A MATEMATIKA ÉS A MÉDIA KAPCSOLATÁNAK VIZSGÁLATA

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: Korándi József

Témavezetők: Horváth Gábor és Szabó Csaba

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2012.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola matematika didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Budapest, 2012. július 4.

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Korándi József doktorjelölt 2011– 2012. között a fent megnevezett Doktori Iskola matematika didaktika programja programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Budapest, 2012. július 4.

a témavezető aláírása *a témavezető aláírása*

A MATEMATIKA ÉS A MÉDIA KAPCSOLATÁNAK VIZSGÁLATA

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika didaktika tudományágban

Írta: Korándi József

Készült a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok doktori iskolája (matematika didaktika programja) keretében

Témavezetők: Horváth Gábor és Szabó Csaba

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. ....
tagok: Dr. ....
Dr. ....

A doktori szigorlat időpontja: 200… . ……………… … .

Az értekezés bírálói:

Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....
tagok: Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 20..... ....

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet mondok itt témavezet□imnek, Szabó Csabának és Horváth Gábornak a sok-sok segítségért, biztatásért, nógatásért; korábbi témavezet□mnek, Szendrei Juliannának; kollégáimnak – Vásárhelyi Évának, Szeredi Évának, Török Juditnak –, Mándy Attilának és fiamnak, Korándi Dánielnek a rengeteg segítségért, türelemért, támogatásért; köszönöm annak, akinek nem tudom megköszönni; köszönöm édesanyámnak, aki ezt a legutolsó változatot már nem élhette meg…

De eléggé nem lehet megköszönni.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés **11**
1.1. Célkitűzések, hipotézisek 15
1.2. Az irodalmi előzmények 16
1.3. A kutatás témája és módszerei 18
1.4. A dolgozat felépítése 22

2. Tudós-kép, matematikus-kép a társadalomban és a médiumokban **24**

3. Matematikus-kép az ELTE matematika szakos hallgatói körében **29**
3.1. A vizsgálat célja 30
3.2. A vizsgált kérdések 31
3.3. Előzetes hipotéziseink 31
3.4. A vizsgálatba bevont személyek 32
3.5. A vizsgálat módszerei 34
3.6. A vizsgálat eredményei 36
3.7. Összefoglalás, következtetések 48

4. Matematikusok ábrázolása a Good Will Hunting című filmben **52**
4.1. Eredmények 53
4.2. Következtetések 60

5. Matematikai tartalom a Good Will Hunting című filmben **62**
5.1. A matematikai tartalom megközelítése 63
5.2. A matematikai tartalom feldolgozása 81

6. Összefoglalás **101**

7. Summary **107**

Irodalomjegyzék **112**

1. fejezet

Bevezetés

Ma már a tanulók ismereteiknek jóval kisebb hányadát szerzik meg az iskolai tanórákon, mint korábban. Az iskola feladatai között a primer információszolgáltatással szemben előtérbe kerül az információk feldolgozása, rendszerezése.

Sok tanulmány foglalkozik a média szerepének erősödésével, hatásaival. Ebben a dolgozatban a matematika és a média kapcsolatát vizsgáljuk, ha nem is a teljesség igényével, de több megközelítést alkalmazva: Bemutatjuk, mit ír erről a kérdésről a nemzetközi szakirodalom, megnézzük, mennyire említi ezt a kapcsolatotegy csoport matematika szakos egyetemi hallgató, és megvizsgáljuk, miként kapcsolódik ez a két terület egy konkrét filmben.

E dolgozat szerzője a nyolcvanas években hét évig dolgozott a Magyar Rádiónál, főleg az Iskolarádió keretein belül, matematikai és fizikai ismeretterjesztéssel foglalkozva. Közben és utána több évtizeden át tanított matematikát a legkülönbözőbb szintű oktatási intézményekben, az általános iskolától a szakmunkásképzőn át főiskolákig, egyetemig. Mindezek során nyilvánvalóvá vált számára, hogy a média és a matematika kapcsolódási pontjai fontos, helyenként akár meghatározó szerepet játszhatnak a matematika tanítása során.

A kapcsolódás régóta és sokféleképpen megvalósul. Filmeken, cikkekben, képeken jelennek meg matematikusok és matematikai tartalmak, már évszázadok óta. Gondoljunk például a régóta megjelenő szórakoztató, ismeretterjesztő könyveken túl akár Dürer Melancholia című metszetére, vagy Leonardo da Vinci Vitruvius-tanulmányára.

Korunkban matematika jelenhet meg könyvekben, plakátokon, képeken, cikkekben és filmekben is. A megjelenés módja bármely médium-típus esetén többféle lehet. Ha csak a filmeket tekintjük is, „akkor is több osztályt különböztethetünk meg (pl. a matematika vizualizációja, ismertterjesztő film, matematikatörténeti film, életrajzi film híres emberről, híres matematikus bemutató órája, híres matematika problémák, de lehet filmdráma is, amilyennel a dolgozat foglalkozik." ([25])

A matematikával foglalkozókban is jelen van az igény részint a tudományág eredményeinek, érdekességeinek széles körben való ismertetésére, részint azzal való szembenézésre, mi módon látják kívülállók a matematikát és a matematikusokat, mi módon jelennek meg a különféle művészeti alkotásokban. Ez utóbbinak intuitív megnyilvánulásai például a Karunkon a matematika szakos hallgatók által létrehozott és működtetett „Matekosfilmklub", vagy az, amikor például a 2007-es GDM Tagung részeként „Mathematik im Kino" címmel vetítéseket tartottak.

Ugyanakkor a kapcsolódások tudományos igényű vizsgálata Magyarországon csak nemrégiben kezdődött el, az ELTE TTK Matematikai Intézetének keretei között. A kutatásban oktatók és hallgatók is részt vesznek. Ez a dolgozat a kutatások első eredményeiről is be kíván számolni.

A dolgozat azt is be kívánja mutatni, milyen nemzetközi előzményei vannak e hazai vizsgálatnak, miben kapcsolódik és miben térnek el a hazai kutatások ezektől.

Majdnem minden szakmáról, hivatásról létezik a társadalomban egy általános vélemény, mely negatív, pozitív vagy semleges elképzelések és előítéletek együttese (sztereotípia). Ha ez a számos összetevőből álló kép riasztó, akkor sokkal nagyobb elhivatottság kell az adott terület felé való orientálódáshoz, mint egy vonzó szakma esetén. Az, hogy melyik szakma mennyire vonzó, vagy mennyire elutasított, koronként változik. Napjainkban például a „médiaszemélyiség" (jelentsen ez a fogalom bármit is) vagy a színész munkája sokkal vonzóbb, mint a matematikusé.

A sztereotípia kialakításában cseppet sem elhanyagolható szereppel bír az a hatás, ami a gyerekeket, illetve szüleiket a médián keresztül éri. Az, hogy milyen kép jelenik meg az újságban, rádióban, tévében vagy interneten a matematikusokról, befolyással lehet a matematikusok társadalmi megítélésre éppúgy, mint arra, hogy az ifjak milyen mértékben választják ezt a hivatást. (A „kép" szót most – miként e dolgozatban másutt is – természetesen elvont, „image", és nem „picture" értelemben használjuk.) Nyilvánvaló például, hogy az a sztereotípia, amely a matematikusi hivatást férfiak hivatásának tartja – vagyis nem tartja nőiesnek – számos (bár szerencsére korántsem minden), a matematikában tehetséges leányt tart vissza ettől a pályától.

Egy tanulmány szerint az ötödikes (10-11 éves) török diákok közel fele tartja fontosnak és/vagy nagyon fontosnak a médiát abból a szempontból, hogy milyen mértékben származik onnan az információja a tudósokról (Türkmen, 2008, [41]). De – mint később látni fogjuk – a vizsgálatunkba bevont magyar egyetemisták jelentős része is úgy emlékszik vissza, hogy a matematikusokról alkotott korai képük létrejöttében fontos szerepe volt a médiának.

Hat évvel ezelőtt, 2006-ban, egy új tantárgy került bevezetésre az Eötvös Loránd Tudományegyetemen (ELTE, TTK) a matematika szakos hallgatók számára „Matematika és média" címmel. A tantárgy felelőse és tematikájának kidolgozója e dolgozat szerzője volt. A tárgy egyik fő célkitűzése annak bemutatása volt, hogyan népszerűsítsük és közvetítsük a matematikát kívülállók – tehát a matematikával nem napi szinten foglalkozók, netán elutasítók, „utálók" – számára. A tantárgyat bevezetése óta e dolgozat szerzője tartja, esetenként vendég előadókkal.

E dolgozat olvasói számára valószínűleg nem szükséges hangsúlyoznunk a matematika mindenki számára való megközelíthetőségének fontosságát. A *Matematika és média* tantárgy óráin egyebek között a matematikai tartalmak és a matematikusok mozifilmekben és TV-sorozatokban való megjelenítésének alapos vizsgálatával is foglalkoztunk. Meglepő, és kissé talán megrázó tapasztalatot jelentett, hogy még a legjobb matematikus hallgatókat is csak igen ritkán érdekelte, érintette meg a filmekben megjelenő matematikai tartalom, a matematikai háttér. Egyszerűen csak elfogadták, hogy valami matematikáról is szó van, és ettől eltekintve követték a történet menetét.

Másfelől azonban – mint azt ebből a dolgozatból is láthatjuk majd – a filmekben megjelenő matematikai tartalom egyszerre lehet összetett, érdekes, sőt akár szórakoztató is. Amikor a *Matematika és média* órákon a filmek megnézése után a matematikai tartalmakat külön – de a filmekkel összefüggésben – kiemeltük és megvizsgáltuk, a hallgatók egyéb, kifejezetten matematikai tárgyú órákhoz képest szokatlan izgalommal és érdeklődéssel „vetették rá magukat" a filmekben látott matematikai problémákra, és igen nyitottak voltak a látottakon túlmutató, de ahhoz kapcsolódó matematikai tartalmak befogadására. Így a filmek használata kiváló eszköznek bizonyult a matematika tanításához, egészen különböző szinteken álló tanulók számára is.

A matematika tanítása során egyik legfontosabb lépés a tanulók érdeklődésének felkeltése. Itt elsősorban a közoktatásban tanulókra gondolunk, de az érdeklődés felkeltésének természetesen a felsőoktatásban is komoly szerepe van. Az érdeklődés felkeltésének egyik – eddig kellően ki nem használt – eszköze lehet a populáris médiumokban megjelenő matematikai tartalom bevitele a tanórákra, illetve a tanórán kívüli matematikaoktatásba. Mivel a filmek emocionálisan is megragadják a nézőket, így az azokban szereplő, azokhoz kapcsolódó matematikai tartalmak értő és kellően átgondolt feldolgozása jelentős mértékben segíthet a tanulók többségében meglévő kognitív gát áttörésében.

A „médium" szó jelentése „közvetítő". Jelentheti például a televíziót, mint olyant, és jelenthet egy konkrét csatornát vagy műsort is. Épp így jelenthet könyvet, cikket, vagy az egész Internetet. A „média" a médium többesszáma, ami egyszerűen médiumokat jelent, de jelenti a médiumok összességét is. A magyar nyelvban manapság köznyelvileg sajnos elterjedt „médiák" kifejezést e dolgozatban igyekszünk kerülni.

1.1. Célkitűzések, hipotézisek

A kutatás célkitűzései

A dolgozat elsősorban a populáris média és a matematika kapcsolatát vizsgálja. Ennek során matematikus-képpel (C/1), matematikai tartalmakkal (C/2) és oktatási lehetőségekkel (C/3) kapcsolatos kérdésekre keresünk választ:

C/1/a: Milyen tudós, illetve matematikus-kép van jelen a társadalomban?

C/1/b: Ezek mennyire függnek kortól, országtól, rassztól?

C/1/c: Megváltoztatható-e a konkrét emberek matematikus-képe, és ha igen, mi módon?

C/1/d: Milyen matematikus-kép jelenik meg a médiumokban, milyen sztereotípiák hatnak a matematikus-ábrázolásokra, illetve milyen sztereotípiákat alakítanak ki a médiumok?

C/2: Milyen konkrét matematikai tartalmak jelennek meg ezekben a médiumokban?

C/3/a: Mit mondanak a különböző matematikai kultúrával rendelkező embereknek ezek a matematikai tartalmak?

C/3/b: Miért és mi módon lehet érdemes használni a pop-kultúrában megjelenő matematikai tartalmakat a közoktatásban és a felsőoktatásban?

Mindezeket részben általánosan, részben konkrétan vizsgáljuk. Tanulmányozzuk a nemzetközi szakirodalom anyagát, elemezzük egy, a hallgatók körében végzett nem reprezentatív felmérés eredményeit, továbbá esettanulmányként használunk fel egy konkrét filmet. (Good Will Hunting)

A kutatás hipotézisei a központi célok szerinti bontásban

H/1/a: A társadalomban élő matematikus-kép egy létező dolog, amivel a matematika tanítása során számolni kell. Ez a kép sztereotipikus, előítéletes, a matematikusokra nézve jobbára előnytelen.

H/1/b: A társadalmakban élő matematikus-kép bizonyos vonásai függnek, bizonyos vonásai lényegében függetlenek kortól, országtól, rassztól.

H/1/c: Az emberekben a matematikusokról élő sztereotip kép alakítható, az megfelelő módszerekkel a valósághoz közelebbivé tehető.

H/1/d: A társadalmakban élő matematikus-képre a különféle médiumok, köztük a populáris kultúra médiumai számottevő hatással vannak, és a társadalomban jelen lévő kép is hat a pop-kultúrában megjelenő matematikus-képre.

H/2: A médiumokban, helyenként még a pop-kultúra körében tartozókban is érvényes matematikai tartalmak jelennek meg.

H/3/a: A médiumokban megjelenő matematikai tartalmak releváns üzenetet hordozhatnak a társadalom tagjai számára.

H/3/b: A filmekben megjelenő matematikai tartalom bevihető a tanórákra, azok hatékonyságát növelheti. A populáris médiumokban megjelenő matematikai tartalmak közül alkalmasan választva különböző életkorú és matematikai előképzettségű célcsoportok esetén is készíthető didaktikailag megalapozott feldolgozás.

1.2. Az irodalmi előzmények

A társadalomban élő tudós-kép tudományos igényű vizsgálata Margaret Mead és Rhoda Metraux kutatásaival kezdődött, akik 1957-ben publikáltak erről cikket ([32]).

Chambers egy tesztet (Draw-a-Scientist Test – DAST) dolgozott ki, amellyel szintén a tudós-képet vizsgálta. A tesztet és a vizsgálatának eredményeit 1983-ban tette közzé ([11]).

Chambers vizsgálati módszere igen népszerűvé vált, és sorban jelentek meg ily módon készített vizsgálatok eredményei. Az általános „tudós" kép vizsgálatához specifikus vizsgálatok csatlakoztak, és megjelentek a „rajzolj-egy-mérnököt" „-vegyészt", „-régészt", „-pszichológust", „-matematikust", „-fizikust", „-orvost", stb. vizsgálatok eredményei. Például: Barman C. R., 1996, 1999; ([2]) Beardsley, D. C., és O'Dowd, 1961 ([3]; Bodzin, A., és Gehringer, M., 2001 ([7]); Bohrmann, M. L., és Akerson, V.L., 2001 ([8]), Dickson, J. M., Saylor, C. F., és Finch, A. J., 1990 ([12]); Finson, K. D., 2001 ([13]); Finson, K. D., Beaver, J. B., és Cramond, B. L., 1995 ([14]); Flick, L., 1990 ([15]); Kahle, J.B., 1988 ([17]); Rampal, A., 1992 ([36]); Rosenthal, D. B., 1993 ([38]); Schibeci, R. A., és Sorenson, I., 1983 ([39]). A felsorolás korántsem teljes: 1983 óta több mint 200 tanulmány jelent meg a DAST-ot, illetve annak változatait használók tollából.

Kifejezetten a matematikus-képet már jóval kevesebben vizsgálták. A legtöbbet hivatkozott tanulmány ezek közül Berry és Picker 2000-ben megjelent cikke ([6]), amely angol és amerikai (USA) iskolások rajzaira épül. A „Draw-a-Mathematician" tesztet többen megismételték, egyéb kultúrákban tanuló diákok között is. (Például Grevholm, 2010 – Norvégia [19]; Khoon Yoong Wong, 1995 – Singapor [44]; Hemant Bessoondyal, 2005 – Mauritius [4]) Ezen vizsgálatoknak közös sajátossága, hogy aránylag kevés jellemzőt vizsgálnak, a vizsgálatba bevontak létszáma alacsony és szinte kizárólag általános vagy középiskolai tanulók matematikus-képét vizsgálják. Azonban így is értékelhető eredményeket nyújtanak, amit a dolgozatban később ismertetek részletesebben.

1.3. A kutatás témája és módszerei

Sem a matematika fejlődése, sem a matematikus utánpótlás, sem a matematika eredményeinek hasznosítása szempontjából nem közömbös, hogy milyen kép él a társadalomban a matematikáról és a matematikusokról.

E dolgozatban nem definliáljuk, kit tekintünk matematikusnak, mivel sem a társadalom, sem a kérdéssel foglalkozó nemzetközi szakirodalom nem teszi ezt. Az emberek – mint e dolgozatban látni fogjuk – gyakran még abban sem egységesek, hogy a matematika tanáraikat matematikusoknak tekintik-e. De a nemzetközi vizsgálatokból egyértelműen kiderül, hogy az emberek többségében él valamiféle intuitív kép arról, hogy ki matematikus és ki nem. Viszont a személyes beszélgetéseinkből az is kiderült, hogy az egyénenként változó lehet, kit sorol be valaki ebbe a kategóriába.

A matematikával való kapcsolat szempontjából három szociológiai csoport, és ily módon háromféle matematika- és matematikus-kép van. Ezek a csoportok történetileg alakultak ki, különböző szerepet töltenek be a társadalomban. Létezésük a társadalmi munkamegosztás része.

Mindegyik csoportban alapvetően fontos minél tisztábban látni, hogy mik a célok, mi a konkrét matematikai tartalom, és azt is, hogy milyen módon és mértékben valósulnak meg a csoport céljai.

A három csoport:

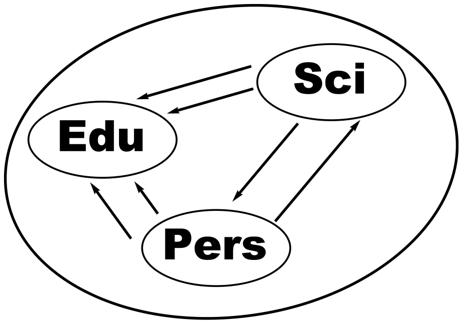
1. A matematikus-társadalom, a tudomány matematika képe, paradigma-rendszere (Sci)

2. A tanári közösség, beleértve a személyeket és az intézményeket is (Edu)

3. Az egyének matematika képe, beleértve az esetleg nem létező, de a társadalom által elvárt matematikai ismereteket és kompetenciákat is (Pers).

Mindhárom csoport kölcsönhatásban áll egymással.

A Sci és Edu csoport közötti kapcsolat elsősorban a pedagógus-képzés során nyilvánul meg effektíven.



1.1. ábra.

Az Edu és Pers csoport közötti kapcsolat nyilvánvaló: Ez a matematikai képzés, illetve a társadalom hatása arra, hogy mit és milyen módon tanítsanak az „edukátorok”. Az előbbi hatás jobbára közvetlen, míg az ellentétes irányú hatás általában közvetett.

A Sci és Pers csoport közötti kölcsönhatás sokkal rejtettebb. Ebben a dolgozatban ezen kölcsönhatás egyik összetevőjét vizsgáljuk, nevezetesen azt a hatást, ami matematikus figurák és matematikai tartalmak médiában való megjelenítésén keresztül történik.

Matematikusok két lényegesen különböző módon jelennek meg a médiumokban:

I. Tudományos ismeretterjesztés részeként

Ez igazából a matematika tanításának egy speciális területe. Lényeges eltérése a közoktatástól az, hogy a különféle médiumokon keresztül megvalósuló tanításhoz a közönséget nem az államhatalom kényszeríti az iskolapadba, hanem egy kommunikációs piacon kell az érdeklődésüket és figyelmüket megnyerni. Ez lehetőségeire, módszereire és eredményeire nézve egyaránt meghatározó.

II. A populáris kultúra és a matematika kapcsolódásai

A terület a kívülállók számára meglepően gazdag.

A pop-kultúra médiumok hatásait hiba lenne alábecsülni. A társadalom tagjai, különösen fiatal korukban lényegében nem találkoznak igazi matematikussal. Így képüket erről a pályáról alapvetően a különböző médiumokban megjelenő matematikusok és a filmekben, könyvekben, stb. ábrázolt matematikus katakterek, valamint a matematika művelésének megjelenített képe határozza meg. Ez a kép pedig döntő hatással lehet a pályaválasztásukra.

Ugyancsak jelentős lehet a populáris kultúra médiumainak hatása az érdeklődés felkeltésében. Itt elsősorban a filmekre és tévéműsorokra gondolunk. A filmekben megjelenő matematikus szereplőkhöz, matematikai tartalmakhoz a néző elsősorban érzelmileg viszonyul. Ha ez az élmény pozitív, akkor annak hatása sokkal erősebb és tartósabb lehet, mint például egy tanórán megtanított konkrét ismereté.

A filmes eszközökben nem kell kompromisszumokat kötni ahhoz, hogy korrektül ábrázolhassanak matematikai tartalmakat és matematikusokat. E korrekt ábrázolás azért is szükséges – gyakran csak szükséges lenne –, mert a társadalomban élő kép a matematikusokról elismerő ugyan, de meglehetősen negatív. („Tán csodállak, ám de nem szeretlek.") Olyannyira, hogy amikor esetenként egy teljesen normális figura jelenik meg egy filmben matematikusként, az kifejezetten pozitívnak hat.

A matematikusokról különféle hiedelmek élnek a társadalmakban. Az emberek ezeket gyakran a média által ábrázolt matematikusok alapján építik fel. E dolgozat egyik módszere, hogy összehasonlítjuk a „tipikus" matematikusról kialakított képet azzal, amit egy konkrét mozifilmben, a Good Will Hunting (GWH) című 1997-ben készült amerikai filmdrámában láthatunk. Korábbi kutatások alapján felállítottunk egy szempontrendszert, mely az összehasonlítás alapjául szolgál. (Pluhár Gabriellával közös munka [28].) Megvizsgáltuk többek között a filmbeli matematikusok megjelenését, a viselkedésüket, szellemi képességeiket, valamint munka- és magánéleti kapcsolataikat. Áttekintettük továbbá, hogy mennyire befolyásolhatták az alkotókat a sztereotípiák a történet megírásában, a szereplők válogatásában és a jellemek formálásában. Mindezek alapján megállapíthatjuk majd, hogy a Good Will Hunting részben erősíti a hagyományos matematikusokról kialakított képet, ám vannak olyan vonulatok, melyek ellentmondanak neki.

A képet azon szempontok szerint vizsgáljuk, hogy a filmben milyen a matematikus

- megjelenése (testi adottságai, öltözködése, közvetlen környezete),
- érzelmi élete, kapcsolatrendszere (szociális kapcsolatai, munkakapcsolatai, magánélete),
- munkamódszere.

A Good Will Hunting alapvetően nem a matematikáról szól, még csak nem is egy matematikus élettörténetét dolgozza fel. Nem célja (legalábbis nem nyílt célja) sem matematikusokról, sem matematikáról véleményt formálni. De megjelenik benne néhány matematikus, és megjelenik benne valódi matematikai tartalom is. A választásunk épp azért esett erre a filmre, mert

- Nem matematikus élettörténetét dolgozza fel, illetve a cselekmény lényegében nem épül arra, hogy a szereplők egy része matematikus, nem ez a drámai konfliktus forrása. Ellentétben sok egyéb filmmel nem akar valami konkrétat közölni velünk sem a matematikusokról, sem a matematikáról. Így remélhető, hogy az előforduló matematikus szereplők az alkotók – és közvetve a társadalom – matematikusokról alkotott képét tükrözik, azt nem módosítják jelentős mértékben dramaturgiai szempontok. Vagyis nem torzítják azért a figurákat, hogy élesebb konfliktus-helyzeteket hozzanak létre.
- Igényesen elkészített film, ami azt is jelenti, hogy valódi matematikusokat kértek fel szakértőknek. Így valódi matematikai tartalmak kerültek a filmbe. (Két tanácsadó is volt. Az egyik Patrick O'Donnell, a University of Toronto fizika professzora, aki tavaly decemberben hunyt el. Ő a filmben statisztaként is feltűnik. A másik szakértő

Daniel Kleitman, az MIT professzora volt, akiről érdemes megjegyezni, hogy 1 az Erdős-száma.)

