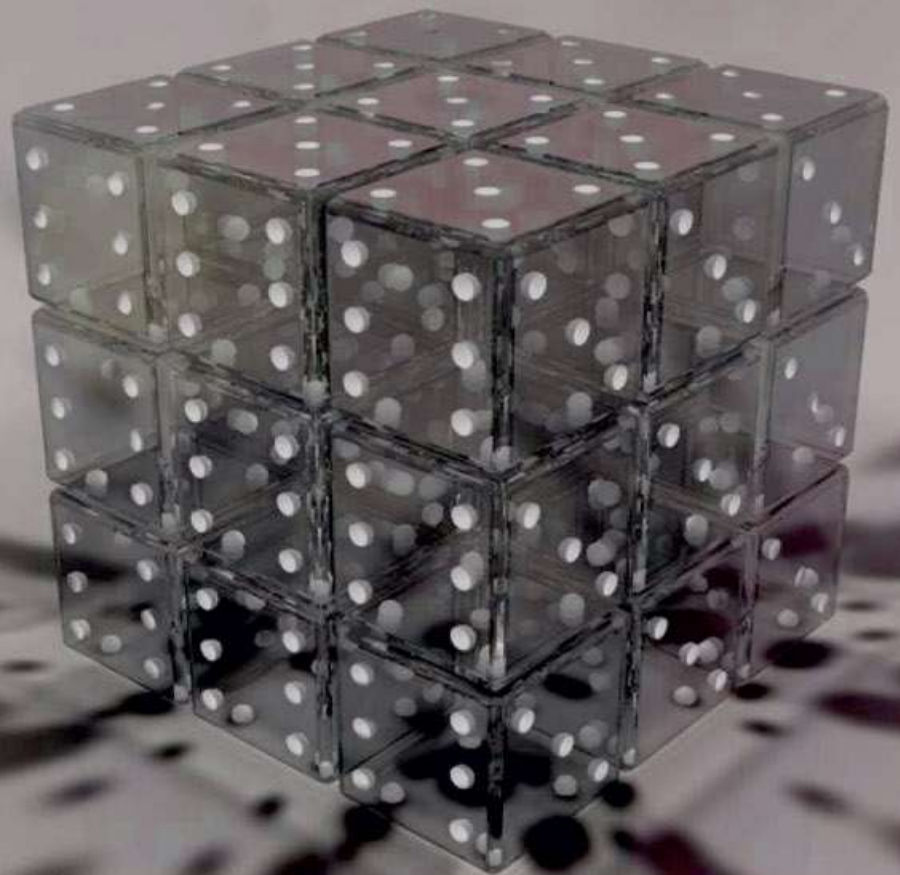


Vinczéné Dr. Varga Adrienn

# Többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítása



Debreceni Egyetem Műszaki Kar  
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM  
MŰSZAKI KAR

Vinczéné Dr. Varga Adrienn

TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK  
DIFFERENCIÁL- ÉS  
INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

Mérnökhallgatók részére



Debreceni Egyetemi Kiadó  
Debrece University Press  
2017

Lektorok:

Dr. Kocsis Imre

Tanszékvezető főiskolai tanár  
Debreceni Egyetem Műszaki Kar Műszaki Alaptárgyi Tanszék

Dr. Vincze Csaba

Egyetemi docens, Debreceni Egyetem TTK Matematikai Intézet

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,  
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

ISBN 978 963 318 624 4

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press

Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi

Nyomdai munkálatokat

a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2017-ben.

[www.dupress.hu](http://www.dupress.hu)

## Előszó

A jegyzet a Debreceni Egyetem Műszaki Karán folyó mérnökképzés során elsajátítandó, haladottabb matematikai kurzusok anyagába nyújt betekintést. Az első két fejezetben a többváltozós függvények differenciál- és integrálszámítását, valamint a kapcsolódó elméleti alkalmazásokat (görbék és felületek, a vektoranalízis elemei) tárgyaljuk. A harmadik fejezet a differenciálegyenletek témakörével foglalkozik, végül pedig - a negyedik fejezetben - kidolgozott feladatok segítik az ismertetett elméleti módszerek, fogalmak és tételek elsajátítását. Az elmélet kifejtése során - a feltüntetett szakirodalom-jegyzéken túl - azokra a tapasztalatokra támaszkodtunk, melyeket a Műszaki Alaptárgyi Tanszék matematikai kurzusainak oktatása során szereztünk az elmúlt években. Ez egyrészt vonatkozik a mérnökszakma igényeinek követésére, másrészt pedig az absztrakt, illetve a szemléletes megközelítés közötti összhang megteremtésére. Az előbbire fontos példa a matematikai szoftverek alkalmazási lehetőségeinek bemutatása a problémamegoldás során. Ezt a jegyzetben a MAPLE segítségével illusztráljuk, jóllehet a matematikai kurzusok gyakorlatain kiegészül a szabad felhasználású szoftverek (GeoGebra, WolframAlpha) alkalmazásaival. Kifejezetten törekedtünk a matematikai fogalmakat és eszközöket mérnöki szempontból is érdekes kontextusban említeni: deriváltmátrix (szilárdságtan: forgató- és alakváltozási tenzor), felületi integrál (áramlástan: fluxus, divergencia és rotáció), örvénymentes vektormezők és potenciál, állandó együtthatós (másodrendű) differenciálegyenletek (mozgásegyenlet) stb. Ezen túl bőséges ábraanyag szolgálja a szemléletesség követelményét. Ennek során viszont a folyamatos (s legtöbbször felhasználói-oktatói) fejlesztés alatt álló GeoGebra szoftvert részesítettük előnyben. David Hilbert szavaival élve ... A matematikában, csakúgy, mint minden tudományos kutatásban, kétféle irányzattal találkozunk: az elvonatkoztatásra való törekvéssel - mely megkísérli a sokféle anyagból a logikai szempontokat kimunkálni és azokat rendszeres összefüggésbe hozni -, és a másik irányzattal, a szemléletesség irányzatával, mely inkább a tárgyak és azok tartalmi vonatkozásainak eleven megértésére törekszik. Az elméleti tételek gyakran az ismertetés szintjén maradtak. Részben azért, mert bizonyításuk meghaladta a rendelkezésre álló kerete-

ket, részben pedig a célközönség igényeire tekintettel. Ez tipikus szituáció, hiszen gyakorlati szempontból a problémák megoldásának módszerei közvetlenül hasznosíthatók, s így érdekesebbek, mint elméleti alapjaik. A pusztán heurisztikus megközelítést ellensúlyozandó, törekedtünk precíz bizonyítások beiktatására is. Ezek ismertetése mögött a legtöbb esetben didaktikai megfontolás áll. A bizonyítás során a témakör bevezetett fogalmai felelevenítődnek, feltárulnak a köztük lévő logikai kapcsolatok, az állítás feltételeinek szerepe világossá válik és nem utolsósorban a hallgatók korábbi tanulmányainak egy-egy lényeges eleme is szerephez juthat. Ha a bizonyításra nem is kerül sor formális keretek között, a bőséggel szerepeltetett megjegyzések, illetve átkötő szövegek gyakran tartalmaznak utalást a bizonyítás alap gondolatára, illetve kapcsolatot teremtenek az egyes eredmények között - mintegy kompromisszumképpen. A témakörök elmélyült és részletes tanulmányozásához a szakirodalomban említett műveket ajánljuk az érdeklődő olvasó figyelmébe.

## Tartalomjegyzék

<b>1. Differenciálszámítás</b>	<b>7</b>
1.1. Metrika, topológia, sorozatok $\mathbb{R}^n$ -ben . . . . .	7
1.2. Lineáris függvények . . . . .	13
1.3. Parametrizált görbék . . . . .	17
1.4. Differenciálhányados $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ típusú függvény esetén . . . . .	36
1.5. Parametrizált felületek . . . . .	40
1.6. Skalármezők . . . . .	48
1.7. Többváltozós függvények szélsőértéke . . . . .	59
1.8. Vektormezők . . . . .	69
<b>2. Integrálszámítás</b>	<b>73</b>
2.1. Kettős- és hármas integrál . . . . .	73
2.2. Integrálás normáltartományon . . . . .	82
2.3. Gyakorlati alkalmazások . . . . .	87
2.4. Integráltranszformáció . . . . .	89
2.5. Ívhossz, felszín . . . . .	94
2.6. Vonalintegrál, felületi integrál . . . . .	99
<b>3. Differenciálegyenletek</b>	<b>107</b>
3.1. Alapfogalmak . . . . .	107
3.2. Szeparábilis DE, Hiányos másodrendű DE . . . . .	111
3.3. Lineáris differenciálegyenletek . . . . .	115
3.4. Potenciálfüggvény meghatározása . . . . .	128
3.5. Differenciálegyenletek közelítő megoldása . . . . .	130
<b>4. Kidolgozott feladatok</b>	<b>131</b>
4.1. Differenciálszámítás . . . . .	131
4.2. Integrálszámítás . . . . .	161
4.3. Differenciálegyenletek . . . . .	179
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>198</b>



## 1. Differenciálszámítás

A műszaki folyamatok vizsgálatakor lényeges kérdés, hogy egy mennyiség megváltozása egy másik mennyiségben milyen változást eredményez, azaz hogyan függ össze a két megváltozás. Erre a kérdésre a (pillanatnyi) változási gyorsaság ad választ. Lineáris kapcsolat esetén a változási gyorsaság állandó, megegyezik a lineáris függvényt (a típustól függően) meghatározó számmal, vektorral vagy mátrixszal, és könnyen kifejezhető a bemenet és a kimenet megváltozásából (az  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvények esetén például egyszerű osztással). Ha a kapcsolat nem lineáris, akkor a változási gyorsaság pillanatnyi értékéről beszélhetünk, ami a differenciálható függvények esetén a függvényt az adott helyen jól közelítő lineáris függvény meghatározó adata, azaz a differenciálhányados.

Hasonlóan az egyváltozós valós értékű függvényeknél tanultakhoz a differenciálhányados fogalmának definiálásához szükségünk van a topológiai alapfogalmakra.

### 1.1. Metrika, topológia, sorozatok $\mathbb{R}^n$ -ben

Tekintsük  $\mathbb{R}^n$ -et, mint a rendezett valós szám n-esek halmazát, azaz

$$\mathbb{R}^n := \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Ha  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$  és  $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$  akkor

- \* az összeadás:  $\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- \* a skalárral való szorzás:  $\lambda \cdot \underline{x} = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n)$
- \* a skaláris szorzás:  $\underline{x} \bullet \underline{y} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$
- \* a norma:  $\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \bullet \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
- \* a távolság:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

**1.1.1. Definíció.** Egy  $\underline{r}_0 \in \mathbb{R}^n$  pont  $\varepsilon$  sugarú környezetén a

$$K_\varepsilon(\underline{r}_0) = \{\underline{r} \in \mathbb{R}^n \mid d(\underline{r}, \underline{r}_0) < \varepsilon\}$$

halmazt értjük.

**1.1.1. Megjegyzés.** Speciális esetek:

- \*  $n = 1$  esetén  $K_\varepsilon(r_0)$  az  $r_0$  középpontú  $\varepsilon$  sugarú nyílt intervallum,
- \*  $n = 2$  esetén  $K_\varepsilon(\underline{r}_0)$  az  $\underline{r}_0$  pont körüli  $\varepsilon$  sugarú nyílt körlap,
- \*  $n = 3$  esetén  $K_\varepsilon(\underline{r}_0)$  az  $\underline{r}_0$  pont körüli  $\varepsilon$  sugarú nyílt gömb.

Egy  $D \subset \mathbb{R}^n$  halmaz birtokában viszonyíthatjuk a pontok helyzetét a  $D$  halmazhoz. A legegyszerűbb osztályozás a halmazelméleti „elemé” - „nem elemé” fogalompáron alapul. Az úgynevezett topológiai osztályozás ennél finomabb. Ennek alapvető fogalmait tekintjük át a továbbiakban.

**1.1.2. Definíció.** Legyen adott egy  $D \subset \mathbb{R}^n$  halmaz.

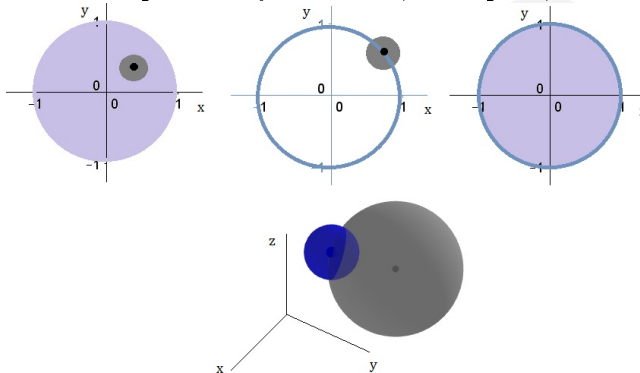
- \*  $\underline{r}_0 \in D$  belső pontja  $D$ -nek, ha van olyan  $K_\varepsilon(\underline{r}_0)$  környezete  $\underline{r}_0$ -nak, melyre  $K_\varepsilon(\underline{r}_0) \subset D$ , azaz a  $D$  halmaz  $\underline{r}_0$  -t egy környezetével együtt tartalmazza.
- \*  $\underline{r}_0$  külső pontja  $D$ -nek, ha belső pontja  $\mathbb{R}^n \setminus D$ -nek.
- \*  $\underline{r}_0$  határpontja  $D$ -nek, ha nem belső és nem külső pontja, azaz  $\underline{r}_0$  -nak bármely  $K_\varepsilon(\underline{r}_0)$  környezete metszi  $D$ -t és  $D$  komplementerét is.

**1.1.1. Példa.** Nem nehéz példát mondani az előző fogalmakra:

- \* Az  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  ponthalmaz minden pontja belső pont (lásd 1. ábra első kép).
- \* Az  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ponthalmaz minden pontja határpont (lásd 1. ábra második kép).

- \* Az  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  ponthalmaz minden pontja határpont (lásd 1. ábra negyedik kép).
- \* Az  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ponthalmaz komplementerének minden pontja belső pont.
- \* Az  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$  ponthalmaz minden pontja belső pont.

1. ábra. Belső pont és nyílt halmaz, határpont, zárt halmaz



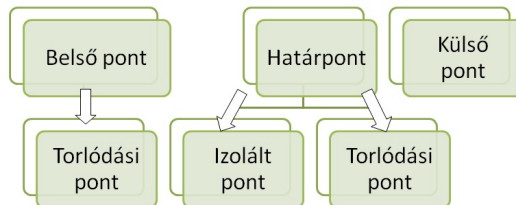
**1.1.3. Definíció.** Legyen adott egy  $D \subset \mathbb{R}^n$  halmaz.

- \*  $D$  nyílt halmaz, ha minden pontja belső pont.
- \*  $D$  zárt halmaz, ha  $\mathbb{R}^n \setminus D$  nyílt.

**1.1.2. Példa.** \* Az  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  ponthalmaz nyílt (lásd 1. ábra első kép).

- \* Az  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  ponthalmaz zárt (lásd 1. ábra harmadik kép).

2. ábra. Pontok osztályozása



**1.1.4. Definíció.** Legyen adott egy  $D \subset \mathbb{R}^n$  halmaz. Az  $\underline{r}_0$  pontot a  $D$  halmaz törlődási pontjának nevezzük, ha minden  $K_\varepsilon(\underline{r}_0)$  környezet tartalmaz  $\underline{r}_0$ -tól különböző  $D$ -beli pontot.

**1.1.2. Megjegyzés.** Minden belső pont törlődási pont. Egy törlődási pont viszont nem feltétlenül eleme a halmaznak. Például

$$D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

esetén a  $(0, 0, 1)$  pont  $D$  törlődási pontja, de nem eleme  $D$ -nek. Ha egy határpont nem törlődási pont, akkor izolált pontnak nevezzük. Könnyű látni, hogy minden izolált pont eleme a halmaznak.

**1.1.5. Definíció.** Egy  $\underline{r}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$  függvényt  $\mathbb{R}^k$ -beli sorozatnak nevezünk. Jelölések:  $\underline{r}(n) = \underline{r}_n = (r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,k})$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $\underline{r} = (\underline{r}_n)$ .

**1.1.6. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy  $\mathbb{R}^k$ -beli  $(\underline{r}_n)$  sorozat konvergens és határértéke  $\underline{r}_0 \in \mathbb{R}^k$ , ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz  $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  úgy, hogy

$$\|\underline{r}_n - \underline{r}_0\| < \varepsilon \text{ ha } n > N(\varepsilon).$$

Jelölések:

$$\underline{r}_n \rightarrow \underline{r}_0 \quad (n \rightarrow +\infty) \text{ vagy } \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{r}_n = \underline{r}_0.$$

**1.1.1. Tétel.** Legyen  $(\underline{r}_n)$  egy  $\mathbb{R}^k$ -beli sorozat.

$$\underline{r}_n = (r_{n,1}, r_{n,2}, \dots, r_{n,k}) \rightarrow \underline{r}_0 = (r_1, r_2, \dots, r_k) \quad (n \rightarrow +\infty)$$

akkor és csak akkor, ha

$$r_{n,i} \rightarrow r_i \quad (n \rightarrow +\infty) \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \text{ mellett;}$$

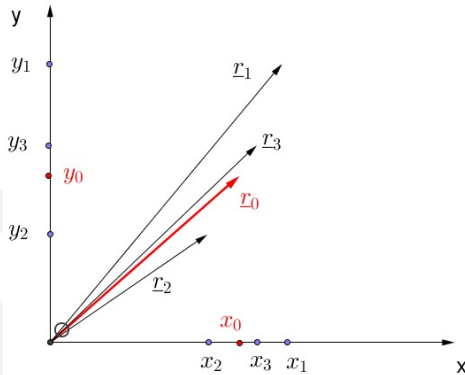
azaz egy vektorsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a sorozat minden koordinátasorozata konvergens és határértéke a határvektor megfelelő koordinátája.

A 1.1.1 tétel állítása következik a

$$|r_{n,i} - r_i| \leq \|\underline{r}_n - \underline{r}_0\| = \sqrt{(r_{n,1} - r_1)^2 + \dots + (r_{n,k} - r_k)^2}$$

becslés alapján. Jelölje  $D'$  a  $D$  halmaz torlódási pontjainak a halmazát.

3. ábra. Vektorsorozat és a koordinátasorozatok



Könnyű látni, hogy egy  $D$  halmaz torlódási pontjai éppen azok a pontok, melyek előállnak  $D$ -beli sorozatok határértékeiként (lásd 1.1.6 Definíció). Jelölje  $\overline{D}$  azt a legszűkebb zárt halmazt, melyet úgy kapunk, hogy  $D$ -hez hozzávesszük a torlódási pontjainak halmazát, azaz  $\overline{D} = D \cup D'$ . A 2. ábra alapján ha  $\underline{r}_0 \notin \overline{D}$ , akkor  $\underline{r}_0$  külső pont, azaz  $\overline{D}$  valóban zárt halmaz.

**1.1.3. Példa.** Ha  $\underline{r}_n = \left(\frac{3n+2}{4n}, \frac{5}{n}\right)$ , akkor az  $(\underline{r}_n)$  sorozat konvergens és határértéke  $\underline{r}_0 = \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ , mivel

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+2}{4n} = \frac{3}{4} \text{ és } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n} = 0.$$

**1.1.7. Definíció.** Tekintsük az  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvényt és  $\underline{r}_0$  legyen torlódási pontja  $D$ -nek. Ha van olyan  $A \in \mathbb{R}^m$ , melyre fennáll, hogy bármely  $D$ -beli  $\underline{r}_n \rightarrow \underline{r}_0$  ( $\underline{r}_n \neq \underline{r}_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) sorozat esetén  $f(\underline{r}_n) \rightarrow A$ , akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény határértéke a  $\underline{r}_0$  helyen  $A$ .  
Jelölése:  $\lim_{\underline{r} \rightarrow \underline{r}_0} f(\underline{r}) = A$ .

**1.1.8. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény folytonos az  $\underline{r}_0 \in D$  helyen, ha bármely  $D$ -beli  $\underline{r}_n \rightarrow \underline{r}_0$  sorozat esetén

$$f(\underline{r}_n) \rightarrow f(\underline{r}_0).$$

**1.1.3. Megjegyzés.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz. A definíciókból látható, hogy az  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény pontosan akkor folytonos az  $\underline{r}_0 \in D$  helyen, ha  $f$ -nek létezik határértéke  $\underline{r}_0$ -ban, és az éppen  $f(\underline{r}_0)$ .

**1.1.4. Példa.** Az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvénynek a  $(0, 0)$  helyen nem létezik a határértéke és így ott nem is folytonos, hiszen:

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0) \text{ sorozat esetén } f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0) \text{ sorozat esetén } f\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{4}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{5} \rightarrow \frac{2}{5}.$$

## 1.2. Lineáris függvények

A lineáris függvények alapvető szerepet játszanak a differenciálszámításban, hiszen a differenciálás valójában lineáris függvénnyel való közelítést jelent.

**1.2.1. Definíció.** Az  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvényt *lineárisnak* nevezzük, ha

$$\begin{aligned} A(\underline{x} + \underline{y}) &= A(\underline{x}) + A(\underline{y}), \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n, \\ A(\lambda \cdot \underline{x}) &= \lambda \cdot A(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

teljesül.

**1.2.1. Tétel (Lineáris függvény mátrixa).**

\* Legyen  $\mathbf{A}$   $m \times n$  típusú mátrix. Ekkor az  $A(\underline{x}) = \mathbf{A} \cdot \underline{x}$  ( $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ) szerint értelmezett függvény  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  típusú lineáris függvény.

\* Minden  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineáris függvény felírható

$$A(\underline{x}) = \mathbf{A} \cdot \underline{x} \quad (\underline{x} \in \mathbb{R}^n)$$

alakban, ahol  $\mathbf{A}$  egy  $(m \times n)$  típusú mátrix.

**1.2.1. Példa.** Az  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  típusú lineáris függvények

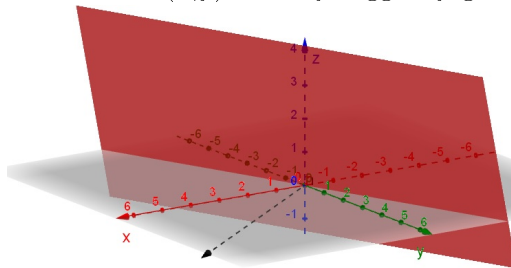
$$f(x, y) = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

alakú függvények, ahol  $\mathbf{A}$  egy  $(1 \times 2)$  típusú mátrix. Az  $\mathbf{A}$  mátrix az  $f$  lineáris függvény mátrixa. Például  $f(x, y) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x + 2y$ .

Geometriai jelentését tekintve egy  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  típusú (differenciálható) függvény lineáris közelítése az ún. érintőegyenessel való közelítést jelenti, ennek meredeksége az adott pontbeli differenciálhányados.

Egy  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  típusú (differenciálható) függvény lineáris közelítése az ún. érintő síkkal való közelítést jelenti, melynek normálvektorát az adott pontbeli ún. parciális differenciálhányadosok határozzák meg.

4. ábra. Az  $f(x,y)=5x+2y$  függvény grafikus képe



### 1.2.1. Megjegyzés. [A legegyszerűbb görbe: az egyenes]

Az  $\underline{r}_0$  helyzetvektor által meghatározott ponton átmenő,  $\underline{v}$  irányvektorú egyenest állítja elő a következő függvény:  $\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + t \cdot \underline{v}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

\* A síkban:  $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_1 \cdot t \\ y_0 + v_2 \cdot t \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

\* A térben:  $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_1 \cdot t \\ y_0 + v_2 \cdot t \\ z_0 + v_3 \cdot t \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

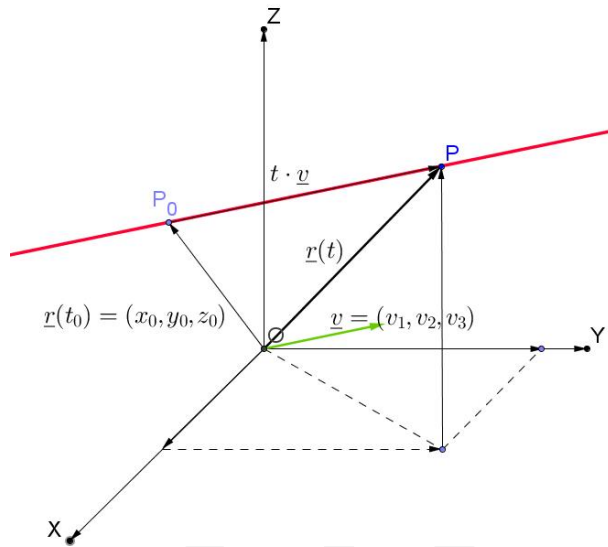
### 1.2.2. Példa.

\* Az  $\underline{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ -4t \end{pmatrix}$  lineáris függvény képe az origón átmenő  $\underline{v} = (3, -4)$  irányvektorú egyenes a síkban.

\* Az  $\underline{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4t \\ -t \end{pmatrix}$  lineáris függvény képe origón átmenő  $\underline{v} = (1, 4, -1)$  irányvektorú egyenes a térben.

Ugyanannak az egyenesnek számos úgynevezett paraméteres előállítása létezik  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  (vagy  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) típusú függvényként.

5. ábra. Az egyenes előállítás



Egy  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  (vagy  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) típusú (differenciálható) függvény lineáris közelítése az érintő egyenessel való közelítést jelenti, melynek irányvektorát az adott pontbeli differenciálhányados-vektor határozza meg. Erről lesz szó a következő fejezetben.

**1.2.2. Megjegyzés.** Az  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  típusú lineáris függvények

$$\underline{r}(u, v) = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

alakú függvények, ahol  $\mathbf{A}$  egy  $(3 \times 2)$  típusú mátrix. Az  $\mathbf{A}$  mátrix az  $\underline{r}$  függvény mátrixa.

**1.2.3. Példa.**

$$\underline{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 2.21u + 3v \\ -3.46u + 4v \\ -v \end{pmatrix} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  típusú lineáris függvény. Itt  $A = \begin{pmatrix} 2.21 & 3 \\ -3.46 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

### 1.2.3. Megjegyzés. [A legegyszerűbb felület: a sík]

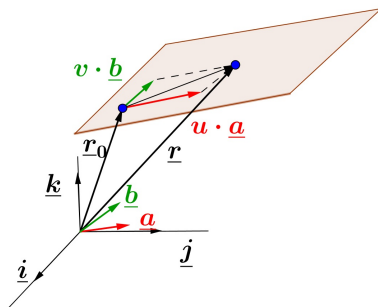
Az  $\underline{r}_0$ -ra illeszkedő  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  lineárisan független vektorok által kifeszített síkot állítja elő az

$$\underline{r}(u, v) = \underline{r}_0 + u\underline{a} + v\underline{b} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

függvény. Részletesen kiírva

$$\underline{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x_0 + a_x \cdot u + b_x \cdot v \\ y_0 + a_y \cdot u + b_y \cdot v \\ z_0 + a_z \cdot u + b_z \cdot v \end{pmatrix} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

6. ábra. Sík előállítás



### 1.2.4. Példa. Az

$$\underline{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 2.21u + 3v \\ -3.46u + 4v \\ -v \end{pmatrix} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  típusú lineáris függvény képhalmaza az origóra illeszkedő,

$$\underline{a} = (2.21, -3.46, 0) \text{ és } \underline{b} = (3, 4, -1)$$

vektorokkal párhuzamos sík.

### 1.3. Parametrizált görbék

Egy  $P$  anyagi pont mozgása a síkban és a térben is leírható - az origó rögzítése után - úgy, hogy megadjuk  $P$  hely(zet)vektorát az idő függvényében. Ebből a helyvektor-idő függvényből a mozgás kinematikai jellemzői (sebesség, gyorsulás) meghatározhatók.

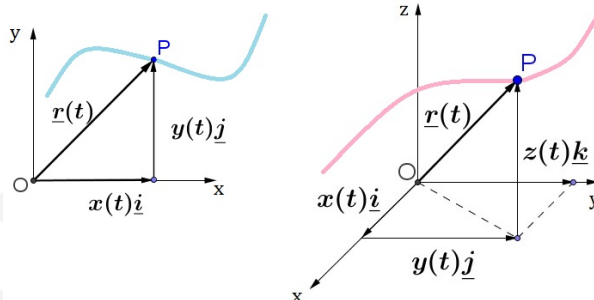
#### 1.3.1. Megállapodás. [Komponens- vagy koordinátafüggvények]

Az  $\underline{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\underline{r}(t) = x(t) \cdot \underline{i} + y(t) \cdot \underline{j}$  függvény koordinátafüggvényei az  $x, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egyváltozós, valós értékű függvények.

Az  $\underline{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\underline{r}(t) = x(t) \cdot \underline{i} + y(t) \cdot \underline{j} + z(t) \cdot \underline{k}$  függvény koordinátafüggvényei az  $x, y, z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egyváltozós, valós értékű függvények.

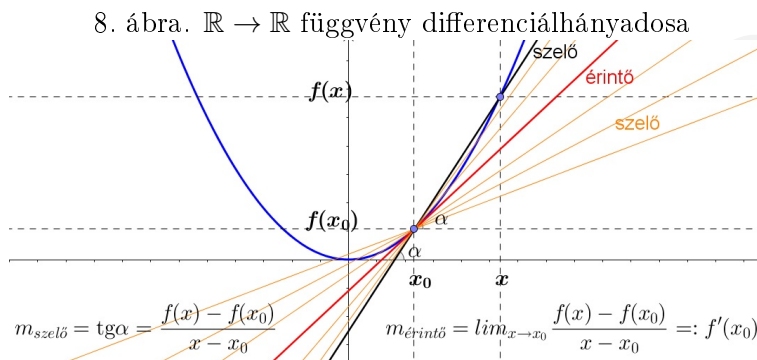
A koordinátafüggvények értékei adják a függvényértékek koordinátáit.

7. ábra.  $\underline{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  és  $\underline{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  függvények



Emlékezzünk arra, hogy egy  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt differenciálhatónak nevezünk az  $x_0 \in I$  pontban, ha létezik a  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  (véges) határérték. Ezt - az  $f'(x_0)$ -al vagy  $\frac{df}{dx}(x_0)$ -al jelölt - határértéket az  $f$  függvény  $x_0$ -beli differenciálhányadosának nevezzzük.  $f'(x_0)$  geometriai jelentése az érintőegyenes meredeksége az  $x_0$  helyen (lásd 8. ábra). Ha  $f$  az  $I$  minden pontjában differenciálható, akkor az  $x \rightarrow f'(x)$  ( $x \in I$ ) függvényt az  $f$  differenciálhányados-, vagy deriváltfüggvényének nevezzzük. Ha az  $f$  deriváltfüggvénye folytonos, akkor  $f$ -et folytonosan differenciálhatónak

mondjuk. Ezeket a fogalmakat hasonlóan használjuk vektorértékű függvény esetén is.



### 1.3.1. Definíció. [Differenciálhányados]

Legyen  $n = 2$  vagy  $3$ .

Az  $\underline{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény differenciálható az  $I$  értelmezési tartomány  $t_0$  belső pontjában, ha létezik a

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0} = \underline{m} \text{ határérték.}$$

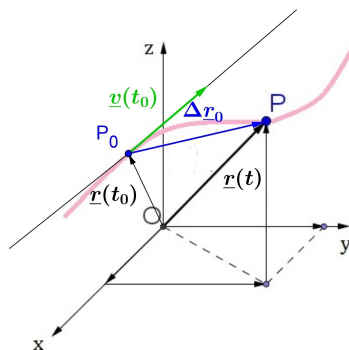
Ekkor az  $\underline{m}$  vektort az  $\underline{r}$  függvény  $t_0$  helyen vett differenciálhányadosának nevezzük. Jele:  $\underline{r}'(t_0)$ .

1.3.1. Megjegyzés. Figyelembe véve az 1.1.1 Tételt

$$\begin{aligned} \underline{r}'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \begin{pmatrix} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**1.3.1. Példa.** Ha a  $t \rightarrow \underline{r}(t)$  függvény egy mozgó pont hely-idő függvénye, akkor egyre rövidebb  $\Delta t = t - t_0$  időtartam esetén a  $\frac{\Delta \underline{r}_0}{\Delta t} = \frac{\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)}{t - t_0}$  differenciáhányados-vektor iránya és nagysága egyre jobban közelíti a  $P_0$  pontbeli, azaz  $t_0$  időpillanatbeli sebességvektor irányát és nagyságát. A  $t_0$  időpontban a pillanatnyi sebesség:  $\underline{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{r}_0}{\Delta t} = \underline{r}'(t_0)$ .

9. ábra. Pillanatnyi sebesség



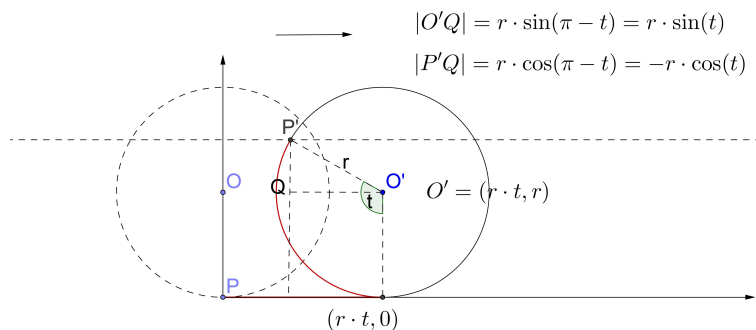
### 1.3.2. Megjegyzés.

- \* A differenciáhányados geometriai jelentése a  $t_0$  paraméterhez tartozó pontban az  $\underline{r}(t_0)$  pontbeli érintő vektor: a szelőegyenesek irányvektor-sorozatának határértéke.
- \* A  $t \rightarrow \underline{r}'(t)$  differenciáhányados függvény egy  $\underline{r}': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  típusú függvény.
- \* Ha  $t \rightarrow \underline{r}(t)$  egy mozgó pont hely-idő függvénye, akkor  $t \rightarrow \underline{r}'(t)$  a sebesség-idő függvény.
- \* Ha  $t \rightarrow \underline{r}(t)$  egy mozgó pont hely-idő függvénye, akkor  $t \rightarrow |\underline{r}'(t)|$  a pályasebesség-idő függvény.

\* Ha  $t \rightarrow \underline{r}(t)$  egy mozgó pont hely-idő függvénye, akkor  $t \rightarrow \underline{r}''(t)$  a gyorsulás-idő függvény.

**1.3.2. Példa.** [Az egyszerű ciklois és paraméterezése] Egy csúszásmentesen gördülő kerék egy pontjának - mint egy körvonal  $P$  pontjának - pályáját adjuk meg.

10. ábra. Az egyszerű ciklois paraméterezése

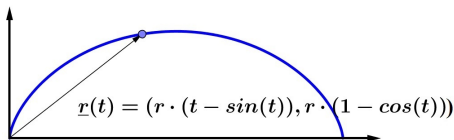


$$x(t) = r \cdot t - r \cdot \sin(t) = r \cdot (t - \sin(t)) \text{ és } y(t) = r + (-r \cdot \cos(t)) = r \cdot (1 - \cos(t))$$

Az egyszerű ciklois egy paraméterezése:

$$\underline{r}(t) = r \cdot (t - \sin(t)) \cdot \underline{i} + r \cdot (1 - \cos(t)) \cdot \underline{j} \text{ ahol } t \in [0, 2\pi].$$

11. ábra. Az egyszerű ciklois



A differenciálszámítás eszközeinek hatékony használatához görbén az alábbiértjük:

**1.3.2. Definíció.** Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  nem feltétlenül korlátos, nem egypontú intervallum,  $n = 2$  vagy  $3$ . Egy  $\underline{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonosan differenciálható leképezést parametrizált görbének nevezünk, ha  $\forall t \in I$ -re teljesül az  $\underline{r}'(t) \neq 0$  regularitási feltétel.  $I$ -t paramétertartománynak nevezzük. A leképezés képhalmazát mondjuk ilyenkor röviden görbének.  $n = 2$  esetén síkgörbéről,  $n = 3$  esetén térgörbéről beszélünk. Általános értelemben síkgörbéről beszélünk akkor is, ha  $\underline{r}$  képét  $\mathbb{R}^3$  egy síkja tartalmazza.

**1.3.3. Megjegyzés.** Ha  $t \rightarrow \underline{r}(t)$  egy mozgó pont hely-idő függvénye, akkor a  $\forall t \in I$ -re az  $\underline{r}'(t) \neq 0$  feltétel szerint a mozgó pont sebessége egy pillanatban sem lehet nulla. Ez azt is jelenti, hogy a mozgó pont "nem fordul vissza" a pályán. Geometiai értelemben pedig az érintő egyértelműen létezik az  $\underline{r}(t)$  pontban; lásd 1.3.3 Definíció.

A gyakorlatban gyakran beszélünk görbéről akkor is, ha az 1.3.2 Definícióban szereplő differenciálhatósági és regularitási feltételek csak szakaszonként teljesülnek: ún. szakaszonként sima parametrizált görbék.

**1.3.3. Definíció.** Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  egy nem feltétlenül korlátos, de nem egypontú intervallum,  $t_0 \in I$ . Egy  $\underline{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  görbének a  $t_0$  paraméterhez tartozó  $\underline{r}(t_0)$  pontbeli érintőegyenese:

$$\underline{e}(t) = \underline{r}(t_0) + \underline{r}'(t_0) \cdot (t - t_0), \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Koordinátákkal:

$$\underline{e}(t) = \begin{pmatrix} x(t_0) + x'(t_0) \cdot (t - t_0) \\ y(t_0) + y'(t_0) \cdot (t - t_0) \\ z(t_0) + z'(t_0) \cdot (t - t_0) \end{pmatrix}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

**1.3.4. Megjegyzés.**

- \* A  $t = t_0$  paraméterű pont az érintőegyenes  $\underline{r}(t_0)$  pontja.
- \* *lináris közelítés:*  $\underline{r}(t) \approx \underline{e}(t)$

**1.3.3. Példa.** Legyen  $A = (3, -2, 1)$ ,  $B = (2, -4, 3)$ . Paraméterezzük az  $AB$  szakaszt úgy, hogy a 0 paraméterű pont az  $A$  pont legyen, a derivált vektor hossza pedig 4 legyen!

**Megoldás:** Az  $A$  és  $B$  pontokra illeszkedő egyenes egy irányvektora  $\vec{AB} = (-1, -2, 2)$ . Ezzel megegyező irányú, egységnyi hosszúságú vektor:

$$\underline{v}^\circ = \frac{1}{|\vec{AB}|} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}} \cdot (-1, -2, 2) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$|\underline{r}'(t)| = 4$ , amely egyben az  $A$  és  $B$  pontokra illeszkedő egyenes irányvektorának hossza:  $\underline{r}'(t) = 4 \cdot \underline{v}^\circ = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ . Így

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot t \\ -2 + \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot t \\ 1 + \frac{8}{3} \cdot t \end{pmatrix}, \quad t \in \left[0, \frac{3}{4}\right].$$

**1.3.4. Példa.** Egy mozgó részecske a tér  $A = (3, -2, 1)$  pontjából a tér  $B = (2, -4, 3)$  pontjába halad egyenes vonalú egyenletes mozgást végezve  $4 \left[\frac{m}{s}\right]$  állandó nagyságú sebességgel. Adjuk meg a részecske helyzetét a  $t = 0.5$  [s] időpillanatban!

**Megoldás:** Ha  $\underline{r}(t)$  a részecske helyzete a  $t$  időpillanatban, akkor

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(0) + \underline{v} \cdot t.$$

Mivel  $\underline{r}'(t) = \underline{v}$ , az előző példa eredményeit felhasználva

$$\underline{r}(0.5) = \begin{pmatrix} 3 - \frac{4}{3} \cdot 0.5 \\ -2 - \frac{8}{3} \cdot 0.5 \\ 1 + \frac{8}{3} \cdot 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

**1.3.5. Példa.**

\* Legyen  $\underline{r}: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $\underline{r}(t) = (5 \cdot \cos t, 5 \cdot \sin t)$ .

Ekkor  $\underline{r}$  képe az origó középpontú 5 egység sugarú kör. A regularitási feltétel nyilván teljesül:

$$\underline{r}'(t) = (-5 \cdot \sin t, 5 \cdot \cos t), \quad |\underline{r}'(t)| = 5 \neq 0.$$

Ha  $\underline{r}$  egy síkbeli mozgást leíró hely-idő függvény, akkor ez azt jelenti, hogy a sebesség nagysága állandó, tehát itt egy egyenletes körmozgásról van szó, 5 egység nagyságú sebességgel.

- \* Legyen  $\underline{r}: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $\underline{r}(t) = (5 \cdot \cos(2t), 5 \cdot \sin(2t))$ . Ekkor  $\underline{r}$  képe ismét origó középpontú 5 egység sugarú kör. Viszont

$$\underline{r}'(t) = (-10 \cdot \sin(2t), 10 \cdot \cos(2t)), \quad |\underline{r}'(t)| = 10 \neq 0.$$

Adott görbének végtelen sok paraméterezése létezik. A különböző előállításokban általában különbözik egy adott görbeponthoz tartozó érintővektor hossza. Ez egy mozgó pont hely-idő függvénye esetén ugyanazon pálya különböző sebességgel való befutásának felel meg a fizikában.

Vannak olyan helyzetek, amikor csak a pálya alakjáról, geometriai tulajdonságairól szeretnénk pontos képet kapni: mennyire görbe, mennyire csavarodik a térben, mennyi a hossza. Ezeknek a kérdéseknek a megválaszolásához olyan mennyiségeket vezetünk be, melyek paramétertranszformációval szemben invariánsak.

**1.3.4. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $\tilde{\underline{r}}: \tilde{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizált görbe ekvivalens az  $\underline{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizált görbével, ha megadható olyan  $\Theta: \tilde{I} \rightarrow I$  diffeomorfizmus, azaz kölcsönösen egyértelmű és inverzével együtt differenciálható függvény, hogy  $\tilde{\underline{r}} = \underline{r} \circ \Theta$ . Ekkor a  $\Theta$  függvényt paramétertranszformációnak hívjuk és  $\tilde{\underline{r}}$ -t az  $\underline{r}$  átparaméterezésének mondjuk.

A  $\Theta$  paramétertranszformációt

- \* irányítástartónak mondjuk, ha minden  $\tilde{t} \in \tilde{I}$  esetén  $\Theta'(\tilde{t}) > 0$ ,

- \* irányításváltónak mondjuk, ha minden  $\tilde{t} \in \tilde{I}$  esetén  $\Theta'(\tilde{t}) < 0$ .

**1.3.6. Példa.** Az  $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} 3 + 2t \\ 4 - t \\ t \end{pmatrix}$ ,  $t \in [0, 2]$  függvény képe az  $A =$

$(3, 4, 0)$  és  $B = (7, 2, 2)$  végpontú szakasz, ahol  $A$  a  $t = 0$  paraméterű pont és  $B$  a  $t = 2$  paraméterű pont:  $A$  a görbe „kezdőpontja” és  $B$  a „végpontja”.

Az  $\tilde{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} 3 + 2 \cdot (1 - t) \\ 4 - (1 - t) \\ 1 - t \end{pmatrix}$ ,  $t \in [-1, 1]$  függvény képe szintén az  $A = (3, 4, 0)$  és  $B = (7, 2, 2)$  végpontú szakasz, de  $A$  a  $t = 1$  paraméterű pont és  $B$  a  $t = -1$  paraméterű pont:  $B$  a görbe "kezdőpontja" és  $A$  a "végpontja".  $\tilde{\underline{r}}$  az  $\underline{r}$  átparaméterezése, ahol a paramétertranszformáció:  $\Theta(t) = 1 - t$   $\Theta$  irányításváltó transzformáció, hiszen  $\Theta'(t) = -1 < 0$ .

Differenciálható tér- és síkgörbe esetén azt az előállítást, melynél az érintővektor hossza bármely pontban egységnyi, **ívhossz-paraméteres előállításnak** nevezzük. Ekkor a paramétert  $s$ -sel szokás jelölni. A görbeelmélet olyan mennyiségeket keres, amelyek függetlenek a paraméterezéstől. Az ívhossz ilyen tulajdonságú. Az ívhosszról a második fejezetben lesz szó.

**1.3.5. Megjegyzés.** Tekintsük az

$$\underline{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \text{ és az } \underline{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$$

görbékét. Ekkor

$$\begin{aligned} \underline{(\underline{r}_1(t) \bullet \underline{r}_2(t))}' &= (x_1(t) \cdot x_2(t) + y_1(t) \cdot y_2(t) + z_1(t) \cdot z_2(t))' = \\ &= \underline{x_1'(t) \cdot x_2(t) + x_1(t) \cdot x_2'(t) + y_1'(t) \cdot y_2(t) + y_1(t) \cdot y_2'(t) + z_1'(t) \cdot z_2(t) + z_1(t) \cdot z_2'(t)} = \\ &= \underline{\underline{r_1'(t) \bullet r_2(t) + r_1(t) \bullet r_2'(t)}} \end{aligned}$$

**1.3.1. Állítás.** Legyen a  $G$  görbe ívhosszparaméteres előállítása

$$\underline{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)), \quad s \in I.$$

Ekkor  $\forall s \in I$  esetén  $\underline{r}'(s)$  és  $\underline{r}''(s)$  merőlegesek.

