg tudjuk határozni a $3+2b$ kifejezés értékét is.

Egy *elemi* procept egy matematikai *objektumból*, egy (azt előállító) *eljárásból* és egy, akár eljárást, akár objektumot reprezentáló *szimbólumból* áll. Az elemi proceptek összességét *proceptnek* nevezzük.

Meglátásunk szerint egy procept nem csupán különböző szempontok egyszerű vegyítése, hanem az algebrai kifejezések duális értelmezésének egyik rugalmas módja is: parancs

konkrét eljárásra, valamint a kifejezés (mint reprezentációk összessége) szimbolikus reprezentációja. A procept rugalmasan szétbontható, majd újra összeállítható.

Gray és Tall megfigyelései szerint az algebrai kifejezések kétfajta értelmezése nagyon sok gondot okoz különösen a gyengébb tanulóknak. Ők sokáig csak a processzus aspektust tudják figyelembe venni, már az aritmetikánál elmaradnak a jobb tanulókkal szemben.

1.2.3.7. Az algebrai kifejezések jelentése

Resnick (1987) szerint egy algebrai kifejezés többféle forrásból merítheti jelentését. Ezek egyike *szabályszerű*: egy algebrai kifejezésnek van akkor jelentése, ha egy axiómahalmazból levezethető. A szabályszerű jelentéssel ellentétben mi a *vonatkozó* jelentést használjuk:

- Egy algebrai kifejezés általánosságban jelölhet egy számok közti kapcsolatot – ezt *numerikus jelentésnek* nevezzük.
- *Egy algebrai kifejezés jelölhet mennyiségek közti kapcsolatot bizonyos szituációkban – ezt szituációs jelentésnek* nevezzük. *A szituációs jelentésnek keretén belül fontosak a geometriai jelentések, melyek kifejezik a mennyiségek közti kapcsolatot síkidomoknál, vagy testeknél.*

Az $a+(b+c)=a+b+c$ azonosság numerikus jelentése a következő „szabály”:

Amikor hozzáadjuk két szám összegét egy adott számhoz, ugyanazt az eredményt kapjuk, mintha az első számot hozzáadtuk volna az adott számhoz, majd ehhez a második számot.

Konkrét számokkal is megmutatjuk ennek a szabálynak az alkalmazhatóságát:

Ha $a = 15$, $b = 6$, $c = 4$, a következőképpen számolunk: $15+(6+4)=15+10=25$, ha viszont $a = 13$, $b = 7$ és $c = 5$, akkor pedig, így: $13+7+5$.

Az $a+(b+c)=a+b+c$ azonosság lehetséges szituációs jelentése:

Annának a almája volt, és kapott b almát a nővérétől, és ezzel egy időben kapott még c almát a bátyjától. Mariannak a almája volt. Kapott b almát a nővérétől, majd később c almát a bátyjától. Most a két lánynak ugyanannyi almája van.

Az $a+(b+c)=a+b+c$ azonosságnak geometriai jelentése a következő lehet:

Egy háromszög egyik oldalának hossza a , a másik b , a harmadik oldalának a hossza pedig c centiméter. Ha az első oldal hosszához hozzáadjuk, a másik két oldal hosszainak összegét, megkapjuk a háromszög kerületét. Ezt ugyanúgy megkapjuk, ha az első oldal hosszához hozzáadjuk a másik oldal hosszát, majd a kapott összeghez hozzáadjuk a harmadik oldal hosszát.

A vonatkozó jelentések segíthetnek a tanulóknak a kifejezések és azonosságok értelmezésében.

Az alkalmazott tanítási módszerrel *fejleszteni kívántam a tanulók azon képességét (kompetenciáját), hogy az algebrai kifejezéseknek jelentéseket tudjanak adni. Ezzel az algebrai fogalmak a tanulók fogalomhálózába kapcsolódnak. Más fogalmakkal bővül a fogalomképzetük és az algebrai fogalmak nem alkotnak zárt, más fogalmaktól elkülönített rendszert.*

1.2.4. Az iskolai algebra tanulásával kapcsolatos nehézségek

1.2.4.1. A betű használatával kapcsolatos nehézségek

A tanulók gyakran, az adott kontextuson belül, félreértelmezik a betűket, vagy a betűk láttán, teljesen „leblokkolnak”. Kieran (1989, 1990) bemutat néhány lehetséges gondot a betűk használatával kapcsolatosan; olyanokat melyek nehézségeket okozhatnak az algebra

elsajátításánál, különösen a gyengébb tanulóknak:

- *Betűvel mértékegységeket jelölünk: $2m$ (kétszer egy méter). Az algebrában a $2m$ jelentheti azt is, hogy kétszer egy szám (az m);*
- *A betű egy szó rövidítése lehet; személyeket vagy tárgyakat jelöl. Ha az algebrában a tanuló a szavak rövidítéseként értelmezi a változókat, úgynevezett „fordított hibát” vét mely ismert az „tanuló (student)- professzor” problémából:
Írj egy egyenletet felhasználva a következő változókat: S (a student-ok: egyetemisták száma) és P (a professzorok száma), mellyel reprezentárod a következő mondatot: „Az egyetemen hatszor annyi egyetemista (student) van, mint tanár”. (Rosnick, 1981).
Azok a tanulók, akik a $6P=S$ helyett, a $6S=P$ irták, mint egy gyorsírással, a mondatot jegyezték le.
Az ilyen gondolkodási mód a saját tanulóimnál is megjelenik az előtesztben.*
- *A tanulók nehezen tudják elfogadni, hogy lehet a számokat betűkkel reprezentálni.*

1.2.4.2. Az egyenlőségjel értelmezése

Kieran (1981) állítja, hogy az algebra tanulásának kezdetén a tanulók, gyakrabban az „=” jelet cselekvésre ösztönző jelként értelmezik. Szerintük, ha „=” jelet látunk, valamit ki kell számolni, ugyanúgy mint az aritmetikában, ahol az „=” jel után mindig a szóban forgó művelet eredménye következik. Ezek a tanulók nem tudják megérteni az egyenletek ekvivalens átalakításait sem, hiszen az „=” jele számukra nem jelenti azt, hogy az egyenlet két oldalán levő kifejezések ekvivalensek.

1.2.4.3. Az algebrai kifejezéssel kapcsolatos nehézségek

- *Kifejezés értékének meghatározása: ha $d=4$, az algebrában, a $3d$ kifejezés értéke, háromszor négy, illetve 12. Mivel az aritmetikában, két számjegy egymás mellett kétjegyű számot reprezentál, ezért vannak tanulók, akik a „behelyettesítés” után (a d helyére beírják a négyet és a szorzást nem végzik el), megkapják a következő eredményt: 34.
Kísérleti tanításom során, hogy a helytelen értelmezést elkerüljük, sokáig jelöltük a szorzást az algebrai kifejezéseknél (például: $3 \cdot d$).*
- *Az algebrai kifejezést a tanuló csak eljárás-ként (processzus-ként) tudja értelmezni. Freudenthal (1983) felhívja a figyelmet arra, hogy miközben a kifejezések olvasási módjával valójában kihangsúlyozzuk az eljárást, elvárjuk a tanulóktól, hogy objektumként is értelmezzék az algebrai kifejezéseket:*

Így írjuk:	$c+d$	$c-d$	cd
Így olvassuk és értelmezzük:	c plusz d	c mínusz d	c szer d
Így is értelmezzük:	a c és a d összege	a c és a d különbsége	a c és a d szorzata

- *Collins (1974) bevezette a lezárás hiánya (lack of closure), mely azt jelenti, hogy például a $2x+4$ kifejezés önmagában, egyenlőségjel nélkül is értelmes.*
- *A tanulók nem fogadják el az algebrai kifejezéseket, mint egy feladat eredményét.*

Chalouh és Hersovics (1988) a hatodik és hetedik osztályos tanulóktól kérték, hogy írják le egy képen látható téglalap (az oldalak hossza jelölve volt: 8 és c egység) területét. A tanulók nagy többségének válasza a „ $Area=8 \times c$ ” volt. Saját tanulóimnál is az ilyen válaszok az előteszt 6. feladatánál voltak megfigyelhetők.

- *Boot* (1984) a tanulói interjúk alapján kihangsúlyozza, hogy a tanulók gyakran verbálisan képesek megfogalmazni a kereset algebrai kifejezés meghatározásának módját, de ezt nem sikerül korrektül szimbólumokkal reprezentálni.
- *A kifejezések átalakítása helytelen szabályok szerint*: Matz (1982) szerint a tanulók a rossz szabályokat a műveleti jelek általánosításával kapják, ezzel szabálymintákat hoznak létre, melyekből új szabályokat vezetnek le:

<i>A helyes szabály:</i>	$a + (b + c)$	=	$a + b + c$
<i>A szabályminta:</i>	$a \square (b \square c)$	=	$a \square b \square c$
<i>Rossz szabályok:</i>	$a - (b + c)$	=	$a - b + c$
	$a - (b - c)$	=	$a - b - c$

- *A kifejezések átalakításáról az önkényesen alkotott szabályok szerint*: Majoros (1992) beszámol Gábor nevű tanulójáról, aki szerint a gyökös algebrai kifejezéseket úgy kell egyszerűsíteni, hogy négyzetre emeljük őket.

1.2.4.4. A lineáris egyenletek megoldásával és a lineáris egyenletek megoldására visszavezethető szöveges feladatokkal kapcsolatos nehézségek

- *Filloy és Rojano* (1989) *didaktikai vágásnak (didactical cut)* nevezi, azt a momentumot, amikor egy személy az egyenleteket nem próbálkozással, vagy a műveleti tulajdonságokat felhasználva (lebontogatással; bemutattam a Geometriai minták vizsgálata alcím alatt) oldja meg, hanem formálisan, egyformán kezelve az ismeretlent, mint az ismert számokat, s műveleteket végezve vele. Erre az átmenetre leggyakrabban akkor kerül sor, amikor az ismeretlen egy egyenletben az egyenlőség jel mindkét oldalán megjelenik (például: $3x+1=4x-4$), hiszen legtöbb tanuló az ilyen fajta egyenleteket lebontogatással nem tudja megoldani.
- *Az egyenletek felállításának képtelensége*: Vannak tanulók, akik például a következő szöveges feladatot csak fordított okoskodással (inverz műveleteket használva) tudják megoldani (képtelenek az egyenlet felállítására), bár a lineáris egyenletek megoldásának algoritmusát már elsajátították:

Gondoltam egy számot, megszoroztam hárommal, az eredményhez hozzáadtam ötöt és tizenhetet kaptam. Melyik számra gondoltam?

Da Rocha Falcão (1995) ezzel kapcsolatosan kihangsúlyozza, hogy a fordított okoskodásnál az ismert számból kiindulva, két művelet elvégzése (az 5 kivonása 17-ből és a 12 osztása 3-mal) után a tanuló meghatározza az ismeretlent. Az egyenlettel való megoldásnál az okoskodásunk teljesen más: ismeretlen számból indulunk ki, ezt reprezentáljuk betűvel, a feladat szövegezését lefordítjuk az algebra nyelvére (leírjuk az egyenletet) és csak ekkor oldjuk meg az egyenletet.

- *A mennyiségek közti viszonyok megértése és szimbólumokkal való reprezentálása a szöveges feladatoknál.* Tanulóim körében ezt fokozzák a kétnyelvűségből eredő nehézségek.

1.2.4.5. Problémamegoldás a lineáris egyenletekkel megoldható szöveges feladatoknál

Pólya György (1979) a probléma fogalmáról a matematikában a következőt írja: „Problémánk van, tehát azt jelenti, hogy olyan *megfelelő tennivalót keresünk tudatosan, amely alkalmas valamilyen világosan megfogalmazott, de közvetlenül meg nem közelíthető cél elérésére.* Problémát megoldani a megfelelő tennivaló megtalálását jelenti. ... a legjellemzőbb emberi tevékenység a problémamegoldás; a célratoró gondolkodás, eszközök keresése valamely kitűzött cél eléréséhez.”

Schoenfeld (1985) a problémát a következőképpen értelmezi: „Az a nehézség a probléma fogalmának értelmezésében, hogy maga a probléma megoldás folyamata nagyon függ a problémamegoldó személyétől. Azok a feladatok, amelyek megoldása komoly erőfeszítést kíván bizonyos tanulóktól, mások számára lehetnek egyszerű rutin feladatok, sőt egy matematikus számára ismeretei alapján trivialisok. Ennélfogva az, hogy egy feladat probléma-e, nem magának a feladatnak a lényegi sajátossága, sokkal inkább az egyén és a feladat közötti kapcsolat jellemzője.”

A *Pólya* féle problémaértelmezés jól kiegészíthető a *Schoenfeld* féle értelmezéssel.

A *Pólya*-féle (2000) probléma megoldási fázisok következnek azokkal a kérdésekkel, melyek a legfontosabbak a tanítási kísérletünk szempontjából:

A FELADAT MEGÉRTÉSE

- **Mit keresünk? Mi van adva? Mit kötünk ki?**
- *Kielégíthető-e a kikötés? Elegendő a kikötés az ismeretlen meghatározásához? Vagy nem elegendő? Vagy kevesebb is elég volna? Vagy ellentmondás van benne?*
- *Rajzolj ábrát! Vezess be alkalmas jelölést!*
- *Válaszd szét a kikötés egyes részeit! Fel tudod írni őket?*

TERV KÉSZÍTÉS

- *Nem találkoztál már a feladattal? Esetleg a mostanítól kissé eltérő formában?*
- **Nem ismeresz valami rokon feladatot?**

TERVÜNK VÉGREHAJTÁSA

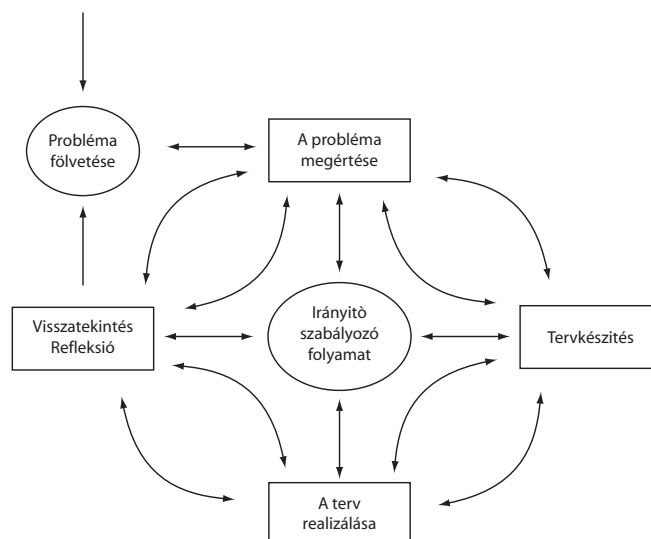
- **Ellenőrizz minden lépést, amikor végrehajtod tervedet!**

A MEGOLDÁS VIZSGÁLATA

- *Nem tudnád ellenőrizni az eredményt?*
- *Nem tudnád másképpen is levezetni az eredményt?*

A tanítási kísérletünk során a fenti *Pólya*-féle kérdéseket kicsit átfogalmazva használtuk és kiegészítettük őket konkrétabb, az azonos struktúrájú feladatok megoldását segítő kérdésekkel.

A *probléma megoldás folyamatát* jól szemlélteti a következő - *Ambrus* (1995) jegyzete alapján készült - diagram:



Wittman (1981) problémamegoldás képességek fejlesztésének alapfeltételei:

- Ismeretszerzés *felfedezettető tanítás és tanulás* révén.
- A tanulók ösztönzése a *divergens gondolkodásra* (többféle megfogalmazás; több irányból történő megközelítése ugyanannak a problémának).
- *Automatizált gondolatmenetek* kizárólagos alkalmazásának *háttérbe szorítása*.
- *Nyitott problémák vizsgálata* (nincs direkt kérdés).
- Ösztönözni kell a tanulókat, hogy maguk is *vessenek föl problémákat*.
- Egy olyan „nyelv” kialakítása, amely lehetővé teszi a tanulók számára, *hogy gondolataikat ki tudják fejezni*.
- *Intuitív indoklások, sejtések ösztönzése* (egy kicsi, de önálló lépés többet ér, mint egy bemutatott gondolatmenet másolása).
- *Heurisztikus stratégiák tanulása*.
- *Konstruktív magatartás* kialakítása *a hibákkal szemben*.
- *Diszkussziók, reflexiók, argumentációk ösztönzése*.

Kísérleti tanításom során tanulóim számára igyekeztem biztosítani a Wittman által megfogalmazott feltételeket.

1.3. A nyelv és a kétnyelvűség a matematikaoktatásban

1.3.1. Innatista nyelvelsajátítási hipotézis

Chomsky 1959-ben kifejtett, úgynevezett *innatista* nyelvelsajátítási hipotézise ma már széles körben elfogadott. E szerint: „az emberben a születéssel vagy a gyermekkori nyelvelsajátítás elindulásával működni kezd egy olyan előre kódolt, veleszületett mentális program (nyelvelsajátítási apparátus, LAD), amely nem más, mint vonzódás a nyelv(ek), illetve az abban megnyilvánuló szabályszerűség megértése és alkalmazása iránt, s amelyet a természetes nyelvvél vagy nyelvekkel való emberi kontaktus verbális ingerei váltanak ki” (Bartha 1999).

Bartha (1999) kihangsúlyozza, hogy: „a gyermekek... aktív alkotóik saját nyelvtanuknak,... nem pedig... passzív, környezetüket utánzó befogadók.”

1.3.2. Kétnyelvűség

Grosjean (1992) a következőképpen határozza meg a kétnyelvűséget: „A kétnyelvűség két (vagy több) nyelv rendszeres használata, kétnyelvűek pedig azok az emberek, akiknek mindennapi életük során szükségük van két (vagy több) nyelvre, és ezeket használják is.”

Lambert megkülönböztet kétféle kétnyelvűséget:

- *kiegyenlített (balansz) kétnyelvűség* az, amikor a kétnyelvű személy egyforma mértékű, de nem okvetlenül teljes tudással rendelkezik mindkét nyelven;
- *egyenlőtlen (domináns) kétnyelvűség* az, amikor a személy a két nyelv különböző mértékű tudásával rendelkezik.

Göncz a kétnyelvűséget és a kognitív fejlődés kapcsolatát vizsgálta és igazolta az úgynevezett Cumis-féle hipotézist, mely szerint: „a kétnyelvűség kezdeti fázisaiban a gyerekekre nehezedő fokozottabb követelmények csökkentik az értelmi működés eredményességét, és lelassíthatják a beszéd fejlődését is, és magas fokú (azaz balansz) kétnyelvűséget kell kiépíteni ahhoz, hogy potenciális előnyei kifejezésre jussanak. Ez a hipotézis egyrészt azt sugallja, hogy a kétnyelvű gyerekek kezdetben gyengébb, később jobb eredményeket mutatnak, mint az egynyelvűek, másrészt pedig egyazon életkoron belül a domináns kétnyelvűek gyengébb és a balansz kétnyelvűek jobb eredményeit implikálja az egynyelvűekhez viszonyítva.” (*Göncz* 1985)

Göncz eredményeinek tudatában fokozott törekvésünkké vált tanulóink balanszírozott kétnyelvűségének megközelítése.

Bartha (1999) a következő *kétnyelvűség jellemzőit* említi:

- *interferencia* „gyűjtőfogalma lehet mindazon nyelvi jelenségeknek, amelyek abból adódnak, hogy a kétnyelvű beszélő mindennapi interakcióiban egynél több nyelvet használ” (nem tudatos);
- *kölcsönzés*: „egy nyelv elemeinek egy másik nyelvbeli reprodukciójára tett kísérlet” (*Bartha* idézi *Haugent*). Történhet az átadó nyelv elemeinek egyszerű átvételével, a befogadó nyelv elemeivel való helyettesítésével (tükörfelfordítások) és a kettő kombinációjával;
- *kódváltás*: „két vagy több nyelv váltakozó használata ugyanazon megnyilatkozáson vagy diskurzuson belül”.

Mivel tanulóim többsége dominánsan kétnyelvű, sok nyelvi nehézséggel kell megküzdniük (a köznap és szaknyelvben egyaránt). Nyelvhasználatukban gyakran megjelenik a kölcsönzés és a kódváltás. A következő mondatok tőlük származnak:

„A rešenje nyolc!” (Rešenje jelentése: megoldás.)

„Ezt meg kell mnozsizni!” (Množiti jelentése: szorozni; ezt magyarosította.)

„Húzd ki a zárójel elé!” (A mondat a szerb mondat tükörfordítása; jelentése: Emeld ki!)

A tanulók többsége ily módon jól megérti egymást. Tanításom során először mondaton, később megnyilatkozáson belül próbáljuk kiküszöbölni a kölcsönzést követve *Szendrei Julianna* (2005) útmutatásait: „a tanár azzal segítheti, hogy nem javítja ki állandóan a helytelen nyelvhasználatot. Sőt megpróbálja megérteni a gyerek bármilyen, még pontatlan közléseit is ...célszerű, ha saját maga a megfelelő szavakkal ismétli meg a közlést.”

A szöveg fordítása a hiba forrása: A két nyelv egyenlőtlen tudása miatt, különösen a szöveges feladatoknál, a tanuló önkéntesen, a számára érthetőbb nyelvre fordít, sajnos hibásan, és ebből adódóan rosszul oldja meg a feladatot.

Az a nehezen azonosítható nyelvi nehézség, amikor a *tanuló* azt gondolja, hogy érti a szöveget (ilyenkor nem kér segítséget), hiszen *érti a szavakat, de a mondatot nem értelmezi jól* (például a szavak sorrendje miatt, vagy valami előszó vagy rag miatt). Ilyenkor a tanuló, egy általa kreált és nem a kitűzött feladatot oldja meg. A helytelen megoldás láttán a tanár arra következtet, hogy a tanuló matematikai tudása hiányos; holott gyakran csak egy rag nem megfelelő értelmezéséről van szó. A következő példa mutatja, hogy még egy hivatásos fordító is hasonló hibába eshet.

Az idei szerb nyelvű matematikai középszintű érettségi vizsga (2008. május 6.) 15. a) feladata a következő volt:

A 12. a osztályban az irodalom próbaérettségén 11 tanuló szóbelizik. A tanulók két csoportban vizsgáznak, az első csoportba hatan, a másodikba öten kerülnek.

Peti azt állította, hogy *az első csoportba kerülő 6 tanulót többszáz-féleképpen lehet kiválasztani*. Pontosan hányféleképpen?

A tanulók e feladat következő szerb nyelvű fordítását kapták kézhez:

„U 12. razredu na probnom maturalskom ispitu iz književnosti 11 učenika polaze usmeni ispit. Učenici polazu u dve grupe, u prvoj grupi ih je šestoro a u drugoj petoro.

Pera je tvrdio da se 6 učenika *iz prve grupe* mogu *izabrati (poređati)* na više stotina načina. Tačno na koliko načina se to može uraditi?”

E szöveg alapján a Petire vonatkozó mondat magyar jelentése:

Peti azt állította, hogy *az első csoportból*, hat tanulót többszáz-féleképpen lehet *kiválasztani (sorba rakni)*.

E mondat értelmezésénél tanulóimnak dönteniük kellett, hogy *a kiválasztani (izabrati)* vagy *a sorba rakni (poređati)* szót választják-e ki. A szó szerkezetet, melyet csak egyféleképpen lehetett értelmezni a következő: *az első csoportból (iz prve grupe)*. Így a feladat szövege alapján vagy sorba rakni, vagy kiválasztani kell a tanulókat az első csoportból.

Mivel, hat tanulóból hatot csak egyféleképpen lehet kiválasztani, a húszfős osztályból tizenkilenc érettségiző a zárójelben található *poređati (sorba rakni)* szót használták az értelmezésnél, s a következőt írták 6!

A hibát a fordításban a *-ból* rag megfelelője, az *iz* szó használata okozta, hiszen *nélküle* és a zárójelben levő *poređati (sorba rakni)* szó (e szót a fordító, feleslegesen adta hozzá a fordításhoz; az eredeti magyar mondatban a szó megfelelője nem létezik) nélkül *az említett mondat fordítása tökéletes volna*:

Pera je tvrdio da se 6 učenika *prve grupe* mogu *izabrati* na više stotina načina.

2. NYELVI PROBLÉMÁK VIZSGÁLATA

2.1. A MAGYAR ÉS A SZERB MATEMATIKAI SZAKNYELV KÖZÖTTI INTERFERENCIÁK

Iskolánk az egyetlen szerb tanítási nyelvű általános iskola és gimnázium Magyarországon és nagymértékben hozzájárul a magyarországi szerb kisebbség nyelvének megőrzéséhez.

Sok tanuló azért iratkozik be az iskolánkba, hogy megtanulja a szerb nyelvet, hiszen beiratkozáskor (legtöbbször az ötödik és a kilencedik osztályba) nagyon rosszul, vagy egyáltalán nem beszél a szerb nyelvet. Vannak olyan tanulók is, főleg a Vajdaságból, akik nem tudnak magyarul. Iskolánk számukra lehetőséget nyújt, hogy elsajátítsák, s esetleg magyar nyelven folytassák tanulmányaikat. Gyakran kerülnek egy osztályba tanulók, akik egymással nem tudnak beszélni egy harmadik személy segítségével. Ezért, bár a tanítási nyelv szerb az órákon gyakran beszélünk magyarul is.

Az ötödik és a kilencedik osztályban (a nyelvtanulás első évében), szinte minden mondatot elmondok mindkét nyelven. A mondatok rövidek és sokat gesztikulálok. A tanulói indoklásokat, magyarázatokat és a tananyaggal kapcsolatos kérdéseiket, vagy a tanuló mondja el mindkét nyelven (ilyenkor gyakran lehet hallani a nyelvi interferenciákat, főleg azon a nyelven, amely a tanuló számára nehezebb). Én, mint tanár, ha szükséges, elismétlem a mondatokat helyesen, vagy az egyik nyelven elhangzottakat lefordítom a másik nyelvre. Mivel magyar nyelvűek a tankönyvek és a feladatgyűjtemények; az órán mindenki aki egynyelvű vagy egyenlőtlen kétnyelvű, megtapasztalja mit jelent nyelvi nehézséggel küzdeni. Minden tanuló (a kiegyensúlyozott kétnyelvű is) segíthet másoknak a nehézségek leküzdésében. A szakkifejezéseket mindkét nyelven leírjuk. Mindenki választhat, hogy melyik nyelven kívánja megkapni a dolgozatok feladatait és a választott nyelven írhatja a megoldásokat is. A második év már könnyebb: az egyszerű, gyakrabban használt mondatokat már nem fordítom, a tanulók szabadon kérdeznek, ha valamit nem értenek; de még mindig nem beszélnek szívesen szerbül. A harmadik évben már csak a fontos magyarázatok hangzanak el két nyelven. Három év alatt a tanulók annyira elsajátítják a szerb nyelvet, hogy a negyedik évben szinte csak szerbül beszélünk az órákon és a dolgozatok feladatait is szerbül kapják meg. A tizenkettedik osztályosokkal készülünk az érettségi vizsgára, mely szerb nyelvű. A fiatalabb tanulóknál a nyelvtanulás még könnyebben és gyorsabban megy. A szakkifejezéseket továbbra is leírjuk mindkét nyelven, a tanulók önállóan használják a magyar nyelvű feladatgyűjteményeket, segítenek egymásnak a feladatok szövegezésének megértésében. A dolgozatok írásánál és az érettségi vizsgán is - természetesen továbbra is - elfogadom a válaszokat magyar nyelven is. Amikor a tanulók egymás közt beszélnek, s nem figyelnek oda a helyes beszédre, a tizenkettedik osztályban is lehet hallani helytelen mondatokat. Tükörfordításokat leggyakrabban szerbről magyarra, olyan tanulóktól is, akik tökéletesen beszélnek a magyar nyelvet (otthon kizárólagosan magyarul beszélnek) vagy fordítva, helytelen szerb kifejezéseket olyan tanulóktól, akik három évvel ezelőtt, egy szót sem tudtak magyarul.

Készülve kísérleti tanításomra, a hetedik osztályban felmerültek bennem a következő kérdések:

- *Menyire hatékony a fent említett tanítási módszer a nyelvi interferenciáktól mentes szaknyelv és a helyes beszéd elsajátításában?*
- *Mit kellene rajta változtatni, hogy növekedjen a hatékonysága?*

2.2. KÉRDŐÍV A TIZENKETTEDIK OSZTÁLYOS TANULÓK SZÁMÁRA

A kérdések megválaszolásának érdekében összeállítottam egy kérdőívet a tizenkettedik osztályos tanulók számára. Megfelelő kontextusba helyezve olyan kifejezések kerültek a kérdőívbe, melyek használatánál megfigyeltem a nyelvi interferenciákat a tanulók beszédében és kapcsolódnak a kísérleti tanításom tananyagához a hetedik osztályban.

2005 tavaszán minden tanulóval (28 tanuló: 22 tizenkettedikes és 6 tizenharmadikos; ők is a mi iskolánkba jártak) külön-külön körülbelül húsz percet beszélgettem. A tanulók választottak, hogy magyarul vagy szerbül beszéljünk. Minden kérdéssel kapcsolatban először a választott nyelven kérdeztem rá a megfelelő kifejezésre, utána pedig a másik nyelven megkérdeztem ugyanazt. A válaszokat leírtam. Fontosnak tartottam, hogy a tanulóknak legyen rálátásuk a jegyzeteimre a beszélgetés folyamán. A végén, ha valamelyik válasz nem volt helyes, elmondtam a pontos kifejezéseket és megkérdeztem ismerős-e ez a tanuló számára. Válaszát jelöltem. (A tanulók így, kaptak visszajelzést feleletük helyességéről és megtanulhatták a pontos kifejezéseket is.) A harmadik kérdés csak magyar nyelven hangzott el. Itt azt jelöltem, hogy érti-e a tanuló a mondat jelentését.

A kérdőív a következő volt:

1. *Nevezd meg a következő számhalmazokat: N, Z, Q, R!*
2. *Annának 5 almája van. Péternek 15 almája van. Mit mondhatunk Anna és Péter almái számainak viszonyáról? Írj legalább két különböző megfogalmazást!*
3. *Magyarországon hetvenöt tüzeset volt három nap alatt. Ez ötször annyi, mint amennyi egy átlagos hétvégén lenni szokott. Mit jelent az elhangzott mondat?*
4. *Hogyan nevezzük az alábbi műveletek egyes tagjait?*
 $2+6=8$ $5 \cdot 2=10$ (Mutattam a tanulónak a leírtakat.)
5. *Folytasd a mondatot:*
Kettő a tíz... és fordítva: tíz a... (Mutatok az $5 \cdot 2=10$ -re.)
6. *Hogyan nevezzük, azokat az egytől különböző számokat melyek csak eggyel és önmagukkal oszthatóak?*
7. *Hogyan nevezzük, azt a számot melynek önmagán és az egyen kívül más osztója is van?*
8. *Hogyan nevezzük az ötöt és a hatot, hogyan pedig a hetet és a kilencet a következő számokon belül?*

$$\frac{5}{7} \qquad \frac{6}{9}$$

9. *Mit csinálunk az első, mit pedig a második törttel?*

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3} \qquad \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

10. *Hogyan nevezzük a következő alakban felírt számokat?*

$$0,2 \qquad 10,25$$

11. *Mit csinálunk, ha a következőt tesszük?*

$$3x+15=3(x+5)$$

12. *Hogyan nevezzük az alábbi kifejezéseket?*

a) $6a$; $7x^2$; $4x$; $30x$; $3b^3$

A $4x$ és a $30x$ kifejezésekben van valami közös. Hogyan nevezzük az ilyen kifejezéseket?

b) $a+b$; $3x^2+7$; $2x^2-5$

c) $5x^3+8x^2-2x+9$

Hogyan nevezzük ebben a kifejezésben a következő számokat: 5, 8, -2; hogyan pedig a kilencset?

13. *Milyen szöveget írál az alábbi feladathoz?*

$$3b+b-2b=$$

(Szerettem volna megtudni, hogy ismerik-e a tanulók az „összevonni” kifejezést. A kérdést csak magyarul tettem fel, mivel szerbül erre nem létezik megfelelő szó.)

14. *Mit csinálunk, ha a következőt tesszük?*

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

15. *Mit szoktunk számolni a téglalapoknál, mit pedig a téglalatesteknél?*

A tizenkettedik évfolyam tanulóinak nyelvtudása

A huszonnyolc tanulóból - akikkel beszélgettem - öttel csak a második és a harmadik kérdéssel kapcsolatosan beszélünk mindkét nyelven. Ők dominánsan szerb nyelvűek voltak, közülük egy Boszniában, négyen pedig Szerbiában fejezték be az általános iskolát és rosszul beszéltek a magyar nyelvet. A feladatokat a könyvekből fordítottuk számukra. (E csoport tagjait a továbbiakban *ds1*-el jelölöm.) Öt tanuló szintén, dominánsan szerb nyelvű volt, de jól beszéltek magyarul is. A szüleik akkor települtek át Szerbiából Magyarországra, amikor még a gyerekek általános iskolások voltak. (Őket *ds2*-vel fogom jelölni). Tizenketten dominánsan magyar nyelvűek voltak és jól beszéltek szerbül is. A kilencedik osztályba iratkoztak be iskolánkba, addig magyar iskolába jártak. Közülük négyen nem tudtak egy szót sem szerbül, amikor beiratkoztak a gimnáziumba. (A nyolc dominánsan magyar nyelvű tanuló *dm*-el jelölöm, azokat, akik csak magyarul tudtak a beiratkozáskor *dm1*-el.) A többiek mindkét nyelvet nagyon jól beszéltek. Ők az általános iskola osztályaiba iratkoztak az iskolánkba. (Őket jelölöm *kk*-val: kiegyensúlyozott kétnyelvű.)

Hat tanuló (*2*, *dm* és *4*, *dm1*) választotta a magyar nyelvet a beszélgetésünk első nyelvének, a többiekkel először szerbül beszélünk.

Válaszok a kérdőív kérdéseire

1. N halmaz (*Skup prirodnih brojeva*), szerb nyelv: 27 jó válasz, 1 helytelen: egy *dm* tanuló *normálisnak* (*normalan*) nevezte a halmazt. A *ds1* tanulókat kivéve az N, Z és a Q halmazokat magyarul mindenki jól nevezte meg. R halmaz (*skup realnih brojeva*), szerb nyelv: 27 jó válasz, 1 helytelen: egy *dm* tanuló *valódinak* (*stvaran*) nevezte; magyar nyelv: 2 jó válasz, 21 helytelen: *reális számok halmazának* neveztek, ugyanúgy ahogyan szerbül nevezzük (10 tanuló már hallotta a helyes magyar megnevezést, de ezt nem használták).

2. Szerbül a következő mondatok hangoztak el:

– Péternek tízzel több almája van, mint Annának.

(*Petar ima deset jabuka više nego Ana.*) (26 jó válasz)

(*Petar ima za deset jabuka više nego Ana.*) (2 jó válasz, az előző mondat változata; *ds1*)

- *Annának tízzel kevesebb almája van, mint Péternek.* (9 jó válasz)
(*Ana ima za deset jabuka manje nego Petar.*)
- *Péternek háromszor annyi (tükörfordításban: több) almája van, mint Annának.*
(*Petar ima tri puta više jabuka nego Ana.*) (27 jó válasz)
- (*Petar ima tri puta toliko jabuka kao Ana.*) (1 helytelen válasz; *dm*)

Ez a mondat a következő magyar mondat tükörfordítása:

Péternek háromszor annyi almája van, mint Annának.

- *Péter almáinak harmada, Annáé.* (ellentmondásos mondat)
(*Ana ima trećinu Petrovih jabuka.*) (egy *dm* kétféleképpen válaszolt)

Ez a tanuló a következő magyar mondatot fordította le:

Annának harmad annyi almája van, mint Péternek.

Magyarul a következő mondatok hangoztak el:

- *Péternek tízzel több almája van, mint Annának.* (23 válasz)

Az öt *ds1* tanuló mondata a hasonló volt, mint a következő:

- *Péternek tíz alma van, mint több Annának.*
- *Péternek háromszor annyi almája van, mint Annának.* (2 válasz; *dm*)
- *Péternek háromszor több almája van, mint Annának.* (21 válasz)

Az utóbbi mondat a helyes szerb mondat tükörfordítása.

Az öt *ds1* tanuló mondata hasonló volt, mint a következő:

- *Péternek háromszor több alma van, mint Annának.*
- *Annának harmad annyi almája van, mint Péternek.* (1 válasz; *kk*)

3. Minden tanuló megértette a mondatot. A *ds1* tanulóknak lefordítottam a *tűzeset* (3 tanuló), az átlagos (4 tanuló) és a szokott (3 tanuló) szavakat.

4. Szerb nyelven a helyes kifejezések a következők: *sabirci* (összeadandók); *zbir* (összeg); *činioci* (tényezők; jelentése: alkotók- azok amelyekből valami összetevődik); *szorzónak*, és *a szorzandónak* megfelelő kifejezéseket szerbül nem használunk); *proizvod* (szorzat; ez a szó *terméket* is jelent).

Szerb nyelven a válaszok a következők voltak:

- *sabirci* (összeadandók; 25); az előző szóhoz hasonlító két tanuló alkotás: *sabiraoci* (1, *dm*); *sabirnici* (1, *dm1*); *članovi* (a *tagok* szó fordítása; 1, *kk*);
- *zbir* (összeg; 23); *sabir* (1, *dm*; az *összeg* szó helytelen fordítása); *rezultat* (eredmény; 4, *dm*);
- *činioci* (tényezők; 15); *množioc* (1, *kk*; a *szorzó* szó tükörfordítása); a *szorzó* és a *szorzandó* szók fordításai következnek: *množenik*, *množilac* (10, *dm*; 2, *kk*); *množilac*, *množioc* (1, *dm1*); *umnoženik*, *umnožilac* (1, *dm*);
- *proizvod* (szorzat; 18); *množnja* (1, *dm*; nem létező szó, a *szorzat* szó fordításának eredménye); *rezultat* (eredmény; 5, *dm*).

Magyar nyelven a válaszok a következők voltak:

- összeadandók (19); tagok (1válasz, *dm*); *összeadandó számok* (1, *ds2*); *összegek* (1, *ds2*);
- *összeg* (18); *végösszeg* (1, *ds2*); *eredmény* (3; *ds2*);
- *szorzó*, *szorzandó* (14); *tényezők* (1, *dm*; 2, *kk*); *szorzók* (2, *kk*; 2, *ds2*); *szorzadékok* (1, *ds2*); *szorosok* (1, *ds2*); *összetevők* (1, *ds2*; a szó a szerb kifejezés fordításának eredménye);
- *szorzat* (18); *eredmény* (2, *ds2*; 1, *kk*); *végeredmény* (1, *ds2*); *termék* (1, *ds2*; ez a szerb kifejezés tükörfordítása).

5. Szerb nyelven a helyes kifejezések a következők: *delilac* (osztó); *sadržalac* (többszörös); a szó tükörfordítása a *tartalmazó* szó).

Szerb nyelven a válaszok a következőek voltak:

- *delilac* (osztó; 26); *deliloc* (1, *dm1*; az előző szó helytelen változata); *deljenik* (osztandó; 1 *dm*);
- *sadržalac* (többszörös; 22); *sadržilac* (1, *dm1*; 1, *dm*; az előző szó helytelen változata); *umnožilac* (1, *dm1*; nem létező szó eredete: *množiti*: szorozni).

Magyar nyelven a válaszok a következőek voltak:

- *osztó* (21); *osztandó* (1, *ds2*); *osztandó szám* (1, *ds2*);
- *többszörös* (16); *tartalmazó* (5, *kk*; 2, *ds2*).

6. Szerb nyelven a *primszám* kifejezésnek két megfelelője van: *prost broj* (tükörfordítása: *egyszerű szám*) és a *prim broj* (tükörfordítása: *primszám*).

Szerb nyelven a válaszok a következőek voltak:

- *prost broj* (*primszám*; 15); *prim broj* (*primszám*; 11); *primni broj* (1, *dm*; az előző szó helytelen változata); *primarni broj* (1, *dm1*; a kifejezés jelentése: *elsődleges szám*).

Magyar nyelven a válaszok a következők voltak:

- *primszám* (6, *dm*; 4, *dm1*); *egyszerű szám* (12); *primitív szám* (1, *ds2*).

7. Az *összetett szám* szerb nyelvű megfelelője, a kifejezés tükörfordítása: *složen broj*.

Szerb nyelven a válaszok a következőek voltak:

- *složen broj* (*összetett szám*; 26).

Magyar nyelven a válaszok a következők voltak:

- *összetett szám* (21); *komplex szám* (1, *ds2*); *komplikált szám* (1, *ds2*).

8. A *számláló* és a *nevező* megfelelői szerb nyelven, a szavak tükörfordításai: *brojilac* és *imenilac*.

Szerb nyelven a válaszok a következők voltak:

- *brojilac* (*számláló*; 26); *brojalac* (1, *dm1*; az előző szó helytelen változata); *brojnik* (1, *dm*; nem létező szó, a *szám* szóból ered);
- *imenilac* (*nevező*; 26); *imenioc* (1, *dm1*; 1, *kk*; az előző szó helytelen változata).

Magyar nyelven a válaszok a következők voltak:

- *számláló* (19); *számoló* (2, *ds2*); *számkitevő* (1, *ds2*);
- *nevező* (20); *névező* (1, *ds2*); *névelő* (1, *ds2*); *névadó* (1, *ds2*).

9. Szerb nyelven az *egyszerűsítünk* kifejezésnek a megfelelője a *skraćujemo* (a szó tükörfordítása a: *rövidítünk*); a *bővítünk* megfelelője és a tükörfordítása is a: *proširujemo*.

A szerb nyelvű válaszok a következőek:

- *skraćujemo* (*egyszerűsítünk*; 26); *pojednostavljujemo* (1, *dm*; 1, *dm1*);
- *proširujemo* (*bővítünk*; 23); *širimo* (2, *dm*; 1, *dm1*; 1, *kk*); *produžimo* (1, *dm1*);

A magyar nyelvű a válaszok a következőek:

- *egyszerűsítünk* (7, *dm*; 2, *dm1*); *rövidítünk* (12); *lerövidítünk* (1, *ds2*; 1, *kk*);
- *bővítünk* (12, *dm*; 3, *kk*); *szélesíteni* (3, *kk*; 1, *ds2*); *terjeszteni* (1, *ds2*); *többszörísíteni* (1, *ds2*).

10. Szerb nyelven a *tizedestört* a következőképpen nevezzük: *decimalni zapis racio-*

nalog broja (tükörfordítása: *a racionális szám tizedes leírása*), vagy rövidebben: *decimalni broj* (tükörfordítása: *tizedes szám*).

A szerb nyelvű válaszok a következők:

- *decimalni zapis racionalnog broja* (3, *ds1*); *decimalni broj* (24); *desetine broja* (1, *dm1*); *a szám tized részei*).

A magyar nyelvű válaszok a következők:

- *tizedes tört* (7, *dm*; 2, *dm1*); *tizedes szám* (14; 11 tanuló kijelentette, hogy ők a helyes kifejezés hallatán olyan törtre gondoltak, melynek a számlálója és a nevezője is tizedes tört).

11. A *kiemelünk* szerb megfelelője a *izvlačimo ispred zagrade* (tükörfordítása: *kihúzni zárójel elé*).

A szerb nyelvű válaszok a következők:

- *izvlačimo ispred zagrade* (25); *izdižemo ispred zagrade* (1, *dm1*; tükörfordítása: *kiemelünk zárójel elé*); *izdižemo* (1, *dm*; jelentése: *kiemelünk*); *donesemo ipred zagrade* (1, *dm1*; tükörfordítása: *zárójel elé hozzuk*);

A magyar nyelvű válaszok a következők:

- *kiemelünk* (9, *dm*; 2, *dm1*); *kihúzzuk zárójel elé* (9); *kitenni zárójel elé* (1, *kk*); *kivonni zárójel elé* (1, *ds2*);

12. Az *egytagú algebrai egész kifejezéseket* (*kéttagú algebrai kifejezéseket*, illetve *többtagú algebrai kifejezéseket*), *monomokat* (*binomokat* illetve *polinomokat*), szerbül kizárólagosan *monomoknak* (*binomoknak*; illetve *polinomoknak*) nevezzük. Az *egynemű kifejezések* szerb megnevezése: *slični monomi* (tükörfordítás: *hasonló monomok*). Az *együtthatók* (*koeficienssek*) szó megfelelője szerbül a: *koeficienti* szó. Az algebrai kifejezésekben levő *konstansokat* szerbül *slobodni članovi*-nak (tükörfordítás: *szabad tagok*) nevezzük.

A szerb nyelvű válaszok a következők:

- *monomi* (4, *ds1*; 3, *ds2*; 6, *dm*; 2, *kk*);
- *slični monomi* (4, *ds1*; 3, *ds2*; 4, *dm*; 2, *kk*); *slični izrazi* (1, *kk*; fordítás: *hasonló kifejezések*);
- *binomi* (5, *ds1*; 5, *ds2*; 7, *dm*; 3, *dm1*; 6, *kk*);
- *polinomi* (5, *ds1*; 4, *ds2*; 4, *dm*; 1, *dm1*; 5, *kk*);
- *koeficienti* (5, *ds1*; 5, *ds2*; 7, *dm*; 3, *dm1*; 6, *kk*);
- *slobodni članovi* (4, *ds1*; 4, *ds2*; 2, *dm*; 4, *kk*); *konstante* (3, *dm*; 1, *dm1*; *konstansok*); *brojevi* (2, *dm*; fordítás: *számok*).

A magyar nyelvű válaszok a következők:

- *monomok* (3, *ds2*; 6, *dm*; 2, *kk*);
- *egynemű kifejezések* (1, *dm*); *hasonló monomok* (3, *ds2*; 4, *dm*; 2, *kk*);
- *binomok* (5, *ds2*; 7, *dm*; 3, *dm1*; 6, *kk*);
- *polinomi* (4, *ds2*; 4, *dm*; 1, *dm1*; 5, *kk*);
- *együtthatók* (4, *dm*; 2, *kk*); *koeficienssek* (5, *ds2*; 5, *dm*; 3, *dm1*; 4, *kk*);
- *konstansok* (3, *dm*; 1, *dm1*); *szabad tagok* (4, *ds2*; 2, *dm*; 4, *kk*); *számok* (2, *dm*).

13. Csak három tanuló használta az *összevonni* kifejezést, négyen a kifejezés hallatán kijelentették, hogy ismerős számukra.

14. Szerb nyelven a *négyzetre emelünk*, kifejezés a következő: *dižemo na kvadrat*, vagy *kvadriramo* (tükörfordítás: *négyzetelünk*).

A szerb nyelvű válaszok a következők:

- *džemo na kvadrat* (3, *ds1*; 5, *ds2*; 6, *dm*; 4, *dm1*; 4, *kk*); *kvadiramo* (2, *ds1*; 1, *dm*; 2, *kk*); *podžemo na kvadrat* (1, *dm*);
- *négyzetre emelünk* (12, *dm*; 3, *kk*); *négyzetre felemeljük* (2, *ds2*; 1, *kk*); *négyzete-lünk* (2, *ds2*; 1, *kk*); *fokozzuk* (1, *kk*); *felvonjuk négyzetre* (1, *ds2*).

15. A téglalapoknál a *kerületet* (szerbül: *obim*) és a *területet* (szerbül: *površina*), a tég-latesteknél pedig a *felszínt* (szerbül: *površina* ugyanúgy, mint a *területet*) és a *térfogatát* (szerbül: *zapremina*).

A szerb nyelvű válaszok a következők:

- *obim* (*kerületet*; 28);
- *površina* (*területet*; 28);
- *površina* (*felszínt*; 28);
- *zapremina* (*térfogat*; 28).

A magyar nyelvű a válaszok a következők:

- *kerületet* (21);
- *területet* (23);
- *felszínt* (2, *dm*); *területet* (20); *felület* (1, *kk*);
- *térfogat* (22); *térbefogat* (1, *ds2*).

A beszélgetések tanulmányai

Az öt tanulónál, akikkel csak szerbül beszéltem nem volt interferencia. A kiegyensú-lyozott kétnyelvűek magyar nyelven használtak interferenciákat: *reális számok*, *háromszor több*, *tartalmazó*, *szélesíteni a törtet*, *kihúzni zárójel elé*, *hasonló monomok*, *szabad tagok*, *négyzetre felemeljük*, *négyzetelünk*. Az egyetlen fordítás magyar nyelvről szerbre a *množioc* (a *szorzók* szó tükörfordítása). A legtöbb interferencia a dominánsan kétnyelvűeknél fordul elő. A dominánsan kétnyelvűek legtöbbször fordítottak a nem domináns nyelvre, de a fordí-tásokon kívül használtak a megfelelő kifejezésekkel hasonló hangzású szavakat is (*névelő*, *névadó*, *számkitevő*, *primni broj*). Ezért ott ahol a kifejezések egymás tükörfordításai (Q, *tíz almával több*, *összeadandók*, *osztó*, *többszörös*, *összetett szám*, *számláló*, *nevező*, *bővítünk*, *négyzetre emelünk*) sokkal kevesebb az interferencia, mint ott ahol a kifejezések nem egymás tükörfordításai (R, *háromszor annyi*, *szorzó-szorandó*, *egyszerűsítünk*, *tizedes tört*, *kiemelünk*, *konstans*, *felszín*).