– Sikeres, közismert film, így feltételezhető, hogy valóban lehet valamennyi hatása a közvélemény matematikus-képére. Remélhető – és ezt a dolgozat szerzőjének eddigi tapasztalatai is alátámasztják –, hogy a filmben szereplő matematikai tartalmak már csak a film ismertsége okán is számot tarthatnak a tanulók érdeklődésre, amennyiben ezeket a tartalmakat bevisszük az oktatásba.

1.4. A dolgozat felépítése

A 2. fejezetben részletezzük az 1.2. szakaszban ismertetett irodalmi előzményeket. Bemutatjuk a nemzetközi kutatások eredményeit az általános tudós-képről, és azok megjelenéséről a médiában. Megvizsgáljuk továbbá a speciálisan matematikusokról szóló tanulmányokat is.

A 3. fejezetben részletesen bemutatjuk egy matematikusokról szóló empirikus vizsgálat tapasztalatait. Megkérdeztük a *Matematika és média* kurzus matematika szakos hallgatóit, valamint egy matematikusoktól feltételezhetően független kontrollcsoport tagjait a matematikusokról kialakított képükről. A vizsgálati szempontokat elsősorban a 2. fejezetben szereplő kutatások módszerei szerint állítottuk össze. A vizsgálat céljait a 3.1. szakasz taglalja. Kérdéseinket a 3.2. szakaszban tesszük fel, melyekre felállított hipotéziseinket a 3.3. szakaszban soroljuk fel. A vizsgálatba bevont személyekről a 3.4. szakaszban, a vizsgálat módszereiről a 3.5. szakaszban írunk részletesebben. Az eredményeket a 3.6. szakaszban foglaljuk össze, majd a 3.7. szakaszban levonjuk a számunkra releváns következtetéseket.

A 4. fejezetben a Good Will Hunting című filmben szereplő matematikusokat elemezzük a 2. és 3. fejezetekben felállított szempontok szerint. Az elemzés eredményeit a 4.1. szakaszban közöljük, a következtetéseket 4.2. szakaszban vonjuk le. A fejezet eredményeinek egy része magyarul az *Agora* [27], angolul a *Teaching Mathematics and Computer Science* [28] referált folyóiratban jelenik meg.

Az 5. fejezetben a Good Will Hunting filmben szereplő matematikai tartalmat elemezzük. Konkrétan, az 5.1. szakaszban közöljük, hogy egy matematikus milyen szemmel tekint a filmbeli feladatokra, valamint ismertetjük, hogy matematika szakos hallgatók az ország három tudományegyetemén mely feladatokat tanulmányaik mely szakaszában és milyen módon tudnák megoldani. A szakasz eredményei a *Teaching Mathematics and Computer Science* [24] referált folyóiratban jelennek meg.

Az 5.2. szakaszban konkrét javaslatot teszünk a vizsgálat kiterjesztésére: Megadunk egy kipróbálásra javasolt feladatsort, mely középiskolások számára készült a filmben előforduló matematikai tartalmak alapján.

A 4. és 5. fejezetek eredményeiről e dolgozat szerzője másfél órás előadást tartott a 2011-es Varga Tamás Módszertani Napokon, valamint beszámolt belőlük a nemzetközi MIDK2012 konferencián, Lőcsén.

Végül a 6. fejezetben összefoglaljuk a dolgozat legfőbb eredményeit és kitekintést adunk a további kutatási területekről.

2. fejezet

Tudós-kép, matematikus-kép a társadalomban és a médiumokban – a nemzetközi kutatások eredményei

A tudósokról évszázadokra visszamenőleg él valamilyen kép a társadalomban. Ezek a sztereotípiák a mai kor embere számára is hozzáférhető módon főleg képeken és irodalmi művekben jelentek meg. A tudományos igényű vizsgálatok a múlt század közepén kezdődtek, és napjainkban is népszerűek.

2.1. Sztereotípia a tudósokról. Mead és Metraux 1957-ben publikált cikke mintegy 35.000 középiskolás esszéjének feldolgozásán alapult. A tanulóknak arról kellett írniuk, mit gondolnak a tudósról. A vizsgálat kimutatta, hogy egy tipikus középiskolás szerint a tudós férfi; idős, vagy legalábbis középkorú; fehér köpenyt és szemüveget visel; általában szakállas. Laboratóriumban dolgozik, veszélyes dolgokkal foglalkozik; titokzatos és titkos dolgokat művel, és ő maga is titokzatos. A tudós gondosan írogat a fekete noteszába; időnként felkiált, hogy „Megtaláltam!”. Olyan dolgokat fedez fel, amik segítségével az emberek jobb termékeket tudnak készíteni. Szinte állandóan könyveket olvas.

Chambers 1983-ban jelentette meg kutatása eredményeit. Kidolgozott egy módszert, amit DAST-nek (Draw-A-Scientist Test) nevez a szakirodalom. A vizsgálat lebonyolítói több mint 4800 gyermekkel rajzoltattak képet „a tudós"-ról. A rajzok alapján számos jellemzőről kiderült, hogy már igen korán kapcsolódik a gyermek gondolkozásában a tudós fogalmához. Ilyen volt a laboratóriumi köpeny, a szemüveg, az arcszőrzet, a kutatás olyan szimbólumai, mint például a tudományos eszközök és a laboratóriumi kellékek, a tudás olyan manifesztációi, mint például a könyvek, könyvespolcok és a tudomány „termékei", például a képletek, formulák, stb. Csak lányok rajzoltak női tudóst, de azoknak is alig több mint 1 százaléka! (Ez utóbbi azért is különösen érdekes, mert azokban a vizsgálatokban, amikor egyszerűen egy személyt kell rajzolni, akkor a rajzoló általában saját magával azonos neműt rajzol.) A képeken a tudós szinte mindig szobában vagy a laboratóriumában dolgozik, gyakran pincében vagy alagsorban. A rajzok egy részén a tudós veszélyes, illetve titkos dolgokat kutat. Több rajzon is Frankenstein vagy Jekyll–Hyde típusú figuraként tűnik fel a tudós.

Meg kell említeni, hogy számos más vizsgálat is folyt a tudósokról létező sztereotípiákról, a közvéleményben róluk élő képről. Odell munkatársaival például a DAST módszert fejlesztette tovább, és általános iskolásoktól egészen egyetemista korúakig vont be fiatalokat a felmérésbe (Odell et al, 1993).

Rampal (1992) ([36]) a kezdő tanárok tudós-képét vizsgálta kérdőívek segítségével. Ezen vizsgálatok során további tulajdonságokkal bővült a tudós sztereotipikus képe, nevezetesen a tudós érzelemmentes is, nemtörődöm, hiányzik belőle a szociális érzékenység.

2.2. Sztereotípia a matematikusokról. A következő néhány sorban ismertetünk néhány eredményt a kifejezetten a matematikusokról létező sztereotípiák kutatásáról.

Berry és Picker (2000) 12–13 éves diákokat kért meg két csoportban (közelebbről meg nem határozott megoszlásban, 476 fős összlétszámmal) Plymouthban (Egyesült Királyság) és New Yorkban (USA), hogy rajzoljanak egy matematikust. Később a kutatók beszélgettek is a gyerekekkel. Kiderült, hogy a matematikus sztereotípiája nagyon hasonló a tudóséhoz, bár néhány vonatkozásban markánsan eltér attól. A rajzok és beszélgetések szerint a matematikus fehér férfi, nincsenek barátai, kivéve esetleg más matematikusok. Magányos, általában kövér, régimódi és szemüveget hord. A matematikus homloka ráncos a sok gondolkodástól, kopasz vagy bizarr frizurája van. Könnyen méregbe gurul. Ceruzák, tollak, számológép és tábla vannak a keze ügyében, és érthetetlen képleteket, formulákat ír.

A kérdésekre adott válaszokból kitűnik, hogy a diákok alig tudnak vagy gondolnak valamit arról, mivel is foglalkozik egy matematikus, és arról, hogy az élet mely területein és mi módon lehet hasznos a matematika. Néhány a válaszok közül, amiket a tanulók arra a kérdésre adtak, hogy szerintük mivel foglalkozik egy matematikus: „A matematikus tanít.” „Egy bankban vagy egy boltban dolgozik.” „Nehéz problémákat old meg.” „Keményen számol.”

Gondolhatnánk azt, hogy az emberek matematikusokról alkotott képét alapvetően meghatározza, milyen volt a matematika tanáruk. De Berry és Picker vizsgálata azt is kimutatta, hogy a tanulók általában nem tekintik matematikusnak a matematika tanáraikat.

Szintén a matematikusokról élő sztereotípiákat vizsgálta 2010-ben Grevholm egy nem reprezentatív norvég kutatásban. Ő is rajzokat és kérdéseket használt a vizsgálatában, hogy megtudja, mit gondolnak 16 és 19 év közötti középiskolás diákok a matematikusokról és a matematikáról. Itt a következő jellemzők domináltak: kopaszság vagy megdöbbentő haj, általában szemüveg, képletek veszik körül, egyedül dolgozik, magányos. A matematikus csak néhány képen tűnik boldognak. A diákok úgy gondolják, hogy a munkája számokhoz és számításokhoz kapcsolódik.

2.3. Tudósok a médiában. Wilson és Latterell 2001-es cikkében ([43]) számos irodalmi művet, illetve filmet sorol fel, amelyekben matematikus szerepel. A kutatásukban szereplő művekben a matematikus többnyire különc, esetleg zavart, helyenként őrült. Előfordul, hogy a főszereplő lelki alkata, netán betegsége az alapkonfliktus forrása, a cselekmény elindítója. Épp azért választ ilyen főszereplőt a szerző, mivel az ebből a helyzetből adódó drámai cselekményt kívánja felépíteni, ábrázolni. A létező sztereotípiákra utal, hogy ilyen esetekben aránylag gyakran választ az alkotó főhőséül matematikust.

A matematikusokról a diákokban élő képet vizsgálta a módosított DAST segítségével Khoon Yoong Wong (Images of Mathetaticians, 1995, [44]) hat kategóriában vizsgálta 281 12-15 éves szingapúri diák rajzait, hét kategóriában (szemüveg, haj, öltözet, eszközök, könyvek, jelképek, nem). Azt tapasztalta, hogy a rajzokon szereplő matematikusok jobbára férfiak, szemüveget hordanak, formulák és matematikai jelek veszik őket körül és kissé furcsán néznek ki. Hemant Bessoondyal 2005-ben Mautritiuson. Az ő vizsgálataik is azt mutatják, hogy a matematikus-kép földrajzilag meglehetős állandóságot mutat.

Schibeci és Sorenson 1983-ban azt vizsgálta, hogy a tudósokról alkotott kép mennyire tér el a különböző etnikai csoportokban. Azt találták, hogy alig. Véleményük szerint ez a média hatása, mivel az emberek a világ minden táján nagyon hasonló műsorokat, filmeket, sorozatokat néznek. Ugyanerre az eredményre vezetett Finson 2001-es kutatása is.

A tudós képének időbeni változása elég jól nyomon követhető a különféle filmekben megjelenő tudósok figuráit vizsgálva. Ez a kép meglehetős összhangot mutat a diákok tudós-képét vizsgáló kutatások eredményeivel. Egyrészt tapasztalható bennük egy elég nagy stabilitás, a tudós jellemzői közül csak kevés változik, és az is lassan. Ugyanakkor némi változás azért érzékelhető. Mint a tesztek eredményeiből, úgy például a filmvászonról is eltűnőben van az őrült tudós képe, aki iszonyatos dolgokat fedez fel, amelyek segítségével le akarja igázni a világot. Például, míg a hatvanas években készült hét James Bond film közül háromban is zseniális, ámde őrült tudós volt a 007-es ellenfele, azóta egy ilyen filmben sem. Újabb matematikusfigurát jelenít meg egy manapság igen népszerű sorozat, a Gyilkos számok (NUMB3RS). Ennek egyik főszereplője egy matematikus, aki az említett sztereotip tulajdonságok közül szinte egynek sem felel meg. Fiatal, jóképű, nem visel szemüveget, vékony és (talán az egyetlen „sztereotip" tulajdonsága) okos. Párkapcsolatban él, rengeteg barátja van, sokat jár szórakozni, a társadalmi élete is tökéletes. Ez egy merőben új, a korábban ábrázoltaktól jelentősen eltérő matematikus-képet, matematikusi életformát mutat. Egyelőre eléggé egyedülálló ez az ábrázolás. Hatását egyelőre nehéz kimutatni, de ez a hatás semmiképpen sem elhanyagolható. E dolgozat szerzőjének például volt olyan hallgatója, aki elmondta, hogy éppen e sorozat hatására döntött úgy, hogy alkalmazott matematikus lesz!

A vizsgálatokból kitűnik, hogy a nézetek csak lassan változnak, és nemzetiségtől lényegében függetlenek. Számos kutató véli úgy, hogy ezeknek a jelenségeknek a média az oka. A TV műsoroknak, sorozatoknak, filmeknek fontos szerepe van a sztereotípiák megtartásában, erősítésében vagy gyengítésében.

Bár a hatásmechanizmusok elemzése további kutatásokat igényel, az eddigiek alapján valószínűnek látszik, hogy a stabilitás egyik oka az, hogy a médiumokban a közvéleményben élő képnek megfelelő tudós/matematikus figurák jelennek meg, ugyanakkor viszont az itt megjelenő sztereotípiák is befolyásolják a közvéleményt.

Mivel ezek a sztereotípiák gyakran és jelentős mértékben kedvezőtlen képet festenek a kutatókról, matematikusokról, jelentősen csökken a természettudományos pályát választó fiatalok száma. Komoly elhivatottság kell a matematikusi pálya választásához, amikor „a médiában (rádió, TV, mozi) a riporterek, a szereplők szinte dicsekszenek azzal, hogy az iskolában nem szerették és nem is tudták a matematikát.” ([25]) A média javíthat a népszerűtlen munkákról, hivatásokról alkotott közvélekedésen, vonzóbb (és talán a valósághoz közelebb álló) képet mutathat az ilyen hivatást választók életéről, munkájáról a gyerekeknek és a szülőknek egyaránt.

3. fejezet

Matematikus-kép az ELTE matematika szakos hallgatói körében – egy empirikus vizsgálat tapasztalatai

A vizsgált évtizedek szakirodalmában nem szerepel annak a kézenfekvő kérdésnek a vizsgálata sem, hogy vajon mennyire sorsszerű, hogy ilyen kép éljen a közvéleményben a matematikusokról, mennyire változtathatatlan ez a kép.

E dolgozat szerzője szerzett ugyan erről saját tapasztalatokat, mivel a *Matematika és Média* kurzus keretein belül minden évben kikérdezte a kurzuson résztvevő hallgatókat a matematikus-képükről, és szembesítette őket e képek és a társadalomban élő sztereotípiák közötti eltérésekkel. Ezek azonban ‚ad hoc' gyakorlatok voltak, a szeminárium kereteibe ágyazva.

Kézenfekvő volt tehát, hogy ebben a kérdésben saját rendszerezettebb vizsgálatokat végezzünk. A vizsgálatok – több, a matematikus-képet vizsgáló nemzetközileg publikált eredményhez hasonlóan – nem reprezentatív mintán zajlottak, hanem kismintás empirikus vizsgálatokat folytattunk.

A vizsgálatban 18, illetve 15 hallgató vett részt, a kontrollcsoport létszáma 30 fő volt.

„A vizsgálatba bevont személyek száma nagyon kevés, így a levont következtetések nem szignifikánsak, nem kvantitatívak, ... csak ... sejtésnek tekinthetők, felmérő és tájékozódó jellegűek, vagyis inkább egy későbbi vizsgálat téziseinek kiindulópontját képezhetik.” ([25])

Az érintett kérdések tudományos igényű vizsgálatainak elvégzése az előzetes becslések szerint több ember mintegy 5-6 évi kutatómunkáját igényelné. Társadalmi rétegződés; választott életpálya; stb. szerinti reprezentatív vizsgálatokat. Azonban már ez az esettanulmány is számos fontos tanulságot és tendenciát megmutat.

3.1. A vizsgálat célja

A célunk az volt, hogy valamelyest képet kapjunk arról, eltér-e, és ha igen, akkor mennyire tér el a matematika szakos hallgatók matematikus-képe az általános sztereotípiáktól. Vagyis közvetve azt reméltük kideríteni, mennyiben változtatja meg valakinek a sztereotípiáit az, hogy közvetlen tapasztalatokat szerez a sztereotípia „tárgyairól”. Jelen esetben: Mennyire változtatja meg a matematikus-képét valakinek az, ha személyesen megismer matematikusokat?

Közvetett célja volt a vizsgálatnak az is, hogy valamelyest képet kapjunk arról is, hogy Magyarországon mely tulajdonságokat mennyire tartják jellemzőnek az emberek egy matematikus esetén. Erre egyrészt azért volt szükségünk, hogy a hazai hallgatók eredményeit hazai kontrollcsoport eredményeivel tudjuk összehasonlítani. Másrészt pedig azért, mert a nemzetközi irodalomban sehol nem találtunk olyan értelemben használható tanulmányt, amelyben ehhez az összehasonlításhoz hatékonyan felhasználható kvantitatív értékek szerepeltek volna.

Ugyancsak célja volt a vizsgálatnak egy későbbi, átfogó, lehetőség szerint reprezentatív kutatás előkészítése is, egy ilyen vizsgálat céljainak, módszereinek, kérdéseinek átgondolása az esettanulmány eredményeinek tükrében.

3.2. A vizsgált kérdések

A vizsgálat során az alábbi kérdések voltak a legfontosabbak:

1. Milyen kép él a felsőbb éves matematika szakos hallgatókban a matematikusokról, mely tulajdonságokat tartanak legjellemzőbbeknek, illetve legkevésbé jellemzőnek?
2. Mit gondolnak a hallgatók, milyen kép él az emberekben általában a matematikusokról? Mennyire esik egybe ez a vélt kép
    (a) a saját matematikus-képükkel,
    (b) egy „külsősökből” álló kontrollcsoport matematikus-képével?
3. Mennyire ismertek matematikusokat a hallgatók az egyetemi tanulmányaik előtt? Matematikusnak tartották-e a korábbi matematika tanáraikat?
4. Mennyire változott a képük az egyetemi tanulmányok során a korábbihoz képest? Mit tartanak az esetleges változások fő okainak?

3.3. Előzetes hipotéziseink

1. Arra számítottunk, hogy a vizsgálatba bevont matematika szakos hallgatók matematikus-képe jelentősen el fog térni a kontrollcsoportétól. Ezt az eltérést – ha tényleg megmutatkozik – valószínűleg az okozza, hogy ők már személyesen megismertek több matematikust is. Arról, hogy mely tulajdonságokat tartanak legjellemzőbbnek, illetve legkevésbé jellemzőnek a hallgatók, nem volt előzetes feltevésünk.
2. (a) Arra számítottunk, hogy a hallgatók által vélelmezett kép el fog térni a sajátjuktól. Ezt az eltérést feltételezésünk szerint az okozza, hogy több éve matematika szakos hallgatóként számos előítélettel találkozhattak már, gyakorta szembesülhettek azzal, hogy miket gondolnak róluk az emberek, ha megtudják, hogy matematika szakos egyetemisták.

(b) Itt is eltérésre számítottunk. Azt tételeztük fel, hogy a hallgatók már nem tudják teljesen külső szemmel nézni a matematikusokat. A „vélt-képüket" jelentősen befolyásolja az, hogy azok közül az előítéletek közül, amelyekkel találkoztak, melyek érintették őket legérzékenyebben.

3. Nincs arra vonatkozó adat a nemzetközi szakirodalomban sem, hogy az embereknek hány százaléka ismer személyesen matematikust. Így nem volt előzetes képünk arról, hogy a hallgatóknak vajon hány százaléka ismert egyetemi tanulmányai előtt is matematikusokat. De úgy véltük, náluk az arány alighanem nagyobb, mint a teljes népesség körében, mivel feltételezhető volt, hogy a hallgatók egy része olyan családi háttérrel rendelkezik, amelyben vannak matematikusok, mert ez a körülmény is befolyásolni szokta a diákok pályaválasztását.

   Előzetesen azt tételeztük fel, hogy a hallgatók nem tekintették a matematika tanáraikat matematikusnak, mivel ez a szakirodalomban így szerepel.

4. Feltételezésünk az volt, hogy a hallgatók matematikusokról alkotott képe általában jelentősen megváltozott egyetemi tanulmányaik során, mégpedig azáltal, hogy személyes tapasztalatokra tettek szert mind matematikusokkal, mind a matematikával kapcsolatban. Úgy gondoltuk, ezzel a változással maguk is tisztában vannak. Ugyanakkor feltételezhető volt, hogy a hallgatók már eleve az átlagosnál pozitívabb képpel rendelkeztek a matematikáról és a matematikusokról, és ezért is választották ezt a pályát. Viszont ez a korábbi elképzelésük nem feltétlen fedte a valóságot, így alighanem ebben az esetben is változott a matematikus-képük tanulmányaik során.

3.4. A vizsgálatba bevont személyek

I. Matematika szakos hallgatók.

   Az ELTE TTK Matematikai Intézetének keretein belül 2006 óta tartja e dolgozat szerzője a *Matematika és média* c. akkreditált „kötelezően választható" kurzust. Ezen kurzus 2012-es évfolyamára jelentkezettek közül 18 hallgatót kértünk meg, hogy válaszoljanak a vizsgálat kérdéseire. Mindez a kurzus megkezdése előtt volt, így az abban részt vevők matematikus-képét még nem befolyásolta az, amiket az órákon később tanultak.

A hallgatók mindegyike három vagy négy éve az egyetemre járó elemző-matematikus szakos hallgató volt. Így természetesen mindnyájan jópár matematikussal találkoztak, legalábbis az egyetemen. Tanárokkal és PhD hallgatókkal egyaránt. Így voltak személyes tapasztalataik a matematikusokról.

II. Kontrollcsoport. („Külsősök")

„Külsősöket" azért vontunk be a vizsgálatba, hogy össze tudjuk hasonlítani az általános matematikus-képet a szakos hallgatók képével. Erre a nemzetközi szakirodalomban fellelhető eredmények nem kínáltak elegendő támpontot, mivel azokat a vizsgálatokat természetesen az itt használt konkrét teszttől eltérő kérdésekkel és eltérő módon végezték.

A kontrollcsoport 30 főből állt. Olyan személyekkel töltettük ki a kérdőívet, akik e dolgozat szerzője ismerőseinek olyan ismerősei voltak, akik a szerzőt személyesen nem ismerték. (Vagyis akik a szerző ismeretségi-gráfjában tőle pontosan kettő távolságra voltak.) Erre azért volt szükség, mert a lehetőségekhez képest olyan teszt-alanyokat kerestünk, akiknek nincsenek közvetlen tapasztalataik matematikusokkal, vagy legalábbis nem az országos átlagot sokkal meghaladó mértékben. Ez utóbbi célt nem biztos, hogy sikerült teljes mértékben megvalósítanunk. Ugyanis a kérdőívet kitöltőknek mintegy a fele egy gazdasági tanácsadó cégnél dolgozik, egy-két kivételtől eltekintve közgazdász diplomával rendelkezik. Így nyilván jelentős százalékban találkoztak személyesen is matematikussal, legalábbis tanulmányaik során. De kapcsolatrendszerükről is feltételezhető, hogy az átlagnál nagyobb százalékban tartalmaznak matematikusokat. Mivel egyelőre nincsenek felmérések arról, hogy a magyar felnőtt lakosság hány százaléka ismer szeméylesen matematikust, így ezt a feltételezésünket sem bizonyítani sem cáfolni nem tudjuk. Azt azonban tuddhatjuk, hogy iskolai végzettség tekintetében a kontrollcsoport meghaladja az országos átlagot: A tesztlapot anonim módon kitöltőktől négy személyesnek tekinthető adatot kérdeztünk meg: nemet, iskolai végzettséget, azt, hogy ismer-e személyesen matematikust és a vaálaszadó korát. A tesztlapot kitöltők közül hárman nem válaszoltak ezekre a kérdésekre. A fennmaradó 27 főből – 19 volt nő, 8 férfi; – 18-nak volt felsőfokú végzettsége; – 7 nyilatkozott úgy, hogy ismer matematikust; – a válaszadók kora 23 és 55 év között volt.