**Indoklás:**

$$\begin{aligned} v(s) &= |\underline{r}'(s)| = 1 \quad \forall s \in I \Rightarrow \\ \forall s \in I \text{ -re } \underline{\underline{1}} &= |\underline{r}'(s)|^2 = |\underline{r}'(s)| \cdot |\underline{r}'(s)| \cdot \cos 0 = \underline{\underline{\underline{r}'(s) \bullet \underline{r}'(s)}} \end{aligned}$$

deriválva mindkét oldalt

$$0 = \underline{r}''(s) \bullet \underline{r}'(s) + \underline{r}'(s) \bullet \underline{r}''(s)$$

$$0 = 2 \cdot (\underline{r}''(s) \bullet \underline{r}'(s)) \Rightarrow 0 = \underline{r}''(s) \bullet \underline{r}'(s)$$

**1.3.6. Megjegyzés.** Az állítás olyan görbék esetén is igaz, ahol a deriváltvektor hossza állandó:

$$\forall s \in I \text{ -re } |\underline{r}'(s)| = c.$$

**1.3.2. Állítás.** Ha az  $\underline{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  görbe olyan, hogy  $\forall t \in I$  -re  $\underline{r}'(t)$  és  $\underline{r}''(t)$  lineárisan függő, azaz  $\exists f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  úgy, hogy  $\underline{r}''(t) = f(t) \cdot \underline{r}'(t)$ , akkor  $\underline{r}$  képe egyenes.

Világos, hogy  $\underline{r}'' = f \cdot \underline{r}'$  ekvivalens az  $\underline{r}' \times \underline{r}'' = \underline{0}$  feltétellel. Utóbbiról könnyen látható, hogy paraméterezésfüggetlen. Ívhosszparaméterezést alapul véve ez azt jelenti, hogy  $\underline{r}'$  és  $\underline{r}''$  párhuzamosak míg a 1.3.1 állítás szerint merőlegesek is. Innen következik, hogy  $\underline{r}''(s) = \underline{0}$ , azaz  $\underline{r}(s) = \underline{r}_0 + s \cdot \underline{v}$  parametrizált egyenes.

**1.3.7. Megjegyzés. [Gyorsulás]** Ha  $t \rightarrow \underline{r}(t)$  egy mozgó pont hely-idő függvénye, már láttuk, hogy  $a \rightarrow \underline{r}'(t)$  a sebesség-idő függvény. A sebesség változási gyorsaságát a gyorsulás adja meg, azaz a  $t \rightarrow \underline{r}''(t)$  függvény a gyorsulás-idő függvény.

A mechanikában a  $t_0$  időpillanatbeli gyorsulásvektort két komponensre bontják: egy érintő- és egy rá merőleges irányú komponensre. Jelöléseinkkel:

$$\underline{r}''(t_0) = a_T \cdot \underline{T}(t_0) + a_N \cdot \underline{N}(t_0).$$

Az érintő irányú komponens a pillanatnyi sebesség nagyságára hat, a másik pedig a pillanatnyi mozgásirányra. A görbe alakja szempontjából nyilván az utóbbinak van jelentősége. Ha  $\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t) = \underline{0}$  bármely  $t$  időpillanatban, akkor a gyorsulásvektornak csak érintő irányú komponense van, így a mozgás egyenesvonalú.

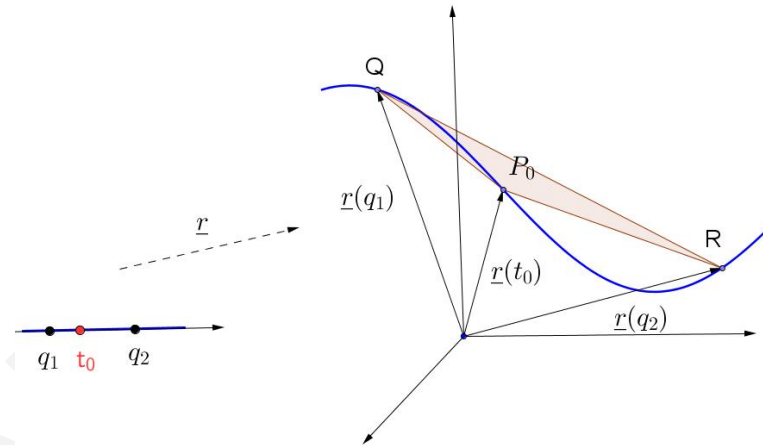
**1.3.5. Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy  $\underline{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  görbe bireguláris, ha bármely  $t \in I$  -re  $\underline{r}'(t)$  és  $\underline{r}''(t)$  lineárisan független, azaz  $\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t) \neq \underline{0}$ .

**1.3.1. Emlékeztető. [Rolle-féle középértéktétel]** Ha az  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény folytonos az  $[a, b]$  intervallumon, differenciálható az  $]a, b[$  intervallumon és  $f(a) = f(b)$ , akkor van olyan  $\xi \in ]a, b[$ , melyre teljesül, hogy  $f'(\xi) = 0$ .

### Simulósík

Tegyük fel, hogy az  $\underline{r}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  görbe bireguláris. Tekintsük a  $Q = \underline{r}(q_1)$ ,  $P_0 = \underline{r}(t_0)$ ,  $R = \underline{r}(q_2)$  pontokra illeszkedő síkot, és jelölje a sík normálvektorát  $\underline{n}_{QR} = (A_{QR}, B_{QR}, C_{QR})!$  Ha  $Q \rightarrow P_0$ ,  $R \rightarrow P_0$ , akkor a síkok

12. ábra. Simulósík konstrukciója



határhelyezete egy sík, ezt a síkot fogjuk majd a  $P_0 = \underline{r}(t_0)$ -ra illeszkedő simulósíknak nevezni. A sík egyértelmű megadásához egy pontja (itt  $P_0$  adott) és a normálvektora szükséges (később:  $\underline{n}$ ). Célunk megadni az imént említett sík egy normálvektorát. Ehhez tekintsük az

$$f(t) = (\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)) \bullet \underline{n}_{QR}$$

függvényt! Ekkor  $f(q_1) = f(t_0) = f(q_2) = 0$ , így a Rolle-tételt alkalmazhatjuk:

$$\exists \alpha_1 \in ]q_1, t_0[ \text{ úgy, hogy } f'(\alpha_1) = 0,$$

$$\exists \alpha_2 \in ]t_0, q_2[ \text{ úgy, hogy } f'(\alpha_2) = 0.$$

Az  $f'$  függvényre alkalmazhatjuk ismét a Rolle-tételt:

$$\exists \beta \in ]\alpha_1, \alpha_2[ \text{ úgy, hogy } f''(\beta) = 0.$$

Mivel

$$f'(t) = (\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0))' \bullet \underline{n}_{QR} + (\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)) \bullet \underline{n}'_{QR} = \underline{r}'(t) \bullet \underline{n}_{QR}$$

$$f''(t) = (\underline{r}'(t) \bullet \underline{n}_{QR})' = \underline{r}''(t) \bullet \underline{n}_{QR} + \underline{r}'(t) \bullet \underline{n}'_{QR} = \underline{r}''(t) \bullet \underline{n}_{QR}$$

a fentiekből

$$f'(\alpha_1) = \underline{r}'(\alpha_1) \bullet \underline{n}_{QR} = 0 \quad f'(\alpha_2) = \underline{r}'(\alpha_2) \bullet \underline{n}_{QR} = 0$$

★

$$f''(\beta) = \underline{r}''(\beta) \bullet \underline{n}_{QR} = 0.$$

Ha  $Q \rightarrow P_0$ ,  $R \rightarrow P_0$  (azaz  $q_1 \rightarrow t_0$ ,  $q_2 \rightarrow t_0$ ), akkor  $\alpha_1 \rightarrow t_0$ ,  $\alpha_2 \rightarrow t_0$ ,  $\beta \rightarrow t_0$  és  $\underline{n}_{QR} \rightarrow \underline{n}$ .

Így a ★ egyenlőségekből határátmenettel kapjuk, hogy

$$\underline{r}'(t_0) \bullet \underline{n} = 0 \quad \text{és} \quad \underline{r}''(t_0) \bullet \underline{n} = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy  $\underline{r}'(t_0)$  és  $\underline{r}''(t_0)$  merőleges  $\underline{n}$ -re, azaz  $\underline{r}'(t_0) \times \underline{r}''(t_0)$  párhuzamos  $\underline{n}$ -nel.

**1.3.6. Definíció.** [Simulósík] A  $P_0 = \underline{r}(t_0)$  pontra illeszkedő

$$\underline{r}'(t_0) \times \underline{r}''(t_0)$$

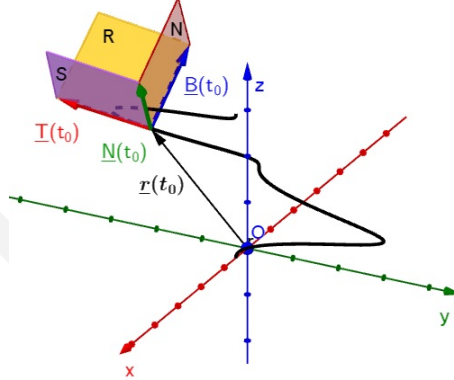
normálvektorú sík a görbe  $\underline{r}(t_0)$ -beli simulósíkja.

**1.3.8. Megjegyzés.** Hasonlóan származtatható a simulókör is a simulósíkban. A simulókör sugarának reciproka a görbe fontos invariánsa, az úgynevezett görbület, melyről a későbbiekben lesz szó. Intuitíve: nagyobb sugár, kisebb görbület.

**1.3.7. Definíció. [Kísérő triéder]** Tekintsünk egy  $t \in I$ ,  $t \rightarrow \underline{r}(t)$  bireguláris görbét. Ekkor

- (1.) a  $\underline{T}(t) := \frac{1}{|\underline{r}'(t)|} \cdot \underline{r}'(t)$  vektor a  $t$  paraméterhez tartozó érintő egységvektor
- (2.) a  $\underline{B}(t) := \frac{1}{|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)|} \cdot \underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)$  vektor a  $t$  paraméterhez tartozó binormális egységvektor
- (3.)  $\underline{N}(t) := \underline{B}(t) \times \underline{T}(t)$  vektor a  $t$  paraméterhez tartozó főnormális egységvektor

13. ábra. Kísérő triéder



$\underline{T}(t)$ ,  $\underline{N}(t)$ ,  $\underline{B}(t)$  egymásra páronként merőleges egységvektorok. Ezeknek tehát csak az iránya változik a görbe alakjával.

Az érintő, a főnormális és a binormális egységvektorok bármely  $t \in I$  esetén ortonormált vektorrendszert alkotnak. Ezt a hármast a görbe **kísérő triéderének** nevezzük.

A görbe  $\underline{r}(t_0)$  pontjában a **simulósíkot** az  $\underline{T}(t_0)$  és  $\underline{N}(t_0)$  vektorok feszítik ki, a sík normálvektora  $\underline{B}(t_0)$ .

A görbe  $\underline{r}(t_0)$  pontjában a **rektifikáló síkot** az  $\underline{T}(t_0)$  és  $\underline{B}(t_0)$  vektorok feszítik ki, a sík normálvektora  $\underline{N}(t_0)$ .

A görbe  $\underline{r}(t_0)$  pontjában a **normális síkot** az  $\underline{N}(t_0)$  és  $\underline{B}(t_0)$  vektorok feszítik ki, a sík normálvektora  $\underline{T}(t_0)$ .

DUPress

### A görbületfüggvény

Azt, hogy egy görbe egy adott helyen mennyire tér el az egyenestől a görbülettel mérjük. A görbület az érintő vektor irányának megváltozásával függ össze.

**1.3.8. Definíció.** *Egy bireguláris görbe görbületfüggvénye:*

$$\kappa(t) := \frac{|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)|}{|\underline{r}'(t)|^3}$$

**1.3.9. Megjegyzés.** [Görbület ívhossz paraméteres görbéknél]

*Legyen a  $G$  görbe ívhosszparaméteres előállítása*

$$\underline{r}(s) = (x(s), y(s), z(s)), \quad s \in I.$$

*Korábbról tudjuk, hogy  $\forall s \in I$  esetén  $\underline{r}'(s)$  és  $\underline{r}''(s)$  merőlegesek és  $|\underline{r}'(s)| = 1$ , így ezeket felhasználva*

$$|\underline{r}'(s) \times \underline{r}''(s)| = |\underline{r}'(s)| \cdot |\underline{r}''(s)| \cdot \sin \frac{\pi}{2} = |\underline{r}''(s)|.$$

*Tehát ívhossz paraméterezésű görbe esetén:  $\kappa(s) = |\underline{r}''(s)|$*

**1.3.10. Megjegyzés.** *A képlet tekinthető a görbület definíciójának nem bireguláris görbe esetén is. Ha ugyanis  $\underline{r}'$  és  $\underline{r}''$  lineárisan függő, akkor képletünk nullát ad és visszaadja az egyenes görbületének intuitív értékét (lásd 1.3.2 Állítás.).*

**1.3.11. Megjegyzés.** *A görbület egy adott paraméterű pontban kizárólag a görbe alakjától függ, nem a paraméterezéstől.*

**1.3.7. Példa.** [Konstans görbületű görbék]

\* *Egyenes görbülete 0.*

\* *Kör görbülete a sugár reciproka, ugyanis az  $R$  sugarú kör ívhosszparaméteres előállítás*

$$\underline{r}(s) = \left( R \cdot \cos\left(\frac{1}{R} \cdot s\right); R \cdot \sin\left(\frac{1}{R} \cdot s\right) \right) \quad (s \in [0, 2 \cdot R \cdot \pi])$$

*Ekkor*

$$\underline{r}'(s) = \left( -\sin\left(\frac{1}{R} \cdot s\right); \cos\left(\frac{1}{R} \cdot s\right) \right) \quad (s \in [0, 2 \cdot R \cdot \pi])$$

$$\begin{aligned} \kappa(s) = |\underline{r}''(s)| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{R} \cdot \cos\left(\frac{1}{R} \cdot s\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{R} \cdot \sin\left(\frac{1}{R} \cdot s\right)\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{R}\right)^2} = \frac{1}{R} \end{aligned}$$

**1.3.9. Definíció.** *A  $t \rightarrow \underline{r}(t)$  bireguláris görbe  $t_0$  paraméterű pontjában azt a kört, melyre teljesülnek az alábbi feltételek a görbe  $\underline{r}(t_0)$ -beli simulókérenek nevezzük:*

- \* *a kör az  $\underline{r}(t_0)$ -beli simulósíkban van,*
- \* *a kör középpontja:  $\underline{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} \cdot \underline{N}(t_0)$ ,*
- \* *a kör sugara  $\frac{1}{\kappa(t_0)}$ .*

**1.3.10. Definíció.** *A görbe összes pontjához tartozó simulókörök középpontjainak összessége szintén parametrizált görbe, amelyet a görbe evolutájának hívunk.*

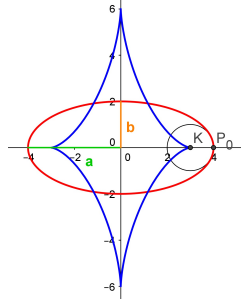
**1.3.8. Példa. [Az ellipszis evolutája]** *Az*

$$\underline{r}(t) = (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

*ellipszis evolutája az ún. asztroid:*

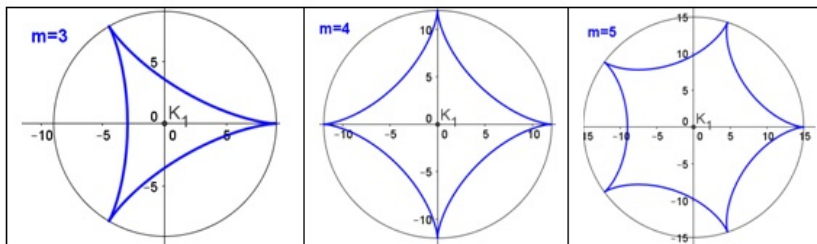
$$\underline{r}(t) = \left( \frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \cos^3(t), \frac{b^2 - a^2}{b} \cdot \sin^3(t) \right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

14. ábra. Az ellipszis evolútája



**1.3.9. Példa. [Hipociklois]** Felületek köszörűkoronggal való megmunkáláskor az ún. hipocikloisok, érintőseregek és normálisseregek fontos szerephez jutnak. A hipociklois úgy származtatható, hogy egy körvonalon belül csúszásmentesen legördítünk egy másik kört. A gördülő kör egy kerületi pontjának nyomvonala a hipociklois. Ha  $r_1$  jelöli a nagy,  $r_2$  pedig a kis kör sugarát, akkor  $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} r_2 \cdot (m-1) \cdot \left( \cos(t) + \frac{\cos((m-1) \cdot t)}{m-1} \right) \\ r_2 \cdot (m-1) \cdot \left( \sin(t) - \frac{\sin((m-1) \cdot t)}{m-1} \right) \end{pmatrix}$ , ahol  $r_1 = m \cdot r_2$ . Ha  $m$  egész szám, akkor  $\underline{r}$  képe zárt és  $m$  darab "csúcsa" van ( $\underline{r}$  nem differenciálható a csúcspontokban).

15. ábra. Hipocikloisok



### A torziófüggvény

Azt, hogy egy görbe mennyire csavarodik a torzióval mérjük. A torzió a binormális vektor irányának változásával függ össze: a görbe mennyire tér el a simulósíkjától. Ha a görbe háromszor differenciálható és az első és a második deriváltak vektori szorzata nem tűnik el, akkor a torzió:

$$\tau(t) = \frac{(\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)) \bullet \underline{r}'''(t)}{|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)|^2}$$

#### 1.3.12. Megjegyzés (Torzió ívhossz paraméteres görbéknél).

$$\tau(s) = \frac{(\underline{r}'(s) \times \underline{r}''(s)) \bullet \underline{r}'''(s)}{|\underline{r}''(s)|^2}$$

**1.3.13. Megjegyzés.** Az ún. Frenet-egyenletek egy lineáris differenciál-egyenlet - rendszert adnak a kísérő triéder elemeire. A differenciálegyenlet - rendszerben szereplő függvényegyütthetők a görbület és a torzió, melyek egybevágósági transzformáció erejéig meghatározzák a görbét:

$$\underline{T}' = v \cdot \kappa \cdot \underline{N}$$

$$\underline{N}' = -v \cdot \kappa \cdot \underline{T} + v \cdot \tau \cdot \underline{B}$$

$$\underline{B}' = -v \cdot \tau \cdot \underline{N}$$

ahol  $v(t) = |\underline{r}'(t)|$  a pályasebesség-függvény.

Síkgörbe a saját simulósíkjában van, így a torziója minden pontban nulla. A torzió eltűnése a síkgörbék jellemzője:

**1.3.1. Tétel.** Egy háromszor differenciálható görbe pontosan akkor síkgörbe, ha a torziója nulla.

**Indoklás:**  $\Leftarrow$  Legyen  $G$  torziója minden pontban 0. Feltehetjük, hogy a  $G$  görbe ívhossz paraméterezésű:  $\underline{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ ,  $t \in I$  (ekkor  $v(s) = 1$ ). A torzió és a görbe alakja független a paraméterezéstől.



\* **Hiperbola.** A parametrizált felületek részben az egyköpenyű illetve kétköpenyű hiperboloidoknál lényeges lesz, hogy a hiperboloid milyen irányban nyitott. Jelölje "a" a valós, "b" pedig a képzetes tengelyt.

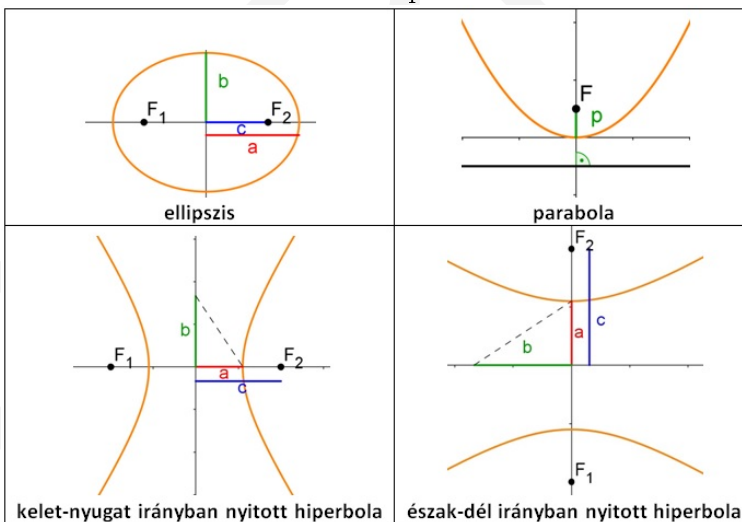
**Kelet-nyugat irányban nyitott** hiperbola esetén ha a fókuszok

$F_1 = (-c, 0)$  és  $F_2 = (c, 0)$ , ahol  $c^2 = a^2 + b^2$ ; akkor a hiperbola egyenlete  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Könnyű ellenőrizni, hogy egy paraméteres előállítás a keleti ágnak  $\underline{r}(t) = (a \cdot \text{cht}, b \cdot \text{sht})$ , a nyugati ágnak pedig  $\underline{r}(t) = (-a \cdot \text{cht}, -b \cdot \text{sht})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Észak-dél irányban nyitott** hiperbola esetén ha a fókuszok

$F_1 = (0, -c)$  és  $F_2 = (0, c)$ , ahol  $c^2 = a^2 + b^2$ ; akkor a hiperbola egyenlete  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ . Az északi ág egy paraméteres előállítása  $\underline{r}(t) = (a \cdot \text{sht}, b \cdot \text{cht})$ , a déli pedig  $\underline{r}(t) = (-a \cdot \text{sht}, -b \cdot \text{cht})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

17. ábra. Kúpszeletek



#### 1.4. Differenciálhányados $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ típusú függvény esetén

Most általánosságban  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  típusú függvény esetén megadjuk a differenciálhányados definícióját.

**1.4.1. Definíció.** Az  $f : D (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény differenciálható a  $D$  értelmezési tartomány  $\underline{r}_0$  belső pontjában, ha van olyan  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  lineáris függvény, melyre

$$\lim_{\underline{r} \rightarrow \underline{r}_0} \frac{f(\underline{r}) - f(\underline{r}_0) - A(\underline{r} - \underline{r}_0)}{\|\underline{r} - \underline{r}_0\|_{\mathbb{R}^n}} = \underline{0}_{\mathbb{R}^m}$$

Ekkor az  $A$  lineáris függvényt az  $f$  függvény  $\underline{r}_0$  helyen vett differenciálhányadosának nevezzük. Jele:  $f'(\underline{r}_0)$

**1.4.1. Megjegyzés.** A definíció értelmében a "bemenet"  $\Delta \underline{r} = \underline{r} - \underline{r}_0$  és a "kimenet"  $\Delta f = f(\underline{r}) - f(\underline{r}_0)$  megváltozása közötti kapcsolat jól közelíthető  $\Delta \underline{r}$  egy lineáris függvényével:  $\Delta f \approx A(\Delta \underline{r})$ , legalábbis az  $\underline{r}_0$  pont egy elegendően kis környezetében.

- \* A továbbiakban  $f'(\underline{r}_0)$  az  $\underline{r}_0$  pontban vett deriválnak, mint lineáris függvénynek a mátrixát jelöli.
- \* Ha a differenciálhányados létezik, akkor egyértelműen meghatározott.
- \* Ha  $D \subset \mathbb{R}^n$  nyílt halmaz, azaz minden pontja belső pont és az  $f : D (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény differenciálható a  $D$  minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  differenciálható a  $D$  halmazon.

**1.4.2. Definíció.** A fenti jelöléssel tehát az  $\underline{r}_0$  pont egy elegendően kis környezetében

$$\Delta f \approx f'(\underline{r}_0) \cdot \Delta \underline{r},$$

melyre azt mondjuk, hogy a "kimenetbeli eltérést" az  $\underline{r}_0$ -hoz tartozó teljes differenciállal közelítjük.

Ebből az is következik, hogy az  $\underline{r}_0$  pont egy elegendően kis környezetében

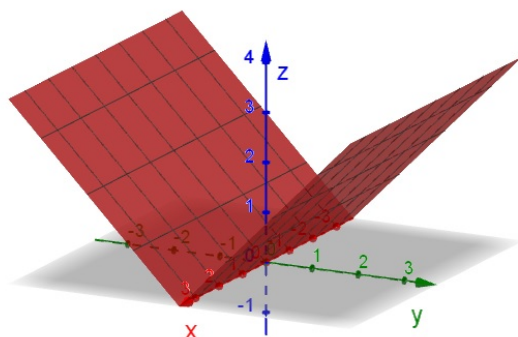
$$f(\underline{r}) \approx f'(\underline{r}_0) \cdot \Delta \underline{r} + f(\underline{r}_0),$$

melyet az  $f(\underline{r})$  függvényérték lineáris közelítésének mondunk.

**1.4.1. Tétel.** Ha az  $f : D (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény differenciálható az  $r_0 \in D$  belső pontban, akkor ott folytonos is.

**1.4.1. Példa.** Az  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = |y|$  függvény az  $y = 0, z = 0$  egyenletrendszerű egyenes minden pontjában folytonos, de egyik pontjában sem differenciálható.

18. ábra. Az  $f(x, y) = |y|$  függvény képe



**1.4.3. Definíció.** Legyen adott egy  $f: D (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény, egy  $r_0$  belső pontja  $D$ -nek, valamint egy  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$  nemzérus vektor. Legyen továbbá a  $\underline{v}^\circ$  vektor  $\underline{v}$ -vel egyező irányú és egységnyi nagyságú, azaz  $\underline{v}^\circ = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v}$ . Az  $f$  függvény  $r_0$  pontbeli,  $\underline{v}$  irányban vett iránymenti deriváltján a

$$\partial_{\underline{v}} f(r_0) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(r_0 + \lambda \cdot \underline{v}^\circ) - f(r_0)}{\lambda}$$

határértéket értjük, amennyiben létezik.

**1.4.2. Megjegyzés.** Ahol az  $f$  függvény differenciálható, ott létezik az összes iránymenti deriváltja is: az  $\underline{r} = r_0 + \lambda \cdot \underline{v}^\circ$  választással a  $\lambda \rightarrow 0$  határátmenetet véve

$$\underline{0}_{\mathbb{R}^m} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(r_0 + \lambda \cdot \underline{v}^\circ) - f(r_0) - A(\lambda \cdot \underline{v}^\circ)}{\|\lambda \cdot \underline{v}^\circ\|} =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\underline{r}_0 + \lambda \cdot \underline{v}^\circ) - f(\underline{r}_0)}{|\lambda|} - \frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot A(\underline{v}^\circ),$$

melyből

$$(\star) \quad \partial_{\underline{v}} f(\underline{r}_0) = A(\underline{v}^\circ).$$

Az iránymenti deriváltak létezéséből viszont nem következik a differenciálhatóság.

**1.4.4. Definíció.** Legyen adott egy  $f: D (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény az

$$f(\underline{r}) = (f_1(\underline{r}), \dots, f_m(\underline{r}))$$

alakban, ahol  $f_1, \dots, f_m: D (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  adott függvények. Legyen továbbá  $\underline{r}_0 \in D$  egy belső pont és  $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ . Ekkor a

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\underline{r}_0) := \partial_{e_i} f_j(\underline{r}_0)$$

( $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ ) számokat, ha léteznek, az  $f$  függvény  $j$ -edik komponensfüggvénye  $i$ -edik változója szerinti parciális deriváltjának nevezük  $\underline{r}_0$ -ban.

**1.4.2. Tétel.** Ha az  $f = (f_1, \dots, f_m): D (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény az  $\underline{r}_0 \in D$  belső pontban differenciálható, akkor minden  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  parciális derivált létezik és

$$f'(\underline{r}_0) = \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\underline{r}_0) \right)_{m \times n}.$$

Az előbbi egyenlőség könnyen látható a 1.4.2 Megjegyzésben szereplő  $(\star)$  egyenlőségből.

**1.4.3. Megjegyzés.** Összetett függvény adott pontbeli deriváltjának mátrixa:  $(f \circ g)'(\underline{r}) = f'(g(\underline{r})) \cdot g'(\underline{r})$ , azaz a külső függvény  $g(\underline{r})$  helyen vett deriváltmátrixának és a belső függvény  $\underline{r}$  helyen vett deriváltmátrixának szorzata.

**1.4.3. Tétel.** *Ha az  $f = (f_1, \dots, f_m): D (\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény bármely parciális deriváltja létezik az  $\underline{r}_0 \in D$  belső pont egy  $K_\varepsilon(\underline{r}_0)$  környezetében és folytonosak  $\underline{r}_0$ -ban, akkor  $f$  differenciálható  $\underline{r}_0$ -ban.*

Visszatérve a parametrizált görbékről mondottakhoz

- \* egy  $\underline{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  görbe adott pontbeli deriváltja az az  $\mathbb{R}^3$ -beli vektor, amelynek a koordinátái éppen az  $\underline{r}$  koordinátafüggvényeinek deriváltjai (lásd 1.3.1 Definíció és 1.3.1 Megjegyzés).

Jelen fejezet 1.4.1 Definíciójának értelmében pedig

- \* egy  $\underline{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  görbe adott pontbeli deriváltja egy  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  típusú lineáris leképezés.

Ezek összehangolásához meg kell értenünk, hogy a differenciálhányados lényege az a lineáris leképezés, amellyel a függvényt közelítjük, az pedig, hogy ezt a lineáris leképezést milyen adatával azonosítjuk másodlagos. (A fent említett  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  típusú lineáris leképezés mátrixa ugyanis egy  $3 \times 1$  típusú mátrix, azaz vektor.) Még két további fontos speciális esetről szól a következő definíció.

**1.4.5. Definíció.** *Az  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvényeket **skalármezőknek** szokás nevezni. Ekkor*

$$f'(\underline{r}_0) = (\partial_1 f(\underline{r}_0), \dots, \partial_n f(\underline{r}_0)) =: \text{grad } f(\underline{r}_0),$$

*amit az  $f$  skalármező gradiensének nevezünk az  $\underline{r}_0$  pontban.*

*Az  $\underline{r} \rightarrow \text{grad } f(\underline{r})$  függvény ekkor  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  típusú.*

*Az  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  típusú függvényeket **vektormezőknek** szokás nevezni.*

Tehát minden skalármező gradiense vektormező.

### 1.5. Parametrizált felületek

A szerszámfelületek nagyrészt önmagukban elmozgatható felületek. Általában vagy forgásfelületek, vagy csavarfelületek.

Mindenekelőtt a parametrizált görbénél látottakhoz hasonlóan meg kell mondanunk, hogy mit értünk felületen. Ebben az alfejezetben hacsak mást nem mondunk,  $D \subset \mathbb{R}^2$  egy (ívszerűen) összefüggő nyílt halmazzal jelöl, azaz bármely két (belső) pont összeköthető görbével.

**1.5.1. Megállapodás.** Az  $\underline{r} : D (\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  függvényeket a továbbiakban

$$\underline{r}(u, v) = x(u, v)\underline{i} + y(u, v)\underline{j} + z(u, v)\underline{k}$$

alakban fogjuk megadni, ahol az  $x, y, z$  koordinátafüggvények  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  típusú skalármezők. Koordinátás alakban:

$$\underline{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

vagy

$$\underline{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

**1.5.1. Definíció.** Egy  $\underline{r} : D (\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  leképezést parametrizált felületnek nevezünk, ha folytonosan parciálisan differenciálható és  $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \neq 0$  bármely  $(u, v) \in D$  esetén.

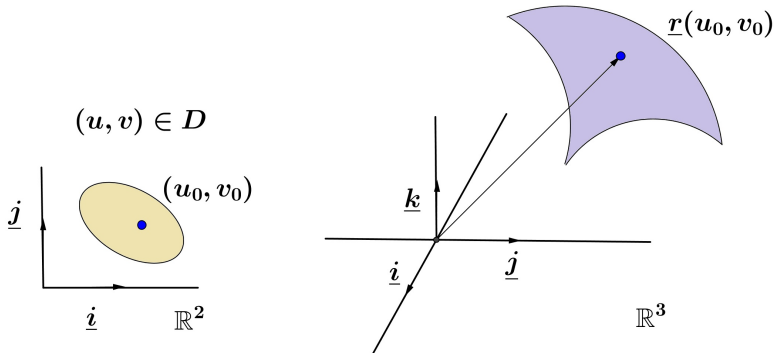
A leképezés képhalmazát mondjuk ilyenkor röviden felületnek.

A hétköznapi értelemben vett "felületek" nem felületek általában a fenti értelemben, de bármely pontjuk elegendően kis környezete megadható a definícióban szereplő parametrizált felületként.

**1.5.1. Megjegyzés.**

\* Egy felületnek általában sok paraméterezése van.

19. ábra. Parametrizált felület



\* Rögzített  $u_0, v_0 \in D \subset \mathbb{R}^2$  esetén az

$$\underline{r}(u_0, v) = \begin{pmatrix} x(u_0, v) \\ y(u_0, v) \\ z(u_0, v) \end{pmatrix} \text{ és } \underline{r}(u, v_0) = \begin{pmatrix} x(u, v_0) \\ y(u, v_0) \\ z(u, v_0) \end{pmatrix}$$

térgörbékét rendre az  $u_0, v_0$ -hoz tartozó paramétervonalaknak nevezzük.

Az  $u_0$ -hoz tartozó paramétervonal érintővektora az  $(u_0, v_0)$  pontban a

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \text{ vektor,}$$

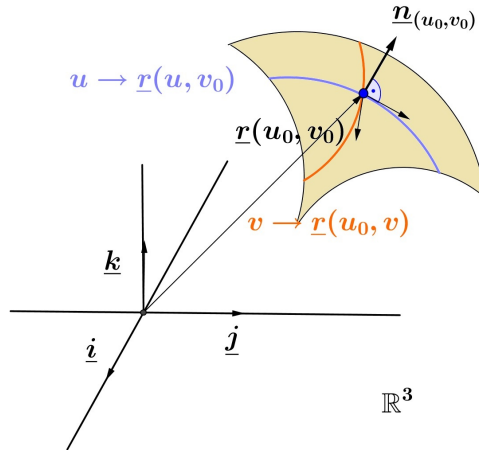
a  $v_0$ -hoz tartozó paramétervonal érintővektora az  $(u_0, v_0)$  pontban a

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ vektor.}$$

Ezek az érintővektorok kifeszítik az  $\underline{r}(u_0, v_0)$  pontbeli érintősíkot. Így az  $\underline{r}(u_0, v_0)$  pontra illeszkedő érintősík egy normálvektora :

$$\underline{n}_{(u_0, v_0)} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

20. ábra. Érintősík normálvektora



**1.5.2. Megjegyzés.** Ha az  $\underline{r} : D (\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  függvény differenciálható a  $D$  értelmezési tartomány  $(u_0, v_0)$  belső pontjában, akkor

$$\underline{r}'(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

**1.5.3. Megjegyzés.** Tekintsük azokat az  $\underline{r} : D (\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizált felületeket, melyek előállnak

$$\underline{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

alakban, ahol  $f : D (\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  skalármező. Ekkor az  $\underline{r}(u, v)$  felület pontjainak Descartes-féle koordinátáira  $z = f(x, y)$  áll fenn. Egy felület  $z = f(x, y)$  módon történő előállítását Euler-Monge-féle megadási módnak szokás nevezni.

Ha egy felület pontjai eleget tesznek az  $F(x, y, z) = 0$  egyenletnek, ahol  $F : D (\subset \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$  skalármező, akkor az  $F(x, y, z) = 0$  egyenlőséget a felület implicit megadásának nevezzük.

### Forgásfelületek

**1.5.4. Megjegyzés.** A  $z$ -tengely körüli forgatás, mint lineáris leképezés mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad u \in [0, 2\pi[$$

Ha a  $z$ -tengely körül megforgatjuk az  $\underline{c}(v) = (x(v), 0, z(v))$  görbét, akkor úgynevezett "forgásfelületet" kapunk:

$$\underline{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix} \quad (x(v) \geq 0),$$

azaz

$$\underline{r}(u, v) = x(v) \cdot \cos u \cdot \underline{i} + x(v) \cdot \sin u \cdot \underline{j} + z(v) \cdot \underline{k}.$$

A "z" tengellyel párhuzamos egyenes megforgatásával forgáshengert, forgástengelyt metsző egyenes megforgatásával forgáskúpot, míg a forgástengellyel kitérő helyzetű egyenes megforgatásával egyköpenyű forgáshiperboloidot kapunk. Kör megforgatásával gömb vagy ún. tórusz adódik. Ellipszis, parabola és hiperbola tengelyei körüli megforgatásával forgásellipszoidot, forgásparaboloidot és egyköpenyű, illetve kétköpenyű forgáshiperboloidot kapunk.

\* A  $\underline{c}(v) = (\cos v, 0, \sin v)$ ,  $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  görbe "z" tengely körüli megforgatásával kapjuk az origó középpontú egység sugarú gömböt:

$$\underline{r}(u, v) = (\cos v \cdot \cos u, \cos v \cdot \sin u, \sin v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi[ \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Implicit előállítás:  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

\* A  $\underline{c}(v) = (r \cdot \cos v + k_1, 0, r \cdot \sin v + k_2)$ ,  $v \in [0, 2\pi[$  görbe  $(k_1, k_2)$  középpontú és  $r$  sugarú kör. Tegyük fel, hogy  $k_1 > r$ . Ekkor a görbe "z" tengely körüli megforgatásával tóruszt kapunk:

$$(u, v) \in [0, 2\pi[ \times [0, 2\pi[,$$

$$\underline{r}(u, v) = ((r \cdot \cos v + k_1) \cdot \cos u, (r \cdot \cos v + k_1) \cdot \sin u, r \cdot \sin v + k_2)$$

Az implicit előállításához vezessük be az

$$x = (r \cdot \cos v + k_1) \cdot \cos u, \quad y = (r \cdot \cos v + k_1) \cdot \sin u, \quad z = r \cdot \sin v + k_2$$

jelöléseket. Ekkor felhasználva, hogy  $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$  bármely  $v \in \mathbb{R}$  esetén kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 = (r \cdot \cos v + k_1)^2,$$

melyből

$$(\star): \quad \sqrt{x^2 + y^2} - k_1 = r \cdot \cos v,$$

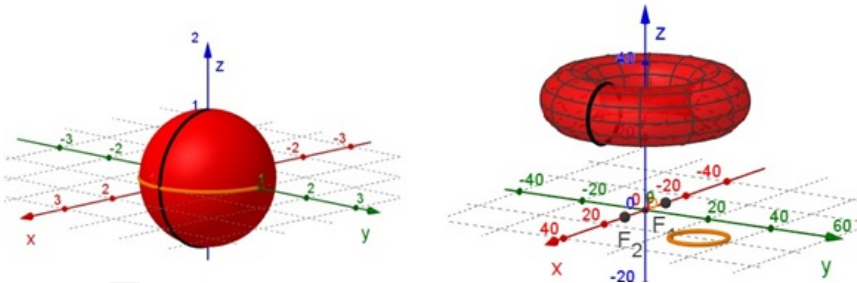
ugyanis  $r \cdot \cos v + k_1 > 0$  ( $k_1 > r$  miatt). Másrészt

$$(\star\star): \quad z - k_2 = r \cdot \sin v.$$

Így  $(\star)$  és  $(\star\star)$ -ből kapjuk a tórusz egyenletét:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - k_1)^2 + (z - k_2)^2 = r^2.$$

21. ábra. Gömbfelület és tórusz



\* A  $\underline{c}(v) = (a \cdot \cos v, 0, b \cdot \sin v)$ ,  $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  görbe "z" tengely körüli megforgatásával forgásellipszoidot kapunk:

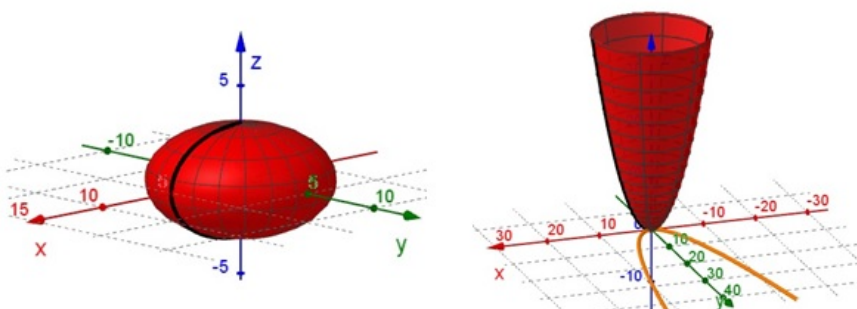
$$\underline{r}(u, v) = (a \cdot \cos v \cdot \cos u, a \cdot \cos v \cdot \sin u, b \cdot \sin v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Implicit előállítás: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

- \* A  $\underline{c}(v) = (v, 0, a \cdot v^2)$ ,  $v \in \mathbb{R}$  görbe "z" tengely körüli megforgatásával forgásparaboloidot kapunk:

$$\underline{r}(u, v) = (v \cdot \cos u, v \cdot \sin u, a \cdot v^2), \quad (u, v) \in [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$$

22. ábra. Ellipszoid és paraboloid



- \* A  $\underline{c}(v) = (a \cdot \operatorname{ch} v, 0, b \cdot \operatorname{sh} v)$ ,  $v \in \mathbb{R}$  keleti irányban nyíló hiperbolaág "z" tengely körüli megforgatásával egyköpenyű hiperboloidot kapunk:

$$\underline{r}(u, v) = (a \cdot \operatorname{ch} v \cdot \cos u, a \cdot \operatorname{ch} v \cdot \sin u, b \cdot \operatorname{sh} v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$$

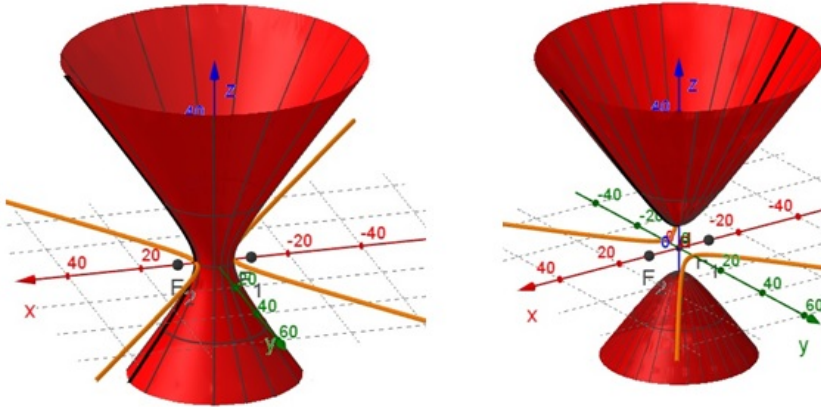
Implicit előállítás:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$

- \* A  $\underline{c}(v) = (a \cdot \operatorname{sh} v, 0, b \cdot \operatorname{ch} v)$ ,  $v \in \mathbb{R}$  északi irányban nyíló hiperbolaág "z" tengely körüli megforgatásával kétköpenyű hiperboloidot kapunk:

$$\underline{r}(u, v) = (a \cdot \operatorname{sh} v \cdot \cos u, a \cdot \operatorname{sh} v \cdot \sin u, b \cdot \operatorname{ch} v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$$

Implicit előállítás:  $\frac{z^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0$

23. ábra. Egyköpenyű és kétköpenyű hiperboloid



### Csavarfelületek

Csavarfelületekkel a műszaki gyakorlatban meglehetősen gyakran találkozhatunk: csigafűrók, ferdefogú fogaskerekek, csigakerekek, csavarok.

A "z" forgástengelyű  $r$  sugarú hengerre írt csavarvonal:

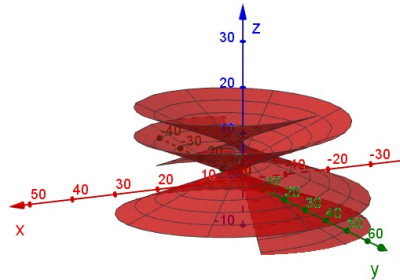
$$\underline{c}(v) = (r \cdot \cos v, r \cdot \sin v, \lambda \cdot v), \quad v \in \mathbb{R}$$

Ha egy görbe minden pontja azonos paraméterű csavarmozgást végez, akkor a görbe által meghatározott felületet csavarfelületnek nevezzük. Ha a  $\underline{\gamma}$  görbe előállítása az "xz" koordinátasíkban  $\underline{\gamma}(u) = (x(u), 0, z(u)) \quad u \in I$ , akkor a csavarfelület

$$\underline{r}(u, v) = (x(u) \cdot \cos v, x(u) \cdot \sin v, z(u) + \lambda \cdot v) \quad (u, v) \in I \times \mathbb{R}$$

**1.5.1. Példa.** Ha  $\underline{\gamma}(u) = (2 + 5u, 0, 3 - 2u) \quad u \in [-5, 5]$  (egyenes szakasz), akkor a csavarfelület a 24 ábrán látható.

24. ábra. Egyenesvonalú csavarfelület



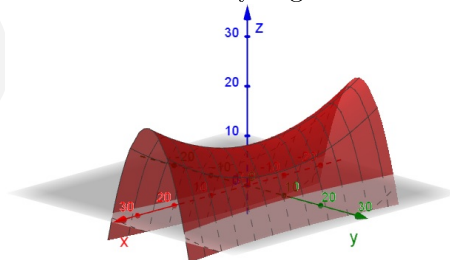
### Eltolási felületek

Legyen adott egy  $u \rightarrow \underline{c}(u)$  alapgörbe és annak egy  $P_0 = \underline{c}(u_0)$  pontjának mozgása során leírt  $v \rightarrow \underline{\gamma}(v)$  pályagörbe. Ha az alapgörbét végigtoljuk a pályagörbén úgy, hogy a  $\bar{P}_0$  pont mindig illeszkedjen a pályagörbére, akkor ún. eltolási felületet kapunk:

$$\underline{r}(u, v) = \underline{c}(u) + \underline{\gamma}(v)$$

**1.5.2. Példa.** Ha  $\underline{c}(u) = (u + 2, 0, 10 + 0.01 \cdot u^2)$  és  $\underline{\gamma}(v) = (0, v + 5, -0.2 \cdot v^2)$ , azaz ha két merőleges síkú, ellentétes tengelyirányú parabolát tekintünk alapgörbéknek, akkor egy nyeregfelületet kapunk (lásd 25 ábra).