A legtöbb interferencia a magyar nyelvben jelentkezett. A 23 tanulóból, akikkel magyar nyelven beszélgettem 21-en *reális számok halmazának* nevezte a R-t; 21-en a *háromszor annyi* helyet a *háromszor több-et* használták; 21-en a *binom* elnevezést használták; 20-an a *felszínt területnek* nevezték; 17-en a *koefficiensek* szót használták; 15-en a *monom* szót hasz-nálták; 14-en az *egyszerűsítünk* helyett a *rövidítünk*, vagy a *lerövidítünk* szót használták. A felsorolt kifejezések közt sok a latin eredetű. A tanulók valószínűleg úgy érezték, hogy ha a szerb nyelvben használjuk őket, akkor ezt megtehetjük a magyarban is. Számomra különösen érdekes, hogy az első három példánál 10, a másodiknál 9, a harmadiknál 6, a negyediknél 4 és az ötödiknél 3, most is dominánsan magyar nyelvű tanulók, kik magyar általános iskolába jártak és otthon is főleg magyarul beszéltek (a gimnázium előtt biztosan használták a helyes magyar kifejezéseket), a négy év alatt, „átvették” a szerb kifejezéseket.

Amikor a tanulóknak megmondtam szerbül a helyes kifejezést a tanulók majdnem min-dig azt válaszolták, hogy már hallották ezt a kifejezést. Ha magyarul mondtam ugyanezt sokkal kevesebben ismerték fel a kifejezést.

A beszélgetések alapján megválaszolható a fejezet elején feltett első kérdés:

- *A tanítási mód melyet addig használtam nem volt eléggé hatékony a nyelvi interferenciáktól mentes szaknyelv és a helyes beszéd elsajátításában. Ez különösen a magyar szaknyelvre vonatkozik, melynél a tanulói teljesítmények sokkal gyengébbek voltak, miközben a tanulók magyar nyelvtudása jobb volt a szerb nyelvtudásánál. A magyar szakkifejezések tanulását elhanyagoltuk.*

A második kérdés megválaszolásában maguk a tanulók segítettek. A beszélgetések végen megkérdeztem mindegyik tanulót, hogy hasznos volt-e számára a beszélgetés és fontosnak tartja-e a szakkifejezések tudását. Minden tanuló pozitívan nyilatkozott a beszélgetésről. A válaszok közt következők is akadtak:

„*A kifejezésekre eddig nem figyeltem fel.*”

„*Most megjegyzem, melyek azok amelyek különböznek.*”

„*Nem is tudtam mit tudok és mit nem.*”

Skemp (1975) kihangsúlyozza, hogy a fogalomtanításban fontos kihangsúlyozni a közös tulajdonságokat, de az is hogy a fogalom miben különbözik más fogalmaktól. Ezt én a kifejezések tanulására fogom alkalmazni.

- *Azon kívül, hogy leírjuk a kifejezéseket mindkét nyelven, ki fogom hangsúlyozni, hogy a kifejezések egymás tükörfordításai, vagy sem. Ha nem, felhívom a tanulók figyelmét, hogy melyek a különbségek, s elmondom, hogy általában milyen hibákat vétének a megnevezéskor a tanulók. Bár iskolánkban a tanítási nyelv szerb, nem csak a kifejezéseket fogom megnevezni magyar nyelven, hanem egész mondatokat magyarul fogok mondani; azoktól a tanulóktól, kik tudnak magyarul, vissza is fogom kérni magyar nyelven.*

3. A KUTATÁS MÓDSZERTANA

3.1. A KUTATÁS KÉRDÉSEI

1. *Hogyan hat a konkrét és képi reprezentációk használata az algebra alapjainak elsajátítására az általános iskola hetedik osztályos kétnyelvű tanulók körében?*
2. *Adódnak-e nehézségek a tanulók kétnyelvűségéből az algebra alapjainak elsajátításában és lehet-e a szerb kisebbségi iskolában biztosítani az interferenciáktól mentes szaknyelv és a helyes beszéd elsajátítását a kisebbségi és a magyar nyelven is a kétnyelvű tanulók számára?*

3.2. HIPOTÉZISEK

1. *Az általános iskola hetedik osztályos kétnyelvű tanulók körében a konkrét és képi reprezentációk használata hozzájárul az algebra alapjainak hatékony elsajátításához, különösen a változó fogalmának kialakulásához, az algebrai kifejezések lehetséges jelentésének meghatározásához, az algebrai kifejezésekkel való műveletek elvégzésének és az azonos struktúrájú szöveges feladatok megoldásának elsajátításához.*
2. *Léteznek olyan, nehézségek melyek a tanulók kétnyelvűségéből adódnak az algebra alapjainak elsajátításában a szerb kisebbségi iskola hetedik osztályában. Az általunk alkalmazott tanítási módszer biztosítja az interferenciáktól mentes szaknyelv és a helyes beszéd elsajátítását a kétnyelvű tanulók számára.*

3.3. A KUTATÁS MENETE

Az első oktatási kísérletet 2006 tavaszán, a másodikat 2007 tavaszán végeztem a budapesti Szerb Tanítási Nyelvű Általános Iskola és Gimnázium hetedik osztályaiban (8 tanuló, illetve 7 tanuló) 23 tanítási órában. Ezekben az osztályokban én tanítottam a matematikát. A két kísérlet tanítási módja és a tanulói feladatok azonosak voltak, azzal hogy az első kísérlet tapasztalatai alapján, pár helyen a feladatokat kiegészítettük. (A második kísérleti tanítás alatt ellenőrizni lehetett, hogy jobbnak bizonyultak-e a megváltoztatott, mint az eredeti feladatok.) A tanítási kísérlet öt és fél héten keresztül a matematika órák keretén belül történt, heti négy órában.

3.4. A FEJLESZTŐ OKTATÁSI KÍSÉRLETEK ÓRATERVE

- *Aritmetikai kifejezések és a nyelvi különbségek (1 óra)*
- *Változó fogalmának bevezetése gépmodell alkalmazásával (1 óra)*
- *Konkrét szituációk reprezentálása algebrai kifejezésekkel és algebrai kifejezések kontextusba való helyezése. Algebrai kifejezések szerkezete (1 óra)*
- *Geometriai minták vizsgálata (1 óra)*

- *Algebrai kifejezések értékének meghatározása (1 óra)*
- *Algebrai kifejezések reprezentálása szakaszokkal. Algebrai kifejezések a számegyenesen. (1 óra)*
- *Konkrét szituációk kódolása (2 óra)*
- *Az algebrai kifejezések lehetséges konkrét jelentései (1 óra)*
- *Algebrai kifejezések összevonása (3 óra)*
- *Összeg és különbség hozzáadása és kivonása (1 óra)*
- *Kéttagú algebrai kifejezés szorzása egytagúval (1 óra)*
- *Kéttagú algebrai kifejezés szorzása egytagúval és összevonás: gyakorlat (2 óra)*
- *Kéttagú algebrai kifejezés szorzattá alakítása (kiemelés) (1 óra)*
- *Lineáris egyenletek megoldása mérlegelevvel (3 óra)*
- *Lineáris egyenlet megoldására visszavezethető azonos struktúrájú szöveges feladatok (3 óra)*

Minden tanítási óráról jegyzőkönyv készült.

3.5. A KUTATÁS MÓDSZEREI

3.5.1. Az előteszt és az utóteszt elemzése

A tanulók előtudásáról az előteszt elemzése alapján és a kiegészítő beszélgetésekből értesültünk. A kiegészítő beszélgetéseket a tanulókkal egyenként végeztük (az első csoportból öt, a másodikból három tanulóval) akkor, amikor az előtesztben leírtakból nem volt követhető a tanuló gondolatmenete vagy kiegészítő magyarázatra volt szükségünk. A beszélgetésekről hangfelvételek és jegyzetek készültek. A tanulók előtudását figyelembe véve állítottuk össze a feladatokat az oktatási kísérlethez és meghatároztuk azt is, hogy melyik tanulónál mire kell figyelni, esetleg kivel kell külön foglalkozni. Az előteszt és az utóteszt eredményeinek összehasonlítása alapján tudtunk levonni következtetéseket a tanulók algebrai tudásának fejlődéséről.

3.5.2. A tanulók munkájának megfigyelése

A tanulók számára minden órára feladatlapokat, vagy csak a feladatok szövegét (amit a füzetükbe ragasztottunk), állítottam össze, fénymásoltam és kiosztottam köztük. Az osztályok kis létszáma lehetővé tette számomra, hogy a tanítás mellett megfigyeljem a tanulók munkáját, beszélgessek velük és erről jegyzeteket is készítsék az órákon. Minden tanítási óráról hangfelvételt készítettünk. Rendszeresen a tanulói munkákat órák után fénymásoltam; s a hangfelvételekkel és a jegyzeteimmel együtt elemeztem. Ilyen módom, teljes rálátást szereztem a tanulók óráról-óra való fejlődésére; s arra is, hogy kinek van szüksége több gyakorlásra vagy magyarázatra.

3.5.3. A délutáni foglalkozások

Minden tanuló napközis volt így minden kísérleti óra után be tudtunk iktatni egy egyórás délutáni foglalkozást. Itt a tanulók legtöbbször önállóan oldottak meg feladatokat, de csoportban is dolgoztak és konzultáltak velem is a feladatokkal kapcsolatban. Ilyenkor külön-külön tudtam foglalkozni a tanulókkal. Ezekről a foglalkozásokról is készültek jegyzetek.

3.5.4. A kísérleti osztályok jellemzése

Az első kísérleti csoport nyolc tanulóból állt: Danica, Filip, Milan, Nikola, Oliver, Slavica, Tajna és Zoran. (Ezek fedőnevek.) A tanulók átlagos képességűek. Közülük a legjobb tanulmányi eredményt matematikából a hatodik osztályban Nikola és Zoran érték el, a leggyengébbet Filip és Oliver.

Nikola, Oliver, és Tajna az általános iskola első osztályától, Filip a második osztályától a többiek az ötödik osztálytól a Szerb Iskola tanulói. Nikola és Oliver kiegyensúlyozott kétnyelvűek, Tajna és Filip jól beszélnek a magyar nyelvet, de dominánsan szerb nyelvűek (szüleikkel települtek át Szerbiából Magyarországra), a többiek dominánsan magyar nyelvűek. A dominánsan magyar nyelvű tanulók az általános iskola első négy osztályát magyar nyelven végezték és közülük is Slavica és Zoran gyengébben beszél a szerb nyelvet, mint Danica és Milan.

A második kísérleti csoport hét tanulóból állt: Barbara, Ivanka, Jovan, Kosta, Ljilja, Robert és Vesna. (Ezek fedőnevek.) A tanulók átlagos képességűek. Közülük a legjobb tanulmányi eredményt matematikából a hatodik osztályban Vesna érte el, a leggyengébbet Robert.

Barbara, Jovan, és Vesna az általános iskola első osztályától; Kosta, Ljilja és Robert az ötödik osztályától, Ivanka pedig a hetedik osztálytól jár iskolánkba. Az első három tanuló kiegyensúlyozott kétnyelvű; Ivanka az egyedüli egynyelvű tanuló, a hetedik osztályig Szerbiában tanult és nem beszél magyarul. A többiek dominánsan magyar nyelvűek.

4. KÍSÉRLETI TANÍTÁS

4.1. ELŐTESZT

A tanítási ciklus megkezdése előtt negyvenöt perces felmérőt írtam a tanulókkal. A felmérő célja a következő volt: *megállapítani milyen előismeretekkel rendelkeznek a tanulók néhány alapvető algebrai fogalommal kapcsolatban.* Az első két feladatban a „=” jelet kellett helyesen értelmezni. A 2. feladatnál az egyenlőségjel két oldalán levő kifejezések összeadandóit kellett összehasonlítani és észrevenni, hogy van köztük két egyenlő értékű. A 3. feladatban a zárójel felbontására kérdeztem rá. A 4. és 5. feladatban általánosítani kellett és leírni a megfelelő algebrai kifejezéseket. A 6., a 7., és a 8. feladatban a tanulónak össze kellett kapcsolni a geometriai és az algebrai ismereteit. A szimbolikus reprezentáció alapján meg kellett határozni a kifejezések szakaszos reprezentációit és fordítva. A 9. feladatban a szöveget kellett értelmezni, leírni a megfelelő algebrai kifejezéseket és ezeket összeadni. A 10. feladatban jelentést kellett adni az algebrai kifejezéseknek. A 11. feladatban értelmezni kellett az egyenlőségeket és a 12. feladatban az számegyenesen kellett a kifejezések helyét meghatározni.

4.1.1. A teszt feladatai:

1. Melyik számot helyettesíti a négyzet?

$$110 - 52 = \square + 18$$

2. Számolás nélkül határozd meg, mely számot helyettesíti a négyzet?

$$719 + 2488 = 719 - 261 + \square + 2488$$

3. Számolást nem használva kösd össze a baloldalon levő kifejezést azzal a kifejezéssel (vagy kifejezésekkel) mellyel (melyekkel) egyenlő az értéke (értékük)!
Választásod indokold!

	$185 - 58 - 9$
	$58 - 185 + 9$
$185 - (58 - 9)$	$185 + 58 - 9$
	$185 - 58 + 9$
	$185 + 58 + 9$

4. Töltsd ki a táblázat hiányzó helyeit és keress egy szabályt az egymás alatt levő számokra. Írd le szavakkal is ezt a szabályt!

5	11	100	n
7	13		

2	6	1000	m
4	36		

5. Hány pont van az ötvenedik képen?

(A szerb mondat tükörfordítása: Hány pont van azon a képen melynek száma 50?)

Hány pont van a képen, amelyen a sorok száma p ?



képen melynek száma 1



képen melynek száma 2



képen melynek száma 3

Hány pont van az ötvenedik képen?

Hány pont van a képen, amelyen a sorok száma p ?



képen melynek száma 1

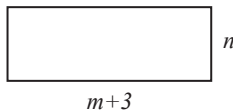
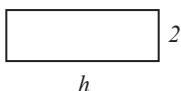


képen melynek száma 2



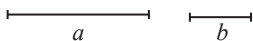
képen melynek száma 3

6. Mennyi a képen látható téglalapok kerülete és területe?

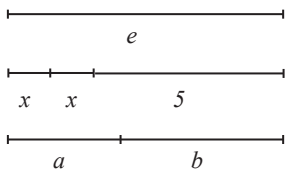


7. Az a és a b számot szakaszokkal reprezentáltuk. Rajzold le azokat a szakaszokat melyek a $2 \cdot a + b$ és az $a - b$ kifejezéseket reprezentálják!

(Szerb nyelven a reprezentálni szó helyett a megjeleníteni (predstaviti) szót használjuk.)



8. Írj le minél több egyenlőséget a kép alapján!



9. Egy kosárban m darab alma van. A második kosárban öttenél több alma van, mint az első kosárban. A harmadik kosárban kétszer annyi alma van, mint az első kosárban. Határozd meg hány alma lesz a harmadik kosárban, ha az almákat az első és a második kosárból átesszük a harmadik kosárba!

10. Mit jelenthetnek a következő kifejezések:

$$2 \cdot b + a$$

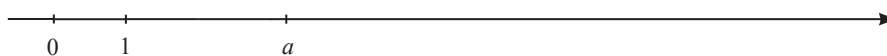
$$(b+1) \cdot a$$

$$4 \cdot a$$

11. Egy gyümölcsösben k almafa és p szilvafa van. Mit jelentenek a következő egyenlőségek?

$$\begin{aligned}p &= k \\ k &= p + 30 \\ p &= 3 \cdot k \\ p + k &= 70\end{aligned}$$

12. A adott számegeyenesen határozd meg a $3 \cdot a$ és a $2 \cdot a - 1$ számok helyét!



4.1.2 Az előteszt eredményeinek elemzése

1. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Pontos válaszok száma: 7; helytelen válaszok száma: 1.

A négyzet egy ismeretlen

N és T (a tanulók nevének kezdő betűi) a következőképpen írta az eredményt: $\square = 40$. Ők a négyzetet ismeretlenként kezelték (úgy ahogyan a hatodik osztályban használtuk a különböző alakzatokat az ismeretlen megjelölésére, amikor egyenleteket oldottunk meg „lebontogatósi” módszerrel).

A négyzet egy keret

Hat tanuló, keretként „látta” a négyzetet, melybe bele is írták a keresett számot.

Az egyenlőségjel hibás értelmezése

Olivér megoldása következik:

$$110 - 52 = \boxed{58} + 18 = 76$$

Az interjún megnéztük közösen a megoldását és megkérdeztem:

G (a tanár nevének kezdő betűje): *Kibővítetted az első feladatot?*

Q: *Igen! A tanárnő biztosan elfelejtette megrajzolni a másik négyzetecskét, ezért én megrajzoltam.*

A tanuló balról jobbra haladva először a $110 - 52 =$ -re összpontosított. Az „=” jelet: ír le az eredményt-ként „olvasta”. A tanuló szerint a négyzet az eredmény számára kijelölt üres helyet jelentette. Ezért kiszámolta a $110 - 52$ -t és az eredményt beleírta a négyzetbe. Következik a $58 + 18$. Az előbbiekhöz hasonlóan most is kiszámolta az összeget, az összeadás eredményének leírásához egy újabb „=” jelet és négyzetet használt.

S a négyzetbe írta a 40-et, de ennek kiszámolását hibásan jegyezte le:

$$110 - 52 = 58 - 18 = 40$$

A tanuló az „=” jelet kétféleképpen értelmezte. Tudta, hogy a számkifejezések az egyenlőség két oldalán egyenlő értékűek, ezért olyan számot keresett, mely ezt az egyenlőséget felállítja. A számolásnál pedig, az „=” jelet: ír le az eredményt-ként „olvasta”.

A második kísérleti csoport hat tanulója jól határozta meg a 40-et (B bizonytalan volt: az 58-at kijavította 40-re). V a négyzetet ismeretlennek, a többiek „keretnek” tekintették. J hibázott, hasonlóan gondolkodott, mint Q.

2. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Számolás nélkül meghatározott pontos válaszok száma: 2; számolással meghatározott pontos válaszok: 2; hibás számolás: 3; nem válaszolt 1 tanuló.

N és T pontos választ adott számolás nélkül. Ők a négyzetet ismeretlennek tekintették. O a második feladattal kapcsolatosan semmit sem írt. A megbeszélésen ő is kérdezett: O: *Hogy lehet számolás nélkül kiszámolni?*

Olivér szerint meghatározni az ismeretlen számot csak számolással lehet. Mivel a feladat erre nem ad lehetőséget, ezért e feladattal tovább nem foglalkozott.

A többiek nem analizálták a kifejezéseket, de tudták, hogy az „=” jel két oldalán egyforma értékű kifejezések állnak. Ők számoltak (ketten jól, hárman hibáztak) és az eredményt beleírták a négyzetbe. S pontos megoldása következik:

$$\begin{array}{r} 719 \\ + 2488 \\ \hline 3207 \end{array} \qquad 719 - 261 = 458$$

$$\begin{array}{r} 2488 \\ + 458 \\ \hline 2946 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3207 \\ - 2946 \\ \hline 261 \end{array}$$

A második kísérleti csoportban számolás nélkül meghatározott pontos válaszok száma: 1; számolással meghatározott pontos válaszok: 1; hibás számolás: 4; az „=” jel helytelen értelmezése 1 volt. V oldotta meg számolás nélkül a feladatot és ő volt az egyetlen, aki a négyzetet ismeretlennek tekintette. L számolással oldotta meg a feladatot, még a többiek - J kivételével - számolás közben hibáztak. J hasonlóan gondolkodott, mint O. Azzal, hogy az egyenlőség jel, mely jelentése szerinte: számold ki és írd le az eredményt, helyettesíthető a négyzettel, az eredmény számára kijelölt helyel. J kiszámolta a $719-261$ különbséget és az eredményt a négyzetbe írta: $719+2488=719-261+458+2488$.

3. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Számolás nélkül meghatározott pontos választások száma: 2; pontos választás számolással: 2; helytelen választások száma: 4.

Négy tanuló egyenlő értékű kifejezéseket kötött össze:

M szabály felhasználással a következőt írta:

$$- \cdot + = - \qquad - \cdot - = +$$

A tanuló arra utal, hogy: $-1 \cdot 58 = -58$ és $-1 \cdot (-9) = 9$.

D a következő **konkretizálást** írta, hogy megindokolja választását:

Marija 185 lepkét kapott. Elengedett 49-et. Milan is 185 lepkét kapott. Ő 58 lepkét engedett el, de később fogott még 9-et. Most mindkettőjüknek ugyanannyi lepkéje van.

S és Z minden kifejezést **kiszámolt** és megtalálta az egyenlő értékűeket.

A zárójeleket el lehet hagyni

E, N, O és T a $185-(58-9)$ és a $185-58-9$ kifejezéseket kötötték össze.

A tanulók magyarázatainak fordításai következnek:

O: *A baloldalon is két mínusz van és a jobb oldalon is két mínusz van.*

N: *Jóvánnak 185 Ft-ja volt. Vásárolt egy füzetet 58 Ft-és és elvesztett 9 Ft-ot.*

Kérdésekre hogy mire vonatkozik ez a mondat, rámutatott mind a két (összekötött) kifejezésre.

T írta az egyetlen magyarázatot, amelyben algebrai kifejezések is voltak:

$$u - (a - b) = u - a - b \qquad \text{A zárójelek nem kellenek.}$$

E nem írt magyarázatot, s mikor rákérdeztem, hogy miért választotta ezt a kifejezést, nem válaszolt.

A második kísérleti csoportban a számolás nélkül meghatározott pontos válaszok száma: 0; pontos választás számolással: 4; helytelen választások száma: 3. B, J, K és R kiszámolta a kifejezéseket és kiválasztotta az egyenlő értékűeket. L (magyarázata hasonló, mint N-é) és V (magyarázata: *Mind a kettőnél a 185-ből kivonunk 58-at, és 9-et.*) szerint a zárójeleket el lehet hagyni. I a jobboldali kifejezések közül kettőt is választott: a $185-58+9$ és a $9-185-58$. Az ismert rímekben megfogalmazott mondókára

(mely az $a-(b+c)=a-b-c$ és az $a-(b-c)=a-b+c$ mint szabályra vonatkozik) hivatkozott: *Ha a zárójel előtt mínusz áll a zárójelben változás lesz.* A kiválasztott kifejezésekben a baloldaltól kiindulva az 58-nak és a 9-nek előjelei „megváltoztak”, de I nem vette figyelembe, hogy a második kifejezésnél a 185 előjele is „változott”.

4. feladat első táblázatával kapcsolatos megoldások (első kísérleti csoport):

Minden tanuló a 100 alá a 102-t írta. Ezen kívül teljesen jó megoldás: 1 volt; a helyes rész megoldások: 4; helytelen rész megoldás: 4.

N oldotta meg a teljes feladatot: táblázat helyes kitöltése (102; $n+2$) és a szabály korrekt megfogalmazása írásban.

A többi tanuló is jól határozta meg a táblázatban hiányzó számot, a 102-t. D, F, S és T írásba is megfogalmazták processzus alakban a szabályt: *a felső sor minden számához hozzáadva kettőt, megkapjuk az alatta levő számot.*

D helyesen írta be a táblázatba a következőt: $n+2$.

A szabály sajátos alkalmazása a betűkre

T a táblázatban n^2 -t írt az n alá, ebből úgy tűnik, hogy T nem tesz különbséget „a kettővel nagyobb” és „a kétszer annyi” között. Valójában T az n -re is sajátos módon alkalmazta az megfogalmazott szabályt. Szerinte hozzáadni kettőt, a betűknél azt jelenti, hozzáírni kettőt; ezért az n után írt egy kettést.

Z a táblázatban az n alá nn írt. Ö a betűknél „a hozzáadni kettőt” úgy alkalmazta, hogy: még kétszer leírta ugyanazt a betűt.

A betű jelentését az ábécé-beli sorszáma határozza meg

M leírta a szerb cirill (létezik szerb latin ábécé is) ábécé-t és megszámlolta, hogy n a tizenhatodik betű. Ebből az következik szerinte, hogy n a tizenhat reprezentációja. A tizenhatnál kettővel nagyobb szám a tizennyolc. Mivel o a tizennyolcadik betű ebben az abc-ben, o lesz a feladat megoldása.

S hasonlóan, mint az előtte említett társa, az n sorszáma alapján megkapja a 16-ot, amelyhez hozzáad kettőt és megkapja a 18-at.

A második kísérleti csoportban egy tanuló sem adott teljes megoldást, helyes rész megoldások száma: 4, helytelen rész megoldások száma 3. R semmit sem írt. A többiek a 102-t írták a táblázatba. B és I szavakkal is megfogalmazta, eljárási formában a szabályt. L és V a táblázat mellé szöveg helyett $+2$ -t írt. Az n megfelelőjét, az $n+2$ -t, V és I határozta meg. J az $n+2$ helyet a $2n$ -t írta. B (illetve K) szerint az n megfelelője az o mert a sorszáma a szerb ábécében kettővel nagyobb, mint az n sorszáma.

4. feladat második táblázatával kapcsolatos megoldások (első csoport):

Helyes megoldás: 1; helyes rész megoldás: 3; helytelen rész megoldások: 3; O semmit sem írt.

A táblázatban az 1000-nek megfelelő számot, a 1000000-t M, N, S és Z jól határozta meg. N és S szavakkal is megfogalmazta a szabályt processzus formájában: *a megfelelő számot meg kell szorozni önmagával.* Az m megfelelőjét csak N a következőképpen írta le: $m \cdot m$.

A betű jelentését az ábécé-beli sorszáma határozza meg

Mivel az m sorszáma a cirill ábécé-ben (azbuka) 15, S megszorozta önmagával a 15-öt és a 225-öt kapott.

A táblázat különböző számaira különböző szabályok vonatkoznak

F a következőt írta: *Egyszer 2-vel, egyszer 6-tal kell szorozni.* Az 1000-et megszorozta kettővel és a táblázatban a 2000-et írt. Az m megfelelőjét nem adta meg.

T „+2” jelöléssel és egy nyílal jelezte, hogy a 2-nek, 4 felel meg; „+30”-cal és a nyíllal, hogy a 6-nak a 36 a megfelelője. Ebből arra következtetett, hogy az 1000 megfelelője az 1002 (ezt „+2”-vel meg is jelölte) és az m megfelelője a: $m30$. Ugyanúgy, mint a 4.a feladatban az m -hez hozzáírta („hozzáadta”) a 30-at.

A tanuló, az előző feladattal ellentétben, két szabályt fogalmaztak meg egy táblázattal kapcsolatosan: az első a páros helyeken levő, a második a páratlan helyeken levő számokra vonatkozott

D megoldása:

2 ⁼⁶	6 ⁼⁴²	1000	m
4	36	42 000	

$2+4 = 6$; $6 \cdot 6 = 36$; $6+36 = 42$; $42 \cdot 1000 = 42000$. A tanuló szabálya alapján az 1000-nek a 42000 a megfelelője. Az általános tagot ő sem határozta meg.

O semmit sem írt a feladattal kapcsolatosan.

A második csoportban 5 helyes részmegoldás, helytelen részmegoldások: 4; R semmit sem írt. B, I, K és V az 1000 alá a táblázatban az 1000000-t írta. Csak B fogalmazta meg írásban a szabályt eljárászerű alakban. I és V írta le a következőt: $m \cdot m$. B szerint az m -nek az m felel meg. K a 17-et (m a 17. betű az ábécében) megszorozta önmagával és megkapta a 289-et de, mivel 289 betűje nincs az abc-nek, az m megfelelőjét képtelen volt meghatározni. L „2”-vel, jelzi, hogy a 2-nek 4 felel meg; „6”-tal, azt hogy a 6-nak 36 felel meg. Összekötve a kettőt leírja: $2 \cdot 6 = 12$ és „12”-vel jelzi, hogy az 1000-nek a 12-szeresse, a 12000 felel meg. Az m megfelelőjét nem adja meg. J az első számpárra érvényes összefüggést minden számra kiterjesztette és megkapta az 1002-t. Az m megfelelőjét nem határozta meg.

5. feladat első képsorára vonatkozó megoldások (első kísérleti csoport):

Helyes megoldás: 2; helyes részmegoldás: 4; helytelen megoldások és részmegoldások: 3; O csak rajzolt.

D, M, N, S, T és Z kiszámolta, hogy az 50. képen $4 \cdot 50$, vagyis: 200 pont lesz.

A második kérdésre D és N írta le helyesen a második kérdés válaszát: $p \cdot 4$. D megrajzolta a negyedik képet is.

Helytelen válaszok

Mivel p a 19. betű a cirill ábécé-ben S a második kérdés válaszként a következőt írta: $19 \cdot 4 = 76$.

M az első kérdésben megjelenő 50-est és a második kérdésben megjelenő p -t „kötötte” össze és a következőt írta le: $50 \cdot p$.

F a két kérdésre azonos választ adott: 4. A megbeszélésen a következőt mondta:

F: Minden sorban 4 pont van.

Azzal hogy észrevette, hogy minden sorban négy pont van F megtette az első lépést a megoldás felé; de itt megállt, gondolván, hogy meg van a megoldás.

O a feladattal való foglalkozás közben – segítségül - rajzot használt. Jól rajzolta le a 4. és az 5. képet, de mást nem írt.

A második csoportban helyes megoldás: 2; helyes részmegoldás: 4; helytelen részmegoldás: 1 volt. R nem írt megoldást. R kivételével az első kérdésre mindenki jól válaszolt. A válaszok következők: B, I, J és L: 200; K: $4 \cdot 50$ (lerajzolta a 4. képet); V: 50 sor \cdot 4 pont.

A második kérdésre két tanuló a következőképpen válaszolt: V: p sor \cdot 4 pont; J: $4p$.

Mivel a p a 20. betű a magyar ábécé-ben K a következő választ adta: $4 \cdot 20$.

R a következőt írta: *Ilyet soha sem tanultunk.*

5. feladat második képsorára vonatkozó megoldások (első kísérleti csoport):

Helyes megoldás: 2; helyes rész megoldás: 2; helytelen rész megoldások: 3; Q csak rajzolt; F semmit sem írt.

D, M, N és S válasza az első kérdésre pontos volt: 2500.

D és N adott helyes választ a második kérdésre is: $p \cdot p$. D megrajzolta a 4. képet.

Helytelen válaszok

T és Z azt írta, hogy az 50. képen 150 pont van. A megbeszélésen T mutatta a harmadik képen, hogy minden sorban három pont van. Ebből szerinte az következik, hogy a többi képen is három pont van minden sorban.

Figyelembe véve, hogy a p a 19. betű a cirill ábécé-ben S kiszámolta, hogy a második kérdésre a válasz a következő: 261 pont van.

Q a 4. képet helyesen rajzolta le, de mást nem írt.

F semmit sem írt a feladattal kapcsolatosan.

A második csoportban helyes megoldás: 1; helyes rész megoldás: 3; helytelen megoldás és rész megoldás: 3 volt. B, I, V és Z helyes válaszokat adott az első kérdésre: B és I: 2500; V: 50 sor \cdot 50 pont; Z: 50 \cdot 50 (Z lerajzolta a negyedik képet.). A második kérdésre V pontosan válaszolt: p sor \cdot p sor. L az első kérdésre a következőt válaszolta: 150, a másodikra: $p p p$ (háromszor p). Arra gondol, hogy a sorokban minden képen három pont van. J az 50. kép pontjainak számát a következőképpen írja le:

$(1+4+9) \cdot 50$. Az első három képen levő pontok összege megszorozva ötvennel.

R a pontok számát az első sorra vonatkoztatja. A válaszai a következők:

50 pont van; p pont van.

6. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Helyes megoldások száma: 3; helyes rész megoldás: 4; helytelen megoldás 1.

Helyes válaszok

M és T megoldásai hasonlóak voltak. M válasza következnek:

Az a kérdés válasza: $O=2 \cdot h+2 \cdot 2$; $P=h \cdot 2$

A b kérdés válasza: $O=n \cdot 2+(m+3) \cdot 2$; $P=n \cdot (m+3)$

D magyar jelöléseket használt:

Az a kérdés válasza: $K=h+h+2+2$; $T=2 \cdot h$

A b kérdés válasza: $K=n+n+(m+3)+(m+3)$; $T= n \cdot (m+3)$

A válaszokban hiányoznak a zárójelek

N megoldásai következnek:

Az a kérdés válasza: $O=(2+h) \cdot 2$; $P=2 \cdot h$

A b kérdés válasza: $O=n+(m+3) \cdot 2$; $P=n \cdot (m+3)$

A tanuló az a kérdés kerületénél jól használja a zárójelet, de a b kérdés kerületénél ezt nem teszi meg és hibázik. A területet jól határozza meg.

Q a területet határozza meg:

Az a kérdés válasza: $P=2 \cdot h$ A b kérdés válasza: $P=n \cdot m+3$

A b kérdés válaszában a tanuló nem használ zárójelet ezért a válasza hibás.

Hamis képletek alkalmazásával megadott válaszok

S és Z jó területképletet, de hamis kerületképletet használt:

S válasza a következő:

Az a kérdés válasza: $O=(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot h)$, $P=2 \cdot h$

A b kérdés válasza: $O=2 \cdot n \cdot 2 \cdot (m+3)$, $P= n \cdot (m+3)$

S a kerületnél, ahelyett hogy összeadná, hamis szabályt ($O=2 \cdot a \cdot 2 \cdot b$) alkalmaz, az oldal-hosszak kétszeresét megszorozza egymással.

Z a következőt írja magyar jelzéseket használva:

Az a kérdés válaszai: $T=2 \cdot h$, $K=2+h$

A b kérdés válaszai: $T=n \cdot (m+3)$, $K=n+(m+3)$

A megbeszélésen megkérdeztem, hogy hogyan számoljuk ki a téglalap kerületét és területét. A következőt válaszolta:

Z: *A kerületet úgy számoljuk ki, hogy az oldalakat összeadjuk. A területet úgy hogy az oldalakat megszorozzuk.*

A tanuló a terület képlete alapján megalkotja a kerület hamis képletét ($K=a+b$) és ezt alkalmazva hibázik. A hamis képletek alkalmazásából arra következtetek, hogy a tanulók megértés nélkül tanulták a képleteket.

A tanuló nem alkalmazza jól a képletet és hiányoznak a zárójelek is

F a következőt írta:

Az a kérdés válaszai: $O=2+h \cdot 2$, $P=h \cdot b$

A b kérdés válaszai: $O=n+m+3 \cdot 2$, $P=n \cdot m+3$

F a terület képletet ($P=a \cdot b$) leírta, de az első téglalap területének meghatározásánál a kettest nem helyettesítette be. A kerületnél hiányoznak a zárójelek, ugyanúgy ahogyan a b kérdés válaszainál is.

A második csoportban helyes megoldás: 2; helyes rész megoldás: 4; helytelen megoldás: 1 volt.

Helyes megoldások: L a következőt írta: $O=h+2+h+2$, $P=2 \cdot h$; $O=n+m+3+n+m+3$, $P=n \cdot (m+3)$;

V megoldásai: $O=2 \cdot (h+2)$, $P=2 \cdot h$; $O=2 \cdot ((m+3)+n)$, $P=(m+3) \cdot n$.

A válaszokban hiányoznak a zárójelek: K válaszai: $K=2 \cdot h+2 \cdot 2$, $T=2 \cdot h$; $K=2 \cdot n+2 \cdot m+3$, $T=n \cdot m+3$;

B válaszai: $O=2 \cdot h+4$, $P=h \cdot 2$; $O=2 \cdot n+2 \cdot m+3$, $P=m+3 \cdot n$.

Hamis képletek alkalmazásával megadott válasz: J válaszai: $O=2+2+h+h$, $P=2 \cdot 2+h \cdot h$;

$O=n+n+m+3+m+3$, $P=n \cdot n+m+3 \cdot m+3$. A tanuló hamis analógiát használva a kerület képletéből ($K=a+a+b+b$) területképletet konstruál ($T=a+a+b+b$) és ezt, zárójeleket kihagyva, alkalmazza az adott téglalapokra.

Hamis algebrai átalakítás szerepel a megoldásban: I a következőt írta: $O=2 \cdot 2+h \cdot 2$, $P=2 \cdot h$; $O=n \cdot 2+(m+m+m) \cdot 2$, $P=n \cdot (m+m+m)$. A tanuló hamis átalakítást ($3+m=m+m+m$) alkalmaz.

A tanuló képtelen alkalmazni a képleteket:

R a kerület és a terület képleteit leírta ($O=2 \cdot a+2 \cdot b$, $P=a \cdot b$), de nem alkalmazta őket a konkrét feladatokra. Később megmutattam neki a válaszát és megkérdeztem:

G: *Mért nem határoztad meg a téglalapok területét és a kerületét, hiszen tudod a képleteket?*

R: *Nem tudtam kiszámolni. Ott ahol írja, hogy 2, nem két centiméter!*

G: *Megmérted a téglalap oldalait?*

R: *Igen.*

A tanuló konkrét számot keres, melyet reprezentál a h . Méréssel próbálta meghatározni a h -t, de megzavarta a tény, hogy a téglalap másik oldalának megadott hossza (szerinte: két centiméter) nem egyezik a méréssel megkapott hosszal.

7. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Helyes megoldás: 3; helyes megoldás méréssel: 3; helyes rész megoldás: 2.

Jól elvégzett „összeadás” és „kivonás” a változók reprezentációival

N, T és Z, ismerve a szakaszok „összeadását” és „kivonását”, körző segítségével, meghatározta a $2a + b$ és az $a - b$ reprezentációit.

A szakaszok „kivonása” nehézséget okozott

D, azonos módon, mint az előbbiek, lerajzolta a $2a + b$ reprezentációját. A szakaszok „kivonását” nem tudta értelmezni, ezért az $a - b$ kifejezéshez a következőt írta:

Nem tudom!

S a következőt rajzolta:



A szakaszok „kivonása” ugyanúgy, mint a szakaszok „összeadása”, a szakaszok egymáshoz való csatlakoztatásával történik. A megbeszélésen megkértem a tanulót hogy rajzolja meg az $a + b$ és az $a - b$ reprezentációit. Két egyforma hosszúságú szakaszt különböző algebrai kifejezésekkel jelölt meg. Számára a dologban semmi sem volt furcsa. Ebből arra következtetünk, hogy az: egyenlő hosszúságú szakaszoknak megfelelnek az ekvivalens algebrai kifejezések elvet a tanuló nem tudja.

A mérés használata

M, O és F lemérték a szakaszokat, majd ezen értékeket használták a feladat megoldásában. F a következőt írta:

$$a=16mm \quad b=12mm \quad 2 \cdot a + b = 44mm \quad a - b = 4mm$$

A tanulók számára az a és b a megfelelő szakaszok hosszát jelentik, melyeket méréssel meg lehetett határozni. Behelyettesítették a kifejezésekbe a megmért szakaszok hosszát és megkapták a $2a + b$ -t és a $a - b$ -t. Ez alapján megrajzolták a kereset szakaszokat.

A második csoportban a helyes megoldások száma: 3; helyes megoldás méréssel 4 volt. I, L és V jól rajzolta meg a kifejezések reprezentációit. B, J, N és K méréssel határozta meg a szakaszok hosszát, ez alapján kiszámolta a keresett szakaszok hosszát ($2 \cdot a + b = 44mm$; $a - b = 4mm$) és megrajzolták ezeket.

8. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Helyes megoldás: 5; helytelen megoldás 3.

Az egyenlőségek jobb oldalán csak egy betű található

D, N, O, S és Z hasonlóan oldotta meg a feladatot (ketten két egyenlőséget, hárman ketőt írtak). N megoldása következők:

$$\begin{aligned}x + x + 5 &= e \\a + b &= e \\2 \cdot x + 5 &= e\end{aligned}$$

A szakaszok „összegéből” a tanulók a megfelelő számok szimbolikus reprezentációi összegére következtetnek és leírják az algebrai kifejezéseket. A szakaszok „összegének” hossza egyenlő az e szám reprezentációjának hosszával ezért a megfelelő kifejezések egyenlők e -vel. A megoldásokban nem szerepel a: $2x + 5 = a + b$ egyenlőség. Szerettem volna ennek az okát kideríteni, ezért megkérdeztem a tanulókat, hogyan határozták meg az egyenlőségeket.

Többen mutatták, hogy a szakaszok hossza egyenlő. D adott magyarázatot.

D: *e az eredmény!*

A tanulók megszokták, hogy az aritmetikában az egyenlőség jobb oldalán egy szám, az eredmény áll. Az e kifejezés az egyedüli mely csak egy betűből áll, ezért a tanulók ezt tekintik eredménynek és csak e állhat az egyenlőség jobb oldalán.

A kifejezésekben nincs „+” jel

Két tanuló hasonló megoldásokat írt:

M megoldása: $xx5 = e$
 $ab = e$
 $xx5 = ab$

T megoldása: $e = a, b$
 $x, x, 5 = a, b$
 $e = x, x, 5$

A tanulók által megalkotott kifejezésekben nincsenek „+” jelek, viszont mindketten „sajátos módon” leírták az $x+x+5 = a+b$ kifejezést. Úgy tűnik, hogy a tanulók jobban tudnak összpontosítani az egyenlőség fogalmára és nem az eredményt keresik, ha az aritmetikából ismert „+” jelet nem használják.

A megoldásokban csak algebrai kifejezések szerepelnek

F csak algebrai kifejezéseket írt az egyes szakaszokkal kapcsolatban (egyébként jól), de nem kapcsolta össze az egyenlő hosszúságú szakaszokat (sem a megfelelő kifejezéseket):

$$2 \cdot x + 5 \quad \text{és} \quad a + b$$

A második csoportban a helyes megoldások száma: 5; helytelen megoldás 2 volt. J, K, L és V megoldása hasonló volt, mint N-é az első csoportból. Csak I megoldásában szerepel az: $a+b = x+x+5$ egyenlőség. B csak algebrai kifejezéseket ír. Az R által leírt egyenlőségek ($x+5 = x$; $x+5ab+e = x$) hamisak. A bennük megjelenő kifejezések nem reprezentálják a három egyenlő hosszúságú szakaszt, bár a kifejezésekben csak a feladatban megjelenő szám és változók szerepelnek. Mikor megkérdeztem miért írta így az egyenlőségeket, nem kaptam választ.

9. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Helyes megoldás: 1; helyes részmegoldás: 5; helytelen megoldás 2.

Jól meghatározott algebrai kifejezések

D, N és T határozta meg pontosan az algebrai kifejezéseket, amelyek az almák számát reprezentálják az egyes kosarakban:

Első kosár: m Második kosár: $m + 5$ Harmadik kosár: $2 \cdot m$

Csak T adta jól össze a kifejezéseket. A következőt írta:

$$m+m+5+2 \cdot m = 2m+5+2m = 4m+5$$

A másik két tanuló hibás összege a következő volt:

$$m+m+5+2 \cdot m = 2m+7 \cdot m = 14+2m$$

$$m+(m+5)+(2 \cdot m) = m+m+5+2 \cdot m = 3m+7$$

A tanulók a számokat a számokkal adják össze, vagy szorozzák össze (beleértve a koefficienseket is). Az m betűket az utolsó lépésben megszámlálják.

A tanuló nem tesz különbséget a „valamivel több” és

a „valahányszor annyi” kifejezések közt

F a következő eredményt írta le: $m+m \cdot 5+m \cdot 2$.

Az m -nél 5-el nagyobb szám reprezentációja az: $m \cdot 5$.

M a kétszer annyi kifejezés reprezentációját rosszul határozza meg. A következőket írja:

$$\begin{array}{l} \text{Μία κοπή: } x \quad \text{Δύο κοπές: } x+5 \\ \text{Μητέρα κοπή: } x+2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 : x + 5 + 2 = \\ x = (5 + 2) : 3 = \\ x = 7 : 3 \\ x = 2,333 \end{array}$$

Ez egy szöveges feladat. A szöveges feladatokban eddigi tanulmányai során a tanulónak meg kellett határoznia az ismeretlen számot (amelyet általában x -szel jelöltünk). Mivel az m értékét nem tudja, x -szel jelöli és igyekszik kiszámolni azt. Az almák összegét reprezentáló kifejezés hasonlít egy egyenletre. A tanuló módosítja a kifejezést: az első „+” jel helyére „=” jelet képzel (az „=” jelet a kifejezés végén elhagyja) és így egy ismerős típusú feladatot (egyenletet) kell megoldania, amit meg is tesz.

A nyelvi nehézségből adódó hibás megoldás

Z a kosarakban levő almák számát a következőképpen reprezentálta:

Első kosár: m Második kosár: $m + 5$ Harmadik kosár: $2 \cdot m >$

A megbeszélésen elolvasta hangosan a feladatot, megnézte a megoldását és ekkor, megkérdezem tőle:

G: Mit jelent a: $2 \cdot m >$ kifejezés?

Z: Kétszer több.

G: Mit jelent a: $2 \cdot m$ és mit a: $>$ jel?

Z: Kétszer, rámutatott a $2 \cdot m$ kifejezésre. Több, mutatta a: $>$ jelet.

G: Ha az első kosárban 20 alma volna, hány alma volna akkor a második, s hány a harmadik kosárban?

Z: A másodikban 25 volna.

Pár percig gondolkodik.

Z: Nem tudom, mondja.

G: Nem tudod?

Idegesen forgatja a ceruzát és hozzáteszi:

Z: Nem tudom, hány almával van több, mint negyven.

A tanuló a feladat szövegezésében a harmadik kosára vonatkozó mondatot nem értette meg.

A nehézséget az okozta, hogy magyarul: a „kétszer annyi” konstrukció helyett a szerb nyelvben: a „kétszer több” nyelvi konstrukciót használjuk. A tanuló ezt úgy értelmezte, hogy: a kétszeresénél több. Ekkor megpróbálta a szövegből kiolvasni, hogy mennyivel több, de mivel ezt az adatot a feladat szövegezése nem tartalmazta, megzavarodott. (A tanuló csak az ötödik osztályban kezdett tanulni szerbül. Nagyon jól halad, most már az órán majdnem mindig szerbül beszéltünk, de még vannak nyelvi nehézségei.)

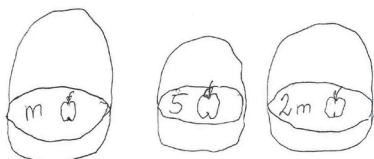
A betű szerb ábécé-beli sorszáma a betű jelentésének a meghatározója

Mivel S tudja, hogy az m a tizenötödik betű a szerb ábécé-ben a következő megoldást írta:

$$15 + 20 + 30 = 65$$

A tanuló mellőzi az m betűt és a szöveg értelmezése is nehézséget okoz

Q rajzot készített és a következő választ írta:



Ima 8 jabuka u trećem košaru.

Összesen 8 alma lesz a harmadik kosárban.

A tanuló a rajzokat gyorsírásként használja. „A kosárban m alma van” mondatot, egy kosárban levő m betűvel és egy almával reprezentálja. A második kosárban öt almával (a szerben a ragnak megfelelő előszó az öt szó előtt áll és a mondatrész úgy hangzik, hogy: öt alma) van több mint, az első kosárban, mondatban a tanuló, *a kosárban öt alma van*, mondatrészre, összpontosít és ezért öt almát (egy ötöst és egy almát) rajzol. A harmadik kosárban kétszer annyi alma van, mint az első kosárban, mondatot, egy kosár és benne a $2m$ és egy alma (kétszer az első kosárban levő almák száma), reprezentálja. Q a rajzokban mellőzi az m betűket és csak az egy almát, öt almát és a két almát adja össze.

A második csoportban helyes megoldás: 0; helyes rész megoldás: 6; helytelen megoldás 1 volt. L és V határozta meg pontosan a kosarakban levő almák számát, de az összegüket nem számolta ki jól. A következőket írták: V: $m+(m+5)+(m-2)=(m+m+m)+5-2=3m+10$; L: $m+5+2\cdot m$. (Az első kosárról megelégedkezett.) K nem tesz különbséget a „valamivel több” és a „valahányszor annyi” kifejezések között. I és R a feladat szövegének második mondatából azt értette, hogy a második kosárban 5 alma van. B a következőt írja: $x; x+5; x-2; x=5-2; x=10$. A tanuló a jelenlévő számokat felhasználva „kiszámolja” az ismeretlen számot. J a feladatot bővítette egy feltétellel: az almák száma a végén a harmadik kosárban, vagy ötvenkettő, vagy huszonöt kell, hogy legyen, hiszen e számok számjegyei kettő és öt (ezek vannak jelen a feladat szövegezésében). A tanuló próbálkozással meghatározta, hogy az első kosárban 5 alma van.

10. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

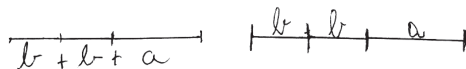
Helyes jelentések száma: 25 (ebből 15 szakaszhossz mérőszáma jelentés volt; 4 tanuló csak ilyen jelentést fogalmazott meg); helytelen jelentések száma: 7 volt.

Helyes példák:

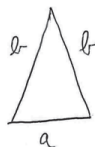
A kifejezés szakaszhosszra, kerületre vagy területre vonatkozik

A tanulók rajzolták a következőket:

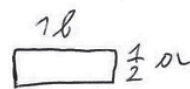
A $2\cdot b + a$ kifejezés:



szakaszhossz (D,M,N,F,O,T,Z.)

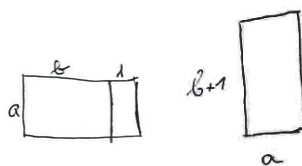


kerület (M)



kerület (N)

A $(b+1)\cdot a$ kifejezés:



Terület (I,Z)

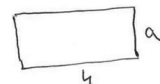
A $4\cdot a$ kifejezés:



Szakaszhossz (M,N,F,O,T,Z,I,V)



kerület (M,N)



terület (N,T,Z)

Eső látásra úgy tűnik, hogy a tanulók jól értelmezik a betűket. Hogy erről megbizonyosodjak később a tanulók rajzait megdicsértem és megkérdeztem, hogy a rajzokon megjelenő betűk mit jelentenek. A válaszok azonosak voltak: A betű az oldal, illetve szakasz neve. A tanulók az algebrai kifejezést gyorsírásnak tekintik (pl. $4 \cdot a$, nem a négyzet kerülete M szerint, hanem a következő mondat rövidítése: *Egy négyzet kerületét úgy számoljuk ki, hogy négyvel megszorozzuk az oldalának hosszát.*).

Szöveges válaszok

I a következőt írta a $4 \cdot a$ kifejezéssel kapcsolatosan:

Миліціана мала чотири рази стільки грошей, скільки Анна.

Milicának négyszer annyi forintja van, mint Annának.

A betű számot (forintok számát) jelent.

Helytelen példák:

A betű tárgyat reprezentál

Három tanuló a betűt tárgynak tekinti:

A $2 \cdot b + a$ kifejezéssel kapcsolatos válaszok:



Két fekete és egy fehér ceruza. (Q rajza)



Két alma és egy körte. (S rajza)

Markonak két átlátszó és egy tarka üveggolyója van. (E mondata)

E és Q szakaszok „összegét” is rajzolta. Ebből arra következtettem, hogy a betű szakaszt és nem szakaszhosszt jelöl.

A $4 \cdot a$ kifejezés reprezentációi:



Négy labda. (Q rajza)

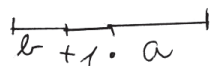


Négy szem meggy. (S rajza)

Szakaszok „összegével” a szorzást is lehet reprezentálni

Felhasználva a szakaszt a nyolcadik feladatból S megrajzolta a kifejezések „reprezentációit”:

A $(b + 1) \cdot a$ kifejezés reprezentációja:



A $4 \cdot a$ kifejezés reprezentációja:



A második csoportban helyes jelentések száma: 17 (ebből 13 szakaszhossz jelentés volt; 1 tanuló csak ilyen jelentést fogalmazott meg); helytelen jelentések száma: 1 volt.

A tanulók hasonló reprezentációkat rajzoltak, mint a tanulók az első csoportból. L szerint a $4 \cdot a$ jelentése négy csoki volt.

11. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Első egyenlőség értelmezése: helyes: 4; helytelen: 3; nem válaszolt: 1 tanuló.

Második egyenlőség értelmezése: helyes:2; helytelen: 5; nem válaszolt:1 tanuló.

Harmadik egyenlőség értelmezése: helyes:2; helytelen: 5; nem válaszolt:1 tanuló.

Negyedik egyenlőség értelmezése: helyes:5; helytelen: 2; nem válaszolt:1 tanuló.

A számok viszonyát kifejező válaszok

D, M, N, T és Z az első és a harmadik és N a második és a negyedik egyenlőség értelmezésénél az almafák és a szilvafák számának viszonyát mondatban fogalmazta meg. D, M, N és T hasonlóan interpretálta az első egyenlőséget.

Ugyanannyi almafa van, mint szilvafa.

Z a következőt írta:

Ugyanolyan almafa van, hanem szilvafa.

Ima isto stabala jabuka nego stabala šljiva.

A tanuló jó gondolata ami a hallgató számára nehezen vagy valószínűleg egyáltalán nem érthető. A hiba abból adódik, hogy a *mint* (szerbül: kao) helyett a *hanem* (szerbül: nego) kötőszót használta. A szerb nyelvben csak akkor használjuk a *mint* szót, ha a két mennyiség egyenlő (ugyanannyi almafa van, mint szilvafa). Ha a két mennyiség nem egyenlő (szilvafákból több van) a *hanem* szót használjuk (háromszor annyi almafa van, hanem szilvafa). A tanuló tudja, hogy a magyar „mint” szónak két megfelelője van a szerb nyelvben, de még mindig nem különbözteti meg, hogy melyiket mikor kell használni. Az *ugyanannyi* (isto tolika) helyet csak az *isto* (*ugyanolyan*) szót használta.

Egyedül N interpretálta jól a második egyenlőséget:

A kertben harminccal több almafa van, mint szilvafa.

D értelmezésének fordítása következik:

Harminccal több szilvafa van, mint almafa.

A mondat tükörfordítása: Van 30-cal több szilvafa, hanem almafa.

D-t a megbeszélésen megkérdeztem:

G: *Mit jelent a feladatban a k és a p és hogyan határoztad meg hogy az egyenlőség mit jelent?*

D: *Almafák a k és szilvafák a p, volt a válasz. D az ujját húzta a $p+30$ -on és olvasta: *Harminccal több szilvafa van, mint* (mutat az egyenlőségjelre) *almafa* (mutat a k -ra).*

A tanuló az algebrai jeleket gyorsírási jelekként, szavak rövidítéseként értelmezi. Valójában a következőképpen olvassa a választ:

Egyenlőségjel bal oldala: almafák (k). Egyenlőségjel jobb oldala: szilvafák (p), meg (+), harminc (30). Az egyenlőségjel ugyanazon az oldalán levő szavakat összeköti (összeolvassa). Ismerős számára az aritmetikából hogy a „+30” harminccal nagyobbat jelent, ezért az egyenlőségjel jobb oldalát a következőképpen olvassa: *szilvafák harminccal nagyobb*. Módosít: *harminccal több szilvafa*. Az egész egyenlőséget így olvassa: *almafák, egyenlő, harminccal több szilvafa*. Ezt elkezdi értelmes mondatá alakítani: *Van harminccal több szilvafa egyenlő almafák*. Módosít és megkapja: *Van harminccal több szilvafa, hanem (mint) almafa*.

M az almafák és a szilvafák viszonyát, s az eljárás leírását is megfogalmazza válaszában. Az ő olvasatában a szavak sorrendje nem változik: almafák (k) ugyanannyi, mint (=) szilvafák (p) meg (+) harminc (30). Módosítás (ragoz, bővít a következő szavakkal: *van, mint, még* és a *meg* szót felcseréli, a *hozzáadunk* szóval): almafákból van ugyanannyi, mint szilvafákból és még hozzáadunk harmincat. Ebből következik: Ugyanannyi almafa van, mint szilvafa meg még hozzáadunk harmincat.

A harmadik egyenlőség értelmezését Z, aki magyar nyelven gondolkodik, a magyar

mondatot fordította szerb nyelvre, ezért nagyon nehezen érthető. Azt írta, hogy: *Háromszor annyi szilvafa van, mint almafa.*

A helyes szerb mondat tükörfordítása: Van háromszor több szilvafa, hanem almafa. (Ima tri puta više stabala šljiva nego stabala jabuka.) A magyar nyelv a *háromszor annyi* konstrukciót és a *mint* szót használja nem pedig a szerb *háromszor több* konstrukciót és a *hanem* szót.

D, N és M a harmadik egyenlőséget hasonlóan értelmezte. M mondatának fordítása következik: *Háromszor annyi almafa van, mint szilvafa.*

A mondat tükörfordítása: Van háromszor több almafa, hanem szilvafa.

Ugyanúgy, mint a második egyenletnél, a tanulók itt is gyorsírási jeleknek tekintik az algebrai jeleket, s így olvassák őket: három (3), szor (\cdot), almafák (k), egyenlő (=), szilvafák (p). Összeolvasva: Háromszor több almafák, egyenlő, szilvafák. Amiből a módosítás után következik a leírt mondat.

D, M, N és Z a következőképpen értelmezték a negyedik egyenlőséget:

Összesen 70 almafa és szilvafa van.

Eljárást leíró válaszok

A második, harmadik és negyedik egyenlőség értelmezésénél csak T írt le eljárást:

Ha ahhoz, ahány szilvafa van, hozzáadok harmincat, megkapom azt, ahány almafa van.

Ha azt, ahány almafa van, megszorozom hárommal, megkapom azt, ahány szilvafa van.

Ha összeadom azt ahány almafa és szilvafa van, hetvenet kapok.

A betű jelentését meghatározza az ábécé-beli sorszáma

S számára k a 12, p pedig a 19 reprezentációja (k a 12., p a 19. betű a cirill ábécé-ben). Ő az egyenlőségeket a következőképpen értelmezi:

$$12 = 19; \quad 19 = 12 + 30; \quad 19 = 3 \cdot 12; \quad 19 + 12 = 70$$

A megbeszélésen kiderült, hogy a kislány érdekes és élvezetes játéknak tekintette a betűk számokra való átváltását, s tudja hogy a felírt egyenlőségek nem igazak, de ez nem zavarta őt, mert hamis mondatok is léteznek.

A betű egy tárgyat jelent

F és Q szerint a feladat szövegezésében k egy almafa, p pedig egy szilvafa reprezentációja. A diákok találnak egy mérhető (számlálható) tulajdonságot, amely alapján lehetséges a fákat egymással összehasonlítani.

Q válaszaiban eljárásokat fogalmaz meg és a fák magasságának viszonyát:

A fák egyforma magasak. (k és p fákat, az „=” pedig egyforma magasat jelent)

A fák egyforma magasak, ha 30 cm-t hozzáadok a szilvafához. (A 30, 30cm-t jelent.)

A fák egyforma magasak, ha megszorozom a k -t hárommal.

Ha a magasságokat összeadom, 70 cm-t kapok. (k és p itt a megfelelő fák magasságát reprezentálják.)

F az első és a harmadik egyenlet kapcsán a következőt írta:

Ez lehetetlen!

G: *Miért lehetetlen?*

F: *Egy almafán kevesebb (darab) alma terem, mint szilva egy szilvafán. Nem lehet egyforma!*

G: *És a harmadik egyenlőség?*

F: *Nem lehet több alma, mint szilva!*

A második és a negyedik egyenlőség értelmezései:

Harminccal több szilva van, mint alma.

Összesen 70 szem gyümölcs van.

Az értelmezésekben k a szilvák szót, p pedig az almák szót helyettesíti. A tanuló egy szilvafára és egy almafára gondolt és a fák gyümölcseinek számát, hasonlítja össze és a saját tapasztalatai alapján ítéli meg az egyenlőségeket.

Második kísérleti csoport:

Első egyenlőség értelmezése: helyes: 5; helytelen: 2. Második egyenlőség értelmezése: helyes: 3; helytelen: 3; nem válaszolt: 1 tanuló. Harmadik egyenlőség értelmezése: helyes: 3; helytelen: 3; nem válaszolt: 1 tanuló. Negyedik egyenlőség értelmezése: helyes: 5; helytelen: 2. B, I, L, K és V az első, I és L a második és a harmadik egyenlőség értelmezésében az almák, és szilvák számának viszonyát írja le. Csak az első egyenlőség értelmezései voltak jók. A második egyenlőség értelmezéseiben azt írják, hogy 30-cal több szilva van, mint alma. Az egyik válasz a magyar mondat *tükörfordítása*: Sa trideset vise stabala šljiva ima kao stabala jabuka. A nehézség abból adódik, hogy a magyar mondatban a társhatározó és a mennyiségjelző ugyanazzal a raggal van kifejezve (A szerben erre külön előjáró szót használunk.) A tanuló a *társhatározónak megfelelő előjáró szót*, és a *hanem* szó helyett, a *mint* szót használja. A harmadik egyenlőség értelmezéseiben is a tanulók azt fogalmazták meg, hogy háromszor annyi alma van, mint szilva. L magyar nyelvi *konstrukciót* használ a szerb mondatban (háromszor több helyett, háromszor annyi) és a *hanem* helyett a *mint* szót.

B, K és V eljárás formájában adta meg a második és a harmadik egyenlőség értelmezését és B és K a negyedik értelmezését hasonlóan, mint I.

R csak az első és a negyedik egyenletet értelmezte: *A p-ben ugyanannyi szilva van, mint amennyi alma van a k-ban. Ha összeadjuk a gyümölcsöt a p-ben és a k-ban 70 kg-ot kapunk.* A tanuló szerint a k és a p tárgyakat, ládaszerűségeket reprezentálnak és R a bennük levő gyümölcsök tömegéről ír.

I a k -t és p -t nem értelmezi. Válaszai a következők voltak: *k egyenlő p-vel; k egyenlő p meg 30; p egyenlő 3 szór k; p meg k egyenlő 70.*

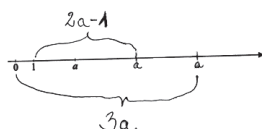
12. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Helyes megoldás: 2; helyes részmegoldás: 2; helytelen megoldás 4.

N és Z jól határozta meg a $3 \cdot a$ és a $2 \cdot a - 1$ számoknak megfelelő pontokat a számegyenesen.

Helytelen megoldások

A szakaszhossz és a szám helyének keverése



I helyesen határozta meg a $3 \cdot a$ és a $2 \cdot a - 1$ hosszúságú szakaszt, de a $2 \cdot a$ és a $3 \cdot a$ szám megfelelő pontját a -val jelöli. A szakaszokat helyesen jelölte, de a számegyenes megfelelő pontjaihoz tartozó számot nem.

A $2 \cdot a - 1$ kifejezés különböző értelmezései

F a következő egyenlőséget írta fel:

$$2 \cdot a - 1 = a$$

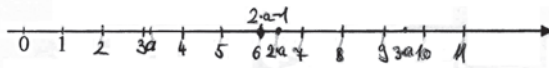
Jól határozta meg a $3 \cdot a$ szám megfelelő pontját. Mivel szerinte az a a számegyenesen jelölve van, ezért a $2 \cdot a - 1$ -t külön nem jelölte.

Q megoldása következik:



A megoldásból úgy tűnik, hogy a tanuló teljesen elkülönítette a számokat és a betűket (Az a és a $2a$ közti távolság egy egység).

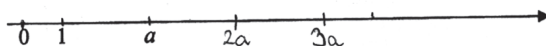
M a következő megoldást adta:



$2a$ -tól balra az első egész számnak (a hatosnak) megfelelő pontját jelölte meg mint a $2a-1$ számnak megfelelő pontját. A $3a$ számnak megfelelő pontját jól határozta meg.

A $2a$ távolsága a nullától $2a-1$

D és S csak a $2a$ és a $3a$ kifejezések megfelelő pontjait jelölte a számegyenesen:



A második kísérleti csoportban helyes megoldás: 1; helyes rész megoldás: 1; helytelen megoldás 4 volt és R semmit sem írt a feladattal kapcsolatosan. V adott pontos megoldást. B $2a-1$ -el jelölte a $2a+1$ számot. I és L számegyenesén a $2a$ szám távolsága a nullától $2a-1$. K megoldása következik:



$3a$ az a szakasz, amelynek az egyik végpontja 3 , a másik a . Azonos módon határozta meg a $2a$ -t. Ebből a szakaszból „kivonta” az egyet és megkapta a $2a-1$ szakaszt. A tanuló tudta, hogy a szakaszt a két végpontjával is jelöljük. Ezt a jelölést „ismerte fel” a $3a$ kifejezésnél és ezért tekintette a 3 -at és az a -t a szakasz végpontjainak.

J csak a -1 -nek, 2 -nek, és 3 -nak a megfelelő pontjait jelölte a számegyenesen, hiszen ezek jelentkeznek a $3a$ és a $2a-1$ kifejezésekben.

4.1.3. Az előteszt elemzésének összegzése

A megoldásokból látható, hogy a két csoport hasonlóan teljesített.

Mindkét csoportban volt olyan tanuló (Q; illetve J; B bizonytalan volt), aki helytelenül, „írd le az eredményt”-ként, értelmezte az „=” jelet.

A 2. feladat a tanulók számára nehéznek bizonyult. A kifejezéseket először egészként kell értelmezni (az „=” jel két oldalán levő kifejezések egyenlők) ezután, a két kifejezés összeadandóit kell összehasonlítani és észrevenni, hogy van köztük két egyenlő értékű. Ebből következik, hogy $-26l + \square = 0$, illetve $\square = 26l$. A tanulók, bár a feladat szövegében ki van hangsúlyozva, hogy ezt ne tegyék, számolással határozták meg a megoldást.

A 3. feladat megoldásaiból kiderült, hogy a tanulók nem tudták a zárójelet felbontani. Számolás nélkül csak két tanuló oldotta meg a feladatot.

A 4. feladatnál az első csoportból az $n+2$ kifejezést kettő, az $m \cdot m$ kifejezést csak egy tanuló írta le, bár mondatban négyen, illetve ketten írták le a szabályt. (A 2. csoportból mindkét kifejezést két tanuló írta le.) Két tanuló a szabályt másként alkalmazta a betűkre, mint a számokra. (A 2. csoportból egy.) Ebből arra következtettek, hogy a tanulók szerint, a betűknek nem volt semmi közük a számokhoz. Két tanuló (a 2. csoportból kettő) a betűket a számok szimbolikus reprezentációjának tekintette (a betű ábécébeli sorszáma határozta meg a számot, melyet a betű reprezentált).

A 4. feladatnál három (a 2. csoportból egy) tanuló a második táblázatban levő számokra különböző szabályokat alkalmazott, illetve nem értette a táblázat fogalmát.

Az 5. feladatban is hasonlóak a megoldások, mint a 4 feladatban.

A tanulók számára egy algebrai kifejezés nem lehet válasz a kérdésre.

A 6. feladatban, ezéért a területre és a kerületre is teljes képleteket használtak. Az első csoportban három, a másodikban két jó válasz volt. Két tanuló válaszaiban hiányoztak a zárójel-ek. Hárman (a 2. csoportban egy) a műveleti jelek általánosításával kapott hamis képleteket használtak. A 2. csoportban egy tanuló hamis átalakítást használt. Egy tanuló képtelen volt a képletekbe behelyettesíteni az algebrai kifejezéseket.

A 7. feladattal kapcsolatosan kiderült, hogy két tanuló nem ismeri a szakaszok „kivonását”. Három (a 2. csoportban négy) tanuló szerint a kifejezések szakaszhosszak melyeket méréssel meg lehet határozni.

A 8. feladat megoldásánál öt tanuló az „=” jel jobb oldalára az e -t írta, mert az „=” jel jobb oldalára az aritmetikában egy szám, a megoldás kerül. Két tanuló a kifejezéseknél nem írt „+” jelet, ebből is arra következtettek, hogy a tanulók teljesen másként értelmezik a betűket, mint a számokat.

A 9. feladatra csak egy helyes megoldás volt. Két tanuló rosszul adta össze a kifejezéseket. Ketten nem tettek (a 2. csoportban egy) különbséget a „kettővel több” és a „kettőszer annyi” között. Egy tanuló problémája a kétnyelvűségből ered. Egynek (a 2. csoportban kettőnek) szövegértési nehézségei voltak. Egy tanuló (a 2. csoportban kettő) egyenletet „oldott” meg. Egy tanuló a betű ábécé-beli sorszáma alapján számolta ki az almák számát.

A 10. feladatnál a tanulók legtöbb szakaszhossz jelentést adtak a kifejezéseknek. Három (a 2. csoportban egy) tanuló szerint a betű objektumot jelöl; de azoknál a tanulóknál is, akik jó geometriai jelentést adtak, úgy tűnt, hogy gyorsírásnak tekintették az algebrai kifejezéseket. (A 4-a, a következő mondat rövidítése: *Egy négyzet kerületét úgy számoljuk ki, hogy négyvel megszorozzuk az oldalának hosszát.*)

A 11. feladatban az első és a negyedik egyenlőséget négy (a 2. csoportban öt és három) tanuló értelmezte jól. A másodikat csak 2 tanuló értelmezte jól. Öten azt „olvasták” hogy harminccal több szilvafa van, mint almafa. A harmadik egyenlőséget öten úgy értelmezték, hogy háromszor annyi almafa van, mint szilvafa. (A 2. csoportban három tanuló eljárás-ként fogalmazta meg a 2. és a 3. egyenlőséget, és ketten a 4.-et.) A tanulóknak kétnyelvűségből adódó nehézségeik is voltak. A betű tárgyat jelentett két (a 2. csoportban egy) tanuló-nak. Egy tanuló a betűk ábécé-beli sorszáma alapján számolta ki a megfelelő kifejezéseket. A 2. csoportban egy tanuló nem értelmezte az egyenlőségeket.

A 12. feladat a tanulók számára nehéznek bizonyult. Ketten oldották meg jól (a 2. csoportban egy tanuló).

Az előteszt eredményeit figyelembe véve az előzőleg megtervezett (összeállított) tananyagot kibővítettem a következőkkel: az egyenlőségjel helyes értelmezésével valódi mérleg felhasználásával (előteszt 1. és 2. feladata); hosszúság mérése, a mértékegység és a mérőszám fogalma (előteszt 7. feladata: a tanulók méréssel határozták meg a változó értékét). A hetedik feladat megoldása közben a tanulók megmérték vonalzóval a változókat reprezentáló szakaszokat (a mértékegység egy milliméter), és az ily módon meghatározott mérőszá-mot tekintették a változó értékének. Három (a 2. csoportban négy) tanuló szerint a kifejezések szakaszhosszak melyeket méréssel meg lehet határozni.

4.2. KISÉRLETI TANÍTÁS RÉSZLETES BEMUTATÁSA

Az első tanulói csoporttal végzett kísérletet részletesen ismertetem. A második kísérleti csoport tanulóinak munkáiból csak jellegzetes részleteket mutatok be.

4.2.1. Aritmetikai kifejezések vizsgálata és nyelvi különbségek

Az előteszt eredményei azt mutatták, hogy a tanulók az aritmetikai kifejezéseket eljárás-ként értelmezték és nyelvi nehézségeik az algebra tanulás újabb problémáinak forrását jelentették. Ezért egy tanítási órában az aritmetikai kifejezések objektumként való értelmezésével, a számok közti és a mennyiségek közti viszonyok megfogalmazásával foglalkoztunk.

Az első óra öt tematikus részből állt. Az első részben egy tanuló kilétét határoztuk meg kihangsúlyozva más tanulókhöz való viszonyát, vagy a tulajdonságait. A második részben, hasonló módon megfogalmaztuk, hogy melyik számra gondolunk, külön hangsúlyt fektetve a számok összeg és szorzat alakú reprezentációinak szóbeli megfogalmazására. A harmadik részben az aritmetikai kifejezések lejegyzésével, a negyedikben a procept fogalmával foglalkoztunk. Az ötödik részben a szövegeket aritmetikai kifejezésekkel modelleztük és az aritmetikai kifejezéseket kontextusokba helyeztük el.

Kire gondolunk?

Ha egy számot aritmetikai kifejezésként írunk le, bizonyos tulajdonságait hangsúlyozzuk ki - ugyanúgy - mint amikor egy mondatban megfogalmazzuk, hogy kire gondolunk, anélkül hogy kimondanánk a nevét. Ebből kiindulva és utánozva egy lehetséges élethelyzetet, kiválasztunk egy tanulót az osztályból és elképzeljük, hogy elfelejtettük a nevét.

A játék abból áll, hogy anélkül hogy kimondanánk az illető nevét, mindenki megfogalmaz olyan mondatot, amelyből egyértelművé válik, hogy kire gondolunk.

A tanulók képesek összefoglalni, hogy a mondatokban kihangsúlyozzuk a személy bizonyos tulajdonságát vagy tulajdonságait (elhangozott pl. a legmagasabb az osztályban), vagy azt hogy hol van más tanulókhöz vagy tárgyakkhoz viszonyítva (pl. Nikola és Danica között ül; Tajnatól két hellyel jobbra ül; az utolsó sorban az ablak mellett ül), vagy milyen kapcsolatban van más emberekkel (pl. a húga harmadikos).

A mondatban megfogalmazott aritmetikai kifejezés objektumot jelent; szószerkezetek összehasonlítása

Szeretnénk elérni, hogy a tanulók analóg gondolkodási módot alkalmazzanak a számok körében is ugyanúgy, ahogyan tették az első tematikus részben a személy meghatározásánál. Eközben, reményeink szerint, a tanulók fogalmi hálóján belül kapcsolatok jönnek létre, a matematikai és a mindennapi fogalmak között.

E célból megkérdezem a tanulókat, hogy tudjuk-e közölni másokkal azt például, hogy a tizenkettőre gondolunk, anélkül hogy megneveznénk ezt a számot.

Ezzel igyekszünk ösztönözni a tanulókat, hogy egy aritmetikai (később algebrai) kifejezés láttán objektumot is felismerjenek benne, nem csak eljárást; s képesek legyenek kifejezéseket is alkotni, amelyek számok közti összefüggéseket fejeznek ki. A kérdésre a következő válaszok születtek:

N: *Az a szám, amely 11 és 13 között van.*

To je broj koji je između 11 i 13.

I: *Az a szám, amely öttenel kisebb, mint 17.*

To je broj koji je za 5 manji od 17.

E: *Az a szám, amely kettővel nagyobb, mint 10.*

To je broj koji je za 2 veći od 10.

M: *Az a szám, amely négyszer annyi, mint három.*

To je broj koji je 4 puta veći od 3.

Számunkra fontos, hogy a tanulók sajátítsák el a helyes kifejezéseket és szó szerkezeteket ezért felírtuk a mondatokat a táblára és a füzetekbe; minden mondat után kihagyva egy sort (Ide írtuk később a mondatokat magyar nyelven). A hasonló szó szerkezeteket jobban meg tudjuk jegyezni, és elkülöníteni egymástól, ha összehasonlítjuk őket és kihangsúlyozzuk a különbségeiket.

Az utolsó két mondattal kapcsolatban a tanulók rögtön észrevették, hogy csak az előjárószavak, a *za* és a *puta*, különböznek egymástól; s *csak ezek a szavak határozzák meg a mondatok jelentését.*

Mielőtt beszéltünk volna a mondatok magyar nyelvi változatairól, még egyszer lehetőséget adtam, hogy a tanulók figyeljenek az értelem szerinti fordítás fontosságára, azzal hogy frappáns példát mutattunk. Megkérdeztem őket, hogy nevezik azt az utcát, amelynek az egyik vége zárt. Hárman tudták a magyar (zsákutca), négyen pedig a szerb kifejezést (slepa ulica). Az utóbbi tükörfordítása: vakutca. A kérdésre hogy mire gondolhat valaki, ha meghallja a tükörfordításokat a tanulók kacagva válaszoltak:

S: *Ebben az utcában vakok közlekednek.*

Q: *Ebben az utcában zsákokat gyártanak.*

Most tértünk vissza a táblára írtakhoz. A szerb mondatok alá írtuk az azonos jelentésű magyar mondatokat, hogy a tanulók könnyebben észrevehessék a két nyelv szó szerkezeti hasonlóságait és különbségeit.

Az utolsó előtti mondatpárral kapcsolatosan Nikola megjegyezte:

N: *Ugyanúgy mondják magyarul is, mint szerbül.*

Valójában, az utolsó előtti mondat szerkezete azonos mindkét nyelven: a határozórag (a *-vel*) megfelelője a *za* (kettőjük egymás tükörfordításai is), a *mint* szó megfelelője az *od* módosítószó (a *-tól* rag megfelelője; a szó tükörfordítása: tíztől).

Az utolsó mondatpárról Milán észrevette és kimondta a következőt:

M: *A szerbben azt mondjuk, hogy nagyobb, a magyarban pedig, azt hogy egyenlő.* A két nyelvben az utolsó mondat szerkezete lényegesen más: a *-szer* megfelelője a *puta* (egymás tükörfordításai), az *annyi, mint* megfelelője a: *veći od* (a *veći* fordítása: nagyobb) és a mondatrész tükörfordítása: nagyobb háromtól. (Az órán, csak a tanulói megjegyzések hangoztak el, nem elemeztük részletesen a szó szerkezeteket.)

A matematika szempontjából még egy lényeges nyelvi különbségre kellett felhívni a tanulók figyelmét. Ezért megkérdeztem őket, hogyan lehet az utolsó mondatot magyar nyelven másképpen is megfogalmazni. Mivel nem kaptam választ, elkezdtem mondani a következőt:

G: *Ez a szám a három...* Zoran folytatta:

Z: *Négyszerese!* (Zoran az iskolán kívül ritkán beszél szerbül, az édesanyjával él, aki nem beszél a szerbet.)

A második csoportban Kosta segítség nélkül elmondta a mondatot.

Abból kifolyólag, hogy a magyarban létezik a következő, minden *k* számra alkalmazható kifejezés: *egy szám k-szorosa*, a nyelv is erősíti a tanulóknál a tudatot (vagy

pozitívan hat a kialakulására), hogy a számok egy egységes halmaz elemeit alkotják. Más szóval, segíti a *racionális számok halmaza* fogalmának kialakulását.

Ilyen fajta nyelvi szerkezet, mely minden racionális számra alkalmazható, a szerb nyelvben nincs. Nagyon ritkán mondjuk szerbül a következőt (a tükörfordítását adjuk meg): *ez a szám kétszeresen* (háromszorosan, négyszeresen, vagy ötszörösen) *nagyobb a másik számnál* (*Ovaj broj je dvostruko veći od drugog broja*). Már a hatszoros szót nem használjuk. Például azt a kifejezést, hogy: a szám négy egész kétszerese, a szerb nyelvben nem használjuk és azt sem, hogy: mínusz kétszerese, vagy nullaszorosa. E helyett, a következőt mondjuk (a tükörfordítást adjuk): négy egész kettőszer a szám. *A legtöbbször a valahányszor nagyobb (illetve: a valahányszor kisebb)* kifejezést használjuk. (Csak akkor lehetne használni ezt a nyelvi szerkezetet, ha előre tudjuk, hogy az eredmény nagyobb, vagy kisebb lesz az adott számnál).

A szerbben, ha törtet használunk mondhatjuk, hogy egy szám, a másik része. Például (a mondat tükörfordítását adjuk): a nyolc négyötöde a tíznek. (Azt hogy: négyötödszerese, négyötöd része, nem használjuk.)

G: Mondjuk-e ezt így szerbül?

S: *Taj broj je trostruki tri*. Ez a mondat, a magyar mondat tükörfordítása és nem érthető. Oliver szerbesítette Slavica mondatát:

O: *Taj broj je trostruko od tri*. Ez is egy helytelen mondat, de meg lehet érteni.

G: *Ki szokott mondani ilyen mondatot? Hol hallottad utójára?*

O: *Itt az iskolában.*

G: *Van-e valaki, aki ezt a kifejezést soha se hallotta?* Csak Tajna jelentkezett. Nem lehetünk biztosak abban, hogy a tanulók tényleg hallották-e ezt a helytelen nyelvi konstrukciót szerb nyelven, de az biztos, hogy nem „sérti” a fülüket és helyesnek tekintik.

Felhívtam a tanulók figyelmét arra, hogy ez a mondat a magyar mondat tükörfordítása, s hogy helytelen.

A második csoportban mikor megkérdeztem, hogyan hangzik szerbül: a szám kétszerese, senki sem felelt. Idéztem Oliver mondatát. Ivanka, aki Szerbiából jött, rögtön megjegyezte, hogy a szerben ilyen nincs.

Zoran volt az egyetlen a csoportban aki tudta, hogy a második mondatban magyarul a *kisebb* helyett, a *kevesebb* szót és a harmadik mondatban a *nagyobb* helyett, a *több* szót is lehet használni. Szerb nyelven erre nincs lehetőség.

A tanulók a szószerkezeti különbségekkel gyakran nincsenek tisztába, automatikusan fordítanak egyik nyelvről a másikra, anélkül hogy értelmeznék a szószerkezeteket különösen, ha nem idegen nyelvként tanulták a két nyelvet. Gyakran lehet hallani az iskolában, a két nyelvben interferenciákat, azoktól akik az egyik nyelvet nem beszélik jól, és ezért kényszerülnek a másik nyelv szószerkezeteinek tükörfordításait használni. Az ilyen beszéd azokra is hat, akik teljesen jól beszélik a két nyelvet. Oly értelemben hogy kevésbé veszik észre a tükörfordításokat, néha még használják is őket, anélkül hogy tudatosult volna bennük, hogy ez a szószerkezet ebben a nyelvben nem létezik.

Aritmetikai kifejezések lejegyzése

Annak szükségességét, hogy a matematikai nyelven is leírjuk az előbbi mondatokat, azal indokoljuk, hogy kommunikálni szeretnénk egy japán tanulóval, Aikoval, aki a japánon kívül más nyelvet nem beszél, de ismeri az általunk is használt matematikai nyelvet.

Ezt a törekvést, hogy megértessük magunkat emberekkel, akiknek a nyelvét nem beszéljük, a tanulók teljesen átérzik és hasznosnak tartják. Az iskolában gyakran az osztályon belül is léteznek gyerekek, akik csak az egyik nyelven tudnak megszólalni, ezért a tanulók minden lehetséges eszközt: mutogatást, rajzokat, hangutánzó és hangulatfestő szavakat és a matematika nyelvét is hajlandóak bevetni, hogy sikerüljön egymással kommunikálniuk. Mivel maguk is sokszor tapasztalnak különbségeket a szerb és a magyar nyelv között azt is könnyen elfogadják, hogy a matematikai nyelvnek, mint minden más nyelvnek, vannak sajátosságai.

Megkértem a tanulókat, hogy a köznyelven már leírt harmadik, és negyedik mondat mellé jegyezzék le a mondatot matematikai nyelven is.

Minden különböző válasz felkerült a táblára, és a tanulók véleményét mondhattak róluk. Megbeszéltük, hogy mindenkit meghallgatunk, és nem vágunk egymás szavába. Ekkor párbeszéd alakult ki a tanulók között és ezzel feltételt teremtünk a tanulók kommunikációs készségének fejlesztésére. A tanulók igyekeztek mások gondolatait megérteni és a saját elképzeléseiket is megértetni másokkal. Indokoltak, cáfoltak.

A harmadik és a negyedik mondatmal kapcsolatosan Oliver, Danica és Nikola felírták a táblára a saját megoldásaikat:

$10 <^2 12$ (O megoldása); $10 <^2$; $3 <^4$ (D megoldása); $10+2$; $3 \cdot 4$ (N és T megoldása). A tanulók hozzászólásai következnek:

M: Olivér, a tied nem jó. A tizenkettőt nem szabad leírni.

O: Elfelejtettem.

D: Én leírtam, hogy kettővel nagyobb, mint tíz és nem írtam le a tizenkettőt. Az enyém jó! Ilyet már tanultunk régebben.

Danica a rendezési reláció lejegyzésére emlékezett ($10 <^2 12$) és ezt módosította. A $3 <^4$ (a szerbben azt mondjuk, hogy: négyszer nagyobb) leírási módot a $10 <^2$ alapján alkotta meg. Itt közbeszóltam. Megdicsértem D-t és elismertem, hogy igaza lehetne, mert azzal hogy leírjuk, hogy a szám mennyivel nagyobb, mint tíz a szám teljesen meg van határozva. Ahhoz viszont hogy Aiko megértsen bennünket, a már megalkotott matematikai nyelven kell vele kommunikálnunk és ezen a nyelven a „<” jel jobb oldalán kell, hogy legyen egy szám. Ezért a D leírási módja nem megfelelő. Oliver megjegyzése következik:

O: Nikola, nálad hiányzik az: egyenlő tizenkettő. A leírt kifejezéstípus fogalmához (két szám és közöttük a „+” jel) Oliver szerint hozzátartozik az „=” jel és az eredmény is.

S: Már mondtuk, hogy a tizenkettőt nem szabad leírni.

N: Ez jó. A tizenkettő, kettővel nagyobb, mint tíz és ezt írtam le.

Z: Nem, azt írtad, hogy: tíz meg kettő. A kettővel nagyobb, mint tíz, az más.

Zoran szerint ezzel a $10+2$ kifejezéssel csak eljárást fejezhetünk ki.

T: Tíz meg kettő az tizenkettő és kettővel nagyobb mind tíz.

Mivel a legtöbb tanulónak nehézséget okoz a kifejezés lejegyzése és a kettős jelentése, a következő feladattal folytatom az órát:

A jel különböző jelentése

Szeretnénk elérni, hogy a tanulók magukévá tegyék a procept fogalmát, és hogy tudatosuljon bennük, hogy a többjelentésű fogalmakat már ismerik a mindennapi életből, például a képekkel való kommunikációban, ahol egy képnek két jelentése van (a kép cselekvést is és tárgyat is jelent). Alapozva a számukra ismerős, azonos alakú szavak használatára a köznyelvben, szeretnénk a tanulókhoz közelebb hozni és elfogadtatni velük azt a tényt, hogy a matematikában többjelentésű jeleket használunk. Egyben a változó fogalmának megalapo-

zását is elkezdjük a képek segítségével. Újból, a tanulók képzelő erejét és a játékot „hívjuk segítségül”. Megkérem az osztályt, hogy emlékezünk vissza Aikora, a japán tanulóra, és folytatom:

G: *Képzeld el, hogy Aiket Pesten vendégül látjuk és ő egy napon, azzal szeretne nekünk segíteni, hogy a közeli közértben bevásárol. Például mosogatószert fog venni, anélkül hogy tudná a nyelvet, és hogy ismerné a Magyarországon kapható termékeket. Hogyan fogja ezt megtenni?*

A tanulók egyből azt válaszolják, hogy a flakonon levő kép alapján Aiko megtalálja a keresett árut. Szerintük a képen valami tiszta edény látható. Hogy a mese élethű legyen, mutatok nekik egy mosogatószer flakont, amelynek a címkéjéről levágtam a szöveget és most csak egy csillogó pohár fényképe látható rajta. Megkérem a tanulókat, hogy fogalmazzák meg, mit tud meg Aiko a képet nézve a termékről, amiből következtethet, arra hogy ez mosogatószer. A válaszok következnek:

Z: *Látszik, hogy poharakkal kapcsolatos.*

T: *Hogy lehet vele mosni a poharakat.*

G: *Kizárólag csak poharak mosogatására alkalmas? A pohárnak változó szerepe van, bármelyik edényt jelenti.*

F: *Nem, lehet vele mosogatni más edényeket is. A tanuló általánosít.*

G: *Megtudjuk-e a képről hogy mi lesz ennek a cselekvésnek a végeredménye? Szándékosan nem nevezem meg a cselekvést, így a kérdés feltehető különböző cselekvéseknél.*

M: *Egy tiszta pohár.* Ezután is még általánosítottak és a tiszta edény lett a cselekvés végeredménye. Végül megfogalmaztuk a következő általános kérdést:

Mit jelent a képcímke? Ahhoz hogy kihangsúlyozzuk, hogy két dolgot is jelent a kép, leírtuk az általános segédkérdéseket:

Mit kell cselekednünk?

Mi ennek a cselekvésnek a végeredménye?

A kérdések belekerültek a füzetekbe és a táblára is. Gyakorlatként, hogy minden tanuló önállóan is végiggondoljon egy hasonló helyzetet, mindenki nagy érdeklődéssel választott egyet az általam előkészített képcímkek közül és az első kérdésre megfogalmazta a választ. A segédkérdéseket felhasználva a tanulók irányítani és segíteni tudták a megfelelő gondolatsort. A címkek közt voltak ellenpéldák is. Ezek által a tanulók belátták, hogy nem minden képcímke utal a termék lehetséges felhasználására és ennek végeredményére (pl. a medve képe a Medvesajt dobozán).

Visszatértünk az aritmetikai kifejezésekhez és feltesszük a kérdést:

G: *Mit jelent a 10+2 kifejezés? Segítségünkre lehetnek a képcímkekre vonatkozó segédkérdések, de továbbra se nevezzük meg magát a számot.*

Újból Zorant kértem, hogy mondja el a válaszait:

Z: *Össze kell adni a 10-et és a 2-t. A cselekvés végeredménye a tizenkettő. Mondhatom úgy is, hogy az a szám, amely kettővel nagyobb, mint tíz.*

Úgy tűnik, hogy a tanulók megértették a kifejezés kétféle jelentését. A táblán, mindkét nyelven leírt harmadik mondat mellé, felírtuk a másik jelentést is: a tíz meg kettő mondatot, és a megfelelő aritmetikai kifejezést is.

A 3-4 kifejezés kétféle jelentését is meghatároztuk.

Az „oda-vissza” gondolkodásmód gyakorlásaképpen az egymással váltakozó aritmetikai kifejezések és mondatok mellé, házi feladatként a tanulók leírták a kifejezések mondatokban megfogalmazott kétféle jelentését, és a mondatok reprezentációit aritmetikai kifejezésekkel.

A mennyiségek viszonyát kifejező aritmetikai kifejezések megfogalmazása és aritmetikai kifejezések kontextusba való elhelyezése

A szöveges feladatok szerb nyelven nehézségeket okoznak a tanulóknak azért is, mert a szószerkezetek eltérnek egymástól, ha a számok illetve a mennyiségek viszonyát fejezik ki. Például, nézzük a következő számokról szóló mondatokat, s a nekik megfelelő mennyiségeket, kifejező szövegeket:

1. példa

Az 5 kettővel több, mint 3.

Máriának 5 cukorkája van, Péternek kettővel több, mint Máriának.

A mondatok szerbül következnek:

5 je (van) segédige megfelelő alakja) za (-vel megfelelője) dva (kettő) veći (nagyobb) od (a -tól megfelelője) 3. (Az 5, 2-vel nagyobb 3-tól.)

Marija ima 5 bonbončica. (Máriának 5 cukorkája van.) Petar (Péternek) ima (van) dva (kettő) više (több) od (a -tól megfelelője; vagy használják a nego szót is) Marije (a Mária szó megfelelően ragozva.). A kontextusban nem létezik a za előljárószó, a veći (nagyobb) szó helyett, a više (több) szót és az od helyett gyakran a nego szót használjuk. A szöveg alapján a tanulóknak nehéz felismerni, hogy a megfelelő aritmetikai kifejezés összeg kell, hogy legyen.

2. példa

A 6 háromszor annyi, mint a 2.

Ivának két ceruzája van. Annának háromszor annyi ceruzája van, mint Ivának.

Ugyanez szerb nyelven így hangzik:

6 je (segédige) 3 puta (-szor) veći (nagyobb) od (-tól) 2.

Ivan ima (van) dve (a kettő szó a névszámragozás egyik esetében áll) olovke (a ceruza szó ragozva). Ana ima (van) 3 puta (a -szor megfelelője) više (több) od (-tól megfelelője; az od helyett gyakran a nego szót használjuk) Ivana. A mennyiségek viszonyát kifejező mondatban a nagyobb szó helyett, a több szót, és gyakran az od szó helyett, a nego szót használjuk.

Milánnak és Filipnek odaadtam három, három cukorkát és felírtam a táblára, a tanulók pedig a füzetbe:

G: *Milanak három cukorkája van.*

Ekkor adtam Milánnak még két cukorkát és kértem a tanulókat, hogy folytassák a „mesét”. Mondtam, hogy a folytatást írják le mondatokban is és matematikai nyelven is.

A folytatások hasonlóak voltak. Íme az egyik:

S: *Kapott még kettőt. (felírta a táblára)*

Ketten kérdést is írtak, hogy a megszokott feladatforma jöjjön létre:

D: *Hány cukorkája van most Milánnak? Matematikai nyelven is leírták a mondatot: 3+2.*

G: *Fogalmazzuk meg a választ az elhangzott kérdésre úgy, hogy kihangsúlyozzuk, hogyan viszonyul Milan cukorkáinak száma, Filip cukorkáinak számához? A válaszokat matematikai nyelven és köznyelven is le kellene írni.*

Q: *Kettővel több cukorkája van, mint Filipnek.*

(Kimondta a mondatot a nego felhasználásával is.)

A megfelelő 3+2-t, kifejezést négyen írták le.

Azok a tanulók (M és Z), akik gyengébben beszélnek szerbül most is, s a második csoportban is nehézségek nélkül írták le a megfelelő aritmetikai kifejezést. Ebből arra következtetek, hogy a mondat magyarra való lefordítása segített az aritmetikai kifejezés leírásában.

A tanulók még egyszer megfogalmazták, hogy két különböző köznyelvi mondatot a matematika nyelvén egyformán írunk le.

Leírtam a $6+8$ és a $3\cdot 5$ kifejezést és kértem, hogy délután írjanak az előző példához hasonló, szövegeket-meséket. A feladatban fordított okoskodást kellett alkalmazni: a kifejezésekhez kellett mondatokat írni. Oliver és Filip elvégezték a második kifejezésnek megfelelő cukorkamanipulálást, hogy le tudják írni a megfelelő szöveget.

Felhívtam a tanulók figyelmét még egy különbségre a két nyelv között. A $3\cdot 5$ kifejezésnek a következő szituációs jelentést adtam magyar nyelven:

G: *Péternek tizenöt almája van. Annának, csak ennek a harmada van.*

Tajna ezt lefordította szerb nyelvre:

T: *Petar ima petnaest jabuka. Ana od toga ima samo trećinu.*

Az első mondat jelentése ugyanaz, mint a magyar mondat jelentése. A második mondat pedig azt jelenti, hogy: *Anna almái a Péter almáinak egyharmad részét képezik.*

Figyelmeztettem a tanulókat, hogy ha szerbül olvassuk a feladatot a következő gond jelentkezik: Anna almáinak két tulajdonosa van (Anna és Péter). A feladat szövegét a következőképpen kell kiegészíteni:

Anna almáinak száma egyharmada a Péter almái számának.

Broj Aninih jabuka iznosi jednu trećinu od broja Petrovih jabuka.

Az ilyen számok közti viszonyt ki tudjuk fejezni szerb nyelven is. Ha a feladat szószerinti fordítását nem egészítjük ki, a feladat szövegezése ellentmondásos lesz.

4.2.2. Egyenlőségjel helyes értelmezése

Egy délutáni foglalkozás témája az egyenlőségjel helyes értelmezése volt. A tanulók párokban dolgoztak valódi kétkaros mérleggel és egyforma kiskockákkal.

Megkértem a tanulókat, hogy a természetes számokat egy átlátszó zacskóban levő kiskockákkal jelenítsük meg. (Például az öt reprezentációja öt kiskockából állt.)

1. feladat:

Melyik számot helyettesíti a szívecske?

$$8+3=6+\heartsuit$$

Hogyan mutatjuk meg ezt a mérlegen? Válaszod indokold?

(A feladatban a \heartsuit jelet választottam, mert ezt nem lehet keretként értelmezni és semmit sem lehet beleírni.)

A tanulók válasza egyhangú volt: *a \heartsuit az ötöt helyettesíti.* Leírták: $\heartsuit=5$. A bal serpenyőbe a 8 és a 3, a jobb serpenyőbe a 6 és az 5 reprezentációját tették. Q, aki helytelenül oldotta meg az előteszt első feladatát a következőt mondta:

Q: *Tizenegy kocka van mindkét tányérban.*

G: *Hogyan „mutatja” a mérleg az „=” jelet?*

Q: *A tányérok egyformán állnak!*

2. feladat:

Melyik számokat helyettesítik a jelek?

$$8+3=\heartsuit+6$$

$$8+3=8+3+\blacktriangle$$

$$8+3=8+3-5+\blacklozenge$$

$$8+3=3-5+\blacksquare+8$$

A tanulók jól oldották meg a feladatot. A mérleget segédeszközként csak a $8+3=8+3+\blacktriangle$ -nál használták. Figyelmeztetni kellett a tanulókat hogy ellenőrizzék az eredményeket.