3.5. A vizsgálat módszerei

A vizsgálat során a kontrollcsoport tagjaival kérdőívet töltettünk ki. A hallgatóknál több, a szakirodalomban szereplő módszert alkalmaztunk. Ezek:

I. DAMT (Draw-A-Mathemathician-Test),

II. kérdőív és

III. (írásbeli) interjú.

A konkrét kérdések:

I. „Rajzoljon le egy tipikus matematikust! Ha szükségesnek érzi, kommentálja is a rajzát!”

II. A kérdőíven különféle jellemzők szerepeltek. A tesztlapot kitöltőknek az volt a feladatuk, hogy egy Likert-skála alapján pontozzák -10-től $+10$-ig terjedő pontszámokkal, hogy mennyire tarják a konkrét tulajdonságot jellemzőnek „a matematikusokra”. A $+10$ a „nagyon jellemző”, a -10 a „nagyon nem jellemző” kategóriáknak felelt meg.

   A kontrollcsoport tagjainak csak ennyi volt a feladatuk.

A matematika szakos hallgatóknak ezen a „saját” oszlopon kívül egy másik oszlopot is ki kellett tölteniük, ahol ugyanezekkel a pontszámokkal azt kellett leírniuk, hogy mit gondolnak, az „átlagemberek” mennyire tartják jellemzőnek a listán szereplő tulajdonságokat a matematikusokra.

Az így kapott eredmények a hallgatók által az „átlagembernek” tulajdonított (vagyis a társadalom sztereotípiáiban a hallgatók szerint élő) véleményt tükrözik, így ezekre a továbbiakban „feltételezett vélemény”, „feltételezett matematikus-kép”, stb. formában hivatkozunk.

A kérdések alapjául Ragnhild Johanne Rensaa 2006-os cikkét ([37]) vettük alapul, innen származik az a gondolat is, hogy egymás mellett szerepeltessünk egymást kiegészítő tulajdonságokat. Még olyan esetekben sem vettük magától értetődőnek, hogy a két tulajdonság összpontszáma nullát adjon ki, mint például a férfi-nő páros. (A tapasztalatok ezt a döntésünket igazolták.) Az említett cikkben szereplő tulajdonságokat kiegészítettük azokkal, amiket a nemzetközi szakirodalom vizsgált, illetve olyan jellemzőkkel, amiket a *Matematika és Média* kurzus hallgatói az elmúlt három évben felsoroltak, mint a matematikusok megítélése szempontjából többé-kevésbé relevánsakat.

III. Hat kérdést tettünk fel (közülük kettő összetett kérdés volt), amelyre írásban kellett válaszolniuk a hallgatóknak:

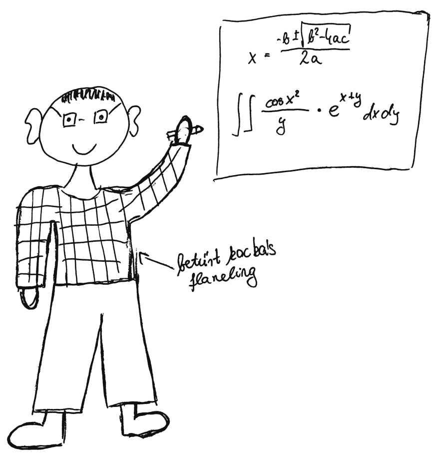
1. „Hány matematikust látott, ismert az egyetemi évei előtt? Kiket, és milyen módon?”
2. „Milyen képe volt a matematikus személyiségéről?”
3. „Milyen képe volt a matematikus külsejéről?”
4. „Matematikusnak tekintette-e a matematika tanárait?”
5. „Milyen tapasztalatok, információk hozták létre ezeket a képeket?
6. „Változtak-e ezek a képek az egyetemi évei során? Ha igen, mi módon?”

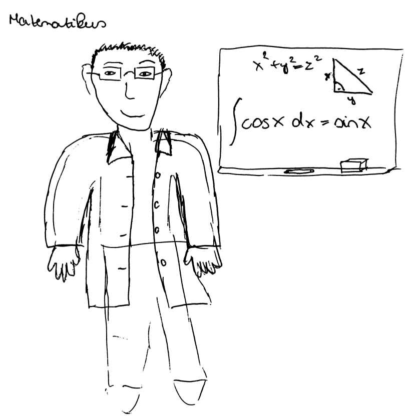
3.6. A vizsgálat eredményei

I. „DAMT”

A matematika szakos hallgatók rajzait az 1. sz. melléklet tartalmazza. A hallgatók által rajzolt matematikusok jellemzőit táblázatba foglaltuk. (2. számú melléklet)

Értelemszerűen a rajzokon elsősorban a matematikusok hallgatók által megjelenített külső tulajdonságai figyelhetőek meg – ha nem is kizárólagosan. Például:





A táblázatban azokat a jellemzőket szerepeltettük, amelyek meglétét vagy hiányát az ilyen típusú rajzokat vizsgáló szakirodalom kiemeli (rassz; nem; kor; szemüveg léte vagy nem léte; haj; arcszőrzet; testalkat; arckifejezés; ráncos-e a homlok; öltözet; képletek, tárgyak szerepeltetése; a munkavégzés helye).

A rajzok alapján a legjellemzőbb tulajdonságok a *nem* és a *rassz*: Mind a tizennyolc hallgató fehér férfit rajzolt. (A tizennyolc hallgató közül tíz nő volt!)

Az ezek után következő harmadik legjellemzőbb tulajdonság: A matematikus 15 rajzon *szemüveges*, és csak 3 rajzon nem az.

13 rajzon nem szerepel semmiféle *arcszőrzet,* mindössze 5 olyan rajz készült, amiken igen.

A kor szerinti megoszlás: 4 fiatal, 11 középkorú, 2 idős. (Egy rajzon a kor nem beazonosítható.)

Testalkat: 4 testesebb, 10 normál, 2 sovány. (Egy rajzon lényegében nem szerepelt a matematikus teste.)

Öltözet: 4 öltözet kifejezetten pozitívnak minősíthető, 3 negatívnak, 8 semlegesnek. (Három rajzon az öltözet nem beazonosítható.)

Ezt a négy tulajdonságot illetően a rajzok lényegében semleges képet mutatnak be.

A *haj* szerinti megoszlás: 8 lényegében kopasz, 6 rendezetlen hajviseletű, 3 normál. (Egy rajzon a haj formája nem beazonosítható, kettőn az erősen kopaszodó „maradék haja" rendezetlen.)

Ez a kép már aránylag negatív.

A *ráncos homlok* 4 rajzon szerepel. Ezeknél sincs értékmérő funkciója, nem is a külső jellemzők közé soroljuk: Minden bizonnyal a matematikus elmélyült gondolkozását próbálták képileg így kifejezni.

Ugyancsak a matematikusi munka jellegének képi ábrázolásához sorolhatóak a rajzokon a *munka-környezet* szerepeltetése (6 rajzon, ebből 4 a tanításra, 2 a kutatómunkára utal), a *tárgyak* szerepeltetése (nem gyakran, de előfordul könyvek, jegyzetpapírok, számítógépek ábrázolása), valamint *képletek* szerepeltetése. (A rajzok közül mindössze 4-en szerepelnek képletek. Az viszont lényeges – de érthető – eltérés a szakirodalomban publikált rajzokon előforduló formulákhoz képest, hogy ezek a képletek jobbára helyesek, matematikailag korrektebbek.)

A legfeltűnőbb eltérés az egyéb vizsgálatok publikált rajzaihoz képest, hogy ezeken a rajzokon a matematikusok több mint fele (18 közül 10) mosolyog! Ez az arány az egyéb, publikált rajzokon legfeljebb 33%.

A később ismertetésre kerülő Likert-skálás vizsgálat és az interjúk alapján megállapítható, hogy a hallgatók arra a felszólításra, hogy „Rajzoljon egy matematikust!" nem elsősorban a saját matematikus-képüknek, hanem sokkal inkább az általuk feltételezett sztereotípiáknak megfelelő képet rajzoltak, legalábbis ami a külsőségeket illeti. Ez egyértelműen kiderül azokból az értékekből, amiket a Likert-skálás teszteredmények – az ő esetünkben, illetve a kontrollcsoport esetében – mutatnak. (Lásd a következő, II. kérdésre adott válaszok vizsgálata.)

Ami a matematikusnak a saját munkájához való viszonyát illeti, ez már személyiségjegy, itt a hallgatók sokkal nagyobb mértékben elrugaszkodtak a sztereotípiától, és a saját élményeiket, tapasztalataikat jelenítették meg. (Mosoly.) Figyelemre méltó az is, hogy a hallgatók ilyen nagy arányban érezték szükségesnek, hogy ezt a viszonyulást egy ilyen rajzon – amely azért főleg a külsőségeket ábrázolja – megjelenítsék!

II. A kérdőíves vizsgálat

A vizsgálat során háromféle kérdőív-eredmény született:

a. A hallgatók által kitöltött kérdőív arról, hogy ők milyen mértékben tarják érvényesnek az egyes tulajdonságokat a matematikusokra;

b. A hallgatók által kitöltött kérdőív arról, hogy mit gondolnak, szerintük az „átlagemberek” milyen mértékben tarják érvényesnek az egyes tulajdonságokat a matematikusokra („feltételezett vélemény”, „feltételezett matematikus-kép”);

c. A kontrollcsoport tagjai által kitöltött kérdőív arról, hogy ők milyen mértékben tartják érvényesnek az egyes tulajdonságokat a matematikusokra.

Az eredmények vizsgálata

Az eredmények elemzéséhez az egyes jellemzőkre adott pontszámokat átlagoltuk, majd a kapott átlagok csökkenő sorrendje szerint a tulajdonságokat rendeztük. Ezt a rendezést mindhárom – a, b és c – teszteredmény esetén elvégeztük.

A kapott helyezés-számokat hozzárendeltük az egyes jellemzőkhöz. Azt, hogy melyik helyezés-szám melyik teszthez tartozik, különböző színekkel jelöltük. Az „a” tesztét pirossal, a „b” tesztét zölddel, a „c” tesztét kékkel.

Az elemzést lényeges tanulságok kiemelése céljából leszűkítettük azokra a jellemzőkre, amelyek az egyes tesztekben az első tíz vagy az utolsó tíz „helyezés” valamelyikét szerezték meg. Vagyis azokra, amelyeket az egyes vizsgálatokban különösen jellemzőeknek, vagy különösen nem-jellemzőeknek (negatív módon jellemzőnek) minősítettek a tesztet kitöltők. Ezek után az utolsó tíz helyezett jellemző esetében a sorszámozást átírtuk: Visszafele számozva ezeket a -1, -2, $\dots$, -10 számokkal láttuk el, hogy ily módon is elkülönüljenek a listák elején szereplőktől. Ezeket a sorszámokat a következő táblázatokban tipográfiailag is megkülönböztettük.

A táblázatokat megszámoztuk. 1-es számot kapott az eredményeknek a hallgatók saját váleménye szerint sorba rendezett táblázata, 2-t a hallgatók által kitöltött „feltételezett vélemény”-ek zerint sorba rendezett, és 3-t a kontrollcsoport véleménye szerint sorba rendezett táblázat.

Attól függően, hogy melyik vizsgálat szerinti sorrendben nézzük az eredményeket, más és más összefüggések lesznek szembetűnőek.

a: *A hallgatók véleménye szerint rendezve a kapott eredmények így néznek ki (1. táblázat):*

					hallgatók szerint	*„szerintem mások szerint”*	*kontroll-csoport szerint*
hely					*átlag*	*átlag*	*átlag*
				A matematikus...			
1	**1**			érdekes munkát végez	7,61	–1,82	3,59
2	**2**	**8**	**3**	fehér ember	7,47	6,94	6,2
3	**3**	**5**	**6**	nehéz problémákat old meg	7,33	7,53	5,45
4	**4**			fontos munkát végez	6,94	3,41	4,63
5	**5**	**2**	**5**	zseni	6,39	8,59	5,79
6	**6**		**7**	művelt, kulturált	6,11	5,65	5,34
7	**7**			rövidhajú	6,06	3,29	2,13
8	**8**			érdekes személy	5,67	–0,29	3,07
9	**9**		**4**	fő tevékenysége jelenségek, folyamatok modellezése	5,28	3,88	6,07
10	**10**			kedves, szelíd	5,22	2,82	3,9
11		**7**		öreg	5,11	7,24	3,87
12				boldog	5,06	3,71	3,36
13		**3**	**2**	férfi	4,94	8,41	6,9
14				karcsú/vékony	4,94	4	4,6
15				házas/kapcsolatban él	4,89	0,82	1,77
16		**1**	**1**	szemüveges	4,5	8,76	7,37
17				munkája során állandóan számítógépet használ	4,17	3,47	3,04
18				normál módon öltözik	4,06	1,76	2,4
19				középkorú	4	2,88	3,93
20				társadalmilag elismert	3,67	2,82	1,57
21		**9**		cseppet sem sportos	3,56	6,65	3,7
22				ősz	3,5	6,18	3,77
23				átlagosan társasági	3,33	–1,59	1,37
24				átlagosan érdekes	3,28	0,53	1,69
25			**8**	rendezetlen, furcsa haja van	3,11	5,88	4,8

26				magabiztos	3,11	1,18	0,83
27				szociálisan érzékeny	3	–0,65	–0,5
28			**9**	furcsa szokásai vannak	2,83	4,59	4,72
29				jó humora van	2,83	–1,65	1,79
30			*–10*	érdekes életet él	2,5	–1,88	–1,14
31				befelé forduló	2,44	5,35	4,17
32				pedáns	2,44	3,47	–0,07
33				fő tevékenysége a tanítás	2,39	3,41	2,71
34				kicsit testes	1,94	2,18	1,4
35				átlagosan kifelé forduló	1,89	–0,12	0,52
36				még megvan a hajszíne	1,72	0,41	2,45
37				állandóan a könyveket bújja	1,28	4,94	3,86
38				munkájához elég neki egy papír és egy ceruza	1,22	5,53	2,72
39				átlagosan érdekes munkát végez	1,22	–1,59	2,4
40		**4**		fő tevékenysége a számolás	1,17	8,06	4,66
41				sárga bőrű	1,12	–2,06	0,63
42				ódivatúan öltözik	0,83	4,88	4,1
43				közepesen sportos	0,72	–1,59	–0,87
44		*–3*		társasági	0,5	–4,35	–0,53
45				nem társasági	0,39	4,82	2,24
46				nincs kézügyessége	0	4,18	2,86
47				egyedülálló	–0,06	3,24	2,8
48		**6**		érthetetlen dolgokkal foglalkozik	–0,17	7,29	3,5
49				félénk	–0,17	2,24	1,61
50		*–7*	*–8*	kifelé forduló	–0,22	–3,76	–1,17
51		*–10*		indiai vagy arab	–0,35	–2,38	–0,23
52			*–6*	titokzatos dolgokkal foglalkozik	–0,5	1,82	–2,11
53				őrült	–0,56	4,71	0,71
54		*–6*	*–2*	fekete bőrű	–0,59	–3,94	–3,43
55				homloka ráncos a sok gondolkozástól	–0,61	3,71	3,66
56				szociálisan érzéketlen	–0,67	2,29	2,14
57				csak matematikus barátai vannak	–0,78	5,24	3,11
58				nem híve a formalitásoknak	–0,89	–1,88	1,41
59		*–9*		teljesen átlagos személyiség	–0,89	–3,35	0,93
60		*–5*		fiatal	–0,89	–4	0,1
61				szakbarbár	–0,94	3,59	1,89
62				tutyimutyi	–1,44	1,47	2,18
63		*–4*		nő	–1,44	–4,06	–0,73
64				kövér	–1,89	–0,41	–0,23
65				nem ért a mindennapi dolgokhoz	–2	4,65	3,29
66		*–8*		lezseren öltözködik	–2	–3,76	0,63
67		*–2*	*–3*	sportos	–2,11	–5,35	–2,77
68			*–5*	titkos dolgokkal foglalkozik	–2,22	0,35	–2,18
69	*–10*	*–1*	*–1*	divatosan öltözik	–2,39	–5,35	–5,03
70	*–9*			hosszúhajú	–2,67	–0,24	2,3
71	*–8*			unalmas személy	–2,83	3,24	0,86
72	*–7*		*–7*	nincs haja	–2,83	–0,06	–1,3
73	*–6*		*–9*	könnyen méregbe gurul	–3,78	–2	–1,14
74	*–5*			leginkább lustálkodni szeret	–4,28	–2	–0,57
75	*–4*			nincsenek barátai	–4,33	1,35	–0,28
76	*–3*			unalmas munkát végez	–4,78	4,41	–0,07
77	*–2*		*–4*	beképzelt	–4,78	–1,24	–2,43
78	*–1*			érzelem-mentes	–5,33	–1,06	0,82

– Ami azonnal szembeötlik, még a konkrétumok vizsgálata előtt, az az, hogy a hallgatók által legtöbbre, illetve legkevesebbre pontozott jellemzők között jóval több kék számot kapott van, mint olyan, ami zöld számot. Ez azt mutatja, hogy a hallgatók véleménye arról, hogy mások mit gondolnak a matematikusokról jobban eltér a saját véleményüktől, mint az, amit a kontrollcsoport által adott pontszámok mutatnak.

Ennek a jelenségnek két oka valószínűsíthető.

Egyrészt – mint erre már utaltunk – a kontrollcsoport nem teljesen reprezentálta az „átlagembereket”.

Másrészt a hallgatók igen sok előítélettel találkoztak egyetemi éveik alatt. (Ezt a *Matematika és média* kurzus keretein belül lefolytatott beszélgetések több évfolyamra visszamenőleg megerősítik.) Az előítéletek egy része mélyen érinti őket, legyen szó akár pozitív, akár negatív előítéletekről. Ez az élmény – nevezetesen az, hogy gyakorta átélik, hogy ők (mások szerint) különböznek az egyéb szakokon tanuló hallgató-társaiktól – megerősíti bennük azt az érzést, hogy a matematikával nem napi szinten foglalkozók, netán elutasítók, „utálók” tévesen vélekednek róluk, sok esetben egészen másokat tételeznek fel, mint ami a valóság. Ez a különbözőség-érzés is megjelenik a véleményükben.

b: *A hallgatóknak a „feltételezett vélemény”kérdőíve szerint rendezve a kapott eredményeket ehhez jutunk (2. táblázat):*

					hallgatók szerint	*„szerintem mások szerint”*	*kontroll-csoport szerint*
hely					*átlag*	*átlag*	*átlag*
				A matematikus...			
1	**1**			érdekes munkát végez	7,61	–1,82	3,59
2	**2**	**8**	**3**	fehér ember	7,47	6,94	6,2
3	**3**	**5**	**6**	nehéz problémákat old meg	7,33	7,53	5,45
4	**4**		**11**	fontos munkát végez	6,94	3,41	4,63
5	**5**	**2**	**5**	zseni	6,39	8,59	5,79
6	**6**		**7**	művelt, kulturált	6,11	5,65	5,34
7	**7**			rövidhajú	6,06	3,29	2,13
8	**8**			érdekes személy	5,67	–0,29	3,07
9	**9**	**25**	**4**	fő tevékenysége jelenségek, folyamatok modellezése	5,28	3,88	6,07
10	**10**	**37**	**16**	kedves, szelíd	5,22	2,82	3,9
11		**7**		öreg	5,11	7,24	3,87
12				boldog	5,06	3,71	3,36
13		**3**	**2**	férfi	4,94	8,41	6,9
14				karcsú/vékony	4,94	4	4,6
15				házas/kapcsolatban él	4,89	0,82	1,77
16		**1**	**1**	szemüveges	4,5	8,76	7,37
17				munkája során állandóan számítógépet használ	4,17	3,47	3,04
18				normál módon öltözik	4,06	1,76	2,4
19				középkorú	4	2,88	3,93
20				társadalmilag elismert	3,67	2,82	1,57

21		9		cseppet sem sportos	3,56	6,65	3,7
22		10		ősz	3,5	6,18	3,77
23				átlagosan társasági	3,33	–1,59	1,37
24				átlagosan érdekes	3,28	0,53	1,69
25			8	rendezetlen, furcsa haja van	3,11	5,88	4,8
26				magabiztos	3,11	1,18	0,83
27				szociálisan érzékeny	3	–0,65	–0,5
28			9	furcsa szokásai vannak	2,83	4,59	4,72
29				jó humora van	2,83	–1,65	1,79
30			–10	érdekes életet él	2,5	–1,88	–1,14
31				befelé forduló	2,44	5,35	4,17
32				pedáns	2,44	3,47	–0,07
33				fő tevékenysége a tanítás	2,39	3,41	2,71
34				kicsit testes	1,94	2,18	1,4
35				átlagosan kifelé forduló	1,89	–0,12	0,52
36				még megvan a hajszíne	1,72	0,41	2,45
37				állandóan a könyveket bújja	1,28	4,94	3,86
38				munkájához elég neki egy papír és egy ceruza	1,22	5,53	2,72
39				átlagosan érdekes munkát végez	1,22	–1,59	2,4
40		4	10	fő tevékenysége a számolás	1,17	8,06	4,66
41				sárga bőrű	1,12	–2,06	0,63
42				ódivatúan öltözik	0,83	4,88	4,1
43				közepesen sportos	0,72	–1,59	–0,87
44		–3		társasági	0,5	–4,35	–0,53
45				nem társasági	0,39	4,82	2,24
46				nincs kézügyessége	0	4,18	2,86
47				egyedülálló	–0,06	3,24	2,8
48		6		érthetetlen dolgokkal foglalkozik	–0,17	7,29	3,5
49				félénk	–0,17	2,24	1,61
50		–7	–8	kifelé forduló	–0,22	–3,76	–1,17
51		–10		indiai vagy arab	–0,35	–2,38	–0,23
52			–6	titokzatos dolgokkal foglalkozik	–0,5	1,82	–2,11
53				őrült	–0,56	4,71	0,71
54		–6	–2	fekete bőrű	–0,59	–3,94	–3,43
55				homloka ráncos a sok gondolkozástól	–0,61	3,71	3,66
56				szociálisan érzéketlen	–0,67	2,29	2,14
57				csak matematikus barátai vannak	–0,78	5,24	3,11
58				nem híve a formalitásoknak	–0,89	–1,88	1,41
59		–9		teljesen átlagos személyiség	–0,89	–3,35	0,93
60		–5		fiatal	–0,89	–4	0,1
61				szakbarbár	–0,94	3,59	1,89
62				tutyimutyi	–1,44	1,47	2,18
63		–4		nő	–1,44	–4,06	–0,73
64				kövér	–1,89	–0,41	–0,23
65				nem ért a mindennapi dolgokhoz	–2	4,65	3,29
66		–8		lezseren öltözködik	–2	–3,76	0,63
67		–2	–3	sportos	–2,11	–5,35	–2,77
68			–5	titkos dolgokkal foglalkozik	–2,22	0,35	–2,18
69	–10	–1	–1	divatosan öltözik	–2,39	–5,35	–5,03
70	–9			hosszúhajú	–2,67	–0,24	2,3
71	–8			unalmas személy	–2,83	3,24	0,86
72	–7		–7	nincs haja	–2,83	–0,06	–1,3
73	–6		–9	könnyen méregbe gurul	–3,78	–2	–1,14
74	–5			leginkább lustálkodni szeret	–4,28	–2	–0,57
75	–4			nincsenek barátai	–4,33	1,35	–0,28
76	–3			unalmas munkát végez	–4,78	4,41	–0,07
77	–2		–4	beképzelt	–4,78	–1,24	–2,43
78	–1			érzelem-mentes	–5,33	–1,06	0,82

c: A kontrollcsoport véleménye szerint rendezve a kapott eredmények így néznek ki (3. táblázat):

					hallgatók szerint	*„szerintem mások szerint”*	*kontroll-csoport szerint*
hely					*átlag*	*átlag*	*átlag*
1		**1**	**1**	szemüveges	4,5	8,76	7,37
2		**3**	**2**	férfi	4,94	8,41	6,9
3	**2**	**8**	**3**	fehér ember	7,47	6,94	6,2
4	**9**		**4**	fő tevékenysége jelenségek, folyamatok modellezése	5,28	3,88	6,07
5	**5**	**2**	**5**	zseni	6,39	8,59	5,79
6	**3**	**5**	**6**	nehéz problémákat old meg	7,33	7,53	5,45
7	**6**		**7**	művelt, kulturált	6,11	5,65	5,34
8			**8**	rendezetlen, furcsa haja van	3,11	5,88	4,8
9			**9**	furcsa szokásai vannak	2,83	4,59	4,72
10		**4**	**10**	fő tevékenysége a számolás	1,17	8,06	4,66
11	**4**		**11**	fontos munkát végez	6,94	3,41	4,63
12				karcsú/vékony	4,94	4	4,6
13				befelé forduló	2,44	5,35	4,17
14				ódivatúan öltözik	0,83	4,88	4,1
15				középkorú	4	2,88	3,93
16	**10**			kedves, szelíd	5,22	2,82	3,9
17		**7**		öreg	5,11	7,24	3,87
18				állandóan a könyveket bújja	1,28	4,94	3,86
19		**10**		ősz	3,5	6,18	3,77
20		**9**		cseppet sem sportos	3,56	6,65	3,7
21				homloka ráncos a sok gondolkozástól	–0,61	3,71	3,66
22	**1**			érdekes munkát végez	7,61	–1,82	3,59
23		**6**		érthetetlen dolgokkal foglalkozik	–0,17	7,29	3,5
24				boldog	5,06	3,71	3,36
25				nem ért a mindennapi dolgokhoz	–2	4,65	3,29
26				csak matematikus barátai vannak	–0,78	5,24	3,11
27	**8**			érdekes személy	5,67	–0,29	3,07
28				munkája során állandóan számítógépet használ	4,17	3,47	3,04
29				nincs kézügyessége	0	4,18	2,86
30				egyedülálló	–0,06	3,24	2,8
31				munkájához elég neki egy papír és egy ceruza	1,22	5,53	2,72
32				fő tevékenysége a tanítás	2,39	3,41	2,71
33				még megvan a hajszíne	1,72	0,41	2,45
34				normál módon öltözik	4,06	1,76	2,4
35				átlagosan érdekes munkát végez	1,22	–1,59	2,4
36	*–9*			hosszúhajú	–2,67	–0,24	2,3
37				nem társasági	0,39	4,82	2,24
38				tutyimutyi	–1,44	1,47	2,18
39				szociálisan érzéketlen	–0,67	2,29	2,14
40	**7**			rövidhajú	6,06	3,29	2,13
41				szakbarbár	–0,94	3,59	1,89
42				jó humora van	2,83	–1,65	1,79
43				házas/kapcsolatban él	4,89	0,82	1,77
44				átlagosan érdekes	3,28	0,53	1,69
45				félénk	–0,17	2,24	1,61
46				társadalmilag elismert	3,67	2,82	1,57
47				nem híve a formalitásoknak	–0,89	–1,88	1,41
48				kicsit testes	1,94	2,18	1,4
49				átlagosan társasági	3,33	–1,59	1,37
50		*–9*		teljesen átlagos személyiség	–0,89	–3,35	0,93
51	*–8*			unalmas személy	–2,83	3,24	0,86
52				magabiztos	3,11	1,18	0,83
53	*–1*			érzelem-mentes	–5,33	–1,06	0,82
54				őrült	–0,56	4,71	0,71