25. ábra. Nyeregfelület



## 1.6. Skalármezők

### Kétváltozós valós értékű függvények

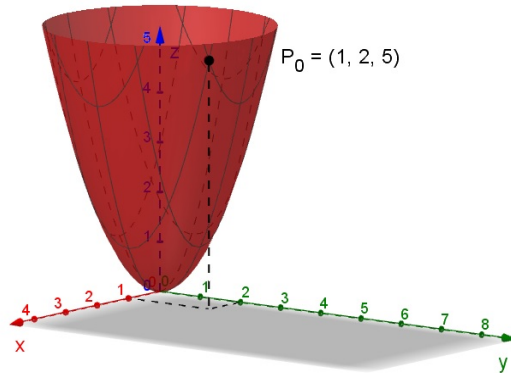
Tekintsük a  $D \subset \mathbb{R}^2$  síkbeli halmazt. Hacsak mást nem mondunk  $D$  összefüggő nyílt halmazt jelöl. Az  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt kétváltozós valós értékű függvénynek nevezzük. Grafikus képe a

$$Gr f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

térbeli pontok halmaza. A grafikus kép általában egy térbeli felületet határoz meg (lásd 1.5.3 Megjegyzés).

**1.6.1. Példa.** Tekintsük az  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  függvényt. Ekkor a függvény grafikus képének egy pontja, azaz a felület egy pontja például  $P_0 = (1, 2, 5)$ , mivel  $f(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5$ .

26. ábra. Az  $f(x, y) = x^2 + y^2$  függvény grafikus képe



Ha  $y = y_0$ , azaz rögzítjük a második változót, akkor a

$$\mathcal{G}_1 = \{(x, y_0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y_0) \in D, z = f(x, y_0)\}$$

halmaz általában egy görbét határoz meg a térben, melyet az "y" változó rögzítésével kapott paramétervonalnak szokás nevezni.

Ha  $x = x_0$ , azaz rögzítjük az első változót, akkor a

$$\mathcal{G}_2 = \{(x_0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_0, y) \in D, z = f(x_0, y)\}$$

halmaz általában egy görbét határoz meg a térben, melyet az "x" változó rögzítésével kapott paramétervonalnak szokás nevezni.

**1.6.2. Példa.** Tekintsük az  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  függvényt. Ha  $y = 2$ , akkor az "y" változó rögzítésével kapott paramétervonal

$$f(x, 2) = x^2 + 2^2 = x^2 + 4,$$

melynek képe parabola az  $xz$ -koordinátasíkkal párhuzamos síkban.

Ha  $x = 1$ , akkor az "x" változó rögzítésével kapott paramétervonal

$$f(1, y) = 1^2 + y^2 = 1 + y^2,$$

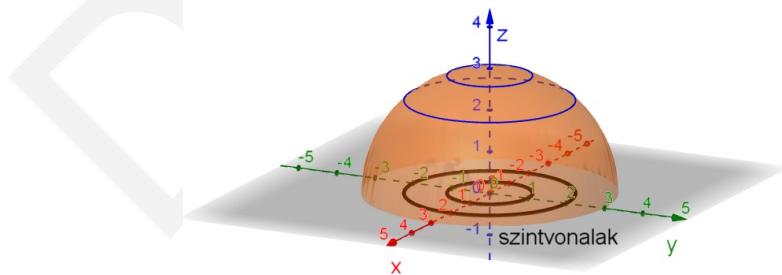
melynek képe parabola az  $yz$ -koordinátasíkkal párhuzamos síkban.

**1.6.1. Definíció.** Ha  $c$  eleme az  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény értékkészletének, akkor a

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in D, f(x, y) = c\}$$

halmazt a grafikus kép  $c$  paraméterhez tartozó szintvonalának nevezzük.

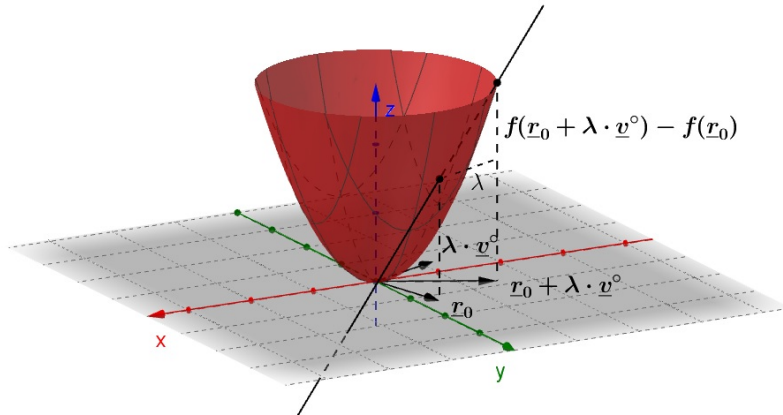
27. ábra. Szintvonalak (az  $xy$ -koordinátasíokban)



A szintvonalas ábrázolást például a térképészetben használják.

**1.6.1. Megjegyzés.** A  $\underline{v}$  irányban vett iránymenti derivált (lásd 1.4.3 Definíció) skalármező esetén szemléletesen azt fejezi ki, hogy az értelmezési tartományban a  $\underline{r}_0$  pontból a  $\underline{v}$  irányban "haladva" mennyi a függvényértékek változásának gyorsasága. Ha az adott irányban az iránymenti derivált negatív, akkor az adott irányba "elindulva" a függvényértékek csökkennek. Ha az iránymenti derivált pozitív, akkor az adott irányba "elindulva" a függvényértékek nőnek. Az olyan pontok, melyekben vett iránymenti deriváltak eltűnnek, a szélsőérték meghatározásánál jutnak szerephez.

28. ábra. Az iránymenti derivált jelentése



**1.6.2. Megjegyzés.** Amennyiben a függvény első változóját "x" jelöli, az  $e_1 = (1, 0)$  iránymenti deriváltat szokás "x" változó szerinti parciális deriváltnak is nevezni; lásd 1.4.4 Definíció. Definíció szerint ha  $\underline{r}_0 = (x_0, y_0)$ , akkor

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda, y_0) - f(x_0, y_0)}{\lambda}$$

mely bevezetve az  $x = x_0 + \lambda$  jelölést

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

alakban írható.

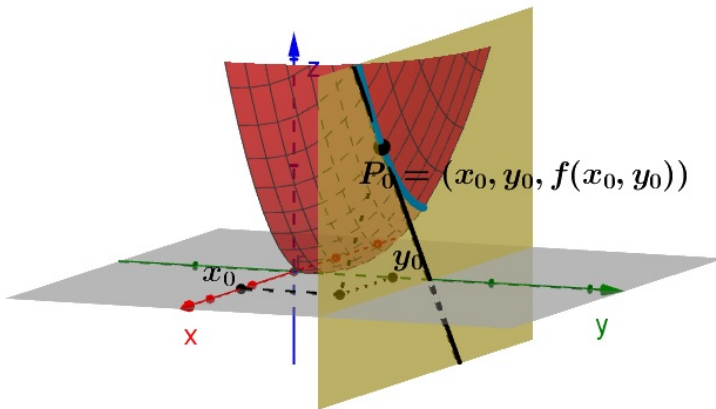
Az első változó szerinti parciális derivált geometriai jelentése kétváltozós valós értékű függvény esetén: az  $y$  változó rögzítésével előálló felületi görbe érintőjének meredeksége az  $xz$  - koordinátasíkkal párhuzamos síkban.

Jelölések az első változó szerinti parciális deriváltra:

$$\partial_1 f(\underline{r}_0), f'_1(\underline{r}_0), \partial_x f(\underline{r}_0), f'_x(\underline{r}_0)$$

$$D_1 f(\underline{r}_0), \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{r}_0)$$

29. ábra. Az "x" változó szerinti parciális derivált jelentése



**1.6.3. Megjegyzés.** Amennyiben a függvény második változóját "y" jelöli, az  $e_2 = (0, 1)$  iránymenti deriváltat szokás "y" változó szerinti parciális deriválnak is nevezni; lásd 1.4.4 Definíció. Definíció szerint ha  $\underline{r}_0 = (x_0, y_0)$ , akkor

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \lambda) - f(x_0, y_0)}{\lambda}$$

mely bevezetve az  $y = y_0 + \lambda$  jelölést

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

alakban írható.

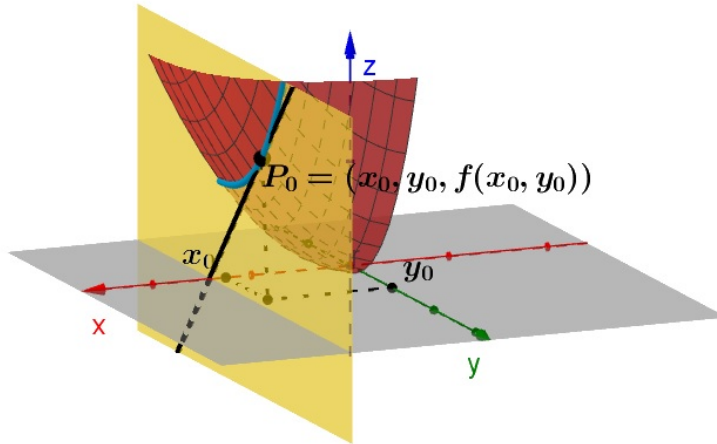
A második változó szerinti parciális derivált geometriai jelentése kétváltozós valós értékű függvény esetén: az  $x$  változó rögzítésével előálló felületi görbe érintőjének meredeksége az  $yz$  - koordinátasíkkal párhuzamos síkban.

Jelölések a második változó szerinti parciális deriváltra:

$$\partial_2 f(\underline{r}_0), f'_2(\underline{r}_0), \partial_y f(\underline{r}_0), f'_y(\underline{r}_0)$$

$$D_2 f(\underline{r}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{r}_0)$$

30. ábra. Az "y" változó szerinti parciális derivált jelentése



**1.6.4. Megjegyzés.** Legyen az  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény adott,  $c$  eleme az  $f$  értékkészletének, és tekintsük a  $c$ -hez tartozó szintvonalat, mint síkgörbét, az  $\underline{r}(t) = (x(t), y(t))$  alakban, ahol  $t \in [a, b]$ . Ekkor  $\forall t \in [a, b]$  esetén az érintővektor és a gradiensvektor merőlegesek.

**Indoklás:** Azt kell megmutatni, hogy  $\underline{r}'(t) \bullet \text{grad } f(\underline{r}(t)) = 0$ . Ez az összetett függvény deriválási szabályából, melyet a 1.4.3 Megjegyzésben láttunk,

következik is:

$$f(\underline{r}(t)) = c \Rightarrow \text{grad } f(\underline{r}(t)) \bullet \underline{r}'(t) = 0.$$

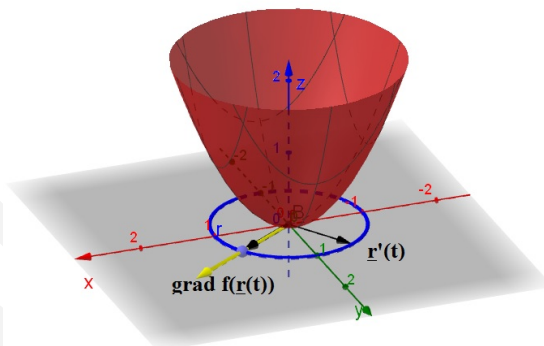
**1.6.3. Példa.** Az  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$  függvény képe forgási paraboloid. A  $c = 1$  értékhez tartozó szintvonal egy kör, így felírható

$$t \in [0, 2\pi[, \underline{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

alakban. Ekkor  $\underline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ , és  $\text{grad } f(x, y) = (2x, 2y)$  miatt  $\text{grad } f(\underline{r}(t)) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ . Így

$$\underline{r}'(t) \bullet \text{grad } f(\underline{r}(t)) = -2 \sin t \cos t + 2 \sin t \cos t = 0.$$

31. ábra. Szintvonal érintővektora és a gradiens



**1.6.1. Tétel.** Legyen az  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény differenciálható a  $D$  értelmezési tartomány  $\underline{r}_0$  belső pontjában,  $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$  legyen rögzített vektor, és  $\underline{v}^o$  jelölje a  $\underline{v}$  irányú, egységnyi nagyságú vektort. A  $\underline{v}$  irányban vett iránymenti derivált kiszámítható a gradiens vektor és a  $\underline{v}^o$  vektor skaláris szorzataként:

$$\partial_{\underline{v}} f(\underline{r}_0) = \text{grad } f(\underline{r}_0) \bullet \underline{v}^o.$$

**1.6.5. Megjegyzés.** A skaláris szorzat definícióját figyelembe véve

$$\partial_{\underline{v}} f(\underline{r}_0) = \|\text{grad } f(\underline{r}_0)\| \cdot \underbrace{\|\underline{v}^o\|}_1 \cdot \cos \varphi,$$

így a függvényértékek változási gyorsasága a gradiensvektor irányában a "legnagyobb".

**1.6.2. Definíció.** Ha egy  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény differenciálható a  $D$  értelmezési tartomány  $\underline{r}_0 = (x_0, y_0)$  belső pontjában, akkor a  $\underline{r}_0$  egy elegendően kis környezetében lévő  $\underline{r} = (x, y)$  pontra az  $f(\underline{r})$  függvényérték lineáris közelítése

$$f(\underline{r}) \approx f(\underline{r}_0) + \text{grad } f(\underline{r}_0) \bullet (\underline{r} - \underline{r}_0),$$

és az  $\underline{r}_0$ -beli érintősíkot az  $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$S(x, y) = f(\underline{r}_0) + f'_x(\underline{r}_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(\underline{r}_0) \cdot (y - y_0)$$

függvény adja meg.

Az érintősík egyenlete az  $\underline{r}_0$  helyen:

$$z = f(\underline{r}_0) + f'_x(\underline{r}_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(\underline{r}_0) \cdot (y - y_0)$$

azaz

$$f'_x(\underline{r}_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(\underline{r}_0) \cdot (y - y_0) - (z - f(\underline{r}_0)) = 0$$

Mivel az  $\underline{n} = (A, B, C)$  normálvektorú  $\underline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  pontra illeszkedő sík egyenlete

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

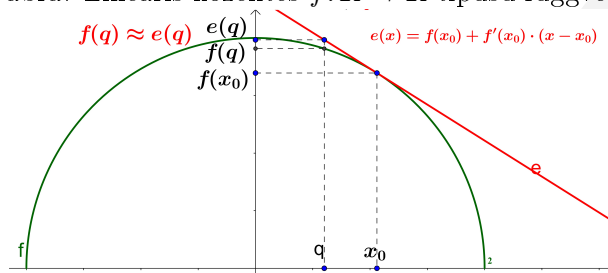
az  $\underline{r}_0 = (x_0, y_0)$  helyen az  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  pontra illeszkedő érintősík egy normálvektora leolvasható a fenti egyenletből:

$$\left( \underbrace{f'_x(\underline{r}_0), f'_y(\underline{r}_0)}_{\text{grad } f(\underline{r}_0)}, -1 \right)$$

## 1.6.4. Példa.

- \* Egy  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény értékének lineáris közelítése az  $x_0$  belső pont egy elegendően kis környezetében az érintőegyenest meghatározó függvény segítségével történik.

32. ábra. Lineáris közelítés  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvénynél



Például az

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$$

ponthalmaz, az origó középpontú 2 egység sugarú "felső" félkör, az

$$x \in [-2, 2], \quad f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

függvény képe. Adjunk becslést  $f(\sqrt{2} + 0.01)$  értékére!

Mivel  $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ , az  $x_0 = \sqrt{2}$  helyen az érintőegyenest megadó függvény:

$$e(x) = f(\sqrt{2}) + f'(\sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - (x - \sqrt{2})$$

és így  $f(\sqrt{2} + 0.01) \approx e(\sqrt{2} + 0.01) = \sqrt{2} - 0.01$ .

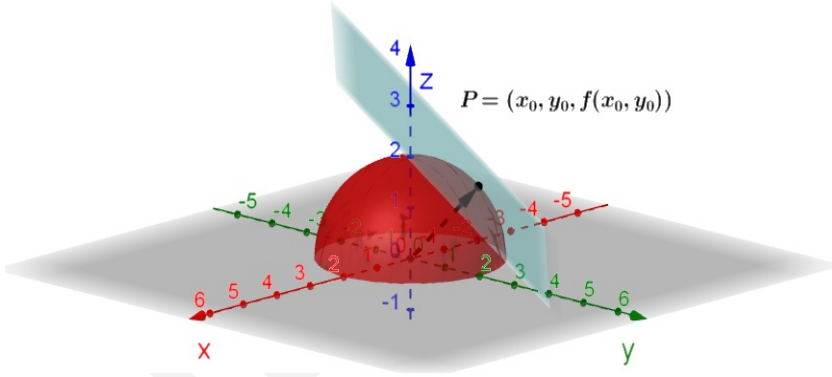
- \* Ha például az  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény értelmezési tartománya a

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

halmaz és  $(x, y) \in D_f$  esetén  $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ , akkor  $f$  grafikus képe az origó középpontú, kettő sugarú "felső" félgömb. Mint ponthalmaz:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}.$$

33. ábra. Lineáris közelítés  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvénynél



Az  $\underline{r}_0 = (x_0, y_0)$  belső pont egy elegendően kis környezetében lévő  $\underline{r} = (x, y)$  pontra az  $f(\underline{r})$  függvényérték lineáris közelítése (az érintősíkot megadó függvény segítségével):  $f(\underline{r}) \approx S(\underline{r})$ . Adjunk becslést az  $f(-0.95, \sqrt{2} + 0.01)$  értékre!

$$f(x, y) \approx f(-1, \sqrt{2}) + f'_x(-1, \sqrt{2}) \cdot (x + 1) + f'_y(-1, \sqrt{2}) \cdot (y - \sqrt{2})$$

az  $\underline{r}_0 = (-1, \sqrt{2})$  pont egy kis környezetében. Mivel  $f(-1, \sqrt{2}) = 1$ ,  $f'_x(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$  és  $f'_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ , így

$$f(x, y) \approx 1 + (x + 1) - \sqrt{2} \cdot (y - \sqrt{2}).$$

Tehát  $f(-0.95, \sqrt{2} + 0.01) \approx 1 + 0.05 - \sqrt{2} \cdot 0.01 = 1.05 + \sqrt{2} \cdot 0.01$ .

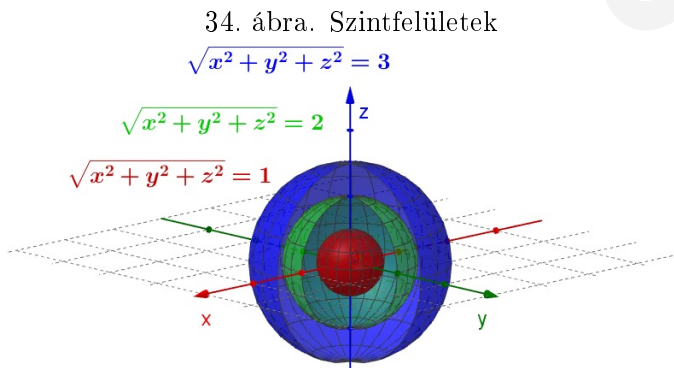
### Háromváltozós valós értékű függvények

**1.6.3. Definíció.** Ha  $c$  eleme az  $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  függvény értékkészletének, akkor a

$$\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \in D, f(x, y, z) = c\}$$

halmazt a  $c$  paraméterhez tartozó szintfelületnek nevezzük.

**1.6.5. Példa.**  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



A gradiensvektorral kapcsolatos észrevételek a háromváltozós skalármezők esetén is érvényben maradnak, átgondolásuk hasznos gyakorlófeladat.

### Magasabbrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy az  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $\underline{r}_0 \in D$  belső pont egy környezetében létezik például az  $i$ -edik változó szerinti  $\partial_i f$  parciális deriváltja. Ha ez parciálisan differenciálható például a  $j$ -edik változó szerint, úgy a deriválást elvégezve kapjuk a

$$\partial_j \partial_i f(\underline{r}_0) := \partial_j (\partial_i f(\underline{r}_0))$$

*második parciális deriváltját*  $f$ -nek az  $\underline{r}_0$  pontban az  $i$ -edik és  $j$ -edik változó szerint (ebben a sorrendben).

Hasonlóan, ha a  $\partial_j \partial_i f$  derivált létezik  $\underline{r}_0$  egy környezetében és ez parciálisan differenciálható például a  $k$ -adik változó szerint úgy a deriválást elvégezve kapjuk a

$$\partial_k \partial_j \partial_i f(\underline{r}_0) := \partial_k (\partial_j \partial_i f(\underline{r}_0))$$

*harmadik parciális deriváltat.*

Hasonlóan értelmezhetjük a negyed- és magasabbrendű parciális deriváltakat is. Egyéb jelölések a magasabbrendű deriváltakra:

$$f''_{ji}(\underline{r}_0), \quad f''_{x_j x_i}(\underline{r}_0), \quad \partial_{x_j} \partial_{x_i} f(\underline{r}_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{r}_0)$$

**1.6.2. Tétel. Young tétel:** *Ha az  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $\underline{r}_0 \in D$  belső pont egy környezetében az összes  $m \geq 2$ -edik parciális deriváltjai léteznek és folytonosak az  $\underline{r}_0$  pontban, akkor a függvény  $m$ -edik parciális deriváltjai az  $\underline{r}_0$  pontban a differenciálás sorrendjétől függetlenek.*

**1.6.6. Megjegyzés.** *A másodrendű parciális deriváltak jelölése, amennyiben "x" az első változó és "y" a második:*

- \* *Az első változó szerinti parciális deriváltfüggvény első változó szerinti parciális deriváltja:  $f''_{xx}, \quad \partial_{xx} f, \quad \partial_{11} f, \quad D_{11} f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \partial_1 \partial_1 f$*
- \* *A második változó szerinti parciális deriváltfüggvény első változó szerinti parciális deriváltja:*

$$f''_{xy}, \quad \partial_{xy} f, \quad \partial_{12} f, \quad D_{12} f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \partial_1 \partial_2 f$$

- \* *Az első változó szerinti parciális deriváltfüggvény második változó szerinti parciális deriváltja:*

$$f''_{yx}, \quad \partial_{yx} f, \quad \partial_{21} f, \quad D_{21} f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \partial_2 \partial_1 f$$

- \* *A második változó szerinti parciális deriváltfüggvény második változó szerinti parciális deriváltja:  $f''_{yy}, \quad \partial_{yy} f, \quad \partial_{22} f, \quad D_{22} f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \partial_2 \partial_2 f$*

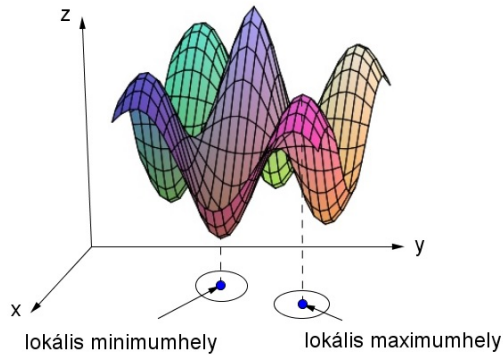
## 1.7. Többváltozós függvények szélsőértéke

**1.7.1. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $\underline{r}_0 \in D$  pontban lokális (helyi) maximuma (minimuma) van, ha van olyan  $\varepsilon > 0$ , hogy

$$f(\underline{r}_0) \geq f(\underline{r}) \quad (f(\underline{r}_0) \leq f(\underline{r}))$$

teljesül minden  $\underline{r} \in K_\varepsilon(\underline{r}_0) \cap D$  esetén.

35. ábra. Lokális szélsőérték helyek  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvénynél



**1.7.2. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $\underline{r}_0 \in D$  pontban szigorú lokális (helyi) maximuma (minimuma) van, ha van olyan  $\varepsilon > 0$ , hogy

$$f(\underline{r}_0) > f(\underline{r}) \quad (f(\underline{r}_0) < f(\underline{r}))$$

teljesül minden  $\underline{r} \in K_\varepsilon(\underline{r}_0) \cap D$ ,  $\underline{r} \neq \underline{r}_0$  esetén.

**1.7.3. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $\underline{r}_0 \in D$  pontban globális (abszolút) maximuma (minimuma) van, ha

$$f(\underline{r}_0) \geq f(\underline{r}) \quad (f(\underline{r}_0) \leq f(\underline{r}))$$

teljesül minden  $\underline{r} \in D$  esetén.

**1.7.4. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $\underline{r}_0 \in D$  pontban szigorú globális (abszolút) maximuma (minimuma) van, ha

$$f(\underline{r}_0) > f(\underline{r}) \quad (f(\underline{r}_0) < f(\underline{r}))$$

teljesül minden  $\underline{r} \in D$ ,  $\underline{r} \neq \underline{r}_0$  esetén.

**1.7.1. Tétel. [Szélsőérték létezésének elegendő feltétele]**

Korlátos zárt halmazon folytonos függvény felveszi a függvényértékek infimumát és supremumát is függvényértékként, ami azt jelenti, hogy a függvénynek az illető korlátos zárt halmazon van minimuma és maximuma.

**1.7.2. Tétel. [Szélsőérték létezésének elsőrendű szükséges feltétele]**

Ha az  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $\underline{r}_0 \in D$  belső pontban lokális szélsőértéke van és léteznek  $f$  első parciális deriváltjai  $\underline{r}_0$ -ban, akkor

$$(\star) \quad \partial_1 f(\underline{r}_0) = \partial_2 f(\underline{r}_0) = \dots = \partial_n f(\underline{r}_0) = 0.$$

A  $(\star)$  feltételt kielégítő  $\underline{r}_0$  pontokat az  $f$  függvény stacionárius pontjainak nevezzük.

**1.7.3. Tétel. [Szélsőérték létezésének elegendő feltétele]**

Tegyük fel, hogy az  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény összes második parciális deriváltjai folytonosak az  $\underline{r}_0 \in D$  belső pont egy környezetében, továbbá  $\partial_1 f(\underline{r}_0) = \partial_2 f(\underline{r}_0) = \dots = \partial_n f(\underline{r}_0) = 0$ , azaz  $\underline{r}_0$  stacionárius pontja  $f$ -nek.

I. Ha a

$$Q(\underline{h}) = Q(h_1, \dots, h_n) := \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \partial_j \partial_i f(\underline{r}_0) h_i h_j$$

kvadratikus függvény pozitív definit, azaz  $Q(\underline{h}) > 0$  minden  $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{h} \neq \underline{0}$  esetén, akkor  $f$ -nek szigorú lokális minimuma van  $\underline{r}_0$ -ban.

II. Ha a  $Q$  kvadratikus függvény negatív definit, azaz  $Q(\underline{h}) < 0$  minden  $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{h} \neq \underline{0}$  esetén, akkor  $f$ -nek szigorú lokális maximuma van  $\underline{r}_0$ -ban.

III. Ha a  $Q$  kvadratikus függvény **indefinit**, azaz  $Q(\underline{h})$  felvesz pozitív és negatív értékeket is, akkor  $f$ -nek **nincs szélsőértéke**  $\underline{r}_0$ -ban.

$Q$  definitisége megállapítható az ún. sarokdeterminánsok előjeleiből:

$$\begin{aligned}\Delta_1(\underline{r}_0) &:= \partial_1 \partial_1 f(\underline{r}_0) \\ \Delta_2(\underline{r}_0) &:= \det \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(\underline{r}_0) & \partial_1 \partial_2 f(\underline{r}_0) \\ \partial_2 \partial_1 f(\underline{r}_0) & \partial_2 \partial_2 f(\underline{r}_0) \end{pmatrix} \\ \Delta_3(\underline{r}_0) &:= \det \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(\underline{r}_0) & \partial_1 \partial_2 f(\underline{r}_0) & \partial_1 \partial_3 f(\underline{r}_0) \\ \partial_2 \partial_1 f(\underline{r}_0) & \partial_2 \partial_2 f(\underline{r}_0) & \partial_2 \partial_3 f(\underline{r}_0) \\ \partial_3 \partial_1 f(\underline{r}_0) & \partial_3 \partial_2 f(\underline{r}_0) & \partial_3 \partial_3 f(\underline{r}_0) \end{pmatrix} \\ \Delta_n(\underline{r}_0) &:= \det \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(\underline{r}_0) & \dots & \partial_1 \partial_n f(\underline{r}_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_n \partial_1 f(\underline{r}_0) & \dots & \partial_n \partial_n f(\underline{r}_0) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

#### 1.7.4. Tétel. [A definitiség megállapítása sarokdeterminánsokkal]

\* Egy kvadratikus függvény pontosan akkor pozitív definit, ha mátrixának bal felső sarokdeterminánsai pozitívak:

$$\Delta_1(\underline{r}_0) > 0, \Delta_2(\underline{r}_0) > 0, \dots, \Delta_n(\underline{r}_0) > 0$$

\* Egy kvadratikus függvény pontosan akkor negatív definit, ha mátrixának bal felső sarokdeterminánsai váltakozó előjelűek úgy, hogy  $\Delta_1(\underline{r}_0)$  negatív:

$$\Delta_1(\underline{r}_0) < 0, \Delta_2(\underline{r}_0) > 0, \Delta_3(\underline{r}_0) < 0, \dots$$

\* Ha egy kvadratikus függvény mátrixának bal felső sarokdeterminánsai nullától különbözőek, és a fenti két eset nem áll fenn, akkor a kvadratikus függvény indefinit.

### Lokális szélsőérték keresése (szabad szélsőérték feladatok)

- 1.lépés:** Az elsőrendű parciális derivált függvények meghatározása  
**2.lépés:** A  $\partial_1 f = \partial_2 f = \dots = \partial_n f = 0$  egyenletrendszer megoldása (Úgynevezett stacionárius pontok - több ilyen pont is lehet)  
**3.lépés:** A másodrendű parciális derivált függvények meghatározása  
**4.lépés:** A másodrendű parciális derivált függvények értékének meghatározása a stacionárius pontokban.  
**5.lépés:** A stacionárius pontokhoz tartozó  $Q$  kvadratikus függvény definitiségének eldöntése a sarokdeterminánsok segítségével.  
**6.lépés:** Az 1.7.3 Tétel alkalmazása.

#### Feltételes szélsőérték

**1.7.5. Definíció.** Legyen  $f: D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h_i: D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) adott függvények. Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvénynek az  $\underline{r}_0 \in D$  pontban a

$$h_1(\underline{r}) = 0, h_2(\underline{r}) = 0, \dots, h_m(\underline{r}) = 0$$

feltételek mellett lokális feltételes maximuma (minimuma) van, ha

$$h_1(\underline{r}_0) = 0, h_2(\underline{r}_0) = 0, \dots, h_m(\underline{r}_0) = 0$$

és van olyan  $\varepsilon > 0$ , hogy

$$f(\underline{r}_0) \geq f(\underline{r}) \quad (f(\underline{r}_0) \leq f(\underline{r}))$$

teljesül minden  $\underline{r} \in D \cap K_\varepsilon(\underline{r}_0)$  mellett, melyre

$$h_1(\underline{r}) = h_2(\underline{r}) = \dots = h_m(\underline{r}) = 0$$

#### 1.7.5. Tétel. [A feltételes szélsőérték szükséges feltétele]

Tegyük fel, hogy  $f, h_i: D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), az  $f$  függvénynek az  $\underline{r}_0 \in D$  belső pontban a  $h_1(\underline{r}) = 0, h_2(\underline{r}) = 0, \dots, h_m(\underline{r}) = 0$  feltételek mellett lokális feltételes szélsőértéke van; továbbá az  $f$  és  $h_i$  függvények parciális deriváltjai folytonosak  $\underline{r}_0$  egy környezetében és a

$$(\partial_j h_i(\underline{r}_0)) \quad (j = 1, \dots, n+m, \quad i = 1, \dots, m)$$

mátrixnak van nemzérus  $m$ -edrendű aldeteminánsa. Ekkor vannak olyan  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  valós számok, hogy az

$$F(\underline{r}) := f(\underline{r}) + \lambda_1 h_1(\underline{r}) + \dots + \lambda_m h_m(\underline{r}) \quad (\underline{r} \in D)$$

függvényre

$$\partial_1 F(\underline{r}_0) = \dots = \partial_{n+m} F(\underline{r}_0) = 0.$$

A  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  számokat Lagrange-féle multiplikátoroknak nevezzük, az  $F$  függvényt **feltételes szélsőérték probléma Lagrange-féle függvényének** nevezzük.

A feltételes szélsőérték probléma megoldása úgy történik, hogy a

$$\partial_1 F(\underline{r}) = \dots = \partial_{n+m} F(\underline{r}) = 0, \quad h_1(\underline{r}) = h_2(\underline{r}) = \dots = h_m(\underline{r}) = 0$$

$n + 2m$  darab egyenletből álló rendszert megoldjuk az

$$x_1, \dots, x_{n+m}, \lambda_1, \dots, \lambda_m$$

ismeretlenekre, a kapott  $x_1, \dots, x_{n+m}$  megoldások adják a feltételes szélsőérték lehetséges helyeit.

**1.7.1. Példa.** *Egy szállító cég csak olyan téglatest alakú dobozokat fogad el, amelyeknél a leghosszabb oldal hossza és a rá merőleges oldallap kerülete együttesen nem haladja meg a 270 centimétert. Milyen méretek mellett lesz a küldemény térfogata maximális?*

**A megoldáshoz** Jelölje  $x, y, z$  a hosszát, a magasságot és a szélességet. A változók szimmetrikus szerepére való tekintettel tegyük fel, hogy  $x \geq y \geq 0$ ,  $x \geq z \geq 0$ .

A  $V(x, y, z) = xyz$  térfogat maximumát keressük az  $x + 2y + 2z = 270$  feltétel mellett.

A Tétel jelöléseivel az  $f(x, y, z) = xyz$  függvény maximumát keressük a

$$h(x, y, z) := x + 2y + 2z - 270 = 0$$

*feltétel mellett. Ekkor*

$$F(x, y, z) = xyz + \lambda(x + 2y + 2z - 270).$$

*Az  $x \geq y \geq 0$  és  $x \geq z \geq 0$  feltételek teljesülését az  $F$  függvény stacionárius pontjainak megkeresése után direkt módon ellenőrizzük.*

**1.7.2. Példa.** *Határozzuk meg az  $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + x^4$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) függvény szélsőértékeit!*

**Megoldás:** Szélsőérték ott lehet, ahol  $\partial_1 f = \partial_2 f = 0$ :

$$\partial_1 f(x, y) = 4xy + 4x^3 \quad \partial_2 f(x, y) = 2y + 2x^2$$

Az

$$I. \quad 4xy + 4x^3 = 0$$

$$II. \quad 2y + 2x^2 = 0$$

egyenletrendszer I. egyenlete  $4x \cdot (y + x^2) = 0$  alakban írható, melyből kapjuk, hogy  $x = 0$  vagy  $y = -x^2$ .

Ezt visszahelyettesítve II.-be:

$$* \quad x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$* \quad y = -x^2 \text{ helyettesítéssel azonosságot kapunk.}$$

Ez azt jelenti, hogy  $f$ -nek a  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2\}$  halmaz elemei lehetséges szélsőértékhelyek.

$$\partial_1 \partial_1 f(x, y) = 4y + 12x^2 \quad \partial_1 \partial_2 f(x, y) = 4x$$

$$\partial_2 \partial_1 f(x, y) = 4x \quad \partial_2 \partial_2 f(x, y) = 2$$

A másodrendű deriváltfüggvények értékének meghatározása a  $D$  halmaz pontjaiban:

$$\partial_1 \partial_1 f(x, -x^2) = -4x^2 + 12x^2 = 8x^2 \quad \partial_1 \partial_2 f(x, -x^2) = 4x$$

$$\partial_2 \partial_1 f(x, -x^2) = 4x \quad \partial_2 \partial_2 f(x, -x^2) = 2$$

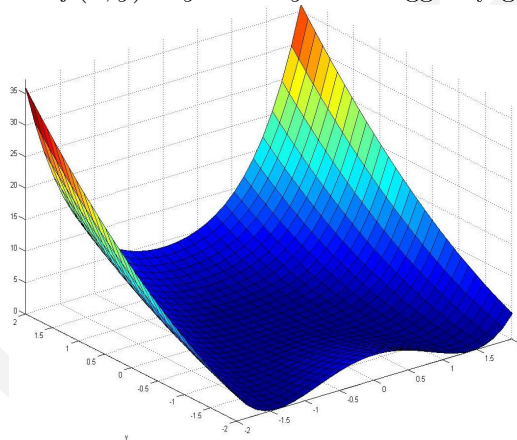
Mivel  $\det$

$$\begin{pmatrix} 8x^2 & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix} = 16x^2 - 16x^2 = 0,$$

a sarokdeterminánsok segítségével nem tudjuk eldönteni, hogy az  $(x, -x^2)$  pontok szélsőérték helyek-e vagy sem.

Az  $f$  függvény  $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + x^4 = (y + x^2)^2$  alakban írható, így könnyen látható, hogy értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza. A minimum értéke így 0, melyet  $f$  a  $D$  halmaz pontjaiban vesz fel.

36. ábra. Az  $f(x, y) = y^2 + 2x^2y + x^4$  függvény grafikus képe



**1.7.3. Példa.** Határozzuk meg a  $2x + y - z - 5 = 0$  sík origóhoz legközelebbi  $P = (x, y, z)$  pontját!

**Megoldás:**  $|\vec{OP}|$ -t kell minimalizálni a  $2x + y - z - 5 = 0$  feltétel mellett. Mivel

$$|\vec{OP}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

így  $|\vec{OP}|$ -nek ott van minimuma, ahol az  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  függvénynek. Feladatunk tehát az  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  minimumának meghatározása  $2x + y - z - 5 = 0$  feltétel mellett.

$$2x + y - z - 5 = 0 \Rightarrow z = 2x + y - 5,$$

azaz a  $h(x, y) := f(x, y, 2x + y - 5) = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2$  függvény minimumát keressük.

Szélsőérték ott lehet, ahol  $\partial_1 h = \partial_2 h = 0$ :

$$\partial_1 h(x, y) = 2x + 2 \cdot (2x + y - 5) \cdot 2 = 10x + 4y - 20$$

$$\partial_2 h(x, y) = 2y + 2 \cdot (2x + y - 5) \cdot 1 = 4x + 4y - 10$$

Az

$$I. \quad 10x + 4y - 20 = 0$$

$$II. \quad 4x + 4y - 10 = 0$$

egyenletrendszer megoldása:  $x = \frac{5}{3}$ ,  $y = \frac{5}{6}$ , ezért  $h$ -nak a  $\underline{r}_0 = (\frac{5}{3}, \frac{5}{6})$  helyen lehet szélsőértéke. A másodrendű deriváltfüggvények:

$$\partial_1 \partial_1 h(x, y) = 10 \quad \partial_1 \partial_2 h(x, y) = 4$$

$$\partial_2 \partial_1 h(x, y) = 4 \quad \partial_2 \partial_2 h(x, y) = 4$$

Mivel

$$\partial_1 \partial_1 h(\underline{r}_0) = 10 > 0 \quad \text{és}$$

$$\det \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 40 - 16 > 0,$$

$\underline{r}_0$  minimumhelye  $h$ -nak. Mivel

$$h(\underline{r}_0) = h\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}\right) := f\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, 2 \cdot \frac{5}{3} + \frac{5}{6} - 5\right) = f\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right),$$

így  $P = (\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6})$  minimumhelye  $f$ -nek. Ekkor

$$|\vec{OP}| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{150}{36}} \approx 2,04$$

**1.7.4. Példa.** Egy elhanyagolható vastagságú korong alakja az  $x^2 + y^2 \leq 1$  egyenlőtlenséggel jellemezhető. A korongot úgy melegítjük, hogy a hőmérséklet az  $(x, y)$  pontban:  $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ . Találjuk meg a korong legmelegebb és leghidegebb pontját!

**Megoldás:** A

$$T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$$

függvény abszolút szélsőértékeit keressük az  $x^2 + y^2 \leq 1$  feltétel mellett, azaz az origó középpontú egység sugarú zárt  $D$  körlapon.

$$(D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\})$$

$D$  korlátos zárt halmaz, ezért a  $T$  folytonos függvény felveszi e halmazon a maximumát és minimumát is; vagy  $D$  belsejében ( $D^\circ$ ) lokális szélsőérték formájában, vagy  $D$  határán:  $x^2 + y^2 = 1$ .

I. Szélsőérték keresése a  $D^\circ$  halmazon:

$$\partial_1 T(x, y) = 2x - 1 \quad \partial_2 T(x, y) = 4y$$

$$I. \quad 2x - 1 = 0$$

$$II. \quad 4y = 0$$

Az egyenletrendszer megoldása  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = 0$ , így szélsőérték lehet az  $r_0 = (\frac{1}{2}, 0) \in D^\circ$  helyen. A másodrendű deriváltfüggvények:

$$\partial_1 \partial_1 T(x, y) = 2 \quad \partial_1 \partial_2 T(x, y) = 0$$

$$\partial_2 \partial_1 T(x, y) = 0 \quad \partial_2 \partial_2 T(x, y) = 4$$

Mivel

$$\partial_1 \partial_1 T(r_0) = 2 > 0 \quad \text{és} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 0 > 0,$$

$r_0$  lokális minimumhelye  $T$ -nek és  $T(r_0) = T(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}$ .

II. Szélsőérték keresése  $D$  határán:

A  $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$  függvény abszolút szélsőértékeit keressük az  $x^2 + y^2 = 1$  feltétel mellett, azaz az origó középpontú egység sugarú zárt  $K$  körvonalon.

$$(K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\})$$

$K$  korlátos zárt halmaz, ezért a  $T$  folytonos függvény felveszi e halmazon a maximumát és minimumát is. Mivel

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2,$$

így a  $t(x) := x^2 + 2(1 - x^2) - x = -x^2 - x + 2$ ,  $x \in [-1, 1]$  függvény szélsőértékét keressük a  $[-1, 1]$  korlátos, zárt intervallumon.

★ szélsőérték keresése  $] -1, 1[$ -on:

$$t'(x) = -2x - 1, t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$t''\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 < 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ lokális maximumhelye } t\text{-nek}$$

Mivel  $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ , így  $x = -\frac{1}{2}$  esetén  $y = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$\text{Ekkor } T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}.$$

★ értékek a  $[-1, 1]$  határán:

$$x = -1 \Rightarrow y = 0 \text{ és } T(-1, 0) = 2$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0 \text{ és } T(1, 0) = 0$$

Összegezve az eddigieket: A

$$T(-1, 0) = 2, \quad T(1, 0) = 0, \quad T\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$$

$$T\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

adatok között a fentiek miatt  $T$  abszolút minimuma és maximuma is szerepel. A korong leghidegebb pontjának koordinátái:  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ , a korong legmelegebb pontjának koordinátái:  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  és  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

## 1.8. Vektormezők

A 1.4.5 Definícióban említettük, hogy az  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  típusú függvényeket vektormezőknek szokás nevezni. Az ilyen típusú függvények igen fontos szerepet töltenek be a fizikában, az úgynevezett mezőelméletekben. Vektormezőt adunk meg, mikor egy áramló folyadék részecskéinek helyvektoraihoz hozzárendeljük a sebességvektorokat, vagy például egy erőter pontjainak helyvektoraihoz hozzárendeljük az adott pontban fellépő erővektort (hiszen az adott pontban az erőnek nagysága és iránya van) a mágneses vagy a gravitációs mezőben. Itt főként  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  típusú vektormezővel foglalkozunk.

**1.8.1. Megállapodás.** A  $\underline{v} : D (\subset \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^3$  vektormezőket a továbbiakban

$$\underline{v}(\underline{r}) = v_1(\underline{r})\underline{i} + v_2(\underline{r})\underline{j} + v_3(\underline{r})\underline{k}$$

alakban fogjuk megadni, ahol a  $v_1, v_2, v_3$  skalármezők (háromváltozós valós értékű függvények) a  $\underline{v}$  vektormező koordinátafüggvényei.

Koordinátás alakban:

$$\underline{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)) \quad (x, y, z) \in D$$

vagy

$$\underline{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

A 1.4.2 Tétel értelmében ha egy  $\underline{v}$  vektormező differenciálható, akkor a  $v_1, v_2, v_3$  koordinátafüggvényei, mint skalármezők differenciálhatók, és

$$\underline{v}'(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1(\underline{r}) & \partial_2 v_1(\underline{r}) & \partial_3 v_1(\underline{r}) \\ \partial_1 v_2(\underline{r}) & \partial_2 v_2(\underline{r}) & \partial_3 v_2(\underline{r}) \\ \partial_1 v_3(\underline{r}) & \partial_2 v_3(\underline{r}) & \partial_3 v_3(\underline{r}) \end{pmatrix}_{3 \times 3} .$$

Az 1.4 alfejezetben leírtak értelmében ha a  $\underline{v} : D (\subset \mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^3$  függvény differenciálható a  $D$  értelmezési tartomány  $\underline{r}_0$  belső pontjában és  $\underline{r}$  "élég közel" van  $\underline{r}_0$ -hoz, akkor  $\underline{v}(\underline{r}) - \underline{v}(\underline{r}_0) \approx \underline{v}'(\underline{r}_0) \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0)$ , azaz  $\Delta \underline{v} \approx \underline{v}'(\underline{r}_0) \cdot \Delta \underline{r}$ . Ezt alkalmazzák többek közt a szilárdságtanban is, mint ahogy azt az alábbi példa mutatja.