4.2.3. A változó fogalmának bevezetése gépmodell alkalmazásával

A második tanítási órán a tanulók lehetőséget kapnak, hogy megalkossák a táblázat és a változó fogalmát. A gépmodell és a színes rúdkészlettel való foglalkozás közben, a tanulók felépítik a táblázatmodellt az első tematikus részben. A második részben a gépcímke rajzolása következik, amely alapján a harmadik részben megjelenik a táblázat. Végül, a negyedik részben a változót is bevezettük a tanulókkal. Az ötödik részben megadott táblázat alapján, a tanulók felírják a megfelelő algebrai kifejezést.

Gépmodell tárgyi reprezentációja










Konkrét, kézzelfogható „gépet” készítettünk, amely lehetővé tette a tanulók számára, hogy tapasztalatokat szerezzenek a „működéséről”. Arról hogy a „gépbe” betáplált tárggyal a „gép” valamit „csinál” és „kidobja” az eredményt és arról is, hogy minden betáplált tárggyal ugyanazt teszi. Ez fontos, mert az előteszt negyedik feladatában voltak tanulók, akik különböző szabályokat alkalmaztak egyetlen táblázaton belül. A „gép” egy zárt dobozból állt. A két oldalán és a hátulján egy-egy nyílást vágtunk ki.



A „gépbe”, a színes rúdkészletből rudakat tápláltunk be. (A készlet egységnyi élhosszúságú kockákból és 12 különböző színű egységnyi oldalhosszúságú négyzet alapú téglatestekből áll, amelyeknek a magasságai kettőtől tízig, tizenkettő és tizenhat egész számú egység hosszúságúak. A készletben minden különböző színű rúdból 25 darab van.)

A játék a következőképpen zajlott: Nikola a doboz jobboldali (a gyerekek szempontjából bal oldali) nyílásba betett egy sárga rudat, a „gép”, pár másodperc pöfögés és rázkódás után (ráztuk a dobozt, a tanulók élvezettel utánozták a gépzakatonlást), kidobott a baloldali nyíláson (a doboz hátulján levő nyíláson, benyúlva, a baloldali nyíláson kiadtam) egy ugyanolyan sárga rudat, meg még két kiskockát.

A „gép” két oldalnyílása segít a jövődöbeli táblázat két oszlopának megalkotásában. Megkértem a tanulókat, hogy ugyanúgy, mint én, mindenki a saját asztalán rakja ki a betáplált színű rudat és tőle jobbra azt, amit a „gépünk” kiadott. (Én a rúd bal oldalára tettem az eredményt, hogy a tanulók nézőpontjából olyan legyen, mint a sajátjuk.) Még egy tanulóval eljátszottuk ezt, és egymás alá raktuk a betáplált, különbözőszínű rudakat és a megkapott eredményeket. Így egy kétoszlopos táblázatmodellt alkottunk. A táblázatmodell oszlopai fölé papírdarabokra felírtuk: *betáplált rúd* (tükörfordítás: *bedobott rúd*), *kiadott rúd* (tükörfordítás: *kidobott rúd*). Az első oszlop következő sorába újabb színű rudat raktam. A rákövetkező sor második oszlopába egy újabb színű rúd, meg két kiskocka került.

Betáplált rúd	Kiadott rúd
	 
	 
	 

Megkértem a tanulókat, hogy pótolják a hiányzó rudakat, s mondatban fogalmazzák meg hasonlóan, mint az első órán, hogy mit csinál a „gép” és mi a cselekvés végeredménye (mit dob ki a „gép”). Fontos számunkra hogy a „gép” cselekvésének a megfordítását is végiggondolják a tanulók, és hogy általánosítsanak. Gyorsan megfogalmazták a válaszokat:

M: A „gép”, hozzáad a „bedobott” rúdhoz még két fehéret. (A kockák fehérek.)

T: A „gép” munkájának eredménye az a rúd, amit bedobtunk és még két kiskocka. Öten minden különböző rudat és a megfelelő eredményeket berakták a táblázatmodellbe. Tajna felhasználta a rudak közti összefüggést és két helyre is, a két fehér kiskocka helyett, egy rózsaszín rudat rakott (a rózsaszín rúd kétszer akkora, mint a fehér kiskocka). Megkérdeztem, hogy miért tette ezt. A következőt válaszolta:

T: Már kevés fehér volt a zacskóban. Nem találtam őket. A rózsaszín ugyanaz, mint két fehér, ezért ezt választottam.

Gépmo­dell képi reprezentációja

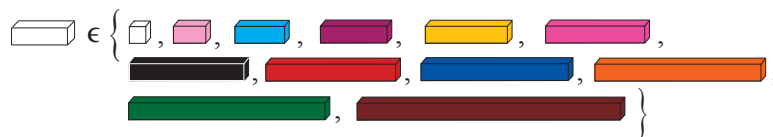
Következett a gépmo­dell működésének lejegyzése. Ennek szükségessége abból az igényünkből következett, hogy a „gépre” szövegnélküli címkét kellett rajzolnunk, hogy Aiko is megérthesse a „gép” működését. Zoran ötlete volt, hogy rajzoljuk le a táblázatmodellt. Hat tanuló téglatesteket, két tanuló a téglatesteknek megfelelő színes téglalapokat rajzolt. Minden egyes rajzon a színes rudak, illetve a téglalapok mérete arányos volt a megfelelő testek méretével. (A táblára is felrajzoltuk színes krétával Danica rajzát.) Ebből arra következtettünk, hogy a tanulók értik a rudak közti viszonyokat. A következő kérdés az volt, hogy még egyszer ismételjék el, hogy a „gép” mit csinál és hogy ezt felhasználva, próbáljanak rajzolni egyszerűbb „gépcímkét”. Nikola és Zoran rajzoltak egy rudat, amelyet nem festettek ki és attól jobbra egy ugyanolyan rudat meg két kiskockát. Én nagyon meg voltam elégedve, berajzoltam a szintelen rudat a „táblázat” első oszlopába, a neki megfelelő rudakat a „táblázat” második oszlopba. Slavica megjegyezte:

S: Nem jó! Ebből Aiko nem fogja tudni milyen színű rudakat, tehet a „gépbe”.

Z: Tudja, hogy a színes rúd készletben milyen rudak vannak.

O: Nem minden készlet egyforma. Nekem otthon vannak rudacskáim, de csak tíz különböző van és nincs köztük fekete.

Az értelmezési tartomány jelölésével külön nem szerettem volna foglalkozni, de segítenem kellett az érvelésben Zorannak, ezért változtattam a terven. Mivel a tanulók ismerték a halmazokat, bevezettem a „ \in ” szimbólumot elmondtam, és le is rajzoltuk, hogy a szintelen téglatest eleme lehet egy meghatározott halmaznak:



A tanulóknak tetszett az ötlet, így elfogadták a két fiú megoldását.

Gépmo­dell számokkal való reprezentációja

Megkértem a tanulókat hogy vegyék szemügyre Tajna kirakott rudacskáit. Észrevették a rózsaszín rudacskával való helyettesítést. Rövid vita után azoknak a tanulóknak sikerült meggyőzni a többeket a saját igazukról, akik azt állították, hogy ez egy jó helyettesítés. A rudak mellé rakták a kiskockákat és magyarázták, hogy hányszor van meg a kocka minden rúdban. Megkérdeztem:

G: Ha ezt tudjuk, lehetne-e jelölni a rudakat számokkal.

Egyből mondták a rudaknak megfeleltetett számokat, amelyeket a megfelelő rúdrazok mellé írtunk a „táblázatunkba” (a táblára és a füzetekbe). Megkértem, hogy az „eredményeket” is jelöljük számokkal. Például a piros rúd rajza mellé írtuk az 8-at, a neki megfelelő piros rúd meg két kiskocka rajza mellé az $8+2$ -t.

Változó és táblázat bevezetése

Ubačeni broj	Izbačeni broj
5	$5+2$
7	$7+2$
3	$3+2$
9	$9+2$
2	$2+2$
4	$4+2$
6	$6+2$
7	$7+2$
8	$8+2$
10	$10+2$
1	$1+2$
12	$12+2$
16	$16+2$
<i>broj</i>	<i>broj veći za dva</i>
<i>broj</i>	<i>broj +2</i>
<i>b</i>	$b+2$
<i>n</i>	$n+2$
<i>s</i>	$s+2$

Lerajzoltunk egy új táblázatot, amelybe csak a számok kerültek. Kértem, hogy szóban fogalmazzák meg, mit csinál a gép, és mi a cselekvés végeredménye. A válaszok következnek:

E: *A gép a számhoz hozzáad kettőt.* (A mondatokat felírtuk a táblára.)

D: *A cselekvés végeredménye a kettővel nagyobb szám.*

Beírtuk a táblázat első oszlopába, azt hogy: *szám* (szerbül: *broj*).

Mellé a második oszlopba: *kettővel nagyobb szám.* (Ezt „dobja ki” a „gép”.) Megkérdezem, hogy hogyan írjuk matematikai nyelven azt, hogy: kettővel nagyobb. Milan felelt:

M: *Meg kettő* (szerbül: *plus dva*).

A táblázatunk következő sorába beírtuk a következőt: *szám* (szerbül: *broj*).

Mellé a második oszlopba azt, hogy: *szám +2* (szerbül: *broj +2*).

Végül is megkérdezem mit gondolnak, hogyan lehetne még rövidebben írni a *szám* szót, hiszen a matematikusok a lehető legrövidebben szeretnek mindent lejegyezni. Nikola mondta leggyorsabban a választ.

N: *Lehet: b.* (A szerb *szám* szó első betűje.)

A táblázatunk következő sorába beírtuk, a következőt: *b*. Mellé a második oszlopba azt, hogy: $b + 2$ és a táblázaton kívül azt is leírtuk, hogy $b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 16\}$.

G: *Melyik betűvel jelölnék az angolok vagy a magyarok a számot? Írjuk a táblázat következő sorába.*

A tanulók az *n* és a *sz*-t írták. Megbeszéltük, hogy az *sz*-t is lehet rövidebben *s*-ként írni. Így megkaptuk a képen látható táblázatot.

A tanulók önállóan leírták a következőket is: $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 16\}$ és $s \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 12; 16\}$.

Táblázat kitöltése; általánosítás; az „eredmény” változókkal való lejegyzése

G: *Pótold a hiányzó számokat a táblázatban, és add meg a „gépcímkrét” matematikai nyelven.*

4	8
7	14
5	
6	
18	
<i>b</i>	

Slavica és Oliver először kirakták a táblázatmodellét. Ők a táblázatmodell második oszlopába berakták ugyanazt a rudat, amit az elsőbe is, és csak utána figyeltek a számokra a táblázat második oszlopából, s észrevették, hogy a szám a második oszlopból két ilyen rúddal reprezentálható. Ezek után, az algebrai kifejezés leírása számukra könnyű feladatnak bizonyult.

A többiek modell nélkül oldották meg a feladatot.

A délutáni foglalkozáson a tanulók kérték, hogy a gépmodell felhasználásával (az egyik diák játszotta a gép szerepét) megadják a táblázatot és meghatározzák a megfelelő algebrai kifejezést. A megjelenő kifejezések $ab+c$ ($a \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$) alakúak voltak. Élvezték a játékot.

4.2.4. Konkrét szituációk reprezentálása algebrai kifejezésekkel.

Algebrai kifejezések kontextusba való helyezése.

Algebrai kifejezések szerkezete.

A harmadik tanítási órán a tanulók először egy konkrét szituációt modelleztek egy algebrai kifejezéssel és ezután a megalkotott kifejezésre, más szituációkat írtak. Az algebrai kifejezések szerkezetének megértésére konkrét és képi reprezentációkat alkottunk.

Konkrét szituáció reprezentálása táblázattal és algebrai kifejezéssel

A tanulók egy lapon megkapták a következő két feladatot szám adatok nélkül:

1. feladat:

Az egyik \square perces iskolai szünetben Nemanja telefonált a testvérének. A telefonbeszélgetés időtartama egész percekben fejezhető ki. Mutasd be táblázattal és matematikai kifejezéssel (készíts „gépcímkét”), annak a gépnek a működését, amely kiszámolja Nemanja telefonbeszélgetésének lehetséges árát. A beszélgetést egész percekben mérik és egy perc \square Ft-ba, kerül. Fogalmazd meg mondatban és matematikai nyelven is: mit csinál a gép és mi a cselekvés végeredménye.

2. feladat:

Emma szeretne az édesanyjának, celofánba csomagolt és masnival díszített rózsacsokrot vásárolni. Hányféle rózsacsokrot vehet Emma a \square forintjából, ha egy rózsa \square Ft-ba kerül, a masni a csomagoló papírral együtt pedig \square Ft-ba. Mutasd be táblázattal és matematikai kifejezéssel (készíts „gépcímkét”), annak a gépnek a működését, amely kiszámolja a lehetséges csokrok árát? Fogalmazd meg mondatban és matematikai nyelven is: mit csinál a gép és mi a cselekvés végeredménye. (Emma páros számú rózsát is adhat az édesanyjának.)

A szövegek olvasása után, a tanulók javaslatokat tettek. Vita után megállapodtak abban, hogy a szünet 10 perces lesz, egy perc telefonbeszélgetés 50 Ft-ba kerül, Emmának zsebpenze 2000 Ft, egy szál rózsa ára 300 Ft és a virág csomagolásának ára 200 Ft. A megfelelő számokat az *üres téglalapokba* írtuk. Ezzel igyekeztünk a tanulók érdeklődését felbreszteni a feladatok iránt és elértük, hogy a tanulók számára, az adatok valóságos élethelyzeteket tükrözzenek. Úgy tűnt, hogy vita közben (két nyelven történt; hiszen, az érvelés könnyebb azon a nyelven, amelyet jobban beszélünk) mindenki megértette a feladatokat (a kérdésre, hogy értik-e a szöveget a tanulók pozitívan válaszoltak) anélkül, hogy fordítottuk volna azokat.

Különösen a nyelvi nehézségekkel küzdő tanulóknál szeretném elkerülni, hogy „demoralizálódjanak” azzal, hogy a nyelvi problémákat túlhangsúlyozzuk. Bármilyen gyorsan tanulják is a nyelvet - a „lemaradást” azokhoz képest, akik nagyon jól beszélnek szerbül - nagyon nehéz behozni.

Nikola egysoros táblázatokat rajzolt és csak a kifejezés párokat és az értelmezési tartományokat (b , $50 \cdot b$; $b \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; és a b , $300 \cdot b + 200$; $b \in \{1,2,3,4,5,6\}$) írta le és elégedetten megjegyezte:

N: *Én írtam le legrövidebben a gépeket.*

A többiek a táblázatokba a kifejezés párok elé beírták a számpárokat. Feleslegesnek tartották átmenetként beírni a táblázatba a *szám*-ot, és az *50-szám*-ot. Ketten nem írták le az ér-

telmezési tartományokat, ezért az értelmezési tartományok tárgyi reprezentációit készítettük el: A tartományok számait, két szalagra írtuk egymás alá. A szalagokon végigcsúsztattunk számnagyságú, átlátszó téglalapokat, amelyre ráírtuk a b betűt; utalva arra, hogy a számok a b lehetséges értékei.

Oliver gépe a második feladatnál az árba nem számolta bele a csomagolást. Sikerült segíteni Olivernek, hogy vizsgálja felül és módosítsa a megoldását úgy, hogy eljátszottuk a virágvásárlást. (A gép szerepe Oliveré volt.)

A proceptre (a gép működésére) vonatkozó kérdésekre minden tanuló jól válaszolt.

Egy algebrai kifejezés különböző szituációs jelentéseinek alkotása

Célunk, hogy a tanulók észrevegyék, hogy egy algebrai kifejezéssel különböző szituációkat lehet modellezni illetve, hogy a különböző szituációknak azonos a struktúrájuk. (Eközben a tanulók az analitikus gondolkodást és absztrahálást is alkalmazták.)

3. feladat:

Fogalmazd át az előző feladatok szövegezését, úgy hogy az első feladat rózsákról, a második telefonbeszélgetésről szóljon, azzal hogy a feladatokhoz tartozó gépek ne változzanak.

A tanulók az első feladatot, könnyen módosították (*Emma külföldre telefonált*), a másodikonál csak két megoldás született (1. *Minden beszélgetésnél kapcsolási díjat is fizetni kell.* 2. *Nemanja helyett valaki más tárcsázott és Nemanja neki fizetett 200 Ft-ot.*)

A meghatározott algebrai kifejezésekre (az első és a második feladatból), a tanulók különböző szituációkat képzeltek el és újabb szövegeket írtak. Élvezetes játéknak tekintették a szövegek felolvasását. Bemutatták a „mesét” (így neveztük a szövegeket), és mások „meséit” is megvitathatták.

Danica megoldásában az algebrai kifejezés is megváltozott:

D: *Sasa elindult a piacra, hogy tojást vegyen. Magával vitte a tojástartót, amelybe 10 hely van. Írd le a táblázatot, hogy hány tojást vehet Sasa, ha a tojástartóban szeretné hazavinni a tojásokat.*

Z: *A gép azt számolja, hogy mennyit fizet!*

A tanulók gyakran nem tudnak összpontosítani minden részletre, de ez a megjegyzés elegendő volt ahhoz, hogy a kislány módosítsa a „meséjét”.

Algebrai kifejezések struktúrájának szemléltetése

Az algebrai kifejezés *struktúrájának* megértése kulcsfontosságú az algebrai tevékenységeknél (algebrai átalakításoknál és az egyenletek megoldásánál), ezért a kifejezések szerkezetével külön foglalkoztunk. Az általunk készített modellek és a rajzolt sémák tulajdonságai, kihangsúlyozzák a kifejezés szerkezetét.

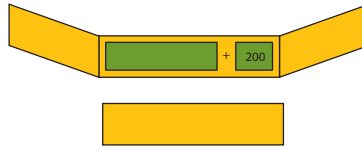
A $300 \cdot b + 200$ kifejezés modellekkel való szemléltetése:

A balyu modell

Mivel a $300 \cdot b + 200$ algebrai kifejezést a tanulók alkották (második feladat), a műveletek sorrendjét világosan értették, s el is mondták. Ezek alapján készítettük el a kifejezés modelljeit:

Két kis fehér papírlapra felírtuk a 300 -at és a b -t, rátettük őket egy zöld papírcsíkra, közük megjelöltük a „ \cdot ” jelet és becsomagoltuk a lapokat a csíkba (utalva, arra hogy az összeg egy objektum).





A batyut és egy zöld papírlapocskára felírt 200 -t egy sárga csíkra tettük. Kettőjük közé felírtuk a „+” jelet és betekertük a csíkot.

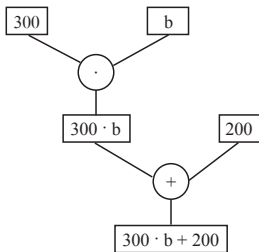
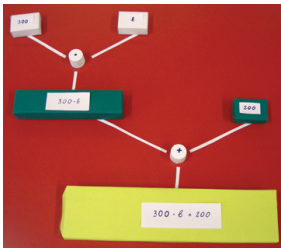
A lépcsős modell

Ugyanúgy, két kis fehér téglatestre felírtuk a 300 -at és a b -t, és a „ \cdot ” jelet egy kis hengere és ráraktuk őket egy zöld téglatestre. A téglatesteken látható volt hogy mi van a „batyuban” (a csíkoknál). Most már a tanulók önállóan elkészítették az eggyel alacsonyabb szintet a „lépcsős” modellnél.



A „lépcsős” modell szintjei kihangsúlyozzák a műveletek sorrendjét.
A $300 \cdot b + 200$ kifejezés képi reprezentációja:

Grafikus séma



A modell szintjeit áthelyeztük egy síkba úgy, hogy az alacsonyabb szint lejjebb került az előzőnél, s az egy szinten elvégzendő művelet és a kifejezések melyekkel a művelet elvégzendő külön ki voltak hangsúlyozva. Ez alapján megrajzoltuk (a táblára és a füzetekbe is) a képi reprezentációt.

Mindegyik modellben azonos színnel jelöltük a kifejezésrészek reprezentációit, hogy kiemeljük a reprezentációk analogiáját. Ennek köszönhetően, a tanulók könnyebben át tudtak térni az egyikről a másik modellre.

(A tanulókkal az egyik modellt *batyunak*, a másodikat *lépcsős modellnek*, a grafikus sémát, *fasémának*, vagy *sémának* neveztük.)

A délutáni foglalkozáson a tanulók hasonló jellegű feladatokat oldottak meg. Például:

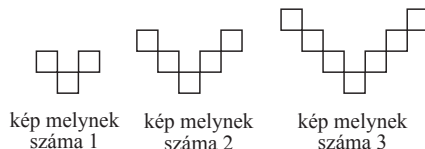
A telefonbeszélgetést egész percenként mérik (egyől hatig). Egy perc 300 Ft-ba kerül és a kapcsolási díj 200 Ft.

Rajzoltak táblázatot, leírták a megfelelő algebrai kifejezést, készítettek lépcsős modellt és rajzoltak sémát.

4.2.5. Geometriai minták vizsgálata

A geometriai minták, megkönnyíthetik az általánosítást és a megfelelő algebrai kifejezés meghatározását, ezért egy tanítási órán a geometriai minták vizsgálatával foglalkoztunk. A tanulók nehézségeinek lehetséges „terápiáját” mutatjuk be:

1. feladat:



Rajzold le a negyedik képet. Határozd meg a négyzetek számát a századik képen. Fogalmazd meg és írd le matematikai nyelven is annak a gépnek a működését, amelybe „beütjük” (betápláljuk) egy kép számát, és a gép kiszámolja a négyzetek számát azon a képen. Rajzolj táblázatot és írd be a képek adatait. Határozd meg, hogy hányas számú képen van 53 négyzet.

Az első (második, illetve harmadik) kép alá a következőt helyes szerb szöveget írtuk: *kép, melynek száma 1* (illetve 2; illetve 3), nem pedig *1. kép*, (illetve 2. kép, illetve 3. kép) azért, hogy a tanulók a kép számát be tudják írni a táblázatba anélkül, hogy a sorszámmokról át kellene térniük a megfelelő számra. A „váltás” még több odafigyelést igényelne (a sorszám elnevezése ezt nem segíti, hiszen teljesen más, mint a megfelelő természetes szám elnevezése). A tanuló a három kép alapján megértheti a képek számának az összefüggését a négyzetek számával a képen, és azt is, hogy egy kép alapján hogyan lehet megalkotni a rákövetkező képet (meghatározni a képsorozatban a két egymás utáni tag összefüggését). A negyedik kép megrajzolásával a tanulók tesztelni tudják a meghatározott „szabályt”. A századik kép négyzeteinek számát az előző kép alapján már nehezen lehet meghatározni, hiszen meg kellene határozni a négyzetek számát az összes előtte levő képen. Azokat a tanulókat, akik ilyen fajta összefüggést találtak, ez a feladatrész reményeink szerint ösztönözni fogja arra, hogy a képszám és a négyzetek száma közt keressék az összefüggést. Az általános szabály szóban való megfogalmazása megelőzi a megfelelő matematikai kifejezés leírását. Ezzel azt szeretnénk elérni, hogy a tanulók, mivel köznyelven gondolkodnak, először összpontosítsanak az általánosításra, és csak utána az algebrai kifejezés lejegyzésére (a fordításra, matematikai nyelvre). Így azt sugalljuk, hogy az algebrai nyelvként, gondolatok lejegyzésére, kommunikációra használjuk. Az inverz gondolkodásra szeretnénk ösztönözni a tanulókat azzal, hogy meg kell határozniuk annak a képnek a számát melyen 53 négyzet látható.

Tanulói megoldások:

Minden tanuló pontosan megrajzolta a negyedik képet. Hat tanuló (D, N, O, S, T és Z) táblázatot is készített. Oliver táblázata azt fejezte ki, hogy hogyan függ a négyzetek száma egy képen az előző kép négyzeteinek számától. A többiek, hasonlóan, mint Danica, a négyzetek számát egy képen, a kép számának függvényeként adták meg a táblázatban. Oliver és Danica táblázatait mutatjuk be:

Danica táblázata: *a kép száma négyzetek száma*

1	3
2	5
3	7
4	9
100	201
26	53
b	$2b+1$

Oliver táblázata:

3	5
5	7
7	9
c	$c+2$

Megkérdeztem Olivert, hogy mit jelentenek azok a számok amelyeket „betáplált” a gépébe. Nem kaptam választ. Igyekeztem másként, egy számra konkretizálva, megfogalmazni a kérdést (lehet, hogy a tanuló a „betáplálni” szót nem ismeri):

G: *Minek a számát mutatja a hármast? Mit jelent a hármast? Miért írtad épp a hármast a táblázatba?*

Q: *Három négyzet van a képen. (Mutatott az egyes számú képre.)*

A gépmodell baloldali nyílására ráragasztottam a legegyszerűbb zsebszámológép billentyűzet részének a rajzát (csak a számok voltak rajta) és „beütöttem” a hármast mondván:

G: *A te gépembe betápláltuk, a négyzetek számát. Olvasd el még egyszer, a feladatot. Mit kell a gépbe betáplálni?*

Q: *A kép számát. Rajzolok egy új táblázatot.*

Oliver új táblázata Danica táblázatának második, harmadik, negyedik, és ötödik sorából állt, de nem sikerült meghatároznia a 100 megfelelőjét. Mivel a tanuló tudta, hogy minden következő képen, kettővel több négyzet van megkértem, hogy számolja meg az egy képen levő négyzetpárokat; s határozza meg, hogyan függ a négyzetpárok száma a kép számától. Kértem, hogy mondja el és írja le minden képpel kapcsolatosan hogyan számolta ki a gép a „kiadott” számot a „beütött” számból. Oliver a táblázat második oszlopát a következőképpen egészítette ki (ez a táblára is felkerült és a tanulók füzetébe is):

1	$3=1 \cdot 2 + 1$
2	$5=2 \cdot 2 + 1$
3	$7=3 \cdot 2 + 1$
4	$9=4 \cdot 2 + 1$
100	

Oliver önállóan meghatározta a 100, a *broj* és a *b* megfelelőjét, de az 53-mal nem tudott mit kezdeni.

Öten meghatározták fejben, visszafelé számolva (először kivontak egyet az 53-ból és a 52-ot osztották kettővel) hogy azon a képen 53 négyzet van, melynek száma 26. Oliveren kívül Filip sem oldotta meg ezt a feladatrészt. Mivel, hatodik osztályban, a tanulók már alkalmazták a lebontogatási módszert az egyenletek megoldására, gondoltam, hogy ez a módszer segíthet a felmerült probléma megoldásánál is. Oliver táblázatába beírtuk az 53-t és mivel az 53-as megfelelő betáplált számát nem tudjuk, a betáplált számot háromszöggel reprezentáltuk. Megkértem a tanulókat, hogy a táblázatban levő 53-at írják fel úgy, hogy kihangsúlyozzuk, hogy melyik számokból számolta ki a gép az 53-at ($53 = \blacktriangle \cdot 2 + 1$). Ebből számolták ki a tanulók a háromszög értékét.

Filip a következőt írta:

$$\blacktriangle = 53 : 2 - 1$$

$$\blacktriangle = 25,5$$

A többiek hasonlóan oldották meg a feladatot, mint Danica. Ő megjelölte egy téglalappal azt a kifejezést melynek értékét számolta ki először és ezután határozta meg a háromszög értékét:

$$53 = \boxed{\blacktriangle \cdot 2} + 1 \quad (\text{A szorzatot egy objektumnak tekinti.})$$

$$\boxed{} = 53 - 1$$

$$\boxed{} = 52$$

$$\blacktriangle \cdot 2 = 52$$

$$\blacktriangle = 52 : 2$$

$$\blacktriangle = 26$$

Az egyenletek megoldásánál lebontogatósi módszerrel („takarási” módszerrel) a tanulóknak problémát jelenthet a letakarandó kifejezésrész meghatározása. A segédkérdések, melyeket a hatodik osztályban, a módszer bevezetésénél megfogalmaztunk és a tanulók feltettek magunknak minden feladat megoldásánál ezzel a módszerrel, a következők voltak:

Mi volt az utolsó művelet?

Mit jelölünk ki? Mit takarunk le?

Filipnek az ismeretlen pontos meghatározásánál lebontogatósi módszerrel a $\blacktriangle \cdot 2 + 1$ kifejezés batyumodellje és a faséma segített. A batyura ráírtuk az értékét és a sémát is kiegészítettük és megkaptuk az egyenlet reprezentációit (1. kép a következő oldalon).

A sémán visszafelé haladva, látszik hogy először kivonás alkalmazásával a $\blacktriangle \cdot 2$ értékét tudjuk meghatározni és csak ezután osztással a \blacktriangle értékét. A sémán szintén láthatjuk, hogy mi van a batyuban (a batyut „összetartja” a „+” jel), ezért a $\blacktriangle \cdot 2$ értékét kivonással tudjuk meghatározni (nem alkalmazhatunk osztást). A tanuló ezt látja is, ha kibontja a batyut. A \blacktriangle meghatározásakor a $\blacktriangle \cdot 2$ batyut osztással tudjuk „kibontani”.

A második kísérleti csoportból Robert is a batyumodell és a faséma felhasználásával határozta meg a 26-ot.

A betűnek lehet egy vagy több értéke

G: *Mit írnának a matematikusok a háromszög helyett?*

N: *x-et.*

G: *Az x az egyetlen betű melyet lehet a háromszög helyet írni?*

Z: *Más betűt is lehet!* (A hatodik osztályban az egyenletek megoldásánál különböző betűkkel jelöltük az ismeretleneket.)

G: *Melyik betűt használjuk?*

S: *Az a-t.* (Így, az $a = 26$ -ot is felírtuk a táblára.)

G: *Hány számot, jelent ebben a feladatban az a betű? Hány értéket vehet fel?*

T: *Egyet.* Megkértem a tanulókat, hogy emelje fel a kezét az aki egyetért Tajna-val. A tanulók osztották Tajna véleményét.

G: *A b betű is csak egy számot jelent ebben a feladatban?*

A tanulók sorolták a b értékeit.

Különböző geometriai mintáknak egy algebrai kifejezés felel meg (azonos struktúrájú minták)

2. feladat:

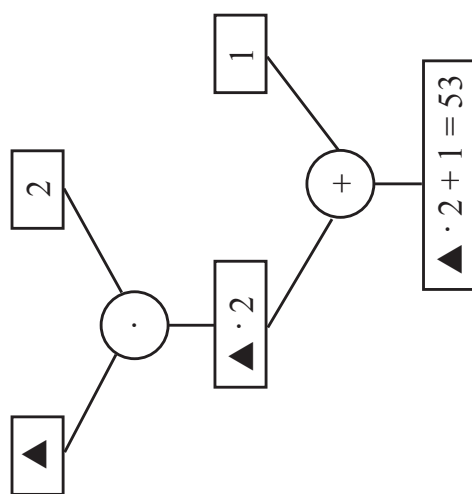
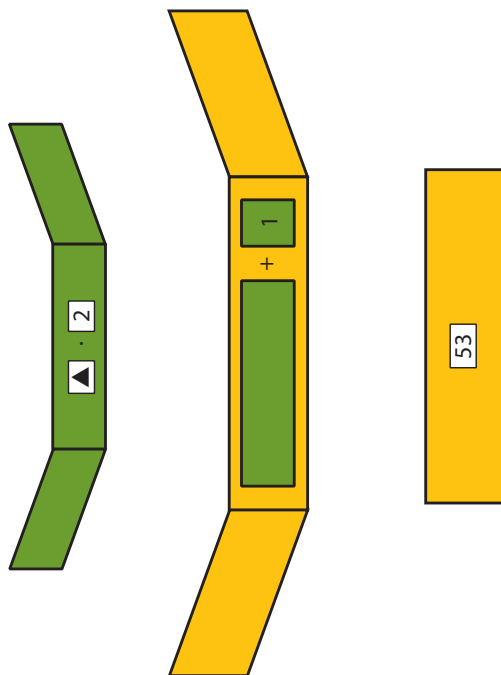
A szövegezése megegyezett az első feladat szövegzésével azzal, hogy a négyzetek száma helyett az egységnyi szakaszok (háromszög oldala) számát kellett meghatározni. A három kép a következő volt:



A tanulók a jelenséget meglepőnek találták. Zoran megfogalmazását idézzük:

Z: *Érdekes! A második feladat „gépe” is ugyanaz, mint az előző feladat „gépe”.*

A tanulók a délutáni foglalkozáson is a geometriai minták alapján általánosítottak. Választhattak a különböző nehézségű feladatok közül és ugyanabból a típusból több feladatot is megoldhattak. Szerkesztettek saját feladatokat is.



1. kép

4.2.6. Algebrai kifejezések értékének meghatározása

1. feladat:

Egészítsd ki a következő táblázatokat! (Töltsd ki a táblázatot! Töltsd ki az üres helyeket a táblázatban!):

A feladat szövegezését többféleképpen fogalmaztam meg, hogy a nyelvi nehézséggel küzdő tanulóknak minél nagyobb lehetőségük legyen a feladat megértéséhez. Ily módon a tanulók természetes módon (fordítás nélkül) tanulják a szerb szavakat és kifejezéseket.

c	$c+20$
6	
8	
	27
l	

a	b	$a \cdot b$
4	8	
10		30
g	5	
g	d	

Tanulói megoldások:

Filipet kivéve, mindkét kísérleti csoport tanulói nehézségek nélkül jól töltötték ki a táblázatot. Filip a következőt írta:

c	$c+20$
6	$6+20$
8	$8+20$
	27
l	

a	b	$a \cdot b$
4	8	$4 \cdot 8$
10		30
g	5	
g	d	

A tanuló nem helyettesítette be a változó értékeit; a változó mellé írta őket.

Terápia:

A változó modellje: Egy hajlítható ceruza (vagy zsinigdarab) c alakúra hajlítva.

A változó felveszi a hat értéket: A c alakú modellt, hatos alakúra hajlítjuk.

A tanuló örömmel önállóan folytatta a nyolcasra (illetve hetesre és l -re) való hajlítást, és a táblázatok második oszlopaiba írt kifejezéseket kijavította és pótolta a hiányzó kifejezéseket. A modell a többiek érdeklődését is felkeltette.

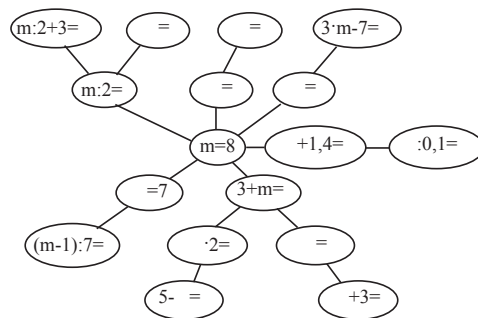
Tanulságok:

A következő tanítási ciklusban minden tanulónak volt zsinigmodellje. Hiszen a modell különböző alakjai, melyeket a tanulók saját kezűleg formálnak, nagyon jól szemléltetik, és érthetővé teszik a tanulók számára a változó értelmezési tartományának fogalmát.

A gépmodellnél, ahol megalkottuk a $b+2$ kifejezést a célból, hogy kihangsúlyozzuk, hogy egy számot jelölhetünk betűvel (például k -val); a második tanítási kísérletben a gépmodellbe betáplálendő rudacskát beletettük egy borítékba és megjelöltük egy betűvel (ráírni a betűt). A „gép” kiadja a rudacskát tartalmazó borítékot meg még két fehér kiskockát, melynek reprezentációja a $k+2$ kifejezés.

2. feladat:

Egészítsd ki az „összetett gép” címkéjét (kifejezéseit) és ha a gépbe „beütjük” a nyolcat, határozd meg, milyen értékeket számol ki a gép:



Célunk, hogy a tanulóknak lehetőséget adjunk, hogy kiindulva egy algebrai kifejezésből különböző összetettebb kifejezéseket alkossanak; s észrevegyék, hogy az összetettebb kifejezések számértékeinek meghatározásához felhasználható annak a kifejezésnek a számértéke, amelyből a kifejezés keletkezett. Ugyanúgy, annak a kifejezésnek (pl. $m:2$) a fasémája, amelyből egy másik kifejezést származtatunk (pl. $m:2+3$), az új kifejezés fasémájának része.

Tanulói megoldások:

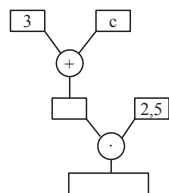
Az első tanítási ciklusban csak Slavica írt zárójellet a $(3+m) \cdot 2$ kifejezésben (és a feladatban megjelenő hasonló kifejezésekben). Minden tanuló a kifejezés számértékét úgy számolta ki - a fasémát úgy rajzolta le - mintha a zárójel létezne, illetve nem a leírt kifejezés számértékét határozta meg.

A terápiát a következő alfejezetben mutatom be:

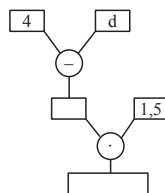
A zárójel szerepe az algebrai kifejezésben és a műveletek sorrendje

3. feladat:

Egészítsd ki a gép fáját! Fogalmazd meg és írd le, mit csinál a gép és mi a cselekvés végeredménye. Ugyanezt írd le matematikai nyelven is, egy kifejezéssel (gépcímke), a kartonlapocskára.



1. séma



2. séma

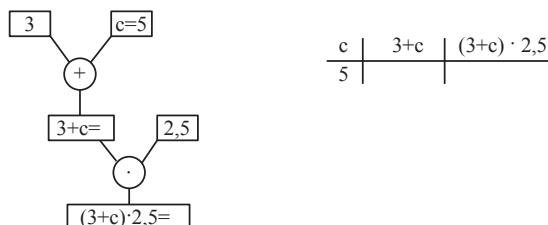
A tanulók ülésrend szerint párokban dolgoztak. Minden párnál az egyik tanuló piros, a másik fehér papírcsíkon megkapta a feladat szövegezését. A piros papíron az első, a fehérén a második séma volt látható. A feladat megoldása abból állt, hogy a sémát kellett „olvasni” (értelmezni) és kiegészíteni. Le kellett írni a válaszokat a feltett kérdésre, s a végén megkapott algebrai kifejezést egy azonos színű kartonlapocskára kellett lejegyezni. Ezután a párokban levő tanulók kicserélték egymással a kartonlapokat és a lapon található kifejezés elemzése után, a kifejezés mellé lerajzolták a sémáját. Végül összehasonlították az azonos színű lapokon és a papírcsíkokon levő sémákat és kifejezéseket.

A pontos fasémák meghatározása mellett, a párok jó teljesítményének számított az is, hogy a tanulók megbeszélték egymással (meggyőzték egymást) és kijavították az esetleges hibákat. Ezzel a tanulók fejleszthették az érvelési és kommunikációs készségüket is.

A legnagyobb nehézséget a feladatban a zárójelek használata, illetve elhagyása okozta. Reményeink szerint, az ily módon felvetett probléma ösztönzi a tanulókat a sémák és kifejezések elemzésére, lehetőséget ad a tanulóknak a mások és a saját munkájának értékelésére és önhelyesbítésre. A kérdésekre a tanulók jól válaszoltak, de csak Slavica használt zárójelet a $(3+c) \cdot 2,5$ kifejezés leírásánál (a párja is pontos sémát rajzolt). A többiek a következő kifejezéseket írták le: $3+c \cdot 2,5$; $4-d \cdot 1,5$. Ezen kívül, Filip is ugyanolyan sémát rajzolt, mint amilyen Miláné, a párjáié volt. Filip a $4-d \cdot 1,5$ kifejezést, úgy értelmezte, mintha a $(4-d) \cdot 1,5$ kifejezés volna és ezért ők csak Milan sémájával foglalkoztak. A tanulók tanakodtak, vitáztak egymással. Hivatkoztak a műveletek sorrendjére, újból rajzolták a sémákat, és végül kijavították a hibákat. Milan jött rá, hogy hiányoznak a zárójelek, ezért amikor kértem, hogy ellenőrizze Filip sémáját, megtalálta itt is a hibát és magyarázta Filipnek, miről van szó.

4. feladat:

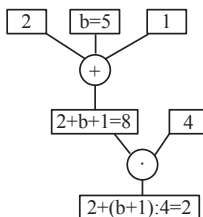
Ha a $(3+c) \cdot 2,5$ című gépbe, „beütjük” az ötöst, melyik számot dobja ki a gép? (Határozd meg a $(3+c) \cdot 2,5$ kifejezések értékét, ha c értéke öt.) A feladat megoldásában segíthet, ha kiegészítéd a fasémát és a táblázatot.



5. feladat:

Határozd meg a $2+(b+1) \cdot 4$ kifejezések értékét, ha b értéke öt.

Róberten kívül - minden tanuló a második csoportból - behelyettesítette az ötöst és megkapta, hogy a kifejezés értéke 3,5. Róbert nem vette figyelembe se a zárójelet, se a műveletek sorrendjét. A megoldása a következő volt: $2+(5+1) \cdot 4 = 2+6 \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 2$



Az alábbi órarészlettel illusztráljuk a magyar nyelvű szakkifejezések tanítását.

Magyar nyelvű szakkifejezések:

Kitölteni a táblázatot!

G: Popuniti tabelu. (Mutatok a táblázatra az első feladatban.)

Kifejezés

G: Izraz. (Mutatok a $(c + 1) \cdot 2,5$ -re.)

A kifejezés számértéke 25!

G: Brojna vrednost izraza je 25!

A mondatokat kimondom szerbül, felírom a táblára és megkérdem, hogy hogyan mondanánk ugyanezt magyarul.

Tanulói válaszok magyarul:

Első mondat (mondatrész)

M: *Beírni a tabellába.*

Z: *Táblázat!*

F: *Kipótolni a táblázatot.* (A kipótolni szó fordítása: *dopuniti*, ami csak egy hangban különbözik a *popuniti*, *kitölteni*, *szótól*.)

Még egyszer kimondom a szerb mondatot.

D: *Kitölteni a táblázatot!* (A mondatot mindenki leírja a füzetébe; én a táblára.)

Második mondat

T: *Nyitott mondat.* (Több válasz nincs.)

Mivel a kifejezések a két nyelvben, egymás tükörfordításai, ösztönzőm a tanulókat, hogy használják a szerb kifejezést; hogy fordítsanak:

G: *Hogyan mondjuk azt, hogy „kifejezni”? „Kifejezés”?* (Szerbül kérdezem.)

Elsőnek Nikola fordít:

N: *Kifejezni. Kifejezés!* (A második mondatot leírjuk a füzetbe és a táblára.)

Harmadik mondat

G: *Szám. Érték. Számérték.* (Mondom szerbül.)

Broj. Vrednost. Brojna vrednost.

(A *broj*, *szám*, szóra névszóragozást alkalmazunk. Ez a magyarban nem létezik, ezért Milan toldalékolást alkalmazott a *szám* szóra.) Milan a következőt mondta:

M: *Szamos érték.*

G: *Majdnem jó. Javítsunk egy kicsit rajta. Melyik összetett szót kapjuk a szám és a érték szavakból?* (Mondom magyarul.)

Z: *Számérték.*

G: *Mi a különbség a szamos érték és a számérték jelentése között? Mit jelent, az hogy: szamos érték.*

D: *Azt hogy sok.*

A kifejezés számértéke, bekerül a füzetekbe és felírjuk a táblára is.

Tanulságok:

A második kísérleti csoport tanulói a második feladat előtt, a harmadik, a negyedik, és az ötödik feladattal foglalkoztak. Valószínűleg ennek köszönhetően hat tanuló írta le a zárójeleket a megfelelő helyre a második feladatban.

Robert, aki nem írta le a zárójeleket, a délutáni foglalkozáson a negyedik feladathoz hasonló (pl. a $5 \cdot b + 4$; $(3 + b) \cdot 2,5$ kifejezéseket tartalmazó) feladatokat oldott meg. Újból visszatértünk az algebrai kifejezések lépcsős modelljéhez, átismételtük a műveletek sorrendjét, rajzoltuk a fasémát és a táblázatot. A negyedik és az ötödik feladatot önállóan dolgozta ki. A sémát használta a kifejezés számértékének meghatározásánál. Táblázatot nem használt.

A többiek a csoportból a délutáni foglalkozáson párokban dolgozva egymásnak feladtak a másodikhoz hasonló feladatokat és ellenőrizték is egymás eredményeit.

4.2.7. Algebrai kifejezések (értelmezési tartományuk a Q^+) reprezentálása szakaszokkal. Algebrai kifejezések a számegyenesen.

Célunk, hogy a tanulók reprezentálják szakaszokkal a racionális számokat úgy, hogy egy feladatban a megfelelő szakaszok hosszak mérőszámainak viszonya azonos legyen a számok viszonyával.

Célunk szintén, hogy a tanulók egy feladatban megjelenő változókat (algebrai kifejezé-

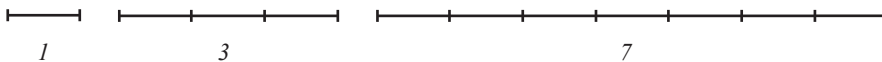
seket) reprezentálják szakaszokkal. Ha a feladatból tudjuk, hogy a változók (illetve algebrai kifejezések) hogyan viszonyulnak egymáshoz, akkor a változók (illetve algebrai kifejezések) reprezentációit úgy rajzoljuk, hogy a megfelelő reprezentációk hosszai is ugyanúgy viszonyuljanak egymáshoz.

A tanulók a feladatok megoldása közben átismétlik a hosszúság mérésének fogalmát, a mérőszám és a mértékegység fogalmát és a megfelelő szakkifejezéseket mindkét nyelven. Szintén átismétlik (elsajátítják) a szakaszok „összeadásának” és „kivonásának” fogalmát.

Újból Aikoról, a japán kislánnyól beszéltünk.

1. feladat:

Aiko Tajna levélből tanult meg néhány számot arab számjegyekkel leírni. A levélben a következő állt:



Ha az egyest megjelenítő szakasz a hosszúság mértékegysége, határozd meg a másik két szakasz hosszának mérőszámát!

Szakaszok segítségével jelenítsd meg (mutasd meg) Aikonak a következő számokat: 1; 2; 0,5; 3,5; 5; 0.25.

A szerb nyelvben a reprezentálni igét nem használjuk olyan értelemben, mint a magyarban (szerbül a jelentése: képviselni). Helyette, a köznyelvben is gyakran használt (a tanulók által is elsajátított) megjeleníteni szót mondjuk.

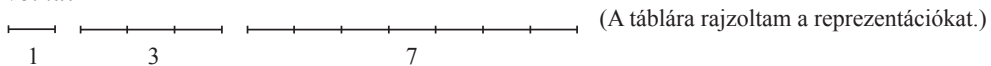
Tanulói megoldások:

A tanulók jól meghatározták a mérőszámokat. Öt tanuló az egyes reprezentációjaként a feladatban már megjelenő reprezentációt használta. Ketten új, más hosszúságú szakasszal, reprezentálták az egyest. Danica megkérdezte:

D: *Mekkora szakaszt rajzoljak az egyesnek?*

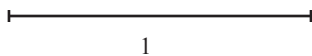
Terápia:

G: *Megértette volna-e Aiko mit jelent az 1, a 3 és a 7 ha Tajna a következőt rajzolta volna?*



G: *Ha most az egyest megjelenítő szakasz volna a hosszúság mértékegysége, mennyi a másik két szakasz hosszának mérőszáma? (Mutatok a táblára rajzolt szakaszokra.)*

G: *Rajzolhatom-e a következőképpen az egyest?*

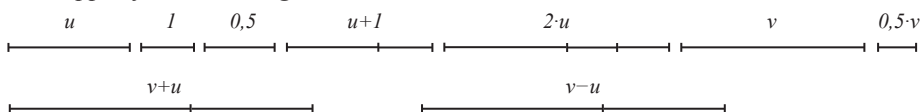


G: *Te hogyan rajzolod?*

Tanulság:
A második kísérleti csoport első feladatát kiegészítettük a terápiában megfogalmazott három kérdéssel. (A kérdések a számok szakaszokkal való reprezentációja után következtek.) Célunk, hogy minden tanuló számára érthető legyen, hogy az egyest reprezentáló szakasz hossza szabadon választható.

2. feladat:

Boba a: u ; 1 ; $0,5$; $u+1$; $2\cdot u$; v ; $0,5\cdot v$; $v+u$; $v-u$ számokat szakaszok segítségével a következőképpen jelenítette meg:



Mit gondolsz Boba munkájáról? Te hogyan tennéd ugyanezt?

Boba mely számokat mutatta meg szakaszok segítségével?

Mutasd meg szakaszok segítségével a $3\cdot u+v$ és az $u-0,5\cdot v$ számot is!

Legyen az egyest megjelenítő szakasz a hosszúság mértékegysége. Határozd meg az általad lerajzolt szakaszok hosszának mérőszámát!

A feladat összeállításánál felhasználtuk az algebrai kifejezések szakaszokkal való reprezentációjának „összeadásának” és „kivonásának” helytelen értelmezéseit is, melyeket tanulóink alkalmaztak az előteszt hatodik és hetedik feladatának megoldásaiban.