55				sárga bőrű	1,12	–2,06	0,63
56		–8		lezseren öltözködik	–2	–3,76	0,63
57				átlagosan kifelé forduló	1,89	–0,12	0,52
58		–5		fiatal	–0,89	–4	0,1
59	–3			unalmas munkát végez	–4,78	4,41	–0,07
60				pedáns	2,44	3,47	–0,07
61				kövér	–1,89	–0,41	–0,23
62		–10		indiai vagy arab	–0,35	–2,38	–0,23
63	–4			nincsenek barátai	–4,33	1,35	–0,28
64				szociálisan érzékeny	3	–0,65	–0,5
65		–3		társasági	0,5	–4,35	–0,53
66	–5			leginkább lustálkodni szeret	–4,28	–2	–0,57
67		–4		nő	–1,44	–4,06	–0,73
68				közepesen sportos	0,72	–1,59	–0,87
69			–10	érdekes életet él	2,5	–1,88	–1,14
70	–6		–9	könnyen méregbe gurul	–3,78	–2	–1,14
71		–7	–8	kifelé forduló	–0,22	–3,76	–1,17
72	–7		–7	nincs haja	–2,83	–0,06	–1,3
73			–6	titokzatos dolgokkal foglalkozik	–0,5	1,82	–2,11
74			–5	titkos dolgokkal foglalkozik	–2,22	0,35	–2,18
75	–2		–4	beképzelt	–4,78	–1,24	–2,43
76		–2	–3	sportos	–2,11	–5,35	–2,77
77		–6	–2	fekete bőrű	–0,59	–3,94	–3,43
78	–10	–1	–1	divatosan öltözik	–2,39	–5,35	–5,03

A táblázat első sorait vizsgálva feltűnik, hogy a kontrollcsoport véleménye aránylag hasonló mértékben fedi a hallgatók által kitöltött kétféle kérdőív mindegyikének elejét.

Különösen meghökkentő lehet, az – ami már az előző táblázatból is leolvasható volt –, hogy a valóságban épp úgy, mint a hallgatók sejtése szerint az „átlagemberek” a matematikus legjellemzőbb tulajdonságának azt tartják, hogy szemüveges!

Egy személyes megfigyelés szerint az ELTE Matematikai intézetének oktatóinak csak mintegy harmada visel szemüveget – legalábbis a mindennapi érintkezések és tanítás során. Ugyanakkor az oktatók 20%-a nő. Vagyis ez a sztereotípia a valóságot nem fedi. Ráadásul az idősebb oktatók körében – mint a teljes lakosság körében is – a kor előrehaladtával nő a szemüveget viselők aránya. Vagyis itt tényleg tipikus sztereotípiával állunk szemben, amely nem csak a tapasztalatnak mond ellent, hanem a józan megfontolásnak is.

Ez a sztereotípia hasonló a korral kapcsolatos sztereotípiához: Nyilvánvalóan – matematikusok közelebbi ismerete nélkül is tudhatóan – egy matematikus eleinte fiatal, aztán középkorú, később idős. Ennek ellenére ezen a kontrollcsoport szerint rendezett listán látható, hogy a „középkorú”, illetve „öreg” a 15–17. helyre került, míg a „fiatal” az 58. helyre! (Logikusabb lenne, hogy a „fiatal” legyen a legjellemzőbb, hiszen a fiatalok – így a fiatal matematikusok – közül sajnos nem mindenki éli meg az öregkort. De a sztereotípiák általában nem logikai alapon működnek.)

A három táblázat összehasonlítása. A táblázatok együttes vizsgálatából csak néhány fontos tanulságot emelünk ki:

1. Még az erős sztereotípiák is háttérbe szorulhatnak a tapasztalat által. Ezt mutatja például, hogy a 2. és 3. táblázaton első helyezett „szemüveges” tulajdonság az első táblázaton a 16. helyre került.

2. Bizonyos sztereotípiák megerősítést nyerhetnek, vagy akár fel is erősödhetnek a tapasztalat által.
   Ezt mutatja például, hogy a 3. táblázaton 58. helyezett „fiatal” az 1. táblázaton (a hallgatóknál) 60. Ennek valószínűsíthető oka, hogy a matematikusoknak valóban csak egy aránylag kis százaléka lesz fiatalon egyetemi oktató, pláne olyan, akit a hallgatók is „matematikusnak” (és nem például „kortársnak”, „havernak”) tekintenek inkább.

3. A hallgatók szerint elsősorban a belső tulajdonságai és a munkája jellemez egy matematikust, viszont úgy gondolják, mások szerint inkább a külseje jellegzetes. A valóságban a kontrollcsoport véleménye a kettő között van.
   Ha a jellemzőket három csoportba soroljuk, úgyis mint „külső tulajdonságok” (K), „személyiségjegyek” (SZ) és „munkájukkal kapcsolatos jellemzők” (M), akkor megint érdekes sajátságot figyelhetünk meg: A kontrollcsoport első tíz helyezettje között a K-SZ-M megoszlása 4-3-3.

   Ugyanez a megoszlás a 2. táblázat alapján nézve 6-1-3. Viszont maguk a hallgatók szerint 2-4-4!

III. Az interjúk

Az interjúk elemzése magyarázatot adhat néhány jelenségre, melyeket a rajzok, illetve a tesztek elemzése során tapasztaltunk.

Az interjúk kérdéseit elektronikusan kapták meg a hallgatók, arra szabadon, tehát mennyiségi megkötések és előzetesen megadott lehetőségek és minták nélkül válaszolhattak. Ennek eredményeképpen egészen különböző szerkezetű és jellegű válaszokat kaptunk, sőt három hallgató egyáltalán nem is küldött vissza válaszokat, így ebben a vizsgálatban csak 15 fős minta állt rendelkezésünkre, szemben az előző két vizsgálatban részt vevők 18 fős létszámával.

Az elemezhetőség érdekében a válaszokat kivonatoltuk és táblázatba rendeztük, a folyószövegekből csak pár szavas idézeteket tartva meg esetleg. (3. számú melléklet)

Az interjúk néhány eredménye összefoglalva:

1. A hallgatóknak 47 százaléka (7 fő) állította azt, hogy egyáltalán nem ismert korábban matematikust. 27 százalék (4 fő) említi meg a matematika tanárait, mint korábban kizárólagosan ismert matematikusokat. Ugyancsak 27 százalék (4 fő) állítja, hogy korábban is ismert már matematikust, nem csak a matematika tanárát.

2. A korábban feltételezett személyiségjegyek között főleg pozitívakat említ 20 százalék (3 hallgató). Kiegyensúlyozottan említ pozitív és negatív jegyeket is 33 1/3 százalék (5 hallgató), főleg negatívakat említ 46 2/3 százalék (7 hallgató).

3. A matematikus külsejét, öltözködését – emlékeik szerint – 13 1/3 százalék (2 hallgató) gondolta előnyösnek, 26 2/3 százalék (4 fő) semlegesnek írta le vagy nem nyilatkozott, és 60 százalék(!) (9 hallgató) tartotta előnytelen külsejűnek a matematikusokat.

4. A hallgatók közül 33 1/3 százalék (5 fő) nyilatkozott úgy, hogy matematikusnak tartotta a matematika tanárait, 33 1/3 százalék (5 fő) egy részüket, és ugyancsak 33 1/3 százalék (5 fő) olyan hallgató volt, aki nem tartotta őket annak.

5. A képet kialakító hatások között 46 2/3 százalék (7 hallgató) említi a társait, a környezetét, 40 százalék (6 hallgató) említ médiumokat, és 46 2/3 százalék (7 hallgató) hivatkozik személyes tapasztalatokra – beleértve esetleg a tanárait is. A médiumokat említő hallgatók fele nem mond konkrétumokat, a többiek az internetet, könyvelet, tévét, filmeket említ.

6. 20 százalék (3 hallgató) állítja, hogy nem változott meg a matematikus-képe az egyetemi tanulmányai során, 13 1/3 százalék (2 hallgató) írta, hogy kis mértékben, és 66 2/3 százalék(!) (10 hallgató) állítja, hogy megváltozott vagy nagyon megváltozott benne ez a kép.

Nézzük az adatokon túl az összefüggéseket is:

- Azok közül, akik állításuk szerint személyesen ismertek matematikusokat, csak egy olyan van, akinek a matematikusok személyiségéről, illetve külsejéről negatív képe volt. (Ő egyetlen matematikust ismert, ezt általánosította.) A többiek semleges vagy kifejezetten pozitív képre emlékeznek.

- Az a három hallgató, akinek nem változott az egyetemi tanulmányai során a matematikus-képe, egyaránt úgy nyilatkozott, hogy ismert korábban matematikust egyik a matematika tanárát említette).

- Azok közül a hallgatók közül, akik arról nyilatkoztak, hogy megváltozott a matematikus-képük többen is kiemelték, hogy most már számukra – a korábbival ellentétben – a matematikusok „normális", „hétköznapi", „rendesen öltözködő", „mint bárki más", stb… emberek.

1. Mindezek alapján megállapítható – illetve a minta létszámára tekintettel inkább sejtésnek tekinthető, további vizsgálat tárgyát képező összefüggések:

2. A hallgatók matematikus-képe ha változott, akkor olyan irányba, hogy kevésbé szélsőségesen gondolkoznak a matematikusokról, kevésbé látják őket „csodabogaraknak". Mindennek a változásnak természetesen – többek által

is megfogalmazottan – az volt az oka, hogy számos matematikussal találkoztak tanulmányaik során.

A hallgatók 20 százaléka (6 hallgató) említ a matematikus-képüket alakító hatások között médiumokat. Ez elég magas arány ahhoz, hogy megerősítsen minket abban, hogy igen fontos odafigyelni a média által közvetített matematikus-képre, az jelentősen – bár természetesen egyénenként változóan – befolyásolja a társadalom sztereotípiáit.

3.7. Összefoglalás, következtetések

Összességében megállapíthatjuk, hogy az előzetes feltevéseink részben igazolódtak, de nem teljesen.

Erre a vizsgálatra vonatkozó előzetes hipotéziseink alapján

1. Kiderült, hogy a vizsgálatba bevont matematika szakos hallgatók matematikus-képe valóban jelentősen eltér a kontrollcsoportétól, de a tapasztaltnál nagyobb eltérésre számítottunk.

   A matematikus-rajzokon megjelentek a szakirodalomban leírt sztereotípiák. De az is megállapítható volt – a rajzokat összevetve a teszt és az interjú eredményeivel –, hogy a hallgatók elsősorban nem a saját sztereotípiáikat rajzolták meg, hanem a társadalomban szerintük létezőket. Ugyanakkor a rajzaik pozitívabb összképet mutatnak, mint a szakirodaloméi. Például gyakrabban rajzoltak derűs matematikust, rajzaikon általában rendezettebb a matematikusok külseje is.

   A teszt is kimutatta, hogy jelentősen eltér a hallgatók és a kontrollcsoport képe. De ez az eltérés nem akkora, mint amekkora a hallgatók véleménye és a „feltételezett vélemény” között van.

   Az interjúk elemzése kimutatta, hogy ezeket az eltéréseket valóban az okozza, hogy ők már személyesen megismertek több matematikust is. (Ezek egy részét még egyetemi tanulmányaik előtt.)

   Arra, hogy a tapasztalt eltérés nem akkora, mint amire számítottunk, egy lehetséges magyarázat lehet, hogy a kontrollcsoport tagjai is aránylag nagy százalékban ismerhettek matematikusokat. De ez – bár igen valószínű – csak feltételezés. Tisztázására további vizsgálatokat tervezünk.

2. a: Ez az előfeltevésünk nagy mértékben beigazolódott, a hallgatók által vélelmezett kép jelentősen eltért a sajátjuktól.

   Hogy ezt az eltérést valóban az okozza-e, hogy a hallgatók számos előítélettel találkoztak már és gyakorta szembesültek azzal, hogy miket gondolnak az emberek egy matematika szakos egyetemistáról, szintén további vizsgálatot igényel. A feltételezést egyelőre személyes beszélgetések erősítik.

   b: Ez az előfeltevésünk nagymértékben beigazolódott, a két kép jelentősen, bár korántsem minden vonatkozásában eltér egymástól.

   Az eltérések oka lehet, hogy néhány az előítéletek közül, amikkel találkoztak, érzékenyebben érintette őket, mint amennyire az a gyakoriságuk alapján indokolt lenne. Az eltérés másik oka lehet, hogy a kontrollcsoport véleménye is eltérhet egy szélesebb, reprezentatív minta véleményétől.

3. Minthogy nem volt arra vonatkozó adatunk a nemzetközi szakirodalomból, hogy az embereknek hány százaléka ismer személyesen matematikust, így eredményünket nem volt mivel összehasonlítani. Véleményünk szerint aránylag magas értéknek számít, hogy a hallgatók mintegy negyede ismert korábban matematikust. Kifejezetten magasnak gondoljuk ezt az értéket, ha ehhez a számhoz hozzá vesszük azokat is, akik a matematika tanárukat ismerték korábban, mint matematikust: több mint 50%! Reprezentatív mintán ezeket az értékeket alacsonyabnak várjuk, mivel ebben a mintában egyetemi hallgatók, ráadásul matematika szakos hallgatók voltak. De konkrét értékeket a már említett tervezett vizsgálat adhat.

   Az interjúk során beigazolódott, hogy a hallgatók egy része valóban olyan családi háttérrel rendelkezik, amelyben vannak matematikusok, illetve a környezetükben, esetleg középiskolai tanulmányaik során találkoztak matematikussal. E vizsgálatnak nem volt célja a kérdés tisztázása, így az interjú nem kérdezett rá, de valószínűsíthető, hogy ez a körülmény valóban befolyásolta a diákok pályaválasztását.

Előzetesen azt tételeztük fel, hogy a hallgatók nem tekintették a matematika tanáraikat matematikusnak, mivel ez a szakirodalomban így szerepel, de ezt csak kis mértékben igazolódott be. (kb. 30%)

Az eltérés oka kettős lehet:

- A hallgatók azért is választották ezt a szakirányt, mivel ők matematikusnak tartották a tanáraikat, és a matematikus személye, a matematikusi pálya szempontjából azok vonzó példát mutattak.
- Magyarországon a matematika tanárok átlagos matematikai képzettsége jelentősen eltér az angolszász országok matematika tanárainak átlagos képzettségétől. Egy magyar középiskolás sokkal jogosabban tarthatja matematikusnak a tanárát, mint pl. egy amerikai vagy angol diák, és ez az eltérés a vizsgálat eredményeiben is megmutatkozott.

4. Ez a feltevésünk is beigazolódott a vizsgált mintát illetően. A hallgatók matematikusokról alkotott képe általában megváltozott egyetemi tanulmányaik során, többeknél jelentősen. Ezzel a változással a hallgatók maguk is tisztában vannak. Az is kiderült, hogy a hallgatók általában már korábban, egyetemi tanulmányaik előtt is a nemzetközi vizsgálatokban kimutatottnál és a kontrollcsoportnál egyaránt pozitívabb képpel rendelkeztek a matematikusokról, bár ezen a téren a vizsgált minta nem mutatott egységes képet.

   A változásnak egyértelmű oka volt, hogy a hallgatók az egyetemen személyes tapasztalatokra tettek szert mind matematikusokkal, mind a matematikával kapcsolatban. Az elégedettségre adhat okot, hogy ez a tapasztalat a matematikus-képüket nem negatívan, hanem pozitívan befolyásolta.

A vizsgálat eredményei, haszna

Egyik eredménye a vizsgálatnak, hogy egyértelműen megmutatta, hogy a matematikusokról alkotott sztereotipikus kép nem változtathatatlan. Ha nem is kvantitatívan, de kvalitatívan látszik, hogy a matematikusokról szerzett személyes tapasztalatok pozitívan tudják befolyásolni a matematikusokról a közvéleményben élő képet.

Ugyancsak eredménye a vizsgálatnak, hogy számos tisztázandó, további vizsgálatot igénylő kérdésre ráirányította a figyelmet. Ezek közül néhányat meg is említettünk. További vizsgálatok lehetséges irányát a dolgozat összefoglaló részében fogjuk vázolni.

4. fejezet

Matematikusok ábrázolása a Good Will Hunting című filmben

A ***Good Will Hunting*** (1997) amerikai filmdráma. A Gus Van Sant rendezte film több különböző díjjal büszkélkedhet. Például Oscar-díjat kapott a forgatókönyvéért (a film két fő színésze, Matt Damon és Ben Affleck írta), és ugyancsak (a legjobb mellékszereplőnek járó) Oscar-díjjal jutalmazták Robin Williams-et a filmbeli pszichológus megformálásáért.

A film főszereplője egy dél-bostoni srác, Will Hunting (Matt Damon). Egyetemista korú, de a Massachusetts Institute of Technology-ra (MIT) takarítani jár, nem diplomát szerezni. Lepusztult munkáskörnyéken él, indulatos természete miatt gyakorta kerül összetűzésbe a törvénnyel. De kitűnik ebből a környezetből és a baráti köréből egyaránt, mégpedig csodálatos képességei miatt. Zseniális intellektuális képességei azonban nem tudnak kibontakozni, mert szociális háttere és a környezete megakadályozza ebben.

Legalábbis egy darabig. A film épp arról szól, hogy hogyan sikerül mégis elindulnia – egy hasonlóan mélyről indult pszichológus segítségével – egy sikeres élet irányába. A film leegyszerűsítve egy intellektuális és érzelmi sikertörténet. Nem meglepő, hogy az egyik Oscart a forgatókönyv kapta.

Munkánkban kiválasztottunk néhány olyan tulajdonságot, mely korábbi tudományos vizsgálatok alapján az emberek többsége szerint jellemző a matematikusokra. Ezek a következők: kor (idős), nem (férfi), rassz (fehérbőrű), testalkat (kövér), arcszőrzet (van), szemüveg (van), öltözködés (igénytelen, különc, régimódi), haj (kopasz, szokatlan), kapcsolatok (nincsenek barátai, magányos) és munka (képletek veszik körül, titokzatos dolgokat művel).

A következő lépésben a Good Will Hunting című film többszöri végignézése közben kiválasztottuk azokat a matematikusokat, melyeket név szerint is megismerhetünk, illetve akik szerepelnek annyit a filmvásznon, hogy a vizsgálati szempontjaink közül legalább néhányat esetükben is megítélhessünk. Ők: Will Hunting, Gerald Lambeau professzor, Tom, Alexander, Steven, Jack, Nimesh és „Alison". (Ez utóbbi az egyetlen női matematikus a filmben, akinek a neve ugyan nem hangzik el, de egy párbeszédben néhány mondatnyi szerephez jut. A továbbiakban az őt alakító színésznő után „Alison"-ként említjük).

Amennyiben a film lehetőséget adott erre, pontról pontra megállapítottuk, hogy a választott szereplők megfelelnek-e a vizsgált sztereotíp tulajdonságoknak.

Végül megkérdeztük az Eötvös Loránd Tudományegyetem 15 matematikus hallgatóját, hogy hogyan befolyásolta a film a matematikusokról alkotott képüket.

4.1. Eredmények

4.1.1. A matematikusok megjelenése. A 4.1. és 4.2. táblázatokban foglaltuk össze, hogy a korábban említett sztereotípiák közük melyek érhetők tetten a filmben a matematikusok korára, nemére, megjelenésére vonatkozóan. A matematikusok többsége az általános véleménynek megfelelően a film szerint is fehér férfi. A film nyolc nevesített szereplője közül, aki komolyan foglalkozik matematikával, hét férfi, közülük öt fehérbőrű: a címszereplő, William Hunting, pártfogója, Lambeau professzor, az ő segédje, Tom, egy másik matematika professzor, Alexander, és Steven. Jack néger, Nimesh indiai származású, és az egyetlen női matematikusunk, Alison, szintén fehér. A matematikusok korára vonatkozó sztereotípia alapján vártnál a filmbeli matematikusok átlagéletkora jelentősen fiatalabb. Alexander az ötvenes éveivel a legidősebbnek számít a film matematikusai között, hatan pedig kifejezetten fiatalok (matematikus hallgatók). Kövérnek egyikük sem mondható, többnyire normál testalkatúak, talán csak „Alison" túlsúlyos, de lehet, hogy ő is pusztán az előnytelen öltözködése miatt tűnik annak. A hét férfi közül kettőnek van valamilyen arcszőrzete, és csak egyikük szemüveges (bár olvasáshoz Lambeau professzor és Alexander is szemüveget használ). A megjelenő matematikusok és matematikushallgatók közül senki sem visel elegáns ruhát, öltönyt, Lambeau professzor még az előadásait is egy lezseren a nyakába lógatott sállal tartja. Hajviseletük általában rendezett, semmilyen szempontból nem kirívó, ketten kopaszodnak. Az általános képnek talán Alexander felel meg leginkább. Benne a kutatásokban feltárt sztereotip jellemzők jelentős része felfedezhető: aránylag idős, kopaszodó fehér férfi, homlokán ráncokkal, konvencionális öltözékben. Sőt, noha egyértelmű, hogy Alexander csak olvasáshoz használja a szemüvegét, ám a filmbeli szereplésének több, mint harmadában (24-ből 9 másodpercben) szemüveggel az orrán vagy a kezében látjuk, így a néző joggal társítja Alexander képéhez a szemüveget.