**1.8.1. Példa.** *Terhelés hatására a szilárd test pontjai elmozdulnak. Az elmozdulásokat egy koordinátarendszer, azaz egy  $O$  vonatkoztatási pont és egy  $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$  jobbsodrású ortonormált bázis rögzítése után*

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \underline{r} \rightarrow \underline{v}(\underline{r})$$

típusú függvénnyel, vektormezővel adhatjuk meg. Ez a szilárd test egy  $P_0$  pontjának  $\underline{r}_0$  helyvektorához az elmozdulásvektort rendeli. Ezt a vektormezőt elmozdulásmezőnek szokás nevezni. Mivel  $\underline{v}(\underline{r}) \approx \underline{v}(\underline{r}_0) + \underline{v}'(\underline{r}_0) \cdot \Delta \underline{r}$ , így

$$\underline{v}(\underline{r}) \approx \overbrace{\underline{v}(\underline{r}_0)}^{\text{eltolódás}} + \overbrace{\Psi_{P_0} \cdot \Delta \underline{r}}^{\text{elemi szögelfordulás}} + \overbrace{A_{P_0} \cdot \Delta \underline{r}}^{\text{alakváltozás}}$$

ahol

$$\Psi_{P_0} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{v}'(\underline{r}_0) - \underline{v}'(\underline{r}_0)^T)$$

az ún. forgató tenzor ferdeszimmetrikus mátrixa;

$$A_{P_0} = \frac{1}{2} \cdot (\underline{v}'(\underline{r}_0) + \underline{v}'(\underline{r}_0)^T)$$

pedig az ún. alakváltozási tenzor szimmetrikus mátrixa.

Adott vektormező (pl. sebességtér az áramló folyadékban, térerőség az elektromos erőterben) esetén a differenciálhányados mátrixának elemei függenek a koordinátarendszer megválasztásától. Az alábbiakban két olyan jellemzőt adunk meg, melyek a differenciálhányados mátrix elemeiből számíthatók, de invariánsak a koordinátarendszer megváltoztatásával szemben, és közvetlen fizikai tartalommal bírnak.

**1.8.1. Definíció.** *A divergencia egy adott pontban egyenlő a pontbeli differenciálhányados-mátrix főátlójában álló elemek összegével:*

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}_0) = \partial_1 v_1(\underline{r}_0) + \partial_2 v_2(\underline{r}_0) + \partial_3 v_3(\underline{r}_0).$$

Ha  $\operatorname{div} \underline{v} = 0$ , akkor a vektormezőt forrásmentesnek mondjuk.

**1.8.1. Megjegyzés.** Ha bevezetjük a szimbolikus  $\nabla := (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$  nabla vektort, akkor a divergencia a következőképpen írható fel:

$$\operatorname{div} \underline{v} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3) \bullet (v_1, v_2, v_3) = \nabla \bullet \underline{v}$$

Természetesen a  $\nabla$  vektornak önmagában nincs értelme, de mint műveleti operátor, segítségünkre lehet az összefüggések könnyebb megjegyzésében.

**1.8.2. Definíció.** A rotáció egy adott pontban:

$$\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}_0) = (\partial_2 v_3(\underline{r}_0) - \partial_3 v_2(\underline{r}_0)) \cdot \underline{i} + (\partial_3 v_1(\underline{r}_0) - \partial_1 v_3(\underline{r}_0)) \cdot \underline{j} + (\partial_1 v_2(\underline{r}_0) - \partial_2 v_1(\underline{r}_0)) \cdot \underline{k}$$

Ha  $\operatorname{rot} \underline{v} = 0$ , akkor a vektormezőt örvénymentesnek mondjuk.

$$\operatorname{rot} \underline{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \nabla \times \underline{v}$$

**1.8.2. Megjegyzés.** A rotációvektor koordinátái töltik ki a deriváltmátrix ferdeszimmetrikus részének sorait, oszlopait; lásd 1.8.1 Példa:  $\Psi_{P_0}$ .

Fontos kérdés, hogy egy vektormező mikor adódott deriválás útján. Az ilyen vektormezőket potenciálisnak mondjuk. Pontosabban két esetet különböztetünk meg.

**1.8.3. Definíció.**

- \* Egy  $\underline{v}$  vektormezőt skalár-potenciálisnak mondunk, ha létezik olyan  $f$  skalármező, melynek gradiensvektora éppen  $\underline{v}$ , tehát  $\underline{v} = \operatorname{grad} f$ .
- \* Egy  $\underline{v}$  vektormezőt vektor-potenciálisnak mondunk, ha létezik olyan  $\underline{w}$  vektormező, melynek rotációvektora éppen  $\underline{v}$ , tehát  $\underline{v} = \operatorname{rot} \underline{w}$ .

Példa örvénymentes vektormezőre a

$$\underline{v}(x, y, z) = (x, y, z)$$

helyvektormező. Mivel a differenciáloperátorok „keresztben” hatnak, ezért nyilvánvaló, hogy a rotációvektor előállításában szereplő valamennyi parciális derivált zérus. Ez a vektormező az

$$p(x, y, z) := \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

függvény *gradiense*, azaz  $v_1 = \partial_1 p$ ,  $v_2 = \partial_2 p$ ,  $v_3 = \partial_3 p$ . Mivel a parciális differenciálásnál (alkalmas feltételek mellett) a sorrend felcserélhető, ezért könnyű látni, hogy minden *gradiensvektormező* örvénymentes. Például az első koordinátafüggvény

$$\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 = \partial_2(\partial_3 p) - \partial_3(\partial_2 p) = 0, \text{ stb.}$$

Könnyen igazolható, hogy skalárpotenciális vektormezők rotációja zérusvektor, a vektor-potenciális vektormezők divergenciája zérus:

$$\text{rot grad } f = 0 \qquad \text{div rot } w = 0$$

Mindkét összefüggés a vegyes parciális deriváltak egybeeséséről szóló Young tételből következik.

**1.8.3. Megjegyzés.** *A divergencia legszemléletesebb jelentését az áramlás-tanban nyeri el. Megmutatja az áramlási tér pontjainak kis környezetében (térfogatelem) a be- és kiáramló folyadék mennyiségi viszonyait. A rotáció megmutatja, hogyan örvénylik a folyadék az áramlási tér pontjainak kis környezetében.*

Az analízis fontos differenciáloperátora az ún. Laplace-operátor (jele:  $\Delta$ ), mely megadja egy skalármező tiszta másodrendű parciális deriváltjainak összegét:

$$\Delta f := \text{div}(\text{grad } f).$$

## 2. Integrálszámítás

Az elméleti műszaki számításoknál számtalan esetben integrálni kell. Ha egy  $M_1$  mennyiség függ egy másik  $M_2$  mennyiségtől és az  $M_1$  mennyiség  $M_2$ -re vonatkoztatott változási gyorsasága mérhető vagy számítható, akkor az  $M_1$  mennyiség integrálással számítható. Erre láthatunk példákat  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvények esetére az alábbi táblázatban abban az esetben, amikor az  $M_2$  mennyiség az idő.

Változási gyorsaság az időre vonatkoztatva	Mennyiség
pályasebesség ( $v$ , [m/s])	pályakoordináta ( $s$ , [m])
teljesítmény ( $P$ , (J/s=W))	rendszer által leadott/ felvett energia ( $E$ , [J])
áramerősség ( $I$ , [C/s=A])	adott keresztmetszeten átáramlott töltésmennyiség ( $Q$ , [C])

Ha egy tartomány pontjaiban ismert egy mennyiség sűrűsége, akkor a mennyiség összértéke szintén integrálással számítható. (Ha a sűrűség nem állandó, akkor csak integrálással számítható). Ilyen sűrűség jellegű mennyiségek például: a tömegsűrűség, az elektromos töltéssűrűség, az erősűrűség (nyomás), az energiasűrűség, a fluxussűrűség.

Bizonyos geometriai jellemzők (például terület, térfogat, ívhossz, felszín) és nyomatékok (például: statikai nyomaték, tehetetlenségi nyomaték) szintén integrálással számíthatók. Az előző fejezetben láttuk, hogy felületek, és így felületekkel határolt testek is többváltozós függvények segítségével adhatók meg. Így általában a fent felsorolt jellemzők "többes" integrállal számíthatók.

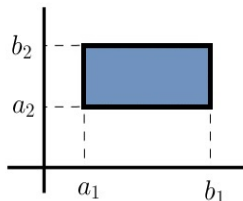
### 2.1. Kettős- és hármas integrál

#### 2.1.1. Definíció. $\mathbb{R}^2$ -ben az

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2]\}$$

halmazt kétdimenziós intervallumnak nevezzük.

37. ábra. Kétdimenziós zárt intervallum



A kétdimenziós intervallum mértékén az  $\Delta I = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$  számot értjük. (Ez épp a téglalap területe.)

**2.1.1. Megállapodás.** Amíg mást nem mondunk, a továbbiakban  $I$  kétdimenziós zárt intervallumot jelöl.

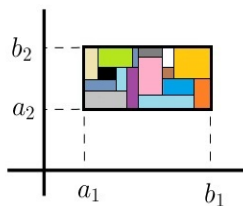
**2.1.2. Definíció.** A  $d = \{I_1, I_2, \dots, I_k\}$  intervallumrendszert az  $I$  egy beosztásának nevezzük, ha

$$* I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k = I$$

$$* I_i^\circ \cap I_j^\circ = \emptyset, \text{ ha } i \neq j \quad (i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, k).$$

( $I^\circ$  az  $I$  intervallum belső pontjainak halmazát jelöli)

38. ábra. Kétdimenziós zárt intervallum egy beosztása



Jelöljük  $D(I)$ -vel az  $I$  összes beosztásának halmazát.

Az egyváltozós esethez hasonlóan legyen  $f: I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  **korlátos** függvény,  $d$  az  $I$  intervallum egy beosztása, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$m_i := \inf f(I_i) \text{ és } M_i = \sup f(I_i) \quad (i = 1, \dots, k).$$

(Ha  $f$  folytonos, akkor  $m_i$  a függvény legkisebb értéke (minimuma) az  $I_i$  intervallumon,  $M_i$  a függvény legnagyobb értéke (maximuma) az  $I_i$  intervallumon.)

A

$$s(f, d) := \sum_{i=1}^k m_i \cdot \Delta I_i \text{ és } S(f, d) := \sum_{i=1}^k M_i \cdot \Delta I_i$$

összegeket az  $f$  függvény  $d$  beosztáshoz tartozó alsó ill. felső összegének nevezzük, míg tetszőleges  $\underline{x}_i \in I_i$  pontokra a

$$\sigma(f, d) = \sum_{i=1}^k f(\underline{x}_i) \cdot \Delta I_i$$

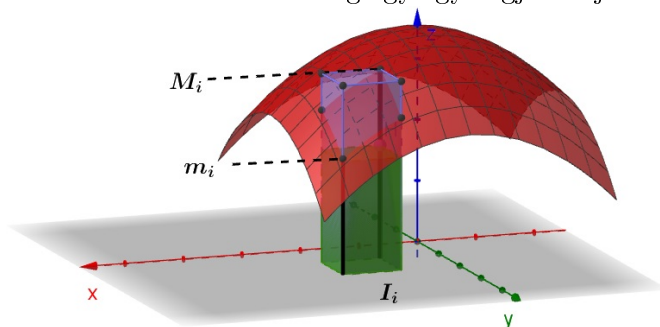
számot az  $f$  függvény  $d$  felosztáshoz tartozó integrálközelítő összegének nevezzük.

**2.1.1. Megjegyzés.** *Az integrálközelítő összeg tagjai olyan szorzatok, melyek egyik tényezője a függvény egy értéke, a másik tényezője a felosztásban szereplő egy téglalap területe. Így az integrálközelítő összeg tagjai téglalatestek (előjeles) térfogataiként is felfoghatók.*

**2.1.1. Tétel.** *Ha  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény, akkor*

- \*  $\forall d$  és  $\forall \sigma(f, d)$ -re:  $s(f, d) \leq \sigma(f, d) \leq S(f, d)$ ;
- \*  $s(f, d_1) \leq s(f, d_2)$  és  $S(f, d_1) \geq S(f, d_2)$ , ahol  $d_2$  a  $d_1$  beosztás finomítása, azaz  $d_2$  a  $d_1$  intervallumrendszer tagjainak beosztásaiból áll;
- \*  $\forall d_1, d_2$ -re:  $s(f, d_1) \leq S(f, d_2)$

39. ábra. Alsó - és felső összeg egy-egy tagjának jelentése



**2.1.1. Következmény.** Az alsó integrálközelítő összegek halmaza felülről korlátos. A felső integrálközelítő összeg halmaza alulról korlátos.

**2.1.3. Definíció.** Az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény alsó integrálközelítő összegei halmazának

$$\int_{-I} f = \sup_{d \in D(I)} s(f, d)$$

pontos felső korlátját az  $f$  függvény alsó integráljának nevezzük.

Az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény felső integrálközelítő összegei halmazának

$$\int_I \bar{f} = \inf_{d \in D(I)} S(f, d)$$

pontos alsó korlátját az  $f$  függvény felső integráljának nevezzük.

**2.1.2. Megjegyzés.** Ha  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény, akkor az  $f$  alsó és felső integrálja valós számok; és  $\int_{-I} f \leq \int_I \bar{f}$ .

**2.1.1. Példa.** Ha  $f$  konstans függvény, azaz  $f(x, y) = c$  ( $(x, y) \in I$ ), akkor

$$\int_{-I} f = \int_I \bar{f}.$$

**2.1.2. Példa.** *Ha*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & : (x, y) \in I; x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & : (x, y) \in I \text{ egyébként,} \end{cases}$$

akkor  $\int_{-I} f \neq \int_I \bar{f}$ .

**2.1.4. Definíció.** *Ha az alsó és a felső integrál egyenlő, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény Riemann-integrálható az  $I$  intervallumon. Az alsó és a felső integrálok közös értékét az  $f$  függvény  $I$  intervallumon vett Riemann-integráljának nevezzük.*

*Jele:  $\int_I f$  vagy  $\int_I f(x, y) dx dy$ , és szokásos még:  $\int \int_I f$*

**2.1.2. Tétel.** *Ha  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  egy megszámlálható halmaztól eltekintve folytonos, akkor Riemann-integrálható.*

**2.1.3. Tétel.** *Egy korlátos  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre akkor és csak akkor teljesül, hogy Riemann-integrálható és integrálja  $\mathbf{I}$ , ha  $\forall \varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $d$  felosztás, amelyhez tartozó bármely  $\sigma(f, d)$  közelítő összegre  $|\sigma(f, d) - \mathbf{I}| < \varepsilon$ .*

**2.1.4. Tétel.**

\* *Ha  $f$  integrálható az  $I$  intervallumon, akkor a  $c \cdot f$  függvény is és*

$$\int_I c \cdot f(\underline{r}) d\underline{r} = c \cdot \int_I f(\underline{r}) d\underline{r}$$

\* *Ha  $f$  és  $g$  integrálhatók az  $I$  intervallumon, akkor az  $f + g$  függvény is és*

$$\int_I (f + g)(\underline{r}) d\underline{r} = \int_I f(\underline{r}) d\underline{r} + \int_I g(\underline{r}) d\underline{r}$$

\* *Ha  $f$  és  $g$  integrálhatók az  $I$  intervallumon, akkor az  $|f|$  és  $f \cdot g$  függvények is, továbbá, ha  $|g(\underline{r})| \geq \delta > 0$  minden  $\underline{r} \in I$ -re, akkor  $f/g$  is integrálható.*

\* Legyen  $g$  integrálható az  $I$  intervallumon és legyen  $f$  valós értékű folytonos függvény egy olyan  $[\alpha, \beta]$  zárt intervallumon, amely tartalmazza  $g$  értékkészletét (vagyis a  $g(I)$  halmazt). Ekkor  $f \circ g$  is integrálható  $I$ -n.

**2.1.5. Tétel. [Az integrál additivitása]** Ha az  $\{I_1, I_2, \dots, I_k\}$  intervallumrendszer az  $I$  intervallum egy beosztása, és az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény integrálható az  $I_1, I_2, \dots, I_k$  intervallumokon, akkor  $f$  integrálható az  $I$  intervallumon is és  $\int_I f = \sum_{i=1}^k \int_{I_i} f$ .

**2.1.6. Tétel.** Ha az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény integrálható az  $I$  intervallumon, akkor integrálható bármely  $J \subset I$  részintervallumon is.

**2.1.7. Tétel. [Az integrál monotonitása]** Ha az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  és a  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények integrálhatók, és  $f(\underline{r}) \leq g(\underline{r})$  ha  $\underline{r} \in I$ , akkor  $\int_I f \leq \int_I g$

**2.1.8. Tétel. [Az integrálszámítás középértéktétele]**

Ha az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  és a  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvények integrálhatók,  $g(\underline{r}) \geq 0$ , ha  $\underline{r} \in I$  és van olyan  $m, M \in \mathbb{R}$ , hogy

$$m \leq f(\underline{r}) \leq M \quad (\underline{r} \in I),$$

akkor

$$m \cdot \int_I g \leq \int_I f \cdot g \leq M \cdot \int_I g.$$

**2.1.9. Tétel. [A szukcesszív integrálás tétele kettős integrálra]** Legyen  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$  kétdimenziós zárt intervallum. Ha az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, akkor az  $f$  függvény  $I$ -n vett kettős integrálja meghatározható két egyváltozós integrál egymás utáni kiszámításával az alábbiak szerint:

$$\int \int_I f(x, y) \, dx dy = \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx \right) dy$$

vagy

$$\int \int_I f(x, y) \, dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

amennyiben a megfelelő "szekciófüggvények" integrálhatók.

szukcesszív = egymásra következő

### A kettős integrál kiterjesztése

Tekintsük a  $H \subset \mathbb{R}^2$  korlátos halmazt és legyen  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény. Legyen továbbá az  $f_H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  olyan, hogy

$$f_H(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & : (x, y) \in H \\ 0 & : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus H \end{cases}$$

Legyen  $I$  kétdimenziós zárt intervallum úgy, hogy  $H \subset I$ . Az  $f$  függvényt Riemann-integrálhatónak mondjuk  $H$  felett, ha létezik az  $\int \int_I f_H$  integrál, és az

$$\int \int_H f := \int \int_I f_H$$

számot az  $f$  függvény  $H$  feletti integráljának nevezzük.

**2.1.3. Megjegyzés.** A  $H(\subset \mathbb{R}^2)$  síkidom területe :

$$t(H) := \int \int_H 1 \, dx dy$$

### Hármas integrál

**2.1.5. Definíció.**  $\mathbb{R}^3$ -ban az  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] =$

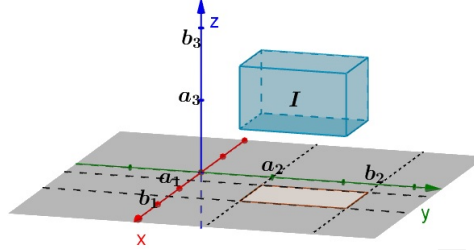
$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2], z \in [a_3, b_3]\}$$

halmazt háromdimenziós intervallumnak nevezzük.

Mértéke:  $\Delta I = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3)$ . A hármas integrált hasonlóan definiáljuk mint a kettős integrált.

A kettős integrálnál felsorolt tételek a hármas integrálra is érvényben maradnak.

40. ábra. Háromdimenziós zárt intervallum



**2.1.10. Tétel. [A szukcesszív integrálás tétele hármas integrálra]**  
 Legyen  $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$  háromdimenziós zárt intervallum.  
 Ha az  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, akkor az  $f$  függvény  $I$ -n vett hármas integrálja meghatározható három egyváltozós integrál egymás utáni kiszámításával az alábbiak szerint:

$$\int \int \int_I f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{a_3}^{b_3} \left( \int_{a_2}^{b_2} \left( \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$

amennyiben a megfelelő "szekciófüggvények" integrálhatók.

Ez a lehetséges 6 eset közül az egyik sorrend.

### A hármas integrál kiterjesztése

Tekintsük a  $H \subset \mathbb{R}^3$  korlátos halmast és legyen  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény.  
 Legyen továbbá az  $f_H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  olyan, hogy

$$f_H(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & : (x, y, z) \in H \\ 0 & : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus H \end{cases}$$

Legyen  $I$  háromdimenziós zárt intervallum úgy, hogy  $H \subset I$ . Az  $f$  függvényt Riemann-integrálhatónak mondjuk  $H$  felett, ha létezik az  $\int \int \int_I f_H$  integrál, és az

$$\int \int \int_H f := \int \int \int_I f_H$$

számot az  $f$  függvény  $H$  feletti integráljának nevezzük.

**2.1.4. Megjegyzés.** A  $H(\subset \mathbb{R}^3)$  test térfogata :

$$v(H) := \int \int \int_H 1 \, dx dy dz.$$

DUPRESS

## 2.2. Integrálás normáltartományon

**2.2.1. Definíció.** [x tengelyre vonatkozó (síkbeli) normáltartomány]  
Ha  $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények és  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , akkor

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

halmazt az  $x$  tengelyre vonatkozó normáltartománynak nevezzük.

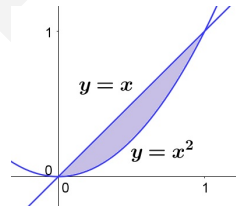
**2.2.2. Definíció.** [y tengelyre vonatkozó (síkbeli) normáltartomány]  
Ha  $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények és  $g_1(y) \leq g_2(y)$ ,  $y \in [a, b]$ , akkor

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

halmazt az  $y$  tengelyre vonatkozó normáltartománynak nevezzük.

**2.2.1. Példa.** Ugyanazt a tartományt felírhatjuk "x" tengelyre vonatkozó és "y" tengelyre vonatkozó normáltartományként is.

41. ábra. Síkbeli normáltartományok



\* "x" tengelyre vonatkozó normáltartományként:

$$a = 0, b = 1, f_1(x) = x^2, f_2(x) = x$$

\* "y" tengelyre vonatkozó normáltartományként:

$$a = 0, b = 1, g_1(y) = y, g_2(y) = \sqrt{y}$$

**2.2.1. Tétel.** *Integrálás  $x$  tengelyre vonatkozó (síkbeli) normáltartományon:*

$$\int \int_H f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

**2.2.2. Tétel.** *Integrálás  $y$  tengelyre vonatkozó (síkbeli) normáltartományon:*

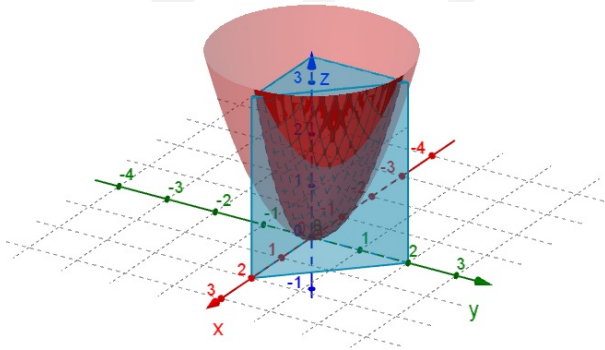
$$\int \int_H f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

**2.2.2. Példa.**  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq -x + 2\}$$

$$V = \int \int_H f(x, y) \, dx dy = \int_0^2 \left( \int_0^{-x+2} x^2 + y^2 \, dy \right) dx$$

42. ábra. Térfogat



**2.2.1. Megjegyzés.** [Normáltartomány területe:] *Az  $x$  tengelyre vonatkozó normál tartomány esetén:*

$$t(H) = \int \int_H 1 \, dx dy = \int_a^b \left( \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_a^b f_2(x) - f_1(x) \, dx$$

**2.2.3. Definíció. [Térbeli normáltartomány]** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^2$  korlátos zárt halmaz és  $h_1, h_2: D \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények, úgy hogy  $h_1(x, y) \leq h_2(x, y)$  ha  $(x, y) \in D$ . Ekkor a

$$H = \{(x, y, z) : (x, y) \in D; h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

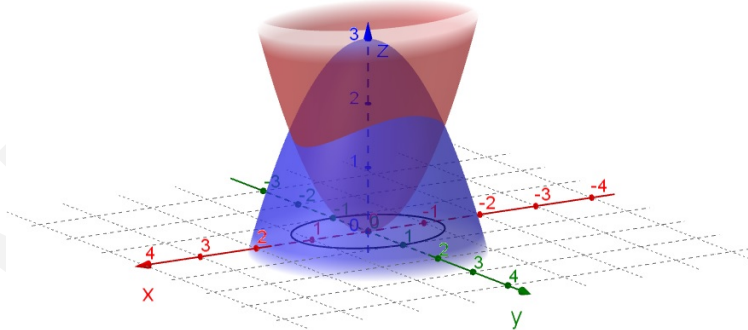
ponthalmazt  $D$  feletti  $z$  tengelyre vonatkozó normáltartománynak nevezzük.

**2.2.3. Tétel.** Ha  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény, akkor

$$\int \int \int_H f = \int \int_D \left( \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

**2.2.3. Példa.** Határozzuk meg annak a testnek a térfogatát, melyet a  $z = 3 - x^2 - y^2$  és a  $z = x^2 + 2y^2$  implicit alakban adott felületek határolnak! A 43. ábrán látható a megadott paraboloidfelületek által határolt test. A két

43. ábra. Térbeli normáltartomány



felület metszésvonala rajta van egy ún. elliptikus hengerfelületen. Valóban, az  $h_1(x, y) = x^2 + 2y^2$  és a  $h_2(x, y) = 3 - x^2 - y^2$  függvények értékei azokon a helyeken egyeznek meg, ahol  $h_1(x, y) = h_2(x, y)$ , azaz teljesül a  $x^2 + 2y^2 = 3 - x^2 - y^2$ . Ebből rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{x^2}{1.5} + y^2 = 1,$$

amely egy  $a = \sqrt{1.5}$  fél nagytengelyű és  $b = 1$  fél kistengelyű ellipszis egyenlete az  $xy$ -síkban, míg a "z" koordinátára nincs korlátozó feltétel. Figyelembe véve a 2.1.4 Megjegyzést és a 2.2.3 Tételt a két felület által határolt test térfogata:

$$V = \int \int_D \left( \int_{x^2+2y^2}^{3-x^2-y^2} 1 dz \right) dx dy = \int \int_D [z]_{x^2+2y^2}^{3-x^2-y^2} dx dy,$$

ahol  $D$  az  $\frac{x^2}{1.5} + y^2 = 1$  egyenletű ellipszis által határolt síkbeli tartomány. Mivel

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{1.5} \leq x \leq \sqrt{1.5}, -\sqrt{1 - \frac{x^2}{1.5}} \leq y \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{1.5}} \right\}$$

"x" tengelyre vonatkozó normáltartomány, így a 2.2.1 Tételt alkalmazva

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{1.5}}^{\sqrt{1.5}} \left( \int_{-\sqrt{1 - \frac{x^2}{1.5}}}^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1.5}}} 3 - 2x^2 - 3y^2 dy \right) dx = \\ &= \int_{-\sqrt{1.5}}^{\sqrt{1.5}} \left[ (3 - 2x^2) \cdot y - y^3 \right]_{-\sqrt{1 - \frac{x^2}{1.5}}}^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1.5}}} dx = \\ &= \int_{-\sqrt{1.5}}^{\sqrt{1.5}} (3 - 2x^2) \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{x^2}{1.5}} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{1.5}}^3 \right) - \left( (3 - 2x^2) \cdot \left( -\sqrt{1 - \frac{x^2}{1.5}} \right) - \left( -\sqrt{1 - \frac{x^2}{1.5}} \right)^3 \right) dx = \\ &= 2 \cdot \int_{-\sqrt{1.5}}^{\sqrt{1.5}} (3 - 2x^2) \cdot \left( \sqrt{1 - \frac{x^2}{1.5}} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{1.5}}^3 \right) dx. \end{aligned}$$

Most  $x = \sqrt{1.5} \cdot \sin t$  helyettesítéssel élve  $\frac{dx}{dt} = \sqrt{1.5} \cdot \cos t$  és

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( (3 - 2 \cdot 1.5 \cdot \sin^2 t) \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} - \sqrt{1 - \sin^2 t}^3 \right) \cdot \sqrt{1.5} \cdot \cos t dt = \\ &= 2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \cdot (1 - \sin^2 t) \cdot \cos t - \cos^3 t) \cdot \sqrt{1.5} \cdot \cos t dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \cdot \sqrt{1.5} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \, dt = 4 \cdot \sqrt{1.5} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t)^2 \, dt = \\
&= 4 \cdot \sqrt{1.5} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \right)^2 \, dt = \\
&= 4 \cdot \sqrt{1.5} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{4} \cos^2(2t) \, dt = \\
&= 4 \cdot \sqrt{1.5} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4t) \right) \, dt = \\
&= 4 \cdot \sqrt{1.5} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{8} \cos(4t) \, dt = \\
&= 4 \cdot \sqrt{1.5} \cdot \left[ \frac{3}{8} t + \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{1}{32} \sin(4t) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= 4 \cdot \sqrt{1.5} \cdot \left( \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{3 \cdot \sqrt{1.5}}{2} \cdot \pi
\end{aligned}$$

### 2.3. Gyakorlati alkalmazások

**2.3.1. Példa.** [Változó sűrűségű vékony lemez tömegének meghatározása:] ha a  $H \subset \mathbb{R}^2$  síklemez felületi tömegsűrűsége  $\rho: H \rightarrow [0, +\infty)$ , akkor a test tömege:

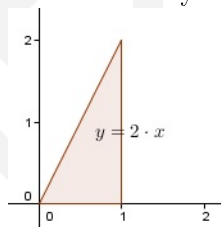
$$m = \int \int_H \rho(x, y) \, dx dy.$$

Ha  $\rho = \rho_0$  állandó, akkor a síklemez homogén. Ekkor

$$m = \rho_0 \cdot \int \int_H 1 \, dx dy = \rho_0 \cdot t(H)$$

**2.3.2. Példa.** Az 44. ábrán látható háromszög alakú vékony lemez felületi tömegsűrűsége az  $(x, y)$  pontban:  $\rho(x, y) = 6x + 6y + 6$  [g/cm<sup>2</sup>]. Mennyi a lemez tömege?

44. ábra. Vékony lemez



$$\begin{aligned} m &= \int \int_H \rho(x, y) \, dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{2x} 6x + 6y + 6 \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[ 6xy + 6 \frac{y^2}{2} + 6y \right]_0^{2x} dx = \int_0^1 6x \cdot 2x + 6 \cdot \frac{(2x)^2}{2} + 6 \cdot 2x \, dx = \\ &= \int_0^1 12x^2 + 12x^2 + 12x \, dx = \left[ 24 \cdot \frac{x^3}{3} + 12 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 8 + 6 - 0 = 14 \text{ [g]}. \end{aligned}$$

**2.3.3. Példa.** Súlypont koordinátáinak meghatározása, ha ismert a sűrűségfüggvény: ha a  $H \subset \mathbb{R}^2$  síklemez sűrűségfüggvénye

$\rho: H \rightarrow [0, +\infty)$ , akkor az  $S = (x_S, y_S)$  súlypont koordinátái

$$x_S = \frac{\int \int_H x \cdot \rho(x, y) \, dx dy}{\int \int_H \rho(x, y) \, dx dy} \quad y_S = \frac{\int \int_H y \cdot \rho(x, y) \, dx dy}{\int \int_H \rho(x, y) \, dx dy}.$$

**2.3.4. Példa.** A másodrendű nyomatékokat többek között rudak hajlítással szembeni ellenállásának és lehajlásának számítására használják, ahol a rúd keresztmetszete, azaz egy síkidom, kitüntetett figyelmet kap. Az "x", valamint az "y" tengelyre számított másodrendű nyomatékok:

$$I_x = \int \int_H y^2 \cdot \rho(x, y) \, dx dy \quad I_y = \int \int_H x^2 \cdot \rho(x, y) \, dx dy$$

**2.3.5. Példa. Változó sűrűségű test tömegének meghatározása:** ha a  $H \subset \mathbb{R}^3$  test sűrűségfüggvénye  $\rho: H \rightarrow [0, +\infty)$ , akkor a test tömege:  $m = \int \int \int_H \rho(x, y, z) \, dx dy dz$ . Ha  $\rho = \rho_0$  állandó, akkor a test homogén. Ekkor

$$m = \rho_0 \cdot \int \int \int_H 1 \, dx dy dz = \rho_0 \cdot v(H).$$

**2.3.6. Példa. Súlypont koordinátáinak meghatározása, ha ismert a sűrűségfüggvény:** ha a  $H \subset \mathbb{R}^3$  test sűrűségfüggvénye  $\rho: H \rightarrow [0, +\infty)$ , akkor az  $S = (x_S, y_S, z_S)$  súlypont koordinátái

$$x_S = \frac{\int \int \int_H x \cdot \rho(x, y, z) \, dx dy dz}{\int \int \int_H \rho(x, y, z) \, dx dy dz} \quad y_S = \frac{\int \int \int_H y \cdot \rho(x, y, z) \, dx dy dz}{\int \int \int_H \rho(x, y, z) \, dx dy dz}$$

$$z_S = \frac{\int \int \int_H z \cdot \rho(x, y, z) \, dx dy dz}{\int \int \int_H \rho(x, y, z) \, dx dy dz}$$

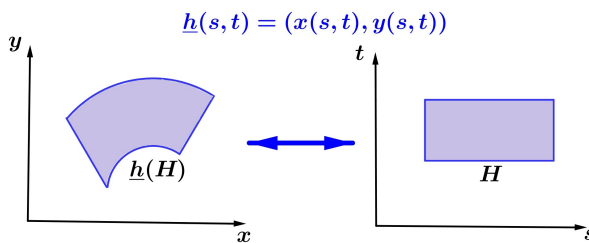
## 2.4. Integráltranszformáció

Legyen  $D \subset \mathbb{R}^2$  nyílt halmaz, és  $\underline{h}: D \rightarrow \mathbb{R}^2$  folytonosan differenciálható. Legyen továbbá  $H \subset D$  korlátos zárt halmaz és  $\underline{h}$  injektív  $H$  belső pontjainak halmazán. Ha az  $f: \underline{h}(H) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény korlátos, akkor

$$\int_{\underline{h}(H)} f(x, y) dx dy = \int_H f(\underline{h}(s, t)) \cdot |\det \underline{h}'(s, t)| ds dt$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is és a kettő egyenlő.

45. ábra. Integráltranszformáció



### Síkbeli polárkoordináták

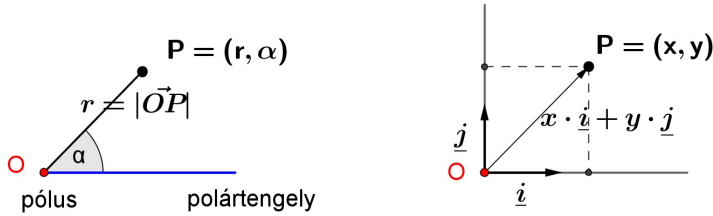
Rögzítve egy  $O$  pontot és egy  $O$  kezdőpontú félegyenest a síkon a sík bármely  $P$  pontja egyértelmű módon azonosítható az  $O$  ponttól való távolság (jelölje  $r$ ), és az adott félegyenessel bezárt irányított szög segítségével (jelölje  $\alpha$ ). Az  $O$  pontot **pólusnak**, az adott félegyenest **polártengelynek** nevezzük. Az  $(r, \alpha)$  rendezett párt a  $P$  pont **polárkoordinátáinak** mondjuk. (lásd 46 ábra.)

**2.4.1. Megjegyzés.** *Összefüggések az  $(x, y)$  Descartes-féle derékszögű és az  $(r, \alpha)$  polárkoordináták között:*

\* *áttérés polárkoordinátáról Descartes-féle koordinátákra:*

$$x = r \cdot \cos \alpha, \quad y = r \cdot \sin \alpha$$

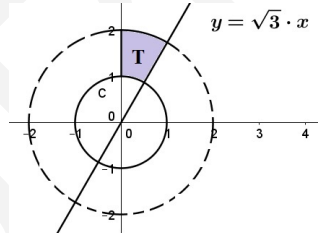
46. ábra. Polárkoordináták és Descartes-féle koordináták



\* áttérés Descartes-féle koordinátákról polárkoordinátákra:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$$

47. ábra. Körszerű tartomány



A 47. ábrán látható  $T$  körszerű tartomány esetén

$$H = \left\{ (r, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Körszerű tartományokon való integrálásokkor az ún. polárkoordinátás helyettesítést használjuk.

**2.4.1. Tétel. [Polárkoordinátás helyettesítés]**

Legyen  $\underline{h}(r, \alpha) = (r \cdot \cos \alpha, r \cdot \sin \alpha)$  minden  $r, \alpha \in \mathbb{R}$  esetén. Ha a  $H \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi]$  halmaz kétdimenziós zárt intervallum és az  $f: \underline{h}(H) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény korlátos, akkor

$$\int_{\underline{h}(H)} f(x, y) dx dy = \int_H f(r \cdot \cos \alpha, r \cdot \sin \alpha) \cdot r dr d\alpha$$

abban az értelemben, hogy ha az egyik oldal létezik, akkor a másik is és a kettő egyenlő.

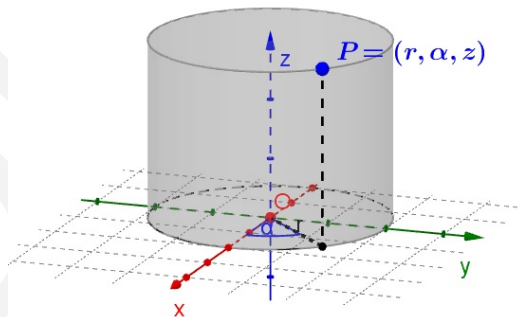
**2.4.2. Megjegyzés. Ekkor**

$$|\det \underline{h}'(r, \alpha)| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \cdot \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} \right| = r$$

**A hengerkoordináta-rendszer**

A hengerkoordináta-rendszer tulajdonképpen az "xy" síkbeli polárkoordináta-rendszer kibővítése a "z"-tengellyel; pontosabban a Descartes-féle harmadik koordinátával.

48. ábra. Henger- és Descartes-féle koordináták



**2.4.3. Megjegyzés.** Összefüggések az  $(x, y, z)$  Descartes-féle (derékszögű) és az  $(r, \alpha, z)$  hengerkoordináták között ugyanaz, mint a síkbeli polárkoordinátáknál.

Az integráltranszformáció  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  típusú függvények esetén hasonlóan működik, mint az  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  típusúaknál. Ha Descartes-féle koordinátákról hengerkoordinátákra térünk át, akkor

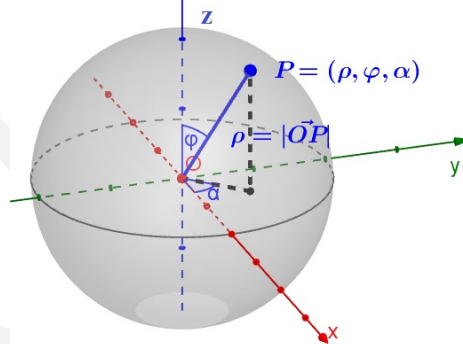
$$|\det \underline{h}'(r, \alpha, z)| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \cdot \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & r \cdot \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = r,$$

így  $dx dy dz$  helyett  $r dr d\alpha dz$ -t írunk.

### A gömbi koordináták

A gömbi koordináták a tér pontjait két szöggel és egy távolsággal jellemzik:  $P = (\rho, \varphi, \alpha) \in [0, +\infty[ \times [0, \pi[ \times [0, 2\pi[$  (lásd 49. ábra).

49. ábra. Gömbi- és Descartes-féle koordináták



**2.4.4. Megjegyzés.** *Összefüggések az  $(x, y, z)$  Descartes-féle, az  $(r, \alpha, z)$  henger- és  $(\rho, \varphi, \alpha)$  gömbi koordináták között:*

$$\begin{aligned} r &= \rho \cdot \sin \varphi & x &= r \cdot \cos \alpha = \rho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \alpha \\ z &= \rho \cdot \cos \varphi & y &= r \cdot \sin \alpha = \rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

**2.4.5. Megjegyzés.** *Integráltranszformációkor ha Descartes-féle koordinátákról gömbi koordinátákra térünk, akkor*

$$\underline{h}(\rho, \varphi, \alpha) = (\rho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \alpha, \rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \alpha, \rho \cdot \cos \varphi).$$

Ekkor

$$|\det \underline{h}'(\rho, \varphi, \alpha)| = \left| \det \begin{pmatrix} \sin \varphi \cdot \cos \alpha & \rho \cdot \cos \varphi \cos \alpha & -\rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \alpha \\ \sin \varphi \cdot \sin \alpha & \rho \cdot \cos \varphi \cdot \sin \alpha & \rho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \alpha \\ \cos \varphi & -\rho \cdot \sin \varphi & 0 \end{pmatrix} \right|.$$

A harmadik sor szerint kifejtve a determinánst a  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  azonosság többszöri alkalmazásával:

$$\begin{aligned} |\det \underline{h}'(\rho, \varphi, \alpha)| &= \cos \varphi \cdot (\rho^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + \rho^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi) + \\ &\quad + \rho \cdot \sin \varphi \cdot (\rho \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha + \rho \cdot \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha) = \\ &= \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \rho^2 + \rho \cdot \sin \varphi \cdot \rho \cdot \sin^2 \varphi = \underline{\underline{\rho^2 \cdot \sin \varphi}}. \end{aligned}$$

Tehát ha Descartes-féle koordinátákról gömbi koordinátákra térünk át, akkor  $dx \, dy \, dz$  helyére  $\rho^2 \cdot \sin \varphi \, d\rho \, d\alpha \, d\varphi$  kerül.

**2.4.1. Példa.** *Határozzuk meg az  $R$  sugarú "G" gömb térfogatát!*

**Megoldás.**

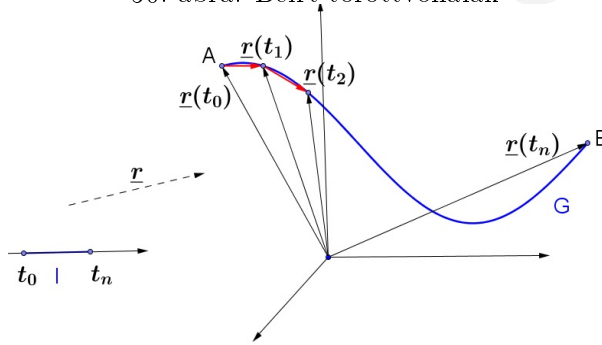
$$\begin{aligned} V &= \int \int \int_G 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^R \left( \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \sin \varphi \, d\alpha \right) d\varphi \right) d\rho = \\ &= \int_0^R \left( \int_0^\pi 2\pi \cdot \rho^2 \cdot \sin \varphi \, d\varphi \right) d\rho = \int_0^R 2\pi \cdot \rho^2 \cdot [-\cos \varphi]_0^\pi d\rho = \\ &= \int_0^R 2\pi \cdot \rho^2 \cdot (-\cos \pi - (-\cos 0)) \, d\rho = \int_0^R 4\pi \cdot \rho^2 \, d\rho = 4\pi \cdot \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^R = 4\pi \cdot \frac{R^3}{3}. \end{aligned}$$

## 2.5. Ívhossz, felszín

### Görbe ívhossza

Tekintsük a  $t \rightarrow \underline{r}(t)$ ,  $t \in I$  paraméterezéssel adott  $G$  görbét. Legyen  $t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$  az  $I$  egy tetszőleges beosztása. Ekkor a görbe  $AB$  ívének hossza becsülhető a beírt töröttvonalak hosszának összegével:  $|\underline{r}(t_1) - \underline{r}(t_0)| + |\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)| + \dots + |\underline{r}(t_n) - \underline{r}(t_{n-1})|$ . A lineáris közelítés

50. ábra. Beírt töröttvonalak



formuláját felhasználva:

$$|\underline{r}'(t_0) \cdot (t_1 - t_0)| + |\underline{r}'(t_1) \cdot (t_2 - t_1)| + \dots + |\underline{r}'(t_{n-1}) \cdot (t_n - t_{n-1})|,$$

azaz

$$(\star) \quad \sum_{i=1}^n |\underline{r}'(t_{i-1})| \cdot (t_i - t_{i-1}),$$

így az  $|\underline{r}'|$  függvény egy integrálközelítő összegét kapjuk. Ha az  $I$  intervallum beosztását finomítjuk (azaz  $n \rightarrow +\infty$ ), akkor  $(\star)$  éppen

$$\int_{t_0}^{t_n} |\underline{r}'(t)| dt.$$

**2.5.1. Definíció.** A  $G: t \rightarrow \underline{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  görbe ívhossza

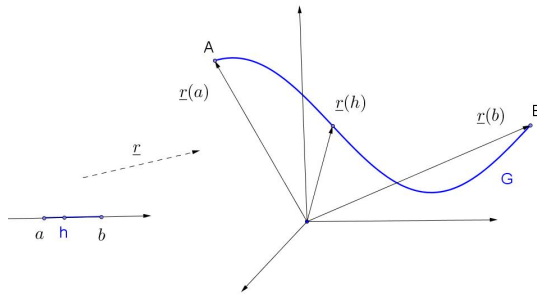
$$L(\underline{r}) := \int_a^b |\underline{r}'(t)| dt.$$

**2.5.2. Definíció.** A  $G: t \rightarrow \underline{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  görbe ívhosszfüggvénye:

$$\sigma(h) := \int_a^h |\underline{r}'(t)| dt.$$

$\sigma(h)$  az  $\underline{r}(a)$  és  $\underline{r}(h)$  közé eső görbedarab ívhossza.