Tanulói megoldások:

A tanulókat a játéksituációk (japán kislánynak segíteni, értékelni Boba megoldását) és a tény hogy véleményezhetnek, nagyon jól motiválták a feladattal való foglalkozásra. Hevesen magyarázták, hogy a második feladatban megadott reprezentálással nem értenek egyet. (Az óra végén megkérdezték, hogy ez a Boba mikor járt iskolába és megtanult-e végül a szakaszokkal dolgozni.)

Azoknak a tanulóknak, akiknek az előtesztben és itt is, nehézséget jelentett a „kivonás” társaik segítettek. Heten önállóan vagy társaikkal konzultálva, a következő számok reprezentációit módosították: $0,5$; $u+1$; $2\cdot u$; $0,5\cdot v$; $v-u$ és meghatározták a $3\cdot u+v$ és az $u-0,5\cdot v$ reprezentációit. Egyedül Nikola módosította az 1 és a v reprezentációját (az egyes, illetve a v , reprezentációját kétszer olyan hosszúra rajzolta, mint a $0,5$, illetve a $0,5\cdot v$, reprezentációját; megrajzolta a $3\cdot u+v$ és az $u-0,5\cdot v$ reprezentációit is). Ezzel a megoldással Oliver nem értett egyet:

Q: Nem jó. Boba az egyet rajzolta meg először!

G: Találunk-e hibát Nikola szakaszai és jelölései között?

A tanulók megállapodtak abban, hogy N megoldása helyes.

Algebrai kifejezések a számegyenesen

3. feladat:

Célunk, hogy a tanulók meg tudják határozni a számok (ill. algebrai kifejezések) helyét a számegyenesen, hiszen az előtesztben, a számegyenesre vonatkozó (tizenkettedik) feladat, a tanulóknak nehézséget okozott. A hasonlóság a számok számegyenesen való és a szakaszokkal való reprezentálása megnehezíthette a feladatot. Reményeink szerint a számok számegyenesen való reprezentálása és a szakaszokkal való reprezentálása közötti hasonlóságok (a számegyenesen egy pozitív szám reprezentációjának távolsága a nullától egyenlő a számmal) és különbségek (a számot egy ponttal reprezentáljunk; a számot szakasszal reprezentáljuk) tudatosítása könnyebbé tenné az elkülönítését egymástól és a számegyenessel való munkát.

Jelenítsd meg szakaszok segítségével a következő számokat: $\underline{c}+1$, $\underline{2}$, $\underline{2\cdot c}$, $\underline{2\cdot c-1}$, ha az egyest és a \underline{c} -t a következőképpen jelenítettük meg:



Az egyest és a \underline{c} -t megjelöltük a számegyenesen is.

Mely számok helyét jelöltük még meg a számegyenesen?



Hasonlíts össze minden a számegyenesen megjelölt szám nullától való távolságát, annak a szakasz hosszának mérőszámával, melynek felhasználásával jelenítettük meg a számot.

Határozd meg a $c+1$, és a $2-c-1$ helyét a számegyenesen!

Meg tudod-e jeleníteni szakaszokkal a -1 és a $-c$ számot?

Meg tudod-e határozni a -1 és a $-c$ helyét a számegyenesen?

Célunk hogy a tanulóiban tudatosuljon, hogy a számegyenesen lehetőségünk van a negatív számok reprezentálására is.

A tanulók a számegyenesen „lépkedve” jobbra és balra határozták meg a kifejezések helyét a számegyenesen.

4. feladat:

Jelöld be a következő számokat a számegyenesen: $-d$, $3 \cdot d$, $-3 \cdot d$.



A feladattal lehetőséget szeretnénk adni a tanulóknak, hogy megtapasztalják és tudatosuljon bennük, hogy egy változó negatív számot is reprezentálhat és a változó negatív előjele a szám ellentétjét jelenti (ebben az esetben pozitív számot).

Határozd meg a d ellentétjét!

Határozd meg a következő mondatok közül melyek a hamisak és melyek az igazak:

A d egy pozitív szám.

A $-d$ egy pozitív szám.

A d egy negatív szám.

A $-d$ egy negatív szám.

A d kisebb, mint nulla.

A $-d$ kisebb, mint nulla.

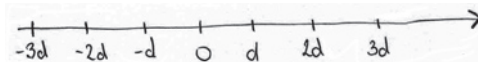
A d nagyobb, mint nulla.

A $-d$ nagyobb, mint nulla.

(Kihangsúlyozzuk: a magyar kifejezés nem a szerb tükörfordítása. Szerbül a következőt mondjuk: az ellentétes száma.)

Tanulói megoldások:

Ez a feladat nagy érdeklődést keltett. Két tanuló leírta, hogy a megoldás hibás és rajzolt egy másik számegyenest. (Azt gondolták, hogy értékelni kell a feladatot.) Danica megoldását mutatjuk be:



Közöltem a tanulókkal, hogy a d jó helyen van, a többi szám helyét kell meghatározni a számegyenesen. A d szakasz középpontját jelöltem -1 -el a számegyenesen és kértem a tanulókat, hogy jelöljék meg a $-(-5)$ és az ellentétjének helyét a számegyenesen és határozzák meg mely számot jelöltem d -vel. Ezek után a tanulók önállóan korrigálták helytelen megoldásaikat.

Tanulság:

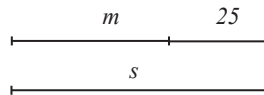
A második csoportnak a negyedik feladatnál felhívtam a figyelmét, hogy ez nem egy megoldás, nem kell értékelni. Jovan mégis Danicával azonos módon oldotta meg a feladatot. Meggyőződése (d nem lehet negatív szám) szerint cselekedett.

5. feladat:

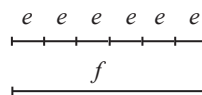
Az algebrai kifejezések szakaszokkal való reprezentációjának felhasználása segítségével szolgálhat, az egyenletekkel megoldható szöveges feladatok megoldásánál. Véleményünk szerint a változók egymáshoz való viszonyát átláthatóbbá tehetjük és ezáltal az egyenletek felállítása könnyebbé válik, ha készítünk hasonló vázlatokat, mint amilyeneket bemutatunk az ötödik feladatban.

Mi mivel egyenlő? Írd le matematikai jelekkel!

A leírtak alapján, írd le szavakkal is, hogyan viszonyul egymáshoz az m és az s (az f és az e)!



1. ábra



2. ábra

Tanulói megoldások:

Az első ábrával kapcsolatos válaszok:

Hét tanuló a következő egyenlőséget írta: $m+25=s$. A változók viszonyát is megfogalmazták:

D, F, M és N: *Az s 25-tel nagyobb, mint az m . (s je za 25 veći od m .)*

S: *s je sa 25 veće nego m .* A mondat jelentése azonos az előző mondat jelentésével, de ellentétes a szerb nyelvhelyességi szabályokkal. A *-val, -vel* ragot fordította le szerb nyelvre. A *-val, -vel* szerb megfelelői az *od* és *sa* előjáró szavak, de különböző esetekben használjuk őket. A *sa* előjáró szó jelentése: *s-sel együtt*. Slavica mondatának tükörfordítása a következő: *az s , a 25-tel együtt, nagyobb mint az m .*

Z: *s je veće kao m za 25.* Zoran mondata teljesen értelmetlen, holott csak a *kao* előjáró szó helyett, az *od* (a *-tól, -től* megfelelője), vagy a *nego* szót (jelentése: *hanem*) kellett volna használni, s a szavak sorrendjét kicserélni, hogy tökéletes választ kapjunk. A tanuló a *kao* szót azért használja, mert ez a szó a magyar, *mint* fordítása.

Csak Oliver fogalmazta meg eljárásként a mondatot:

O: *Ha m -hez hozzáadunk 25-öt megkapjuk az s -t.*

G: *Milyen akkor az s , m -hez viszonyítva, ha úgy kaptuk meg, hogy m -hez hozzáadtunk 25-öt?*

Q: *25-tel nagyobb.*

Egyedül Tajna írta le a $m=s-25$ egyenlőséget.

T: *Az m 25-tel kisebb mint az s . (m je za 25 manji od s .)*

A második ábrával kapcsolatosan a tanulók a következőt írták:

Minden tanuló a következőt írta: $6 \cdot e = f$. Mondatban a tanulók - Zoran kivételével - így fogalmaztak: *Az f hatszor annyi (tükörfordításban: nagyobb) mint az e .*

Zoran magyar mondata: *az f az e hatszorosa*, szószerinti fordítását (*f je za e šestostruko.*) módosította (*f je šestostruko e .*). Ez a mondat ellentétes a szerb nyelvhelyességi szabályokkal, csak azok számára érthető, akik képesek lefordítani magyarra és magyar nyelven megérteni.

Nikola a következő mondatot is leírta (A mondat szószerinti fordítását adjuk.): $e=f:6$. *Az e hatszor kisebb, mint az f (e je 6 puta manji od f).* A kérdésemre, hogy amit leírt hogyan lehet ábrázolni, a következőt rajzolta:



Megkérdeztem, hogyan lehet még Nikola rajza alapján megfogalmazni az f és az e viszonyát. Tajna és Slavica válaszolt (A mondatok szószerinti fordítását adjuk.):

T: e , az f , egy hatoda (e je jedna šestina od f .) Leírta a következőt: $e = \frac{1}{6} \cdot f$.

Tajna tökéletesen fogalmazta meg a mondatot, amit Slavicaról nem mondhatunk el. Ő Tajna mondatához, hozzáadta a *deo* szót (jelentése *rész*), mely a következő magyar mondatból származik: az e , az f -nek a hatod része.

S: e je jedna šestina deo od f .

Felhívtam a tanulok figyelmét, hogy magyarul helyesen mondhatjuk azt, hogy:

Az f -nek az egy hatod része az e és azt is hogy: az e egy hatoda, az f -nek.

Minden tanuló, aki bármilyen választ adott, dicséretben részesült. A jó megoldásokat felírtuk a táblára, a többit helyesbítettük.

6. feladat:

Számok közötti viszonyokat, foglalmaztuk meg a következő mondatokban. Szemléltess ezeket a viszonyokat szakaszok segítségével!

Két számról, r -ről és p -ről a következőt tudjuk: r százszal nagyobb, mint p .

A két számról, t -ről és c -ről, a következőt tudjuk: t a c szám ötszöröse (szerbül: ötször nagyobb).

A tanulók jól szemléltették a számok viszonyát.

A délutáni foglalkozáson a tanulók párokban dolgozva egymásnak adtak fel feladatokat, amelyben a kifejezések helyét kellett meghatározni a számegyenesen. A szakaszos reprezentációk alapján kellett leírni a változók viszonyát és fordítva lerajzolni a megfelelő szakaszos reprezentációkat. Szóban is meg kellett fogalmazni a változók viszonyát.

Tanulság:

A számok viszonyának szóban való megfogalmazása még mindig nehézséget okozott a tanulóknak. Ezért az elkövetkezendő órákat azzal kezdtük, hogy öt perces, csoportok közötti, versenyt szerveztünk. Gyorsan kellett többféleképpen megfogalmazni (lehetőleg két nyelven), egyenlőség felhasználásával leírni, és szakaszok segítségével ábrázolni a konkrét számok közötti viszonyokat.

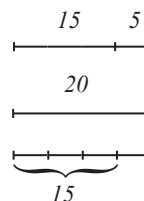
Például egy feladat a következő volt:

Hogyan viszonyul a 15 és a 20?

Kettő a lehetséges válaszok közül a következő:

$15+5=20$. A húsz, öttenal nagyobb, mint a tizenöt.

$\frac{3}{4} \cdot 20=15$. A tizenöt, a húsz háromnegyede.



Minden tanuló - három „játzsma” után - tökéletesen dolgozta ki a hasonló feladatokat.

A második csoportnál ilyenfajta feladatokkal foglalkoztunk az ötödik feladat előtt is, még két alkalommal, még mindenki hibátlanul meg tudta oldani a feladatokat.

4.2.8. Konkrét szituációk kódolása

Célunk, hogy a tanulók egy adott modellben alkossanak olyan kifejezéseket (számkifejezések és a megfelelő algebrai kifejezések) melyeknek, meghatározott jelentései vannak. Így reményeink szerint ötleteket merítenek a későbbi feladatok megoldásához, ahol néhány egyszerűbb algebrai kifejezésnek különböző jelentést fognak adni.

Reméljük, hogy a tanulóknak, az első két feladat megoldásában, segítségül szolgálnak a változók (manipulálható) konkrét reprezentációi. Szintén, szeretnénk a tanulókat ösztönözni, hogy szakaszokkal reprezentálják az algebrai kifejezéseket, annak reményében, hogy az egyenlettel (egyenletrendszerrel) megoldható szöveges feladatoknál ezek a reprezentációk megkönnyíthetik a megfelelő egyenlet (egyenletek) felállítását. Tapasztalataim szerint kihangsúlyoznám, hogy a szakaszos reprezentációk hatékony eszköznek bizonyultak a szöveges feladatok megoldásánál.

Az azonos struktúrájú feladatoknál a reprezentáláshoz, azonos szakaszokat használhatunk. A tanulókat a szakaszok segíthették ahhoz, hogy észrevegyék a feladatok azonos struktúráját.

Algebrai kifejezések tárgyi reprezentációi:

1. feladat:

A tanulóknak egy cérnadarab hosszának mérőszámát kell meghatározni. Azért szól a feladat cérnadarabokról, mert ezek ábrázolása legjobban hasonlít a kifejezések szakaszokkal való reprezentálására.

A tanulók e feladat megoldása közben átismételték, hogy a fizikai mennyiségeket különböző mértékegységekkel lehet mérni és ettől függően más-más mérőszámokat kapunk. Megfelelő feltételeket igyekeztünk teremteni a tanulóknak, ahhoz hogy felfedezzék, hogy egy változó számértékét nem tudjuk mindig meghatározni, de tudjuk kezelni. Különösen fontosnak tartottuk ennek megértését, hiszen az előtesztben a hetedik feladat megoldása közben a tanulók megmérték vonalzóval a változókat reprezentáló szakaszokat (a mértékegység egy milliméter), és az ily módon meghatározott mérőszámot tekintették a változó értékének. A feladat a következő:

Tudjuk, hogy a piros cérnadarab hosszának mérőszáma h , a fehér cérnadarab hosszának mérőszáma u . Vágj le a fehér cérnadarabból egy darabot, mely háromszor olyan hosszú, mint a piros cérnadarab.

Készíts rajzot (ábrát)!

Mennyi a fehér cérnából megmaradt darab hosszának mérőszáma?

(Minden tanulópár egy piros és fehér cérnadarabot kapott. A fehér cérnadarab hosszabb volt, mint a piros háromszorosa.)

A tanulók párokban dolgoztak, hogy a cérnadarabokat ki tudják feszíteni, megmérni és levágni az $u-3\cdot h$ kifejezés reprezentációját. Megrajzolták a megfelelő szakaszokat és meghatározták a keresett kifejezés szakasszal való reprezentációját. A cselekvéssorozat alapján minden tanuló pontosan leírta az $u-3\cdot h$ kifejezést.

A feladat megoldása után ahhoz, hogy lehetőséget adjunk a tanulóknak, hogy felfedezzék (vagy megerősítsék tudásukat) hogy a h és az u pozitív racionális számok (a tanulók még nem ismerik a valós számokat), a következő kérdéseket tettük fel:

Megtudtuk, hogy a fekete cérnadarab hosszának mérőszáma egy , határozd meg melyik szám a h , az u , a $3\cdot h$ és az $u-3\cdot h$.

(A tanulók kaptak egy fekete cérnadarabot is. Ezt úgy választottuk, hogy a h , 2,25 legyen, és az u , 7,5; ha a fekete cérnadarab hossza a mértékegység.)

Kis nehézségeket leküzdve, a tanulók meghatározták a piros cérnadarab hosszát (Hárman kétszer kettéhajtották a fekete cérnát és a cérnadarab egynegyedével mérték. A többiek a piros cérna egy kilencedével mérték a fekete cérnadarabot.). Az u meghatározása könnyebben ment. Az $u-3\cdot h$ értékét kiszámolták. Következett az újabb kérdés.

Ha a fekete cérnadarab hosszának mérőszáma kettő volna, határozd meg melyik szám volna akkor a h , az u , a $3\cdot h$ és az $u-3\cdot h$?

E feladatrész megoldása után, következett az utolsó kérdés:

Meg tudtuk volna mondani, hogy melyik szám a \underline{h} , mielőtt megkaptuk a fekete cérnadarabot?

A tanulók válasza egyhangúan negatív volt. Magyarázták, hogy először nem tudtuk a mértékegységet, így a változók értékét sem lehetett meghatározni.

2. feladat:

A második és a harmadik feladat első változatában konkrét számok szerepelnek, így a tanulók a feladatban a leírt viszonyokra tudnak összpontosítani. Amikor a második változatban megjelenik a változó (kezelése a tanulók számára újdonság) az algebrai kifejezések megalkotásánál, a tanulóknak az egyszer már „megtett utat” kell „végigjárni”. Ez lehetőséget ad arra, hogy a tanulók segítségül felidézzék a számkifejezésekkel való munkát, ha az algebrai kifejezésekkel kapcsolatosan bizonytalanok.

2. feladat változata számértékkel:

$\underline{12}$ mentolos cukorka van egy zacskóban. Tajnanak adtunk egy zacskó mentolos cukorkát. Zorannak háromszor annyi zacskóval adtunk, mint Tajnanak. Milannak pedig öt cukorkával adtunk többet, mint Tajnanak ugyanabból a fajtából.

Hány cukorkát kapott Tajna, hányat Zorán és hányat Milán? (Készíts rajzot!)

Hány cukorkát kaptak összesen mindhárman?

A feladat változata változóval:

\underline{d} gyümölcsízű cukorka van egy zacskóban. Tajnanak adtunk egy zacskó cukorkát. Zorannak háromszor annyi zacskóval adtunk, mint Tajnanak. Milannak pedig, öt cukorkával adtunk többet, mint Tajnanak.

Hány cukorkát kapott Tajna, hányat Zoran és hányat Milan? (Készíts rajzot!)

Hány cukorkát kaptak mindhárman összesen?

A három tanulónak valóban adtunk cukorkákat (először mentolosat, utána: gyümölcsízűt). A tanulóknak nem okozott gondot a feladat első változatának megoldása. A cukorkákat a zacskóban is lerajzolták.

Tanulói megoldások (a feladat második változatának megoldásai):

A feladat második változatánál, Danica társától az ábrával kapcsolatosan megkérdezte:

D: *Hogyan rajzoljam a cukorkákat a zacskóba, mikor nem tudom hány van benne?*

S: *Én ráírtam, hogy \underline{d} .*

Danicának problémát okozott, hogy nem tudta pontosan hány cukorkát rajzoljon. Hiszen, ha például, ötöt rajzolt volna, ez azt jelentette volna, hogy \underline{d} értéke öt. Mivel Nikola szakaszokkal ábrázolta a cukorkák számát megkértem, hogy rajzolja fel az ábráját a táblára. (Danica végül ezt az ábrát választotta és a füzetébe is rajzolta.)

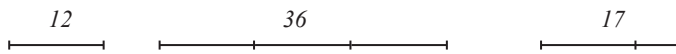
Filip megoldása nem volt helyes, ezért ezt mutatjuk be:

A megoldásban Zoran cukorkáinak száma: $3 \cdot T$ (háromszor annyi, mint Tajnájé). A tanuló az algebrát gyorsírásként használja és a feladat szövegét (háromszor annyit, mint Tajnanak) lejegyzí algebrai kifejezéssel. Ebből adódóan, az összes cukorkák számát a következőképpen fejezte ki: $\underline{d+3 \cdot T+d+5}$. (Minden a tanulók által meghatározott kifejezést - így ezt is - felírtuk a táblára.)

Terápia:

G: *Ha ezekben a zacskókban is 12 cukorka volna, akkor a \underline{d} tizenkettő volna. Felhasználva Filip megoldását, számoljuk ki hány cukorkát adtunk összesen a három tanulónak.*

Mikor Nikola felírta a táblára a $\underline{29+3 \cdot T}$ kifejezést, Filip összezavarodott. Visszatértünk a feladat első változatához (12 cukorka van egy zacskóba). Filip kérésemre, lerajzolta a számkifejezések reprezentációit:



G: Írd le a 36-ot (illetve a 17-et) azon számok segítségével, melyek felhasználásával a feladat megoldásában kiszámoltuk a 36-ot (illetve a 17-et).

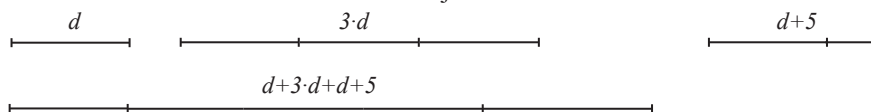
Szerettem volna ráirányítani a tanuló figyelmét a kifejezés struktúrájára. A tanuló probléma nélkül a következővel pótolta a vázlatot: $36=3 \cdot 12$ és $17=12+5$.

G: Ha 7 cukorka (illetve 10 cukorka) volna egy zacskóba, jelenítsd meg szakaszokkal a gyerekek cukorkáinak számát.

Filip ezt is jól rajzolta le és a $3 \cdot 7$ és $7+5$ (illetve $3 \cdot 10$ és $10+5$) kifejezésekkel jelölte a reprezentációkat. Következett az utolsó kérdés:

G: És ha d cukorka volna egy zacskóban? Mi történne akkor?

A tanuló általánosított és a következőt rajzolta:



Úgy tűnik, hogy a tanulóknak segítségül szolgált a számok szakaszokkal való reprezentációja (Danica, Filip).

Emlékeztetni szerettem volna a tanulókat arra, hogy a d a feladatban egy természetes szám, ezért ösztönöztem őket, hogy számlálják meg az egy zacskóban levő cukorkákat. Behelyettesítve a 16-ot (egy zacskóban levő cukorkák száma) a $3 \cdot d$, $d+5$ és a $d+3 \cdot d+d+5$ kifejezésekbe (a tanulók még nem vonták össze a kifejezéseket), meghatározták azt is, hogy a gyerekek hány cukorkát kaptak egyenként, és hányat összesen. Öt tanuló, zárójeleket felhasználva, írta le a $d+(3 \cdot d)+(d+5)$ kifejezést. Kérdésemre, hogy el lehet-e hagyni a zárójeleket. A tanulók pozitívan válaszoltak. Hárman magyarázatot is fűztek a válaszhoz:

D: Ez jobb. (Mutatott a zárójeleket tartalmazó kifejezésre.)

Z: Látszik, hogy ki mennyi cukorkát kapott.

M: Én így szeretem írni.

Úgy tűnik, a tanulóknak a zárójelek segítenek, hogy a konkrét szituációban a kifejezés jelentését könnyebben értelmezzék.

Azonos struktúrájú, de különböző kontextusokban elhelyezett feladatok (Algebrai kifejezések képi reprezentációi):

Célunk hogy a tanulóknak olyan ábrát készítsenek, mely a feladat lényegét jeleníti meg. Ezen kívül szeretnénk rámutatni a szakaszokkal való reprezentálás előnyeire.

3. feladat:

A feladat változata számértékkel (A megtett út meghatározása.):

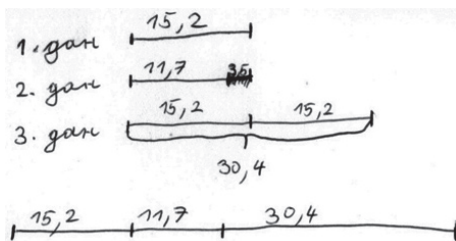
Egy kirándulás első napján a hetedik osztály tanulói kerékpárral megtettek 15,2 kilométert. A második napon, 3,5 kilométerrel kevesebbet tettek meg kerékpárral, mint az első napon. A harmadik napon pedig, kétszer olyan hosszú távot tettek meg kerékpárral, mint az első napon.

Hány kilométert tettek meg kerékpárral a tanulók összesen a három nap alatt?

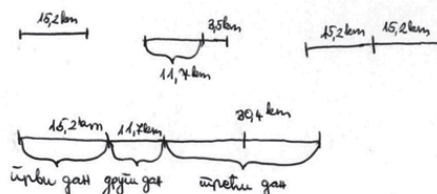
Készíts ábrát! (Jelenítsd meg a feladat lényegét.)

Minden tanuló helyesen oldotta meg a feladatot és leírta a szöveges választ.

Három tanuló szakaszos reprezentációkat ábrázolt, melyek bemutatták az egyes napokon megtett utak viszonyát (Ketten, a megtett utak hosszát írták a szakaszok fölé. Nikola csak a számértékeket jelölte meg.). Nikola és Zoran ábrája következik:

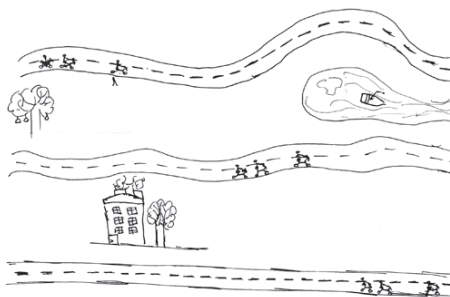


Nikola rajza



Zorán rajza

A többiek más jellegű rajzot készítettek. A rajzok közül kettőt mutatunk be:



Danica rajza



Oliver rajza

Ezen rajzok alapján, az egyes napokon megtett utak viszonya nem látható. A tanulók a feladattal kapcsolatosan elképzelték egy szituációt, s ezt illusztrálták. Sok részlettel egészítették ki a feladat szövegezését. A tanulók megmutatták egymásnak ábráikat. Mivel célunk, hogy a tanulók vonatkoztassanak el a részletektől, következett a terápia:

A feladat megoldásának szempontjából, lényeges részek meghatározása a feladat szövegezésében és az ezt kiemelő rajzok:

G: *Húzzuk alá először, a feladat kérdésében, és ezután a feladat egész szövegében azokat a szavakat, melyek fontosak a feladat megoldásához (a kérdés megválaszolásához). Mit kell meghatározni?*

Összeolvassa az eredeti kérdés aláhúzott szavait a következő új kérdést kapjuk:

Hány kilométert tettek meg összesen a három nap alatt?

Választ keresve erre a kérdésre a tanulók a szövegben aláhúzták a fontos szavakat. Így megkaptuk a következő mondatokat:

Első napon megtettek 15,2 kilométert. A második napon, 3,5 kilométerrel kevesebbet tettek meg, mint az első napon. A harmadik napon, kétszer olyan hosszú távot tettek meg, mint az első napon.

G: *Meg kell határozniunk egy számot, a három nap alatt megtett kilométerek számát. Miért húztuk alá az egyes napokon megtett kilométerek számát?*

N: *Ezeket összeadjuk és kész a feladat!*

G: *Mit tudunk az egyes napokon megtett kilométerek számáról? Fejezd ki ezeket a számokat, azon számok segítségével, melyek megvannak a feladat szövegezésében.*





F: *Az első napon: 15,2.*

T: *A kilométerek száma a második napon 3,5-tel kisebb, mint a 15,2.*

M: *A harmadik napon a 15,2 kétszerese.*

G: Melyik ábrák emelik ki és jelenítik meg a feladat szövegezésének azon részeit, melyek segítségével meghatározzuk a választ a feladat kérdésére?

A tanulók egyetértettek abban, hogy a reprezentációk szakaszokkal ilyen szempontból jók. Felrajzoltuk a következő táblázatot a táblára, és kitöltöttük benne az első sort:

	<i>Első (nap/gyerek/ beszélgetés/ csoport/ ceruza)</i>	<i>Második (nap/gyerek/ beszélgetés/ csoport/ ceruza)</i>	<i>Harmadik (nap/gyerek/ beszélgetés/ csoport/ ceruza)</i>	<i>Összesen</i>
<i>(kilométerek/ kilogrammok/ percek/literek/ centiméterek órák) száma</i>	<i>15,2</i> 	<i>15,2-3,5</i> 	<i>2·15,2</i> 	<i>15,2+(15,2-3,5)+(2·15,2)</i> 

4. feladat:

A feladat struktúrája azonos a második feladat struktúrájával (Tömeg meghatározása):

Ivan tömege 15,2 kilogramm. Maria 3,5 kilogrammal könnyebb, mint Ivan. Igor tömege kétszer annyi, mint Iváné.

Hány kilogrammot mutatna a mérleg, ha a gyerekek külön-külön állnak rá és hányat, ha mindhárman egyszerre állnának a mérlegre? A mérleg pontosan mér.

Készíts ábrát!

Öten rögtön megjegyezték, hogy ennek a feladatnak a megoldását már tudjuk, a szakaszokat is lerajzoltuk. A megoldás azonos az előző feladat megoldásával. Felhívtam a figyelmüket, hogy a feladatok „matematikája” ugyanaz, de a szöveges válaszok különböznek. A többiek újból számoltak, rajzolták a feladatban említett Ivánt, és a kisebb (mert kevesebb kiló), illetve a sokkal nagyobb (kétszer annyi a tömege) gyereket. (Most a rajzokon a figurák nagysága utalt a tömegek arányára.) Ők nem kötötték össze a feladatot az előző feladattal. Ezért, elemeztük a második feladathoz hasonlóan ezt a feladatot is, s eljutottunk újból a szakaszokkal való reprezentációkig. A táblázat első sorába beírtuk a *gyerek* szót. Az első oszlopba pedig azt hogy: *kilogrammok*. Ily módon is szeretttük volna kihangsúlyozni az azonos struktúrát.

5. feladat:

A feladat struktúrája azonos a második feladat struktúrájával. (Idő meghatározása):

Ági ma háromszor beszélt telefonon a mamájával. Az első beszélgetés 15,2 percig tartott. A második 3,5 perccel volt rövidebb, mint az első. A harmadik beszélgetés kétszer olyan hosszú ideig tartott, mint az első.

Hány perces volt Ági második és hány perces a harmadik beszélgetése? Hány percet beszélt ma Ági összesen a mamájával telefonon?

Ennél a feladatnál már minden tanuló, csak a szöveges választ írta le. Mindenki tudta, hogy a feladat struktúrája azonos az előző feladatok struktúrájával. (A táblázatba a tanulók beírtak két új szót (*beszélgetés* és *percek*).

6. feladat:

Megkértem a tanulókat, hogy ők maguk is alkossanak feladatot (mesének neveztem), melynek a „matematikája” (így neveztem a struktúrát), azonos az előző feladatok „matematikájával”.

Ez a feladat, az előző feladatok fordítottja. Egy adott kifejezésnek kell értelmet adni.

Egy megoldás gyümölcsfogyasztásról, három a megtett útról, kettő a tömegről és egy a ceruzák hosszáról szólt. Danica és Milan feladatát idézzük:

D: Emmának születésnapja volt. A vendégek három csoportban jöttek. Szombaton délután jöttek az osztálytársai az iskolából, és a zeneiskolából. Ők 15,2 l gyümölcslevet ittak meg. Este, a szülők barátai is megérkeztek. Ők 3,5 literrel kevesebbet ittak meg, mint a gyerekek a gyümölcsleből. Vasárnap a rokonok jöttek. Ők kétszer annyit ittak, mint a gyerekek. Mennyi gyümölcslevet ittak meg?

A kislány magyarul írta a feladatott, mert könnyebben fogalmaz magyar, mint szerb nyelven. Miután felolvasta „az alkotást”, kérésre ugyanezt elmondta szerbül is:

D: Emin rođendan je bio. Gosti su došli u tri grupa. U subotu posle podne došli su drugovi iz razreda i iz muzička škola. Oni su popili 15,2l soka. Uveče došli su prijatelji od roditelja. Oni za 3,5l manje su popili od dece. U nedelju došli su rodbina. Oni dva puta više su popili od dece. Koliko su soka popili?

Az elhangzott feladatban voltak nyelvi hibák (szavak sorrendje és szó szerinti fordítás; aláhúztuk ezeket), de a kifejezések, melyekkel kifejezték a mennyiségek viszonyát hibátlanok voltak. Ez jó alkalom volt arra, hogy még egyszer kihangsúlyozzuk a következő nyelvi különbséget: *kétszer annyi és kétszer nagyobb*.

M: Az egyik ceruza hossza 15,2 centiméter, a másik 3,5 centiméterrel rövidebb, mint az első. A harmadik ceruza kétszer olyan hosszú (tükörfordításban: kettőször hosszabb), mint az első. Milyen hosszú összesen a három ceruza?

A *literek*, illetve a *centiméterek* és a *csoport*, illetve *ceruza* is bekerült a táblázatba.

7. feladat:

A tanulók megkapták a feladat szövegezését, mely azonos volt a harmadik feladat szövegezésével, azzal hogy a 15,2 helyett a b -t írtuk.

A tanulók jól válaszoltak a kérdésre, miután meghatározták a megtett kilométerek számát (ötven zárójelet felhasználva a következő kifejezést írták: $b+(b-3,5)+2\cdot b$, hárman nem használtak zárójeleket), melyeket csak szakaszokkal reprezentáltak. A harmadik sorba, a táblázatba, a tanulók beírták a megfelelő kifejezéseket és megrajzolták a szakaszos reprezentációkat.

8. feladat:

A feladat szövegezése csak abban különbözött az előző feladat szövegezésétől, hogy a 3,5 helyett az u -t írtuk.

Hét tanuló önállóan oldotta meg a feladat. Közülük Slavica megkért, hogy nézem át a megoldását mielőtt leírta volna a szöveges választ. Oliver megnézte a társai megoldásait és ezután képes volt a táblázat negyedik sorát önállóan kitölteni a hetedik feladat alapján.

Konkrét szituációk kódolása (algebrára való lefordítása)

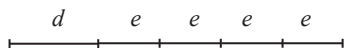
Síkidomok:

9. feladat:

Legyen a képen látható szakasz hosszának mérőszáma d . Rajzold le azt a szakaszt, mely hosszának mérőszáma $2\cdot d$!

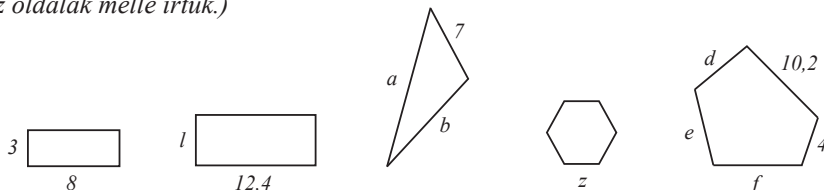


Legyen egy másik szakasz hosszának mérőszáma e . Rajzold le a szakaszokat, melyeknek mérőszámai $2 \cdot d + e$; $2 \cdot d - e$. Határozd meg a képen látható szakasz hosszának mérőszámát!



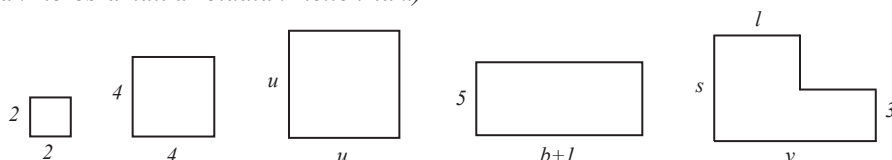
10. feladat:

Határozd meg a sokszögek kerületének mérőszámát! (A sokszögek oldalainak mérőszámaikat az oldalak mellé írtuk.)



11. feladat:

Határozd meg a sokszögek kerületének és területének mérőszámait! (A sokszögek oldalainak mérőszámaikat az oldalak mellé írtuk.)



A második négyzetnél a cél az volt, hogy a tanulók észrevegyék, hogy a két különböző mennyiség mérőszáma azonos lehet. (Ez már bevezetés a „fordított” feladatok megoldásához, ahol a megadott kifejezésnek több jelentést kell adni).

Az első csoportban Milan megjegyezte, hogy a két mérőszám egyenlő. A második csoportban Barbara bizonytalanul a következőt mondta:

B: *Nálam tizenhat mind a kettő. Ez biztosan nem jó.*

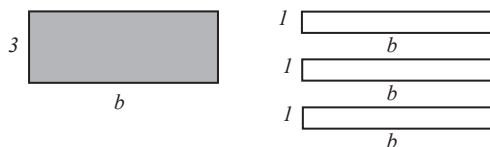
Konkretizáltuk a mértékegységet egy centiméterre. A kerülethez és a területhez is konkrét szituációt képzelünk el (Milyen hosszú zsinigre van szükségünk, hogy körülkeríthessük a négyzetet? Hány négyzettel - melyeknek oldalhossza egy centiméter - lehet lefedni a négyzetünket). Ezek után a tanuló bizonytalansága eltűnt.

A téglalap kerületének mérőszámát a tanulók kétféleképpen írták le: $2 \cdot 5 + 2 \cdot (b+1)$, $5 + (b+1) + 5 + (b+1)$. A terület mérőszámát a következőképpen adták meg: $5 \cdot (b+1)$.

Az utolsó sokszög nehézséget okozott a tanulóknak. Az első csoportból önállóan csak hárman, (a második csoportból ketten) határozták meg a két oldal hosszának mérőszámát. Ahhoz, hogy kiszámolják a terület mérőszámát, négyen (a második csoportból heten) feldarabolták két téglalpra a hatszöget; egy tanuló pedig, téglalappá egészítette ki a hatszöget.

12. feladat (előkészítő feladat az algebrai kifejezések összevonásához):

Mivel lehet lefedni nagyobb területet: egy szürke (az ábrán látható) téglalappal, vagy három fehér (az ábrán látható) téglalappal együtt. A téglalapok oldalhosszainak mérőszámaikat jelöltük az ábrán.



Adj magyarázatot!

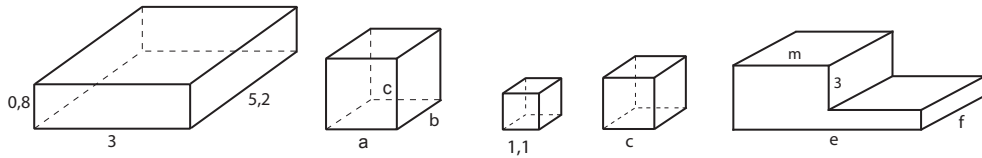
Határozd meg a téglalapok területeinek mérőszámát külön-külön!

Hogy viszonyul a szürke téglalap területének mérőszáma, egy fehér téglalap területének mérőszámához?

A tanulók három egyforma téglalpra feldarabolták a szürke téglalapot és megmutatták, hogy a lefedett területek egyenlők.

13. feladat:

Határozd meg a testek felszínének és térfogatának mérőszámait!



Csak Nikola és Zoran oldották meg a feladatot a rajzok alapján. A többieknek az utolsó testélek hosszainak meghatározása gondot okozott. A felszín mérőszámának meghatározásánál két tanuló az összegből kihagyott egy-egy lap területének mérőszámát. Oliver és Filip ugyanezt megtették a második téglaltestnél. Segítségül, minden padra tettem az ábrán látható testek egy-egy papírból készült modelljét. A tanulók kézbe vették a modelleket. Az élek mellé írták az élek hosszainak mérőszámait. Konzultáltak egymással. Mutatták az egyforma lapokat s végül megoldották a feladatot.

Megjegyzés:

Kihangsúlyoztuk, hogy a magyarban a *síkidomoknak területe*, a *testeknek felszíne van*. Szerbül mind a két esetben, ugyanazt a szót használjuk: *površina*.

Összegzés:

A tanulók számára nehéznek bizonyult az ábrázolt testekkel való munka, hiszen ez egy komplex feladat: a testet el kell képzelni, meg kell határozni a test éleinek hosszát, azonosítani a lapokat, kiszámolni a lapok területét, a testek felszínét és térfogatát (az utolsó testnél a test feldarabolását is el kell végezni). A modellek megkönnyítették a munkát, és segítségükkel a tanulóknak sikerült helyesbíteni megoldásaikat. Mivel az elképzelésünk az, hogy a feladat fordítottja (az algebrai kifejezéseknek jelentést adni), segítheti a tanulókat a kifejezések összevonásának elsajátításában. Mivel az 13. feladat nehézséget okozott a tanulóknak, a második csoport számára a feladat nem volt kötelező. (Öten foglalkoztak a feladattal és használtak modelleket). A többiek a harmadik feladathoz hasonló feladatot oldottak meg. (Négyen választották a feladatot.)

4.2.9. Az algebrai kifejezések lehetséges konkrét jelentései

Célunk, hogy a tanulók képesek legyenek, egy egyszerűbb algebrai kifejezés láttán, jelentést képzelni a kifejezéshez. Ezáltal, a tanulók fogalmi hálójában kapcsolatok épülnek ki az algebrai és más fogalmak között. Reményeink szerint, ezek a kapcsolatok a tanulók számára megkönnyítik az algebra alkalmazását. Másrészt, a kifejezések jelentései megkönnyíthetik a kifejezések összevonásának elsajátítását.

5. feladat:

Adj minél több jelentést (írj meséket, és készíts rajzokat is) a következő kifejezéseknek: $4 \cdot a + 2 \cdot b$.

Tanulói megoldások:

Q: Sasa 4 zacskó cukorkát vásárolt. Minden zacskóban a cukorka volt. Vett még két zacskóval, melyekben b (cirill b betű) cukorka volt. Most Sasának $4 \cdot a + 2 \cdot b$ cukorkája van.

Itt látszik, hogy a tanulóknak külön kell összpontosítaniuk arra, hogy a változókat latin betűkkel írják, miközben cirill betűkkel írnak.

Nikola, illetve Tajna hasonlóan, mint Oliver, dobozokba csomagolt filctollakról írt, illetve szalvéta csomagokról.

D: Egy nagymama a piacon almát árult. 4 kosárban a kg alma volt. 2 kosárban b kg alma volt. A nagymamának hány kg almája volt?

Felhívtam a tanulókat figyelmét arra, hogy a szöveg nem elég precíz:

G: Te azt mondd, hogy a négy kosárban összesen a kilogramm alma van?

A tanuló csodálkozik. Nem ezt gondolta. A precizitás nehéz számára, ezért segitettem.

A második és a harmadik mondatát már a tanuló önállóan módosította:

D: (a szó szerinti fordítás következik): Mindegyikben a két kosár közül, b kilogramm alma volt. Hány kg almája volt a nagymamának összesen?

F: Marko hétfőnként, keddenként, szerdánként és csütörtökönként a percet fut. Péntekenként és szombatonként b percet fut.

G: A $4 \cdot a + 2 \cdot b$ kifejezés ezt jelenti, hogy hétfőnként, keddenként, szerdán és csütörtökönként a percet fut. Péntekenként és szombatonként b percet fut?

F: Igen!

G: Ha a 15 volna, b pedig 20. Mennyi volna a $4 \cdot a + 2 \cdot b$?

F: 100.

G: Ha azt mondjuk, hogy száz, mindenki tudja, hogy Marko fut? Egy szám, egy egész mondatot jelent?

F: Nem!

G: Mit jelent akkor a szám?

F: Hogy mennyit futott Marko.

T: Hány percet fut összesen.

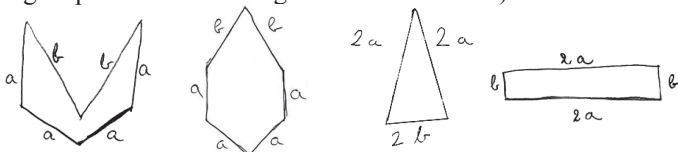
G: Hétfőtől, szombatig.

A többi tanuló a megtett útról írt. Hasonlóan fogalmaztak, mint ahogyan megfogalmaztuk a harmadik feladatot az előző tanórán.

A tanulók ugyanazokról a mennyiségekről írtak, mint amelyekről beszéltünk az előző órán. Ezért kértem, hogy mondjanak példát úrtartalomra, magasságra és elköltött forintokra.

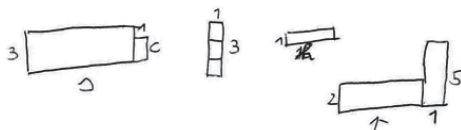
Filip kivételével, aki gyorsírásnak tekintette a kifejezést, biztosak lehetünk, hogy minden tanuló számoknak (nem tárgyaknak) értelmezte az a -t, és a b -t. A tanulók képesek voltak konkrét jelentést adni a megadott kifejezésnek. A fogalmazás precizitását még fejleszteni kell. Úgy tűnik, hogy a hibák bemutatása és ellemzése javította a tanulók fogalmazási készségét; hiszen a délutáni foglalkozáson, sokkal pontosabban fogalmaztak. Filip alkotásai is teljesen jók voltak.

Geometriai jelentések a tanulók számára, érdekesebbnek bizonyultak. Nagy érdeklődéssel figyelték társaik alkotásait. Minden tanuló leírta (és lerajzolta), hogy egy szakasz hosszának mérőszámát jelentheti a kifejezés. Ezt a jelentést fogalmazzák meg legkönnyebben a tanulók. Ezen kívül még a következő jelentéseket adták meg: (Kihangsúlyoztam, hogy téglalapokat és háromszöget is szeretnék látni.)



Ваша је кућица 4 келије димензиона. У свакој келији има а димензиона. Кућица је још 2 келије у којима има б димензиона. Вада ваша има $4 \cdot a + 2 \cdot b$ димензиона.

A hasonló feladatok közül kiemelném, hogy csak Nikola (a második csoportban pedig ketten), rajzolt olyan síkidomot, mely területének mérőszáma 3 , p , $2 \cdot p + 5$, illetve $3 \cdot s + g$ volt. A következőt rajzolta:



A többiek ezeknek a kifejezéseknek vagy egy szakasz hosszának mérőszáma jelentést, vagy a kerület mérőszáma jelentést adták.

A tanulók a délutáni foglalkozáson hasonló feladatokkal foglalkoztak, mint az órán.

4.2.10. Algebrai kifejezések összevonása

Célunk, hogy a tanulók az összevonás elsajátításánál felhasználják a kifejezések lehetséges jelentését, azzal hogy később jelentés nélkül végezzék azt.

1. feladat (Gondolj egy számra!):

G: Gondolj egy számra, szorozd meg kettővel, ehhez adj hozzá hetet, majd a megkapott számból vond ki az elképzelt számot. A megkapott számból vonj ki ötöt, utána adj hozzá hármat. Abból, amit kaptál vond ki az elképzelt számot. Mit tapasztalsz?

Szorgalmas számolás után mindenki eredményül megkapta az ötöt.

G: Hogyan lehetséges, hogy mindenki ugyanazt az eredményt kapta? Mi ennek a magyarázata? Hogyan működik ez a „gép”?

A tanulók lerajzolták a kifejezés sémáját és megkapták a következő kifejezést:

$$2 \cdot c + 7 - c - 5 + 3 - c.$$

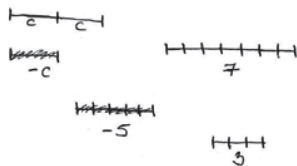
Hárman zárójeleket írtak: $((2 \cdot c + 7) - c) - 5 + 3 - c$. Látván a többiek kifejezését, egyet-értettek, hogy a zárójeleket el lehet hagyni.

Tanulói magyarázatok:

Z: Egy zacskóban c cukorka van. Én két zacskó cukorkát kaptam. Egyet odaadtam Milannak, egyet Filipnek, nekem nem maradt egy zacskóval sem. Még kaptam hét darab cukorkát, odaadtam ötöt Filipnek és Milantól kaptam még hármat. A végén nekem öt cukorkám maradt.

Tajna, Milan és Slavica a kifejezés tagjait, az c reprezentáció segítségével, vagy az egyes reprezentációjának segítségével fejezte ki. A tagokat, melyeket ki kell vonni, más színű ceruzával rajzolták vagy befestették. Tajna ábráját mutatjuk be:

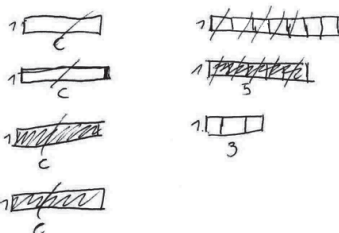
$$2 \cdot c + 7 - c - 5 + 3 - c = 5$$



Az ábrák alapján a tanulók jól végezték el az összevonást.

Nikola téglalapokat rajzolt, a kifejezés tagjainak együtthatói meghatározták, hány egyforma téglalapot kellett rajzolnia (a negatív együtthatóknál a megfelelő téglalapokat befestette). A konstansoknál a megfelelő téglalap egyik oldalhosszának mérőszáma a konstans, a másik az egyes. Ezeket a téglalapokat feldarabolta egységnyi négyzetekre. Egy-egy egyforma, de különböző színű téglalapot, illetve négyzetet áthúzott (összegük nulla).

$$2 \cdot c + 7 - c - 5 + 3 - c = 5$$



A többiek semmit sem írtak, ezért Milan bemutatta a szakaszos reprezentálást, Nikola pedig a téglalapos reprezentálást.