Tom is olyan típust testesíti meg, aminek a képe szintén jelen van a közvéleményben, nevezetesen az okos, de nem zseniális, a szorgalmas, megbízható és unalmas „kocka" matematikust.

Bár külön női matematikusokról létező sztereotípiák vizsgálatáról nem ír a szakirodalom, de valószínűleg nagyon jellemzőre, a minden bizonnyal létező „női matematikus" közfelfogásban létező képének megfelelően formált karakter „Alison" is. Könnyű elhinni, hogy az emberek többsége éppen ezt várja egy matematikus nőtől: ruhadarabjait igénytelenül válogatja össze, megjelenése slampos, régimódi, hajviselete semmitmondó, lényegében minden nőiességet nélkülöz. Márpedig ez a kép – jelen esetben alighanem mindnyájunk tapasztalata alapján mondható – nagyon nem felel meg a valóságnak.

	Will	***Lambeau***	***Tom***	***Alexander***
kor	fiatal	középkorú	fiatal	idősödő
nem	férfi	férfi	férfi	férfi
rassz	fehér	fehér	fehér	fehér
testalkat	normál	normál	normál	normál
arcszőrzet	nincs	nincs	nincs	nincs
szemüveg	nincs	nincs*	van	nincs*
öltözködés	hétköznapi	lezser	konzervatív	konzervatív
haj	átlagos	átlagos	átlagos	kopaszodó

4.1. táblázat. Will, Lambeau, Tom és Alexander külső megjelenésének összefoglalása a választott szempontok alapján. *Csak olvasáshoz.

	Steven	***Jack***	***Nimesh***	***„Alison”***
kor	fiatal	fiatal	fiatal	fiatal
nem	férfi	férfi	férfi	nő
rassz	fehér	néger	indiai	fehér
testalkat	normál	normál	normál	túlsúlyos
arcszőrzet	nincs	bajusz	körszakáll	nincs
szemüveg	nincs	nincs	nincs	nincs
öltözködés	sportos	sportos	sportos	ódivatú
haj	átlagos	kopaszodó	hosszú	előnytelen

4.2. táblázat. Steven, Jack, Nimesh és „Alison” külső megjelenésének összefoglalása a választott szempontok alapján.

4.1.2. A matematikusok barátai, kapcsolatai. Barátok, család, kapcsolatok szempontjából nincs egységes kép a filmben, bár legtöbb esetben ezekről inkább csak sejtéseink vannak, a film nem mutatja be a magánéletük részleteit, csak utal ezekre. Lambeau professzor szemlátomást világfi, a kapcsolatteremtés területén éppúgy sikeres, mint a munkájában. Will, bár kiterjedt és összetartó baráti körrel rendelkezik, sőt a film során a szerelmet is megtalálja, de érzelmileg sérült és társadalmilag deviáns. Viszont – és itt újra megjelenik a sztereotípia – ő a zseni.

Tipikus elképzelés, hogy a matematikus nem csupán okos, de nagyon okos. Ezt a film készítői is felhasználják: Will Huntingról kiderül, hogy több területen is elképesztően tehetséges. Ez nehezítheti esetleg kapcsolatok, barátságok kialakítását átlagos képességű személyekkel, de jelen esetben erről nincs szó. Barátai inkább büszkék Will kiemelkedő tudására, semmint zavarná őket. Mikor az egyetemi hallgatók bárjában – ahova a haverjaival együtt illetéktelenül megy be szórakozni – konfliktusa támad egy történész hallgatóval, azt könnyedén alázza történelemből. Ezáltal barátját menti ki egy kínos beszélgetésből.

Amikor verekedése miatt bíróság elé kerül, kiderül, hogy lényegében ismeri az Egyesült Államok összes büntetőperét a hozzájuk tartozó ítéletekkel együtt, ami – tekintve, hogy az USA-ban precedensjog van érvényben – szinte felbecsülhetetlen értékű. Láthatja tehát a néző, hogy Will Hunting érvényesülhetne mint jogász, vagy mint történész is. De azt, hogy Will egy egészen rendkívüli tehetség, a film készítői abban látták alkalmasnak megmutatni, hogy még matematikában is kiváló. (Jellemző, hogy a film készítői először egy elméleti fizikust akartak a történet főszereplőjének választani, de később mégis inkább egy matematikus figurája mellett döntöttek.) Will tehetségesebb, mint maga professzor, aki pedig szintén nem hétköznapi matematikus: a film szerint megkapta a Fields-érmet. Ez a különbség egyébként el is hangzik a filmben Will szájából (a professzor számára bonyolult problémák megoldása neki nem jelent kihívást), de ezt nem sértő szándékkal mondja.

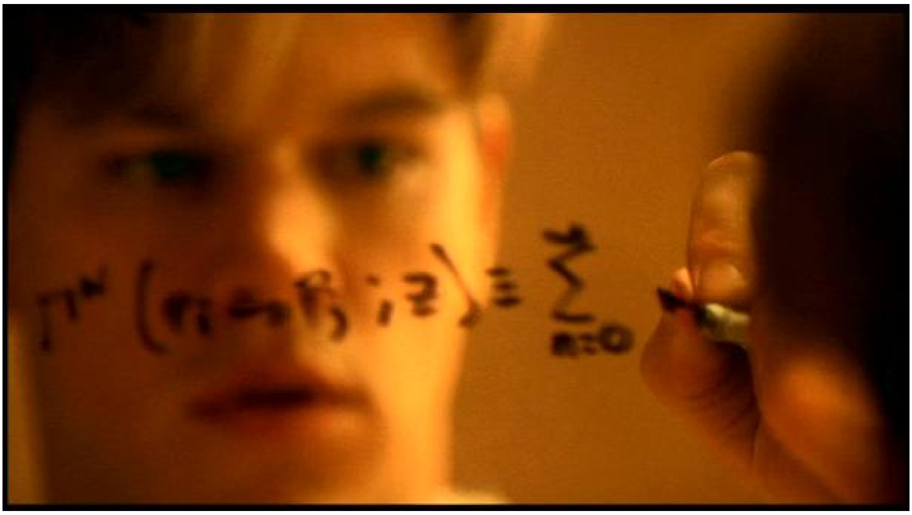
4.1.3. A matematikusok munkája. Mit csinál egy matematikus, amikor dolgozik? A legtöbb embernek fogalma sincs erről, és a Good Will Hunting sem sokat segít abban, hogy az emberek pontosabb képet alkothassanak.

Közvetlenül a főcím után feltűnik a matematikus professzor. Az MIT egyik nagyelőadóját látjuk, egy matematika előadás utolsó perceit. A háttérben egy hatalmas tábla, képletekkel teleírva. Ez tökéletesen illik abba a képbe, amit az emberek általában gondolnak: a matematikus képletekkel dolgozik. A professzor éppen kihirdeti, hogy felírtak egy Fourier-transzformációt a tanszéki táblára. Ha valaki a szemeszter vége előtt megoldja, akkor annak a megoldását leközli az egyetem folyóirata. Elmondja a hallgatóságnak azt is – egyszersmind a feladat nehézségét is érzékeltetve –, hogy eddig ezt a feladatot „bizonyították Nobel díjasok, matematikai pályadíjasok, neves asztrofizikusok, és magamfajta szerény professzorok."

A jelenet hűen tükrözi azt a képet, hogy a matematikusok általában feladatokat oldanak meg és rengeteget gondolkoznak, amíg egy-egy nehezebb problémával megbirkóznak. Ez nagyjából megfelel a valóságnak. Az az ötlet viszont, hogy egy valaki által korábban már megoldott nehéz probléma újbóli és újbóli megoldásait publikálják, a magyar szinkron fordítójától származik. Hasonlóan a Fields-érem szánalmas félrefordításához („matematikai pályadíj" – alighanem a *field – mező, pálya* szó fatális félreértéséből), ami sajnos éppen azt erősíti meg, hogy a társadalom (de legalábbis a film szövegkönyvének fordítója) számára a matematikusok egyik legnagyobb elismerése ismeretlen fogalom. Éppen olyan, mintha nem tudnánk, mit jelent a színészeknek az Oscar-, vagy a tudósoknak a Nobel-díj. Az eredeti angol szöveg egyébként nem áll messze a valóságtól, abban a felsoroltak olyanok, akik korábban részesültek abban a megtiszteltetésben, hogy a munkájuk megjelenhetett az „MIT Tech"-ben. Elég hasztalan dolog lenne, ha a kutató matematikusok újra és újra ugyanazt a problémát oldanák meg. A kitűzött feladat valójában nem is különösebben nehéz. Egy átlagos képességű matematikushallgató pár óra alatt megoldhatja. Ráadásul – mint e dolgozat későbbi részeiből is kiderül – a feladatoknak semmi köze sincs a beígért „Fourier-transzformáció"-hoz.

A következő olyan jelenetben, amikor valaki matematikával foglalkozik a filmben, azt láthatjuk, amint Will feladatmegoldást firkál egy tükörre (4.1. ábra). Elmélyülten koncentrál, de nem hezitál, nem akad el, hanem azonnal a megoldást, a végeredményét írja fel a kitűzött feladatnak. A képsor üzenete nyilvánvaló: aki igazán zseniális matematikából, annak számolgatnia sem kell. Akármilyen nehéz feladattal első pillantásra boldogul, még akkor is, ha másoknak ehhez egy egész szemeszter is kevés. Ez természetesen téves képzet. Legyen valaki akármilyen zseniális matematikus, némely számítás eredményét neki is papírra kell vetnie.

A jelenetnek nyilvánvalóan csak dramaturgiai szerepe van. Hiszen ha lenne is ilyen matematikus, ha például Will – a filmben az abszurditásig felnagyított – képességei lehetővé tennék is, hogy egyből a végeredményeket írja fel, akkor meg teljesen felesleges a tükörre írnia ezeket. Írhatná egyből a folyosói táblára.



4.1. ábra. Will elmélyülten ír a tükörre.
(forrás: http://www.delvecchio.ca/images/math.jpg)

A filmben szerencsére valóságos matematikusi munkamódszereket is láthatunk. Ilyeneket mutatnak be például azok a jelenetek, melyekben megjelenik a társsal vagy csoportban dolgozó matematikus. Ez részben eloszlathatja azt a tévhitet, hogy a matematikus mindig magányosan dolgozik, formulákon, képleteken könyveken és esetleg számítógépen kívül nem veszi más körül. Lambeau professzor már a feladatok kitűzésekor beszél „a tanszék" munkájáról. Egy jelenetben látjuk, amint Will-lel együtt old meg egy gráf-színezési problémát. Később Lambeau, Tom és Alexander együtt gondolkozik egy másik matematikai problémán, majd Will is csatlakozik hozzájuk. De az is kiderül a filmből, hogy mindegyikük dolgozik egyénileg is, így a film helyesen szemlélteti, hogy a csoportmunka csak egy része a matematikus alkotó tevékenységének.

A film matematikát tartalmazó jeleneteiben mindenütt előfordulnak matematikai szakkifejezések, képletek és a matematikai szaknyelv. Még olyan esetekben is, amikor ez nem feltétlen lenne szükséges. Ezek szemléltetik, hogy a matematika tele van képletekkel és szakkifejezésekkel. Már a főcím alatt képletek kavarognak a háttérben, felettébb misztikusan. Matematikáról lévén szó, az természetes, hogy képletekkel teli minden tábla, ami a filmvásznon feltűnik. De a szereplők akkor is matematikai zsargont használnak, amikor arra nem volna feltétlenül szükség. Például a tanszéki hirdetőtáblán megjelenő egyik felvetett probléma homeomorfikusan irreducibilis („homeomorphically irreducible") gráfokról szól. Ami egyszerűen annyit jelent, hogy a gráfban nincsen másodfokú pont, vagyis olyan pont, amiből pontosan két él indul ki. Ez is, mint a szaknyelv és a képletek használata szinte mindig, azt sugallja, hogy itt olyan dolgokról van szó, amelyeket normális földi halandó fel nem foghat. Az ilyen jelenetek alkalmasak lehetnek arra, hogy az emberek csodálattal tekintsenek a matematikusokra. Végső soron azonban ezek inkább távolítják és elriasztják el a nézőt a matematikától, a matematikusoktól.

Úgy véljük, Magyarországon kicsit jobb a helyzet, mint amit a film bemutat, mi ok nélkül általában nem használunk különleges matematikai zsargont. Megkérdeztünk például néhány kifejezetten gráfelmélettel foglalkozó kutatót, egyetemi tanárokat, akik egymástól függetlenül azt állították, hogy nem használnak semmilyen különleges szakkifejezést arra, ha egy gráfnak nincs másodfokú pontja.

4.1.4. ELTE hallgatók véleménye. A filmről beszélgettünk 15 egyetemi hallgatóval. Néhányuk (4 hallgató) számára kifejezetten lelkesítő volt a film. Nevezetesen az, hogy úgy látták, matematikával foglalkozni lehet könnyedén is, nagyon nehéz matematikai problémákat oldhat meg akár korukbeli ifjú is. Ezt az érzést Will Hunting figurája sugallja. Sajnálatosnak tartják azonban, hogy ez a figura nem valóságos, olyan, aki úgy csinálná a matematikát, mint Will, egyszerűen nem létezik.

A megkérdezettek többsége (11 hallgató) szerint ez a film nem ösztönözné őket, hogy ezt a pályát válasszák, illetve nem segítene meggyőzni a barátaikat arról, hogy érdemes matematikusnak lenni.

Mindannyian egyetértettek abban, hogy a filmben nem jelenik meg a matematika művelésének öröme. Látunk olyan képsorokat, amikor matematikusok indulatosan viszonyulnak egy-egy problémához, megoldáshoz. Látjuk azt is, hogy Will – az évszázad matematikai géniusza – érdeklődéssel ugyan, de meglehetős egykedvűséggel oldja meg a nehezebbnél nehezebb problémákat. De nem látjuk azt a matematikust vagy hallgatót, aki örömteli izgalommal kezd el dolgozni egy problémán, és nem látjuk azt sem, aki felcsillanó szemmel gyönyörködik egy-egy szép megoldásban. A film alapján úgy tűnhet, matematikával foglalkozni felettébb fáradságos. A zseninek pedig unalmas.

4.2. Következtetések

Az emberek többségének csak közvetett információi vannak arról, hogy néz ki egy matematikus, mit csinál, hogyan dolgozik. Benyomásaikat legendákra alapozzák, amelyek jobbára a médiából származnak, szinte sohasem valódi matematikusoktól. A valóságtól elrugaszkodott sztereotípiáknak káros hatásai lehetnek. Ha valaki egy olyan szakmát választ, amit sokkal jobbnak gondol a saját maga számára, mint amilyen az a valóságban, akkor megtörténhet, hogy csak sok év és rengeteg befektetett munka, tanulás után lesznek számára nyilvánvalóak a választott hivatás valós, de számára problémás oldalai. Az érem másik oldala az lehet, ha a közvéleményben negatív kép él egy foglalkozásról, például a matematikusi hivatásról, ilyenkor megtörténhet, hogy olyanok sem választják ezt, akiknek ez lehetne a kibontakozás területe. Éppen ezért nagyon indokolt alapos vizsgálat alá vetni, milyen képet mutat fel a média a matematikusokról.

Az a hatás sem lebecsülendő, amikor a tanulók kisebb lelkesedéssel tanulják a matematikát az iskolában, mivel úgy vélik – a „társadalmi összkép" alapján –, hogy az egy olyan tantárgy, amihez csak egészen különleges személyeknek lehet köze, nekik sohasem, vagy azért, mert azt gondolják – hiszen több film is ezt sugallja –, hogy a matematikus mind elvont.

A matematika oktatása és a matematika tanulása szempontjából egyaránt fontos, mi a véleménye a társadalomnak a matematikáról, matematikusokról. Egy gyermek pályaválasztásában, de már tanulásában, érdeklődésében is igen fontos elem az, hogy a szakma és a tantárgy mennyire vonzó/taszító számára, illetve a szülei számára. Annak a jelenségnek, hogy a képzőművészek gyermekei az átlagnál nagyobb százalékban lesznek képzőművészek, zenészeké zenészek, matematikusoké matematikusok. . . stb., nem csupán a tehetség öröklődése az oka. Hozzájárul ehhez a szülők példaképnek tekintése éppúgy, mint a szakma alapjaival való korai megismerkedés. Akár azt is mondhatjuk, hogy a gyermek számára a szülők „emberközelbe" hozzák a szakmát, a szakma képviselőit.

Megvizsgáltuk, milyen, a matematikusokról élő sztereotípiák jelennek meg a Good Will Hunting című filmben. Kiderült, hogy jónéhány matematikusra jellemzőnek vélt tulajdonság fellelhető, bár nem egyetlen személy testesíti meg.

Összességében a matematikusról, a matematikus munkájáról a film által közvetített kép nem igazán vonzó. Azt látjuk, hogy a matematika túlságosan bonyolult dolog. Nagy része még a jó matematikusok számára is nehéz. Sok kudarc éri a matematikust, mert nem, vagy csak nagy fáradsággal tudja megoldani a problémákat. És ha mégis elér eredményeket, mint például a filmben Lambeau vagy Alexander, akkor is ki van téve annak a veszélynek, hogy a pályája csúcsán egyszercsak betoppan egy ifjú tehetség, aki utólag feleslegessé teszi minden erőfeszítését. Matematikával foglalkozni tehát – gondolhatni – kizárólag a zseniknek éri meg, mások ne is próbálkozzanak vele.

5. fejezet

Matematikai tartalom a Good Will Hunting című filmben

Ebben a fejezetben a filmben központi szerepet játszó matematikai problémákkal foglalkozunk. Látható, hogy maguk a problémák is és azok megoldásai is – bár elsősorban a film dramaturgiai szempontjainak alávetetten, de – matematikailag átgondoltak. A megoldások egy része összetett, de az eredményt röviden is és bonyolultan is be lehet mutatni.

Először röviden bemutatjuk, milyen feladatok, illetve matematikai tartalmak voltak a filmben, mik azok a problémák, amiket Lambeau professzor a hallgatóknak első alkalommal a folyosói táblán feladott. Utána az előadóterem tábláján szereplő matematikai tartalmakat vesszük sorra, majd a folyosói táblára második alkalommal felírt problémáknak járunk utána. Ez utóbbi vizsgálata két részből áll, és azt is megmutatjuk, hogy a második rész megoldása nem teljes. Végül azt a problémát vizsgáljuk, melyet Will Hunting és Lambeau professzor közösen old meg Lambeau szobájában.

Ebben a fejezetben azt is bemutatjuk, milyen előzetes ismeretekre van szüksége egy matematikus hallgatónak ahhoz, hogy megértse a felmerülő gondolatokat.

Ezek után áttekintjük, hogy a magyar tudományegyetemek – ELTE (Eötvös Loránd Tudományegyetem), DE (Debreceni Egyetem) és SzTE

(Szegedi Tudományegyetem) – tananyagai miként fedik le ezeket, és a filmben szereplő feladatok hogyan integrálhatók a tananyagba.

Ennek a fejezetnek az utolsó szakaszában javaslatot teszünk arra is, hogy a film matematikai tartalma milyen célokkal és hogyan vihető be a közoktatásba, közép-, de esetenként akár általános iskolai szintre is.

5.1. A matematikai tartalom megközelítése matematikusként, és a matematikai tartalom közvetítése matematika szakos egyetemi hallgatók felé

5.1.1. Útkeresés gráfokban – a filmbeli első táblán kitűzött feladatok.

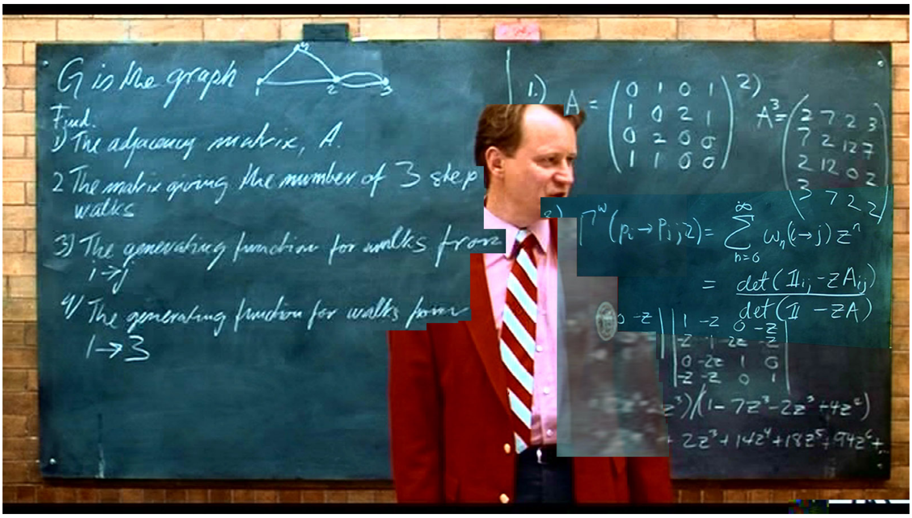
A következő feladat szerepelt a filmben, a tábla bal oldalára írva:

Feladat. G egy gráf a $V = \{1, 2, 3, 4\}$ csúcshalmazon, élei $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ (a $(2, 3)$ egy dupla él). Határozzuk meg

1. az A szomszédsági-mátrixot
2. azt a mátrixot, amely megadja a 3-hosszú séták számát
3. az $i \to j$ séták generátorfüggvényét.
4. az $1 \to 3$ séták generátorfüggvényét

I. Will Hunting megoldása. Will Hunting a jobb oldali táblára írta a megoldását, a következőképp:

(A tábla előtt Lambeau professzor folyamatosan takart. Szerencsére közben mozgott is, így mintegy tíz különböző képkockából össze lehetett montírozni egy aránylag teljes táblaképet. A megoldás egy része még így sem olvasható, de a többi részből kitalálható, megalkotható.)



5.1. ábra.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 12 & 7 \\ 2 & 12 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\Gamma^{\omega}\left(p_i \to p_j, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n\left(i \to j\right) z^n = \frac{\det\left(\mathbf{1}_{ij} - zA_{ij}\right)}{\det\left(\mathbf{1} - zA\right)}.$$

4.

$$\begin{vmatrix} -z & 0 & -z \\ 1 & -2z & -z \\ -z & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & -z \\ -z & 1 & -2z & -z \\ 0 & -2z & 1 & 0 \\ -z & -z & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{2z^3 + 2z^2}{4z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 1} = 2z^2 + 2z^3 + 14z^4 + 18z^5 + 94z^6 + \ldots.$$

Ebben a részben egy matematikus és egy matematika szakos egyetemi hallgató szemszögéből elemezzük és magyarázzuk a feladat matematikai hatását. A megoldást nem lehet néhány szóban elmagyarázni, mivel az jelentős mértékben használ egyetemi tananyagokat:

- Lineáris algebrából: elemi mátrixelmélet, mátrixok hatványa, Jordan-féle normálalak.
- Analízisből: konvergencia normált terekben, hatványsorok, hatványsorok konvergenciája.
- Kombinatorikából: generátorfüggvény, leszámlálás, rekurzív formulák.
- Gráfelméletből: szomszédsági-mátrix, utak, séták, a szomszédsági-mátrix hatványai.

II. Egy matematikus megoldása. Először vizsgáljuk a matematikus gondolatmenetét. Bár e dolgozat szerzőjének témavezetői tapasztalt algebra, illetve diszkrét-matematika oktatók, lineáris algebrát és diszkrét matematikát is majdnem minden egyetemi szinten tanítottak, elmondásuk szerint egyikük sem tudott a szóban forgó sétaszám generátor-függvényéről a filmben szereplő feladat vizsgálata előtt. Will táblán szereplő válaszai segítségével saját magunk találtunk ki egy lehetséges megoldást a feladatra.

Egy matematikus nézőpontjából a megoldást a következőképp interpretálhatjuk: A feladat az i-ből j-be vezető utak számának meghatározásáról szól. Mostantól a [30]-ban található gráfelméleti jelöléseket alkalmazzuk.