51. ábra. Az ívhosszfüggvény



**2.5.1. Példa.** Határozzuk meg az  $\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  görbe ívhosszfüggvényét!

$$\underline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \quad |\underline{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{\sigma(h)}} = \int_0^h \sqrt{2} dt = \left[ \sqrt{2} \cdot t \right]_0^h = \underline{\underline{\sqrt{2} \cdot h}}$$

**2.5.3. Definíció.** A  $t \rightarrow |\underline{r}'(t)| =: v(t)$  függvényt pályasebesség függvénynek szokás nevezni.

**2.5.1. Tétel.** Az ívhossz függvény invertálható.

**Indoklás:**

$$\sigma(h) := \int_a^h |\underline{r}'(t)| dt \Rightarrow \sigma'(h) = (F(h) - F(a))',$$

ahol  $F$  az  $|\underline{r}'|$  primitív függvénye. ( $F(a)$  konstans!)

$$\sigma'(h) = F'(h) - 0 = |\underline{r}'(h)| > 0,$$

melyből következik, hogy a  $\sigma$  függvény szigorúan monoton növekvő, így létezik inverze.

Megjegyezzük, hogy ha a  $G$  görbe a  $t \rightarrow \underline{r}(t)$ ,  $t \in [a, b]$  függvény által adott, akkor az ívhosszfüggvény értelmezési tartománya  $D_\sigma := [a, b]$ , értékkészlete pedig  $R_\sigma := [0, L(\underline{r})]$ .

**2.5.2. Tétel.** *Legyen a  $G$  görbe paraméterezése  $t \rightarrow \underline{r}_1(t)$ ,  $t \in [a, b]$  és tekintsük  $\sigma_1$  ívhosszfüggvényének inverzét:*

$$\sigma_1^{-1}: [0, L(\underline{r}_1)] \rightarrow [a, b].$$

Az  $\underline{r}_2 := \underline{r}_1 \circ \sigma_1^{-1}$  a  $G$  görbe ívhossz paraméterezése, azaz

$$\forall s \in [0, L(\underline{r}_1)] \text{ esetén } |\underline{r}_2'(s)| = v(s) = 1.$$

**Indoklás:** Felhasználjuk, hogy egy  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény inverzének deriváltja:  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ .

$$\begin{aligned} \underline{r}_2'(s) &= (\underline{r}_1 \circ \sigma_1^{-1})'(s) = \underline{r}_1'(\sigma_1^{-1}(s)) \cdot (\sigma_1^{-1})'(s) = \\ &= \frac{1}{\sigma_1'(\sigma_1^{-1}(s))} \cdot \underline{r}_1'(\sigma_1^{-1}(s)) = \frac{1}{|\underline{r}_1'(\sigma_1^{-1}(s))|} \cdot \underline{r}_1'(\sigma_1^{-1}(s)), \end{aligned}$$

amely egységnyi hosszúságú vektor.

**2.5.2. Példa.** *Adjuk meg az  $\underline{r}_1(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  görbe ívhosszparaméteres előállítását!*

Egy korábbi példából tudjuk, hogy

$$\sigma_1(h) = \sqrt{2} \cdot h, \text{ így } \sigma_1^{-1}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s, \quad s \in [0, \sqrt{2} \cdot 2\pi].$$

$$\begin{aligned} \underline{r}_2(s) &= \underline{r}_1 \circ \sigma_1^{-1}(s) = \underline{r}_1(\sigma_1^{-1}(s)) = \underline{r}_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s\right) = \\ &= \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s\right), \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s\right)\right) \text{ tehát} \end{aligned}$$

$$\underline{r}_2(s) = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s\right), \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot s\right)\right), \quad s \in [0, \sqrt{2} \cdot 2\pi]$$

A görbeelmélet olyan mennyiségeket keres, amelyek függetlenek a paraméterezéstől. Az ívhossz ilyen tulajdonságú.

### Felület felszíne

**2.5.4. Definíció.** Legyen  $H \subset \mathbb{R}^2$  korlátos zárt halmaz és legyen  $\underline{r}: H \rightarrow \mathbb{R}^3$  egy folytonosan differenciálható függvény, azaz egy parametrizált felület. Ennek felszíne

$$F := \int_H \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right| du dv.$$

**2.5.3. Példa.** Tekintsük a  $H = \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$  negyedkörleplet, és számítsuk ki a  $z = xy$  nyeregfelület  $H$  felett elhelyezkedő felületdarabjának a felszínét!

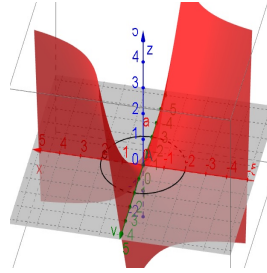
**Megoldás:**  $\underline{r}(u, v) = (u, v, u \cdot v)$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}(u, v) = (1, 0, v) \quad \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}(u, v) = (0, 1, u)$$

A felszín kiszámításához síkbeli polárkoordináta-transzformációt alkalmazunk:

$$F = \int_H \sqrt{1 + u^2 + v^2} du dv = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \sqrt{1 + r^2} \cdot r dr d\alpha =$$

52. ábra. Nyeregfelület és a negyedkörlap



$$= \frac{\pi}{2} \cdot \left[ \frac{1}{3} (1 + r^2)^{3/2} \right]_0^2 = \frac{\pi}{6} \cdot (5^{3/2} - 1).$$

**2.5.3. Tétel.** Legyen  $H \subset \mathbb{R}^2$  korlátos zárt halmaz és  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható. Ekkor  $f$  grafikus képének felszíne

$$\int_H \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dx \, dy.$$

**Indoklás:** Alkalmazzuk a grafikus kép  $\underline{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$  ún. Euler-Monge paraméterezését a felszín kiszámítására vonatkozó formulában.

## 2.6. Vonalintegrál, felületi integrál

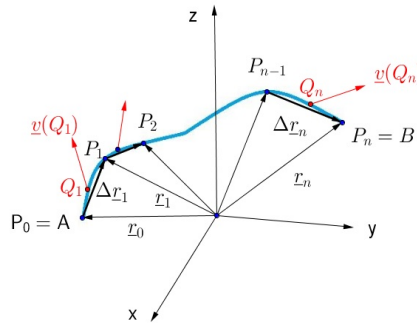
### Vonalintegrál

Legyen  $G$  a tér  $A$  és  $B$  pontját összekötő görbe, amely teljes egészében a  $\underline{v}(\underline{r})$  vektormező értelmezési tartományában fut. Osszuk be a görbét  $A$ -tól  $B$  felé haladva az  $A = P_0, P_1, \dots, P_n = B$  osztópontokkal  $n$  részre. Használjuk a  $P_{i-1}P_i = \underline{r}_i - \underline{r}_{i-1} = \Delta \underline{r}_i$  jelölést, és képezzük a

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \underline{v}(Q_i) \bullet \Delta \underline{r}_i$$

összeget, ahol  $Q_i$  a  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  ív tetszőleges pontja. Finomítsuk ezután a be-

53. ábra. Vonalintegrál konstrukciójának szemléltetése



osztást minden határon túl úgy, hogy a  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  ívek hosszának maximuma nullához tartson.

**2.6.1. Definíció.** Ha az (1) szerinti összegeknek létezik határértéke a görbe beosztásának minden határon túli finomítására nézve, akkor azt mondjuk, hogy  $\underline{v}(\underline{r})$  integrálható a  $G$  görbe mentén; a határértéket a  $\underline{v}(\underline{r})$  vektormező görbe menti vonalintegráljának nevezzük. Jelölése:  $\int_G \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r}$

**2.6.1. Megjegyzés.** A vonalmenti integrál szemléletes jelentése a munka, amit egy test elmozdításával végzünk egy görbe mentén változó erővel.

**2.6.1. Tétel.** Ha  $G$  folytonosan differenciálható görbe az  $\underline{r}(t)$ ;  $t_1 \leq t \leq t_2$  paraméterezéssel, akkor a  $\underline{v}(\underline{r})$  folytonos vektormezőnek a  $G$  görbe mentén vett vonalintegrálja az

$$\int_G \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(\underline{r}(t)) \bullet \underline{r}'(t) \, dt$$

képlettel számítható ki, ahol  $t_1$  és  $t_2$  az  $A$ , illetve  $B$  végponthoz tartozó paramétereket jelenti.

**2.6.2. Megjegyzés.** Ha a görbén a befutási irányt megfordítjuk, akkor a  $\underline{v}$  vektormező görbementi integrálja is előjelet vált:

$$\int_{-G} \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} = - \int_G \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r}$$

Milyen feltételek esetén lesz igaz, hogy rögzített  $A$  és  $B$  pontok esetén az  $A$  és  $B$ -t összekötő bármely két görbére a  $\underline{v}$  vektortér vonalmenti integrálja megegyezik, vagyis a munka független az úttól, csak az erőtértől és az elmozdulás  $A$  és  $B$  végpontjaitól függ?

**2.6.2. Tétel.** Ha a  $\underline{v}$  vektormező potenciálos, azaz egy skalármező gradiense, akkor a  $\underline{v}(\underline{r})$  bármely görbe mentén vett integrálja csak a kezdő- és végponttól függ, vagyis független attól, hogy a két végpontot milyen görbével kötöttük össze.

**Indoklás:** Először megjegyezzük, hogy ha egy  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  skalármezőt egy  $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  görbe mentén tekintünk, másszóval az  $f(\underline{r}(t))$  összetett függvényt képezzük, akkor ennek az egyváltozós függvénynek a deriváltja a következő módon számítható a láncszabály általánosítása szerint:

$$\begin{aligned} \frac{df \circ \underline{r}}{dt}(t) &= \text{grad } f(\underline{r}(t)) \bullet \underline{r}'(t) = \\ &= \partial_x f(\underline{r}(t)) \cdot x'(t) + \partial_y f(\underline{r}(t)) \cdot y'(t) + \partial_z f(\underline{r}(t)) \cdot z'(t) \end{aligned}$$

Legyen  $\text{grad } f = \underline{v}$ . Ekkor

$$\begin{aligned} \int_G \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} &= \int_{t_1}^{t_2} \text{grad}f(\underline{r}(t)) \bullet \underline{r}'(t) \, dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{df \circ \underline{r}}{dt}(t) \, dt = f(\underline{r}(t_2)) - f(\underline{r}(t_1)) = f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Igaz a tétel megfordítása is, bár a vektormező értelmezési tartományára vonatkozóan megszorításokkal kell élnünk: pl. csillagszerű tartományok, lásd 3.4.1 Definíció.

**2.6.3. Tétel.** *Ha a  $\underline{v}(\underline{r})$  folytonos vektormező olyan, hogy az  $\int_G \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r}$  vonalmenti integrál értéke csak a kezdő- és végponttól függ, akkor  $\underline{v}$  egy skalármező gradiense, tehát potenciális.*

A vonalmenti integrál értékének az úttól való függetlensége azt jelenti, hogy az integrál zárt görbe mentén nulla. Ha ugyanis felvesszünk a zárt  $G$  görbén két pontot,  $A$ -t és  $B$ -t, továbbá  $G_1$ -gyel, illetve  $G_2$ -vel jelöljük a  $G$  görbe azon két ívét, amelyre az  $A$  és  $B$  pont felosztja, akkor

$$\begin{aligned} \oint_G \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} &= \int_{G_1} \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} + \int_{-G_2} \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} = \\ &= \int_{G_1} \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} - \int_{G_2} \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} = 0 \end{aligned}$$

**2.6.4. Tétel.** *A  $\underline{v}$  vektormező vonalmenti integrálja akkor és csak akkor nulla bármely zárt görbe mentén, ha  $\underline{v}$  skalármező gradiense.*

### Felületi integrál

Tekintsük az  $F$  felületet és a  $\underline{v}(\underline{r})$  vektormezőt, és tegyük fel, hogy a  $\underline{v}(\underline{r})$  vektormező értelmezve van az  $F$  felület pontjaiban. Osszuk fel a felületet az  $F_1, F_2, \dots, F_n$  részekre, és legyen  $P_i$  az  $F_i$  felületdarab egy pontja. Jelölje  $\underline{v}^\perp(P_i)$  a  $\underline{v}(P_i)$  vektor felületi normálisra eső vetületének előjeles hosszát.

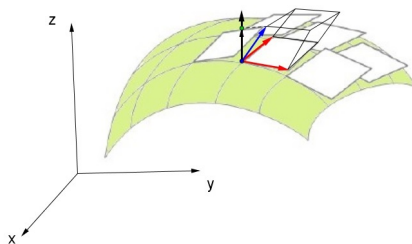
(Az előjeles hossz a felületi egységnormális és a  $\underline{v}(P_i)$  vektor skaláris szorzata) Ezt az  $F_i$  felületdarab  $\Delta f_i$  felszínével megszorozva az  $F_i$  felületen időegység alatt  $\underline{v}(P_i)$  sebességgel átáramló folyadékmennyiséget kapjuk. Ez motiválja a következő definíciót.

**2.6.2. Definíció.** Ha a  $\sum_{i=1}^n v^\perp(P_i) \cdot \Delta f_i$  alakú összegek képzésekor a felosztást minden határon túl finomítva van határérték, akkor ezt a határértéket a  $\underline{v}$  vektormező  $F$  felületre vonatkozó felületi integráljának nevezzük. Jelölése:  $\int_F \underline{v}(\underline{r}) \, df$

### 2.6.3. Megjegyzés.

- \* A konstrukció alapja az, hogy a felület minden pontjában adott az érintősíkra merőleges nemzérus vektor, azaz a felületi normális.
- \* A felület egy irányításán egy a felületen adott, seholsem zérus folytonos normális vektormező kijelölését értjük.
- \* Megállapodunk abban, hogy amennyiben mást nem mondunk, az  $\underline{r}(u, v)$  felület irányítását a  $\frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$  normál vektormező jelöli ki.

54. ábra. Felületi integrál



**2.6.5. Tétel.** *Ha a  $\underline{v}(\underline{r})$  vektormező folytonos és az  $F$  felület  $\underline{r} = \underline{r}(u, v)$  paraméteres előállításja folytonosan differenciálható, akkor a  $\underline{v}$  vektormező  $F$  menti felületi integrálját az*

$$\int_F \underline{v}(\underline{r}) \, df = \int \int_D \underline{v}(\underline{r}(u, v)) \bullet \left( \frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial v} \right) \, dudv$$

összefüggés alapján a paramétersík  $D$  tartománya feletti kettős integrállal számíthatjuk ki.

**2.6.4. Megjegyzés.**

$$\int \int_D \left( \underline{v}(\underline{r}(u, v)) \bullet \frac{\left( \frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial v} \right)}{\left| \frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial v} \right|} \right) \cdot \left| \frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial v} \right| \, dudv$$

$v^\perp(\underline{r})$  előjeles hossza                      felületelem felszíne

- \* *Felületi integrál akkor is létezhet, ha a felület nem minden pontban folytonosan differenciálható: előfordulhatnak csúcsok és élek is, feltéve hogy e kivételes pontok halmaza nullmértékű, azaz tetszőlegesen kis felszínű felületrésszel lefedhető.*
- \* *A felületi integrál szemléletes jelentése pl. a felületen időegység alatt átáramló anyag mennyisége. Ha ún. zárt felületről van szó, akkor szokás fluxusról beszélni. Egy klasszikus zárt felület például a gömbhéj és deformációi, feltéve, hogy nem keletkeznek csúcsok vagy élek nullmértékű halmaztól eltekintve.*

Az integrálátalakító tételek a Newton-Leibniz szabály általánosításai. Ott arról van szó, hogy a deriváltfüggvény adott tartomány fölötti integrálját ki lehet számítani az eredeti függvénynek a tartomány határán vett értékeiből.

**2.6.6. Tétel. [Gauss-Osztrogradszkij tétel]** *Ha a  $\underline{v}$  vektormező az  $F$  zárt felülettel határolt  $V$  test minden pontjában és a test határán is folytonosan differenciálható, továbbá a felület irányítását a  $V$  térrészből kifelé*

mutató normálvektormező jelöli ki, akkor igaz a következő összefüggés:

$$\int_F \underline{v} \, df = \int_V \operatorname{div} \underline{v} \, dV.$$

A képletben szereplő jobb oldali integrál térfogati integrál, a térfogatelem  $dV = dx dy dz$ , vagyis a jobb oldali formula az  $\int \int \int_V \operatorname{div} \underline{v} \, dx dy dz$  integrál másik jelölése.

**2.6.1. Példa.** Számítsuk ki az origó középpontú, egységsugarú  $F$  gömbfelületen időegység alatt kiáramló folyadékmennyiséget, ha a folyadék sebessége  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$ .

1.mo: A feladat az  $\int_F \underline{v} \, df$  integrál kiszámítása. Ez történhet a felületi integrál szemléletes jelentéséből, mivel az egységgömb felületén a  $\underline{v}(\underline{r}) = \underline{r}$  normális irányú egységvektort ad, így a keresett integrál értéke az egységgömb felszíne, azaz  $4\pi$ .

2.mo: A Gauss-Osztrogradszkij tétel segítségével végezzük el a kiszámítást. A tétel feltételei nyilvánvalóan teljesülnek, vagyis elegendő a jobb oldali integrált kiszámolni. Mivel  $\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) = 3$ , így

$$\int_F \underline{v} \, df = \int_V \operatorname{div} \underline{v} \, dV = \int_V 3 \, dV = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} = 4\pi$$

A Gauss-Osztrogradszkij tétel lehetővé teszi a divergencia szemléletes jelentésének leírását: lokális forráserősség sűrűség.

**2.6.7. Tétel.** Legyen  $\underline{v}$  folytonosan differenciálható vektormező,  $F_n$  zárt felületek olyan sorozata, amely az  $\underline{r}_0$  pontra zsugorodik, azaz  $\underline{r}_0 \in V_n$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} m(V_n) = 0$ , ahol  $m(V_n)$  az  $F_n$  által határolt  $V_n$  térrész térfogatát jelöli.

Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m(V_n)} \int_{F_n} \underline{v} \, df = \operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}_0).$$

Az integrálszámítás középértéktétele szerint

$$\int_{V_n} \operatorname{div} \underline{v} \, dV_n = \operatorname{div} \underline{v}(r_n) \cdot m(V_n)$$

írható valamely  $r_n \in V_n$  esetén. A Gauss Osztrogradszkij tétel alapján

$$\frac{1}{m(V_n)} \int_{F_n} \underline{v} \, df_n = \operatorname{div} \underline{v}(r_n).$$

Mivel a  $V_n$  térrészek sorozata az  $r_0$  pontra zsugorodik, ezért  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r_0$ , azaz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m(V_n)} \int_{F_n} \underline{v} \, df = \operatorname{div} \underline{v}(r_0)$ .

Egy másik típusú integrálatalakító tétel a vektormező peremmel rendelkező felületen vett integráljának és a rotációnak a peremen (mint görbén) vett integráljának egyenlőségét állítja bizonyos feltételek mellett (nevezetesen a felület, illetve a peremgörbe alkalmas irányítása, illetve befutása esetén). A technikai nehézségeket elkerülendő, a tétel síkbeli verzióját fogalmazzuk meg: **síkbeli Stokes-tétel**.

**2.6.8. Tétel.** *Ha a  $\underline{v}$  vektormező a szakaszonként folytonosan differenciálható, zárt  $G$  görbével határolt  $D$  síklemez minden pontjában és a lemez határán is folytonosan differenciálható, továbbá a görbe  $D$  -ből nézve pozitívan irányított, azaz befutása az óramutató járásával ellentétes, akkor igaz a következő összefüggés:*

$$\int_D \operatorname{rot} \underline{v} \, dx dy = \int_G \underline{v} \, dG,$$

ahol  $\operatorname{rot} \underline{v} = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ .

Tételezzük fel egy pillanatra, hogy a vektormező egy a  $D$  síklemezt (a határával együtt) tartalmazó  $U$  nyílt halmazon is folytonosan differenciálható. Ilyen segédfeltevés mellett a tétel bizonyításának egy szemléletes és intuitív verziója a következő. Az első lépésben belátjuk az állítást a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapokra. Ezek után ágyazzuk be a  $D$  síklemezt egy ilyen téglalapba és osszuk fel a téglalap csatlakozó

oldalait  $n$  egyenlő részre. A felosztáshoz tartozó párhuzamos egyenesekkel a téglalpot  $n^2$  egybevágó, kisebb téglalapra bontjuk. A  $D$  halmaz minimális lefedéséhez tekintsük azoknak a téglalapoknak az összefüggő unióját, melyeknek metszete  $D$  - vel nemüres. Ha  $n$  elég nagy, akkor a minimális lefedés benne van az  $U$  halmazban. A rotáció  $D$  fölötti integráljának közelítéséhez számítsuk ki a lefedéshez tartozó kis téglalapok fölötti integrálok összegét és alkalmazzuk minden egyes tagra a Stokes-tételt. Ha egy él két téglalaphoz is hozzátartozik, akkor az integrál átalakításánál a vektormező integrálját az él mentén pozitív és negatív előjellel is összegezzük a határgörbe irányítására vonatkozó feltevés miatt. Ez azt jelenti, hogy az ilyen élek menti integrálok kiesnek. Ami megmarad a minimális lefedés határolóélein vett integrálok összege, ami  $n \rightarrow \infty$  határátmenetet véve a vektormezőnek a  $D$  halmaz határgörbéjén vett integráljához tart. A rotáció a résztéglalapok fölött vett integráljainak összege pedig a  $D$  fölötti integrálhoz.

**2.6.5. Megjegyzés.** *A gondolatmenet térbeli verziója a Gauss-Osztogradszkij tétel egy lehetséges bizonyítását adja.*

**2.6.6. Megjegyzés.** *Egy síkbeli vektormező rotációja skalármező: megegyezik a térbe ágyazva tekintett  $\underline{v}(x, y, z) = (v_1(x, y), v_2(x, y), 0)$  vektormező rotációjának egyetlen nem azonosan zérus koordinátafüggvényével, ui.  $\text{rot } \underline{v} = (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \underline{k}$ .*

**2.6.7. Megjegyzés.** *A határgörbe szakszonkénti folytonos differenciálhatósága felel meg a zárt felületek esetében megengedett csúcsoknak és éleknek, feltéve, hogy e kivételes pontok, ún. szingularitások halmaza nullmértékű.*

### 3. Differenciálegyenletek

#### 3.1. Alapfogalmak

**3.1.1. Definíció.** *Differenciálegyenleten egy olyan egyenletet értünk, amelyben a keresett ismeretlen egy függvény, és a függvény valamelyik deriváltja is szerepel az egyenletben.*

- \* *Ha a keresett függvény egy változós, akkor közönséges differenciálegyenletről beszélünk (továbbiakban: DE), ha pedig többváltozós, és a keresett függvény egy vagy több parciális deriváltja is szerepel az egyenletben, akkor az egyenletet parciális differenciálegyenletnek hívjuk (továbbiakban: PDE).*
- \* *Azt mondjuk, hogy egy DE  $n$ -edrendű, ha a keresett függvénynek az egyenletben szereplő legmagasabb deriváltja az  $n$ -edik derivált.*

**3.1.1. Megállapodás.** *Amennyiben mást nem mondunk, úgy a továbbiakban  $I$  egy rögzített nyílt intervallumot jelöl,  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  összefüggő nyílt halmaz és  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: I \times D \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények.*

**3.1.2. Definíció.**  *$n$ -edrendű DE*

- \* *implicit alakban:*

$$g(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0$$

- \* *explicit alakban:*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

**3.1.1. Megjegyzés.** *Az  $y'(x) = 5xy(x)$  egyenlet elsőrendű, explicit DE-t.*

- \* *Amennyiben egyértelmű a DE-ben szereplő függvény változója, úgy azt általában elhagyjuk:  $y' = 5xy$ .*

\* Amennyiben a DE-ben szereplő függvény változója időt jelöl, úgy a változót  $t$ -vel, a deriváltat ponttal szokás jelölni. Ez esetben az előbbi DE az  $\dot{y} = 5ty$  alakot ölti. Szokásos még a  $\frac{dy}{dx} = y'(x)$  jelölés is.

**3.1.3. Definíció.** Legyenek  $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvények. A

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = b(x)$$

egyenletet  $b = 0$  esetén homogén, még ellenkező esetben inhomogén lineáris DE-nek nevezzük.

Ha az  $a_i$  függvények mindegyike konstans függvény, akkor konstansegyütthetős lineáris, egyébként függvényegyütthetős DE-ről beszélünk.

**3.1.1. Példa.**

(1)  $y' = x^3 + 2$  közönséges, explicit, elsőrendű, konstansegyütthetős lineáris, inhomogén DE ( $n = 1$ ,  $a_0(x) = 0$ ,  $a_1(x) = 1$ ,  $b(x) = x^3 + 2$ ).

(2)  $y''(x) + 4 \cdot y'(x) - y(x) = 0$  közönséges, implicit, másodrendű, konstansegyütthetős lineáris, homogén DE. Más formában írva:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4 \cdot \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$(n = 2, \quad a_0(x) = -1, \quad a_1(x) = 4, \quad a_2(x) = 1, \quad b(x) = 0).$$

(3)  $y'' = y' \cdot \sin x - \cos x$  közönséges, explicit, másodrendű, függvényegyütthetős lineáris, inhomogén DE.

(4)  $(y^{(4)})^3 + (y'')^2 + 3y = 0$  közönséges, implicit, negyedrendű, nemlineáris DE.

(5)  $y'y - \sin x = 0$  közönséges, implicit, elsőrendű, nemlineáris DE.

**3.1.4. Definíció.** Azt mondjuk, hogy  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  megoldása az

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

$n$ -edrendű, explicit DE-nek, ha

- \*  $\varphi$   $n$ -szer differenciálható  $I$ -n;
- \* minden  $x \in I$  esetén  $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in D_f$ ;
- \* minden  $x \in I$  esetén  $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$ .

Tehát egy függvény megoldása a fenti DE-nek, ha  $n$ -szer differenciálható és behelyettesítve az eredeti egyenletbe igaz egyenlőséget kapunk, feltéve, hogy van értelme a behelyettesítésnek.

**3.1.5. Definíció.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nyílt halmaz és  $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in D$ . Az

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték problémán, vagy Cauchy-feladaton azt a feladatot értjük, amikor az egyenlet azon  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  megoldását keressük, melyre

- \*  $x_0 \in I$ ;
- \*  $\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ .

Azaz olyan megoldást keressük, amely a DE-n kívül, további, úgynevezett kezdetiérték feltétel(ek)nek is eleget tesz. A kezdetiérték feltételek száma megegyezik az egyenlet rendjével.

**3.1.6. Definíció.** Egy DE összes megoldásfüggvényeinek halmazát általános megoldásnak nevezzük. Ha ezek közül csak egyet tekintünk, akkor partikuláris megoldásról beszélünk.

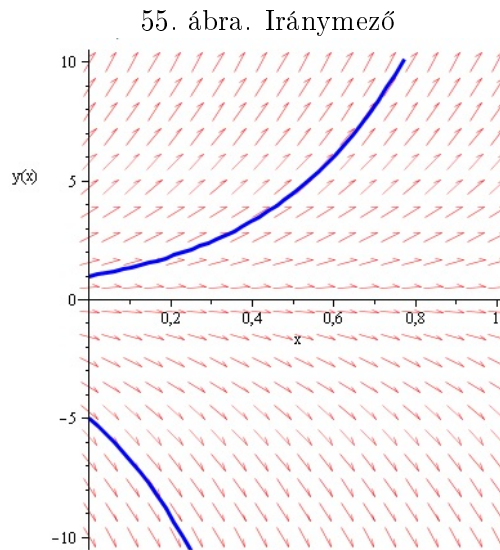
**3.1.2. Megjegyzés. [Iránymező]** Egy elsőrendű DE  $y' = f(x, y)$  alakja összefüggést ad az  $xy$  sík egy  $(x_0, y_0)$  pontja és a ponton áthaladó megoldásfüggvény pontbeli differenciálhányadosa (meredeksége) között.

Tekintsük ugyanis a sík egy  $(x_0, y_0)$  pontjára illeszkedő megoldásfüggvényt, mint görbét a síkon és vegyük az érintővektorát az  $(x_0, y_0)$  pontban. Ezek összessége egy  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  típusú vektormezőt határoz meg, melyet a DE iránymezőjének nevezünk.

**3.1.2. Példa.** Az ábrán az  $y'(x) = 3 \cdot y(x)$  DE iránymezője látható, illetve az

$$y' = 3 \cdot y, y(0) = 1 \quad \text{és} \quad y' = 3 \cdot y, y(0) = -5$$

Cauchy -feladatok megoldásai.



### 3.2. Szeparábilis DE, Hiányos másodrendű DE

#### 3.2.1. Példa. [A normális növekedés Cauchy-feladata]

Legyen  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  és  $a \in \mathbb{R}$ , melyre  $y' = k \cdot y$  és  $y(0) = a$ . A továbbiakban a  $y' = k \cdot y$  differenciálegyenletre a normális növekedés differenciálegyenleteként hivatkozunk.

**3.2.1. Definíció.** Legyenek  $I$  és  $J$  nyílt intervallumok, továbbá  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  és  $h: J \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények. Az

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y), \quad h \neq 0$$

egyenletet szétválasztható változójú vagy szeparábilis differenciálegyenletnek nevezzük.

**3.2.2. Példa.** Az  $y'(x) = x \cdot y^2$  DE elsőrendű, szeparábilis, nemlineáris.

**3.2.1. Állítás. [Szeparábilis DE megoldása]** Legyenek  $I$  és  $J$  nyílt intervallumok, továbbá legyen  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és  $h: J \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos seholsen nulla függvény. Az

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

DE-nek  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  pontosan akkor megoldása, ha

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx.$$

**Formális levezetés:** Mivel  $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ , ezért  $h \neq 0$  esetén

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx.$$

Mindkét oldalt integrálva  $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$ .

**3.2.1. Megjegyzés. [A normális növekedés Cauchy-feladatának megoldása]** Ha

$$y' = \underbrace{k}_{g(x)} \cdot \underbrace{y}_{h(y)} \quad \text{és} \quad y(0) = a,$$

akkor  $\int \frac{1}{y} dy = \int k dx \Rightarrow \ln |y| = kx + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , amelyből az  $y' = k \cdot y$  ún. normális növekedés differenciálegyenletének általános megoldása  $y(x) = \pm e^c \cdot e^{k \cdot x}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , azaz

$$y(x) = C \cdot e^{k \cdot x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Felhasználva, hogy  $a = y(0) = C$ , a Cauchy-feladat megoldása:

$$y(x) = a \cdot e^{k \cdot x}.$$

**3.2.2. Megjegyzés.** A normális növekedés differenciálegyenlete elsőrendű lineáris homogén DE, megoldását célszerű megjegyezni.

Ha egy elsőrendű DE-t nem is tudunk megoldani, akkor is lehet esélyünk annak a nagyon fontos kérdésnek az eldöntésére, hogy létezik-e és ha igen akkor egyértelmű-e a megoldás. Az alábbi tétel nem a lehető legerősebb eredményt adja, de könnyebben érthető.

**3.2.1. Tétel. [Egysztszencia és unicitás tétel]** Tegyük fel, hogy  $f$  és  $\frac{\partial f}{\partial y}$  folytonos függvények egy olyan

$$(a, b) \times (c, d)$$

téglalapon, amely tartalmazza az  $(x_0, y_0)$  pontot.

Ekkor van olyan  $(x_0 - h, x_0 + h) \subset (a, b)$  intervallum, amelyben a

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték probléma megoldása létezik és egyértelmű.

Az  $f(x, y)$  függvény folytonossága elegendő feltétel a megoldás létezéséhez, de lehetséges, hogy a megoldás nem egyértelmű.

**3.2.3. Példa.** Legyen  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y' = \sqrt[3]{y}$ ,  $y(0) = 0$ .

Ekkor  $f(x, y) = \sqrt[3]{y}$ . Mivel a  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$  függvény nincs értelmezve az  $y = 0$ -ban, ezért ott nem is folytonos, így nem alkalmazhatjuk az előző tételt. Könnyű ellenőrizni, hogy az

$$y(x) = -\left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2} \quad \text{és az} \quad y(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}$$

is megoldása a Cauchy feladatnak; jegyezzük meg, hogy  $y(x) = 0$ , ha  $x \leq 0$ .

**3.2.2. Definíció.** Egy görbesereg ortogonális trajektóriája egy olyan görbesereg, amelyik az eredeti görbéket minden pontban az adott pontbeli érintőre merőlegesen metszi. Ilyen görbeseregek előfordulnak például a hidrodinamikában és hőáramlásnál, illetve az elektromos potenciállal kapcsolatos problémáknál.

**3.2.4. Példa.** Mik lesznek az ortogonális trajektóriái az  $x \cdot y = a$  görbeseregnek, ahol  $a \neq 0$  tetszőleges konstans?

**Megoldás.** Elsőként meghatározzuk a görbék érintőjének meredekségét az  $(x, y(x))$  pontban. A görbesereg egyenletének mindkét oldalát deriválva:

$$x' \cdot y(x) + x \cdot y'(x) = 0, \text{ azaz } y + x \cdot y'(x) = 0.$$

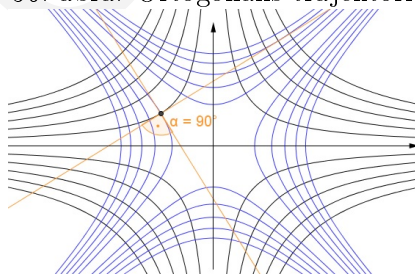
Innen a görbék érintőjének meredeksége:  $y'(x) = -\frac{y(x)}{x}$ , így az ortogonális trajektóriáinak meredeksége:  $\frac{x}{y(x)}$ .

Ennélfogva az ortogonális trajektóriákra teljesül az  $y'(x) = \frac{x}{y(x)}$  differenciálegyenlet. Ez az egyenlet szeparábilis:  $\int y \, dy = \int x \, dx$ , így

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1,$$

mely  $c = 2c_1$  mellett  $y^2 - x^2 = c$  alakban írható. Az ortogonális trajektóriák tehát hiperbolák.

56. ábra. Ortogonális trajektória



### Hiányos másodrendű DE

**3.2.3. Definíció.** Az  $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$  differenciálegyenletet hiányos másodrendű differenciálegyenletnek nevezzük, ha  $f$  nem függ valamelyik változójától.

- \* Ha  $f$  nem függ  $y$ -től, akkor az  $y'(x) = p(x)$  helyettesítéssel egy elsőrendű egyenletet kapunk  $p$ -re, majd azt integrálva határozhatjuk meg az  $y$  függvényt.
- \* Ha  $f$  nem függ  $x$ -től, akkor az  $y' = p(y)$  helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor  $y'' = p'(y) \cdot y' = p'(y) \cdot p(y)$ . Így  $p$ -re a  $p'(y)p(y) = f(y, p(y))$  elsőrendű egyenletet kapjuk, majd  $y$ -t az  $y' = p(y)$  szeparábilis differenciálegyenlet megoldásaként kapjuk.
- \* Ha  $f$  nem függ  $y'$ -től, akkor nincs általános megoldási módszer.

A konstansegyütthatós lineáris hiányos másodrendű differenciálegyenletek megoldhatók a 3.3 alfejezetben ismertett módon is.

### 3.3. Lineáris differenciálegyenletek

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért először az elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket tárgyaljuk.

#### Elsőrendű lineáris DE

Az

$$a_0(x) \cdot y(x) + a_1(x) \cdot y'(x) = b(x) \quad (x \in I)$$

elsőrendű lineáris DE bevezetve az  $a(x) := \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$  és  $r(x) := \frac{b(x)}{a_1(x)}$  jelöléseket

$$(\star) \quad y'(x) + a(x) \cdot y(x) = r(x)$$

alakban írható, ahol feltételezzük, hogy  $a_1(x) \neq 0$  az  $I$  intervallumon. A továbbiakban a  $(\star)$  alakot használjuk.

#### 3.3.1. Állítás. [Elsőrendű homogén lineáris DE megoldása] Az

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = 0$$

egyenlet szeparábilis, így általános megoldása:

$$y(x) = C \cdot e^{-\int a(x) dx} \quad (C \in \mathbb{R})$$

**Formális indoklás:**  $y' + a(x) \cdot y = 0 \Rightarrow y' = \underbrace{-a(x)}_{g(x)} \cdot \underbrace{y}_{h(y)} \Rightarrow$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -a(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = c + \int -a(x) dx \Rightarrow |y| = e^c \cdot e^{-\int a(x) dx} \Rightarrow y = \pm e^c \cdot e^{-\int a(x) dx} \Rightarrow$$

$$y(x) = C \cdot e^{-\int a(x) dx} \quad (C \in \mathbb{R})$$

**3.3.1. Tétel.** Az  $y'(x) + a(x)y(x) = r(x)$  elsőrendű lineáris inhomogén DE általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

ahol  $y_h$  a homogén rész  $y'(x) + a(x)y(x) = 0$  általános megoldása, és  $y_p$  pedig az inhomogén lineáris DE egy partikuláris megoldása.

**3.3.1. Megjegyzés.** Ha  $y$  és  $y_p$  megoldása a differenciálegyenletnek, akkor  $y - y_p$  megoldása a megfelelő homogén egyenletnek, ugyanis

$$\begin{aligned} (y - y_p)' + a(x)(y - y_p) &= y' - y_p' + a(x)y - a(x)y_p = \\ &= y' + a(x)y - (y_p' + a(x)y_p) = r(x) - r(x) = 0. \end{aligned}$$

Ezért  $y - y_p = y_h$ , tehát  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ .

**3.3.2. Megjegyzés. Elsőrendű inhomogén lineáris DE megoldása**  
Az  $y'(x) + a(x)y(x) = r(x)$  elsőrendű lineáris inhomogén DE általános megoldása:

1. a homogén rész  $y'(x) + a(x)y(x) = 0$  általános  $y_h$  megoldásának meghatározása
2. az inhomogén DE egy  $y_p$  partikuláris megoldásának megkeresése (az ún. konstansvariálás módszerével)
3. az inhomogén DE általános megoldásának meghatározása:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

### A konstansvariálás lépései

Miután megtaláltuk a homogén rész általános megoldását  $y_h(x) = C \cdot e^{-\int a(x)dx}$  alakban, az inhomogén lineáris DE egy partikuláris megoldását

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx}$$

alakban keressük. Az  $y_p$  függvényt visszahelyettesítjük az

$$y'(x) + a(x)y(x) = r(x)$$

inhomogén DE-be:

$$\underbrace{\left( C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} \right)'}_{C'(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} + C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} \cdot (-a(x))} + a(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} = r(x)$$

Vegyük észre, hogy a bal oldal  $C(x)$ -et tartalmazó tagjainak összege  $a(x)$ -től függetlenül nulla. Ezért a feladatmegoldásokban célszerű e két tagot eleve elhagyni. Így

$$C'(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} = r(x) \Rightarrow C'(x) = r(x) \cdot e^{\int a(x)dx} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C(x) = \int r(x) \cdot e^{\int a(x)dx} dx$ , melynek segítségével  $y_p$  meghatározható  $a(x)$  és  $r(x)$  ismeretében.

**3.3.1. Példa. [Alkalmazás]** Adott  $L_0$  induktivitású és  $R_0$  ohmos ellenállású soros áramkörbe  $U_0$  egyenfeszültséget kapcsolva a körben folyó áram erőssége hogyan függ az időtől? A feszültség rákapcsolásakor az áramerősség 0.

**Megoldás:** Az  $I(t)$  áramerősség időben való változását leíró fizikai törvény matematikai modellje az alábbi elsőrendű, lineáris, inhomogén DE:

$$L_0 \frac{dI}{dt} + R_0 I(t) = U_0, \quad \text{azaz} \quad \dot{I}(t) + \frac{R_0}{L_0} I(t) = \frac{U_0}{L_0}.$$

A kezdetiérték feltétel most  $I(0) = 0$ . A megfelelő homogén egyenlet

$$\dot{I}(t) + \frac{R_0}{L_0} I(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad I_h(t) = C \cdot e^{-\int \frac{R_0}{L_0} dt},$$

azaz  $I_h(t) = C \cdot e^{-\frac{R_0}{L_0} t}$ . Az inhomogén egyenlet egy megoldását konstansvariálással keressük:  $I_p(t) = C(t) \cdot e^{-\frac{R_0}{L_0} t}$ .

Ezt visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe

$$\dot{C}(t)e^{-\frac{R_0}{L_0}t} = \frac{U_0}{L_0} \Rightarrow \dot{C}(t) = \frac{U_0}{L_0}e^{\frac{R_0}{L_0}t}.$$

Így

$$C(t) = \frac{U_0}{L_0} \cdot \frac{L_0}{R_0} e^{\frac{R_0}{L_0}t} = \frac{U_0}{R_0} e^{\frac{R_0}{L_0}t}.$$

Ezt felhasználva

$$I_p(t) = \frac{U_0}{R_0} e^{\frac{R_0}{L_0}t} \cdot e^{-\frac{R_0}{L_0}t} = \frac{U_0}{R_0}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t) = C \cdot e^{-\frac{R_0}{L_0}t} + \frac{U_0}{R_0}.$$

A kezdetiérték feltétel miatt  $I(0) = 0$ , így  $0 = C + \frac{U_0}{R_0} \Rightarrow C = -\frac{U_0}{R_0}$ , így a kezdetiérték feladat megoldása:

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t) = -\frac{U_0}{R_0} \cdot e^{-\frac{R_0}{L_0}t} + \frac{U_0}{R_0}.$$

### n-ed rendű homogén lineáris DE alaprendszere

**3.3.1. Megállapodás.** A továbbiakban a homogén lineáris differenciálegyenleteket

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = 0$$

alakban tekintjük, ahol  $g_i: I \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvények.

**3.3.1. Definíció.** Egy  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  függvényrendszer lineárisan függő  $I$ -n, ha létezik  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  konstansrendszer, úgy hogy  $\sum_{i=1}^n c_i^2 > 0$  és

$$(\star) \quad c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) \dots + c_n \cdot y_n(x) = 0 \quad (x \in I).$$

Az  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  függvényrendszer lineárisan független, ha  $(\star)$  csak

$$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

esetén teljesül.

**3.3.3. Megjegyzés.** Az  $\{y_1, y_2\}$  függvényrendszer lineárisan függő, ha  $c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) = 0$  úgy, hogy  $c_1 \neq 0$  vagy  $c_2 \neq 0$ . Ekkor

$$y_1(x) = -\frac{c_2}{c_1}y_2(x) \quad \text{vagy} \quad y_2(x) = -\frac{c_1}{c_2}y_1(x).$$

### 3.3.2. Példa.

- \* Egy függvényből álló függvényrendszer független, ha a függvény nem konstans 0.
- \* Az  $\{y_1(x) = x, y_2(x) = x^2\}$  függvényrendszer lineárisan független.
- \* Az  $\{y_1(x) = 2x^2 - 3x, y_2(x) = -6x^2 + 9x\}$  függvényrendszer lineárisan függő, mert  $y_2(x) = -3 \cdot y_1(x)$ .
- \* Az

$$\{y_1(x) = 2x^2 - 3x, y_2(x) = x + 1, y_3(x) = 4x^2 + 5x - 1\}$$

függvényrendszer lineárisan függő, mert  $y_3(x) = 2 \cdot y_1(x) - y_2(x)$ .

**3.3.2. Tétel.** Legyenek  $g_i: I \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvények. Ekkor a

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = 0$$

homogén lineáris DE-nek a megoldásai között található pontosan  $n$  elemű lineárisan független függvényrendszer, és bármely más megoldás ezek lineáris kombinációja; azaz ha  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  lineárisan független rendszer és az  $y_1, \dots, y_n$  megoldásai a DE-nek, akkor az általános megoldás

$$y_h(x) = c_1 \cdot y_1(x) + \dots + c_n \cdot y_n(x).$$

**3.3.2. Definíció.** A folytonos együtthatós

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = 0$$

homogén lineáris DE lineárisan független  $y_1, y_2, \dots, y_n$  megoldásából álló függvényrendszert a DE alaprendszerének nevezzük.

**3.3.4. Megjegyzés.** Az előző tétel átfogalmazása a lineáris algebra nyelvére úgy hangzik, hogy a folytonos együtthetős  $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = 0$  homogén lineáris DE megoldásai a folytonosan differenciálható függvények vektortérének  $n$ -dimenziós alterét alkotják.

**3.3.5. Megjegyzés.** A normális növekedés  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $y'(x) = k \cdot y(x)$  differenciálegyenletének megoldásai egydimenziós vektorteret alkotnak: a megoldások megadhatók a sehol sem nulla  $e^{k \cdot x}$  függvény konstansszorosaként.

**3.3.3. Definíció. [Wronski determináns]** Az  $I$  intervallumon legalább  $n - 1$ -szer differenciálható függvényekből álló  $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$  függvényrendszer Wronski determinánusa:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

**3.3.3. Tétel. [A lineáris függetlenség és a Wronski determináns]** Ha az  $I$  intervallumon legalább  $(n - 1)$ -szer differenciálható függvényekből álló  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  függvényrendszer Wronski determinánusa nem az azonosan 0 függvény, akkor a függvényrendszer lineárisan független  $I$ -n.

**3.3.3. Példa.**  $\{y_1(x) = x, y_2(x) = x^2, y_3(x) = x^3\}$  függvényrendszer lineárisan független, hiszen

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3$$

nem az azonosan 0 függvény.

**3.3.6. Megjegyzés.** Az előző tétel megfordítása általában nem igaz, lineárisan független függvények Wronski determinánása azonosan 0 is lehet.

Erre példa:  $y_1(x) = x^3$ ,  $y_2(x) = |x|^3$ ,  $I = \mathbb{R}$

**3.3.4. Tétel.** Az

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = 0$$

homogén lineáris DE  $y_1, \dots, y_n$  megoldásrendszerének Wronski determinánása vagy azonosan 0, vagy sehol sem 0.