Végül az c helyére konkrét számokat írtunk (a tízet, a hatot és az egykettedet). A tanulók elvégezték az összevonást, azzal a kikötéssel, hogy a kiválasztott szám szorzatát kettővel nem számolták ki. Például Danica a következőt írta, s kérésemre meg is magyarázta hogyan számolt:

$$2 \cdot 10 + 7 - 10 - 5 + 3 - 10 = 0 \cdot 10 + 5$$

D: Két tízes mínusz tíz, mínusz tíz, az: nulla tízes. Hét mínusz öt, plusz három, az öt.

2. feladat:

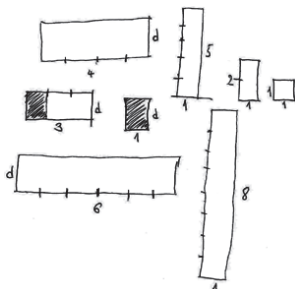
Add össze! (Írd egyszerűbb alakban!):

$$4 \cdot d + 5 + 3 \cdot d + 2 + 1 - d =$$

Tanulói megoldások:

Tajna, Milan, Slavica és Danica szakaszokat használt segédeszközként, s jól oldotta meg a feladatot.

Zoran és Nikola téglalapokat rajzolt. Zoran megoldását mutatjuk be:



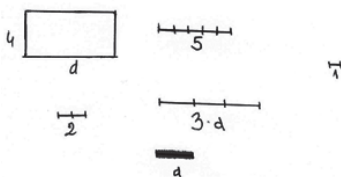
A tanuló minden taghoz rajzolt megfelelő téglalapot (negatív együttható esetén, a téglalapot befestette). Azokat a téglalapokat, melyeknek az egyik oldala egybevágó, ha különböző színűek egymásra rajzolja, így reprezentálja az egynemű tagok kivonását. Az egyforma színű téglalapokból egy téglalapot rajzolt és így reprezentálta az egynemű tagok összeadását. Zoran megoldása alapján - kétszínű papírból - kivágtuk a téglalapokat. A különböző színűeket, melyeknek az egyik oldala azonos hosszúságú, egymásra raktuk; így reprezentáltuk a kivonást. Az egyforma színűeket, melyeknek egy-egy oldala egyenlő egy téglalappá illesztettük össze; így reprezentáltuk az összeadást. Az eredményül kapott téglalapot le is rajzoltuk.

Oliver minden d betű fölé írt egy tízest:

$$4 \cdot \overset{10}{d} + 5 + 3 \cdot \overset{10}{d} + 2 + 1 - \overset{10}{d} = 6d + 8$$

Filip a következőt rajzolta és írta:

$$4 \cdot d + 5 + 3 \cdot d + 2 + 1 - d = 4 \cdot d + 2 \cdot d + 8$$



Láthatóan a $4 \cdot d$ és a $3 \cdot d$ kifejezéseket nem tudta összeadni, hiszen a $4 \cdot d$ -nek megfelelő téglalapot és a $3 \cdot d$ -nek megfelelő szakaszt nem lehet összeilleszteni. A tanuló elfogadta javaslatunkat, hogy a $4 \cdot d$ -nek is rajzoljon megfelelő szakaszt. Ennek köszönhetően sikerült megoldania a feladatot.

3. és 4. feladat:

A tanulók párban dolgoztak. Egymásnak adtak fel feladatokat, melyek hasonlóak voltak, mint az első feladat. Minden tanuló leírt egy kifejezést (ezt később összehasonlította a párja által leírt kifejezéssel), s ez alapján lediktálta a párjának a megfelelő feladat szövegét (ily módon szóban is megfogalmazták a feladatot).

5. feladat:

Add össze! (Írd egyszerűbb alakban!):

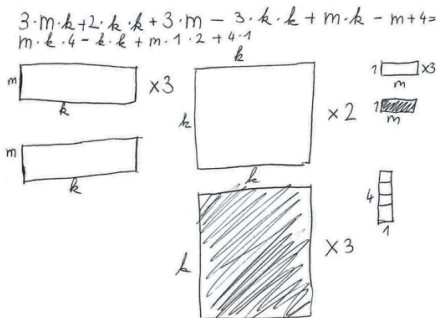
$$3 \cdot m \cdot k + 2 \cdot k^2 + 3 \cdot m + m \cdot k - 3 \cdot k^2 - m + 4 =$$

Megjegyzések:

A tanulók számára zavaró lehet az: *add össze* kifejezés (szerbül ezt használjuk; a *vond össze* kifejezés *nem létezik*), ezért emlékeztettem őket, hogy ha kivonunk egy számot ugyanazt kapjuk, mint amikor hozzáadjuk az ellentétjét (példákat mutattam). Felírtam és elmondtam magyarul is: *Vond össze!* A szó eredetéről kikérem a véleményüket.

Az ötödik feladat elé a második csoportnál betettem a következő egyszerűbb feladatot: $2 \cdot k + 3 \cdot k^2 + 4 + 3 \cdot k + k^2 + 1$. Ebben a feladatban egy változó és csak összeadás szerepel. Itt is a tanulók előnybe részesítették a szakaszok és négyzetek kombinált használatát, Tajna 5. feladatának megoldásához hasonlóan.

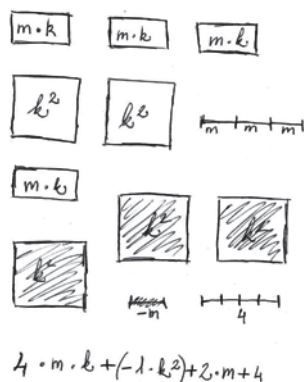
Nikola és Zoran, akik téglalapokat használtak, ezt a bonyolult feladatot is megoldották. Zorán nem festette be a téglalapokat, mely az m megfelelője volt, ezért nem vonta ki, hanem hozzáadta az m -et. Nikola megoldását mutatjuk be:



A tanuló a k^2 helyett a $k \cdot k$ -t írja. Ez könnyebb számára. Az együtthatók megjelennek az ábráján is, így az ábra olyan, mint az algebrai kifejezés: minden tagnak, mely nem konstans,

megfelel az ábrán egy együttható és egy téglalap, mely területének mérőszáma egyenlő a változók szorzatával. A ábrán a konstansnak is megfelel egy téglalap.

Tajna és Milan, szakaszokat és téglalapokat is rajzolt. Tajna rajza következik:



Tajna adta Slavicanak és Danicanak az ötletet, hogy a feladatban a szakaszokon kívül téglalapokat, illetve négyzeteket is rajzoljanak. A rajzok alapján - közös munkával és ellenőrizve egymás eredményét - a két kislány is jó eredményt kapott.

Milan Filipnek magyarázta:

M: Ha két betű van, téglalapot rajzolsz, ha egy: vonalat. (Szakaszra gondolt.)

Oliver az m és k fölé írt tízet, illetve húszat. Nehezen, csak a segítséggel sikerült a feladatot megoldani. Minden különböző tagot, különböző színnel színeztünk. Ez végül segített.

6. feladat:

Írd egyszerűbb alakban! (Végezd el a műveleteket!)

$$5 - 2 \cdot a \cdot b + 4 \cdot b + 3 \cdot a \cdot d + a \cdot b - 2 \cdot a \cdot d - b + a + 1 =$$

Kihangsúlyoztuk, hogy ábrát, csak az rajzoljon, aki nélküle nem tudja megoldani a feladatot. A négy tehetségesebb tanuló meg volt elégedve, mert kevesebbet kellett dolgozni. Kettő közülük különböző színű ceruzával aláhúzták az egynemű tagokat. Kérdésemre, honnan tudják, hogy mit mivel kell összevonni a következőket felelték:

M: Az egyforma téglalapokat, az egyforma téglalapokkal, az egyforma szakaszokat az egyforma szakaszokkal.

G: De, te most semmit sem rajzoltál. Nincsenek síkidomok!

M: Vannak! Elképzelem őket! (Mosolyog!)

N: Azokat adom össze, ahol egyformák a betűk.

T: Az egyformákat kell nézni. Például, itt van, m és k , és itt is. Ezeket kell nézni!

Oliver most is számokat írt a betűk fölé, de teljesen jól ki tudta választani az egynemű tagokat.

A többiek ábrák segítségével oldották meg a feladatot.

Szakkifejezések (bekerült a füzetekbe):

Egy szám és változók (betűk) szorzatát *monomnak* (*mono* görög jelentése: egy; magyarul: *egytagú algebrai kifejezésnek*) nevezzük. Ezek közé soroljuk az egy számból álló kifejezéseket is. Példák: $4 \cdot d$, $3 \cdot m \cdot k$, $-3 \cdot k^2$, m , 5 .

A monomban megjelenő számokat (a példákban: 4 , 3 , -3 , 1) *együtthatónak* nevezzük (szerbül: *koeficient*).

Egynemű (szerbül *slični*, szó szerinti fordítás: hasonlóak) algebrai kifejezések, azok, melyek csak az együttthatókban különböznek.

Ezeket az elnevezéseket felhasználva, Nikola a kérésemre átfogalmazta az előző mondatát:

N (szó szerinti fordítás): *A hasonló monomokat adjuk össze.* A mondatot kiegészítettük és a tanulók beleírták a füzetekbe magyarul is: *az egynemű, egytagú algebrai kifejezéseket úgy vonjuk össze, hogy az együttthatókat összevonjuk, a változót (illetve) változók szorzatát pedig átírjuk.* Példák: $4 \cdot d + 3 \cdot d = 7 \cdot d$; $2 \cdot k^2 - 3 \cdot k^2 = -k^2$; $3 \cdot a \cdot d - 2 \cdot a \cdot d = a \cdot d$.

Megjegyzés:

Az órán az *egytagú algebrai egész kifejezés* megnevezés helyett csak az egyszerűbb *algebrai kifejezést* használtam. Az egytagú algebrai egész kifejezést egy szám és változók szorzataként definiáltuk és nem egy valós szám és a változók pozitív egész kitevőjű hatványainak szorzataként, azért mert a tanulók csak a racionális számokat ismerték, a változók hatványait szívesebben szorzatként írták és a pozitív egész kitevőkön kívül a tanulók más kitevőket még nem ismertek.

A monomok összegét *polinomnak* nevezzük, magyarul: *többtagú algebrai kifejezés.*

7. feladat:

Add össze a d és a 2 kifejezéseket!

A tanulók leírták a $d+2$ kifejezést.

F megjegyezte: *Ezt nem lehet összeadni!*

G: *Filipnek van öt almája, Milannak pedig kettő. Hány almájuk van összesen? Írd le az eredményt felhasználva az ötöt és a kettőt!*

F: *Öt plusz kettő!*

G: *Ha Filipnek d almája van, Milannak pedig kettő, hány almájuk van összesen?*

F: *Összesen $d+2$ almájuk van.*

G: *Össze lehet adni a d és a kettő kifejtéseket?*

F: *Igen!*

G: *Mennyi az eredmény?*

F: *d plusz kettő!*

A délutáni foglalkozáson a tanulók hasonló feladatokat oldottak meg, mint az órán. A negyedik feladat után minden tanuló képes volt geometriai jelentés nélkül elvégezni az összevonásokat. A következő órát is, ilyen feladatokkal kezdtük (egy könnyebb és egy nehezebb feladattal). Mindenki segédábrák nélkül oldotta meg a feladatot. Danica ellenőrzésképpen megrajzolta a megfelelő szakaszokat és a téglalapokat.

Összegzés:

Meggyőződésünk szerint, azzal hogy ösztönöztük a tanulókat, hogy jelentést adjanak az algebrai kifejezéseknek, és hogy ábrákat készítsenek, hatékony segédeszközhöz jutattuk őket, melyek segítették a kifejezések összevonásának elsajátításában. A legtöbb tanuló (az első csoportban öt, a másodikban hat tanuló) kombinálva használta a szakaszokat (egy változó esetében) és a téglalapokat (két változó esetében). Csak téglalapokat mindkét csoportban két-két tanuló használt. Egy tanuló, azt a tényt használta, hogy a változókat általánosított számokként vezettük be, s a változó helyére egy konkrét számot írt. A tanulóknak sikerült elhagyni az ábrák rajzolását, de ha bizonytalanok voltak vagy nem egyeztek az eredményeik, a későbbiekben még visszatértek az ábrákhoz legtöbbször, mint egy ellenőrzési módhoz.

4.2.11. Összeg és különbség hozzáadása és kivonása

Célunk, hogy a tanulók jelentést adva az algebrai kifejezéseknek vagy papírszalagok kezelésének segítségével, megfogalmazzák a zárójelek felbontására vonatkozó szabályokat; illetve, ha zárójeleket kell felbontaniuk, vissza tudjanak emlékezni a saját tevékenységükre és az általuk megfogalmazott kontextusokra.

A „meseírást” arra is használjuk, hogy kiszűrjük azokat a tanulókat, akik nem értik az azonosságokban megjelenő kifejezések struktúráját.

1. feladat:

$$a + (b + c) = a + b + c \quad (a, b, \text{ és } c \text{ nem negatív racionális számok})$$

Szituációs jelentés :

Számolás nélkül határozd meg mely műveleti jel kell hogy legyen a szívecske, mely szám pedig a háromszög, hogy fennálljon a következő egyenlőség: $4 + (6 + 3) = 4 + 6 \heartsuit \blacktriangle$.

Írj megfelelő mesét (történetet)!

(A jeleket ($\heartsuit, \blacktriangle$) szándékosan úgy választottuk, hogy ne lehessen őket értelmezni keretként; melyet ki kell tölteni. A szív értelmezési tartománya a négy alpműveleti jel. Ezzel megtettük az első lépést egy algebrai struktúrák felé.)

Tanulói megoldások:

Minden tanuló meghatározta, hogy a szív a „+” jelet helyettesíti a háromszög pedig a hármast. Slavica történetét mutatjuk be:

S: Nekem volt 4 almák. Szombaton mikor mentem a boltba vettem 6 piros alma és 3 zöld. Most $4 + (6 + 3)$ almák volt nekem. Ma pitét csináltam. 4 alma volt. Ez nem elég, aztán elmentem a boltba és vettem még hatot. Mikor visszaértem, jelentették, hogy vendégek jönnek vacsorára, ezért még több pitét hogy csináljak. Megint elmentem a boltba és vettem 3 almák, mert tudtam, hogy nekem nem lesz elég. Most ugyanannyi almám van, mint szombaton.

A tanuló sok nyelvtani hibát vétett, de nyilvánvalóan, matematikailag helyesen fogalmazta meg az egyenlőség jelentését.

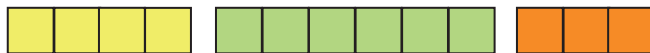
Papírszalagok „számtana”:

A fenti feladat ismételt megoldásához különböző színű papírszalagokat használtunk, melyek négyzetekre voltak felosztva (a négyzet oldala egybevágó volt a szalag szélességével). Megegyezésünk szerint egy négyzet egy egységnek felelt meg. Az eltérő számokat különböző színű papírszalagokkal reprezentáltuk (egy feladaton belül egy adott számot mindig ugyanazzal a színnel reprezentáltuk).

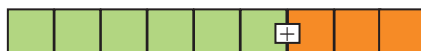
Két szám összeadását két papírszalag összeragasztásával reprezentáltuk, az új (meghosszabbított) szalag jelentette az összeget (fogalom). A papírszalagok összeragasztásához fehér ragasztócsíkot használtunk, melyre ráírtuk a megfelelő műveleti jeleket. Egy zárójelen belüli műveletet kisebb műveleti jellel jelöltünk.

A tanulók az alábbi lépéseket tették meg:

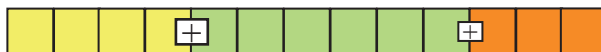
1. lépés: A 4, 6 és 3 számok szemléltetése, 4, 6 és 3 egységnyi hosszú papírszalagok kivágásával.



2. lépés: A diákok összeragasztották a 6ot és a 3at reprezentáló , $(6+3)$, mint művelet):



3. lépés: A tanulók összeragasztották a 4-es számot, reprezentáló szalagot a $(6+3)$ kifejezést reprezentáló papírszalaggal, $(4+(6+3))$, mint művelet).



4. lépés: A diákok összeragasztották a 4-es és a 6-os darabot, $(4+6)$, mint művelet):



5. lépés: A gyerekek összehasonlítják a $4+6+3$ és a $4+6$ fogalmakat a papírszalagok hosszát vizsgálva. A rövidebb szalaghoz hozzá kell adniuk a 3 egység hosszúságú papírszalagot.

Az 1.-5. lépéssorozatból adódó következtetés: ♥ jelentése összeadás, a ▲ jelentése: 3.

Ahhoz, hogy felismerjük az egyenlőségjel szimmetrikus tulajdonságát, a $4+(6+3) = 4+(6♥▲)$ analóg feladattal foglalkozunk. Ezután, a 3 helyett (a $4+(6+3)=4+6♥▲$ -ban), a 2, 5, 7, 8, illetve a 9 számot írtam. A tanulók végiggondolták a szalagokkal elvégzendő eljárásokat és felfedezték az általános következtetést: a ▲ mindig a zárójelben szereplő második számot jelöli (szabályszerű jelentés), a ♥ mindig az „+” jelet. A ▲ (és minden egyes szám) szerepét helyettesíthetjük egy szalaggal (meta-szimbolikus), és eljutunk az $a+(b+c) = a+b+c$ szabályszerű alkalmazáshoz.

2. feladat:

$$a - (b - c) = a - b + c \quad (a, b, \text{ és } c \text{ nem negatív racionális számok; } b \geq c; a \geq (b-c))$$

Szituációs jelentés:

A tanulók a $15-(8-3) = 15-8♥▲$ feladatot oldották meg. Öt tanuló azt válaszolta, hogy a ♥ „+” jel kell hogy legyen, a ▲ pedig hármas. Közülük hárman írtak megfelelő történetet, a többiek számolás segítségével határozták meg az eredményt. Hárman a zárójeleket nem vették figyelembe. Minden tanuló az ellenőrzés után tudta jó-e a megoldása.

Tajna helyes története következik:

T: 15 ember a liftre várakozik. Nyolcan akarnak bemenni, de hárman nem férnek be. A másik lift előtt is 15 ember várja a liftet. Bemegy nyolc, mert soványak és felmennek, de lejön három. (Nem írta le, hogy a végén mindkét lift előtt ugyanannyi ember van.)

Papírszalagok „számтана”:

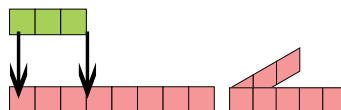
Definiáltuk a „szalag-kivonást” (olyan esetekre, ahol a kisebbítendő nagyobb a kivonandónál):

A kivonandót ráhelyezzük a kisebbítendő bal vagy jobb oldalára, és ráragasztottuk.

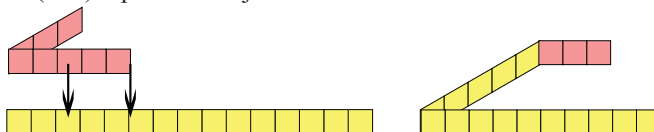
Visszahajtottuk a kétrétegű részt. A különbséget a megmaradó szalagrész reprezentálta.

A tanulók kivágták a 15, 8 és 3 szalagjait.

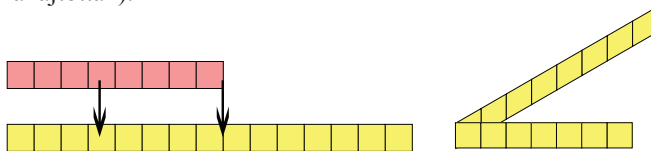
Ragasztották, majd visszahajtották a 8-at reprezentáló szalagból 3-at).



A tanulók ragasztották, majd visszahajtották a $(8-3)$ eredményét a 15-ös szalagból és megkapták a $15-(8-3)$ reprezentációját:



A tanulók a $15-8$ -at egy kivonási műveletnek tekintették (ragasztottak, majd a megfelelő szalagokat visszahajtották).



Összehasonlítottuk a $15-(8-3)$ és a $15-8$ fogalmakat, majd levontuk a következtetést: A $15-(8-3)$ szalag 3-mal hosszabb a $15-8$ szalagnál. Ahhoz, hogy ugyanolyan hosszú szalagokat kapjunk, egy 3 hosszúságú szalagot összeragasztottuk a $15-8$ szalagjával.

Minden tanuló egyetértett, hogy a ♥ „+” jel kell hogy legyen a ▲ értéke pedig 9.

A tanulóknak nem okozott nehézséget az általánosítás. Leírták a következő azonosságot: $a-(b-c) = a-b+c$.

Megjegyzés:

Az órán a különbség hozzáadásának és az összeg kivonásának tárgyalása analóg módon történt. Megfogalmaztuk és leírtuk az $a+(b-c)=a+b-c$ és az $a-(b+c)=a-b-c$ azonosságokat is. Felhívtam a tanulók figyelmét, hogy az előző feladatokban nem tárgyaltuk például, azokat az eseteket, amikor az a szám negatív. Hogy a leírt azonosságok e számok esetén is igazak, példákön tudjuk bemutatni, kiszámolva az azonosságok jobb és baloldali kifejezések értékét.

3. feladat:

Bontsd fel a zárójeleket (tükörfordításban: szabadulj meg a zárójelektől) és írd egyszerűbb alakba a kifejezést !

$$5+(d+6)=$$

$$a+(9-a)=$$

$$e-(4+e)=$$

$$s-(2-s)=$$

$$d-(2\cdot d+7)=$$

$$6-(1-g)=$$

$$f\cdot h-(f+h)=$$

$$x^2-(2\cdot x+8)=$$

Szakkifejezések (bekerült a füzetekbe):

Kihangsúlyoztuk magyarul a zárójelet felbontani, és a tükörfordítása: a zárójeltől megszabadulni közti különbséget.

Megjegyzés:

Az óra végén közöltem a tanulókkal, a szerb nyelven közismert, rímekben foglalt, az összeg és a különbség hozzáadására (illetve kivonására), vonatkozó szabályt:

A zárójel előtt összeadás, a zárójel törlődik.

Ispred zagrada je više, zagrada se briše.

A zárójel előtt kivonás, történik a változás.

Ispred zagrada je manje, nastaje menjanje.

Összegzés:

A kislányok számára különösen a meseírás nagy kihívást jelentett, a tanulók szinte versenyeztek abban, hogy minél érdekesebb legyen a mese, és figyelték megfelel-e más alkotása az adott kifejezésnek. Azoknak a tanulóknak, akik az azonosságokban megjelenő kifejezések struktúráját nem értették pontosan nem sikerült megfelelő történetet írni. Minden ilyen tanulót, a szalagokkal való manipulálás segítette a kifejezések struktúrájának megértéséhez. Megállapíthatjuk, hogy a szalagok „aritmetikája” hatékony eszköznek bizonyult a kifejezések struktúrájának megértésében és az órán szereplő zárójelek felbontásában.

Délutáni foglalkozás

6. feladat:

Cél: minden tanuló legyen képes jelentést adni az egyenlőségeknek.

Bontsd fel a zárójeleket és írd megfelelő „meséket”!

$$70-(10+2)= \quad 25-(8-1)=$$

7. feladat:

Bontsd fel a zárójeleket és fogalmazd át a hatodik feladat megoldásában leírt „meséket”, úgy hogy megfeleljenek a hetedik feladatnak is!

$$70-(v+2)= \quad 25-(h-1)=$$

A tanulók jól oldották meg a feladatokat.

8. feladat:

Ösztönözni szeretttük volna a tanulókat a segédábrák használatának elhagyására, s arra, hogy a zárójelek felbontását végezzék el anélkül, hogy jelentést adnának a kifejezéseknek, ezért a nyolcadik feladatot versenyként tüztük ki.

Töltsd ki a bűvös négyzetet!

g+3		
g-2	g	
		g-3

A tanulók igyekeztek minél gyorsabban dolgozni. A zárójeleket jól bontották fel. Két összevonási hibát vétettek, amit önállóan ki is javítottak.

4.2.12. Kéttagú algebrai kifejezés szorzása egytagúval

Célunk, hogy a tanulók a kéttagú algebrai kifejezés egytagúval való szorzásánál jelentést adjanak a szorzatnak: először numerikus, majd geometriai jelentést is. A geometriai jelentés egy téglalap területének mérőszáma lesz, mely alapján ábrát készítenek a téglalapról és ezt felhasználva összegként írják le a kifejezést. Ezt az eljárást általánosítva, a tanulók reményeink szerint képesek lesznek megfogalmazni a szorzásról szóló szabályt. Eleinte, a szabály felidézésénél és alkalmazásánál a tanulóknak valószínűleg segíteni fog, ha az adott kifejezésnek jelentést tudnak adni és újból végiggondolni (akár ábrát is készíteni) a téglalap területének kétféle kiszámítási módját, vagy vissza tudnak emlékezni a számok szorzására.

1. feladat:

Numerikus jelentés :

Hogyan számoljuk ki fejben azt, hogy $5 \cdot 23$? (Jegyzed le a gondolatmeneted!)

A tanulók a következőt írták: $5 \cdot 23 = 5 \cdot 20 + 5 \cdot 3$.

Cél: elősegíteni annak tudatosítását, hogy mielőtt elkezdünk szorozni, a 23-at, a 20 és a 3 összegeként értelmezzük. Ezért megkérdeztem:

G : Mért választottuk a 20-at és a 3-at?

Z (szószerinti fordítás): 20 és 3 az 23! (Dvadeset i tri je dvadeset tri.)

A tanuló a meg szót, szó szerint fordította i-re, nem plusz-ra ami a helyes, ezért a mondat a következőt jelenti: 23 az 23.

Megjegyzés:

A szerb nyelvben a „+” jelet *meg*-kén olvashatjuk csak az egyjegyű számok összeadásánál. Azért mert a többjegyű számok megnevezésének két helyes módja van: az egyik változat tartalmazza a *meg* (*i*) szót, a másikban ez nincs meg. Például 23: *dvadeset tri* (tükörfordítás: *húszhárom*); *dvadeset i tri* (tükörfordítás: *húsz meg három*).

Az elhangzott mondat helyesbitése után felírjuk: $5 \cdot (20+3) = 5 \cdot 20 + 5 \cdot 3$.

Következett a kérdés, hogy ha a 23-at például $10+13$ -ként írjuk le, igaz-e az $5 \cdot (10+13) = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 13$ egyenlőség.

A tanulók tudják, hogy: $5 \cdot 10 + 5 \cdot 13 = 10 \cdot 5 + 13 \cdot 5 = (10+13) \cdot 5 = 5 \cdot (10+13)$.

Az első átalakítást a szorzás kommutativitás tulajdonsága alapján végeztük el. A következő két lépést a tanulók önállóan tették meg: először összevonták az egymemű tagokat ($10 \cdot a + 13 \cdot a = (10+13) \cdot a$), utána a szorzandóknak felcseréltük újból a helyét a kommutativitás alapján.

Következett az általánosítás: a $10+13$ helyett bármely két pozitív szám összegét írhatjuk és az 5 helyett tetszőleges pozitív számot. A tanulók megfogalmazták sejtésüket, ami belekerült a füzetekbe:

D: *Összeget úgy szorzunk, hogy minden összeadandót külön - külön megszorozzuk.*

Ezt jelöléssel is kihangsúlyoztuk: $5 \cdot (20+3) = 5 \cdot 20 + 5 \cdot 3$; $d \cdot (h+f) = d \cdot h + d \cdot f$
($h > 0$; $f > 0$; $d > 0$).

A tanulók az előző esethez hasonlóan rájöttek, hogy igaz a következő is:

$(20+3) \cdot 5 = 20 \cdot 5 + 3 \cdot 5$; $(h+f) \cdot d = h \cdot d + f \cdot d$ ($h > 0$; $f > 0$; $d > 0$).

Megjegyzés: Magyarul általában *tagot* használunk az *összeadandó* helyett.

2. feladat:

Szituációs jelentés:

Az egyik asztalra négy átlátszó zacskót tettem. Mindegyikükben két piros és három a pirossal azonos méretű kék golyó volt. A másik asztalra két kupacba négy-négy zacskót tettem. Az első kupacban minden zacskókban két piros a másik kupacban minden zacskókban három kék golyó volt. A feladat a következő volt:

A tárgyak elhelyezése alapján írd le a golyók számát – a megfelelő matematikai kifejezések segítségével - az egyes asztalokon!

Hogyan viszonyulnak egymáshoz a leírt kifejezések?

Valamennyi tanuló leírta a következőt: $4 \cdot (2+3) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3$.

G: *Rendezzük át a golyókat az első asztalon, úgy hogy az elhelyezésük ugyanolyan legyen, mint a második asztalon! „Végezzük el” az összeg szorzását!*

A tanulók rendelkezésére állt még négy zacskó, melyekbe Danica áttett két-két piros golyót. Ezeket egy kupacba rakta. A megmaradt kék golyókat tartalmazó zacskókat pedig egy másik kupacba rakta.

G: *Mit jelenthet az $3 \cdot (s+4) = 3 \cdot s + 3 \cdot 4$? (Írj megfelelő meséket!)*

Filip a következő szituációs jelentést írta:

E: Egy táska három rekeszből áll. Minden rekeszben s vonalas és 4 sima füzet van. A másik táska meg van felezve. A „feleknek” három rekesze van. Az egyik fél rekeszeiben s vonalas, a második fél rekeszeiben 4 sima füzet van.

3. feladat:

Geometriai jelentés :

Minden adott kifejezéshez ábrázolj téglalapot, mely téglalap területének a mérőszáma ez a kifejezés! ($s > 0$; $b > 0$; $14 > d > 0$; $k > 0$; $f > 0$; $a > 0$; $b > 0,5$)

$3 \cdot (s+4)$; $j \cdot (7+b)$; $z \cdot (14-d)$; $(k+f) \cdot 5$; $a \cdot (1+2 \cdot b)$; $3 \cdot (a+(k+3))$;

Az ábrázolt téglalapok segítségével írd le összeg alakban a kifejezéseket!

Minden, a tanuló által ábrázolt téglalap oldalainak mérőszámai a kifejezések szorzandói voltak. A téglalapok átdarabolása után (a harmadik téglalap esetében: kiegészítése után), a tanulóknak nem jelentett nehézséget összegként (a harmadik téglalap esetében: különbségként) felírni a kifejezéseket. Az utolsó kifejezésnél O-nak és F-nek segítették a társaik.

4.2.13. Kéttagú algebrai kifejezés szorzása egytagúval és összevonás: gyakorlat

1. feladat:

Célunk, hogy a tanulók készség szinten anélkül, hogy jelentést adnának az algebrai kifejezéseknek, tudják felbontani a zárójeleket és összevonni az egytagú algebrai kifejezéseket.

Feladattípusokat mutatunk. Valamennyi tanuló, önállóan határozta meg hány feladatot fog megoldani minden típusból (legkevesebb egyet, és legfeljebb négy feladatot kellett megoldani). Ezzel a céllal az volt, hogy a tanuló magabiztosnak érezze magát az ilyen feladatok megoldásában, és ne gyötörjék az egyfajta feladatok megoldásával; ez unalmas lehet.

Végezd el a következő műveleteket:

Elsőfokú algebrai kifejezések:

$8 \cdot (d+1) + 3 \cdot d + 4 =$ (összeg szorzása és összeadás; egy változó)
 $9 \cdot m + 2 \cdot (r+m) + 2 + 4 \cdot r + 7 =$ (összeg szorzása és összeadás; két változó)
 $-4 \cdot s + (7+s) \cdot 5 - 9 - 2 \cdot s =$ (összeg szorzása és összevonás; egy változó)
 $(2 \cdot f - h) \cdot 6 + 2 \cdot f + 4 - 22 \cdot h =$ (különbség szorzása és összevonás; két változó)
 $3 \cdot (c-2) + (5-10 \cdot c) =$ (különbség szorzása, összeg és különbség hozzáadása, és összevonás; egy változó)

$\frac{a}{2} + \frac{a}{3} =$ (összeadás; az együtthatók törtek)

$\frac{b}{3} + 2 \cdot (3 - \frac{b}{4}) =$ (különbség szorzása; összevonás; az együtthatók törtek)

Mit tapasztalsz a kifejezéspárokka kapcsolatosan:

$6 - (x+y) =$ $6 + (-1) \cdot (x+y) =$ (összeg kivonása, illetve: -1 -el való szorzás)

$z - 3 \cdot (4-t) =$ $z + (-3) \cdot (4-t) =$ (szorzat kivonása, illetve a különbség negatív számmal való szorzása)

$z - 3 \cdot (4-t) =$ $z - 3 \cdot (4+(-t)) =$ (kivonni egy számot; hozzáadni az ellentétjét)

Másodfokú algebrai kifejezések (nem kötelező feladatok):

$d \cdot (e+4) + 3 \cdot d \cdot e + 4 \cdot e - d =$ (összeg szorzása és összevonás; két változó)

$2 \cdot k + (k+4) \cdot f - 9 \cdot k \cdot f - f^2 + k - 5 \cdot f^2 =$ (összeg szorzása és összevonás; két változó)

Tanulói megoldások:

A tanulók az elsőfokú kifejezéseknél általában minden típusból két feladatot választottak. Oliver és Slavica a feladatok megoldása közben ábrákat rajzoltak (a feladatokat jól oldották meg), ezért biztattuk őket, hogy oldjanak meg ezekből a típusokból, még több fel-

adatot és próbálják elhagyni az ábrák használatát. Ez sikerült is nekik még két-két feladat megoldása után. A többiek, csak akkor készítettek ábrákat, amikor ellenőrizték, és egymással összehasonlították a feladatok eredményeit. Az ábrákat érvelési eszközként használták, hogy meggyőzzék egymást, hogy a saját megoldásuk jó. Szorzásnál két tanuló hibázott (F és D három, illetve két szorzásnál, csak az első tagot szorozták). Milan a következőképpen végezte el a szorzást: $(2 \cdot f - h) \cdot 6 = 12 \cdot 2 \cdot f - h \cdot 6$ (a 2-t és az f-et is szorozta). Három tanuló egy-egy összevonásnál hibázott. (Az osztálynak bemutattunk minden hibátípust.) A tanulók érvelésének köszönhetően (ábrák segítségével), mindenki önállóan kijavította a hibás megoldását. Hat tanuló a második (illetve harmadik) feladat megoldásában az összeg szorzása után is, használta a zárójeleket $(2 \cdot (r+m)) = (2 \cdot r + 2 \cdot m)$ kihangsúlyozva, hogy a kapott eredmény összeadás tagjaként is szerepel. Tajna megoldása a következő volt:

$$9 \cdot m + 2 \cdot (r+m) + 2 + 4 \cdot r + 7 = 9 \cdot m + (2 \cdot r + 2 \cdot m) + 2 + 4 \cdot r + 7 = 9 \cdot m + 2 \cdot r + 2 \cdot m + 2 + 4 \cdot r + 7 = 11 \cdot m + 6 \cdot r + 9.$$

Tájékoztattam a tanulókat, hogy a $(2 \cdot r + 2 \cdot m)$ lépést általában nem szoktuk leírni, de nyugodtan lehet használni.

Azokban a feladatokban, ahol törtek szerepelnek, két tanuló (O és E) segítséget kért a tanártól. Elegendő volt őket emlékeztetni, hogy a törtek összeadásánál a törteket közös nevezőre kell hozni.

A kifejezéspárok egyenlőségét két tanuló (N és I) fogalmazta meg. N a következőt mondta:

N: *Ha megszorozzuk az ellentétjével ugyanaz, mintha kivontuk volna.*

A tanulók jól végezték el a kifejezések egyszerűsítését (segédábrákat nem használtak és a kérdésekre azt válaszolták, hogy nem adtak jelentést a kifejezéseknek). (Például Tajna egyik egyszerűsítése a következő volt: $z + (-3) \cdot (4-t) = z + (-12 - (-3 \cdot t)) = z + (-12 + 3 \cdot t) = z + (-12) + 3 \cdot t = z - 12 + 3 \cdot t$.)

A többiek számára azok a kifejezések, melyekben negatív számmal kellett szorozni a kéttagú kifejezést nehéznek bizonyult. Segített a kifejezések sémájának megrajzolása.

A két másodfokú kifejezést tartalmazó feladatot minden tanuló jól oldotta meg, azzal hogy még a többiek két feladatot, N, I és Z négy feladatot oldott meg. (A „plusz” feladatokban összeg és különbség szorzása negatív számmal is szerepelt.)

Hasonló feladatokkal foglalkoztak a tanulók a délutáni foglalkozáson is.

Gyakorlat:

A következő feladatok megoldására a tanulók 20 percet kaptak. Valamennyi tanuló önállóan dolgozott (kis versenyt szerveztünk), így mindenki kipróbálhatta saját képességeit.

1. feladat:

Kösd össze az egyenlőket!

$5 \cdot (k+1)$ $5 \cdot k+1$ $6+k$ $5 \cdot k+5$ $6 \cdot k+1-5 \cdot k+5$ $4 \cdot k+9-k-4$

2. feladat:

Budapesttől Szabadkáig a vonatjegy ára \underline{v} Ft. A gyerekek és a diákok a vonaton fél áron utazhatnak. Minden utasnak kötelezően helyjegyet kell váltania. Ennek az ára 480Ft.

Mennyibe kerül az utazás vonattal Budapesttől Szabadkáig egy felnőtt számára és mennyibe kerül egy diák számára? (A fizetendő forintok számát jelenítsd meg szakaszokkal.)

Attila, aki 13 éves, a szüleiével és két testvérével (15 és 10 évesek) vonattal utazott Pestről Szabadkára. Mennyibe került a családnak ez az utazás?

Mennyibe kerülne összesen az utazás ezen a vonaton \underline{z} diák és 5 felnőtt számára?

Megtudtuk, hogy a vonatjegy ára Budapesttől Szabadkáig 3750Ft. Mennyibe került Attila családjának az utazás Szabadkáig?

A tanulóknak a szöveg alapján le kell írni a megfelelő algebrai kifejezéseket. A harmadik kérdés megválaszolásánál általánosítani is kell. Az utolsó kérdésnél pedig, ki kell számolni a kifejezés számértékét, ha a $y=3750$.

3. feladat:

Egy gyümölcsösben elültettek k almafát és p szilvafát.

Fogalmazd meg szerb és magyar nyelven a következő egyenlőségek jelentését:

$$p=k; k=p+30; p=3\cdot k; p+k=70!$$

A tanulóknak az egyenlőségeket kell értelmezni.

4. feladat:

Írd egyszerűbb alakban a következő algebrai kifejezést!

$$3\cdot d^2+4\cdot d+8\cdot(d-1)-2\cdot d^2+4 =$$

5. feladat:

Töltsd ki a táblázatot! (Algebrai kifejezések összevonása)

+	$6\cdot x$	$2\cdot x$	$-x$
$2\cdot x$			
x			
$-3\cdot x$			

Tetszőlegesen válasz ki három kifejezést a kiszámoltak közül a táblázatból úgy, hogy minden sor és minden oszlopból legyen kiválasztva egy-egy kifejezés! Hányféleképpen lehetne ezt megtenni? A kiválasztott kifejezéseket add össze! Hasonlítsd össze a kapott eredményt az osztálytársaid eredményével! Mit tapasztalsz? Adj magyarázatot!

A tanulók a kifejezések összeadása mellett kombinatorikával is foglalkoznak. Fejlesztik a logikus gondolkodásmódot és az érvelési készséget.

Tanulói megoldások:

Az első három feladatot mindenki jól oldotta meg. A negyedik feladatoknál D a másodfokú tagokat rosszul vonta össze. Az ötödik feladatnál hárman (M, N, és Z) határozták meg jól a lehetőségek számát és pontos magyarázatot is adtak az egyforma eredményekre. Még hárman (D, S, és T) megfogalmazták, hogy az összegek egyformák lesznek (magyarázatot nem adtak). F hibázott egy összevonásnál.

Összegzés:

A tanulói munkák alapján megállapíthatjuk, hogy a tanulók képesek, egyszerűbb szöveg alapján leírni a megfelelő algebrai kifejezést és kiszámolni a számértékét, ha a változó egy konkrét számértéket vesz fel. A tanulók a kéttagú kifejezés szorzását jól végezték el. Minden tanuló jól értelmezte a változók viszonyát a második feladatban és ezt kontextusba helyezve szerb és magyar nyelven is pontosan megfogalmazta. Ebből következik, hogy a *valahánnyal nagyobb* és a *valahányszor annyi* kifejezéseket a tanulók mindkét nyelven elsajátították. Az összevonásnál vétett hibákat a tanulók önállóan korrigáltak (segédábrák használata nélkül), ezért a teljesítménnyel meg voltam elégedve. Az utolsó feladat összetett volt (kombinatorikus és logikus gondolkodást is igényelt), ezért nem oldotta meg mindegyik tanuló ezt a feladatot.

4.2.14. Kéttagú algebrai kifejezés szorzattá alakítása (kiemelés)

Célunk, hogy a tanulók geometriai jelentést adva az algebrai kifejezéseknek megfogalmazzák, hogyan alakítunk át egy összeget szorzattá. A geometriai jelentés segíthet a tanulóknak a kiemelés eljárásának felidézésében, még ezt teljesen el nem sajátítják.

1. feladat:

Adott két téglalap. Az egyik oldalhosszainak mérőszámai 2 és u ; a másik oldalhosszainak mérőszámai 2 és d . Határozz meg egy harmadik téglalap oldalhosszainak mérőszámait úgy, hogy a harmadik téglalap területe, egyenlő legyen, a két megadott téglalap területeinek összegével. Ezt matematikai jelekkel is jegyezd le! (Készíts ábrát!)

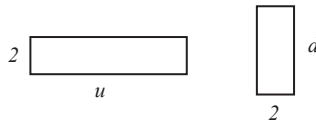
Tanulói megoldások:

Hét tanuló a következőket rajzolta és írta:



$$2 \cdot u + 2 \cdot d = 2 \cdot (u + d)$$

Egyedül Olivernek nem sikerült megoldani a feladatot. Ő a következőt rajzolta:



G: Hogyan lehetne a két téglalaphól egyet összerakni?

A tanulónak csak akkor sikerült válaszolni a kérdésre mikor papírból kivágtuk a téglalapokat és ő maga illesztette össze őket. Ekkor leírta a megfelelő egyenlőséget is. (A második csoportban Robertnek is segítettek a kivágott téglalapok.)

G: Milyen alakban van leírva a $2 \cdot u + 2 \cdot d$ kifejezés és milyenbe a $2 \cdot (u + d)$ kifejezés?

G: Hogyan kell egy összeget szorzattá alakítani?

D: Megnézzük, hogy a téglalapok egyforma oldala mennyi!

Z: Megkeressük a közös tényezőket!

A füzetekbe bekerül a következő (tükörfordítás): Egy összegalakú kifejezést, szorzattá úgy alakítunk át, hogy az összeadandók közös tényezőjét kihúzzuk a zárójel elé (izvučemo ispred zgrade); s magyarul is: A tagok közös tényezőjét kiemeljük.

A közös tényezőt piros krétával írtuk a táblára.

Megjegyzés:

Felhívtam a tanulók figyelmét a különbségre a *kiemelni* (magyar szakkifejezés), és a *kihúzni zárójel elé* (izvući ispred zgrade; szerb szakkifejezés).

2. feladat:

Írd le szorzat alakban a következő kifejezéseket: $3 \cdot r + 3 \cdot m$; $5 \cdot h + 5$; $4 \cdot s + 8$; $6 \cdot z + 8$.

Feladattípusokat mutatunk. Mindegyikből a tanulók kettőtől négy feladatig választhattak.

Az első két feladattípusból minden tanuló két-két feladatot oldott meg. A megoldásoknál csak Milán hibázott a második feladatnál. Négyen (D, F, O, és S) készítettek megfelelő ábrákat. Ők, kérésemre (kihangsúlyoztam, hogy a célunk a segédeszközök elhagyása), megoldottak még két-két feladatot az ábrák használata nélkül. Milán a következőt írta: $5 \cdot h + 5 = 5 \cdot (h + 0)$. Kérésemre elvégezte a $h + 0$ összeadást és megkapta: $5 \cdot h + 5 = 5 \cdot (h + 0) = 5 \cdot h$ (nem észlelte az ellentmondást).

G: Hogyan viszonyul a $5 \cdot h + 5$ szám a $5 \cdot h$ számhoz?

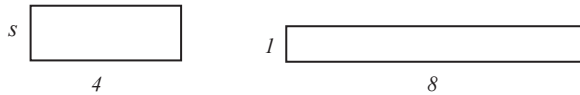
M: Ez (mutat az $5 \cdot h + 5$ -re), öttel nagyobb.

G: Te a következőt kaptad: $5 \cdot h + 5 = 5 \cdot h$. Ez mit jelent?

M: Egyformák! Nem egyformák! Valahol elírtam!

A feladatot jól oldotta meg a téglalapok rajzolásával. A hibás megoldást bemutattuk a többieknek is.

Az utolsó két típusú feladatot hatan oldották meg. (De csak N az ábrák nélkül). Q és F a következő téglalapokat rajzolta:



F: Ezekből nem lehet egy téglalapot csinálni!

Q: A téglalapoknak az egyik oldala egyforma kell, hogy legyen. Ezt nem lehet összerakni. (A tanuló megfogalmazta azt a kritériumot, melyet a keresendő téglalapoknak teljesíteni kell.)

G: Próbáljunk egy másik téglalapot rajzolni mely területének mérőszáma 8, és az egyik oldalának mérőszáma s vagy 4.

Ezek után a tanulóknak sikerült az ábrák segítségével megoldani a hasonló feladatokat, de a $6 \cdot z + 8$ kifejezés már gondot okozott nekik. A téglalapok egyforma oldalainak meghatározásához, arra biztattam a tanulókat, hogy határozzák meg a tagok legnagyobb közös osztóját. Ezek után a tanulók minden hasonló feladatot sikeresen megoldottak. A délutáni foglalkozáson már nem használtak ábrákat.

Összegzés:

N kivételével a második feladatban a tanulók téglalapábrákat használtak, bár ezt a feladatban nem kértük és az előző feladatnál megfogalmaztuk azt is, hogy a tagokból a közös tényezőt ki kell emelni. Ebből, arra következtettünk, hogy a tanulóhoz közelebb áll a kiemelés fogalmának geometriai jelentése. Úgy tűnik, ez fontosabb és érthetőbb számukra, mint a formális eljárás leírása. A formalitást csak a szituációs problémának megoldásánál, a téglalapok oldalainak meghatározásánál kezdték használni. A kiemelés a tanulók számára sokkal nehezebbnek bizonyult, mint az összeg (illetve különbség) szorzása ezért több feladatot (a leggyengébb tanulóknak az utolsó feladattípusból 10 feladatot) kellett megoldaniuk, hogy el tudják hagyni az ábrák használatát és szituációs jelentés nélkül meg tudják oldani az ilyenfajta feladatokat.

Délutáni foglalkozás

A tanulók segédábrák felhasználása nélkül oldottak meg feladatokat.

4.2.15. Lineáris egyenletek megoldása mérlegelvel

Az egyenletmegoldás fogalmának átismétléséhez a tanulók két feladatot oldottak meg a lebontogatási módszerrel. Az ismeretlen csak az egyenlet egyik oldalán jelentek meg. Az új mérlegelvel megoldandó egyenletek mindkét oldalán megjelennek az ismeretlenek.

Cél: az egyenletek formális megoldásának elsajátítása.

1. feladat (az együtthatók és az egyenlet megoldása is természetes számok):

A kétkarú mérleg az asztalon, egyensúlyban van. A mérleg bal serpenyőjében három balyu meg két kocka található; a jobb serpenyőjében, két balyu meg hat kocka található. Ha egy kocka az egyes számot jeleníti meg, az ismeretlen számot pedig a balyu, ird le azt az egyenletet, melyet a mérleg segítségével jelentettünk meg.

(Az asztalokon valódi mérlegek álltak. Minden mérleget ketten kezeltek. A kockákat a színes rúd készletből vettük. A balyukat szalvétákba kötött kockák alkották.)

A tényt, hogy a mérleg egyensúlyban volt, a tanulók az „=” jel reprezentációjaként értelmezték, s probléma nélkül, írták le a következő egyenletet: $3 \cdot x + 2 = 2 \cdot x + 6$.

Az egyenlet ekvivalens átalakításai:

A bal serpenyőbe tettünk még 3 kiskockát (később: 5 kiskockát, 6 batyut illetve 2 batyut, meg 1 kockát).

G: Mit kell tenni, hogy a mérleg újból egyensúlyba kerüljön, és hogyan fogjuk ezt a változást matematikai jelekkel leírni?