Legyen G a fenti gráf. Az első feladat meghatározni a táblára felrajzolt gráf szomszédsági-mátrixát. Az 1. feladatra adott megoldás nyilvánvalóan helyes.

A második feladat megadni a 3 hosszú séták mátrixát. Ez A^3, ahogy a 2. feladatra adott megoldásban is látjuk.

A harmadik kérdés megválaszolása kicsit több megfontolást igényel. Matematikusként tudjuk, hogyan kell kiszámolni egy adott hosszú sétát, értjük a generátorfüggvény fogalmát egy végtelen sorozatra. De ez nem olyan típusú, mint amilyeneket általában tanítunk. A filmben mutatott tábla segítségünkre lesz.

Jelöljük $\omega_n(i \to j)$-vel az n hosszú $i \to j$ séták számát. Mivel A^n megadja az n-hosszú sétákat két pont között, $\omega_n(i \to j)$ az ij indexű eleme a mátrixnak. A generátorfüggvény egy analitikus függvény, amit a hatványsorával definiálunk:

$$f_{i,j}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n\left(i \to j\right) \cdot z^n,$$

azaz z^n együtthatója az n-hosszú $i \to j$ séták száma.

Innen nem nagy lépés megvizsgálni a mátrix-hatványsort: $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot z^n$. Vagy talán mégis? Ez a kulcs a megoldáshoz. $F(z)$-t formális összegnek tekintve, $[F(z)]_i^j = f_{i,j}(z)$. Hogy a másik irányból motiváljuk a megoldást: ha már tudnánk, hogy egy mátrixra van szükségünk, amit az $f_{i,j}(z)$ hatványsorokból rakunk össze, akkor a mátrixot z-hatványok szerint felbontva $\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot z^n$ kódolja a generátorfüggvényt. A $\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot z^n$-t kiszámolhatjuk a szokásos mértani hatványsor-érveléssel. Azaz

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (A \cdot z)^n = \frac{1}{1 - Az} = (1 - Az)^{-1} = (I - Az)^{-1}, \quad (5.1)$$

felhasználva a mértani sorra vonatkozó $\sum x^n = 1/(1-x)$ képletet. Az inverz mátrix elemei a kívánt generátorfüggvények, mind racionális függvények z-ben.

Ezeket a gondolatokat precízzé kell tennünk, hogy ne csak a fizikusok, hanem a matematikusok igényeit is kielégítse. Egy lehetséges út a hatványsor-gyűrű $R[[z]]$ definiálása tetszőleges (nem feltétlen kommutatív) gyűrű felett. (ld. például [22, 40]). Ekkor látható, hogy az $n \times n$-es mátrixgyűrű feletti hatványsorok gyűrűje és a hatványsorgyűrű feletti $n \times n$-es mátrixok gyűrűje természetesen izomorfak. Ezek után az, hogy (5.1) teljesül, egyszerűen ellenőrizhető abból, hogy az

$$(I - Az) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot z^n \right) = I = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot z^n \right) \cdot (I - Az)$$

egyenlet teljesül $\mathbb{R}^{n \times n}[[z]]$-ben.

Bár az érvelés a formális hatványsorokról matematikailag korrekt és itt alkalmazható, (5.1) érvényességének bizonyítása általában analitikus módszerekkel történik. Azaz bebizonyítva, hogy az (5.1)-ben szereplő sor konvergens valahol, és ott egyenlő $(I - Az)^{-1}$-nel. Ehhez legyen μ az A legnagyobb abszolút értékű sajátértéke. A függvényoperátorok elméletéből és lineáris algebrából tanultak alapján következik, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} (A \cdot z)^n$ sor konvergens, ha $|z| < 1/|\mu|$. Ekkor a szokásos érvelés adja a kívánt formulát:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot z^n = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} A^n \cdot z^n = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} (Az)^n = \\ = \lim_{k \to \infty} \left(I - (Az)^{k+1} \right) \cdot (I - Az)^{-1} = (I - Az)^{-1} . \end{aligned}$$

Végül, az utolsó feladat, hogy megadjuk $\omega_n(1 \to 3)$ generátorfüggvényét. Ehhez egyszerűen az inverzét kell kiszámolni az $(I - Az)$ mátrixnak – ezt, mint később látni fogjuk, célszerű a Cramer-szabály segítségével számolni –, és aztán az első sor harmadik oszlopában szereplő értéket venni. Ez egy racionális függvény, a megfelelő generátorfüggvény pedig ennek a Taylor-sora.

III. A megoldás interpretálása egy matematika szakos egyetemi hallgató számára. Az ELTE-n a Diszkrét matematika című tárgy két, alap és intenzív szinten tanulható. Az intenzív képzés során a hallgatók tanulnak a szomszédsági-mátrixokról és azok tulajdonságairól, az alapképzés során nem. A DE-n és az SzTE-n a Kombinatorika tárgy tartalmazza ezeket az ismereteket. Ugyanakkor a szomszédsági-mátrix fogalma könnyen elmagyarázható akár gimnazistáknak is (lásd például e dolgozat 5.2. fejezetét): legyen A a mátrix, ahol $[A]_i^j$ az $i \to j$ élek száma. Most jelölje $\omega_n(i \to j)$ az n hosszú $i \to j$ séták számát. Vegyük észre, hogy az 1 hosszú $i \to j$ séták száma az $[A]_i^j$ elem, azaz $[A]_i^j = \omega_1(i \to j)$. Indukcióval belátható, hogy A^n kódolja az n hosszú séták számát egyik csúcsból a másikba. Valóban, egy $n+1$ hosszú séta i-ből j-be egy n hosszú $i \to k$ sétából (valamely k-ra) és egy 1-hosszú $k \to j$ sétából áll. Az $n+1$ hosszú séták számához össze kell adnunk ezt a két számot minden k csúcsra. Azaz

$$\omega_{n+1}(i \to j) = \sum_{k=1}^{n} \omega_n(i \to k)\, \omega_1(k \to j)\,.$$

Az indukciós feltétel szerint $\omega_n(i \to k)$ az ik eleme A^n-nek, és $\omega_1(k \to j) = [A]_k^j$, tehát

$$\omega_{n+1}(i \to j) = \sum_{k=1}^{n} \omega_n(i \to k)\, \omega_1(k \to j)$$

az ij-edik eleme A^{n+1}-nek, a mátrixszorzás szabályai szerint. A konkrét G gráfra a 3-hosszú séták számát A^3 adja meg, amely könnyen ellenőrizhetően ugyanaz, mint amit a film szerint Will Hunting a táblára írt. Ez az érvelés érthető bármely diáknak, aki elvégzett egy bevezető lineáris algebra kurzust (2. félév ELTE-n és DE-n, 1. félév SzTE-n).

A harmadik feladat az $i \to j$ séták generátorfüggvényének megadása. Ez a fogalom olyan diákoknak is elmagyarázható, akik amúgy nem ismerik a hatványsorok és analitikus függvények általános elméletét. Ez így történik például [22]-ben, ahol ez egy formális végtelen kifejezés. Ezt az ELTE-n 2. félévben, DE-n 1. félévben érintőlegesen, később az MSc képzésben formális hatványsorként, a SzTE-n 3. félévben tanítják. Ebben az esetben viszont nemkommutatív gyűrűk (konkrétan az $\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixgyűrű) feletti hatványsorokra van szükség, amit a szóbanforgó három egyetem közül egyik alapképzésén sem tanítanak. Ezért analízisre alapozzuk a generátorfüggvényelméletünket. A generátorfüggvény tehát legyen egy analitikus függvény, amit a $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \left(i \to j\right) \cdot z^n$ hatványsorával adunk meg, azaz z^n együtthatója az n hosszú $i \to j$ séták száma. A generátorfüggvény-elmélet csak a hatványsorok elméletét használja analízisből, így elmagyarázható bármely diáknak, aki ismeri azokat.

Az analízis fogalmai és tételei tekintetében [34]-re hivatkozunk, generátorfüggvény-módszer és kombinatorikus alkalmazások pedig [5]-ben találhatóak. Már láttuk az előző feladat megoldásánál, hogy $\omega_n(i \to j)$ az i-edik sor j-edik eleme A^n-ben. Minthogy a feladat meghatározni az összes generátorfüggvény-t egyszerre, ezt kézenfekvő módon úgy tehetjük meg, hogy mátrixba rendezzük őket. Innen már nem túl nagy ugrás a mátrixhatványsor vizsgálata. Viszont a mátrix-hatványsor nem része az analízisórák anyagának, tehát némi magyarázatra van szükség.

Hogyan definiálhatjuk mátrixsorozatok konvergenciáját? A legközelebbi fogalom a konvergencia normált vektorterekben, pl. $\mathbb{R}^n$-ben. Ez az ELTE-n az Analízis 3, a DE-n és SzTE-n a Többváltozós analízis tantárgyak keretén belül kerül tárgyalásra. Ha az $n \times n$-es mátrixok terét egyszerűen n^2 dimenziós vektortérnek tekintjük, az normált tér lesz, pl. a standard euklideszi távolsággal. Minthogy véges dimenziós, így bármely két norma ekvivalens. Tehát használhatjuk a pontonkénti konvergenciát, azaz egy mátrixsorozat konvergens, ha minden eleme konvergens sorozat $\mathbb{R}$-ben. Sőt, az előbbiek szerint minden számítást elvégezhetünk formálisan, a szokásos mátrixösszeadással és szorzással. Tehát minden $f_{i,j}(z)$ generátorfüggvény konvergens (a 0 egy környezetében) akkor és csak akkor, ha a $\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot z^n$ mátrixsorozat konvergens (a 0 környezetében). Vizsgáljuk meg ezt a mátrix-sorozatot. A szokásos mértani sor érvelés szerint:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot z^n &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} A^n \cdot z^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (Az)^n = \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(I - (Az)^{k+1}\right) \cdot (I - Az)^{-1} = (I - Az)^{-1} . \qquad (5.2)\end{aligned}$$

Még mindig meg kell mutatnunk, hogy (5.2) egyenlőségei teljesülnek, és minden lépés értelmes. Azaz, meg kell határoznunk azon z-k halmazát, melyre $\lim_{k\to\infty} \left(I - (Az)^{k+1}\right) = I$, és melyre az $I - Az$ mátrix invertálható.

Az utóbbi kérdés könnyen eldönthető: $I - Az$ invertálható akkor és csak akkor, ha $z\lambda \neq 1$ az A egyetlen λ sajátértékére sem. Ezzel véges sok z-t kizártunk. Megadható egy tartomány is, amely minden z elemére teljesül, a $z\lambda \neq 1$ feltétel. Legyen μ a legnagyobb abszolút értékű sajátértéke A-nak. Ekkor $I - Az$ invertálható, ha $|z| < 1/|\mu|$.

Most vizsgáljuk meg az $\lim_{k\to\infty} (Az)^k$ határértéket. Legyen J az A Jordan-féle normálalakja, vagyis van olyan invertálható Q, hogy $J = Q^{-1}AQ$ csak Jordan-blokkokból áll. Ekkor $A = QJQ^{-1}$ tehát $(Az)^k = A^k z^k = QJ^kQ^{-1}z^k$. Ha A egy $n \times n$-es mátrix, akkor J^k elemei felülről becsülhetők $k^n|\mu|^k$-nal. Mivel ugyanis A szimmetrikus, J diagonális, tehát J^k elemeit becsli $|\mu|^k$. Q elemei és Q^{-1} konstansok. Tehát

$$\lim_{k\to\infty} (Az)^k = \lim_{k\to\infty} QJ^kQ^{-1}z^k = 0,$$

ha $|z| < 1/|\mu|$, tehát $\lim_{k\to\infty} \left(I - (Az)^{k+1}\right) = I$ ugyanabban a környezetben. Ezt a technikát az ELTE-n Algebra 2-ből, DE-n Lineáris algebra 2-ből SzTE-n Lineáris algebrából tanítják.

Végül ki kell számolnunk $I - Az = I - zA$ inverzét. A szokásos Gauss-eliminációs módszer kevéssé segít, mivel z egy változó $I - zA$-ban, és nehéz vele számolni. De a mátrix inverze Cramer-szabállyal is kiszámítható, aldeterminánsok segítségével, melyet bármely bevezető lineáris algebra kurzuson tanítanak (ELTE: Algebra 2, DE: Lineáris algebra 1, SzTE: Lineáris algebra). Egy M mátrixra legyen M_{ij} az i-edik oszlop és a j-edik sor elhagyásával kapott mátrix. Ekkor M adjungált mátrixa az az N, mely i-edik sorának j-edik eleme $(-1)^{i+j} \det M_{ij}$. A Cramer-szabály szerint ha M invertálható, akkor $M^{-1} = N/\det M$. Azaz az M^{-1} mátrix ij indexű eleme $(-1)^{i+j} \det M_{ij}/\det M$. Ezt a harmadik feladatra alkalmazva, $M = I - zA$-val, kapjuk, hogy a generátorfüggvény az $i \to j$ sétákra a

$$(-1)^{i+j} \det\left(I_{ij} - zA_{ij}\right) / \det\left(I - zA\right)$$

törttel egyenlő. Ez majdnem ugyanaz, mint Will megoldásában, kivéve a $(-1)^{i+j}$ tényezőt az elején. Néha a det() jelölés tartalmazza a $(-1)^{i+j}$ tényezőt is, de az is lehet, hogy csak a filmkészítők néztek el valamit. Egy másik különbség, hogy Will az egységmátrixot **1**-gyel jelölte I helyett.

A negyedik feladatban meg kell adnunk az $1 \to 3$ séták generátorfüggvényét. Az általános formula ismeretében nem nehéz behelyettesíteni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (1 \to 3)\, z^n = (-1)^{1+3} \det (I_{13} - zA_{13}) \,/\, \det (I - zA) =$$

$$= \begin{vmatrix} -z & 0 & -z \\ 1 & -2z & -z \\ -z & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 & -z \\ -z & 1 & -2z & -z \\ 0 & -2z & 1 & 0 \\ -z & -z & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{2z^3 + 2z^2}{4z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 1}.$$

Semelyik diáknak, aki elvégezte a bevezető lineáris algebrát nem okozhat problémát megkapni ezt a formulát. Itt -1 a számlálónak és a nevezőnek is gyöke, tehát egyszerűsíthetünk $z+1$-gyel.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n (1 \to 3)\, z^n = \frac{2z^3 + 2z^2}{4z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 1} =$$

$$= \frac{(z+1)\, 2z^2}{(z+1)\,(4z^3 - 6z^2 - z + 1)} = \frac{2z^2}{4z^3 - 6z^2 - z + 1}.$$

Hogy megkapjuk a hatványsor együtthatóit, ki kell számolnunk a függvény Taylor-sorát. A Taylor-sort az ELTE-n Analízis 2, a DE-n és a SzTE-n Differenciálszámítás fedi le.

Alkalmazzuk az analízisből jól ismert $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ formulát, ahol $f^{(n)}(0)$ az f-nek az n-edik deriváltja a 0-ban, és $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, az egész számok szorzata 1-től n-ig (és $0!$ megállapodás szerint 1). Itt $f(z) = 2z^2 / \left(4z^3 - 6z^2 - z + 1\right)$, tehát ennek a deriváltjait kell megkeresnünk 0-ban. Legyen $h(z) = 2z^2$, $g(z) = 4z^3 - 6z^2 - z + 1$, ekkor $f(z) = h(z) / g(z)$. Will az első hat tag együtthatóját adta meg, amit f első hat deriváltjának kiszámolásával kaphatunk meg. Minthogy f két polinom hányadosa, igen fáradságos lehet ezt kézzel kiszámolni. Ezért egy egyszerű trükköt alkalmazunk a számítás idejének csökkentésére. $h/g = f$, tehát $h = fg$, és $h^{(k)} = (fg)^{(k)}$. A szorzat deriválási szabályának segítségével könnyen megadhatóak a deriváltak. Most $h'(z) = 4z$, $h''(z) = 4$, $h'''(z) = 0$,

$g'(z) = 12z^2 - 12z - 1$, $g''(z) = 24z - 12$, $g'''(z) = 24$, $g^{(4)}(z) = 0$, tehát egy lineáris egyenletrendszert kapunk az f 0-beli deriváltjaira:

$$\begin{aligned}
h(0) &= f(0)g(0) && \Longrightarrow f(0) = 0,\\
h^{(1)}(0) &= f^{(1)}(0)g(0) + f(0)g^{(1)}(0) && \Longrightarrow f^{(1)}(0) = 0,\\
h^{(2)}(0) &= f^{(2)}(0)g(0) + 2f^{(1)}(0)g^{(1)}(0) &&\\
&\quad + f(0)g^{(2)}(0) && \Longrightarrow f^{(2)}(0) = 4,\\
h^{(3)}(0) &= f^{(3)}(0)g(0) + 3f^{(2)}(0)g^{(1)}(0) &&\\
&\quad + 3f^{(1)}(0)g^{(2)}(0) + f(0)g^{(3)}(0) && \Longrightarrow f^{(3)}(0) = 12,\\
h^{(4)}(0) &= f^{(4)}(0)g(0) + 4f^{(3)}(0)g^{(1)}(0) &&\\
&\quad + 6f^{(2)}(0)g^{(2)}(0) + 4f^{(1)}(0)g^{(3)}(0) &&\\
&\quad + f(0)g^{(4)}(0) && \Longrightarrow f^{(4)}(0) = 336,\\
h^{(5)}(0) &= f^{(5)}(0)g(0) + 5f^{(4)}(0)g^{(1)}(0) &&\\
&\quad + 10f^{(3)}(0)g^{(2)}(0) + 10f^{(2)}(0)g^{(3)}(0) &&\\
&\quad + 5f^{(1)}(0)g^{(4)}(0) + f(0)g^{(5)}(0) && \Longrightarrow f^{(5)}(0) = 2160,\\
h^{(6)}(0) &= f^{(6)}(0)g(0) + 6f^{(5)}(0)g^{(1)}(0) &&\\
&\quad + 15f^{(4)}(0)g^{(2)}(0) + 21f^{(3)}(0)g^{(3)}(0) &&\\
&\quad + 15f^{(2)}(0)g^{(4)}(0) + 6f^{(1)}(0)g^{(5)}(0) &&\\
&\quad + f(0)g^{(6)}(0) && \Longrightarrow f^{(6)}(0) = 67680.
\end{aligned}$$

A megfelelő faktoriálisokkal leosztva kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n\,(1 \to 3)\, z^n = 2z^2 + 2z^3 + 14z^4 + 18z^5 + 94z^6 + \dots,$$

ami ismét egyezik azzal, amit Will a táblára írt.

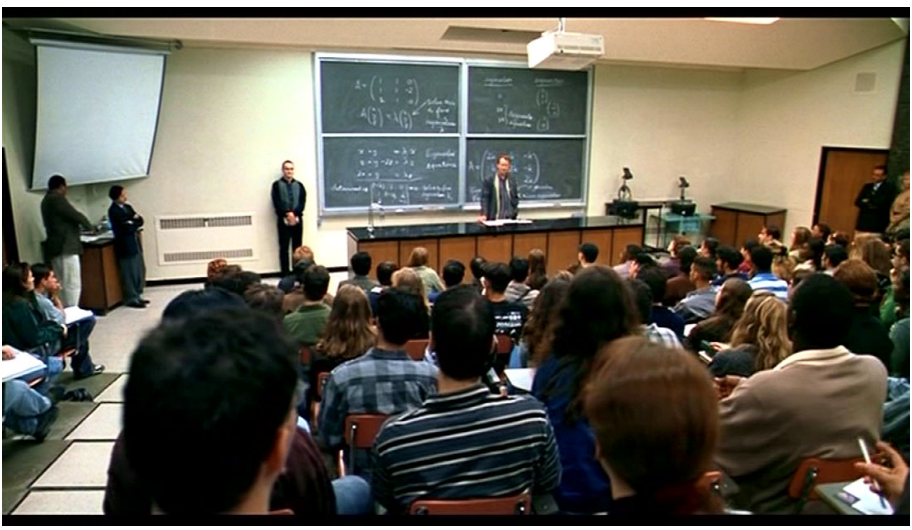
Befejezésül az 5.1. táblázatban áttekintjük négy feladathoz szükséges tárgyakat az egyes egyetemeken.

5.1. táblázat. A táblán látható példák megoldásához szükséges egyetemi órák

kif.	ELTE (félév)	DE (félév)	SzTE (félév)
(1)	Véges mat. 1 (1)	Kombinat. (1)	Kombinat. (3)
(2)	Algebra 2 (2)	Lin. alg. 1 (2)	Lin. alg. (1)
(3)	Véges mat. 2 (2)	Kombinat. (1)	Kombinat. (3)
	Algebra 2 (2)	Lin. alg. 2 (3)	Lin. alg. (1)
	Analízis 3 (3)	Többvált. anal. (4)	Többvált. anal. (3)
(4)	Algebra 2 (2)	Lin. alg. 1 (2)	Lin. alg. (1)
	Analízis 2 (2)	Diff. szám. (3)	Diff. szám. (2)

5.1.2. Sajátértékek, sajátvektorok

Amikor Gerald Lambeau bemegy a nagy előadóba, ahol rengeteg diák várja a titkos megfejtő kilétének felfedését, a háttérben két feladatot látunk a táblán, megoldásostul. (5.2. ábra)



5.2. ábra.

Mindkettő lineáris algebrai feladat, egy mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározásáról szólnak. Ezeket ELTE-n Algebra 2-ből (2. félév), DE-n Lineáris algebra 1-ből (2. félév) SzTE-n Lineáris algebrából (1. félév) tanítják.

A bal oldali táblán elmagyarázzák, hogyan kell az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit kiszámolni. Ennek a mátrixnak egy valós (irracionális) és két komplex sajátértéke van. Ezeket egy harmadfokú egyenlet megoldásával kaphatjuk meg. Mivel a valós sajátérték sem kellemes, ezért a szokásos eljárást – a harmadfokú polinom leosztását a valós gyöktényezővel – ebben az esetben nem kényelmes alkalmaznunk. Ez a feladat inkább a Cardano-formula alkalmazását igényelné, melyet az ELTE-n Algebra 1-ből

(1. félév), a DE-n Bevezetés az algebrába és számelméletbe (2. félév), az SzTE-n Klasszikus algebrából (2. félév) tanítanak.

A második feladat a táblán szintén egy sajátérték-számítási feladat az

$$A = \begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ k & 2k & -k \\ k & k & 2k \end{pmatrix}.$$

mátrix sajátértékeinek meghatározása található – bizonyos értelemben. A filmben efölött a mátrix fölött látható, hogy a 0 és a $3k$ két sajátérték, és itt a $3k$ multiplicitása kettő (a táblán elfajuló sajátértéknek nevezik). Elolvashatjuk a hozzájuk tartozó sajátvektorokat is. Azonban sem a 0, sem a $3k$ nem sajátértéke az A mátrixnak (kivéve, ha $k = 0$). Ezért úgy gondoljuk, hogy a filmkészítők itt hibáztak, és a szimmetrikus

$$B = \begin{pmatrix} 2k & -k & -k \\ -k & 2k & -k \\ -k & -k & 2k \end{pmatrix}$$

mátrixot akarták a táblára írni. Könnyen ellenőrizhető, hogy B három sajátértéke 0, $3k$, $3k$. A 0-hoz tartozó sajátvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a kétdimenziós sajátalteret pedig a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

vektorok generálják.

5.1.3. Fák

A folyosó tábláján szereplő második feladatot kifejezetten az első feladat megoldójának írták fel. Két részből áll:

Feladat (1) Hány n-csúcsú fát írhatunk n számozott csúcsra?
(2) Rajzoljuk le az összes homeomorfan irreducibilis fát $n = 10$-re.