**3.3.5. Tétel.** Az  $y_1, \dots, y_n: I \rightarrow \mathbb{R}$  függvényekből álló rendszer akkor és csak akkor alaprendszere az

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) \cdot y^{(i)}(x) = 0$$

homogén lineáris DE-nek, ha  $y_1, \dots, y_n$  megoldása  $I$ -n és  $W(x) \neq 0$  ha  $x \in I$ .

### Másodrendű konstansegyütthetős homogén lineáris DE

Legyen  $p, q \in \mathbb{R}$  és tekintsük az

$$(MH) \quad y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0$$

egyenletet. Keressük a megoldást  $y(x) = e^{\lambda \cdot x}$  alakban. Ekkor

$$\left(e^{\lambda \cdot x}\right)'' + p \cdot \left(e^{\lambda \cdot x}\right)' + q \cdot e^{\lambda \cdot x} = 0$$

egyenlőségnek fenn kell állnia. Elvégezve a deriválást kiemelés után az

$$e^{\lambda \cdot x} \cdot (\lambda^2 + p \cdot \lambda + q) = 0$$

egyenlőséghez jutunk. Így  $y(x) = e^{\lambda \cdot x}$  pontosan akkor megoldása (MH)-nak, ha

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0.$$

Ezt az egyenletet (*MH*) **karakterisztikus egyenletének** nevezzük.

Mivel a komplex számok halmazán egy másodfokú egyenlet mindig megoldható, ezért az említett differenciálegyenletnek mindig van megoldása. Három eset lehetséges:

I. a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van:

$\lambda_1$  és  $\lambda_2$ . Ekkor a  $\{e^{\lambda_1 \cdot x}, e^{\lambda_2 \cdot x}\}$  függvényrendszer (*MH*) egy alaprendszere, így (*MH*) általános megoldása:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}.$$

$$\text{(ui. } W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0.)$$

II. a karakterisztikus egyenletnek két egybeeső valós gyöke van:  $\lambda$ . Ekkor a  $\{e^{\lambda \cdot x}, x \cdot e^{\lambda \cdot x}\}$  függvényrendszer (*MH*) egy alaprendszere, így (*MH*) általános megoldása:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x}.$$

(Hasonlóan ellenőrizhető, hogy  $W(x) \neq 0$ .)

III. a karakterisztikus egyenletnek két komplex gyöke van, melyek egymás konjugáltjai:  $\lambda_1 = \alpha + \beta \cdot i$  és  $\lambda_2 = \alpha - \beta \cdot i$ . Ekkor a

$$\{e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x), e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x)\}$$

függvényrendszer (*MH*) egy alaprendszere, így (*MH*) általános megoldása:

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + c_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

**Indoklás:** az  $y_1^*(x) = e^{\lambda_1 \cdot x}$  és  $y_2^*(x) = e^{\lambda_2 \cdot x}$  komplex függvények megoldásai (*MH*)-nak, de mi komplex függvényekkel nem foglalkozunk, valós függvény-megoldásokat keresünk. Mivel

$$e^{\lambda_1 \cdot x} = e^{(\alpha + \beta \cdot i) \cdot x} = e^{\alpha \cdot x + \beta \cdot x \cdot i} = e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{\beta \cdot x \cdot i}$$

és

$$e^{\lambda_2 \cdot x} = e^{(\alpha - \beta \cdot i) \cdot x} = e^{\alpha \cdot x - \beta \cdot x \cdot i} = e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{-\beta \cdot x \cdot i},$$

felhasználva a komplex számoknál tanult Euler-formulát

$$(e^{\varphi \cdot i} = \cos \varphi + \sin \varphi \cdot i)$$

kapjuk, hogy

$$y_1^*(x) = e^{\lambda_1 \cdot x} = e^{\alpha \cdot x} \cdot (\cos(\beta \cdot x) + \sin(\beta \cdot x) \cdot i)$$

és

$$y_2^*(x) = e^{\lambda_2 \cdot x} = e^{\alpha \cdot x} \cdot (\cos(-\beta \cdot x) + \sin(-\beta \cdot x) \cdot i)$$

ahonnan az  $x \rightarrow \cos x$  függvény párosságát és az  $x \rightarrow \sin x$  függvény páratlanságát felhasználva

$$y_2^*(x) = e^{\lambda_2 \cdot x} = e^{\alpha \cdot x} \cdot (\cos(\beta \cdot x) - \sin(\beta \cdot x) \cdot i).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a valós és képzetes részek

$$Re(y_1^*(x)) = Re(y_2^*(x)) = e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$$

és

$$Im(y_1^*(x)) = -Im(y_2^*(x)) = e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x),$$

megoldásai  $(MH)$ -nak és lineárisan függetlenek.

### **n-ed rendű konstans együtthatós homogén lineáris DE**

Legyenek adottak a  $g_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) valós számok. A

$$(LH) \quad y^{(n)} + g_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + g_1 \cdot y'(x) + g_0 \cdot y(x) = 0$$

homogén lineáris DE karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^n + g_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + g_1 \cdot \lambda + g_0 = 0.$$

Ha  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  a karakterisztikus egyenletnek rendre  $p_1, \dots, p_k$ -szoros gyökei úgy, hogy  $p_1 + \dots + p_k = n$ , akkor

$$\left\{ \begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{p_1-1} e^{\lambda_1 x} \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots \\ e^{\lambda_k x}, & x e^{\lambda_k x}, & \dots, & x^{p_k-1} e^{\lambda_k x} \end{array} \right\}$$

alapszere (LH)-nak. Ha például  $\lambda_1 = \alpha + \beta \cdot i$  és  $\lambda_2 = \alpha - \beta \cdot i$  konjugált komplex gyökei (LH)-nak úgy, hogy  $p_1 = p_2 = p$ , akkor az előbbi rendszer első két sora helyett

$$e^{\alpha \cdot x} \cos(\beta x), x e^{\alpha \cdot x} \cos(\beta x), \dots, x^{p-1} e^{\alpha x} \cos(\beta \cdot x)$$

$$e^{\alpha \cdot x} \sin(\beta x), x e^{\alpha \cdot x} \sin(\beta x), \dots, x^{p-1} e^{\alpha x} \sin(\beta \cdot x)$$

szerepel az alapszereben.

**3.3.4. Példa. [Csillapítás nélküli rezgés mozgásegyenlete]** *Ha egy rugóra akasztott  $m$  tömegű testet függőleges irányban kitérítünk a nyugalmi állapotából, akkor a test periodikusan ismétlődő mozgást végez, ha a közegellenállást elhanyagoljuk. A tömegre ható rugóerő a Hooke-törvény szerint arányos a nyugalmi helyzetből való kitérés mértékével, az erő iránya pedig a kitérés irányával ellentétes. Newton második törvénye szerint a testre ható  $F$  erőre  $F = m \cdot a$ , ahol  $a$  a gyorsulás. Ebből kapjuk, hogy ha  $y(t)$  jelöli a testnek a nyugalmi helyzettől mért távolságát a  $t$  időpontban, akkor*

$$y''(t) = -\omega^2 \cdot y(t).$$

*Ez egy másodrendű konstansegyütthatós homogén lineáris DE, melynek karakterisztikus egyenlete:  $\lambda^2 = -\omega^2$ . Ennek gyökei:  $\lambda_{1,2} = \pm \omega \cdot i$ . Így az általános megoldás*

$$y(t) = c_1 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) + c_2 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

*mely valóban periodikus:*

$$y(t) = c_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Másrészt pedig az addíciós tételek alapján

$$\begin{aligned} y(t) &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cdot \left( \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right) = \\ &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cdot (\sin \beta \cdot \cos(\omega \cdot t) + \cos \beta \cdot \sin(\omega \cdot t)) = \\ &= A \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta), \end{aligned}$$

ahol  $A$  az amplitúdó,  $\omega$  a körfrekvencia és  $\beta$  a kezdőfázis, melyre  $\sin \beta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$  és  $\cos \beta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$ . Ez egy harmonikus rezgés.

### n-ed rendű inhomogén lineáris DE megoldása

Egy függvényegyütthetős (azaz amikor az együtthetők nem konstansfüggvények) homogén lineáris DE alaprendszerének megkeresésére nincs olyan általános eljárás, ami eredményhez vezetne. Ám ekkor is igaz az alábbi tétel:

**3.3.6. Tétel.** Legyenek  $g_i, r: I \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvények. A

$$y^{(n)} + g_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + g_1(x) \cdot y'(x) + g_0(x) \cdot y(x) = r(x)$$

egyenlet általános megoldása előállítható egy tetszőleges partikuláris megoldásának és a hozzá tartozó homogén

$$y^{(n)} + g_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + g_1(x) \cdot y'(x) + g_0(x) \cdot y(x) = 0$$

egyenlet általános megoldásának összegeként.

### A konstansvariálás módszere $n$ -ed rendű lineáris inhomogén DE esetén

Ha ismerjük a homogén egyenlet alaprendszerét, az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását kereshetjük a konstansvariálás módszerével. Eszerint a homogén rész általános megoldásában szereplő  $c_1, \dots, c_n$  paramétereket az  $x$  változó függvényeinek tekintjük. Az  $I$  intervallumon az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását így

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

alakban keressük.

A differenciálási szabályok és algebrai átalakítások segítségével könnyen igazolható a következő tétel.

**3.3.7. Tétel.** *Legyenek  $g_i, r: I \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvények.*

*Ha  $\{y_1, \dots, y_n\}$  alaprendszere az*

$$y^{(n)} + g_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + g_1(x) \cdot y'(x) + g_0(x) \cdot y(x) = 0$$

*egyenletnek és a  $c_i: I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) függvények megoldásai az*

$$c'_1(x)y_1^{(j)}(x) + c'_2(x)y_2^{(j)}(x) + \dots + c'_n(x)y_n^{(j)}(x) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n-2)$$

$$\text{és } c'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + c'_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) = r(x)$$

*egyenletekből álló egyenletrendszernek  $I$ -n, akkor*

$$y_p: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$$

*megoldása az alábbi inhomogén egyenletnek:*

$$y^{(n)} + g_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + g_1(x) \cdot y'(x) + g_0(x) \cdot y(x) = r(x).$$

A tételben szereplő  $n$  darab egyenletből álló egyenletrendszer egy lineáris egyenletrendszer a  $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$  változókra. Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa éppen a homogén rész alaprendszerének Wronski determinánsa, így  $W(x) \neq 0$ ,  $x \in I$  miatt az egyenletrendszer határozott. Így a Cramer szabállyal az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy

$$c'_1(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \dots, c'_n(x) = \frac{W_n(x)}{W(x)},$$

ahol  $W_i(x)$  az a determináns, amit úgy kapunk, hogy a Wronski determináns  $i$ -edik oszlopát a  $(\underbrace{0 \dots 0}_{n-1 \text{ db}} r(x))^T$  oszloppal helyettesítjük. Innen

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx, \dots, c_n(x) = \int \frac{W_n(x)}{W(x)} dx.$$

### Másodrendű konstansegyütthetős lineáris inhomogén DE általános megoldása

**3.3.7. Megjegyzés.** Legyenek  $p, q$  adott valós számok,  $r: I \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvény. Az  $y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = r(x)$  egyenlet általános megoldása meghatározásának lépései:

1. a homogén rész  $y''(x) + p \cdot y'(x) + q \cdot y(x) = 0$  általános  $y_h$  megoldásának meghatározása a karakterisztikus egyenlet gyökei alapján:  $y_h(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$
2. az inhomogén DE egy  $y_p$  partikuláris megoldásának megkeresése:

$$y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x),$$

ahol

$$\begin{aligned} c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) &= 0 \\ c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) &= r(x) \end{aligned}$$

3. az inhomogén DE általános megoldásának meghatározása:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

### 3.4. Potenciálfüggvény meghatározása

**3.4.1. Definíció.** A  $D \subset \mathbb{R}^3$  nyílt halmazt  $X_0 \in D$ -re nézve csillagtartománynak nevezzük, ha bármely  $X \in D$  esetén  $D$  tartalmazza az  $X_0X$  szakasz minden pontját.

**3.4.1. Tétel.** Legyen  $D \subset \mathbb{R}^3$  valamely  $X_0 \in D$ -re nézve csillagtartomány és  $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3): D \rightarrow \mathbb{R}^3$  folytonosan differenciálható vektormező.  $\underline{v}$ -nek akkor és csak akkor létezik potenciálfüggvénye, ha  $\underline{v}$  örvénymentes (azaz  $\text{rot } \underline{v} = \underline{0}$ ).

**3.4.1. Megjegyzés (A potenciálfüggvény meghatározása).** A 3.4.1 Tétel feltételei mellett legyen adott a  $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$  örvénymentes vektormező. Ekkor potenciálját  $\Phi$ -vel jelölve - mivel  $\text{grad}\Phi = \underline{v}$  - fenn kell állnia a

$$(\star) \quad \frac{d\Phi}{dx} = v_1, \quad \frac{d\Phi}{dy} = v_2, \quad \frac{d\Phi}{dz} = v_3$$

parciális differenciálegyenlet-rendszernek. Így a potenciálfüggvény meghatározásához

1.  $v_1$ -et integráljuk "x" szerint,

hiszen  $\partial_1\Phi(x, y, z) = v_1(x, y, z)$ . Így a potenciálfüggvény

$$\Phi(x, y, z) = \int v_1(x, y, z) dx = f(x, y, z) + C(y, z)$$

alakban írható.

2.  $v_2 - \partial_2 f$ -et integráljuk "y" szerint,

ugyanis  $\underbrace{\partial_2\Phi(x, y, z)}_{v_2(x, y, z)} = \partial_2 f(x, y, z) + \partial_2 C(y, z)$  miatt

$$C(y, z) = \int v_2(x, y, z) - \partial_2 f(x, y, z) dy = g(y, z) + C(z).$$

3.  $v_3 - \partial_3 f - \partial_3 g$ -t integráljuk "z" szerint,  
ugyanis az előzőeket figyelembe véve

$$\underbrace{\partial_3 \Phi(x, y, z)}_{v_3(x, y, z)} = \partial_3 f(x, y, z) + \partial_3 g(y, z) + \partial_3 C(z)$$

miatt

$$C(z) = \int v_3(x, y, z) - \partial_3 f(x, y, z) - \partial_3 g(y, z) dz = h(z) + C.$$

4. A potenciálfüggvény:  $\Phi(x, y, z) = f(x, y, z) + g(y, z) + h(z) + C.$

### 3.5. Differenciálegyenletek közelítő megoldása

A természetben előforduló valós jelenségeket leíró differenciálegyenletek (egyenletrendszerek) többségének megoldását nem tudjuk zárt alakban megadni. Most egy, az elsőrendű differenciálegyenletek megoldását közelítő módszert (numerikus módszert) ismertetünk. A következő ún. Euler módszer a megoldásfüggvény grafikonját töröttvonalak segítségével igyekszik közelíteni.

A 3.2.1 Tétel feltételei mellett a

$$y' = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték problémának létezik megoldása és az egyértelmű  $x_0$ -nak egy  $K_\varepsilon(x_0)$  környezetén. Feladatunk az  $y$  megoldásfüggvény közelítő értékeinek meghatározása az adott intervallumon.

Mivel  $y(x_0) = y_0$  és adott az  $y'(x) = f(x, y(x))$  összefüggés, így  $y'(x_0) = f(x_0, y(x_0))$  egyszerű behelyettesítéssel számítható. Az  $(x_0, y_0)$  pontra illeszkedő érintőegyenes egyenlete ezekkel a jelölésekkel:

$$y = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0).$$

Egy megfelelően kicsi  $h > 0$ -t választva ekkor az  $x_1 := x_0 + h$  helyen a megoldófüggvény értékét az

$$\tilde{y}_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_0 + h - x_0) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

értékkel becsülhetjük (lásd lineáris közelítés). Ezek után az  $x_2 := x_1 + h = x_0 + 2h$  helyen a megoldófüggvény értékét az  $(x_1, \tilde{y}_1)$  pontra illeszkedő  $f(x_1, \tilde{y}_1)$  meredekségű egyenes segítségével becsülhetjük:

$$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + f(x_1, \tilde{y}_1) \cdot (x_1 + h - x_1) = \tilde{y}_1 + h \cdot f(x_1, \tilde{y}_1),$$

és így tovább. Általánosan ha  $n \in \mathbb{N}$ , akkor az  $x_{n+1} := x_0 + (n+1) \cdot h$  helyen a megoldófüggvény értékét az

$$y_{\tilde{n}+1} = \tilde{y}_n + h \cdot f(x_n, \tilde{y}_n)$$

értékkel becsülhetjük. A módszer hasonlóan működik  $h < 0$  esetén is.

## 4. Kidolgozott feladatok

### 4.1. Differenciálszámítás

#### ★★ Parametrizált görbék ★★

4.1.1. **Feladat.** Mekkora szöget zár be az

$$\underline{r}(t) = R \cdot \cos t \cdot \underline{i} + R \cdot \sin t \cdot \underline{j} + \lambda \cdot t \cdot \underline{k} \quad t \in \mathbb{R}$$

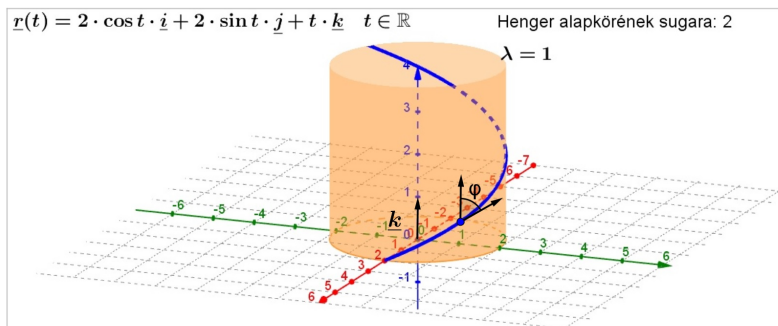
csavarvonal  $t$  paraméterű pontjához tartozó érintője a csavarvonalat tartalmazó henger alkotójával?

**Megoldás:** Az alkotók irányvektora például a  $\underline{k} = (0, 0, 1)$  vektor. A  $t$  paraméterű ponthoz tartozó érintőegyenest egy irányvektora:

$$\underline{r}'(t) = (-R \cdot \sin(t), R \cdot \cos(t), \lambda)$$

Ha  $\varphi$  jelöli az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektorok szögét, akkor  $\varphi$  az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  skaláris szorzatából számolható:  $\cos \varphi = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$ . Így  $\underline{k}$  és  $\underline{r}'(t)$  szöge:  $\varphi = \arccos \left( \frac{\underline{k} \cdot \underline{r}'(t)}{|\underline{k}| \cdot |\underline{r}'(t)|} \right)$ . Így 
$$\varphi = \frac{0 \cdot (-R) \cdot \sin(t) + 0 \cdot R \cdot \cos(t) + 1 \cdot \lambda}{\sqrt{(-R \cdot \sin(t))^2 + (R \cdot \cos(t))^2 + \lambda^2}} = \arccos \left( \frac{\lambda}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}} \right) = \text{konstans.}$$

57. ábra. A meghatározandó szög



**4.1.2. Feladat.** *Milyen alakzat az*

$$\underline{r}(t) = 3 \cos t \cdot \underline{i} + 3 \sin t \cdot \underline{j} + (2 - 3 \cos t - 3 \sin t) \cdot \underline{k}$$

*parametrizált görbe?*

**Megoldás:** A görbe képe rajta van egy körhengeren, mely alapkörének sugara 3. Jelöljük egy pillanatra a görbe koordinátáit  $(x, y, z)$ -vel. Ekkor

$$(\star) \quad z = 2 - x - y, \text{ azaz } x + y + z - 2 = 0.$$

Emlékezzünk, hogy az  $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$  normálvektorú  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  ponton átmenő sík egyenlete:

$$n_1 \cdot (x - x_0) + n_2 \cdot (y - y_0) + n_3 \cdot (z - z_0) = 0$$

( $\star$ ) egy  $(1, 1, 1)$  normálvektorú sík egyenlete. Tehát a görbe a henger metszete egy olyan síkkal, melynek normálvektora nem párhuzamos a  $z$  tengellyel, azaz ellipszis.

**4.1.3. Feladat.** *Paraméterezzük az  $y = x^2$  egyenletű parabolát! Van-e szélsőértéke a görbületnek, és ha igen, akkor milyen típusú?*

**Megoldás:**  $\underline{r}(t) = t \cdot \underline{i} + t^2 \cdot \underline{j}$  ( $t \in \mathbb{R}$ )  $\Rightarrow \underline{r}'(t) = 1 \cdot \underline{i} + 2t \cdot \underline{j} \Rightarrow \underline{r}''(t) = 0 \cdot \underline{i} + 2 \cdot \underline{j}$   
A görbületfüggvény:

$$\kappa(t) = \frac{|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)|}{|\underline{r}'(t)|^3} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2t & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= +\underline{i} \cdot \underbrace{(2t \cdot 0 - 0 \cdot 2)}_0 - \underline{j} \cdot \underbrace{(1 \cdot 0 - 0 \cdot 0)}_0 + \underline{k} \cdot \underbrace{(1 \cdot 2 - 2t \cdot 0)}_2 \\ \kappa(t) &= \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2}}{(\sqrt{1^2 + (2t)^2 + 0^2})^3} = \frac{2}{(\sqrt{1 + 4t^2})^3} \end{aligned}$$

A görbület akkor a legnagyobb, ha  $1 + 4t^2$  a legkisebb, azaz  $t=0$  esetén. Tehát a görbületfüggvénynek maximuma van a  $t = 0$  paraméterű pontban (a tengelypontban).

A görbületfüggvénynek nincs minimuma, mert  $1 + 4t^2$ -nek nincs maximuma.

**4.1.4. Feladat.** Írja fel az  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$  egyenletű ellipszis érintőjének egyenletét a  $P = (2; -3)$  pontban!

**Megoldás:** A  $P = (x_0, y_0)$  pontra illeszkedő  $\underline{v} = (v_x, v_y)$  irányvektorú egyenes egyenlete:  $y = y_0 + \frac{v_y}{v_x} \cdot (x - x_0)$  Az érintőegyenes irányvektorának meghatározásához az ellipszist paraméteres alakban adjuk meg. Ekkor az érintőegyenes irányvektora a  $t$  paraméterű pontban  $\underline{r}'(t)$ .

Visszahelyettesítéssel könnyen látható, hogy  $\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$  az  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ellipszis egy paraméterezése. Itt

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} 4 \cdot \cos(t) \\ 2\sqrt{3} \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \underline{r}'(t) = \begin{pmatrix} -4 \cdot \sin(t) \\ 2\sqrt{3} \cdot \cos(t) \end{pmatrix}$$

Meg kell határoznunk, hogy mely  $t_0$  paraméter esetén vagyunk az ellipszis  $P$  pontjában, hiszen azon paraméterű pontban kell az érintőegyenes irányvektorát meghatároznunk. Tehát meg kell oldanunk az alábbi egyenletet:

$$\begin{pmatrix} 4 \cdot \cos(t_0) \\ 2\sqrt{3} \cdot \sin(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ebből (osztással)  $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \text{tg}(t_0) = -\frac{3}{2}$  következik, melyből rendezés után kapjuk, hogy  $\text{tg}(t_0) = -\sqrt{3}$ . Mivel  $P$  a negyedik síknegyedben van, így  $t_0 = -\frac{\pi}{3}$ .

A  $P$  pontban az érintőegyenes irányvektora így

$$\underline{v} = \underline{r}'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -4 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ 2\sqrt{3} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 2\sqrt{3} \cdot 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

A keresett egyenes egyenlete:  $y = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(x - 2)$ , azaz  $\underline{\underline{y = \frac{1}{2}x - 4}}$ .

Megjegyzés: A későbbiekben látni fogjuk, hogy az  $F(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} - 1$  függvény  $P$ -beli gradiensvektora a  $P$ -beli érintő normálvektora:  $\text{grad } F(P) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ . (lásd 4.1.14 Feladat.)

**4.1.5. Feladat.** Egy sárkányrepülő spirálózva emelkedik a kedvező légáramlatokat kihasználva. A helyvektora:  $\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 4\pi]$ .

- Határozza meg a sebesség-idő függvényt!
- Határozza meg a gyorsulás-idő függvényt!
- Határozza meg a sebesség nagyságát a  $t_0 = \pi$  időpontban!
- Határozza meg azokat az időpillanatokat, amikor a gyorsulásvektor merőleges a sebességvektorra!
- Határozza meg a megtett utat a  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \pi$  időpillanatok között!
- Határozza meg a görbületet a görbe  $t = \pi$  paraméterű pontjában!
- Határozza meg a pálya érintőegyenesét a  $t_0 = \pi$  paraméterű pontban és ennek felhasználásával adjon becslést a sárkányrepülő koordinátáira a  $t = 3$  időpillanatban!
- Határozza meg a torziót a görbe  $t = \pi$  paraméterű pontjában!
- Írja fel a simulósík egyenletét a  $t = \pi$  paraméterű pontban!

**Megoldás:**

- a) A sebesség-idő függvény a hely-idő függvény deriváltja:

$$\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad \Rightarrow \quad \underline{v}(t) = \underline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

- b) A gyorsulás-idő függvény a sebesség-idő függvény deriváltja:

$$\underline{a}(t) = \underline{v}'(t) = \underline{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

- c) A sebesség nagysága a  $t_0 = \pi$  időpontban a sebességvektor hossza a  $t_0 = \pi$  időpontban (pályasebesség a  $t_0 = \pi$  időpillanatban):

$$\underline{v}(\pi) = \underline{r}'(\pi) = (-\sin \pi, \cos \pi, 1) = (0, -1, 1) \text{ - a sebességvektor}$$

$$v(\pi) = |\underline{r}'(\pi)| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ - a pályasebesség}$$

- d) Azok az időpillanatok, amikor a gyorsulásvektor merőleges a sebességvektorra:

Két vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0. Így keressük azokat a  $t$  időpillanatokot, melyre  $\underline{v}(t) \bullet \underline{a}(t) = 0$ . Ez pontosan akkor áll fenn, ha  $(-\sin t, \cos t, 1) \bullet (-\cos t, -\sin t, 0) = 0$ , azaz

$$(-\sin t) \cdot (-\cos t) + (\cos t) \cdot (-\sin t) + 1 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy bármely  $t$  időpillanatban a sebességvektor merőleges a gyorsulásvektorra. Így a gyorsulásvektornak nincs érintő irányú komponense, ami azt is jelenti hogy a sebesség nagysága minden időpillanatban ugyanannyi. (A pályasebességfüggvény konstans függvény.)

- e) A megtett út a  $t_1 = 0, t_2 = \pi$  időpillanatok között megegyezik a pálya (görbe) ívhosszával:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |r'(t)| dt \quad \left( = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \right)$$

(Az előzőekből egyébként tudjuk, hogy most  $v(t) = \sqrt{2}$ )

$$L = \int_0^\pi |(-\sin t, \cos t, 1)| dt = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} dt =$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{2} dt = \left[ \sqrt{2} \cdot t \right]_0^\pi = \sqrt{2} \cdot \pi - \sqrt{2} \cdot 0 = \sqrt{2} \cdot \pi.$$

Megjegyzés: Az ívhosszfüggvény itt  $\sigma(t) = \sqrt{2} \cdot t$

f) A görbület a  $t = \pi$  paraméterű pontban:

$$\kappa(t) = \frac{|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)|}{|\underline{r}'(t)|^3} \quad \text{így} \quad \kappa(\pi) = \frac{|\underline{r}'(\pi) \times \underline{r}''(\pi)|}{|\underline{r}'(\pi)|^3}$$

Mivel

$$\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad \underline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1), \quad \underline{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0),$$

így

$$\underline{r}'(\pi) = (0, -1, 1), \quad \underline{r}''(\pi) = (1, 0, 0) \Rightarrow$$

$$\underline{r}'(\pi) \times \underline{r}''(\pi) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \underline{i} + 1 \cdot \underline{j} + 1 \cdot \underline{k}$$

$$\underline{\kappa}(\pi) = \frac{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}}{(\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2})^3} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

g) A pálya érintőegyenese a  $t_0 = \pi$  paraméterű pontban; majd ennek felhasználásával becslés a sárkányrepülő koordinátáira a  $t = 3$  időpillanatban:

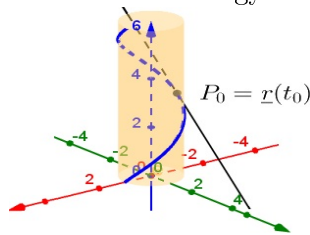
$$\underline{e}(t) = \underline{r}(t_0) + \underline{r}'(t_0) \cdot (t - t_0);$$

majd  $\underline{r}(t) \approx \underline{e}(t)$ . Mivel  $\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ , így  $\underline{r}(\pi) = (-1, 0, \pi)$ . A korábbiakból tudjuk, hogy  $\underline{r}'(\pi) = (0, -1, 1)$ . Ennélfogva

$$\underline{e}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (t - \pi) = \begin{pmatrix} -1 + 0 \cdot (t - \pi) \\ 0 + (-1) \cdot (t - \pi) \\ \pi + 1 \cdot (t - \pi) \end{pmatrix}, \text{ azaz}$$

$$\underline{e}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi - t \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{r}(3) \approx \underline{e}(3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.14 \\ 3 \end{pmatrix}$$

58. ábra. Érintőegyenés



h) A torzió a  $t = \pi$  paraméterű pontban:

$$\tau(t) = \frac{\underline{r}'(t)\underline{r}''(t)\underline{r}'''(t)}{|\underline{r}'(t) \times \underline{r}''(t)|^2},$$

így a  $t = \pi$  paraméterű pontban:

$$\tau(\pi) = \frac{\underline{r}'(\pi)\underline{r}''(\pi)\underline{r}'''(\pi)}{|\underline{r}'(\pi) \times \underline{r}''(\pi)|^2}$$

A korábbiakat figyelembe véve, amit még nem határoztunk meg:

$$\underline{r}'''(t) = (\sin t, -\cos t, 0) \text{ és } \underline{r}'''(\pi) = (0, 1, 0).$$

A vegyesszorzat-definíció szerint

$$\underline{r}'(\pi)\underline{r}''(\pi)\underline{r}'''(\pi) = (\underline{r}'(\pi) \times \underline{r}''(\pi)) \bullet \underline{r}'''(\pi) = (0, 1, 1) \bullet (0, 1, 0) = 1,$$

$$\text{így } \tau(\pi) = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}.$$

i) A simulósík egyenlete a  $t = \pi$  paraméterű pontban:

A  $t = \pi$  paraméterű pontra illeszkedik a sík, azaz

$$P_0 = \underline{r}(\pi) = (\cos \pi, \sin \pi, \pi) = (-1, 0, \pi)$$

A simulósík egy normálvektora  $\underline{B}(\pi)$ . Mivel  $\underline{B}(\pi) \parallel \underline{r}'(\pi) \times \underline{r}''(\pi)$  így a simulósík egy normálvektora  $\underline{n} = \underline{r}'(\pi) \times \underline{r}''(\pi)$ , melyet már korábban meghatároztunk ( $= (0, 1, 1)$ .) A keresett simulósík egyenlete:

$$0 \cdot (x + 1) + 1 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - \pi) = 0, \text{ azaz } \underline{\underline{y + z - \pi = 0}}.$$

**4.1.6. Feladat.** *Oldjuk meg a 4.1.5 Feladatot szoftver segítségével!*

**Megoldás a Maple programmal:**

A feladat  $a - c$  részének megoldása:



```
with(VectorCalculus);
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]);
r :=t->[cos(t), sin(t), t];
diff(r(t), t);
v:=t->diff(r(t),t);
diff(v(t),t);
a:=t->diff(v(t),t);
subs(t = Pi, v(t));
with(LinearAlgebra);
v0 := Vector(subs(t = Pi, v(t)));
VectorNorm(v0, 2);
```

A feladat  $d - f$  részének megoldása:



```
with(VectorCalculus):
with(LinearAlgebra):
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]);
r := t->[cos(t), sin(t), t];
v := Vector(diff(r(t), t));
a := Vector(diff(r(t), [t$2]));
v.a;
G := PositionVector([cos(t), sin(t), t]);
ArcLength(G, t = 0 .. Pi, 'inert');
simplify(ArcLength(G, t = 0 .. Pi, 'inert'))
ArcLength(G, t = 0 .. Pi);
eval(Curvature(G, t), t = Pi);
```

A feladat  $g$  részének megoldása:



```
with(VectorCalculus):  
with(LinearAlgebra):  
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]);  
G := PositionVector([cos(t), sin(t), t]);  
V := diff(G, t);  
subs(t = Pi, V);  
subs(t = Pi, G);  
E := subs(t = Pi, G)+subs(t = Pi, V)*(t-Pi);  
subs(t = 3, E);
```

A feladat  $h - i$  részének megoldása:



```
with(VectorCalculus):  
with(LinearAlgebra):  
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]);  
G := PositionVector([cos(t), sin(t), t]);  
eval(Torsion(G, t), t = Pi);  
TNB := eval(TNBFrame(G, t), t = Pi);  
simplify(eval(DotProduct(Vector(TNB[3]), Vector([x, y, z])-(eval(G, t = Pi))) = 0));
```

---

 \*\* Parametrizált felületek \*\*
 

---

**4.1.7. Feladat.** Adja meg az

$$(u, v) \mapsto \underline{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

függvény differenciálhányadosát a  $(u_0, v_0) = (2, 3)$  helyen.

**Megoldás:**  $x(u, v) = u$ ,  $y(u, v) = v$ ,  $z(u, v) = u^2 + v^2$ , így

$$\underline{r}'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}_{3 \times 2} \quad \underline{r}'(u_0, v_0) = \underline{r}'(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

**4.1.8. Feladat.** Adja meg az

$$(u, v) \mapsto \underline{r}(u, v) = \left( (u + 3v)^4 (u - v)^2, \frac{u}{v}, \frac{1}{u} \right) \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

függvény differenciálhányadosát a  $(u_0, v_0) = (2, -1)$  helyen.

**Megoldás:** Az

$$x(u, v) = (u + 3v)^4 (u - v)^2, \quad y(u, v) = \frac{u}{v}, \quad z(u, v) = \frac{1}{u}$$

jelöléseket használva a koordinátafüggvényekre kapjuk, hogy

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = 4(u + 3v)^3 \cdot 1 \cdot (u - v)^2 + (u + 3v)^4 \cdot 2 \cdot (u - v) \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(2, -1) = 4(-1)^3 3^2 + (-1)^4 \cdot 2 \cdot 3 = -36 + 6 = -30.$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) = 4(u + 3v)^3 \cdot 3 \cdot (u - v)^2 + (u + 3v)^4 \cdot 2 \cdot (u - v) \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(2, -1) = 4(-1)^3 \cdot 3 \cdot 3^2 + (-1)^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -114.$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{v} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial y}{\partial u}(2, -1) = -1.$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}(u, v) = -\frac{u}{v^2} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial y}{\partial v}(2, -1) = -2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u, v) = -\frac{1}{u^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial z}{\partial u}(2, -1) = -\frac{1}{4}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}(u, v) = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial z}{\partial v}(2, -1) = 0.$$

$$\underline{r}'(u_0, v_0) = \underline{r}'(2, -1) = \begin{pmatrix} -30 & -114 \\ -1 & -2 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

**4.1.9. Feladat.** Oldjuk meg a 4.1.8 Feladatot szoftver segítségével!

**Megoldás a Maple programmal:**



```
with(VectorCalculus):
with(Student[MultivariateCalculus]):
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]);
F := PositionVector([(u+3*v)^4*(u-v)^2, u/v, 1/u]);
D = Jacobian(F, [u, v]);
Jacobian(F, [u, v] = [2, -1]);
```

**4.1.10. Feladat.** Adja meg az

$$(u, v) \mapsto \underline{r}(u, v) = (u^2 - 2v^2, uv^2, u^2v - u) \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

függvény által meghatározott felület érintősíkjának egyenletét az  $\underline{r}(u_0, v_0)$  pontban, ha  $(u_0, v_0) = (2, -1)$ !

**Megoldás:** A keresett sík az

$$\underline{r}(u_0, v_0) = \underline{r}(2, -1) = (4 - 2 \cdot 1, 2 \cdot (-1)^2, 4 \cdot (-1) - 2) = (2, 2, -6)$$

pontra illeszkedik. Az érintősík normálvektora a  $(u_0, v_0) = (2, -1)$  paraméterpár esetén

$$\underline{n}_{(2,-1)} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}(2, -1) \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}(2, -1).$$

Itt

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}(u, v) = (2u, v^2, 2uv - 1) \text{ és } \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}(u, v) = (-4v, 2uv, u^2),$$

tehát  $\underline{n}_{(2,-1)} = (4, 1, -5) \times (4, -4, 4)$ , azaz

$$\underline{n}_{(2,-1)} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 4 & 1 & -5 \\ 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} \\ 4 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = (-16, -36, -20).$$

A keresett sík egyenlete  $-16(x - 2) - 36(y - 2) - 20(z + 6) = 0$ , azaz

$$4(x - 2) + 9(y - 2) + 5(z + 6) = 0.$$

**4.1.11. Feladat.** *Oldjuk meg a 4.1.10 Feladatot szoftver segítségével!*

**Megoldás a Maple programmal:**



```
with(VectorCalculus):
with(Student[MultivariateCalculus]):
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]);
F := PositionVector([u^2-2*v^2, u*v^2, u^2*v-u]);
n := simplify(CrossProduct(diff(F, u), diff(F, v)), [u = 2, v = -1]);
eval(F, [u = 2, v = -1]);
simplify(DotProduct(n, PositionVector([x, y, z])-(eval(F, [u = 2, v = -1]))) = 0);
```

---

 ★★ Parciális deriváltak, gradiensvektor, iránymenti derivált ★★
 

---

**4.1.12. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi függvények elsőrendű parciális deriváltjait!

a)  $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^3$

e)  $f(x, y) = x^y + y^x$

b)  $f(x, y) = x^2 \cdot \sin(x^3 + y^4)$

f)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 6xy + y^3}$

c)  $f(x, y) = \frac{x^5 + xy}{(x+2y)^3}$

d)  $f(x, y) = x^5 \cdot e^{2xy}$

g)  $f(x, y, z) = (2x - z) \cdot (2 - y)^3$

**Megoldás:** A 1.6.2 és 1.6.3 Megjegyzésekben leírt jelöléseket használjuk.

a)  $\partial_1 f(x, y) = 2x + 3y, \quad \partial_2 f(x, y) = 3x + 3y^2$

b)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \sin(x^3 + y^4) + x^2 (\cos(x^3 + y^4)) \cdot 3x^2,$   
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4x^2 y^3 \cos(x^3 + y^4)$

c)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(5x^4 + y)(x+2y)^3 - (x^5 + xy) \cdot 3 \cdot (x+2y)^2 \cdot 1}{(x+2y)^6} = \frac{5x^4 + y}{(x+2y)^3} - \frac{3 \cdot (x^5 + xy)}{(x+2y)^4},$   
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x+2y)^3 - (x^5 + xy) \cdot 3 \cdot (x+2y)^2 \cdot 2}{(x+2y)^6} = \frac{x}{(x+2y)^3} - \frac{6 \cdot (x^5 + xy)}{(x+2y)^4}$

d)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5x^4 \cdot e^{2xy} + x^5 e^{2xy} \cdot 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^5 e^{2xy} \cdot 2x = 2x^6 e^{2xy}$

e)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1} + y^x \cdot \ln y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \cdot \ln x + xy^{x-1}$

f) A gyököt hatványalakban felírva:  $f(x, y) = (x^2 + 6xy + y^3)^{\frac{1}{2}}.$

Az elsőrendű parciális deriváltak:  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 6xy + y^3)^{-\frac{1}{2}}(2x + 6y)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 6xy + y^3)^{-\frac{1}{2}}(6x + 3y^2)$$

g)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2 \cdot (2 - y)^3 + (2x - z) \cdot 0 = 2 \cdot (2 - y)^3$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (2x - z) \cdot 3 \cdot (2 - y)^2 \cdot (-1), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (-1) \cdot (2 - y)^3$$

**4.1.13. Feladat.** Oldjuk meg a 4.1.12 Feladatot szoftver segítségével!

A feladat c) részének megoldása a Maple programmal:



```
f:=(x^5+x*y)/(x+2*y^3)
d1:=diff(f,x);
d2:=diff(f,y);
```

**4.1.14. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi függvények  $r_0$  pontbeli gradiensvektorát!

a)  $f(x, y) = x^2 + 5xy + y$ ,  $r_0 = (2, -1)$

b)  $f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} - 1$ ,  $r_0 = (2, -3)$

c)  $f(x, y, z) = x^3 + 5xy^2 + y + z^2$ ,  $r_0 = (2, -1, 0)$

**Megoldás:**

a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 5y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(r_0) = 4 - 5 = -1$ ,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5x + 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(r_0) = 10 + 1 = 11$ .

A gradiensvektor:  $\text{grad } f(r_0) = (-1, 11)$ .

b)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{8}x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(r_0) = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{6}y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(r_0) = -\frac{1}{2}$ .

A gradiensvektor:  $\text{grad } f(r_0) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ .

c)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(r_0) = 17$ ,

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 10xy + 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(r_0) = -19$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(r_0) = 0$ .

A gradiensvektor:  $\text{grad } f(r_0) = (17, -19, 0)$ .

**4.1.15. Feladat.** Oldjuk meg a 4.1.14 Feladatot szoftver segítségével!

A feladat c) részének megoldása a Maple programmal:



```
with(VectorCalculus):
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]);
f :=(x, y, z)->x^3+5*x*y^2+y+z^2;
g := Gradient(f(x, y, z));
subs(x = 2, y = -1, z = 0, g);
```

**4.1.16. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az  $r_0$  pontban a  $\underline{v}$  irányban!

a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $r_0 = (1, 3)$ ,  $\underline{v} = (3, 4)$

b)  $f(x, y, z) = 2xy - yz$ ,  $r_0 = (1, -1, 1)$ ,  $\underline{v} = (1, 3, -2)$

**Megoldás:**

a) Az iránymenti derivált kiszámításához a 1.4.3 Definíciót (1. mo), majd a 1.6.1 Tételt használjuk (2.mo).

1.mo:

$$\begin{aligned} \underline{v}^\circ &= \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot (3, 4) = \frac{1}{5} \cdot (3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \\ \partial_{\underline{v}} f(1, 3) &:= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f\left(\left(1, 3\right) + \lambda \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\right) - f(1, 3)}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{3}{5}\lambda, 3 + \frac{4}{5}\lambda\right) - f(1, 3)}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{3}{5}\lambda\right)^2 + \left(3 + \frac{4}{5}\lambda\right)^2 - (1^2 + 3^2)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(6 + \lambda) \cdot \lambda}{\lambda} = \underline{\underline{6}} \end{aligned}$$

2.mo

$$\begin{aligned} \underline{v}^\circ &= \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \cdot (3, 4) = \frac{1}{5} \cdot (3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2y \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r_0) = 2 \cdot 1 = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(r_0) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\partial_{\underline{v}} f(1, 3) = (2, 6) \cdot \left( \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) = 2 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{4}{5} = \underline{\underline{6}}$$

$$b) \underline{v}^\circ = \frac{1}{\|\underline{v}\|} \cdot \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}} \cdot (1, 3, -2) = \left( \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2x - z \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -y$$

$$\text{grad}f(x, y, z) = (2y, 2x - z, -y) \Rightarrow \text{grad}f(r_0) = (-2, 1, 1)$$

$$\partial_{\underline{v}} f(1, -1, 1) = (-2, 1, 1) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}} \right) =$$

$$= (-2) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + 1 \cdot \left( -\frac{2}{\sqrt{14}} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{14}}}}$$

4.1.17. Feladat. Oldjuk meg a 4.1.16 Feladatot szoftver segítségével!

A feladat b) részének megoldása a Maple programmal:



```
f := (x, y, z) -> 2*x*y-y*z;
d1 := diff(f(x, y, z), x);
d2 := diff(f(x, y, z), y);
d3 := diff(f(x, y, z), z);
g := Vector(3, [d1, d2, d3]);
g0 := subs(x = 1, y = -1, z = 1, g);
with(LinearAlgebra); v := Normalize(<1, 3, -2>, Euclidean);
DotProduct(g0, v);
```

4.1.18. Feladat. Van-e olyan  $\underline{v}$  irány, amely mentén a

$$T(x, y, z) = 2xy - yz$$

hőmérsékletfüggvény változási sebessége az  $r_0 = (1, -1, 1)$  pontban  $-1 \text{ C}^\circ/\text{cm}$ ?

**Megoldás:**

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y, z) = 2y \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, y, z) = 2x - z \quad \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z) = -y$$

$$\text{grad} T(x, y, z) = (2y, 2x - z, -y) \Rightarrow \text{grad} T(r_0) = (-2, 1, 1)$$

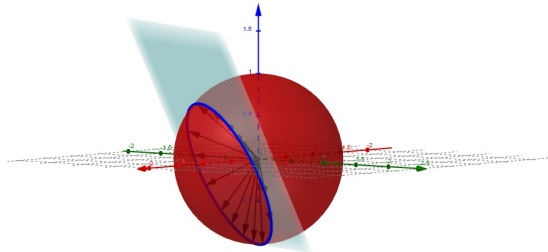
Jelölje  $\underline{v}^\circ = (v_1, v_2, v_3)$  a keresett (egységnyi hosszúságú) irányt. Ekkor  $(-2, 1, 1) \bullet (v_1, v_2, v_3) = -1$ , azaz

$$(\star) \quad -2v_1 + v_2 + v_3 = -1$$

kell, hogy teljesüljön. Ez egy sík egyenlete.