Minden tanulópar a másik serpenyőbe is rakott 3 kiskockát (később: 5 kiskockát, 6 batyut, illetve 1 kiskockát meg 2 batyut) és leírta az új egyenletet: $3 \cdot x + 2 + 3 = 2 \cdot x + 6 + 3$ (később: $3 \cdot x + 2 + 5 = 2 \cdot x + 6 + 5$, $3 \cdot x + 2 + 6 \cdot x = 2 \cdot x + 6 + 6 \cdot x$, $3 \cdot x + 2 + 2 \cdot x + 1 = 2 \cdot x + 6 + 2 \cdot x + 1$). A +3-at (később: a +5-öt, +6-x-et, +2-x-et és a +1-et) piros színű krétával írtuk a táblára. A tanulók általánosították és a következőket fogalmazták meg:

S: Ha a mérleg mindkét oldalára ugyanannyi kockát rakok, a tányérok megint jól állnak. (Ezt neveztük megengedett tevékenységnek a mérlegen.)

D: Ha az egyenlet mindkét oldalához ugyanazt a számot hozzáadom, az oldalak egyenlők maradnak.

Még két tanuló megfogalmazta a mondatot a változó többszörösével, illetve a kifejezésekkel kapcsolatosan. A füzetekbe és egy zöld (jelentése: megengedett, mint a közlekedésben) kartonlapra a következő került:

Ha az egyenlet mindkét oldalához hozzáadjuk ugyanazt a számot (ugyanazt a kifejezést), az egyenlőség továbbra is fennáll.

(Ezt neveztük megengedett tevékenységnek az egyenleten.)

Az összeadás után megkaptuk a következőt: $3 \cdot x + 5 = 2 \cdot x + 9$ (később: $3 \cdot x + 7 = 2 \cdot x + 11$, $9 \cdot x + 2 = 8 \cdot x + 6$, $5 \cdot x + 3 = 4 \cdot x + 7$).

Hasonló eljárás után, megfogalmaztuk a többi megengedett tevékenységeket a mérlegen és a nekik megfelelő, ahogyan neveztük, megengedett tevékenységeket az egyenleten. A füzetekbe és a zöld kartonlapra a tanulók a következőket írták:

Ha az egyenlet mindkét oldalából kivonjuk ugyanazt a számot (ugyanazt a kifejezést), az egyenlőség továbbra is fennáll.

Felhívtam a tanulók figyelmét, hogy az előző mondat állítását, külön nem szükséges kiemelni, hiszen kivonni egy számot ugyanaz, mint hozzáadni a szám ellentétjét. Ezt példával támasztottam alá.

Ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk (vagy elosztjuk) ugyanazzal a nullától különböző számmal az egyenlőség továbbra is fennáll.

A tanulóknak felhívtam a figyelmét, hogy a nullával való szorzás, a $0=0$ egyenlethez vezet. Ennek minden valós szám a megoldása, ami az eredeti egyenletre nem igaz. Mivel a tanulóknak a hetedik osztályban nincs szükségük szorozni az egyenleteket a nullától különböző értékű kifejezésekkel erről nem beszéltünk.

A $3 \cdot x + 2 = 2 \cdot x + 6$ egyenlet megoldása:

(A mérlegeken újból reprezentáltuk az egyenletet.)

Kiindulva a mérlegek állásából, a mérlegen csak megengedett tevékenységeket végezve, „mérd ki” a batyut! Matematikai jelekkel jegyezd le minden lépést!

(Kimérni azt jelenti, hogy az egyensúlyban levő mérleg egyik serpenyőben, csak egy batyu található, a másikban pedig csak kiskockák találhatók.)

Minden tanuló két lépésben - heten vonták ki először a 2-t, egy tanuló a 2·x-et - kapta meg az eredményt és a következőt jegyezte le: $3 \cdot x + 2 - 2 = 2 \cdot x + 6 - 2$; $3 \cdot x = 2 \cdot x + 4$; $3 \cdot x - 2 \cdot x = 2 \cdot x + 4 - 2 \cdot x$; $x = 4$ ($3 \cdot x + 2 - 2 \cdot x = 2 \cdot x + 6 - 2 \cdot x$; $x + 2 = 6$; $x + 2 - 2 = 6 - 2$; $x = 4$).

Fontos volt, hogy a tanulóknak tudatosuljon mit miért csinálunk, ezért megkérdeztem:

G: *Mi célból vesszünk le mindkét serpenyőből három kockát? Miért nem teszünk mindkét serpenyőbe három kockát?*

T: *El kell venni, mert itt csak batyu lesz.*

Z: *A másikba kockák!*

A tanulók megfogalmazták az egyenletek megoldására vonatkozó célokat:

*Célok: Csak ismeretlenek legyenek az egyenlet egyik oldalán!
Csak számok legyenek az egyenlet másik oldalán!*

A mondatokat minden tanuló egy kék kartonlapra írta és a zöld lappal együtt, a további munka során, maga előtt tartotta.

Az egyenlet ellenőrzését szívesen végezték el a tanulók, mert így önállóan tudták ellenőrizni a saját eredményüket.

Probléma variációja:

A vizsgált egyenlethez, minden tanuló más szöveget írt. Cél: rámutatni, hogy léteznek különböző szövegezései, de azonos struktúrájú feladatok, melyek megoldhatók ugyanazzal az egyenlettel. Tajna szöveges feladatát mutatjuk be:

Jelena tegnap hajcsatokat vett: három csomaggal, meg még három csatot. Ma vett két csomaggal, meg még hét csatot. Ma is ugyanannyi darab csatot vett, mint tegnap. Hány csat van egy csomagban?

2. feladat (az együtthatók és az egyenlet megoldása is egész számok):

Hasonló módon, mint az előző feladatban, minden tanuló elé kiraktam az új, megoldandó egyenlet reprezentációját. Az egyes számot, egy téglalap alakú fehér lapocska reprezentálta, a mínusz egyet pedig vele egybevágó, csak sötétkék színű lap jelentette meg. Egy sárga műanyag háromszög reprezentálta az ismeretlent. Az „=” jel két oldalán található kifejezések reprezentációit minden tanuló asztalrészének két oldalára raktam (bemutatva a képen). Az egyenlet reprezentációján a megengedett tevékenységek ugyanazok voltak, mint a mérlegen. A feladat a következő volt.

A lapok elhelyezése alapján írd le az egyenletet és „mérd ki” a sárga háromszöget, megengedett tevékenységeket végezve! Matematikai jelekkel jegyezd le minden lépést!

A tanulókkal minden lépést ellenőriztünk, a táblára felírtuk és kihangsúlyoztuk a segédkérdéseket:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \triangle \triangle \triangle \triangle \triangle \blacksquare \blacksquare \blacksquare \\ 5 \cdot x + (-3) \end{array} & = & \begin{array}{c} \triangle \triangle \triangle \square \\ 3 \cdot x + 1 \end{array} \\
 \text{Másként felírva: } \begin{array}{c} \triangle \triangle \triangle \triangle \triangle \blacksquare \blacksquare \blacksquare \\ 5 \cdot x - 3 \end{array} & = & \begin{array}{c} \triangle \triangle \triangle \square \\ 3 \cdot x + 1 \end{array} \\
 \text{G: Mit tegyünk az egyenlettel, hogy a bal oldalon csak } x\text{-ek maradjanak?} & & \\
 \text{M: Hozzáadunk hármat!} & & \\
 \begin{array}{c} \triangle \triangle \triangle \triangle \triangle \blacksquare \blacksquare \blacksquare \square \square \square \\ 5 \cdot x - 3 + 3 \end{array} & = & \begin{array}{c} \triangle \triangle \triangle \square \square \square \square \\ 3 \cdot x + 1 + 3 \end{array}
 \end{array}$$

T: *Kiszámoljuk!*

$$\begin{array}{ccc} \triangle \triangle \triangle \triangle & = & \triangle \triangle \triangle \square \square \square \square \\ 5 \cdot x & = & 3 \cdot x + 4 \end{array}$$

N: Mit tegyünk, hogy a jobb oldalon csak lapok legyenek?

T: Kivonjuk a három x -et.

$$\begin{array}{ccc} \triangle \triangle & = & \square \square \square \square \\ 5 \cdot x - 3 \cdot x & = & 3 \cdot x + 4 - 3 \cdot x \end{array}$$

E: Kivonjuk!

$$2 \cdot x = 4$$

G: Mit tegyünk, hogy csak egy x maradjon a jobb oldalon?

D: Vonjunk ki egy x -et!

N: Ez nem jó, a jobb oldalon csak szám lehet! El kell osztani kettővel!

$$\begin{array}{ccc} \triangle & = & \square \square \\ (2 \cdot x) : 2 & = & 4 : 2 \\ x & = & 2 \end{array}$$

Másként felírva:

A kék kartonlap tetejére felkerült a következő szöveg (összeolvasható a célokkal):

Mit tegyek az egyenlet mindkét oldalán levő kifejezésekkel, hogy...

Tájékoztattam a tanulókat, hogy a megengedett tevékenységeket az egyenleten (az ekvivalens transzformációkat), az egyenlet jobb oldalán dőlt vonallal jelöljük ($/-3 \cdot x$; $/-x$; $/:2$) és így módon, a megoldás rövidebb lesz, hiszen minden második sort az előző megoldásból nem írjuk le. A tanulók leírták az előző feladat megoldását így módon.

3. feladat (az együtthatók és az egyenlet megoldása is egész számok):

Feladattípusokat mutatunk. A tanulók minden feladattípusból egy vagy két feladatot választhattak.

Oldd meg az egyenleteket:

$4x - 5 = 3 \cdot x$ (a konstans csak az „=” jel bal oldalán található)

$10x - 3 = 9 \cdot x + 1$ (az együttható a baloldalon, eggyel nagyobb a jobb oldalánál)

$6x - 3 = 4 \cdot x + 3$ (az egyenletet átalakításai közt lesz osztás is)

$3x - 3 = 21 - x$ (egy együttható: -1 ; az átalakítások közt lesz osztás is)

$2 \cdot x + 4 = 5 \cdot x - 2$ (az együtthatók pozitívak, a nagyobb a jobboldalon van; lesz osztás)

$5 \cdot x + 2 + x = 8 - 2 \cdot x - 18$ (egy együttható negatív, az átalakítások között lesz osztás is)

Megjegyzések a tanulói megoldásokkal kapcsolatosan

A tanulók élvezettel, mint valami kártyákat rakosgatták a lapokat, de legfeljebb öt feladat megoldása után elhagyták az eszköz használatát. (Az ismeretlen ellentétjét egy piros háromszöggel reprezentáltuk.)

Elmerülve a lapok kezelésében, Filip elfelejtette lejegyezni a lapokkal elvégzett műveleteket az első két feladatnál. Csak az eredményt írta le. Figyelmeztetésem után leírta a teljes megoldást.

A tanulók, a feladatokban megjelent kivonásokat automatikusan úgy reprezentálták, mint az ellentétes szám hozzáadását. Például a $3x - 3 = 21 - x$ egyenlet reprezentációja valójában a $3x + (-3) = 21 + (-x)$ egyenlet reprezentációja volt.

Csak két tanuló (D és T) jelölte az ekvivalens transzformációkat, dőlt vonallal. Danica az egyenlet mindkét oldalán jelölte az elvégezendő műveletet:

$$\begin{aligned} -3x \setminus 4 \cdot x - 5 &= 3 \cdot x \setminus -3 \cdot x \\ +5 \setminus x - 5 &= 0 \setminus 45 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

A második csoportban Robert csak az egyenlet egyik oldalán végzett műveleteket. Egy megoldását mutatunk be:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x - 3 &= 21 - x \\ 3 \cdot x - 3 &= 21 - x + x \\ 3 \cdot x - 3 &= 21 \\ 3 \cdot x - 3 + 3 &= 21 \\ 3 \cdot x &= 21 \\ 3 \cdot x : 3 &= 21 : 3 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Robertnek olyan feladatokat tűztünk ki, melyeket mérleg segítségével is megoldhatók voltak. Három feladat megoldása után, áttért a lapokkal való munkára, majd hat feladat megoldása után nem használta őket.

4. feladat (az együtthatók és az egyenlet megoldása is racionális számok):

Oldd meg az egyenleteket!

$$x + 2 = \frac{x}{2} \quad (\text{az egyik együttható racionális szám; csak a baloldalon van konstans})$$

$$\frac{x}{2} + 6 = 10 + \frac{x}{3} \quad (\text{két különböző racionális együttható; a konstansok egész számok})$$

$$\frac{x}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot x}{4} \quad (\text{két racionális együttható; a konstansok racionális számok})$$

A tanulók először a törteket vonták ki. M egyik megoldása következik:

$$\begin{aligned} x + 2 &= \frac{x}{2} \\ x + 2 - \frac{x}{2} &= \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \\ \frac{2 \cdot x}{2} + 2 - \frac{x}{2} &= 0 \\ \frac{x}{2} + 2 &= 0 \\ \frac{x}{2} + 2 - 2 &= 0 - 2 \\ \frac{x}{2} &= -2 \\ \frac{x}{2} \cdot 2 &= -2 \cdot 2 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Mivel senki sem kezdte a feladatok megoldását szorzással, ezért kértem, hogy ezzel a transzformációval kezdjék a három következő egyenlet (az egyenletek azonos típusúak voltak, mint a negyedik feladatban) megoldását, így egy általános megoldási módszerhez jutnak.

A délutáni foglalkozáson, a tanulók a harmadik és a negyedik példához hasonló példákat dolgoztak ki. Továbbra is a tanulók, először összevonták az egyenlő kifejezéseket és csak utána szorozták az egyenletet. A feladatok ellenőrzésére emlékeztetni kellett a tanulókat.

5. feladat (Az egyenlet megoldásánál a zárójel felbontása is szükséges.)

Feladattípusok következnek. Minden feladattípusból két vagy három példát választottak a tanulók.

Oldd meg az egyenleteket!

$$2x + (4-x) = 5x - (3x-3) - 7 \quad (\text{összeg vagy különbség hozzáadása, illetve kivonása; az együtthatók egész számok})$$

$$12 - (4x+3) = 3x + (4 - \frac{x}{2}) \quad (\text{összeg vagy különbség hozzáadása, illetve kivonása; az együtthatók racionális számok})$$

$$3 \cdot (x-3) + 5 = 2 - 4 \cdot (3-2x) \quad (\text{zárójel szorzása egész számmal; az együtthatók egész számok})$$

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \cdot (10+x) = 5 - 4 \cdot (\frac{x}{2} - 1) \quad (\text{zárójel szorzása racionális számmal; az együtthatók racionális számok})$$

Az ekvivalens átalakításokat, most már, mindenki az egyenlet jobb oldalán dőlt vonal felhasználásával jelölte. A tanulók még egy tanórán foglalkoztak hasonló egyenletek megoldásával, mint amilyenek a harmadik, negyedik és az ötödik feladatban voltak.

Összegzés:

A tanulóknak az egyenletek ekvivalens átalakításának elsajátításához nagy segítséget nyújtottak a valódi mérlegen és a „kártyákkal” végzett konkrét tevékenységek. A mérleg segítségével a tanulók önállóan megfogalmazták az általuk használt ekvivalens átalakításokat. A tárgyakkal való manipulációt önmagában érdekes játéknak tekintették és igyekeztek elsajátítani a játék szabályait, eközben különösebb megterhelés nélkül megoldották az egyenleteket. Később, az ismétlődő manipuláció unalmassá vált számukra és abbahagyták, de ekkor már, tudták az egyenletek megoldásának eljárását. Az egyenletek megoldásánál, melyekben jelen vannak az x racionális számú többszörösei, a tanulók előbb összeadták az egyenlő tagokat és csak a végén szorozták az egyenletet (szorzással akkor kezdték az egyenletek megoldását, ha ezt külön kértem). Az elkövetkezendő órákat, ismétlésképpen, egy-egy egyenlet megoldásával kezdtük azzal a céllal, hogy a módszer rögződjön a tanulóknak.

4.2.16. Lineáris egyenlet megoldására visszavezethető azonos struktúrájú szöveges feladatok

Célunk, hogy a tanulók felismerjék az azonos struktúrájú feladatokat, felállítsák a megfelelő egyenletet, megoldják és értelmezzék a kiszámolt eredményt az adott szituációra vonatkoztatva.

1. feladat:

Egy háromnapos kirándulás második napján, a hetedik osztály tanulói kerékpárral 3,5 kilométerrel kevesebbet tettek meg, mint az első napon. A harmadik napon pedig, kétszer olyan hosszú távot tettek meg kerékpárral, mint az első napon. Összesen a három nap alatt

57,3 kilométert tettek meg kerékpárral a tanulók. Hány kilométert tettek meg az egyes napokon?

Maria 3,5 kilogrammal könnyebb, mint Ivan. Igor tömege kétszer annyi, mint Iváné. A három gyermek tömege összesen 57,3 kilogramm.

Hány kilogrammot mutatna a mérleg, ha a gyerekek külön-külön állnának rá?

Ági ma háromszor beszélt telefonon a mamájával, összesen 57,3 percet. A második beszélgetés 3,5 perccel volt rövidebb, mint az első. A harmadik beszélgetés kétszer olyan hosszú volt, mint az első.

Hány percesek voltak Ági telefonbeszélgetései külön-külön?

A táblára és tanulói kartonlapocskákra a következő mondatok kerültek!

Mit kell meghatározni?

Hogyan jelöljük?

Hogyan viszonyulnak a meghatározandó számok egymáshoz és a feladatban megjelölt számokhoz?

Írd le az összefüggéseket matematikai jelekkel!

A három, azonos struktúrájú feladat visszavezethető az $x+(x-3,5)+2\cdot x=57,3$ egyenlet megoldására. A konkrét szituációk kódolása alcím alatt található, azonos struktúrájú harmadik, negyedik és ötödik feladatok szövegeit módosítva, megkaptuk ezeket az egyenlettel megoldható szöveges feladatokat. A feladatoknak megfelelő egyenlet baloldali kifejezését is az említett alcím alatt, a hetedik feladat megoldásaként, leírták a tanulók. Valójában, az újdonság az ismeretlen azonosítása és jelölése és az egyenlet lejegyzése volt. (Az ilyen típusú egyenletek megoldása már ismerős volt a tanulók számára)

Tanulói megoldások:

Az első feladat megoldásánál a tanulók lerajzolták és jelölték az x , $x-3,5$, $2\cdot x$ és $x+x-3,5+2\cdot x$ kifejezések szakaszos reprezentációit. Hatan leírták az egyenletet is, és öt tanulónak a megoldása is jó volt. (Slavica hibázott az osztásnál.). Oliver és Filip csak a feladat újbóli olvasása után rajzolták meg a reprezentációkat és megoldották az egyenletet. Figyelmeztetni kellett a tanulókat, hogy írjanak szöveges válaszokat. A feladat azonos struktúráját értették, hiszen a következő két feladat válaszait a tanulók egyből megfogalmazták.

2. feladat:

Fogalmazz meg, az adott egyenletekhez megfelelő szövegeket és oldd meg a feladatokat!

$$x+(x-1)+3\cdot x+2\cdot x=76$$

$$x+\frac{x}{2}+2\cdot x+(x-10)=215$$

Cél: kihangsúlyozni és megerősíteni az előző feladattípus jellemzőit.

Az előző feladathoz viszonyítva a tanulók fordított irányú tevékenységet végeznek.

Minden tanuló tudott írni megfelelő szöveges feladatokat. Tajna megoldása a következő volt:

Az első egyenlethez írt szöveg: *Négy kosár meggyet hoztak a piacra. Összesen 76 kilót hoztak. A második kosárban egy kilóval kevesebb meggy van, mint az elsőben. A harmadik kosárban háromszor annyi meggy van, mint az elsőben. A negyedikben kétszer annyi meggy van, mint az elsőben. Hány kiló meggy van a kosarakban külön-külön?*

A második egyenlethez írt szöveg: *Slavica fele annyi időt úszott kedden, mint hétfőn. Szerdán kétszer annyit, csütörtökön meg 10 perccel kevesebbet, mint hétfőn. Összesen 215 percet úszott hétfőtől csütörtökig. Mennyi időt úszott az egyes napokon?*

3. feladat (Rész-egész viszony):

Egy gyümölcsösben szilvafák, almafák és körtefák vannak. A gyümölcsfák fele szilvafa, a harmada pedig almafa. Megtudtuk, hogy a körtefák száma 10. Határozd meg, hány fa van a gyümölcsösben!

Hány perces volt Kata edzése; ha az edzést első 10 percében bemelegített, az edzés idejének harmadrészében futott, az idő felében pedig úszott?

Tanulói megoldások:

Négy tanuló (D, M, N, T, és Z) leírta a megfelelő egyenletet ($\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 10 = x$), megoldotta az egyenletet, ellenőrizte az eredményt, s szöveges választ írt.

A második feladatnál csak a választ írták le, számukra nyilvánvaló volt, hogy a feladatok struktúrája azonos.

A többiek leírták a $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 10$ kifejezést és próbáltak találni a szövegben olyan számot, mely a leírt kifejezés értéke volna. Megkértem, hogy írásban válaszoljanak a táblán található kérdésekre. Mind a három tanuló hasonlóan válaszolt. Oliver válaszait mutatjuk be:

A gyümölcsfák számát.

x-el (jelöljük)

$\frac{x}{2}$ szilvafák száma; $\frac{x}{3}$ almafák száma; 10 körtefák száma

G: Mit jelent a $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 10$ kifejezés?

Q: A szilvafák, az almafák és a körtefák összege. A gyümölcsfák számát! Az x!

A tanuló ezek után leírta és megoldotta az egyenletet.

4. feladat:

Mekkora távolságot tesz meg a vonat 3 óra alatt, ha óránkénti sebessége 60 kilométer?

Egy cipész 60 pár cipőt javít hetente. Hány pár cipőt javít 3 hét alatt?

Mennyi víz folyik ki a csapból 3 perc alatt, ha percenként 60 liter folyik ki a csapból?

Mennyit fizetett Dani a 3 darab kiwiért, ha darabja 60 forintba kerül?

Készíts ábrát a feladathoz!

Mit tapasztalsz a feladatokkal kapcsolatosan?

Mit tudunk meg a következő adatokból: 3 óra, 3 hét, 3 perc, 3 darab kiwi?

Mit tudunk meg a következő adatokból: 60 kilométer, 60 pár cipő, 60 liter, 60 forint?

Cél: észrevenni, hogy az összproduktum, a feladatban megjelenő tevékenység az időtartam és az időegységre vonatkozó produktum szorzata.

A tanulók probléma nélkül megoldották a feladatokat, megrajoltak egy három egyenlő részből álló szakaszt, megjelölték x -szel és megfogalmazták a szöveges válaszokat is. A következő válaszokat is megfogalmazták:

O: Mindenütt meg kell szorozni a 3-at és a 60-at.

T: 3 órát, hetet, percet, tartott a dolog.

Z: 3 az idő.

N: 180 az eredmény.

A következő segédkérdéseket írtuk fel a drapp színű kartonlapocskákra:

1. Milyen tevékenységről van szó a feladatban és ki végzi a tevékenységet?
2. Milyen mértékegységben mérjük a tevékenység időtartamát? vagy
Milyen egységben történik a tevékenység?
3. Mennyi a tevékenység időtartama? vagy
A tevékenység mennyi egységből áll?
4. Mennyi a tevékenység produktuma (eredménye) egy időegység alatt? vagy
Mennyi a tevékenység egységének produktuma (eredménye)?
5. Mennyi az össztevékenység produktuma (eredménye)?
Hogyan számoljuk ki az össztevékenység produktumát (eredményét)?

Leírtuk a feladatokra vonatkozó egyenletet is: $3 \cdot 60 = x$.

A 4. feladat első variációja:

Cél: elmélyíteni a tanulók tudatát a feladattípus tulajdonságairól.

Felhasználva az előző feladatok megoldásait, fogalmazd át a feladatok szövegezését úgy, hogy az ismeretlen legyen a tevékenység produktuma (eredménye) egy időegység alatt vagy a tevékenység egységének produktuma (eredménye)!

A tanulóknak egymással konzultálva sikerült jól megfogalmazni a feladatokat és leírtuk a megfelelő egyenletet: $3 \cdot x = 180$.

A 4. feladat második variációja:

Fogalmazd át a feladatokat (a 3. feladatban találhatóakat) úgy, hogy a tevékenység időtartama legyen a megoldás.

A feladat megoldása az előzővel analóg módon történt. A megfelelő egyenlet a következő volt: $x \cdot 60 = 180$.

5. feladat (az $x \cdot (a+b) = c$ egyenletre visszavezethető feladatok; $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$):

Két autó egy időben indul egymással szemben. A Belgrádból induló autó átlagos óránkénti sebessége 90 kilométer. A Budapestről induló autó átlagos óránkénti sebessége 80 kilométer. A két város egymástól való távolsága 510 kilométer. Az autók autópályán haladnak. Mennyi idő fog eltelni az autók indulásától a találkozásukig? (Tegyük fel, hogy a határon nem kell várni.)

Egy varrónő 4 szoknyát varr naponta, a másik 3 ugyanolyan szoknyát varr naponta. Mennyi időre van szükségük, hogy megvarrjanak 140 szoknyát.

Az egyik csapból percenként 22 liter víz folyik ki, a másodikból 18 liter folyik ki. Mennyi idő alatt telik meg a 4000 literes medence, ha egy időben kinyitjuk mindkét csapot.

Dani mamája ajándékot vásárol. Egy csésze 900 forintba kerül, a csészealj 600 forintba kerül. Hány csészét csészealjjal együtt, tud Dani mamája venni a 6800 forintból?

Tanulói megoldások:

Felhasználva a drapp kartonlapocskákon található kérdéseket a tanulóknak sikerült megoldani a feladatokat. Oliver harmadik feladatának megoldását mutatjuk be.

A tanuló válaszolt a kérdésekre:

1. Folyik a víz. 2 csap!
2. Percekben!
3. x ;
4. $22+18=40$ l;
5. 4000 l; $x \cdot 40 = 4000 : 40$; $x = 100$.

Száz perc alatt telik meg a medence.

6. feladat (összetettebb az $x(a+b)=c$ egyenletre vezető feladatok; $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$):

Ádám édesapja a kertjüket felássa 5 nap alatt, Ádám ezt elvégzi 20 nap alatt. Határozd meg, hány nap alatt ássák fel a kertet, ha együtt dolgoznak!

Ha az egyik csapat kinyitjuk egy kád 5 perc alatt telik meg. Ha a másik csapat nyitjuk ki a kád 20 perc alatt telik meg. Hány perc alatt telik meg a kád, ha mindkét csapat kinyitjuk?

Tanulói megoldások:

Csak két tanuló (N és M) határozta meg a tevékenység produktumát egy időegység alatt, mint a munka $\frac{1}{5} + \frac{1}{20}$ részét, s csak Nikola írta le az $x(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}) = 1$ egyenletet. A többiekkel újból rajzoltuk a kifejezések szakaszos reprezentációit és válaszoltunk a lapocskán található kérdésekre.

A második feladatot a tanulók önállóan oldották meg.

Megjegyzés:

A bemutatott lineáris egyenletek megoldására visszavezethető szöveges feladatokkal három tanórán foglalkoztunk. A tanulók, a délutáni foglalkozásokon is, hasonló feladatokat oldották meg. Még két tanórán gyakoroltuk a feladatokat, a célból hogy a tanulók magabiztosan viszonyuljanak a feladatokhoz. Ezen gyakorlatok alatt a tanulók elhagyták a lapocskák alkalmazását, hiszen megtanulták fejből a kérdéseket.

Összegzés:

A szöveges feladatok, mint azonos struktúrájú feladatok tanítása - meggyőződésem szerint - jó módszerek bizonyult. Ez a rendszerezés átláthatóvá tette az órákon megjelent szöveges feladatokat a tanulók számára. Valójában, kétféle feladatról van szó. A munkában nagy segítséget nyújtottak a megfogalmazott kérdések, melyek irányították a tanulók gondolatmenetét és a tanulóknak biztonságérzetet adtak. Az elegendő (egyéntől függően négytől nyolc feladatik típusként) gyakorló feladat megoldása után, a lapok feleslegessé váltak.

4.3. UTÓTESZT

Az oktatási kísérlet után negyvenöt perces utótesztet írtam a tanulókkal.

Az utóteszt feladatai analóg feladatok voltak az előteszt feladataival, az eltérés csak annyi volt, hogy az utótesztet bővítettem még egy szöveges feladattal.

1. Цыпе вода. 2 чаше.
2. У минуты
3. x
4. $22 + 18 = 40$ л
5. 4000 л
 $x \cdot 40 = 4000 : 40$
 $x = 100$
За 100 минуте те се напунити
базан.

4.3.1. A teszt feladatai:

1. Melyik számot helyettesíti a négyzet?

$$126 - 50 = \square + 11$$

2. Számolás nélkül határozd meg, mely számot helyettesíti a négyzet?

$$521 + 4897 = 521 - 350 + \square + 4897$$

3. Számolást nem használva kösd össze a baloldalon levő kifejezést azzal a kifejezéssel (vagy kifejezésekkel) mellyel (melyekkel) egyenlő az értéke (értékük)!
Választásod indokold!

	$149 - 73 - 8$
	$73 - 149 + 8$
$149 - (73 - 8)$	$149 + 73 - 8$
	$149 - 73 + 8$
	$149 + 73 + 8$

4. Töltsd ki a táblázat hiányzó helyeit és keres egy szabályt az egymás alatt levő számokra. Írd le szavakkal is ezt a szabályt!

5	9	1000	n
2	6		

7	12	100	z
21	36		

5. Hány pont van az ötvenedik képen?

(A szerb mondat tükörfordítása: Hány pont van azon a képen melynek száma ötven.)

Hány pont van a képen, amelyen a sorok száma p?



képen melynek száma 1



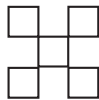
képen melynek száma 2



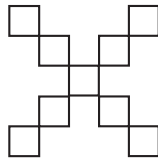
képen melynek száma 3

Hány négyzet van az ötvenedik képen?

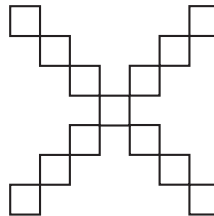
Hány négyzet van a képen, amelyen a sorok száma p?



képen melynek száma 1



képen melynek száma 2

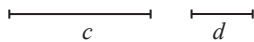


képen melynek száma 3

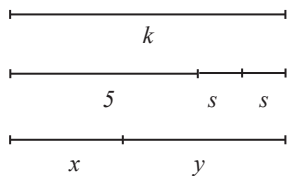
6. Mennyi a képen látható téglalapok kerülete és területe?



7. Az c és a d számot szakaszokkal reprezentáltuk, rajzold le azokat a szakaszokat melyek a $d+c$ és az $2\cdot c-d$ kifejezéseket reprezentálják!



8. Írj le minél több egyenlőséget a kép alapján!



9. Egy dobozban m zenei CD van. A második dobozban hárommal több CD van, mint az első dobozban. A harmadik dobozban háromszor annyi CD van, mint az első dobozban. Határozd meg hány zenei CD lemez lesz a harmadik dobozban, ha a CD-ket az első és a második dobozból áttesszük a harmadik dobozba!

10. Mit jelenthetnek a következő kifejezések:

$$2\cdot c+d$$

$$(c+1)\cdot d$$

$$4\cdot d$$

11. Egy kertben a tulipán és b jácint van. Mit jelentenek a következő egyenlőségek?

$$a=b$$

$$b=a+10$$

$$a=4\cdot b$$

$$a+b=40$$

Írd le válaszaid magyar nyelven is! (Ez a mondat magyar nyelven szerepelt a tesztben.)

12. A adott számegeyenesen határozd meg a $2\cdot a$ és a $2\cdot a-3$ számok helyeit!

13. Mária egy 95 oldalas könyvet három nap alatt olvasott el. A második napon kétszer annyi oldalt olvasott el, mint az első napon. A harmadik napon öt oldallal kevesebbet olvasott, mint az első napon. Hány oldalt olvasott a könyvből az egyes napokon?

4.3.2. Az utóteszt elemzése

A tanulókkal ugyanúgy, mint az előteszt után is egyéni beszélgetéseket folytattam.

1. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Pontos válaszok száma: 8.

Minden tanuló jól értelmezte az „=” jelet és ismeretlennek tekintette a négyzetet. Hatan először a $126-50$ -et, utána a $76-11$ -et számolták ki és leírták a $\square = 65$. $\underline{1}$ és $\underline{5}$ mérlegelvet használt:

$$126 - 50 = \square + 11$$

$$76 = \square + 11 / -11$$

$$65 = \square$$

A tanulók nem ellenőrizték írásban a megoldást.

A második kísérleti csoportban 7 pontos válasz volt. Minden tanuló ugyanúgy számolt, mint a hat tanuló az első csoportban. Hatan azt írták, hogy: $\square = 65$. L mondatban válaszolt: *A négyzet a 65-öt helyettesíti.*

2. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Pontos válaszok száma: 8.

Minden tanuló számolás nélkül oldotta meg a feladatot. A következőt írták: $\square = 350$. A tanulók nem ellenőrizték a megoldást.

A második kísérleti csoportban számolás nélkül meghatározott pontos válaszok száma: 7 volt. Hatan a $\square = 350$ -et írták. L mondatban válaszolt: *A négyzet a 350-et helyettesíti.* A tanulók nem ellenőrizték a megoldást.

3. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Pontos válaszok száma magyarázattal: 7; pontos válaszok száma magyarázat nélkül: 1.

D, M, S, T és Z magyarázatként megfelelő szituációs jelentéseket írtak.

N a következőt írta: *Először kivontunk a 73-nál nyolccal kisebb számot. Aztán kivontunk 73-at. Hogy egyenlő legyen, itt hozzá kell adni nyolcat.*

F a zárójelek felbontásáról szóló - rímekbe foglalt - szabályra hivatkozott.

Mivel Q nem írt magyarázatot, a megbeszélésen kértem, hogy választását indokolja. Q a következőt mondta:

Q: *A 149-ből levágok 65-öt, a másik 149-ből levágok 73-at és hozzáragasztok 8-at.*

A tanuló a szalagokkal való manipulációra emlékezett.

A második kísérleti csoportban pontos válaszok száma magyarázattal: 6; helytelen válasz 1 volt. Négy tanuló jó szituációs jelentéseket írt. J és I a rímekbe foglalt szabályra hivatkozott. R a $149 - 73 - 8$ kifejezést választotta. Magyarázatot nem írt. A megbeszélésen a tanuló a papírszalagok felhasználásával elkészítette a két kifejezés reprezentációit és belátta, hogy a kapott szalagok hossza különbözik egymástól. A reprezentációk segítségével sikerült korrigálnia választát.

4. feladat első táblázatával kapcsolatos megoldások (első kísérleti csoport):

Pontos válaszok száma: 4; részválaszok száma: 4.

Minden tanuló az 1000 alá a táblázatba a 997 -et írta. Hét tanuló az n alá a $n-3$ -at írta. F az utolsó cellába semmit sem írt. Négyen mondatban is megfogalmazták a választ.

A második kísérleti csoportban a pontos válaszok száma: 5; részválaszok száma: 2. Két tanuló nem írt szöveges választ.

4. feladat második táblázatával kapcsolatos megoldások (első csoport):

Pontos válaszok száma: 3; részválaszok száma: 4.

Heten a 100 alá beírták a 300 -at. T $3z$ -t, hat tanuló a $3 \cdot z$ -t írt. Négy tanuló nem írt szöveges választ. Q nem foglalkozott a feladattal.

A második kísérleti csoportban pontos válaszok száma: 5; részválaszok száma: 2 volt, hiszen két tanuló nem írt szöveges választ.

5. feladat első képsorára vonatkozó megoldások (első kísérleti csoport):

Pontos válaszok száma: 8.

Minden tanuló jól oldotta meg a feladatot. N, T (nem használt „,” jelet azt írta, hogy $6p$) és Z nem rajzolt megfelelő táblázatot. N nem rajzolta meg a negyedik képet. S és Z azt írta, hogy $6 \cdot 50$, a többiek azt, hogy 300 .

A második kísérleti csoportban pontos válaszok száma: 7. Mindenki rajzolt táblázatot. Hárman a $6 \cdot 50$ -et írták.

5. feladat második képsorára vonatkozó megoldások (első kísérleti csoport):

Pontos válaszok száma: 6; részválaszok száma: 2.

Q az első kérdésre válaszolva a következőt írta: 200 , de a második kérdés válasza jó volt: $1+p+p+p+p$. M a második kérdésre nem válaszolt. A többiek, T kivételével (nem használt „,” jelet), a 201 -et és a $4 \cdot p+1$ -et írták. N nem rajzolta meg a negyedik képet. N és Z most sem rajzolt táblázatot.

A második kísérleti csoportban a pontos válaszok száma: 6; helytelen válasz 1 volt. R megrajzolta a negyedik képet, de mást nem írt. Mindenki rajzolt táblázatot. Hárman a $4 \cdot 50+1$ -et írták.

6. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Pontos válaszok száma: 8.

F, Q, S és Z a következőt írta: $2 \cdot a+14$; $7 \cdot a$; $2 \cdot i+2 \cdot (4+k)$; $i \cdot (4+k)$. D, M és T elvégezte az összegek szorzását és ezt kapták: $2 \cdot i+8+2 \cdot k$; $i \cdot 4+i \cdot k$. D és M feldarabolták a téglalapokat, hogy könnyebben végezzék el a szorzást. N a kerületeket a következőképpen írta: $2 \cdot (a+7)$; $2 \cdot (i+(4+k))=2 \cdot (i+4+k)=2 \cdot i+8+2 \cdot k$.

Minden tanulótól a megbeszélésen megkérdeztem, hogy mit jelentenek a feladatban megjelenő betűk és a tanulók által leírt kifejezések. Öt tanuló szerint a betűk számok, hárman azt mondták, hogy a betűk az oldalhosszak mérőszámai. Minden tanuló szerint a kifejezések a téglalapok területének és kerületének mérőszámait jelentik.

A második kísérleti csoportban a pontos válaszok száma: 6; helyes részválasz 1 volt. B és R ugyanazt írták, mint F, I, L, K és V ugyanazt írták, mint D. J a kerületeknél hamis képletet használt: $a+7$; $i+4+k$.

7. feladat megoldásai

Mindkét csoport minden tanulója jól határozta meg a kifejezések reprezentációit.

8. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Pontos válaszok száma: 8.

Minden tanuló leírta az $x+y=k$ és az $5+s+s=k$ kifejezést. D, N, T és Z az $x+y=5+s+s$ kifejezést is leírták.

A második kísérleti csoportban is a tanulók jól oldották meg a feladatot. I, K, L és V olyan megoldást írt, mint D.

9. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Helyes megoldások száma: 7; helyes rész megoldások száma: 1.

Minden tanuló leírta a helyes algebrai kifejezéseket. Heten az összegüket is jól határozták meg. Q rajzolt megfelelő szakaszos reprezentációkat. D a következőt írta: $m+m+3+3 \cdot m=x$; $5 \cdot m+3-3=x-3$; $5 \cdot m=x-3$. A tanuló bevezette az x -et, de nem ezt fejezte ki.

A második kísérleti csoportban a pontos válaszok száma: 6; helyes részválasz 1 volt. R csak a megfelelő kifejezéseket írta le.

10. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Helyes megoldások száma: 29.

Minden tanuló az első és a harmadik kifejezéssel kapcsolatosan a szakaszhossz mérőszáma jelentést adta meg.

D, M, N, S, T, és Z a második és harmadik kifejezésnek a téglalap területének mérőszáma jelentést adták, azzal hogy a D, M és S a következőt is leírták $(c+1) \cdot d = c \cdot d + d$. Háromszög területének mérőszáma jelentést az első kifejezésnek N, T, és Z adta. A harmadik kifejezésnek a négyzet területének mérőszáma jelentést a N és T adta meg. D a következő szituációs jelentést írta: *Az első és a második asztalon c torta van, a harmadik asztalon d torta van. Összesen $2 \cdot c + d$ torta van. T a következőt írta: *A testvéremnek négyszer annyi zsebpénze van, mint nekem. (A $4 \cdot d$ kifejezésre gondolt.)**

A második kísérleti csoportban a pontos válaszok száma: 22 volt. Mindenki az első és a harmadik kifejezéshez megfelelő szakaszokat rajzolt. I és V a háromszög területének mérőszáma jelentést adta a $2 \cdot c + d$ kifejezésnek. I a négyzet területének mérőszáma jelentést adta a $4 \cdot d$ -nek. B, I, K, L és V a $4 \cdot d$ -nek és négyen a $(c+1) \cdot d$ kifejezésnek a téglalap területének mérőszáma jelentést adták.

11. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Első egyenlőség értelmezése: helyes: 6; részben helyes: 2; helyes magyar nyelven: 8.

Második egyenlőség értelmezése: helyes: 8; helyes magyar nyelven: 8.

Harmadik egyenlőség értelmezése: helyes: 7; részben helyes: 1; helyes magyar nyelven: 8.

Negyedik egyenlőség értelmezése: helyes: 8; helyes magyar nyelven: 8.

Az első egyenlőség értelmezését jól fogalmazta meg hat tanuló szerb nyelven és nyolc tanuló pedig magyarul. Ők a következőt írták: *Ugyanannyi tulipán van, mint jácint. (Ima isto toliko lala kao zumbula.) Z az ugyanannyi (isto toliko) csak az isto (ugyanolyan) szót írta. O értelmezése: *A tulipánok szám egyenlő a jácintokkal. (Broj lala je jednak sa zumbulima.)**

A második egyenlőséget minden tanuló jól értelmezte. Öten mindkét nyelven a következőt írták: *Tízzel több jácint van, mint tulipán. (Ima za deset više zumbula nego lala.) N értelmezése mindkét nyelven a következő volt: *Tízzel kevesebb tulipán van, mint jácint. O és D eljárásaként fogalmazta meg a mondatot mindkét nyelven: *Ha a tulipánok számához hozzáadok tízet, megkapom a jácintok számát.***

A harmadik egyenlőséggel kapcsolatosan öt tanuló a következőt írta mindkét nyelven: *Négyszer annyi tulipán van, mint jácint. (Ima četiri puta više lala nego zumbula.) O és D most is eljárásaként fogalmazta meg a mondatot mindkét nyelven: *Ha a jácintok számát megszorozom négyvel, megkapom a tulipánok számát. S a következőt írta szerb nyelven: *Tulipánok van négyszer jácintok. (Lala ima četiri puta zumbula.) S válasza magyar nyelven helyes volt. A negyedik egyenlőség minden értelmezése mindkét nyelven helyes volt. O és D most is eljárásaként fogalmazott.***

A második kísérleti csoportban I magyarul nem írt semmit. Az első egyenlőség 6 értelmezése jó volt, valamint 1 részben volt jó. Magyar nyelven a négy egyenlőség mind a 6 értelmezés jó volt. R ugyanazt írta, mint Z. A második egyenlőséget jól értelmezték a tanulók. B és R eljárásaként fogalmazták meg a mondatokat. A harmadik egyenlőséget 4 tanuló ugyanúgy értelmezte mindkét nyelven, mint az 5 tanuló az első csoportból. B és R most is eljárást fogalmaztak meg. K megfogalmazása szerb nyelven helytelen volt: *A tulipánok száma egyenlő a négyszer több mint a jácintok száma. (Broj lala je jednak sa četiri puta veći od broj zumbula.) K a négyszer több kifejezés mellett használta az egyenlő szót is. A magyar mondat helyes volt. A negyedik egyenlőséget minden tanuló helyesen fogalmazott meg. B és R most is eljárást fogalmaztak meg.*

12. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Helyes megoldások száma: 6; helyes rész megoldások száma: 1; helytelen megoldások száma: 1.

Q csak a $2 \cdot a$ helyét határozta meg a számegyenesen. F a $2 \cdot a$ helyét a $2 \cdot a - 1$ helyére jelölte, ezért a $2 \cdot a - 3$ -at is helytelenül a $2 \cdot a - 4$ helyén jelölte.

A második kísérleti csoportban a helyes megoldások száma: 5; helyes rész megoldások száma: 1 volt. B nem jelölte a számokat, csak a megfelelő szakaszokat. R nem foglalkozott a feladattal.

13. feladat megoldásai (első kísérleti csoport):

Helyes megoldások száma: 4; helyes megoldások száma ellenőrzés nélkül: 2; helytelen megoldások száma: 2. D, M, S és Z ellenőrizték a helyes megoldásukat és szöveges választ is írtak. N és T nem írt ellenőrzést. D, M, S, T és Z szakaszos reprezentációkat is rajzoltak. F a következő egyenletet oldotta meg: $2 \cdot x + x - 5 = 95$; $3 \cdot x - 5 + 5 = 95 + 5$; $3 \cdot x = 100$; $x = 100 : 3$; $x = 33,3$. Reprezentációkat nem rajzolt; az eredményt nem ellenőrizte. Q megrajzolta a szakaszos reprezentációkat és a következőképpen oldotta meg az egyenletet $x + 2 \cdot x + (x - 5) = 95$; $x + 2 \cdot x + x - 5 = 95$; $2 \cdot x = 90$; $x = 45$. A megoldást nem ellenőrizte.

A második kísérleti csoportban a helyes megoldások száma: 5; helytelen megoldások száma: 2. J, I, L, K és V ellenőrizték a megoldást. I, L és V szöveges választ is adtak. Csak V nem rajzolt szakaszos reprezentációkat. B a következőt írta: $x + 2 \cdot x + x - 5 = 95 / + 5$; $4 \cdot x = 95 / : 4$; $x = 23,75$. R az osztásban hibázott. A megoldása következők: $x + 2 \cdot x + x - 5 + 5 = 95 + 5$; $x + 2 \cdot x + x = 100$; $4 \cdot x = 100$; $x = 20$. Nem ellenőrizte a megoldást.

4.3.3. Az utóteszt elemzésének összegzése

Az 1. és a 2. feladatban minden tanuló jól értelmezte az „=” jelet és ismeretlennek tekintette a négyzetet. Csak egy tanuló oldotta meg a feladatot egyenlet felhasználásával. A 2. feladatban a tanulók úgy oldották meg a feladatot, hogy az „=” jel két oldalán található kifejezések tagjait egymással hasonlították össze. A 3. feladatnál indoklásként a legtöbb tanuló szituációs jelentést írt. Ebből arra következtettek, hogy a többség számára az ilyen magyarázatok a legérthetőbbek. Voltak tanulók, akik a szabályt idézték. N numerikus jelentést írt, Q pedig a papír szalagokkal való manipulációra emlékezett. R választása helytelen volt. A 4. feladatnál F nem írta le a kifejezést az első táblázatba, Q a másodikkal nem foglalkozott. Mivel ők is meghatároztak egy-egy szabályt, bátorodom állítani, hogy a tanulók értették a táblázat fogalmát, tudtak általánosítani és váltózóként értelmezni a táblázatban megjelenő betűket. Az 5. feladat megoldásánál egy tanulón kívül mindenki megrajzolta a negyedik képet, úgy tűnik az segített az általánosításban. A 6. feladatnál a tanulók megfelelő algebrai kifejezéseket írtak és nem egyenlőségeket, mint az előtesztben. A 7. feladatban jól határozták meg a kifejezések szakaszos reprezentációit és a 8. feladatban az egyenlőségek szakaszos reprezentációi alapján jól írták le a szimbolikus reprezentációkat (5 tanuló írt olyan egyenlőséget, ahol az „=” oldalain kéttagú és háromtagú kifejezés állt). A 9. feladat megoldásából úgy tűnik, hogy a tanulók értik és algebrai kifejezésekkel tudják is reprezentálni a „valamivel több” és a „valahányszor annyi” számok közti viszonyokat és egyszerű algebrai kifejezéseket is képesek összevonni. A 10. feladat megoldásában minden tanuló szakaszhoz mérőszáma jelentést adott az első és a harmadik kifejezésnek és hat tanuló a téglalap területének mérőszáma jelentést adta a második és a harmadik kifejezésnek. Úgy tűnik, hogy a szakaszhoz jelentést a tanulók a legkönnyebben meg tudják fogalmazni, de legtöbben sikeresen el tudják sajátítani a téglalap területe jelentés megfogalmazását is. Az egyenlőségek jelentésének meghatározásában a 11. feladatban a tanulók jól értelmezték az egyenlőségeket. A dominánsan

magyar nyelvű tanulók megfogalmazásában szerb nyelven jelentkeztek kisebb hibák. Kevesebben fogalmaztak meg eljárásokat, mint az előtesztben. A 12. feladat két-két tanulónak mindkét csoportból gondot okozott. A 13. feladatnál az első csoportból 5, a másodikból 6 tanuló megrajzolta a kifejezések szakaszos reprezentációit. Mindkét csoportból négy tanuló megoldása volt hibás (E egyenlete volt helytelen). Négyen az első csoportból és ketten a második csoportból nem ellenőrizték a kiszámolt eredményt (köztük olyanok is, akiknek megoldása helytelen volt).