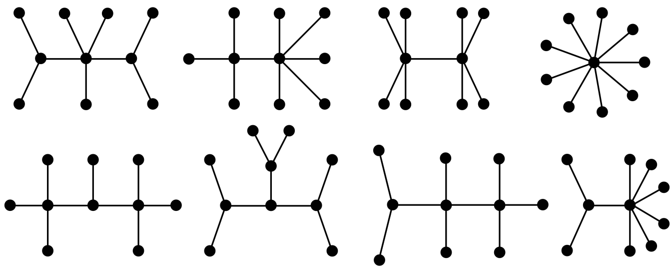
Will megadja az n^{n-2} megoldást az első kérdésre, és lerajzol nyolc gráfot a második kérdésre válaszul. Az első kérdéshez tartozó eredmény Cayley-formula néven ismert [10], de először Borchardt [9] fedezte fel 1860-ban [9]. Számos különböző bizonyítása létezik, a legismertebb talán Prüferé [35], aki ún. Prüfer-kódot rendelt hozzá a fákhoz. Cayley tétele ezzel a bizonyítással szerepel az ELTE Véges matematika 1 (1. félév), a DE Kombinatorika (1. félév) és az SzTE Kombinatorika (3. félév) kurzusában.

Most nézzük a második feladatot. Egy fagráfot homeomorfikusan irreducibilisnek nevezhetünk, ha nincs másodfokú csúcsa. Az első eredmény ilyen fákról Haray és Prins [23] nevéhez köthető. Például felsorolják az összes ilyen fát legfeljebb 12 csúcson, speciálisan a 10-csúcsúakat is. Bár a „homeomorfikusan irreducibilis" fák vizsgálata nem képezi részét a tananyagnak ezeken az egyetemeken, de elemi gráfelmélet eredményeket használva megtalálhatjuk az összes ilyen 10-csúcsú fát.

Érdekes, hogy a készítők hibát követtek el: Will csak 8 fát rajzol a táblára, pedig 10 ilyen fa létezik.

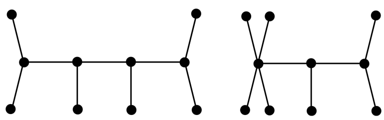
Számozzuk a csúcsokat 1-től 10-ig, fokszámaik pedig legyenek $d_1, \ldots, d_{10}$. Tegyük fel, hogy a csúcsok fokszám szerint nem növekvően vannak sorbarendezve. A fokszámok összege 18, hiszen egy 10-pontú fának 9 éle van. Ha l darab levél és $10 - l$ $d$arab nemlevél van, akkor a fokszámösszeg legalább $l + 3 \cdot (10 - l) = 30 - 2l$, tehát $l \geq 6$. Ha 9 levél és 1 nemlevél van, csillagot kapunk. Ha 8 levél van, akkor $d_1 + d_2 = 10$ és $d_1 \geq d_2 \geq 3$, tehát $d_1 = 7$ és $d_2 = 3$ vagy $d_1 = 6$ és $d_2 = 4$ vagy $d_1 = d_2 = 5$. Mindhárom a feltételnek – ne legyen benne másodfokú pont– megfelelő fát ad, ahol az 1. és 2. csúcs össze van kötve, a levelek pedig a maradék foknak megfelelően vannak hozzájuk kötve. Ha 7 levél van, akkor $d_1 + d_2 + d_3 = 11$ és $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq 3$. Tehát vagy $d_1 = d_2 = 4$ és $d_3 = 3$, vagy $d_1 = 5$ és $d_2 = d_3 = 3$. Az első esetben két különböző fát kapunk: egyet, ha a két negyedfokú csúcs össze van kötve, és egyet, ha nem. A második eset szintén két fát ad: egyet, amikor a két harmadfokú csúcs nincs összekötve, és egyet, amikor igen. Ez utóbbi hiányzik a tábláról, amit valószínűleg a készítők felejtettek le, és nem a film matematikus szakértői. Végül, ha 6 levél van, akkor $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 12$,

$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq d_4 \geq 3$, tehát $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 3$. Ez további két fát ad: egyet, amikor az egyik 3-fokú csúcshoz nem csatlakozik levél, és egyet, amikor nincs ilyen csúcs. Ez utóbbi szintén hiányzik a tábláról, ami egy újabb (matematikai) hiba a filmben. Összesen 10 (és nem 8) másodfokú pontot nem tartalmazó fa van 10 csúcson (ld. 5.4. és 5.6. ábra).



5.3. ábra. A 8 „homeomorfikusan irreducibilis" fa a táblán

5.4. ábra.



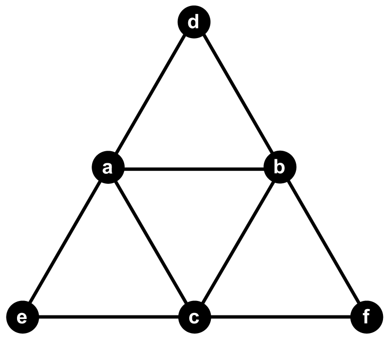
5.5. ábra. A tábláról hiányzó 2 „homeomorfikusan irreducibilis" fa

5.6. ábra.

Az irodalomjegyzékbeli [5] könyvben bővebben lehet homeomorfikusan irreducibilis fákról olvasni.

5.1.4. Kromatikus polinom

A probléma, melyet Gerald Lambeau és Will Hunting együtt old meg az, hogy adjuk meg a 3-napgráf (azaz a csúcsok a, b, c, d, e, f, az élek ab, ac, ad, ae, bd, bf, ce, cf) kromatikus polinomját. Ez egy síkgráf, amely úgy néz ki, mint egy háromszög a középvonalaival (5.7. ábra). (Általánosságban napgráfoknak nevezzük az olyan $2n$-pontú gráfokat, melyek előállnak úgy, hogy tekintünk egy n-pontú teljes gráfot 1-től n-ig számozott csúcsokkal, és minden 1-2, 2-3, ...$n-1$-n és n-1 csúcspár mindkét tagját összekötjük egy-egy újabb ponton keresztül.)



5.7. ábra. A 3-napgráf

Egy G gráf kromatikus polinomja az a $p_G(k)$ függvény, amely megadja a gráf jólszínezéseinek számát k szín esetén. Egy csúcsszínezést jólszínezésnek nevezünk, ha szomszédos csúcsok különböző színűek. Bonyolultságelméleti szempontból nehéz (NP-nehéz) feladat a minimálisan szükséges színszám meghatározása. Természetesen a kromatikus szám az a legkisebb pozitív egész szám, amely nem gyöke a kromatikus polinomnak. Tehát általános esetben a kromatikus polinom meghatározása is NP-nehéz. Konkrét gráfokra viszonylag könnyű lehet a polinom megadása, például egy n-csúcsú teljes gráfé $k(k-1)\dots(k-n+1)$, míg az üres gráfé egyszerűen k^n.

A kromatikus számot minden bevezető diszkrét matematika kurzuson tanítják. Azaz lefedi az ELTE-n a Véges matematika 1 (1. félév), a DE-n a Kombinatorika (1. félév), az SzTE-n a Kombinatorika (3. félév). Bár a kromatikus polinom elemi úton is bevezethető, az csak a DE-n része a kurzusnak. A következőkben bemutatjuk, hogyan építhető egy előadás erre a feladatra.

Már az is érdekes, hogy ez a $p_G(k)$ függvény valóban polinom. Foka legfeljebb n, ha G-nek n csúcsa van. Ez például a következőképp mutatható meg: Egy jólszínezés színosztályokba partícionálja a csúcsokat, mindegyik osztály egy független csúcshalmaz. Mivel G véges, csak véges sokféleképp lehet így partícionálni. Tehát a színezések száma kiszámítható az adott partíciót adó színezések külön számolásával, majd ezek összegzésével. Legyen P egy partíció d független halmazra. Ekkor az első független halmazt k-féleképpen színezhetjük, a másodikat $(k-1)$-féleképpen stb., az utolsót $(k-d+1)$-féleképpen, tehát az ilyen színezések száma $k(k-1)\dots(k-d+1)$. Ez egy k-ban d-edfokú polinom, ahol $d \leq n$.

Ugyanakkor az is igaz, hogy a $p_G(k)$ függvény foka pontosan n. Hiszen $k \geq n$ esetén a jólszínezések között a csupa különböző színnel való színezés is ott van, vagyis létezik n osztályú partícionálás is. Egy n osztályú partíció jólszínezésének száma $k(k-1)\dots(k-n-1)$, ami k-ban n-edfokú polinom. Ez a polinom is egy tag az előző bekezdésben említett összegzéskor. A főegyütthatója 1, és mivel magasabb fokú polinom nincs az összegzésben – hiszen n-nél több osztályú partíciót n ponton nem lehet létrehozni –, így e polinom k^n tagját semmi sem ejti ki. Vagyis $p_G(k)$ foka n-nel egyenlő.

Most megadjuk a filmben látható G napgráf kromatikus polinomját. Ez tehát az a, b, c, d, e, f csúcsokból és ab, ac, ad, ae, bd, bf, ce, cf élekből áll (l. 5.7. ábra). Számoljuk meg a k színű jólszínezések számát. Az a csúcsot k színnel színezhetjük, ami $(k-1)$ színt hagy a b csúcs színezésére. Ekkor $(k-2)$ színünk marad a c csúcs színezésére. Végül a maradék három csúcs egymástól függetlenül $k-2$ színnel színezhető, mivel csak két már színezett szomszédjuk van. Tehát $p_G(k) = k\,(k-1)\,(k-2)^4$, ahogy Will Hunting és Gerald Lambeau a filmben együtt kitalálta. Viszont ők jól láthatóan más módszerrel kapták ugyanezt. Talán a következő lemma használatával:

1. Lemma. *Ha G és H két gráf, melyek egy teljes gráfban metszik egymást, akkor*

$$p_{G\cup H}(k) = \frac{p_G(k)p_H(k)}{p_{G\cap H}(k)}.$$

Bizonyítás. Először színezzük $G \cap H$-t. Itt $G \cap H$ egy teljes gráf, tehát minden csúcsa különböző színű. Rögzítsük tehát egy jólszínezését, és legyen q_G a G ezt kiterjesztő jólszínezéseinek száma. Vegyük észre, hogy $G \cap H$

egy másik jólszínezését ugyanúgy q_G féleképpen terjeszthetjük ki G-re. Tehát $p_G(k) = p_{G\cap H}(k) \cdot q_G(k)$. Hasonlóképpen, legyen q_H a H-ra kiterjedő színezések száma. Ekkor $p_H(k) = p_{G\cap H}(k) \cdot q_H(k)$. Most $p_{G\cup H}(k)$ kiszámolható úgy, mint hogy leszámláljuk, hányféleképpen terjeszthető ki $G \cap H$ a $G \cup H$ egy jólszínezésévé. Mivel $G \setminus (G \cap H)$ és $H \setminus (G \cap H)$ függetlenek, azt kaptuk, hogy

$$\begin{aligned} p_{G\cup H}(k) &= p_{G\cap H}(k) \cdot q_G(k) \cdot q_H(k) = \\ &= \frac{p_{G\cap H}(k) \cdot q_G(k) \cdot p_{G\cap H}(k) \cdot q_H(k)}{p_{G\cap H}(k)} = \frac{p_G(k) \cdot p_H(k)}{p_{G\cap H}(k)}, \end{aligned}$$

amit be akartunk bizonyítani. □

A gráfok számára vonatkozó teljes indukcióval azonnal belátható, hogy

1. Következmény. *Ha $G_1, G_2, \ldots, G_d$ olyan gráfok, hogy bármely kettő ugyanabban a teljes gráfban metszi egymást, akkor*

$$p_{G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_d}(k) = \frac{p_{G_1}(k)p_{G_2}(k)\ldots p_{G_d}(k)}{p_{G_1\cap G_2\cap\cdots\cap G_d}(k)^{d-1}}.$$

Most válasszuk G_1-et az a, b, c, d csúcsok által kifeszített részgráfnak, G_2-t az a, b, c, e, G_3-at az a, b, c, f által kifeszítettnek. Tekintsük a G_1 gráfot. Itt az a csúcsot k-féleképpen színezhetjük, a b csúcsot $k-1$-féleképpen, c-t és d-t függetlenül $k-2$-féleképpen. Ugyanez az érvelés működik G_2-re és G_3-ra. Tehát $p_{G_i}(k) = k\,(k-1)\,(k-2)^2$. A teljes 3-csúcsú gráf kromatikus polinomja $k(k-1)(k-2)$, tehát a 1. következményből kapjuk, hogy

$$p_G(k) = p_{G_1\cup G_2\cup G_3}(k) = \frac{p_{G_1}(k)p_{G_2}(k)p_{G_3}(k)}{p_{G_1\cap G_2\cap G_3}(k)^2} = \frac{k^3\,(k-1)^3\,(k-2)^6}{k^2\,(k-1)^2\,(k-2)^2}.$$

Ez a képlet most már tényleg pontosan ugyanaz, mint ami a filmben látható.

Kromatikus polinomról további feladatokhoz ld. [30, 9.36.–9.49 feladatok] vagy [31].

5.2. A matematikai tartalom feldolgozása általános-, illetve középiskolai tanulók számára

A matematika tanítása során alapvető, de az egyik legnehezebb feladat a nem, vagy csak kevéssé motivált tanulók érdeklődésének felkeltése.

Ennek egyik – eleddig a benne rejlő lehetőségekhez képest ki nem használt – eszköze lehet a populáris kultúrában helyenként megjelenő matematikai tartalmak bevitele a tanórákra. A továbbiakban egy kipróbálásra javasolt feladatsort, mely elsősorben középiskolások számára készült a filmben előforduló matematikai tartalmak alapján. Mint korábban már utaltunk rá, az ebben az eszközben rejlő lehetőségeket egy népszerű, világszerte sikeres film, a Good Will Hunting ilyen szempontból való feldolgozásával mutatjuk be. Ebben a filmben a felmerülő problémák a véges matematika tárgykörébe tartoznak, annak különböző területeit érintik. Ez esetünkben különösen indokolttá teszi ennek a filmnek a választását: Magyarországon több évtizedre visszanyúló hagyománya van a gráfelmélet középiskolában való tanításának. A korai gráfelméleti kutatásokkal párhuzamosan bekerült a magyarországi tananyagba, tankönyvekbe. A szakterület nemzetközi szinten is jegyzett művelője, Gallai Tibor is írt tankönyvet középiskolások számára, például 1949-ben is jelent meg ilyen [16]. A gráfelmélet azóta is jelen van a tantervekben, tankönyvekben, feladatgyűjteményekben és a ma használatos taneszközök közül is számosban található gráfelmélet – természetesen a legkülönbözőbb szinteken és feldolgozási módokon. Például: [18], [20], [21], [26], [29]. Az, hogy a problémákat egy széles körben ismert, a filmes szakma és a közönség által is elismert filmből tudjuk választani valószínűleg jelentősen növeli az érdeklődést a problémák iránt. Saját egyetemi tanítási tapasztalatom is azt mutatja, hogy a filmben megjelenő matematikai problémák bemutatása az órákon komoly figyelemfelkeltő és érdeklődés fokozó hatással bír.

A film matematikai mélység és nehézség szempontjából elég különböző problémákat jelenít meg. A filmben időnként említés történik ezek nehézségéről is, de az, hogy a filmben mit mondanak róluk, még csak köszönő viszonyban sincs a problémák valódi nehézségével. A film számára ezek dekorációk és díszletek.

Nekünk azonban lehetőséget nyújtanak az érdeklődés felkeltése mellett, és azon túl is, hogy bizonyos matematikai tartalmakat megismertessünk a tanulókkal, matematikai kompetenciájukat fejlesszük.

A matematikai tartalmak többfélesége lehetőséget ad arra is, hogy különböző szinteken és képzettségi fokokon lévő tanulók számára is érdekes és tartalmas anyagot tudjunk belőle felépíteni.

A megjelenő problémákat, feladatokat kétféleképpen fogjuk vizsgálni.

1. Megnézzük, melyik milyen szintű matematikai képzettséget igényel, milyen szinten lévők számára mit mond, illetve kik számára tudhat releváns tananyag lenni.

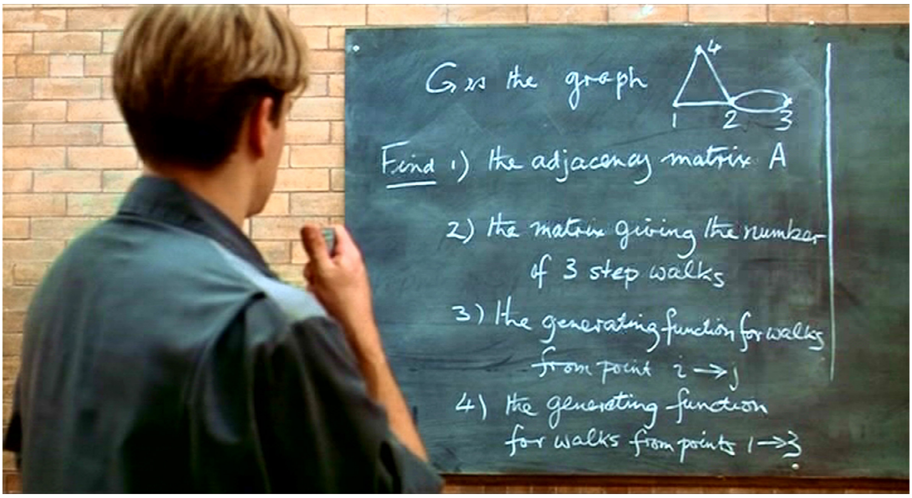
2. Konkrét feladatsorokon, illetve felépítésen keresztül példát mutatunk arra, hogy a különböző szinteken tanulók számára hogyan lehet feldolgozni ezeket a feladatokat, felvillantva a továbblépés lehetőségét is.

A vizsgált a matematikai tartalmak a filmben táblákon jelennek meg, így mi is „táblánként” tekintjük át a problémákat.

1. tábla

A tábla filmbeli szerepéről: A film főhőse – Will Hunting –, aki bár rendkívüli matematikai képességekkel és tudással rendelkezik, de rossz szociális háttere miatt az MIT-n takarítóként dolgozik. A kép azt a jelenetet mutatja, amikor a napi munkája során rátalál a folyosói táblára, melyre a hallgatók számára írtak fel feladatokat, azzal, hogy aki a szemeszter végéig megoldja a feladatokat, az rendkívüli jutalmakban részesül, például a megoldása megjelenik az egyetem folyóiratában is.

A tábla a filmben csak matematikai díszlet a különleges sorsú szereplő zsenialitásának érzékeltetésére. (Ő ugyanis egy-két napon belül, lényegében fejben megoldja a problémákat.) A matematikai tartalom a szakértő számára is korrekt módon jelenik meg, a filmben be nem mutatott elméleti háttér rekonstruálható. Ezt ebben a dolgozatban meg is tettük. A nehézségi fok és a kérdések komplexitásának érzékeltetése minden didaktikai alapot nélkülöz, teljesen esetleges, pontosabban teljesen a film dramaturgiájának van alárendelve.

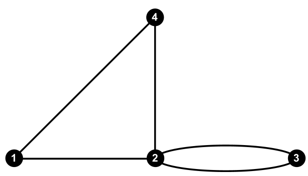


5.8. ábra.

A tábla képe tisztán látható, alkalmas arra, hogy matematikai szempontból korrekt módon elemezzük.

A feladatok a … oldalon már szerepeltek, idézzük fel most őket:

Legyen G az 5.9. ábrán látható gráf.



5.9. ábra.

Keresse meg

1. *az A szomszédsági mátrixot;*

2. *azt a mátrixot, amelyik megadja a három-hosszú séták számát;*

3. *az i pontból a j pontba vezető séták generátor-függvényét;*

4. *az* 1 *pontból a* 3 *pontba vezető séták generátor-függvényét!*

A feladatok – mint azt az előző részben részletesen kifejtettük – alapvetően az egyetemi tananyaghoz kapcsolódnak, matematikai kurzusok részét képezhetik.

Egy matematikus számára jól ismert fogalmakkal dolgoznak, a szakember számára a *ráismerés* élményét adja. A mozgósított tudásanyag felöleli az analízis, a lineáris algebra, a kombinatorika és a gráfelmélet bizonyos fejezeteit.

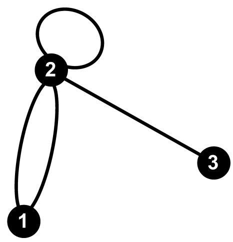
A matematika szakos hallgatók számára már általában nem egyszerűen ráismerésről van szó. Egy átlagos hallgató a megértéshez szükséges ismereteket tanulmányai során több tantárgyon keresztül, folyamatosan kapja, sajátíthatja el. Viszont épp ezért jó lehetőséget adhatnak a feladatok bizonyos fogalmak bevezetésére, elsajátítására és gyakorlására. Megfigyeltük, hogy a sikerorientált személyiségek számára motiváló tényező lehet, hogy a filmben ezek kifejezetten nehéz problémákként vannak aposztrofálva, még akkor is, ha a hallgató tisztában van vele, hogy ez nem a feladatok valódi nehézségi foka.

A matematikusi, illetve matematika szakos hallgatói megközelítését a problémáknak a korábbi fejezet tartalmazza.

Ha az előképzettségtől függetlenül akarunk eljárni, akkor érdemes egy, az elemzési folyamat tipikus lépéseit felfűző feladatsorozatban feldolgozni a témát. Így biztosíthatjuk a tanulás feltételeit (emlékeztetés, közös jelölés, szóhasználat azoknál, akiknek vannak ilyen irányú előismereteik, ugyanakkor önálló problémamegoldás azoknak, akik most szerzik meg a szükséges ismereteket). A 3., illetve 4. feladatot nem gondoljuk ilyen módon feldolgozhatónak, mivel az olyan előképzettséget és a téma iránti olyan elkötelezettséget igényel, ami egyetemi szint alatt általában nem remélhető.

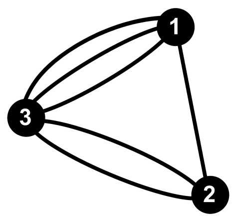
Az első két problémát azonban – épp úgy, mint a filmben megjelenő további problémák – számottevő matematikai előképzettséget nem igényel, ezek lényegében tetszőleges középiskolai, esetenként általános iskolai osztályba bevihetőek. A segítségükkel megszerezhető ismeretek, fejleszthető képességek és kialakítható attitűdök összhangban vannak a NAT célkitűzéseivel, az ott megfogalmazott célok részét képezik. Mivel azonban a konkrét anyagnak csak egy része szerepel a közoktatás törzsanyagában, ezért célszerűbb lehet ezeket szakkörökön, esetleg matematikai táborokban feldolgozni.

Az első két feladatra alapuló gyakorlat-sorozatnak kiindulása lehet egy-két olyan feladat, amelyek még a filmben szereplőnél is egyszerűbb gráfokat használ. Amikor mondjuk a



(f_1: 3 pontú gráf, hurokéllel, kettős éllel)

és



(f_2: 3 pontú gráf, hurokél nélkül, többszörös élekkel)

gráfokkal kapcsolatban adjuk feladatul egy-egy szomszédsági mátrix elkészítését, akkor a gyengébb képességű, illetve a kudarckerülő típusú tanulókat is sikerélményhez juttathatjuk. E feladatokban a lehetőségekhez mérten érdemes a szakkifejezéseket kerülni, különösen eleinte. Tehát a tanulókat nem mátrixokról kérdezzük, hanem például olyan feladatokat adunk fel, mint az alábbiak:

– Készítsünk T_1 táblázatot, hogy az f_1 rajzon melyik pont melyikkel hányszor van összekötve!

– Készítsünk T_2 táblázatot, hogy az f_2 rajzon/gráfon melyik pont melyikkel hányszor van összekötve!

E két feladat után már bátran feladhatjuk a filmbeli táblán szereplő 1. számú feladatot:

– Készítsünk T_3 táblázatot, hogy az alábbi gráfon melyik pont melyikkel hányszor van összekötve! (GWH 1. tábla, 1. feladat.)

A szaknyelv használatát előkészítendő megemlíthetjük – és ezt a filmbeli szöveg megértése szükségessé is teszi –, hogy az ilyen táblázatokat szomszédsági mátrixoknak szokták nevezni.

Általános iskolás tanulóknál az alacsonyabb absztrakciós készség miatt a rajzokat történetekbe ágyazhatjuk, de legalábbis mint konkrét helyzetről – pl. városokat vagy házakat összekötő utakról – készített térképeket vezethetjük elő, ezzel is fejlesztve a modellalkotási képességüket.

A táblázat (mátrix) felírása után felhívhatjuk a tanulók figyelmét, hogy az első „nehéz problémát” megoldottuk. Ez a sikerélmény motiváló lehet a kapott táblázat/mátrix elemzésére (például, hogy szimmetrikus) és következő kérdés megválaszolásához vezető feladatsorhoz is.