Az összes (egység) irányok halmazát az origó középpontú, egység sugarú gömb pontjainak helyvektorai alkotják. Ezek közül csak azok felelnek meg a feltételnek, amelyek a  $(\star)$  egyenletű sík pontjainak helyvektorai, mivel az  $-2x + y + z = -1$ , és  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  egyenleteknek egyszerre kell teljesülnie.

59. ábra. A keresett irányok



---

★★ Érintősík, Lineáris közelítés ★★

---

**4.1.19. Feladat.** Adjuk meg az  $f(x, y) = \sin x \cdot \operatorname{tg} y$  függvény érintősíkját megadó függvényt az  $r_0 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$  helyen, majd adjunk becslést ennek segítségével a  $\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$  értékére!

**Megoldás:** Az érintősíkot a 1.6.2 Definícióban adtuk meg.

$$\frac{\pi}{6}(\text{rad}) = 30^\circ, \quad \frac{\pi}{4}(\text{rad}) = 45^\circ, \quad f(r_0) = \sin \frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f'_x(x, y) = \operatorname{tg} y \cdot \cos x \Rightarrow f'_x(r_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'_y(x, y) = \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow f'_y(r_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

Az érintősíkot megadó függvény:

$$S(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \cdot \left(y - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$29^\circ = \frac{29\pi}{180}(\text{rad}), \quad 46^\circ = \frac{46\pi}{180}(\text{rad})$$

$$\sin 29^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ = \sin \frac{29\pi}{180} \cdot \operatorname{tg} \frac{46\pi}{180} = f\left(\frac{29\pi}{180}, \frac{46\pi}{180}\right) = ?$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{29\pi}{180}, \frac{46\pi}{180}\right) &\approx S\left(\frac{29\pi}{180}, \frac{46\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{29\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \cdot \left(\frac{46\pi}{180} - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{-\pi}{180}\right) + 1 \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) \approx 0,5 + 0,8660 \cdot (-0,0175) + 0,0175 = 0,5023 \end{aligned}$$

**4.1.20. Feladat.** Oldjuk meg a 4.1.19 Feladatot szoftver segítségével!

**Megoldás a Maple programmal:**

```
f :=(x, y)-> sin(x)*tan(y);
x0 := Pi/6;
y0:=Pi/4;
a := subs(x = x0, y = y0, f(x, y));
d1:=(x,y)->diff(f(x,y),x);
d2:=(x,y)->diff(f(x,y),y);
b := subs(x = x0, y = y0, d1(x, y));
c := subs(x = x0, y = y0, d2(x, y));
s :=(x, y)->a+b*(x-x0)+c*(y-y0);
evalf(subs(x = 29*Pi/180, y = 46*Pi/180, s(x, y)));
```

Megjegyezzük, hogy az érintősík meghatározására az alábbi eljárást írhatjuk:



```
erintosik:=proc(f,a,b)
local c, d, e, s;
c := subs(x=a,y=b,f);
d := subs(x=a,y=b,diff(f,x));
e:=subs(x=a,y=b,diff(f,y));
s(x,y) =eval(c+d*(x-a)+e*(y-b));
end proc;
erintosik(sin(x)*tan(y), Pi/6,Pi/4);
```

**4.1.21. Feladat.** *Egy cég egyenes körhenger alakú tárolókat gyárt, amiknek 1.5 m a sugara és 7.5 m a magassága. Mennyire érzékeny a tartály térfogata a sugár, illetve a magasság kis változásaira?*

**Megoldás:** A körhenger térfogata az alapkör sugarától és a magasságától függ:

$$V(R, m) = R^2 \cdot \pi \cdot m$$

A 1.4.2 Definícióban leírt lineáris közelítést használjuk: a differenciálhányados definíciójából a  $\Delta \underline{r} = \underline{r} - \underline{r}_0$  és  $\Delta V = V(\underline{r}) - V(\underline{r}_0)$  jelölések mellett az  $\underline{r}_0 = (1.5, 7.5)$  pont egy elegendően kis környezetében

$$\Delta V \approx \text{grad } V(\underline{r}_0) \bullet \Delta \underline{r}.$$

Tehát

$$\Delta V \approx V'_R(\underline{r}_0) \cdot \Delta R + V'_m(\underline{r}_0) \cdot \Delta m.$$

$$V'_R(R, m) = 2 \cdot R \cdot \pi \cdot m \Rightarrow V'_R(\underline{r}_0) = V'_R(1.5, 7.5) = 22.5\pi$$

$$V'_m(R, m) = R^2 \cdot \pi \Rightarrow V'_m(\underline{r}_0) = V'_m(1.5, 7.5) = 2.25\pi$$

$$\Delta V \approx 22.5\pi \cdot \Delta R + 2.25\pi \cdot \Delta m$$

Ez azt jelenti, hogy egységnyi változás a sugárban kb  $22.5\pi$ -nyi változást eredményez a térfogatban; míg egységnyi változás a magasságban kb  $2.25\pi$ -nyi változást eredményez. A térfogat változása tízszer olyan érzékeny a sugár kis változására, mint a magasságéra. Ez azt jelenti, hogy a gyártás során a sugár megfelelő nagyságára kell különösképpen ügyelni.

Ha fordítva lenne, és a sugár lenne 7.5 m, a magasság pedig 1.5 m, akkor a térfogat a magasság változásaira lenne érzékenyebb.

---

 \*\* Lokális szélsőérték keresése (szabad szélsőérték feladatok) \*\*
 

---

Az 1.7 alfejezetben leírt tételeket használjuk.

**4.1.22. Feladat.** *Határozza meg az*

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 3 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

*lokális szélsőérték helyeit!*

**Megoldás:**

**1.lépés:**  $\partial_1 f(x, y) = 2x - 2, \quad \partial_2 f(x, y) = 2y - 4$

**2.lépés:**  $2x - 2 = 0$  és  $2y - 4 = 0 \Rightarrow \underline{r}_1 = (1, 2)$

**3.lépés:**

$$\partial_1 \partial_1 f(x, y) = 2 \quad \partial_1 \partial_2 f(x, y) = 0$$

$$\partial_2 \partial_1 f(x, y) = 0 \quad \partial_2 \partial_2 f(x, y) = 2$$

**4.lépés:**

$$\partial_1 \partial_1 f(\underline{r}_1) = 2 \quad \partial_1 \partial_2 f(\underline{r}_1) = 0$$

$$\partial_2 \partial_1 f(\underline{r}_1) = 0 \quad \partial_2 \partial_2 f(\underline{r}_1) = 2$$

**5.lépés:**  $\Delta_1(\underline{r}_1) = \partial_1 \partial_1 f(\underline{r}_1) = 2 > 0$  és

$$\Delta_2(\underline{r}_1) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow \text{pozitív definit}$$

**6.lépés:**  $\underline{r}_1 = (1, 2)$  lokális minimumhely, a minimum értéke:

$$f(\underline{r}_1) = 3$$

A függvény képe egyébként forgásparaboloid. A  $P_0 = (1, 2)$  egyben abszolút minimumhely, hiszen bármely  $x, y \in \mathbb{R}$  esetén

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 3 \geq 3.$$

**4.1.23. Feladat.** *Határozza meg az*

$$f(x, y) = -3x^3 - 3y^3 + x + 4y + 1$$

*lokális szélsőérték helyeit!*

**Megoldás:**

**1.lépés:**  $\partial_1 f(x, y) = -9x^2 + 1$     $\partial_2 f(x, y) = -9y^2 + 4$

**2.lépés:**  $-9x^2 + 1 = 0$  és  $-9y^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{3}$  és  $y_{1,2} = \pm \frac{2}{3}$ ; így lokális szélsőérték lehet négy helyen:

$$\underline{r}_1 = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \underline{r}_2 = \left( -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \underline{r}_3 = \left( \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right), \underline{r}_4 = \left( -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

**3.lépés:**

$$\Delta_2(x, y) = \begin{pmatrix} -18x & 0 \\ 0 & -18y \end{pmatrix}$$

**4.lépés:**

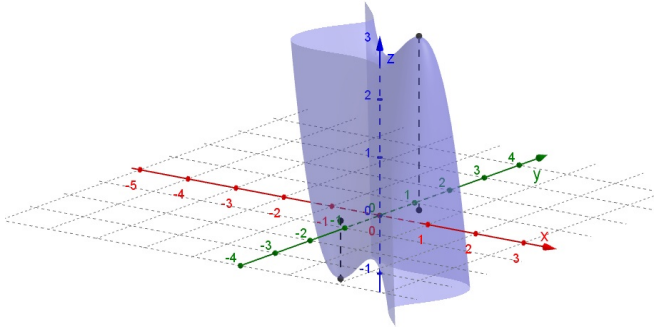
$$\Delta_2(\underline{r}_1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \quad \Delta_2(\underline{r}_2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2(\underline{r}_3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \Delta_2(\underline{r}_4) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

**5.lépés:**

- \*  $\Delta_1(\underline{r}_1) = -6 < 0$ ,  $\Delta_2(\underline{r}_1) = 72 > 0 \Rightarrow$  negatív definit
- \*  $\Delta_1(\underline{r}_2) = 6 > 0$ ,  $\Delta_2(\underline{r}_2) = -72 < 0 \Rightarrow$  indefinit
- \*  $\Delta_1(\underline{r}_3) = -6 < 0$ ,  $\Delta_2(\underline{r}_3) = -72 < 0 \Rightarrow$  indefinit
- \*  $\Delta_1(\underline{r}_4) = 6 > 0$ ,  $\Delta_2(\underline{r}_4) = 72 > 0 \Rightarrow$  pozitív definit

**6.lépés:**  $\underline{r}_1$  lok.max.hely,  $\underline{r}_4$  lok.min.hely,  $\underline{r}_2, \underline{r}_3$  nem szélsőérték hely

60. ábra.  $f(x, y) = -3x^3 - 3y^3 + x + 4y + 1$ 

```
with(RealDomain):
lszesh:=proc(f)
local h;
print(f);
h := convert(convert(solve({diff(f,x)=0,diff(f,y)=0}, [x,y]), 'set'), 'list');
print(h);
end proc;
```

**4.1.24. Feladat.** Írjunk olyan eljárást, amely megkeresi egy kétváltozós függvény lehetséges szélsőérték helyeit!

**Megoldás a Maple programmal:**

A *with(RealDomain)* programcsomagot azért kell betölteni, hogy az egyenletrendszer megoldására szolgáló *solve* parancs csak valós értékeket adjon vissza. A *solve* parancs egy listát ad azokról a helyekről, ahol mind a két parciális deriváltfüggvény eltűnik. A *convert* parancs kétszeri alkalmazásával a listát halmazzá, majd a halmazt listává konvertáljuk. Ezzel elkerüljük, hogy egy lehetséges szélsőérték hely többször is fel legyen sorolva.

**4.1.25. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$$

függvény lokális szélsőérték helyeit!

**Megoldás:**

**1.lépés:**

$$\partial_1 f(x, y, z) = 3x^2 + 12y, \quad \partial_2 f(x, y, z) = 2y + 12x, \quad \partial_3 f(x, y, z) = 2z + 2$$

**2.lépés:** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 12y &= 0 \\ 2y + 12x &= 0 \\ 2z + 2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad z = -1 \end{aligned}$$

A második egyenletből  $y = -6x$ , melyet az elsőbe írva  $3x^2 - 72x = 0$ . Ebből  $x_1 = 0$  vagy  $x_2 = 24$ , így  $y = -6x$  miatt szélsőérték lehet az  $\underline{r}_1 = (0, 0, -1)$  és az  $\underline{r}_2 = (24, -144, -1)$  helyeken.

**3.lépés:**

$$\Delta_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**4.lépés:**

$$\Delta_3(\underline{r}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Delta_3(\underline{r}_2) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**5.lépés:** Mivel az  $\underline{r}_1 = (0, 0, -1)$  hely esetén  $\Delta_1(\underline{r}_1) = 0$ , így ezzel az eljárással nem dönthető el, hogy a  $\underline{r}_1 = (0, 0, -1)$  szélsőérték hely-e vagy sem. Az  $\underline{r}_2 = (24, -144, -1)$  hely esetén

$$\Delta_1(\underline{r}_2) = \partial_1 \partial_1 f(\underline{r}_2) = 144 > 0$$

$$\Delta_2(\underline{r}_2) = \det \begin{pmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 144 - 12 \cdot 12 = 144 > 0$$

$$\Delta_3(\underline{r}_2) = \det \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} = 288 > 0.$$

⇒ pozitív definit

**6.lépés:**  $f$ -nek a  $r_2 = (24, -144, -1)$  helyen lokális minimuma van.

Az  $r_1 = (0, 0, -1)$  hely vizsgálata:

$f(r_1) = f(0, 0, -1) = -1$ . Másrészt  $f(x, 0, -1) = x^3 - 1$ , így  $x < 0$  esetén  $f(x, 0, -1) < -1$  és  $x > 0$  esetén  $f(x, 0, -1) > -1$ .

Ez azt jelenti, hogy a függvény az  $r_1 = (0, 0, -1)$  bármely kis környezetében felvesz  $-1$ -nél nagyobb és kisebb értékeket is, így  $r_1$  nem szélsőérték helye  $f$ -nek.

**4.1.26. Feladat.** *Határozzuk meg szoftver segítségével a lehetséges szélsőérték helyeket, majd a másodrendű parciális deriváltak ún. Hesse-mátrixát, illetve annak determinánsát!*

**Megoldás a Maple programmal:**

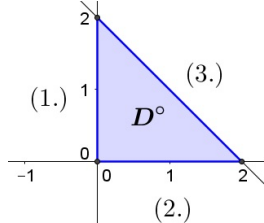
A 4.1.24 feladat megoldásához hasonlóan határozzuk meg a lehetséges szélsőérték helyeket.



```
with(RealDomain):
Iszelsh:=proc(f)
local h;
print(f);
h := convert(convert(solve({diff(f,x) = 0,diff(f,y) = 0,diff(f,z) = 0}, [x,y,z]), 'set'), 'list');
print(h);
end proc;
Iszelsh(x^3+12*x*y+y^2+z^2+2*z);
with(VectorCalculus);
with(LinearAlgebra);
H := Hessian(x^3+12*x*y+y^2+z^2+2*z, [x, y, z]);
d := Determinant(H);
subs(x = 24, y = -144, z = 1, d);
```

**4.1.27. Feladat.** *Határozza meg az  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 3x - 3y$  függvény szélsőértékeit a  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq 2\}$  halmazon!*

**Megoldás:** A 1.7.1 tétel szerint a  $D$  korlátos zárt halmazon az  $f$  folytonos függvény felveszi a maximumát és minimumát is; vagy  $D$  belsejében ( $D^\circ$ ) lokális szélsőérték formájában, vagy  $D$  határán.

61. ábra. A  $D$  halmaz

I. Szélsőérték keresése a  $D^o$  halmazon:

$$\partial_1 f(x, y) = 2x - y + 3 \quad \partial_2 f(x, y) = 2y - x - 3$$

A

$$2x - y + 3 = 0$$

$$2y - x - 3 = 0$$

egyenletrendszer megoldása  $x = -1$ ,  $y = 1$ , de  $\underline{r}_0 = (-1, 1) \notin D^o$ , így  $D$  belsejében nincs szélsőérték.

II. Szélsőérték keresése  $D$  határán:

(1.)  $x = 0$ ,  $y \in ]0, 2[$

(2.)  $y = 0$ ,  $x \in ]0, 2[$

(3.)  $y = -x + 2$ ,  $x \in ]0, 2[$

(4.) a csúcsokban

(1.)  $x = 0$ ,  $y \in ]0, 2[ \Rightarrow$  a  $g(y) := f(0, y) = y^2 - 3y$  függvény szélsőértékét keressük a  $]0, 2[$  intervallumon.

$$g'(y) = 2y - 3, \quad g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$g''\left(\frac{3}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \in ]0, 2[ \text{ lokális minimumhelye } g\text{-nek}$$

$$f\left(0, \frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

(2.)  $y = 0$ ,  $x \in ]0, 2[ \Rightarrow$  a  $k(x) := f(x, 0) = x^2 + 3x$  függvény szélsőértékét keressük a  $]0, 2[$  intervallumon.

$$k'(x) = 2x + 3, \quad k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \notin ]0, 2[$$

(3.)  $y = -x + 2$ ,  $x \in ]0, 2[ \Rightarrow$  az

$$f(x, -x + 2) = x^2 + (-x + 2)^2 - x(-x + 2) + 3x - 3(-x + 2) = 3x^2 - 2,$$

így az  $l(x) := 3x^2 - 2$  függvény szélsőértékét keressük a  $]0, 2[$  intervallumon.

$$l'(x) = 6x, \quad l'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin ]0, 2[$$

(4.)  $f(0, 0) = 0$ ,  $f(0, 2) = -2$ ,  $f(2, 0) = 10$

Összegezve az eddigieket kapjuk, hogy az abszolút minimumhely  $(0, \frac{3}{2})$ , a minimum értéke  $f(0, \frac{3}{2}) = -\frac{9}{4}$ ; az abszolút maximumhely  $(2, 0)$ , a maximum értéke  $f(2, 0) = 10$ .

**4.1.28. Feladat.** *Végezzük el a 4.1.27 feladat megoldásában szereplő számításokat szoftver segítségével!*

**Megoldás a Maple programmal:**

Megjegyezzük, hogy a szoftver az intervallum végpontjaiban is keresi a szélsőértéket, így a (4). lépést (csúcsokban) nem kell elvégezni.



```
with(RealDomain):
lszelsh:=proc(f)
local(h);
h := convert(convert(solve({diff(f,x) = 0, diff(f,y) = 0}, [x,y]), 'set'), 'list');
print(h);
end proc;
f := x^2-x*y+y^2+3*x-3*y;
lszelsh(f);
f1 := subs(x = 0, f);
minimize(f1, y = 0 .. 2, location);
maximize(f1, y = 0 .. 2, location);
f2 := subs(y = 0, f);
minimize(f2, x = 0 .. 2, location);
maximize(f2, x = 0 .. 2, location);
f3 := subs(y = -x+2, f);
minimize(f3, x = 0 .. 2, location);
maximize(f3, x=0..2, location);
```

### ★★ Vektormezők ★★

**4.1.29. Feladat.** Határozza meg az  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto \underline{v}(x, y, z) = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$$

vektormező deriváltmátrixát, divergenciáját, rotációját az  $\underline{r}_0 = (3, 2, -1)$  helyen. Írja fel a vektormező  $\underline{r}_0 = (3, 2, -1)$ -hoz tartozó teljes differenciálját, ha az eltérés  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (0.1, 0.05, -0.2)$ .

**Megoldás:**  $\underline{v}'(\underline{r}) = \underline{v}'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 0 & 2y & -2z \\ -2x & 0 & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{v}'(\underline{r}_0) = \underline{v}'(3, 2, -1) = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname{div} \underline{v}(x, y, z) = 2x + 2y + 2z \Rightarrow \operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}_0) = \operatorname{div} \underline{v}(3, 2, -1) = 6 + 4 - 2 = 8.$$

$$\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{rot} \underline{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 - (-2z) \\ 0 - (-2x) \\ 0 - (-2y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}_0) = \operatorname{rot} \underline{v}(3, 2, -1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

A  $\underline{r}_0$ -hoz tartozó teljes differenciál a megadott eltérésre:

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.05 \\ -0.2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \cdot 0.1 - 4 \cdot 0.05 + 0 \cdot (-0.2) \\ 0 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.05 + 2 \cdot (-0.2) \\ (-6) \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.05 - 2 \cdot (-0.2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.2 \\ -0.2 \end{pmatrix} \approx \Delta \underline{v}.$$

**4.1.30. Feladat.** *Oldjuk meg a 4.1.29 feladatot szoftver segítségével!*

**Megoldás a Maple programmal:**



```
with(VectorCalculus):
v := VectorField(<x^2-y^2, y^2-z^2, -x^2+z^2>, 'cartesian'[x, y, z]);
Jacobian(v);
M := Jacobian(v, [x, y, z] = [3, 2, -1]);
d := Divergence(v);
d_0 := subs(x = 3, y = 2, z = -1, d);
r := Curl(v);
r_0 := subs(x = 3, y = 2, z = -1, r);
with(LinearAlgebra):
V := Matrix(3, 1, [0.1, 0.05, -0.2]);
Multiply(M, V);
```

**4.1.31. Feladat.** Vizsgálja meg, hogy forrás-, illetve örvénymentes-e a

$$\underline{v}(x, y, z) = \left( \frac{x}{yz}, \frac{y}{xz}, \frac{x+y}{xy} \ln x \right)$$

vektormező!

**Megoldás:**  $v_1(x, y, z) = \frac{x}{yz}$ ,  $v_2(x, y, z) = \frac{y}{xz}$ ,

$$v_3(x, y, z) = \frac{x+y}{xy} \ln x \left( = \frac{1}{y} \ln x + \frac{1}{x} \ln x \right)$$

$$\partial_1 v_1(x, y, z) = \frac{1}{yz}, \quad \partial_2 v_1(x, y, z) = -\frac{x}{z y^2}, \quad \partial_3 v_1(x, y, z) = -\frac{x}{y z^2},$$

$$\partial_1 v_2(x, y, z) = -\frac{y}{z x^2}, \quad \partial_2 v_2(x, y, z) = \frac{1}{xz}, \quad \partial_3 v_2(x, y, z) = -\frac{y}{x z^2},$$

$$\partial_1 v_3(x, y, z) = \frac{1}{y} \frac{1}{x} + \left( -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{yx} - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2},$$

$$\partial_2 v_3(x, y, z) = -\frac{1}{y^2} \ln x, \quad \partial_3 v_3(x, y, z) = 0.$$

Mivel  $\operatorname{div} \underline{v}(x, y, z) = \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}$  nyilvánvalóan nem tűnik el minden  $\underline{r} = (x, y, z)$  pontban ezért a vektormező nem forrásmentes. Másfelől

$$\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3(\underline{r}) - \partial_3 v_2(\underline{r}) \\ \partial_3 v_1(\underline{r}) - \partial_1 v_3(\underline{r}) \\ \partial_1 v_2(\underline{r}) - \partial_2 v_1(\underline{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\ln x}{y^2} - \left( -\frac{y}{x z^2} \right) \\ -\frac{x}{y z^2} - \left( \frac{1}{yx} - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) \\ -\frac{y}{z x^2} - \left( -\frac{x}{z y^2} \right) \end{pmatrix}$$

nyilvánvalóan nem a zérusvektor minden  $\underline{r} = (x, y, z)$  esetén, azaz a vektormező nem örvénymentes.

## 4.2. Integrálszámítás

---

 \*\* Integrálás intervallumon és normáltartományon \*\*
 

---

**4.2.1. Feladat.** Határozza meg az  $f$  függvény integrálját a  $D$  tartományon!

a)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ ,  $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2; 3 \leq y \leq 4\}$ , azaz  $D = [1, 2] \times [3, 4]$  kétdimenziós zárt intervallum

b)  $f(x, y) = \sin x + 2 \sin y$ ,  $D = \{(x, y) | -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$

c)  $f(x, y, z) = x^3 z - 6yz^2 + 4z - 2$ ,  $D = [1, 2] \times [0, 3] \times [2, 6]$ , azaz a háromdimenziós zárt intervallum

**Megoldás:** A 2.1.9 és 2.1.10 Tételeket használjuk.

a)

$$\begin{aligned}
 \int_{x=1}^2 \left( \int_{y=3}^4 f(x, y) dy \right) dx &= \int_{x=1}^2 \left( \int_{y=3}^4 \frac{x}{y} dy \right) dx = \\
 &= \int_{x=1}^2 \left( \int_{y=3}^4 x \frac{1}{y} dy \right) dx = \int_{x=1}^2 \left( x \int_{y=3}^4 \frac{1}{y} dy \right) dx = \\
 &= \int_{x=1}^2 \left( x \left[ \ln |y| \right]_{y=3}^4 \right) dx = \int_{x=1}^2 \left( x (\ln 4 - \ln 3) \right) dx = \ln \frac{4}{3} \int_{x=1}^2 x dx = \\
 &= \ln \frac{4}{3} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x=1}^2 = \left( \ln \frac{4}{3} \right) \left( \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = \frac{3}{2} \ln \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 2 \sin y) dy \right) dx &= \\
 &= \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dy + \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin y dy \right) dx = \\
 &= \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( [y \cdot \sin x]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \cdot [-\cos y]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \right) dx =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \sin x - 0 \cdot \sin x + 2(-\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0)) \right) dx = \\
&= \int_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \sin x + 2 \right) dx = \left[ -\frac{\pi}{2} \cos x + 2x \right]_{x=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = (0 + \pi) - (0 - \pi) = 2\pi.
\end{aligned}$$

c) Az  $D$  intervallumon folytonos  $f$  függvény integrálját a

$$\int_{x=1}^2 \left( \int_{y=0}^3 \left( \int_{z=2}^6 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

képlettel számoljuk ki. Így

$$\begin{aligned}
&\int_{x=1}^2 \left( \int_{y=0}^3 \left( \int_{z=2}^6 x^3 z - 6yz^2 + 4z - 2 dz \right) dy \right) dx = \\
&= \int_{x=1}^2 \left( \int_{y=0}^3 \left[ x^3 \frac{z^2}{2} - 6y \frac{z^3}{3} + 4 \frac{z^2}{2} - 2z \right]_{z=2}^6 dy \right) dx = \\
&= \int_{x=1}^2 \left( \int_{y=0}^3 (18x^3 - 432y + 72 - 12) - (2x^3 - 16y + 8 - 4) dy \right) dx = \\
&= \int_{x=1}^2 \left( \int_{y=0}^3 16x^3 - 416y + 56 dy \right) dx = \int_{x=1}^2 \left[ 16x^3 y - 416 \frac{y^2}{2} + 56y \right]_{y=0}^3 dx = \\
&= \int_{x=1}^2 48x^3 - 208 \cdot 9 + 168 dx = \int_{x=1}^2 48x^3 - 1704 dx = \left[ 48 \frac{x^4}{4} - 1704x \right]_{x=1}^2 = \\
&= 192 - 3408 - (12 - 1704) = -1524.
\end{aligned}$$

**4.2.2. Feladat.** Határozza meg az  $f(x, y) = 2xy$  függvény integrálját a

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$$

tartományon.

**Megoldás:** D "x" tengelyre vonatkozó normáltartomány, így az 2.2.1 Tételt alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 \left( \int_{y=x^2}^1 2xy \, dy \right) dx &= \int_{x=0}^1 \left[ 2x \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^1 dx = \int_{x=0}^1 \left[ xy^2 \right]_{y=x^2}^1 dx = \\ &= \int_{x=0}^1 \left( x \cdot 1^2 - x \cdot (x^2)^2 \right) dx = \int_{x=0}^1 \left( x - x^5 \right) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**D felírható 'y' tengelyre vonatkozó normáltartományként is;** ekkor viszont az 2.2.2 Tételt használjuk:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}\},$$

így

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^1 \left( \int_{x=0}^{\sqrt{y}} 2xy \, dx \right) dy &= \int_{y=0}^1 \left[ 2 \frac{x^2}{2} y \right]_{x=0}^{\sqrt{y}} dy = \int_{y=0}^1 \left( 2 \frac{\sqrt{y}^2}{2} y - 2 \frac{0^2}{2} y \right) dy = \\ &= \int_{y=0}^1 y^2 \, dy = \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

---

**★★ Integráltranszformáció polárkoordinátákkal ★★**

---

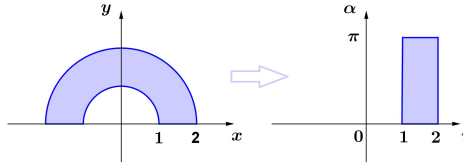
**4.2.3. Feladat.** Határozza meg az  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  függvény integrálját a  $T = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y\}$  tartományon.

**Megoldás:** A 2.4.1 Tételt alkalmazzuk.

Most  $H = \{(r, \alpha) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \alpha \leq \pi\}$ .

Mivel  $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sin^2 \alpha = r^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = r^2$  azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \iint_T f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{\alpha=0}^{\pi} \left( \int_{r=1}^2 r \ln r^2 \, dr \right) d\alpha = \\ &= \int_{\alpha=0}^{\pi} \left( \int_{r=1}^2 2r \ln r \, dr \right) d\alpha = 2 \int_{\alpha=0}^{\pi} \left( \int_{r=1}^2 r \ln r \, dr \right) d\alpha. \end{aligned}$$

62. ábra. A  $\underline{h}(H)$  és  $H$  tartományok

A belső integrál meghatározása a parciális integrálás

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

módszerével végezhető el az alábbiak szerint. Legyen  $g(r) = \ln r$  és  $f'(r) = r$ . Ekkor  $g'(r) = \frac{1}{r}$ , illetve  $f(r) = \frac{r^2}{2}$ . Így

$$\begin{aligned} \int_{r=1}^2 r \ln r \, dr &= \left[ \frac{r^2}{2} \ln r \right]_1^2 - \int_{r=1}^2 \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} \, dr = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \int_{r=1}^2 \frac{r}{2} \, dr = \\ &= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{1}{2} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ne feledkezzünk el azonban a külső integrálásról sem:

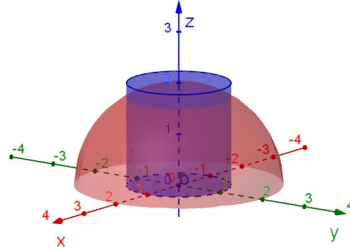
$$\begin{aligned} 2 \int_{\alpha=0}^{\pi} \left( \int_{r=1}^2 r \ln r \, dr \right) d\alpha &= 2 \int_{\alpha=0}^{\pi} 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \, d\alpha = 2 \left[ \alpha \left( 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \right) \right]_{\alpha=0}^{\pi} = \\ &= 2 \left( 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \right) \pi. \end{aligned}$$

**4.2.4. Feladat.** Határozza meg az

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

függvény integrálját a  $T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  körlap fölött, azaz számítsa ki az origó középpontú, 2 sugarú felső félgömb és a  $T$  körlapon álló egyenes körhenger közös részének térfogatát.

63. ábra. Félgömb és körhenger közös része



**Megoldás:** Az  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$  helyettesítésekkel az előző feladat megoldásában látottak szerint

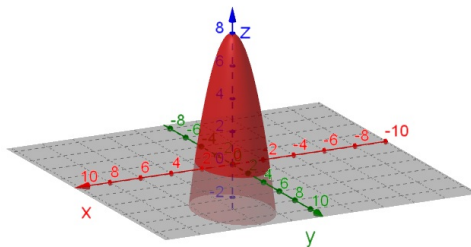
$$H = \{(r, \alpha) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$$

és így

$$\begin{aligned} \iint_T f(x, y) dx dy &= \int_{\alpha=0}^{2\pi} \left( \int_{r=0}^1 r \sqrt{4-r^2} dr \right) d\alpha = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \left( \int_{r=0}^1 (-2)r \sqrt{4-r^2} dr \right) d\alpha = -\frac{1}{2} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \left[ \frac{(4-r^2)^{3/2}}{(3/2)} \right]_{r=0}^1 d\alpha = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \left( 3^{3/2} - 4^{3/2} \right) \frac{2}{3} d\alpha = -\frac{1}{2} \left( 3^{3/2} - 4^{3/2} \right) \frac{2}{3} \int_{\alpha=0}^{2\pi} 1 d\alpha = \\ &= -\frac{1}{2} \left( 3^{3/2} - 4^{3/2} \right) \frac{2}{3} [\alpha]_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{3} \left( 3^{3/2} - 4^{3/2} \right) = \\ &= -\frac{2\pi}{3} \left( \sqrt{27} - 8 \right) = \frac{2\pi}{3} \left( 8 - \sqrt{27} \right). \end{aligned}$$

**4.2.5. Feladat.** Határozza meg a  $z = 8 - 2x^2 - 2y^2$  paraboloid és a  $z = 0$  sík közé zárt térrész térfogatát.

64. ábra. Paraboloid és sík



**Megoldás:** Legyen  $f(x, y) := 8 - 2x^2 - 2y^2$ . A  $0 = 8 - 2x^2 - 2y^2$  egyenletből  $x^2 + y^2 = 4$  következik, ezért a tartomány, ami fölött integrálnunk kell nem más, mint az origó középpontú 2 sugarú

$$T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\} \text{ körlap (vö. az előző feladat).}$$

Mivel

$$H = \{(r, \alpha) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$$

az  $x = r \cos \alpha$ ,  $y = r \sin \alpha$  helyettesítésekkel

$$\begin{aligned} \iint_T f(x, y) \, dx \, dy &= \int_{\alpha=0}^{2\pi} \left( \int_{r=0}^2 (8 - 2r^2)r \, dr \right) d\alpha = \\ &= \int_{\alpha=0}^{2\pi} \left( \int_{r=0}^2 8r - 2r^3 \, dr \right) d\alpha = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \left[ 8\frac{r^2}{2} - 2\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^2 d\alpha = \\ &= \int_{\alpha=0}^{2\pi} -8 + 16 \, d\alpha = [8\alpha]_{\alpha=0}^{2\pi} = 16\pi. \end{aligned}$$

---

 \*\* Gyakorlati alkalmazások \*\*
 

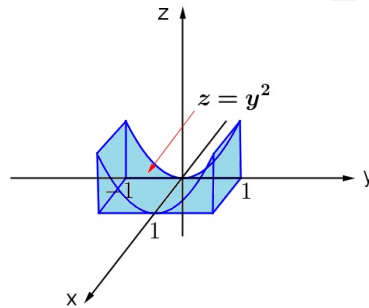
---

**4.2.6. Feladat.** Egy "H" testet az  $xy$  sík, a  $z = y^2$  hengerfelület, az  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = -1$  és  $y = 1$  síkok határolnak; a hosszúságot [dm]-ben mérjük.

- a) Számítsuk ki a test tömegét, ha a sűrűségfüggvény  $\rho(x, y, z) = 2x$  [kg/dm<sup>3</sup>].  
 b) Hány négyzetdeciméterre való festék szükséges a test befestéséhez?

**Megoldás:**

65. ábra. A tömeg kiszámításához



$$\begin{aligned}
 \text{a) } m &= \int \int \int_H \rho(x, y, z) \, dx dy dz = \int_0^1 \left( \int_{-1}^1 \left( \int_0^{y^2} 2x \, dz \right) dy \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left( \int_{-1}^1 [2xz]_0^{y^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_{-1}^1 2xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left[ 2x \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 dx = \\
 &= \int_0^1 2x \cdot \frac{1}{3} - 2x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) dx = \int_0^1 \frac{4}{3}x \, dx = \left[ \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \text{ [kg]}.
 \end{aligned}$$

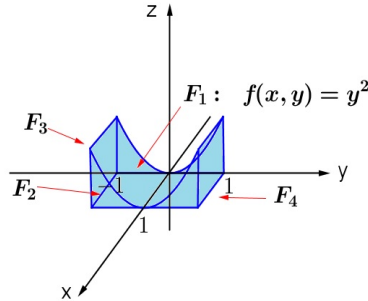
- b) A test felszínét kell kiszámítani (lásd 66 ábra).

$$F = F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_3 + F_4$$

$F_1$  kiszámítása:  $f(x, y) = y^2$ ,  $(x, y) \in [0, 1] \times [-1, 1]$ ,

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 2 \cdot y$$

66. ábra. A felszín kiszámításához



$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int \int_{[0,1] \times [-1,1]} \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dx \, dy = \\
 &= \int_0^1 \left( \int_{-1}^1 \sqrt{(2y)^2 + 1} \, dy \right) dx = (\star)
 \end{aligned}$$

Először a helyettesítéssel integrálás segítségével kiszámítjuk a belső integrált.

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{(2y)^2 + 1} \, dy &= \left[ \begin{array}{l} 2y = \operatorname{sh} t \Rightarrow y = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t; \quad t = \operatorname{arsh} 2y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \operatorname{ch} t \Rightarrow dy = \frac{1}{2} \operatorname{ch} t \, dt \end{array} \right] = \\
 &= \int \sqrt{(\operatorname{sh} t)^2 + 1} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ch} t \, dt = [ \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 ] = \frac{1}{2} \cdot \int \operatorname{ch}^2 t \, dt = \\
 &= [ \operatorname{ch}^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2t ] = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2t \, dt = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} \right) + c = \frac{t}{4} + \frac{\operatorname{sh} 2t}{8} + c = \\
 &= [ \operatorname{sh} 2t = 2 \cdot \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t = 2 \cdot \operatorname{sh} t \cdot \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} ] = \\
 &= \frac{\operatorname{arsh} 2y}{4} + \frac{2 \cdot 2y \cdot \sqrt{1 + (2y)^2}}{8} + c
 \end{aligned}$$

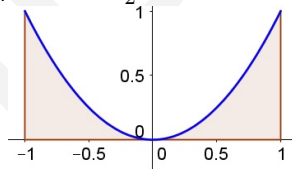
$$\begin{aligned}
 &= \frac{\operatorname{arsh} 2y}{4} + \frac{y \cdot \sqrt{1 + (2y)^2}}{2} + c \\
 (\star) &= \int_0^1 \left[ \frac{\operatorname{arsh} 2y}{4} + \frac{y \cdot \sqrt{1 + (2y)^2}}{2} \right]_{-1}^1 dx = \\
 &= \int_0^1 \left( \frac{\operatorname{arsh} 2}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) - \left( \frac{\operatorname{arsh}(-2)}{4} + \frac{-\sqrt{5}}{2} \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \frac{\operatorname{arsh} 2}{2} + \sqrt{5} dx = \left[ \left( \frac{\operatorname{arsh} 2}{2} + \sqrt{5} \right) \cdot x \right]_0^1 = \frac{\operatorname{arsh} 2}{2} + \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

Így

$$F_1 = \frac{\operatorname{arsh} 2}{2} + \sqrt{5} \approx 2.9579 \text{ [dm}^2\text{]}.$$

**$F_2$  kiszámítása:**

67. ábra.  $F_2$  kiszámításához



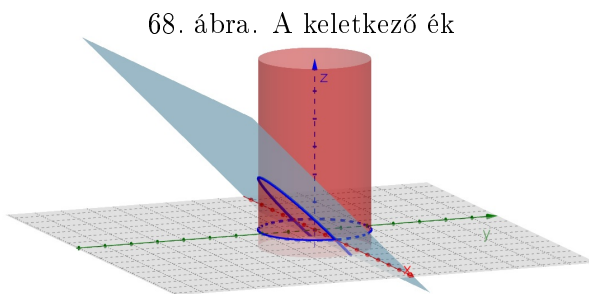
$$F_2 = \int_{-1}^1 y^2 dy = \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left( -\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \text{ [dm}^2\text{]}.$$

A test befestésére kb

$$F = F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_3 + F_4 \approx 2.9579 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 1 + 2 \approx 8.29$$

négyzetdeciméterre való festék szükséges.

**4.2.7. Feladat.** Egy "H" éket az  $x^2 + y^2 = 1$  hengerből a  $z = -y$  és  $z = 0$  síkok vágják ki. Számítsuk ki az ék tömegét, ha a sűrűségfüggvény  $\rho(x, y, z) = z^2$ .



**Megoldás:**

$$\begin{aligned}
 m &= \int \int \int_H \rho(x, y, z) \, dx dy dz = \int \int_D \left( \int_0^{-y} z^2 \, dz \right) \, dx dy = (\star\star) \\
 D &= \{(r, \alpha) : r \in [0, 1], \alpha \in [\pi, 2\pi]\} \\
 (\star\star) &= \int \int_D \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^{-y} \, dx dy = \int \int_D -\frac{y^3}{3} \, dx dy = -\frac{1}{3} \int \int_D y^3 \, dx dy = \\
 &= -\frac{1}{3} \int_{\pi}^{2\pi} \left( \int_0^1 (r \cdot \sin \alpha)^3 \cdot r \, dr \right) \, d\alpha = -\frac{1}{3} \int_{\pi}^{2\pi} \left( \int_0^1 r^4 \cdot \sin^3 \alpha \, dr \right) \, d\alpha = \\
 &= -\frac{1}{3} \int_{\pi}^{2\pi} \left[ \frac{r^5}{5} \cdot \sin^3 \alpha \right]_0^1 \, d\alpha = -\frac{1}{3} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{5} \cdot \sin^3 \alpha \, d\alpha = \\
 &= -\frac{1}{15} \int_{\pi}^{2\pi} \sin \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) \, d\alpha = -\frac{1}{15} \int_{\pi}^{2\pi} \sin \alpha - \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \, d\alpha = \\
 &= -\frac{1}{15} \cdot \left[ -\cos \alpha + \frac{\cos^3 \alpha}{3} \right]_{\pi}^{2\pi} = \\
 &= -\frac{1}{15} \cdot \left[ \left( -1 + \frac{1}{3} \right) - \left( -(-1) + \frac{-1}{3} \right) \right] = \frac{4}{45}
 \end{aligned}$$

**4.2.8. Feladat.** Határozzuk meg szoftver segítségével a 4.2.7 Feladatban szereplő ék súlypontját (lásd 2.3.6 Példa)!

**Számítás a Maple programmal:** Megjegyezzük, hogy

$$m = \int_{x=-1}^1 \left( \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^0 \left( \int_0^{-y} z^2 dz \right) dy \right) dx.$$

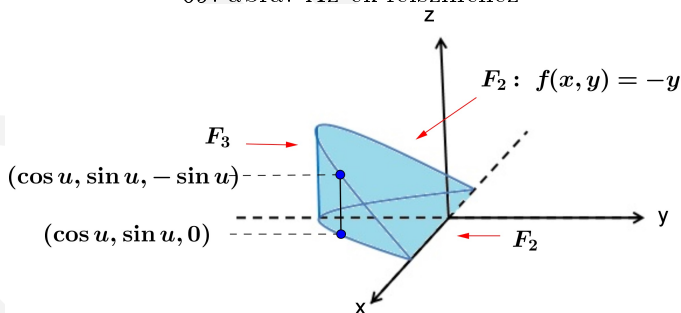


```
m := int(int(int(z^2, z = 0 .. -y), y = -sqrt(1-x^2) .. 0), x = -1 .. 1)
x[S] := (int(int(int(x*z^2, z = 0 .. -y), y = -sqrt(1-x^2) .. 0), x = -1 .. 1))/m;
y[S] := (int(int(int(y*z^2, z = 0 .. -y), y = -sqrt(1-x^2) .. 0), x = -1 .. 1))/m;
z[S] := (int(int(int(z*(z^2), z = 0 .. -y), y = -sqrt(1-x^2) .. 0), x = -1 .. 1))/m;
S = (x[S], y[S], z[S]);
```

A program által szolgáltatott eredmény:  $S = \left(0, -\frac{15}{64} \pi, \frac{45}{256} \pi\right)$ .

**4.2.9. Feladat.** Számítsuk ki a 4.2.7 Feladatban szereplő ék felszínét!

69. ábra. Az ék felszínéhez



**Megoldás:**  $F = F_1 + F_2 + F_3$ ,  $F_1 = \frac{12 \cdot \pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$F_2$  kiszámítása:

$$f(x, y) = -y, \quad T = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq 0\}$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= \int \int_T \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dx dy = \int \int_T \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1} \, dx dy = \\
 &= \int \int_T \sqrt{2} \, dx dy = \sqrt{2} \cdot \int \int_T 1 \, dx dy = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$F_3$  kiszámítása:  $u \in [\pi, 2\pi]$ ,  $v \in [0, 1]$

$$\underline{r}(u, v) = v \cdot (\cos u, \sin u, 0) + (1 - v) \cdot (\cos u, \sin u, -\sin u)$$

$$\underline{r}(u, v) = (\cos u, \sin u, (v - 1) \cdot \sin u)$$

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}(u, v) = (-\sin u, \cos u, (v - 1) \cdot \cos u), \quad \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}(u, v) = (0, 0, \sin u)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}(u, v) &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin u & \cos u & (v - 1) \cdot \cos u \\ 0 & 0 & \sin u \end{vmatrix} = \\
 &= (\cos u \cdot \sin u, \sin^2 u, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3 &= \int \int_{[\pi, 2\pi] \times [0, 1]} \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}(u, v) \right| \, dudv = \\
 &= \int \int_{[\pi, 2\pi] \times [0, 1]} \sqrt{\cos^2 u \cdot \sin^2 u + (\sin^2 u)^2} \, dudv = \\
 &= \int \int_{[\pi, 2\pi] \times [0, 1]} \sqrt{\sin^2 u \cdot (\cos^2 u + \sin^2 u)} \, dudv = \\
 &= \int \int_{[\pi, 2\pi] \times [0, 1]} |\sin u| \, dudv = \int_{v=0}^1 \left( \int_{\pi}^{2\pi} -\sin u \, du \right) dv = \\
 &= \int_{v=0}^1 [\cos u]_{\pi}^{2\pi} dv = \int_{v=0}^1 1 - (-1) dv = [2v]_0^1 = 2
 \end{aligned}$$

**4.2.10. Feladat.** Határozzuk meg szoftverrel a 4.2.7 Feladatban szereplő ék felszínét!

**Számítás a Maple programmal:** A feladat megoldásához először is a munkalapon behívjuk a "vektorkalkulus" csomagot a *with(VectorCalculus)*; paranccsal. A 4.2.9 feladat megoldásában szereplő  $F_3$  felszín meghatározása:

A 4.2.9 feladat megoldásában szereplő  $F_2$  felszín meghatározása:



```
with(VectorCalculus);
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]);
S := PositionVector([cos(u), sin(u), (1-v)*sin(u)]);
F := Surface(S, u = Pi .. 2*Pi, v = 0 .. 1);
Simplify(SurfaceInt(1, [x, y, z] = F, 'inert'));
SurfaceInt(1, [x, y, z] = F);
```



```
with(VectorCalculus);
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]);
f:=-y;
a:=sqrt(diff(f,x)^2+diff(f,y)^2+1);
int(a,[x,y]=T);
```

---

\*\* Görbementi és felületi integrál \*\*

---

**4.2.11. Feladat.** Határozzuk meg a  $\underline{v}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$  vektormező integrálját az  $A(1, -2, 3)$ ,  $B(2, 1, 4)$  végpontú szakaszon!