Az előteszt és az utóteszt helyes megoldásainak számát mutatja az alábbi táblázat:

FELADAT SORSZÁMA	1. KISÉRLETI CSOPORT		2. KISÉRLETI CSOPORT	
	<i>ELŐTESZT</i>	<i>UTÓTESZT</i>	<i>EJŐTESZT</i>	<i>UTÓTESZT</i>
1.	7	8	6	7
2.	2+2számolással	8	1+1 számolással	7
3.	2+2számolással	7+1 magyarázat nélkül	4 számolással	6
4. első táblázat	1	4+4 magyarázat nélkül	0	5+2 magyarázat nélkül
4. második táblázat	1	3+4 magyarázat nélkül	0	5+2 magyarázat nélkül
5. első képsor	2	8	2	7
5. második képsor	2	6	1	6
6.	3	8	2	6
7.	3+3 méréssel	8	3+4 méréssel	7
8.	5	8	5	7
9.	1	7	0	6
10.	25	29	17	22
11. 1.egyenlőség	4	6; 8 magyarul	5	6; 6 magyarul
11. 2.egyenlőség	2	8;8 magyarul	3	7; 6 magyarul
11. 3.egyenlőség	2	7; 8 magyarul	3	6; 6 magyarul
11. 4.egyenlőség	5	8; 8 magyarul	5	7; 6 magyarul
12.	2	6	1	5
13.		4+2 leírt ellenőrzés nélkül		5

A következtetéseket a tanulók algebrai tudásának gyarapodásáról a következőképpen vontam le: egyenként hasonlítottam össze a tanulók elő és utóteszt analóg feladatainak megoldásait, elemeztem az utóteszt 13. feladatának megoldásait és a tanulók munkáját a tanórákon. Ezekből levonható, hogy a tanulók algebratudása nagymértékben fejlődött.

Megjegyzés:

Mind a két tanítási kísérlet kismintás volt, ezért a tesztek kiértékelésében a szokásos statisztikai eljárásokat nem használtam. Ehhez jóval nagyobb elemszámú kísérletek szükségesek.

ÖSSZEGZÉS, KUTATÁSI KÉRDÉS MEGVÁLASZOLÁSA

Az előteszt és az utóteszt eredményeit összehasonlítva (az utóbbiak sokkal jobbak voltak) és a tanulók munkáját elemezve a kísérleti tanításból a következők vonhatók le:

Az egyenlőségjel helyes értelmezésének kialakulásában (Q helytelenül oldotta meg az előteszt 1. feladatát) és ennek megerősítésében (a többi tanulónál) a valódi mérleggel való munka segített.

Azt hogy a tanulóknál kialakuljon az igény az általánosításra, a „szabály” meghatározására (az egyváltozós függvény megalapozása), a megfelelő táblázat megszerkesztésére és kitöltésére, a változó bevezetésére az élethű játékos szituációnak elképzelése (japán kislánnyal kommunikálni), a gépmodellel és a rúdkészlettel való munka segítette. F és a második kísérleti csoport tanulói változó fogalmának kialakulásához hozzájárult a hajlítható ceruzával való munka. (Algebrai kifejezések értékének meghatározása alcím alatt.) A változó fogalmának kialakulásához hozzájárult a számegyenesen való munka (a tanulóknál tudatosult, hogy egy változó értéke negatív szám is lehet). A tanulók számára a geometriai minták alapján történő általánosítás érdekesnek bizonyult, különösen ha belátták, hogy a különböző képsoroknak azonos algebrai kifejezések felelnek meg.

Az algebrai kifejezések strukturáját a balyu és a lépcsős modellel szemléltettük és az utóbbi szintjeit egy síkba rakva biztosítottuk az ezt illusztráló séma megértését. A séma hasznos segédeszköznek bizonyult a zárójel szerepének és a műveletek sorrendjének megértésében. (A párokban való munka lehetővé tette a tanulók számára hogy önállóan észrevegyék a hibát.)

Az algebrai kifejezések és egyenlőségek szakaszokkal való reprezentálását a tanulók elsajátították (az utóteszt 7. és 8. feladatainak megoldásai hibátlanok voltak) és csak ilyen reprezentációkat használtak a szóveges feladatok megoldásánál (utóteszt 13. feladata és Q használja a 9. feladat megoldásánál is). A tanulók a kifejezések összeadásánál a kifejezéseket téglalapokkal is reprezentálták. A leghatékonyabbnak bizonyult és a legelfogadottabb volt a kombinált reprezentációs mód (az elsőfokú egytagú algebrai kifejezések és a számok reprezentálásánál szakaszokat a másodfokú kifejezések reprezentálásánál téglalapokat használtak). A kéttagú kifejezés szorzása egytagúval és a kiemeléskor használtuk a téglalapokkal való reprezentálást.

Az algebrai kifejezéseknek a tanulók képesek voltak az utóteszten különböző jelentéseket adni (10. feladat). Ez a „szalag aritmetika” (Q ezzel indokolta választását a 3. feladat utótesztjében) mellett hasznosnak bizonyult számukra az összeg (különbség) hozzáadásánál és kivonásánál (5 tanuló az első csoportból és 4 a másodikból szituációs jelentést írt). Az órákon a tanulók „meséi” alapján visszajelzést kaptam arról értik-e az azonosságokat és a szóveges feladatoknál az egyes feladattípusok jellemzőit.

A kifejezések jelentése alapján a tanulók az algebrai kifejezéseket is reprezentálták téglalapokkal

A *procept*-tel való foglalkozást a mindennapi életben használt kettős jelentésű címkékkel kezdtük, ezt alkalmaztuk a „szalag aritmetikában” is. A procept megértésére az utal, hogy az utóteszt 11. feladatában mindkét csoportban csak két-két tanuló írt eljárási értelmezést (eljárásaként értelmezték a kifejezéseket), a többiek az eljárás eredményeként értelmezték a kifejezéseket és az is hogy a 6. feladat megoldásaként a tanulók kifejezéseket írtak (ez azt jelenti, hogy maga a kifejezés számukra eredményt jelent).

A mérlegelv elsajátításában az egyenletek mérleggel és kiskockákkal, és a különböző lapokkal való reprezentálását és a tárgyakkal való manipulációkat a tanulók játéknak tekintették így a begyakorlás nem volt unalmas számukra.

A szöveg algebrára való lefordításánál eleinte konkrét, a szövegben szereplő tárgyakat használtunk (cukorkák, cérnadarabok) ez lehetővé tette a tanulók számára az egész feladat „eljátszását”. Megkönnyítette számukra a feladat megoldását akkor is, amikor konkrét számok szerepeltek a feladatban és akkor is, amikor változókkal helyettesítettük a számokat. Úgy tűnik, hogy hasznosnak bizonyult, hogy először csak algebrai kifejezéseket kellett a tanulóknak meghatározni és csak később kellett az egyenlet megoldására visszavezethető szöveges feladatokat megoldani. Az azonos struktúrájú feladatok megoldásában és a procept fogalmának elsajátításában a tanulóknak segítettek a kártyákon megadott segédkérdések.

Fontos megjegyezni, hogy a tanulók a konkrét és képi reprezentációk használatát néhány azonos típusú feladat megoldása után elhagyták. A tárgyak mindig felkeltették a tanulók figyelmét és szívesen „játszottak” velük.

A dolgozat első kérdése a következő volt:

- *Hogyan hat a konkrét és képi reprezentációk használata az algebra alapjainak elsajátítására az általános iskola hetedik osztályos kétnyelvű tanulók körében?*

Válaszként megállapítható, hogy a megfelelő hipotézis igaznak bizonyult:

- *Az általános iskola hetedik osztályos kétnyelvű tanulók körében a konkrét és képi reprezentációk használata hozzájárul az algebra alapjainak hatékony elsajátításához, különösen a változó fogalmának kialakulásához, az algebrai kifejezések lehetséges jelentésének meghatározásához, az algebrai kifejezésekkel való műveletek elvégzésének és az azonos struktúrájú szöveges feladatok megoldásának elsajátításához.*

A dominánsan magyar nyelvű tanulóknak a kétnyelvűségből adódóan komoly nehézségeik vannak a matematika szerb nyelven való tanulásában. A tanulók a különböző nyelvi szerkezetek miatt nem értik a feladatot és ezért nem tudják ezt helyesen megoldani (\underline{Z} nehézsége az előteszt 9. feladatával kapcsolatosan). Az ilyen tanulók gondolatait sokszor nehéz megérteni a helytelenül megfogalmazott mondatokból (az előteszt 11. feladatának első egyenlőségének \underline{Z} által leírt értelmezése).

Még a kiegyensúlyozott kétnyelvű tanulóknál is jelentkeznek gondok a magyar szakkifejezéseknél. A tanulók automatikusan fordítanak magyarra, és ha nem hívjuk fel a figyelmüket a különbségekre, hibázhatnak (a számérték helyett \underline{M} a számos érték kifejezést használta).

Az egyetlen tanuló, aki nem beszélt magyarul (\underline{I} a második csoportból), magyarul nem tudta megfogalmazni a mondatokat az utóteszt 11. feladatában.

Igyekeztünk kihangsúlyozni a magyar szakkifejezéseket, ha ezek nem a szerb kifejezések tükörfordításai voltak. Az utóteszt 11. feladatában \underline{Z} az első és \underline{K} és \underline{R} a második csoportból vétett kisebb hibát (az *isto toliko* helyett csak az *isto* szót használták; \underline{K} a többlet *egyenlő* szót használta) a szerbül megfogalmazott válaszokban. Magyarul \underline{I} nem válaszolt, a többiek magyar nyelvű válaszai jók voltak. A tanulók beszédkézsége szerb nyelven sokat javult, de nem tökéletes. A megfogalmazott magyar mondatokban interferenciákat nem észleltük. (Ilyen idős korban a pontos szakkifejezések tudása nem kötelező a tanulók számára, ezért ezek nem szerepeltek az utótesztben. E tudásukról csak az órai megfigyelésekből értesülhettem.)

A dolgozat második kérdése a következő volt:

- *Adódnak-e nehézségek a tanulók kétnyelvűségéből az algebra alapjainak elsajátításában és lehet-e a szerb kisebbségi iskolában biztosítani az interferenciáktól mentes szaknyelv és a helyes beszéd elsajátítását a kisebbségi és a magyar nyelven is a kétnyelvű tanulók számára?*

Válaszként megállapítható hogy az interferenciáktól teljesen mentes szaknyelv elsajátítását nem tudjuk biztosítani a tanulók számára ezért a következőt állíthatjuk:

- *Léteznek olyan nehézségek, melyek a tanulók kétnyelvűségéből adódnak az algebra alapjainak elsajátításában a szerb kisebbségi iskola hetedik osztályában. Az általunk alkalmazott tanítási módszer nagymértékben biztosítja az interferenciáktól mentes helyes beszéd elsajátítását a kétnyelvű tanulók számára. A tanulók szaknyelvi tudásukról pontos információval nem rendelkezünk.*

TOVÁBBI KUTATÁSI LEHETŐSÉGEK

Az egyik lehetséges további kutatás a tananyag „kipótlása” (kidolgozása és az egész kipróbálása egy új csoporttal) a *lineáris függvény bevezetése* témakörből.

Egy másik kutatás tárgyát jelentheti a kísérletben szereplő tanulók további algebra tanulásának és az algebrai tudásuk összehasonlítása más iskola hasonló korú tanulókéval.

Fontos további kutatási cél: tesztelni a dolgozatomban tárgyalt tanítási módszer jóságát más iskolákban (nagyobb kísérleti csoportokkal). Tökéletesíteni ezt, hogy alkalmazható legyen széles körökben az algebra alapjainak tanításában.

További kutatás tárgyát jelentheti e módszer alkalmazása a felzárkóztató foglalkozásokon a hetediknél magasabb osztályokban, melyeken részt vesznek a matematikától idegenkedő és az algebra alapfogalmait nem értő tanulók.

Egy érdekes kérdés a nyelvi konstrukció hatása az algebra tudására az egynyelvű tanulóknál. Könnyebb-e egy feladat az egyik, mint a másik nyelven, azért mert az egyik nyelvi szerkezet esetleg megkönnyíti a megoldást. Például a *valahányszor annyi (magyar kifejezés)* és a *valahányszor több (szerb kifejezés: broj puta vise)*.

IRODALOMJEGYZÉK

- Ambrus, A. Bevezetés a matematikadidaktikába. ELTE Eötvös kiadó, 1995, 157-158, 114.
- Bartha, Cs. A kétnyelvűség alapkérdései. Nemzeti tankönyvkiadó, 1999, 118, 181.
- Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.). Approaches to Algebra. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1996.
- Boot, L. R. Algebra: Children's strategies and errors. NFER- Nelson, Windsor, England, 1984.
- Bruner, J. S. (1966) Towards a Theory of Instruction. Harvard University Press, 1966, 44-45.
- Caspary, R. Lernen und Gehirn. Herder spectrum. Freiburg, 2006, 142-154.
- Chalouh, L., & Hersovics, N. Teaching algebraic expressions in a meaningful way. In A. F. Coxford (Ed.), The ideas of algebra, K-12, Yearbook, 1988, 33-42. Reston, VA: National Council of Teaching of Mathematics.
- Da Rocha Falcão, J. A Case Study of Algebraic Scaffolding: From Balance Scale to Algebraic Notation. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), Proceeding of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1995, Vol. 2, 66-73. Recife: Universidade Federal de Pernambuco.
- Dienes, Z. Építsük fel a matematikát. Gondolat, Budapest, 1973, 66.
- Filloy, E. & Rojano, T. Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. For the Learning of Mathematics, 1989, 9 (2), 19-25.
- Filloy, E., Puig, L., Rojano, T. Educational Algebra. Springer Science+Business Media, LLC, 2008, 134-134.
- Freudenthal, H. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1983.
- Göncz, L. A kétnyelvűség pszichológiája. Forum, Újvidék, 1985, 170.
- Gray, M. & Tall, D. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. The Journal for Research in Mathematics Education, 1994, 26 (2), 115-141.
- Grosjean, F. Another view of bilingualism. In Harris, Rihard J. (szerk.) 1992, 51.
- Györi, Gy. Intrejtű Dienes Zoltánnal. Köznevelés, 1973.
- Harper, E. Ghosts of Diophantus. Educational Studies in Mathematics, 18, 1987, 79-90.
- Kieran, C. Concept associated with the equality symbol. Educational Studies in Mathematics, 12(3), 1981, 317-326.
- Kieran, C. The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, 1989, 33-56. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kieran, C. Cognitive Processes involved Learning School Algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), Mathematics and Cognition, Cambridge: Cambridge University Press, 1990, 96-112.
- Kieran, C. The changing face of school algebra, invited lecture presented at the Eighth International Congress on Mathematics Education, Seville Spain, 1996.
- Klein, S. A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1980, 44-45.
- Lakoff, G. Women, Fire, and Dangerous things: What Categories Reveal about the Mind. University of Chicago Press, Chicago, 1987.
- Lambert, W. E. Culture and language as factors in learning and education. In: Wolfgang, A (szerk.) Education of Immigrant Children. Toronto, Ontario Institut for Studies in Education 1975.

- Malle, G. Mathematik lehren 15/April, 1986, 2-8.
- Majoros, M. Oktassunk vagy buktassunk. Calibra kiadó, 1992, 41.
- Matz, m. Towards a process model for high school algebra errors. In intelligent tutoring system (Eds. D. Sleeman and J. S. Brown). Academic Press, New York, 1982, 25-50.
- Piaget, J. Psychologie der Intelligenz. Klett Stuttgart, 1967.
- Pólya, Gy. A gondolkodás iskolája. Gondolat, Budapest, 1977, 236.
- Pólya, Gy. A problémamegoldás iskolája I-II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1979, 1985, 129-130 (I).
- Resnik, L. B., Cauzinille-Marmeche, E., & Mathieu, J. Understanding algebra. In J. A. Sloboda & D. Rogers (Eds.), Cognitive processes in mathematics. Clarendon Press, Oxford, 1987, 169-203.
- Rosnick, P. Some misconceptions concerning of variable. Mathematics Teacher, 74 (6), 1981, 418-420.
- Skemp, R. Relational understanding and instrumental understanding. Arithmetic Teacher , 26 (3), 1978, 9-15.
- Schoenfeld, A. Mathematical Problem Solving. Academic Press, INC., New York, 1985, 74.
- Sfard, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 21, 1991, 1-36.
- Skemp, R. A matematikatanulás pszichológiája. Gondolat, 1975, 28.
- Sutherland, Teaching and Learning Algebra-19 Report of Royal Society/JMC Working Group. Royal Society 1997, 4-5, 12.
- Szendrei, J. Gondolod, hogy egyre megy? Typotex Kiadó 2005, 319, 401.
- Tall, D. & Vinner, S. Concept image and Concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity Educational Studies in Mathematics, 12, 1981, 151-169.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In: A. F. Coxford (Ed.), The ideas of algebra, K-12, 1988 Yearbook of the NCTM, 8-19. Reston, VA: NCTM.
- Vásárhelyi, É. Combination of traditional and computer based tools as a strategy for problem solving. In Creativity and Mathematics Education, Münster, 1999, 163-166.
- Wittman, E. Ch. Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg, 1981.
- Wittmann, E. Ch. Standard Number representations in the Teaching of Arithmetic. Journal für Mathematik-Didaktik 2/3, 1998, 149 – 178.

ÖSSZEFOGLALÓ

Matematikatanítási munkám során gyakran szembesülök azzal a problémával, hogy tanulóim koruktól függetlenül sok hibát vétenek elemi algebrai ismereteik alkalmazása közben. E nehézségek egyik lehetséges magyarázata az, hogy a tanulók gyakran az algebrát, a „betűk világát”, egy minden mástól teljesen elkülönült, hasztalan matematikai területként élik meg, melyben fejből megtanult, érthetetlen szabályok szerint kell kezelni a szimbólumokat. Gyanítom, hogy téves elképzelésük hátterében tanulási folyamatuk azon időszakára áll, amikor először találkoztak az algebra fogalmaival.

A budapesti Szerb Tanítási Nyelvű Általános Iskolában és Gimnáziumban tanítok. Tanulóim tanulási nehézségeit fokozzák a kétnyelvűségből eredő problémák.

Tanulóim tanulási gondjai és speciális igényei ösztönöztek arra, hogy megpróbáljak kifejleszteni egy olyan módszert az algebra alapjainak tanítására, mely lehetővé teszi a tanulók számára, hogy az algebrai fogalmakat képességeik, tapasztalataik és a már elsajátított ismereteik felhasználásával építsék fel. Mivel ösztönösen már sikeresen használtam különböző segédeszközöket, a módszer magába foglalja a konkrét és vizuális reprezentációk használatát.

A tanítási kísérleteim tervezését, kivitelezését és elemzését a dolgozat **1. fejezetében** bemutatott elméleti háttér alapján végeztem el. Az elméleti háttér első részét a tanuláspszichológiai alapok képezik, melyekből a legfontosabbak a következők:

A *megértés* a feldolgozandó információ beépítését jelenti a meglevő kognitív sémákba. *Skemp* (1978) különbséget tesz *instrumentális* (a tanuló tudja az *eljárást*) és *relációs megértés* (a tanuló tudja *mit és miért kell csinálni*) között. A fejlesztő kísérletem során nagy hangsúlyt helyeztem a tanulók relációs megértésének fejlesztésére.

Bruner (1966) szerint bármely (egy ismeretterületen belüli) ismeretnek, tudásnak három különböző *reprezentációs* módja létezik: *materiális vagy enaktív sík* (egy bizonyos eredmény eléréséhez konkrét objektumokkal végzett megfelelő tevékenységsor általi szemléltetés); *ikonikus sík* (egy fogalmat, elvet, ismeretet annak teljes meghatározása nélkül jelképező összefoglaló képek, grafikonok, táblázatok, diagramok összessége); *szimbolikus sík* (szimbolikus vagy logikai állítások összessége, melyek egy proposíciók ki- és átalakítására szolgáló szabályok által meghatározott szimbolikus rendszerből származnak).

Wittmann (1998) kihangsúlyozza, hogy a tárgyi és a képi reprezentációk fontosak minden gyermek számára és hasznosak az egész tanulási folyamat során. Az algebra tanítása rendszerint a szimbolikus szinten zajlik. Célom a kísérleti tanítás során az volt, hogy az enaktív és az ikonikus reprezentációkat a Magyarországon megszokottnál hosszabb ideig alkalmazzam.

Josef Kraus (2006, szerkesztette *Caspary*) a modern agykutatás alapján az oktatás számára az alábbi követelményeket fogalmazta meg:

- *a tanítás legyen aktivizáló;*
- *a tanítás-tanulási folyamat többcsatornás legyen* (a saját maguk által végzett tevékenységekből az információk 90%-a marad meg);
- *az algebrai technikák alapvető fontosságúak; biztosítani kell lazább pihentető szakaszokat; - szükség van a tanulók figyelmének provokálására* (meglepető, váratlan szituációk használata);
- *megfelelő környezetet kell biztosítani* (osztályklíma fontossága; jókedvvel végzett tanulás serkenti az emlékezetet);
- *a tanítás-tanulási folyamatban kulcsfontosságú legyen a tanulói kíváncsiság;*
- *a testi aktivitás legyen e folyamat része.*

Az elméleti háttér második részéből, a matematikadidaktikai alapokból véleményem szerint a következők a legfontosabbak:

A *Realisztikus matematikaoktatás*, mint tanítási irányzat *Freudenthal* irányításával alakult ki. *Didaktikai alapelvei* a következők:

- a tanulók matematikai aktivitása egy konkrét kontextusban megy végbe;
- horizontális matematizáció (informális, kontextus függő szintről a reflektív, formális, szintre való áttérés, vizuális modellek, modell-szituációk, különböző anyagok, sémák, diagramok és szimbólumok segítségével történik) és
- vertikális matematizáció (a struktúrák, a szisztematikus, formális ismeretek kiépítését jelenti);
- a tanulók saját konstrukcióinak, produktumainak a fontossága;
- szociális kontextus, interakciók (a tanulók saját produktumaikat összehasonlítják, konfrontálják társaik produktumaival);
- összefüggések, kapcsolatok (az új szempontokat, mentális objektumokat a meglévő ismeretrendszerbe kell illeszteni).

Kieran (1996) a következő algebrai tevékenységeket különbözteti meg az általános és a középiskolákban egyaránt: *általánosító tevékenységek; transzformációs tevékenységek; globális, meta szintű, tevékenységek.*

Malle (1986) a következő követelményeket fogalmazta meg az algebra tanításával kapcsolatosan az alsóbb osztályokban:

- először a változó, az algebrai kifejezések, és az egyenletek használata a fontos, és ezekkel kapcsolatban csak később kell beszélni a tanulókat;
- fontos a korai és sokféle tevékenység a változókkal (nem csak átalakítások, hanem szituációk leírása, problémamegoldás és argumentálás);
- külön figyelmet kell fordítani a képletek (formulák) felállítására és interpretálására;
- fontos a változó fogalom minden aspektusának (tárgyi, behelyettesítési és kalkulus) figyelembevétele, de kezdetben a tárgyi aspektus kihangsúlyozása az elsődleges;
- a képletek (formulák) függvényyszerű aspektusának kihangsúlyozása;
- nem az algoritmusok öncélú használata a fontos, hanem azok tartalmának megfontolása;
- a szabályok tudatosabb és precízebb alkalmazására való törekvés.

Gray és *Tall* (1994) vezették be a „procept” fogalmát, melyet az, az elképzelés határoz meg, hogy egy kifejezést, mint például a $3+2$ -t, tekinthetünk egy eljárásként (műveletként), és az eljárás eredményeként, egy objektumként (összegként) is. Az algebrai kifejezések kétfajta értelmezése nagyon sok gondot okoz különösen a gyengébb tanulóknak.

Egy algebrai kifejezésnek vonatkozó jelentése is van: *numerikus jelentés* (egy algebrai kifejezés általánosságban jelölhet egy számok közti kapcsolatot – ezt numerikus jelentésnek nevezjük); *szituációs jelentés* (egy algebrai kifejezés jelölhet mennyiségek közti kapcsolatot bizonyos szituációkban).

A nyelv és a kétnyelvűség a matematikaoktatásban

Chomsky nyelvsajátítási hipotézise szerint az emberben születéstől vagy a nyelv gyermekkori elsajátításától kezdve működni kezd egy veleszületett nyelvsajátítási program. E program működését a nyelvvel való emberi kontaktus verbális ingerei váltják ki.

Grosjan szerint a kétnyelvű emberek azok, akik mindennapi életükben két nyelvet használnak.

Göncz (1985) szerint a Cumis-féle hipotézis igaz volta: „... a balasz kétnyelvűek jobb eredményeit implikálja az egynyelvűekhez viszonyítva.” *Göncz* eredményeinek tudatában fokozott törekvésünké vált tanulóim balaszírozott kétnyelvűségének megközelítése.

Az elméleti háttér és a tanítási tapasztalataim alapján a hetedik osztályos tanulók számára összeállítottam az előtesztet és a tanítási anyagot az algebra alapjainak témaköréből.

A dolgozat **2. fejezetében** a tanulóim nyelvi problémáival foglalkozom, és arra keresem a választ, hogy hogyan tanítsam az algebrai szakkifejezéseket a hetedik osztályban. A tizenkettedikes tanulók interjúi alapján megfogalmaztam a következőket:

A tanítási mód melyet addig használtam nem volt eléggé hatékony a nyelvi interferenciáktól mentes szaknyelv és a helyes beszéd elsajátításában. Ez különösen a magyar szaknyelvre vonatkozik, melynél a tanulói teljesítmények sokkal gyengébbek voltak, miközben a tanulók magyar nyelvtudása jobb volt a szerb nyelvtudásánál.

Ezért az algebrai szakkifejezéseket a hetedik osztályban - figyelembe véve *Skemp* gondolatait a fogalomtanításról („...fontos kihangsúlyozni a közös tulajdonságokat, de azt is hogy a fogalom miben különbözik más fogalmaktól”) - a következőképpen tanítottam: *azon kívül, hogy leírtuk a kifejezéseket mindkét nyelven, kihangsúlyoztam, hogy a kifejezések egymás tükörfordításai, vagy sem. Ha nem, felhívtam a tanulók figyelmét, hogy melyek a különbségek, s elmondtam, hogy általában milyen hibákat vétene a megnevezéskor a tanulók. Bár iskolánkban a tanítási nyelv szerb, nemcsak a kifejezéseket neveztem meg magyar nyelven, hanem egész mondatokat mondtam magyarul; azoktól a tanulóktól, akik tudtak magyarul, magyar nyelven vissza is kértem.*

Kutatásom során sikerült az algebra alapjait az iskolánk hetedik osztályában (8 illetve 7 tanuló) két oktatási kísérletben (2006 illetve 2007 tavaszán) e módszer szerint 23 tanítási órában tanítani. A kísérletek során a hivatalos magyar algebra tanterv anyagát tanítottam, melynek részletezése iskolánk helyi tantervében van konkretizálva. A dolgozat **3. fejezetében** a fejlesztő oktatási kísérlet óratervét, a kutatási kérdéseket és a kutatás módszereit mutatom be.

Az óraterv a következő volt:

- *Aritmetikai kifejezések és a nyelvi különbségek (1 óra)*
- *Változó fogalmának bevezetése gépmódel alkalmazásával (1 óra)*
- *Konkrét szituációk reprezentálása algebrai kifejezésekkel és algebrai kifejezések kontextusba való helyezése. Algebrai kifejezések szerkezete (1 óra)*
- *Geometriai minták vizsgálata (1 óra)*
- *Algebrai kifejezések értékének meghatározása (1 óra)*
- *Algebrai kifejezések reprezentálása szakaszokkal. Algebrai kifejezések a számegyenesen. (1 óra)*
- *Konkrét szituációk kódolása (2 óra)*
- *Az algebrai kifejezések lehetséges konkrét jelentései (1 óra)*
- *Algebrai kifejezések összevonása (3 óra)*
- *Összeg és különbség hozzáadása és kivonása (1 óra)*
- *Kéttagú algebrai kifejezés szorzása egytagúval (1 óra)*
- *Kéttagú algebrai kifejezés szorzása egytagúval és összevonás: gyakorlat (2 óra)*
- *Kéttagú algebrai kifejezés szorzattá alakítása (kiemelés) (1 óra)*
- *Lineáris egyenletek megoldása mérlegelvével (3 óra)*
- *Lineáris egyenlet megoldására visszavezethető azonos struktúrájú szöveges feladatok (3 óra).*

Kutatásomban két kérdésre kerestem a választ:

1. Hogyan hat a konkrét és képi reprezentációk használata az algebra alapjainak elsajátítására az általános iskola hetedik osztályos kétnyelvű tanulók körében?

2. Adódnak-e nehézségek a tanulók kétnyelvűségéből az algebra alapjainak elsajátításában és lehet-e a szerb kisebbségi iskolában biztosítani az interferenciáktól mentes szaknyelv és a helyes beszéd elsajátítását a kisebbségi és a magyar nyelven is a kétnyelvű tanulók számára?

Dolgozatom **4. fejezetében** az előteszt eredményeit és az első kísérleti tanítást részletesen elemzem. (A második kísérleti tanításból csak néhány jellegzetes tanulói megoldást mutattam be.)

A tanítási ciklus megkezdése előtt negyvenöt perces felmérőt írtam a tanulókkal. A felmérő célja a következő volt: *megállapítani milyen előismeretekkel rendelkeznek a tanulók néhány alapvető algebrai fogalommal kapcsolatosan.*

Az első két feladatban a „=” jelet kellett helyesen értelmezni. A 2. feladatnál az egyenlőségjel két oldalán levő kifejezések összeadandóit kellett összehasonlítani és észrevenni, hogy van köztük két egyenlő értékű. A 3. feladatban a zárójel felbontására kérdeztem rá. A 4. és 5. feladatban általánosítani kellett és leírni a megfelelő algebrai kifejezéseket. A 6., a 7., és a 8. feladatban a tanulónak össze kellett kapcsolni a geometriai és az algebrai ismereteit. A szimbolikus reprezentáció alapján meg kellett határozni a kifejezések szakaszos reprezentációit és fordítva. A 9. feladatban a szöveget kellett értelmezni, leírni a megfelelő algebrai kifejezéseket és ezeket összeadni. A 10. feladatban jelentést kellett adni az algebrai kifejezéseknek. A 11. feladatban értelmezni kellett az egyenlőségeket és a 12. feladatban a számegyenesen kellett a kifejezések helyét meghatározni.

Az elő-teszt eredményeit figyelembe véve az előzőleg megtervezett (összeállított) tananyagot kibővítettem a következőkkel: az egyenlőségjel helyes értelmezése valódi mérleg felhasználásával; hosszúság mérése, a mértékegység és a mérőszám fogalma.

A konkrét és képi reprezentációk szerepe a kísérleti tanításban

A gépmodell és a hajlítható ceruza alkalmazása hasznosnak bizonyult a változó fogalmának bevezetésénél. Az elképzelt szituáció ahol „kommunikálni” kellett egy japán tanulóval eredményezte, hogy tanulóim szükségét érezték az algebrai szimbólumok használatának. A procept fogalmának elsajátításában segítettek a megfogalmazott segédkérdések, és az elképzelt szituáció is, amelyben Aiko magyar nyelvtudás nélkül sikeresen vásárolt. A lépcsős modell, a batyu modell, és a séma használata kulcsfontosságú volt az algebrai kifejezések struktúrájának megértésében. A képi reprezentálást megelőzte a konkrét (tárgyakkal való) reprezentálás (a táblázat reprezentálásánál a számokat először konkrét tárgyakkal, majd képekkel és végül szimbólumokkal reprezentáltuk; előbb a lépcsős modellt használtuk és csak ezt követően a sémát). A konkrét reprezentáció fontos a tanulók számára, mint a „játék” eszköze. Ebből adódóan a megfelelő képi, illetve szimbolikus reprezentációt is természetesnek tekintik, mint a tárgyi reprezentációk rajzait vagy jeleit. A séma esetében a tárgyi reprezentációnak köszönhetően a tanulók könnyebben megértették magát a sémát.

A tanulók először a számokat, később a változók szorzatát racionális számmal és végül az említett kifejezések összegeit is reprezentálták megfelelő szakaszokkal. Az azonos struktúrájú egyenletek megoldására vezethető szöveges feladatok megoldásánál a szakaszos reprezentációkat használták a tanulók. Az ilyen feladatok megoldásánál hasznosnak bizonyult a segédkérdések megfogalmazása és alkalmazása. Először az azonos struktúrájú szöveges feladatokkal foglalkoztunk, melyeknél észre kellett venni, hogy ugyanazzal az algebrai kifejezéssel lehet őket modellezni. Ezt követően fokozatosan nehezebbé váltak a feladatok: a kifejezés helyett, egyenletet kellett felállítani, ezt megoldani, és az adott kontextusban interpretálni a megoldást. A tanulók elsajátították a racionális számok, az első és másodfokú egytagú algebrai egész kifejezések reprezentálását téglalapokkal. Az egytagú kifejezések szakaszokkal és téglalapokkal való reprezentálása lehetővé tette a tanulók számára, hogy könnyebben absztraháljanak. A tanulók önállóan fogalmazták meg, hogy hogyan kell összevonni az egymű algebrai kifejezéseket. Legtöbbször kombinálva használták a kétfajta reprezentációt: a számokat és az elsőfokú kifejezéseket szakaszokkal reprezentálták; a másodfokú kifejezéseket téglalapokkal (például a $4ab$ -t négy egyforma téglalappal). Voltak tanulók, akik a számokat és az elsőfokú kifejezéseket is téglalapokkal reprezentálták. A két csoportból csak egy tanuló nem reprezentálta a kifejezéseket szakaszokkal vagy téglalapokkal. Ő a változóknak numerikus jelentést adott és ily módon könnyebbé tette az összevonást. A mérlegelv megértését és elsajátítását elősegítette a valódi mérleg használata, begyakorlásában pedig az egyenletek papírlapokkal való reprezentálása bizonyult hasznosnak.

A kétfajta algebrai kifejezések egytagúval szorzásánál, és a kiemelésnél a téglalapos repre-

zentációkat használták a tanulók. Fontos kihangsúlyozni, hogy a tanulók elhagyták a konkrét, képi reprezentációk használatát.

Az oktatási kísérlet után negyvenöt perces utó-tesztet írtam a tanulókkal. Az utó-teszt feladatai analóg feladatok voltak az elő-teszt feladataival, az eltérés csak annyi volt, hogy az utó-tesztet bővítettem még egy szöveges feladattal. A teszt eredményei lényeges fejlődést mutattak.

Összegezve a tesztek eredményeit, a kísérleti tanítások tapasztalatait, és a tanulók munkáját az órákon, a kutatási kérdésekre megfogalmaztam a válaszokat a dolgozatom **5. fejezetében**:

- *Az általános iskola hetedik osztályos kétnyelvű tanulók körében a konkrét és képi reprezentációk használata hozzájárul az algebra alapjainak hatékony elsajátításához, különösen a változó fogalmának kialakulásához, az algebrai kifejezések lehetséges jelentésének meghatározásához, az algebrai kifejezésekkel való műveletek elvégzésének és az azonos struktúrájú szöveges feladatok megoldásának elsajátításához.*
- *Léteznek olyan nehézségek, melyek a tanulók kétnyelvűségéből adódnak az algebra alapjainak elsajátításában a szerb kisebbségi iskola hetedik osztályában. Az általunk alkalmazott tanítási módszer nagymértékben biztosítja az interferenciáktól mentes helyes beszéd elsajátítását a kétnyelvű tanulók számára. A tanulók szaknyelvi tudásukról pontos információval nem rendelkezünk.*

A dolgozat végén néhány további kutatási lehetőséget jelöltem ki, remélve, hogy e dolgozat jelenthet egy csekély lépést annak a kutatási folyamatnak a kezdetén, amely lehetővé teszi e tanítási módszer szélesebb körű alkalmazását az algebra alapjainak tanításában.

SUMMARY

During my work as a Mathematics teacher I often face the problem that my students – irrespective of their age - make quite a few mistakes while applying their basic knowledge of algebra. One of the possible explanations for these difficulties is that students often interpret algebra - “the world of letters” - as an isolated and useless mathematical area in which symbols should be dealt with following some incomprehensible rules learnt by heart.

What lies behind their erroneous understanding, I presume, is the phase of their learning process when they met the concepts of algebra for the very first time.

I currently teach at the Serbian Language Primary and Secondary Grammar School of Budapest.

My students’ learning difficulties are increased by the problems originating in their being bilingual. I was motivated by my students’ learning difficulties and their special needs to make an effort and develop a method for teaching the basics of algebra which enables students to build up the concepts of algebra on the basis of their ability, experience and previously acquired knowledge. Previously I had been instinctively using various teaching aids successfully, applying the method, which involves the use of the concrete and visual representations.

The planning, execution and analysis of my teaching experiments were all carried out on the basis of the theoretical background introduced in the first chapter of my thesis. The 1st chapter of the theoretical background consists of basics of the psychology of learning, out of which the most important ones are the following: The *understanding* means building the information to be processed in previously existing cognitive schemes. *Skemp* (1978) distinguishes instrumental (the learner knows the procedure) and relational understanding (the learner knows *what to do and why*). While doing my developmental experiments I put a great emphasis on developing the students’ relational understanding.

According to *Bruner* (1966) there are 3 models of *representation* of any knowledge (within a certain field of knowledge) or learning: The *material or enactive representation* (that is a certain action based representation using particular objects in order to achieve a certain result), the *iconic representation* (all the images, graphs, charts, diagrams that represent a concept, principle or knowledge without fully defining it), and the *symbolic representation* (all the symbolic or logical statements which originate from a symbolic system which is determined by formulas used for forming and transforming propositions). *Wittmann* (1998) emphasizes that the material and visual representations are highly important for every child and useful throughout the whole learning process. The teaching of algebra often takes place on a symbolic level. My aim during the experimental teaching was to apply the enactive and the iconic representations for more extended period than it had previously been usual in Hungary.

Josef Kraus (2006, edited *Caspary*) based on the results of modern brain research formulated the following requirements for education:

- *teaching should be activating;*
- *teaching - learning process should be a multi-channel process (90% of the information from activities carried out by the students themselves remain);*
- *algebraic techniques are of fundamental importance; less tense, relaxing periods should be provided;*
- *students’ attention should be challenged (using surprising, unexpected situations);*
- *appropriate environment should be provided (the importance of the class-climate, learning carried out in good spirits stimulates the memory);*
- *in the teaching - learning process students curiosity should be pivotal;*
- *physical activity should be a part of this process.*

From the second part of the theoretical background - the fundamentals of mathematics

didactics, I consider the following ones the most important: *The Realistic Mathematics Education (RME)* as an educational tendency was developed under the guidance of *Freudenthal*.

His didactical guidelines are the following:

- *students' mathematical activity is context specific;*
- *horizontal mathematization* (moving over from an informal context-linked level to a reflective, more formal level with the help of visual models, model-situations, various materials, schemes, diagrams and symbols) and;
- *vertical mathematization* (which means the development of understanding of structures, at a systematic, formal level);
- *importance of students' own structures and concepts;*
- *social context, interaction* (students compare and contrast their own concepts with their fellow students' concepts);
- *connections, relations* (the new aspects, mental objects should be fitted into the previously existing system of knowledge).

Kieran (1996) identifies the following examples of different algebraic activities both in primary and in secondary schools: *generalization activities, transformation activities, and global meta level activities.*

Malle (1986) drew up the following requirements of teaching algebra in lower primary classes:

- *initially, the most important thing is the use of variable, algebraic concepts and equations* and we should make students speak with regard to these only at a later phase;
- *early and varied activities using variables* (not only transformations but describing situations, problem solving and argumentation) are of essential importance;
- *extra attention should be paid to creating and interpreting formulas;*
- *considering all aspects of the concept of the variable* (objective, substitutional and calculus) is important, but initially emphasizing the objective aspect is of primary importance;
- *algorithms should be taught through understanding their contents rather than mere purpose of using them;*
- *effort towards a more conscious and accurate application of the rules.*

Gray and Tall (1994) introduced the concept of “*procept*” which is defined by the idea that a symbol such as $3+2$ can be regarded both as a *process* (operation) and as a *concept of the process* an object (sum).

The often ambiguous interpretation of mathematical notations causes much difficulty especially to lower achieving students.

An algebraic expression also carries a certain *referential meaning: numerical meaning* (an algebraic concept, in general, can indicate meaning); *situational meaning* (an algebraic expression in certain situations can indicate relationships between quantities).

Language and bilingualism in mathematics education

According to *Chomsky's* hypothesis on language acquisition, children are born with an innate language acquisition device, which starts to operate as soon the child is born or starts acquiring the language.

Grosjean (1992) defines bilingual people as people who speak two languages in their everyday lives.

According to *Göncz* (1985) “... the balance implies better results of bilingual ones compared to the monolingual ones.”

Being acquainted with *Göncz's* result I made an effort to approach my students' balanced bilingualism.

On the basis of the theoretical background and my teaching experience I prepared a pre-test and teaching material on the fundamentals of algebra for seventh grade students.

In the **2nd chapter** of my thesis I focused on the language problems of my students, trying to find the best way of teaching algebraic concepts in the seventh grade.

Based on the interviews of the twelfth-grade students, I formulated the following:

The teaching method I had used so far was not efficient enough for the acquisition of the technical language-devoid of any linguistic interface - and the correct speech. This applies especially to the Hungarian technical language, in case of which students' performance proved to be much weaker; were better than their Serbian language skills.

This is why I decided to teach algebraic concepts - considering *Skemp's* thoughts on teaching of concepts (emphasizing that the mutual characteristics is important as well as highlighting how that very concept differs from other ones) –in the following way: besides writing down the concepts in both languages, I emphasized whether they were each other's loan translations or not. In case they weren't, I draw students' attention to their differences and explained other students' common mistakes in specifying them.

Even though the language of teaching in our school is Serbian, not only did I specify concepts in Hungarian, but also pronounced entire sentences in Hungarian; and those students who spoke Hungarian were examined in them in Hungarian.

During my research, I managed to teach the fundamentals of algebra in two groups of our school's seventh graders (8 and 7 pupils) in two teaching experiments (in the spring of 2006 and 2007) applying the method mentioned above in 23 lessons. During the experiments, I was teaching algebra according to the Hungarian National Curriculum, which is specified in details in our school's own local curriculum.

In the **3rd chapter** of my thesis I present the lesson plan of the developmental teaching experiment, the research questions and the research methods.

The lesson plan was the following:

- *Arithmetic expressions and the linguistic differences (1 lesson)*
- *Introducing the concept of 'variable' using a model of a machine (1 lesson)*
- *Representation of particular situations with algebraic expressions and putting algebraic expressions in context. The structure of algebraic expressions (1 lesson)*
- *Investigation of geometric patterns (1 lesson)*
- *Representation of algebraic expressions with segments. Algebraic expressions on the numberline. (1 lesson)*
- *Coding particular meanings of algebraic expressions (2 lessons)*
- *Simplifying algebraic expressions (3 lessons)*
- *Addition and subtraction of sum and difference (1 lesson)*
- *Multiplication of binomial algebraic expressions with monomial ones (1 lesson)*
- *Multiplication of binomial algebraic expressions with monomial ones and their simplification: practice (2 lessons)*
- *Forming a product out of binomial algebraic expressions (factorizing) (1 lesson)*
- *Solving linear equations with the help of the principle of scales (3 lessons)*
- *Similar structured word problems that can be attributed to the solution of linear equations (3 lessons)*

In my research, I attempted to answer the following two questions:

1. How does the use of concrete and visual representations for the acquisition of the fundamentals of algebra affect seventh-grade bilingual students' learning?

2. Do difficulties in acquisition of the fundamentals of algebra arise from the students' being bilingual and can the acquisition of the technical language - devoid of any linguistic interference - and the correct speech be provided for the bilingual students both in the minority language and in Hungarian?

In the **4th chapter** of my thesis I analyze the results of the pre-test and the first experimental teaching in detail. (From the second experimental teaching I only present a few characteristics of student behaviors.)

Before starting the teaching-cycle I made my students complete a 45-minute written test. The aim of the test was the following: *to establish what kind of previous knowledge do students possess about a few essential algebraic concepts.*

In the first two tasks the symbol “=” had to be interpreted correctly. In the second task the addable sums of the expressions on the two sides of the equals sign had to be compared and it had to be observed that there were two of equal value on either side. The 3rd task was about undoing parentheses. In the 4th and 5th tasks students had to generalize and write down the appropriate algebraic expressions. In the 6th, 7th and 8th tasks students had to link their geometric and algebraic knowledge. Based on the symbolic representation they had to define the segmental representation of certain concepts and the other way round. In the 9th task a text had to be interpreted, students had to write down the appropriate algebraic expressions, and add them up. In the 10th task meaning had to be given to the algebraic expressions. In the 11th task the equalities had to be interpreted and in the 12th task places of the expressions had to be determined on the numberline.

Considering the results of the pre-test I extended the previously planned (prepared) teaching material with the following: the correct interpretation of the equal sign using scales; the concept of units and measures by measuring length.

The role of the concrete and visual representations in the experimental teaching

Applying the model of a machine and the flexible pencil proved to be useful when introducing the concept of the variable. The imaginary situation where students had to “communicate” with a Japanese student resulted in my students feeling the urge to use algebraic symbols.

In the acquisition of the concept of the precept the formulated questions-to-help proved to be useful as well as the imaginary situation where Aiko managed to do some shopping without any knowledge of Hungarian. For the understanding of the structure of the algebraic expressions the use of the stairs-model, the bundle-model and the scheme was of essential importance. The visual representation was preceded by the concrete representation using certain objects (when representing the chart, we represented the numbers first with particular objects, then with images and finally with symbols; first we used the stairs-model and the scheme came only after that).

The concrete representation is important for the students, since it is the means of playing games. That is why they accept the appropriate visual or symbolic representation as the drawings or signs of material representation.

In case of the scheme, thanks to the material representation it was much easier for the students to understand the scheme itself.

Using appropriate segments students first represented numbers, then the product of the multiplication of variables and rational numbers and finally the sums of the listed expressions.

The students used segmental representations for solving word problems that could be reduced to solving similar structured equations. Formulating and applying questions-to-help proved helpful for solving such tasks. First we were engaged in solving similar-structured word problems, where it had to be observed that they could be modeled using the same algebraic expression. Following this, tasks gradually became more and more difficult: instead of an expression an equation had to be set up, solved, and its solution had to be interpreted in a certain context.

Students acquired the ability to represent rational numbers and linear and quadratic monomial algebraic expressions (integers as constants) using rectangles. Representing monomial expressions using segments and rectangles made abstraction easier for students.

Students formulated independently how homogeneous algebraic expressions had to be simplified. Most students combined the two kinds of representations with each other: they represented

numbers and expressions with rectangles (for example: they represented $4ab$ with four similar rectangles). Some students represented both numbers and linear expressions with rectangles. Out of the two groups there was only one student who did not use segments or rectangles for representing expressions. He gave numeric meaning to the variable and this way facilitated the simplification.

Understanding and acquiring the principle of scales was helped by the use of real scales and during the practice, representing the equations with strips of paper proved useful, too.

Students used rectangles as a means of representation while doing multiplications of binomial algebraic expressions with monomial ones and while factorizing. It is important to emphasize that the students abandoned the use of concrete, visual representations.

After the teaching experiment, I had the students complete a 45-minute post-test. The tasks of the post-test were analogous with the tasks of the pre-test. The only difference was that the post-test was extended with one more word problem. The result of the test indicated significant development.

Summarizing the results of the tests, the experiences of the experimental teaching and the students' in-class activity, I formulated the answers for the research questions in the 5th chapter of my thesis:

- *The use of concrete and visual representations for seventh-grade bilingual students contributes to the efficient acquisition of the fundamentals of algebra, especially to the development of the concept of variable, to the definition of the possible meanings of the algebraic expressions and acquiring the skills of carrying out operations with algebraic expressions and solving similar-structured word problems.*
- *There are certain difficulties in the acquisition of the fundamentals of algebra in the 7th grade of the minority school. The teaching method we applied highly contributes to the acquisition of correct speech devoid of any linguistic interference for bilingual students. We do not possess exact information about the students' knowledge of technical language.*

At the end of my thesis I pointed out a few opportunities for further research, hoping this present thesis might mean a small step towards the beginning of a research process, which would hopefully, lead to the wider application of this teaching method in teaching of the fundamentals of algebra.

**KONKRÉT ÉS KÉPI
REPREZENTÁCIÓK HASZNÁLATA
A HETEDIK OSZTÁLYOS ALGEBRATANÍTÁSBAN**

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a Matematika- és számítástudományokban

Írta: Stankov Gordana okleveles matematika tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és számítástudományokban doktori iskolája
(Matematika-didaktika programja) keretében

Témavezető: Dr. Ambrus András

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.
tagok: Dr.
Dr.

A doktori szigorlat időpontja: 200.....

Az értekezés bírálói:

Dr.
Dr.
Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.
tagok: Dr.
Dr.
Dr.
Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 200.....