**Megoldás:** Az integrál kiszámításához a 2.6.1 Tételt használjuk. Az  $AB$  szakasz tartóegyenésének egy irányvektora  $\vec{AB} = (1, 3, 1)$ , így az  $AB$  szakasz az alábbi alakban adható meg:

$G: t \rightarrow \underline{r}(t) = (1 + t, -2 + 3t, 3 + t), t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \int_G \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} &= \int_0^1 \underline{v}(1 + t, -2 + 3t, 3 + t) \bullet (1, 3, 1) \, dt = \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -2 + 3t + 3 + t \\ 1 + t + 3 + t \\ 1 + t + (-2) + 3t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 + 4t \\ 4 + 2t \\ -1 + 4t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \, dt = \\ &= \int_0^1 1 \cdot (1 + 4t) + 3 \cdot (4 + 2t) + 1 \cdot (-1 + 4t) \, dt = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 14t + 12 \, dt = \left[ 14 \frac{t^2}{2} + 12t \right]_0^1 = [7t^2 + 12t]_0^1 = 7 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 0 = 19$$

**4.2.12. Feladat.** Határozzuk meg szoftverrel a 4.2.11 Feladatban szereplő görbementi integrál értékét!

Számítás a Maple programmal:



```
with(VectorCalculus);
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]);
G := PositionVector([1+t, -2+3*t, 3+t]);
Gamma := Path(G, t = 0 .. 1);
v := VectorField(<y+z, x+z, x+y>);
simplify(LineInt(v, Gamma, 'inert'));
LineInt(v, Gamma);
```

**4.2.13. Feladat.** Határozza meg a  $\underline{v}(x, y, z) = (xy, z^2, y)$  vektormező integrálját az  $\underline{r}(u, v) = (u, uv, v^2)$ ,  $(u, v) \in [-1, 2] \times [0, 1]$  felületdarabon!

**Megoldás:** Az integrált a 2.6.5 Tétel alapján számítjuk. A felületet  $F$ -fel jelölve,  $[-1, 2] \times [0, 1]$ -t pedig  $D$ -vel

$$\int_F \underline{v}(\underline{r}) \, df = \int \int_D \underline{v}(u, uv, v^2) \bullet \left( \frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial v} \right) \, dudv = (*)$$

$$\frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial u} = (1, v, 0), \quad \frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial v} = (0, u, 2v)$$

$$\frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}(u, v)}{\partial v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & v & 0 \\ 0 & u & 2v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} \\ 1 & v \\ 0 & u \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot v^2 \cdot \underline{i} + 0 \cdot \underline{j} + u \cdot \underline{k} - (0 \cdot \underline{k} + 0 \cdot \underline{i} + 2 \cdot v \cdot \underline{j}) = 2v^2 \underline{i} - 2v \underline{j} + u \underline{k} = \begin{pmatrix} 2v^2 \\ -2v \\ u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{v}(u, uv, v^2) &= \begin{pmatrix} u \cdot uv \\ (v^2)^2 \\ uv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2v \\ v^4 \\ uv \end{pmatrix} \\ (\star) &= \int \int_D \begin{pmatrix} u^2v \\ v^4 \\ uv \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2v^2 \\ -2v \\ u \end{pmatrix} dudv = \int \int_D 2u^2v^3 - 2v^5 + u^2v \, dudv = \\ &= \int_{u=-1}^2 \left( \int_{v=0}^1 2u^2v^3 - 2v^5 + u^2v \, dv \right) du = \\ &= \int_{u=-1}^2 \left[ 2u^2 \frac{v^4}{4} - 2 \frac{v^6}{6} + u^2 \frac{v^2}{2} \right]_{v=0}^1 du = \\ &= \int_{u=-1}^2 \left[ \frac{1}{2}u^2v^4 - \frac{1}{3}v^6 + \frac{1}{2}u^2v^2 \right]_{v=0}^1 du = \int_{u=-1}^2 \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}u^2 - 0 \, du = \\ &= \int_{u=-1}^2 u^2 - \frac{1}{3} \, du = \left[ \frac{u^3}{3} - \frac{1}{3}u \right]_{u=-1}^2 = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} - \left( \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} \right) = 2 \end{aligned}$$

**4.2.14. Feladat.** Határozzuk meg szoftverrel a 4.2.13 Feladatban szereplő felületi integrál értékét!

**Számítás a Maple programmal:**



```
with(VectorCalculus);
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]);
r:=(u,v)->[u, u*v, v^2]
diff(r(u, v), u);
diff(r(u, v), v);
CrossProduct(Vector(diff(r(u, v), u)), Vector(diff(r(u, v), v)));
p := subs(x = u, y = u*v, z = v^2, [x*y, z^2, y]);
DotProduct(Vector(p), Vector(CrossProduct(Vector(diff(r(u, v), u)), Vector(diff(r(u, v), v))));
felint := int(int(2*u^2*v^3-2*v^5+u^2*v, v = 0 .. 1), u = -1 .. 2);
```

**4.2.15. Feladat.** Számítsuk ki a  $\underline{v}(x, y, z) = (xy^2z, x^2yz, \frac{1}{2}x^2y^2)$  vektormező  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 0$  kör mentén vett vonalintegrálját!

**Megoldás:**  $G : \underline{r}(t) = (2 \cdot \cos t, 2 \cdot \sin t, 0) \quad t \in [0, 2\pi],$

$$\underline{r}'(t) = (-2 \cdot \sin t, 2 \cdot \cos t, 0)$$

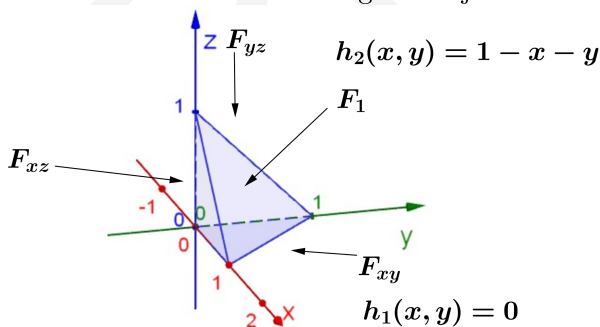
$$\begin{aligned} \underline{v}(\underline{r}(t)) &= \underline{v}(2 \cdot \cos t, 2 \cdot \sin t, 0) = (0, 0, \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \cos^2 t \cdot 4 \cdot \sin^2 t) = \\ &= (0, 0, 8 \cdot \cos^2 t \cdot \sin^2 t) \end{aligned}$$

$$\int_G \underline{v}(\underline{r}) \, d\underline{r} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(\underline{r}(t)) \bullet \underline{r}'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0.$$

**4.2.16. Feladat.** Számítsuk ki a Gauss-Osztrogradskij tételben szereplő integrálokat, ha a vektormező  $\underline{v}(x, y, z) = (xy, zx, yz)$  és a térrészt az  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  és  $x + y + z = 1$  síkok határolják.

**Megoldás:** A Gauss-Osztrogradskij tétel a 2.6.6 Tétel.

70. ábra. A Gauss-Osztrogradskij tételhez



$$\int_F \underline{v} \, df = \int_{F_1} \underline{v} \, df + \int_{F_2} \underline{v} \, df + \int_{F_3} \underline{v} \, df + \int_{F_4} \underline{v} \, df$$

$$* F_1 : \underline{r}_1(u, v) = (u, v, 1-u-v) \quad D_1 = \{(u, v) : u \in [0, 1], 0 \leq v \leq 1-u\}$$

$$\frac{\partial \underline{r}_1}{\partial u}(u, v) = (1, 0, -1) \quad \frac{\partial \underline{r}_1}{\partial v}(u, v) = (0, 1, -1)$$

$$\frac{\partial \underline{r}_1(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}_1(u, v)}{\partial v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

$$\underline{v}(\underline{r}_1(u, v)) = (uv, (1 - u - v)u, v(1 - u - v))$$

$$* F_{xz} : \underline{r}_{xz}(u, v) = (u, 0, v) \quad D_{xz} = \{(u, v) : u \in [0, 1], 0 \leq v \leq 1 - u\}$$

$$\underline{v}(\underline{r}_{xz}(u, v)) = (0, uv, 0)$$

$$* F_{yz} : \underline{r}_{yz}(u, v) = (0, u, v) \quad D_{yz} = \{(u, v) : u \in [0, 1], 0 \leq v \leq 1 - u\}$$

$$\underline{v}(\underline{r}_{yz}(u, v)) = (0, 0, uv)$$

$$* F_{xy} : \underline{r}_{xy}(u, v) = (u, v, 0) \quad D_{xy} = \{(u, v) : u \in [0, 1], 0 \leq v \leq 1 - u\}$$

$$\underline{v}(\underline{r}_{xy}(u, v)) = (uv, 0, 0)$$

Mivel  $\int_F \underline{v} \, df =$   
 $= \int \int_{D_1} \underline{v}(\underline{r}_1(u, v)) \bullet (1, 1, 1) \, dudv + \int \int_{D_{xz}} \underline{v}(\underline{r}_{xz}(u, v)) \bullet (0, -1, 0) \, dudv +$   
 $+ \int \int_{D_{yz}} \underline{v}(\underline{r}_{yz}(u, v)) \bullet (-1, 0, 0) \, dudv + \int \int_{D_{xy}} \underline{v}(\underline{r}_{xy}(u, v)) \bullet (0, 0, -1) \, dudv,$

$$\int_F \underline{v} \, df = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} (uv, u - u^2 - uv, v - uv - v^2) \bullet (1, 1, 1) \, dudv +$$

$$+ \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} (0, uv, 0) \bullet (0, -1, 0) \, dudv +$$

$$+ \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} (0, 0, uv) \bullet (-1, 0, 0) \, dudv +$$

$$+ \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} (uv, 0, 0) \bullet (0, 0, -1) \, dudv$$

$$\int_F \underline{v} \, df = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} uv + u - u^2 - uv + v - uv - v^2 \, dudv +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} -uv \, dudv + 0 + 0 = \\
& = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} (u+v) - (u^2 + 2uv + v^2) \, dudv = \\
& = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^{1-u} (u+v) - (u+v)^2 \, dudv = \\
& \int_{u=0}^1 \left[ \frac{(u+v)^2}{2 \cdot 1} - \frac{(u+v)^3}{3 \cdot 1} \right]_{v=0}^{1-u} du = \int_{u=0}^1 \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left( \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right) du = \\
& = \int_{u=0}^1 \frac{1}{6} - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 du = \left[ \frac{1}{6}u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{12}u^4 \right]_{u=0}^1 = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Most a Gauss-Osztrogradszkij tételben szereplő jobb oldali integrált számoljuk:

$$\operatorname{div} \underline{v}(x, y, z) = \partial_1 v_1(x, y, z) + \partial_2 v_2(x, y, z) + \partial_3 v_3(x, y, z) = y + 0 + y = 2y$$

$$D = \{(x, y) : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

Másrészt a térrész felfogható  $z$  tengelyre vonatkozó normáltartománynak (lásd 70. ábra), így

$$\begin{aligned}
\int_V \operatorname{div} \underline{v} \, dV &= \int \int_D \left( \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} \operatorname{div} \underline{v}(x, y, z) \, dz \right) dx dy = \\
& \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} 2y \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} 2y(1-x-y) dy \right) dx = \\
& = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (2y - 2xy - 2y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[ y^2 - xy^2 - \frac{2}{3}y^3 \right]_0^{1-x} dx = \\
& = \int_0^1 (1-x)^2 - x(1-x)^2 - \frac{2}{3}(1-x)^3 dx = \int_0^1 (1-x)^2(1-x) - \frac{2}{3}(1-x)^3 dx = \\
& = \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3 dx = \frac{1}{3} \cdot \left[ \frac{(1-x)^4}{4 \cdot (-1)} \right]_0^1 = \\
& = -\frac{1}{12} \cdot [(1-x)^4]_0^1 = -\frac{1}{12} \cdot (0 - 1) = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

### 4.3. Differenciálegyenletek

---

\*\* Közvetlenül integrálható és szeparábilis DE-k \*\*

---

**4.3.1. Feladat.** *Vizsgáljuk meg, hogy az  $xy'(x) = 2y(x)$  egyenletnek az  $y(x) = cx^2$  függvények megoldását alkotják-e minden  $c$  valós szám esetén.*

**Megoldás:** Behelyettesítve az egyenlet bal oldalába a megadott függvényt azt kapjuk, hogy  $xy'(x) = x(cx^2)' = x \cdot 2cx = 2cx^2$ ; behelyettesítve az egyenlet jobb oldalába, azt kapjuk, hogy  $2y(x) = 2cx^2$ , így a bal oldalon és a jobb oldalon álló kifejezés megegyezik tetszőleges  $c \in \mathbb{R}$  esetén, tehát az  $y(x) = cx^2$  alakú függvények megoldásai a megadott differenciálegyenletnek.

**4.3.2. Feladat.** *Oldjuk meg az  $y'(x) = \cos 2x$ ,  $y(0) = 1$  kezdetiérték feladatot!*

**Megoldás:** A differenciálegyenlet közvetlenül integrálható:

$$y(x) = \frac{\sin 2x}{2} + c$$

adódik. Mivel  $y(0) = 1$ , ezért  $1 = y(0) = \frac{\sin 0}{2} + c = c$ , így  $c = 1$ , tehát a kezdetiérték probléma megoldása:

$$y(x) = \frac{\sin 2x}{2} + 1.$$

**4.3.3. Feladat.** *Oldjuk meg az  $y'(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ,  $y(0) = 2$  kezdetiérték feladatot!*

**Megoldás:** A differenciálegyenlet közvetlenül integrálható:

$$y(x) = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$$

adódik. Mivel  $y(0) = 2$ , ezért  $2 = y(0) = \frac{1}{2} \ln 1 + c = c$ , amiből azt kapjuk, hogy  $c = 2$ , tehát a kezdetiérték probléma megoldása:

$$y(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2.$$

**4.3.4. Feladat.** *Oldjuk meg az  $y'(x) = x \cdot e^x$ ,  $y(0) = 3$  kezdetiérték feladatot! Megoldásunkat ellenőrizzük!*

**Megoldás:** Az egyenlet közvetlenül integrálható, így

$$y(x) = \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c.$$

Továbbá  $3 = y(0) = -e^0 + c = -1 + c$ , így  $c = 4$ , tehát a kezdetiérték feladat megoldása:

$$y(x) = (x - 1)e^x + 4.$$

A megoldás ellenőrzéséhez helyettesítsük be a kapott függvényt az eredeti egyenletbe

$$((x - 1)e^x + 4)' = e^x + (x - 1)e^x = xe^x, \quad y(0) = -1 \cdot e^0 + 4 = 3.$$

**4.3.5. Feladat.** *Valaki egy egyenes utca A pontjából indul az autójával és egyenletesen gyorsulva 10 másodperc alatt ér az utca B pontjába, ahol a sebessége 72 [km/h]. Határozzuk meg az A és B pontok távolságát!*

**Megoldás:** Egyenes vonalú mozgás esetén egy koordinátatengelyt felvéve egy koordinátával (előjeles mennyiség) természetes módon azonosítható a hely. A hely változási gyorsasága a sebesség, a sebesség változási gyorsasága a gyorsulás. Mivel az autó egyenletesen gyorsul, így konstans a gyorsulás és

$$v(t) = \int a dt = a \cdot t + c_1,$$

$$s(t) = \int v(t) dt = \frac{a}{2} \cdot t^2 + c_1 \cdot t + c_2,$$

ahol  $t = 0$  helyettesítéssel  $v(0) = c_1$  és így  $t = 0$  helyettesítéssel  $s(0) = c_2$ . Az autó az A pontból indul, ekkor  $s(0) = 0$  és  $v(0) = 0$ . Az A és B pontok távolsága ekkor  $s(10)$ , ezt kell meghatározni. A fentieket egyeztetve

$$v(t) = a \cdot t, \quad s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2.$$

Mivel  $72 \left[ \frac{km}{h} \right] = 20 \left[ \frac{m}{s} \right] = v(10) = a \cdot 10$ , így  $a = 2$ . Ezt felhasználva  $s(t) = t^2$ , melyből  $s(10) = 10^2 = 100[m]$ .

**4.3.6. Feladat.** Oldjuk meg az  $y'(x) = 2x \cdot y(x)$ ,  $y(0) = 1$  differenciálegyenletet!

**Megoldás:** Az egyenlet szeparábilis,  $g(x) = 2x$ ,  $h(y) = y$ , ezért fennáll az  $\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx$  (lásd 3.2.1 Állítás) egyenlet. Elvégezve az integrálásokat  $\ln|y| = x^2 + c$  adódik, amiből

$$y = \pm e^{x^2+c} = \pm e^{x^2} \cdot e^c = C \cdot e^{x^2} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Másrészt  $y(0) = 1$ , így  $1 = y(0) = C \cdot e^0 = C$ , tehát a kezdetiérték feladat megoldása  $y(x) = e^{x^2}$ .

**4.3.7. Feladat.** Oldjuk meg az  $y' = \frac{\sin 2x}{y^4}$  differenciálegyenletet!

**Megoldás:** Mivel  $y' = \frac{\sin 2x}{y^4} = \sin 2x \cdot \frac{1}{y^4}$ , ezért  $g(x) = \sin 2x$ ,  $h(y) = 1/y^4$ . Felhasználva az  $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$  összefüggést kapjuk, hogy

$$\int y^4 dy = \int \sin 2x dx.$$

Ebből

$$\frac{y^5}{5} = -\frac{\cos 2x}{2} + c, \quad \text{azaz } y(x) = \sqrt[5]{5 \left( c - \frac{\cos 2x}{2} \right)}.$$

**4.3.8. Feladat.** Oldjuk meg az  $y' = -x \cdot e^{3y}$  differenciálegyenletet!

**Megoldás:** A  $g(x) = -x$ ,  $h(y) = e^{3y}$  jelöléseket bevezetve  $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$  azaz  $\int \frac{1}{e^{3y}} dy = \int -x dx$ . Az egyenlet bal oldalán lévő integrandus  $e^{-3y}$ , így integrálva mindkét oldalt  $\frac{e^{-3y}}{-3} = -\frac{x^2}{2} + c$ . Szorozva  $-3$ -mal és  $C = -3 \cdot c$  jelöléssel  $e^{-3y} = 3 \cdot \frac{x^2}{2} + C$ . Innen

$$y(x) = -\frac{1}{3} \cdot \ln \left( \frac{3}{2} x^2 + C \right).$$

**4.3.9. Feladat.** Oldjuk meg az

$$y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$$

differenciálegyenletet!

**Megoldás:** Az egyenlet szeparábilis,  $g(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $h(y) = \operatorname{tg} y$ , ezért fennáll az  $\int \frac{1}{\operatorname{tg} y} dy = \int \operatorname{tg} x dx$  egyenlet. A bal oldalt átalakítva  $f'/f$  alakú integrált kapunk:

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} y} dy = \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \ln |\sin y| + c_1.$$

A jobb oldalt hasonlóan integráljuk:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| + c_2.$$

Bevezetve a  $c = c_2 - c_1$  jelölést kapjuk, hogy

$$\ln |\sin y| = - \ln |\cos x| + c.$$

Ebből az egyenletből kifejezzük az  $y$ -t:

$$\begin{aligned} \ln |\sin y| &= - \ln |\cos x| + c \\ \sin y &= \pm e^{-\ln |\cos x| + c} \Rightarrow \sin y = \pm e^{-\ln |\cos x|} \cdot e^c \\ \sin y &= e^{\ln |\cos x|^{-1}} \cdot C \Rightarrow \sin y = \frac{1}{\cos x} \cdot C \end{aligned}$$

$$y(x) = \arcsin \left( \frac{C}{\cos x} \right).$$

---

 \*\* Elsőrendű lineáris homogén, Hiányos másodrendű DE-k \*\*
 

---

A 3.2 alfejezetben leírtakat alkalmazzuk a megoldásokhoz.

**4.3.10. Feladat.** *Oldjuk meg az*

$$y''(x) - 8x = \sin 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

*kezdetiérték feladatot!*

**Megoldás:**  $p'(x) - 8x = \sin 2x$ , azaz  $p'(x) = 8x + \sin 2x$  közvetlenül integrálható,

$$p(x) = \int 8x + \sin 2x \, dx = 4x^2 - \frac{\cos 2x}{2} + c.$$

$p(x) = y'(x)$  miatt  $y'(x) = 4x^2 - \frac{\cos 2x}{2} + c$  közvetlenül integrálható.

Így a DE általános megoldása:  $y(x) = \frac{4}{3} \cdot x^3 - \frac{\sin 2x}{4} + cx + d$  ( $c, d \in \mathbb{R}$ ).

$y(0) = 2$  így az általános alakból kapjuk, hogy  $d = 2$ ; másrészt

$$y'(0) = 1 \quad \text{így} \quad 1 = p(0) = -\frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

következik. A kezdetiérték feladat megoldása:

$$y(x) = \frac{4}{3} \cdot x^3 - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{2} \cdot x + 2.$$

**4.3.11. Feladat.** *Oldjuk meg az*

$$x \cdot y''(x) = y'(x), \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$$

*kezdetiérték feladatot!*

**Megoldás:**  $x \cdot p'(x) = p(x) \Rightarrow p'(x) - \frac{1}{x} \cdot p(x) = 0$  elsőrendű lineáris homogén (speciálisan szeparábilis: lásd 3.3.1 állítás.)

$$\Rightarrow p(x) = C \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} = C \cdot e^{\ln|x|} = C \cdot |x|$$

Mivel  $y'(x) = p(x) = C \cdot |x|$  és az egyenletben  $y$  második deriváltja is szerepel, ezért vagy  $C = 0$  (ami ellentmond a kezdeti feltételeknek), vagy  $y'(x) = C \cdot x$ . Utóbbi közvetlenül integrálható, így a DE általános megoldása:  $y(x) = C \frac{x^2}{2} + D$  ( $C, D \in \mathbb{R}$ ).

$$y'(x) = C \cdot x \Rightarrow 2 = y'(1) = C \cdot 1 \Rightarrow C = 2$$

$$0 = y(1) = \frac{C}{2} + D = 1 + D \Rightarrow D = -1$$

A kezdetiérték feladat megoldása:

$$y(x) = x^2 - 1.$$

**4.3.12. Feladat.** *Oldjuk meg az  $y''(x) = 2 \cdot y'(x) \cdot y(x)$  differenciálegyenletet!*

**Megoldás:** A helyettesítéssel  $p'(y) \cdot p(y) = 2 \cdot p(y) \cdot y$  differenciálegyenlethez jutunk. Látható, hogy  $p = 0$  megoldás. Most tegyük fel, hogy  $p \neq 0$ . Ekkor  $p'(y) = 2 \cdot y$ , mely közvetlenül integrálható, így  $p(y) = y^2 + c$ . Mivel  $y' = p(y)$ , ezért  $y' = y^2 + c \Rightarrow y' = 1 \cdot (y^2 + c)$ , ami egy szeparábilis differenciálegyenlet.

A  $h(y) = y^2 + c$ ,  $g(x) = 1$  jelölésekkel  $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$ , azaz

$$\int \frac{1}{y^2 + c} dy = \int 1 dx.$$

$\int 1 dx = x + d_1$ , másrészt

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2 + c} dy &= \frac{1}{c} \int \frac{1}{\frac{y^2}{c} + 1} dy = \frac{1}{c} \int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right)^2 + 1} dy = \\ &= \frac{1}{c} \cdot \sqrt{c} \int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{c}}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} dy = \\ &= \frac{1}{c} \cdot \sqrt{c} \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\sqrt{c}} \right) + d_2 = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\sqrt{c}} \right) + d_2. \end{aligned}$$

Bevezetve a  $d := d_1 - d_2$  jelölést

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arctg} \left( \frac{y}{\sqrt{c}} \right) = x + d.$$

Kifejezve  $y$ -t

$$y(x) = \sqrt{c} \operatorname{tg}(\sqrt{c}x + \sqrt{c}d) = C \operatorname{tg}(Cx + D).$$

**4.3.13. Feladat.** Oldjuk meg az  $y(x) \cdot y''(x) = (y'(x))^2$  differenciálegyenletet!

**Megoldás:** A helyettesítéssel  $y \cdot p'(y) \cdot p(y) = (p(y))^2$  differenciálegyenlethez jutunk. Látható, hogy  $p = 0$  megoldás. Most tegyük fel, hogy  $p \neq 0$ . Ekkor  $y \cdot p'(y) = p(y)$  adódik. Ez egy elsőrendű lineáris homogén (speciálisan szeparábilis) egyenlet:  $p'(y) - \frac{1}{y} \cdot p(y) = 0$ . Így

$$p(y) = C \cdot e^{-\int \frac{1}{y} dy} = C \cdot e^{\ln|y|} = C \cdot |y|$$

Mivel  $y' = p(y)$ , ezért az  $y' = C \cdot y$  - elsőrendű lineáris homogén egyenlet:  $y' - C \cdot y = 0$

$$y(x) = D \cdot e^{-\int -C dx} = D \cdot e^{C \cdot x}$$

---

★★ Elsőrendű lineáris inhomogén DE-k ★★

---

A megoldáshoz a 3.3.2 Megjegyzésben leírtakat használjuk.

**4.3.14. Feladat.** Oldjuk meg az  $y'(x) = 2x \cdot y(x) + e^{x^2}$  differenciálegyenletet!

**Megoldás:** A DE elsőrendű, lineáris, inhomogén.

1. a  $y'(x) - 2xy(x) = 0$  homogén rész általános ( $y_h$ ) megoldása:

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int -2x dx} = C \cdot e^{x^2}$$

2. az inhomogén DE egy  $(y_p)$  partikuláris megoldását  $y_p(x) = C(x) \cdot e^{x^2}$  alakban keressük, így

$$(C(x) \cdot e^{x^2})' = 2x \cdot C(x) \cdot e^{x^2} + e^{x^2}$$

egyenlőségnek fenn kell állnia.

Elvégezve a bal oldalon a deriválást

$$C'(x) \cdot e^{x^2} + C(x) \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 2x \cdot C(x) \cdot e^{x^2} + e^{x^2},$$

a variált konstans tartalmazó tag (a  $C(x)$ -et tartalmazó) mindig kiesik, azaz

$$C'(x) \cdot e^{x^2} = e^{x^2},$$

melyből  $C'(x) = 1$ . Így  $C(x) = x$ . (Elegendő egy primitív függvényt megadnunk, mivel az inhomogén egyenlet egy megoldását kerestük.) Tehát  $y_p(x) = x \cdot e^{x^2}$ .

3. az inhomogén DE általános megoldásának meghatározása:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} = (C + x) \cdot e^{x^2}.$$

**4.3.15. Feladat.** *Oldjuk meg az  $y'(x) = y(x) + x$ ,  $y(0) = 1$  kezdetiérték feladatot!*

**Megoldás:** A DE elsőrendű, lineáris, inhomogén.

1. az  $y'(x) - y(x) = 0$  homogén rész általános  $(y_h)$  megoldása:

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int -1 dx} = C \cdot e^x$$

2. az inhomogén DE egy  $(y_p)$  partikuláris megoldását  $y_p(x) = C(x) \cdot e^x$  alakban keressük, így

$$(C(x) \cdot e^x)' = C(x) \cdot e^x + x$$

egyenlőségnek fenn kell állnia. Elvégezve a bal oldalon a deriválást

$$C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x = C(x) \cdot e^x + x,$$

azaz

$$C'(x) \cdot e^x = x \Rightarrow C'(x) = \frac{x}{e^x} = x \cdot e^{-x},$$

melyből a parciális integrálás módszerével

$$C(x) = \int x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = (-x - 1) \cdot e^{-x}$$

(Elegendő egy primitív függvényt megadnunk, mivel az inhomogén egyenlet egy megoldását kerestük.) Tehát  $y_p(x) = (-x - 1)e^{-x} \cdot e^x = -x - 1$ .

3. az inhomogén DE általános megoldásának meghatározása:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^x - x - 1$$

4. A kezdetiérték feladat megoldása:  $1 = y(0) = C - 1 \Rightarrow C = 2$ , így  $y(x) = 2e^x - x - 1$ .

**4.3.16. Feladat.** Oldjuk meg az  $u'(t) = e^t - u(t)$  differenciálegyenletet!

**Megoldás:** A DE elsőrendű, lineáris, inhomogén.

1. az  $u'(t) + u(t) = 0$  homogén rész általános ( $u_h$ ) megoldása:

$$u_h(t) = C \cdot e^{-\int 1 dt} = C \cdot e^{-t}$$

2. az inhomogén DE egy ( $u_p$ ) partikuláris megoldását  $u_p(t) = C(t) \cdot e^{-t}$  alakban keressük, így

$$(C(t) \cdot e^{-t})' = e^t - C(t) \cdot e^{-t}$$

egyenlőségnek fenn kell állnia. Elvégezve a bal oldalon a deriválást

$$C'(t) \cdot e^{-t} - C(t) \cdot e^{-t} = e^t - C(t) \cdot e^{-t}$$

azaz

$$C'(t) \cdot e^{-t} = e^t \Rightarrow C'(t) = e^{2t} \Rightarrow C(t) = \frac{e^{2t}}{2}.$$

(Elegendő egy primitív függvényt megadnunk, mivel az inhomogén egyenlet egy megoldását kerestük.) Tehát

$$u_p(t) = \frac{e^{2t}}{2} \cdot e^{-t} = \frac{e^t}{2}.$$

3. az inhomogén DE általános megoldásának meghatározása:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = C \cdot e^{-t} + \frac{e^t}{2}.$$

**4.3.17. Feladat.** Oldjuk meg a

$$(t^2 - 1) \cdot x'(t) + 2t \cdot x(t) = 1, \quad x(2) = 4$$

*Cauchy-feladatot!*

**Megoldás:**

1. a  $(t^2 - 1) \cdot x'(t) + 2t \cdot x(t) = 0$  homogén rész általános ( $x_h$ ) megoldása:

$$x_h(t) = C \cdot e^{-\int \frac{2t}{t^2-1} dt} = C \cdot e^{-\ln|t^2-1|} = C \cdot \frac{1}{t^2-1} = \frac{C}{t^2-1}.$$

2. az inhomogén DE egy ( $x_p$ ) partikuláris megoldását  $x_p(t) = \frac{C(t)}{t^2-1}$  alakban keressük, így

$$(t^2 - 1) \cdot \left( \frac{C(t)}{t^2 - 1} \right)' + 2t \cdot \frac{C(t)}{t^2 - 1} = 1$$

$$(t^2 - 1) \cdot \left( \frac{C'(t) \cdot (t^2 - 1) - C(t) \cdot 2t}{(t^2 - 1)^2} \right) + 2t \cdot \frac{C(t)}{t^2 - 1} = 1$$

azaz

$$C'(t) = 1 \Rightarrow C(t) = t.$$

(Elegendő egy primitív függvényt megadnunk, mivel az inhomogén egyenlet egy megoldását kerestük.) Tehát

$$x_p(t) = \frac{t}{t^2 - 1}.$$

3. az inhomogén DE általános megoldásának meghatározása:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \frac{C + t}{t^2 - 1}.$$

4. A kezdetiérték feladat megoldása:  $4 = x(2) = \frac{C+2}{2^2-1}$ ,  $\Rightarrow C = 10$ , így  
 $y(t) = \frac{10+t}{t^2-1}$ .

---

★★ Másodrendű lineáris homogén és inhomogén DE-k ★★

---

**4.3.18. Feladat.** Mutassuk meg, hogy az  $y_1(x) = e^x$  és  $y_2(x) = x^2 e^x$  függvények lineárisan független megoldásai az

$$x \cdot y''(x) - (2x + 1)y'(x) + (x + 1)y(x) = 0 \quad (x > 0)$$

másodrendű, homogén differenciálegyenletnek, majd adjuk meg az egyenlet általános megoldását!

**Megoldás:** A 3.3.2 és 3.3.3 Tételeket alkalmazzuk.

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & x^2 e^x \\ e^x & 2x e^x + x^2 e^x \end{vmatrix} = \\ &= 2x e^{2x} + x^2 e^{2x} - x^2 e^{2x} = 2x e^{2x} \neq 0 \text{ ha } x > 0, \end{aligned}$$

tehát az  $y_1$  és  $y_2$  függvények lineárisan függetlenek az  $I = (0, +\infty)$  intervallumon. Mivel

$$x \cdot e^x - (2x + 1)e^x + (x + 1)e^x = e^x(x - 2x - 1 + x + 1) = 0,$$

így  $y_1(x) = e^x$  megoldása a differenciálegyenletnek. Másrészt

$$\begin{aligned} & x \cdot (x^2 e^x)'' - (2x + 1)(x^2 e^x)' + (x + 1)x^2 e^x = \\ &= x \cdot (2xe^x + x^2 e^x)' - (2x + 1)(2xe^x + x^2 e^x) + (x + 1)x^2 e^x = \\ &= x \cdot (2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2 e^x) - (2x + 1)(2xe^x + x^2 e^x) + (x + 1)x^2 e^x = \\ &= e^x \cdot (x \cdot (2 + 4x + x^2) - (2x + 1) \cdot (2x + x^2) + (x + 1)x^2) = \\ &= e^x(2x + 4x^2 + x^3 - 4x^2 - 2x^3 - 2x - x^2 + x^3 + x^2) = 0, \end{aligned}$$

tehát  $y_2(x) = x^2 e^x$  is megoldása a differenciálegyenletnek.

Az általános megoldás:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x^2 e^x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

**4.3.19. Feladat.** *Oldjuk meg az*

$$y''(x) + 7y'(x) + 10y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$$

*kezdetiérték feladatot!*

**Megoldás:** A 3.3 alfejezetben a Másodrendű konstansegyütthatós homogén lineáris DE részben leírtakat alkalmazzuk.

A karakterisztikus egyenlet:  $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$

A karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa

$$D = 7^2 - 4 \cdot 10 = 49 - 40 = 9 > 0,$$

így két valós megoldás van:  $\lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2}$ ; azaz  $\lambda_1 = -5$  és  $\lambda_2 = -2$ .

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Ezen megoldások közül azt a függvényt kell meghatároznunk, amelyekre  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 5$  fennáll. Az első feltétel szerint

$$2 = y(0) = c_1 e^{-5 \cdot 0} + c_2 e^{-2 \cdot 0} = c_1 + c_2,$$

másrészt a megoldások  $y(x) = c_1e^{-5x} + c_2e^{-2x}$  alakúak, így

$$y'(x) = -5c_1e^{-5x} - 2c_2e^{-2x}$$

alakban írható. A második feltételt figyelembe véve

$$5 = y'(0) = -5c_1e^{-5 \cdot 0} - 2c_2e^{-2 \cdot 0} = -5c_1 - 2c_2.$$

Tehát a  $c_1$  és  $c_2$  értékeknek eleget kell tennie a

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ -5c_1 - 2c_2 &= 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek. Az egyenletrendszer megoldása:  $c_1 = -3$ ,  $c_2 = 5$ . Így a kezdetiérték feladat megoldása:

$$y(x) = -3e^{-5x} + 5e^{-2x}.$$

**4.3.20. Feladat.** *Oldjuk meg az*

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$$

*kezdetiérték feladatot!*

**Megoldás:** A 3.3 alfejezetben a Másodrendű konstansegyütthetős homogén lineáris DE részben leírtakat alkalmazzuk.

A karakterisztikus egyenlet:  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

A karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa  $D = 2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$ , így két egybeeső valós megoldás van, mégpedig

$$0 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

miatt  $\lambda = -1$ .

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Ezen megoldások közül azt a függvényt kell meghatároznunk, amelyikre  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -1$  fennáll. Az első feltétel szerint

$$2 = y(0) = c_1 e^{-0} + c_2 \cdot 0 \cdot e^{-0} = c_1,$$

másrészt a megoldások  $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$  alakúak, így

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x}$$

alakban írható. A második feltételt figyelembe véve

$$-1 = y'(0) = -c_1 e^{-0} + c_2 e^{-0} - c_2 \cdot 0 \cdot e^{-0} = -c_1 + c_2.$$

Tehát a  $c_1$  és  $c_2$  értékeknek eleget kell tennie a

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 \\ -c_1 + c_2 &= -1 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek. Az egyenletrendszer megoldása:  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = 1$ . Így a kezdetiérték feladat megoldása:

$$y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}.$$

**4.3.21. Feladat.** *Oldjuk meg az*

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

*kezdetiérték feladatot!*

**Megoldás:** A 3.3 alfejezetben a Másodrendű konstanssegýtthatos homogén lineáris DE részben leírtakat alkalmazzuk.

A karakterisztikus egyenlet:  $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa  $D = 4^2 - 5 \cdot 4 = 16 - 20 = -4$ , így az egyenletnek két komplex megoldása van, melyek egymás konjugáltjai:  $\lambda_1 = \alpha + \beta \cdot i$  és  $\lambda_2 = \alpha - \beta \cdot i$ .

A megoldások  $\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$ , melyből  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 1$ .

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Ezen megoldások közül azt a függvényt kell meghatároznunk, amelyekre  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$  fennáll. Az első feltétel szerint

$$1 = y(0) = c_1 e^0 \cos 0 + c_2 e^0 \sin 0 = c_1, \text{ így } c_1 = 1$$

másrészt a megoldások  $y(x) = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x$  alakúak, így

$$y'(x) = -2c_1 e^{-2x} \cos x - c_1 e^{-2x} \sin x - 2c_2 e^{-2x} \sin x + c_2 e^{-2x} \cos x$$

alakban írható. A második feltételt figyelembe véve

$$2 = y'(0) = -2c_1 e^0 \cos 0 - c_1 e^0 \sin 0 - 2c_2 e^0 \sin 0 + c_2 e^0 \cos 0 = -2c_1 + c_2.$$

Mivel  $c_1 = 1$ , ezért  $c_2 = 4$ . Így a kezdetiérték feladat megoldása:

$$y(x) = e^{-2x} \cos x + 4e^{-2x} \sin x.$$

**4.3.22. Feladat.** *Oldjuk meg az  $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 12e^x$  differenciálegyenletet!*

**Megoldás:** A Megjegyzésben leírtakat alkalmazzuk.

1. A karakterisztikus egyenlet:  $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ , melynek gyökei:  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -3$ . Így a homogén rész általános megoldása:

$$y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

2. Az inhomogén egyenlet egy megoldását (partikuláris megoldás)

$$y_p(x) = c_1(x) e^{-2x} + c_2(x) e^{-3x}$$

alakban keressük a

$$\begin{aligned} c_1'(x) \cdot e^{-2x} + c_2'(x) \cdot e^{-3x} &= 0 \\ c_1'(x) \cdot (-2) \cdot e^{-2x} + c_2'(x) \cdot (-3) \cdot e^{-3x} &= 12e^x \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásával. Ez egy lineáris egyenletrendszer  $c_1'(x)$ -re és  $c_2'(x)$ -re, melyet Cramer szabállyal oldunk meg. Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa éppen a Wronski determináns:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{-5x}.$$

Legyen  $W_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) annak a mátrixnak a determinánsa, melyet úgy kapunk, hogy az alapmátrix  $i$ -edik oszlopát a  $\begin{bmatrix} 0 \\ r(x) \end{bmatrix}$  oszloppal helyettesítjük:

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ 12e^x & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -12e^{-2x}.$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & 12e^x \end{vmatrix} = 12e^{-x}.$$

A Cramer szabály alapján

$$c_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = \frac{-12e^{-2x}}{-e^{-5x}} = 12e^{3x},$$

$$c_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = \frac{12e^{-x}}{-e^{-5x}} = -12e^{4x},$$

melyből

$$c_1(x) = 12 \int e^{3x} dx = 12 \frac{e^{3x}}{3} = 4e^{3x}$$

és

$$c_2(x) = -12 \int e^{4x} dx = -12 \frac{e^{4x}}{4} = -3e^{4x}.$$

Ezeket felhasználva az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = 4e^{3x}e^{-2x} - 3e^{4x}e^{-3x} = e^x.$$

3.  $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{-3x} + e^x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

---

\*\* Potenciálfüggvény meghatározása \*\*

---

**4.3.23. Feladat.** *Határozzuk meg a  $\underline{v}(x, y, z) = (2xy - z, x^2 + z, y - x)$  vektormező potenciálfüggvényét, ha létezik.*

**Megoldás:** Mivel

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{v}(x, y, z) &= (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2, \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) = \\ &= (1 - 1, -1 - (-1), 2x - 2x) = (0, 0, 0), \end{aligned}$$

így a 3.4.1 Tétel értelmében létezik potenciálfüggvény. A potenciálfüggvényt a Megjegyzés szerint határozzuk meg.

1. A potenciálfüggvény  $\Phi(x, y, z) = \int 2xy - z \, dx = x^2 y - zx + C(y, z)$  alakban írható.
2.  $C(y, z) = \int x^2 + z - x^2 \, dy = zy + C(z)$ .
3.  $C(z) = \int y - x - (-x) - y \, dz = c$ .
4. A potenciálfüggvény:  $\Phi(x, y, z) = x^2 y - zx + zy + c$ .

**4.3.24. Feladat.** *Határozzuk meg a 4.3.23 Feladatban szereplő vektormező potenciálfüggvényét szoftverrel!*

**Számítás a Maple programmal:**



```
with(VectorCalculus);
SetCoordinates('cartesian'[x, y, z]);
v:=VectorField(<2*x*y-z,x^2+z,y-x>);
ScalarPotential(v);
```

---

 \*\* Differenciálegyenletek közelítő megoldása \*\*
 

---

**4.3.25. Feladat.** Az Euler módszerrel adjunk becslést az  $y(1)$  értékre ha  $x \in [0, 1]$  esetén tudjuk, hogy  $y'(x) = y(x) + 1$  és  $y(0) = 0$ . A lépésköz legyen  $0.25$ .

**Megoldás:** A 3.5 alfejezet jelöléseit használjuk.

$$f(x, y) = y + 1, \quad h = 0.25 = \frac{1}{4}$$

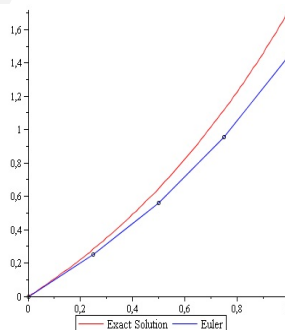
$i$	$x_i$	$y_i$
$i = 0$	0	0
$i = 1$	$0.25 = \frac{1}{4}$	$0 + \frac{1}{4} \cdot f(0, 0) = 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$
$i = 2$	$0.5 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{9}{16}$
$i = 3$	$0.75 = \frac{3}{4}$	$\frac{9}{16} + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{16}\right) = \frac{9}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{16} = \frac{61}{64}$
$i = 4$	1	$\frac{61}{64} + \frac{1}{4} \cdot f\left(\frac{3}{4}, \frac{61}{64}\right) = \frac{61}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{125}{64} = \frac{369}{256} \approx 1.44$

Tehát azt kaptuk, hogy  $y(1) \approx 1.44$ .

**Megjegyzés:** A kezdetiérték probléma analitikus megoldása:

$$y(x) = e^x - 1, \quad \text{így } y(1) \approx 1.72.$$

71. ábra. Az analitikus és a numerikus megoldás



**4.3.26. Feladat.** *Rajzoltassuk ki a 4.3.25 Feladatban szereplő differenciálegyenlet iránymezőjét, valamint a kezdeti feltételt teljesítő megoldást szoftverrel!*

**Maple programmal:**



```
with(DEtools);  
ode := D(y)(x) = y(x)+1  
InitialValues:=[[0,0]];  
DEplot(ode, y(x), x = 0 .. 1, y = -0.5 .. 2, InitialValues, linecolor = blue);
```

**4.3.27. Feladat.** *Rajzoltassuk ki szoftverrel a 4.3.25 Feladatban szereplő differenciálegyenlet analitikus és numerikus megoldását, valamint készítsünk táblázatot az egyes lépésközökben becsült értékekről!*

**Maple programmal:**



```
with(Student[NumericalAnalysis]);  
Euler(diff(y(t), t) = y(t)+1, y(0) = 0, t = 1, 'output' = 'plot', 'numsteps' = 4, 'digits' = 4);  
Euler(diff(y(t), t) = y(t)+1, y(0) = 0, t = 1, 'output' = 'information', 'numsteps' = 4, 'digits' = 4);
```

## Irodalomjegyzék

- [1] Bajcsay Pál, *Matematika II. - Analízis, Vektoranalízis*, Műegyetemi Kiadó (1998).
- [2] Hoffmann Miklós, *Topológia és differenciálgeometria*, <http://www.tankonyvtar.hu>
- [3] Juhász Tibor, *Lineáris algebra*, <http://www.tankonyvtar.hu>
- [4] Kocsis Imre, *Matematika - a Létesítménymérnöki mesterképzés számára*, TERC Kiadó, 2013, ISBN 978-963-9968-69-1.
- [5] Kozma László - Kovács Zoltán, *Görbék és felületek elemi differenciálgeometriája*, <http://zeus.nyf.hu/kovacs/dghome/index.html>
- [6] Laczkovich Miklós - T. Sós Vera, *Valós Analízis II.*, Typotex (2013).
- [7] Simon Károly, *Matematika MSc Építőmérnököknek*, Typotex Kiadó, 2011, <http://www.tankonyvtar.hu>
- [8] George B. Thomas, *Thomas-féle Kalkulus III. kötet*, Typotex, Budapest (2007).