A GWH táblán szereplő második kérdés megválaszolásához például egy ehhez hasonló feladatsoron keresztül vezethetjük el a tanulókat:

– Hányféleképpen tudunk elmenni az egyes pontokból egy-egy pontba két lépésben az f_2 rajzon? Készítsünk róla egy $T_{2;2}$ táblázatot!

– Készítsük el ugyanezt a – $T_{3;2}$ – táblázatot a 3. (filmbeli) gráfhoz!

(Mindkét feladatban elsődleges szerepet játszik a manipulatív tevékenység, majd az adatok begyűjtése és rendszerezése, az eredmények ábrázolása.)

– Keressünk összefüggést a T_2 és a $T_{2;2}$ táblázat között!

– Fent áll-e ugyanez az összefüggés a T_3 és a $T_{3;2}$ táblázat között?

(Összefüggések keresése, felismerése és megfogalmazása. Analógiák felismerése és alkalmazása.)

– Mi okozhatja felismert összefüggést? (Nevezetesen, hogy az új táblázat – pl. $T_{3;2}$ – egy elemét úgy kaphatjuk, hogy a T_3 megfelelő sorában és oszlopában lévő számokat rendre összeszorozzuk és a kapott számokat összeadjuk.) Véletlen ez, az adott gráfokra jellemző, vagy minden (véges) gráfnál ezt tapasztalnánk?

(Logikai kapcsolat felismerése, megfogalmazása, bizonyítása. A felismert elv érvényességi körének vizsgálata, megfogalmazása.)

– Keressünk három lépésből álló „sétákat” az f_2 és f_3 gráfokon!

– Készítsünk $T_{2;3}$ és $T_{3;3}$ táblázatokat a korábbiakhoz hasonlóan, tehát az egyes helyekre a megfelelő pontok közötti három lépéses séták számát írjuk!

(Manipulatív tevékenység, de már az elméleti ismeretek birtokában. Várhatóan a tanulók a néhány séta számának megkeresése után már inkább gondolkozni fognak, megpróbálják a korábban tapasztalt összefüggést az új helyzetre átvinni. Ehhez kapcsolódhatnak, illetve ezt segíthetik a következő kérdések.)

– Lehet-e használni valami módon a kétlépéses táblázatoknál megismert elvet ezekben az esetekben?

– Miért igaz az összefüggésünk a három lépéses sétákra?

(A bizonyítási igény fejlesztése. Várhatólag a tanulók nagyobbik része először csak az összefüggést általánosítja a háromlépéses esetre, az érvényesség megfontolása, pláne bizonyítása nélkül.)

– Hogyan általánosíthatjuk a tapasztaltakat tetszőleges gráfra és tetszőlegesen hosszú sétákra? Igazoljuk is a megfogalmazott állítást!

(A szűkebb körben tapasztalt és bizonyított összefüggések általánosítása. Az érvényességi kör keresése. A bizonyítási igény és a bizonyítási technikák fejlesztése.)

A film 2. feladatát már a $T_{3;3}$ táblázat felírásával megoldottuk. Erre hívjuk fel a tanulók figyelmét! Viszont a téma kapcsán számos kérdés vetődött fel, amelyek létjogosultságát ilyen módon nem kellett külön indokolni, azok természetes módon kapcsolódtak a kiindulási helyzethez, a filmhez.

Az 1. tábla 1. és 2. problémájának ilyen módon való tárgyalása további kibontakozási lehetőségeket rejt magában. Mégpedig a mátrix-szorzás egy nem szokványos, de természetes bevezetését teszi lehetővé. Általános gyakorlat ugyanis, hogy a mátrixok szorzását a puszta technika ismertetésével tanítjuk, jobbára egyetemen. A hallgatók számára ez nem csupán nehezen megjegyezhető, de általában teljesen értelmetlennek is tartják, és csak elhiszik, hogy ennek így van értelme, ezt így célszerű csinálni. A mátrixok és a homogén lineáris leképezések kapcsolata, ami jól láthatóvá teszi végre, hogy mátrixokat tényleg így érdemes összeszorozni, általában jóval később kerül elő a tananyagban, és olyan kurzusok is vannak, ahol ez az összefüggés így nem is fogalmazódik meg.

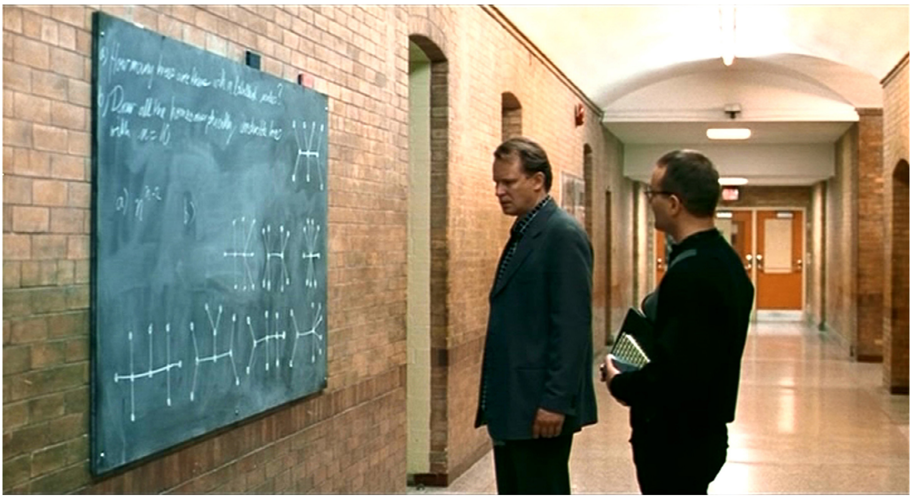
A szomszédsági mátrix viszont általában már az első féléves anyagban megjelenik, sőt, például a fent vázolt módon a közoktatásba is bevihető. A séták számlálásával természetes módon ismerhető fel a szomszédsági mátrix szorzásának és hatványozásának elve és a módszer értelmes volta, hatékonysága az n-hosszú séták számának meghatározásában. Innen már ugyancsak természetes módon általánosítható a mátrixok szorzása nem csak szimmetrikus mátrixok (pl. irányított gráfok segítségével), utána pedig nem csak négyzetes mátrixok esetére is.

2. tábla

A film szerint az első feladatsort Will Hunting megoldotta, a végeredményeket felírta a hirdetőtáblára. A megoldásokra a hallgatók és a tanszék oktatói rátalálnak, de a megoldó személye nem lesz ismert előttük.

A tanszék egy újabb feladatsort ír fel a táblára, immáron kifejezetten az ismeretlen megoldónak címezve.

Ez a kép a filmben a matematika tanszék által kitűzött második feladatsort mutatja, Will Hunting végeredményeivel együtt, abban a percben, amikor a tanszék két oktatója – Lambeau professzor és Tom – a megoldásokra rátalál.

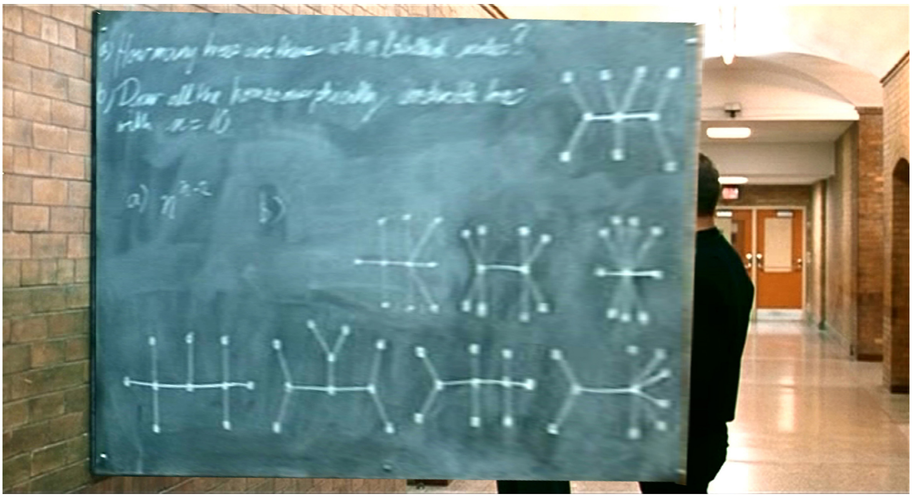


5.10. ábra.

Ez a filmnek az kockája, amelyen legjobban látható a tábla. De az írás rajta itt sem olvasható tisztán, kissé elmosódott, ráadásul perspektivikusan erősen rövidült. Különösen problematikus a kérdések elolvasása.

Ez a kép alkalmas lehet arra, hogy a tanulókkal elbeszélgessünk a perspektivikus ábrázolás tulajdonságairól, de minthogy ez nem a filmben szerepeltetett probléma, ezért ezzel a lehetőséggel a megemlítésén túl most nem foglalkozunk részletesen.

A tábla képét azonban alkalmas grafikai program segítségével „beforgatva” a lap síkjába a rövidülést megszüntethetjük.



5.11. ábra.

Az így látható táblakép már lényegében elolvasható, annyira mindenképpen, hogy matematikai szempontból elemezzük. (Az angolul nem tudó diákok számára természetesen le is kell fordítanuk a szöveget.)

A feladatok:

a) *Hány n-csúcsú fa létezik, ha a csúcsok számozottak?*
(How many trees are there with n labeled vertices?)

b) *Rajzolja le az összes homeomorfikusan felbonthatatlan fát $n = 10$ esetén!*
(Draw all the homeomorphically irreducible trees with $n = 10$.)

Mint azt az előző fejezetben részleteztük, egy matematikustól vagy egy matematika szakos hallgatótól mindkét probléma csak egészen alapfokú ismereteket kíván.

Közép-, illetve általános iskolai tanulóknak viszont a két feladat egészen eltérő nehézségű, kellő előkészítés nélkül számukra ezek elég nehéz problémák.

Az első – *a)* – feladatra a válasz a közismert Cayley-tétel [10]. Mint az a táblán a válaszban is látható, az ilyen fák száma n^{n-2}.

A film sajátossága, hogy sem az előző, sem a mostani táblán szereplő problémáknál nem szerepel az eredmény levezetése, az állítások bizonyítása. Pedig a matematika művelésének egyik legfontosabb része, hogy állításainkat bizonyítjuk. A matematikai kompetencia egyik legfontosabb összetevője, hogy „a matematikai kompetencia birtokában az egyén... követni és értékelni tudja az érvek láncolatát, matematikai úton képes indokolni az eredményeket, megérti a matematikai bizonyítást." [NAT]

A Cayley-tételt általában a Prüfer-kód segítségével szoktuk bizonyítani, ami egy szellemes, de egyáltalán nem nyilvánvaló módszer fa-gráfok kódolására.

A problémát alkalmasan megfogalmazva azonban ez a feladat is kiválóan alkalmas lehet a matematikai kompetencia számos összetevőjének fejlesztésére.

Egy lehetséges feladatsor középiskolások számára az a) feladat feldolgozásához:

(A számozott feladatok, mint ez majd a szövegből is látható lesz, több esetben is egész feladatcsoportokat jelentenek.)

1. feladat: *Egy szigeten* 3 *(*4, 6, 12, 200*) város van. Legalább, illetve legfeljebb hány utat kell építeni, ha azt szeretnénk, hogy bármely városból bármely városba el lehessen jutni épített úton? Minden út, ami két várost köt össze egynek számít, a hosszától függetlenül.*

Ezzel a feladattal a tanulók gyakorolhatják egy lényegében valós probléma matematikai modellezését.

A városokat nevek helyett számokkal jelöljük. (*Elvonatkoztatás a konkrét hosszúságtól, szimbólumok használata.*)

3 és 4 város esetén a tanulók konkrét-manipulatív módon, kísérletezve állapíthatják meg az eredményt. Ugyanezt a módszert használhatják 6 városnál maximális útszám keresése esetén. Közben a szisztematikus próbálgatással a rendszerező képességük is fejlesztődik. A 3 és 4 városról szóló konkrét esetben már összefüggést fedeznek fel, megsejtik, hogy az utak minimális száma nem függ a konkrét utaktól, csak a városok számától. Felismerik, hogy a legtöbb utat akkor építjük, ha bármely két város között utat építünk.

Számítani lehet arra, hogy legkésőbb a 6 város esetén rájönnek arra is, hogy akkor minimális az utak száma, ha nem lehet sehogyan sem körbe menni az utakon. (Fa gráf.)

Már 4 város esetén előkerül a bizonyítás igénye, egyelőre oly módon, hogy az összes esetet megrajzolva le lehet olvasni az utak számát. Itt derül ki a két eset közötti legmarkánsabb különbség, az, hogy míg a maximális számú utak esetében elegendő egy gráfot megrajzolni, addig a minimális útszám keresésekor több, nem is feltétlen könnyen összegyűjthető eset van, amiket mind meg kéne rajzolni, ha az utak számának leolvasását választjuk bizonyítási módszerül.

Az összes minimális úthálózat megrajzolása során felvetődik, hogy bizonyos hálózatok „lényegében" nem térnek el egymástól, legalábbis ami az utak számát illeti. (*Tapasztalatok összegyűjtése, analógiák keresése, megfogalmazása.*) Ez alkalmat ad arra is, hogy a számozott és a számozatlan csúcsú gráfok különbözőségére ráirányítsuk a figyelmüket. (A konkrét úthálózatnál nyilván nem mindegy, mely városokat köt össze közvetlenül út. Az utak száma szempontjából viszont vannak egymással ekvivalens esetek. Ez jó alkalom arra is, hogy előkészítsük a filmben a folyosói táblán b-vel jelölt feladatot, amelyben már számozatlan csúcsú gráfok szerepelnek.)

Innentől érdemes a maximális és a minimális számú utakra vonatkozó kérdéseket külön vizsgálni.

– 6, illetve 12 város esetén az utak maximális számára vonatkozó kérdésnél már várható, hogy le is rajzolják az utakat, és számszerűen is megfogalmazzák az összefüggést. (*A rajztól – a konkrétumtól – való elvonatkoztatás; az absztrakciós készség fejlesztése; összefüggések fel-*

ismerése, számszerű megfogalmazása.) Ugyanezt megfogalmazzák 200 város esetére is. Ebben az esetben viszont már nem lehet áttekinthetően megrajzolni az összes utat tartalmazó ábrát és az utakat leszámlálni, megjelenik a bizonyítás igénye. A konkrét esetek bizonyítása után felvetjük – **2. feladat** – hogy n számú város esetén legfeljebb hány utat lehet építeni. A 200 városnál megfogalmazott összefüggést általánosítjuk (*Összefüggések megfogalmazása, általánosítása; jelölések, képletek, formulák alkalmazása.*) Az ugyancsak a 200 városnál alkalmazott gondolatmenet általánosításával az összefüggést bizonyítjuk is.

Ez a gondolatmenet az iskolai tanagyag számos helyén előfordul, a szabályos sokszögek átlóinak összeszámlálásánál épp úgy, mint a számtani sorozat összegképletének bizonyításakor, vagy a kombinatorikai feladatoknál, ismétlés nélküli kombinációként. Ezeknek a kapcsolódási pontoknak a megmutatásával elsősorban az analógiák használatának képességét fejleszthetjük.

– Már 6 város esetén is gyakorlatilag esélytelen, hogy az összes lehetséges minimális számú utat építő hálózatot megrajzolják a tanulók. Erre, mint nehézségre hívjuk is fel a figyelmüket akkor is, ha esetleg ők maguk nem fogalmazzák meg. Ezzel ugyanis előkészítjük a filmbeli probléma tárgyalását is, természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy vajon hány ilyen úthálózat lehetséges, hány ilyen vázlatot (gráfot) kéne megvizsgálnunk, hogy az összes eset előforduljon. (*Probléma felvetés.*)

  A tanulók azonban 6 város esetén is valószínűleg könnyen felismerik, hogy az általuk megrajzolt úthálózatok mindegyike olyan, hogy benne az utak száma 5. Várhatóan a korábbi tapasztalatok – 3 és 4 város – alapján megfogalmazzák azt is, hogy az utak száma mindig eggyel kevesebb a városok számánál. (*Összefüggések felismerése, általánosítás.)* Az a tanulók korától és matematikai kompetenciájuk fejlettségétől függ, hogy ezek alapján bizonyítottnak tekintik-e, hogy 6 város esetén mindig legalább 5 utat kell építeni.

12 város esetén a tanulók megfogalmazzák, hogy a minimális számú utat tartalmazó hálózatok esetén mindig eggyel kevesebb utat kell építeni, mint ahány város van. Ekkor újra hangsúlyozhatjuk, hogy az összes esetet meg kéne nézzük, hogy leszámlálással bizonyíthassuk az állításunkat. Megmondhatjuk az összes lehetséges úthálózat számát is – ami 61 917 364 224 – érzékeltetendő a módszer használhatatlanságát már ennyi város esetén is. (*Probléma-érzékenység és bizonyítási igény fejlesztése. A változatos módszerek szükségességének érzékeltetése.*) Ekkor – tanulónként változó mértékű tanári segítséggel – beláthatják a tanulók az állítást 12, illetve 200 város esetére. Várhatóan a megtalált bizonyítások olyanok lesznek, amelyek bármely más város-szám esetén is alkalmazhatóak. *(„Naiv indukció", konkrétban az általános. Pre-matematikai bizonyítás [1, p. 77–79].)*

3. feladat: Ezek után általánosan is megfogalmazzuk/megfogalmaztatjuk az összefüggést és annak bizonyítását is. (*Absztrakciós képesség fejlesztése, szimbólumok használata, logikai lánc kiépítése, használata.*)

4. feladat: Mutassuk meg, hogy tetszőleges számú város között épített bármely minimális úthálózat esetén lesz olyan város, amelyikből csak egy irányba vezet út!

Ezzel a kérdéssel előkészíthetjük a tábla a) feladatának megoldását. A bizonyításához nem kell más, mint az a gondolat, hogyha nem lenne ilyen város, akkor valamely városból elindulva mindig tovább tudnánk menni minden városból, mígnem olyan városba jutunk, ahol már jártunk. Ekkor viszont valahol körbe mentünk, vagyis nem volt minimális az úthálózat. (*Logikai következtetési séma gyakorlása – indirekt bizonyítás.*)

5. feladat: Fogalmazzuk át az állításunkat gráfokra! („Minden fagráfban van elsőfokú pont".) (*Absztrakciós készség fejlesztése, fogalmak kialakítása, rögzítése, használatuk gyakorlása.*)

6. feladat: Az építők döntöttek az egyik minimális úthálózat mellett. Mi módon tudhatják leírni, melyik tervet fogadták el, ha valamiért nem szabad rajzolniuk, csak a városok sorszámait használhatják?

(Természetes gondolat: Írják le párban azon a városok számait, amelyeket út köt össze!)

A feladat egyszerű és jól átlátható az általános esetben is, így ezt a feladatot nem kérdezzük meg konkrét számú városokra.

7. feladat: Hogyan kódolják az úthálózat tervét, ha arra törekszenek, hogy minél rövidebb számsorozatot használjanak?

A feladat kitűzésekor tetszőleges mese található ki arra, miért szükséges a számsorozat hosszát minimalizálni. Arról viszont már érdemes lehet hosszasabban beszélni, hogy számos olyan valós helyzet van, amikor igen fontos a jelek, illetve a matematikai műveletek számának minimalizálása. *(Konkrét problémák matematikai modellezése, alapvető bonyolultság-elméleti fogalmak megértése.)*

Ennek a feladatnak kapcsán a tanulók – szükség esetén jelentős tanári segítséggel – eljuthatnak a Prüfer-kód ötletéhez: Vágjuk le áganként a fát! (Végülis szűkebb udvarokon, vagy más, környezetükre veszélyes módon álló fákat gyakorta vágnak ki úgy, hogy előbb az ágait vágják le.) Tekintsük a legkisebb sorszámú olyan várost, melyből csak egy út vezet ki, és írjuk le ennek a városnak az (egyértelmű) szomszédjának a számát. Utána ezt a várost a hozzá vezető úttal együtt „hagyjuk el" a tervrajzról! Így egy $n-1$ hosszúságú számsorozatot kapunk. De ez $n-2$ hosszúságúra csökkenthető, hiszen az utolsó leírt szám mindig a legnagyobb sorszám, amit a városok megnevezésére használtunk – n –, így ezt fölösleges leírni. Tehát egy $n-2$ hosszúságú számsorozattal leírhatjuk az úthálózatot/gráfot.

A gondolat várhatóan nem természetes a tanulók számára, így több konkrét feladattal és tanári utasítással, illetve közléssel egyengethetjük a tanulók gondolkodásának útját.

A kód ötletének közös megfogalmazása után következik annak vizsgálata, hogy vajon egy adott úthálózat kódja egyértelműen meghatározott-e, illetve minden ilyen $n-2$ hosszúságú számsorozathoz tartozik-e egyértelműen meghatározott fa-gráf. Ez a vizsgálat megint konkrét esetek vizsgálatából kiindulva juthat el az általános összefüggés felismeréséig és bizonyításáig.

8. feladat: Hány különböző úthálózat lehetséges 3, 4, 6, 12, illetve 200 város esetén?

Fogalmazzuk át a feladatot gráfokra!

A feladat megoldása a 7. feladat eredményét felhasználva kombinatorikai feladattá válik: 3, 4, 6, 12, illetve 200 különböző számból hány 1, 2, 4, 10, illetve 198 hosszúságú jelsorozat készíthető? (*Tanultak felidézése, megfogalmazása, alkalmazása.*)

9. feladat: Hány n-csúcsú fa létezik, ha a csúcsok számozottak?

Ez már a filmbeli táblán szereplő feladat. A 8. feladatban alkalmazott „naiv indukció" precíz megfogalmazásával a filmben is szereplő eredményt kapjuk.

A b) feladat különösen izgalmas módszertani szempontból, elsősorban a probléma didaktikai sokrétűsége miatt.

A feladat látszólag igen nehéz, hiszen „homeomorfikusan irreducibilis" gráfokról szól. De csak látszólag. Valójában a feladat általános iskolába is bevihető, egy közepes képességű tanuló is a siker reményével láthat hozzá a megoldásához.

A szakkifejezések használata mint általában, ez esetben is erősen hozzájárul a kognitív gát kialakulásához. Mint e dolgozat szerzője a hallgatóinak el is szokta mondani, a legegyszerűbb matematikai probléma is igen nehézzé válik, ha a leírásában szereplő fogalmakat nem ismerjük.

Jelen esetben a szakkifejezés különösen bonyolult fogalmat sejtet, ezért a feladat ismertetése majd megoldása igen erős emóciókat válthat ki egy általános iskolai osztályban, így a feladathoz és az általa tanultakhoz erősebb kötődést hozhat létre.

Az, hogy egy gráf „homeomorfikusan irreducibilis" – mint e dolgozatban már írtam is – mindössze annyit jelent, hogy nincsen benne másodfokú pont.

Tehát a problémát például a következő módon fogalmazhatjuk át középiskolások számára:

„Rajzoljátok le az összes 10 pontú fa gráfot, amelyiknek nincsen másodfokú pontja, ha az egyes pontokat nem különböztetjük meg."

Általános iskolások számára – minthogy gráfokról még nem tanultak, és absztrakciós szintjük is alacsonyabb – a következő, az eredeti problémára vezető feladatot adhatjuk:

„Rajzoljátok meg az összes olyan tíz város közötti úthálózat vázlatát, amely olyan, hogy:

– Bármely városból bármely városba el lehet jutni.

– Nem lehet benne körbe menni.

– Nincs olyan város, amelyiken csak áthaladó út lenne, vagyis minden város vagy végállomás, vagy legalább három fele vezet belőle út."

Általános iskolai osztályban az absztrakciós készség fejlesztését szolgálja annak tisztázása, hogy az eredeti feladat megoldása ekvivalens az átfogalmazottéval.

Akár közép-, akár általános iskolásoknak adjuk fel a feladatot, a tanulók nem túl hosszú idő után mind a tíz megoldást megrajzolják.

Sőt, általában ennél – látszólag – többet is találnak.

Általános iskolában a bizonyítási igény és a topologikus szemlélet kialakítását, illetve fejlesztését szolgálja az a vizsgálat, amelyben a látszólag eltérő megoldásokról kiderítik, hogy „lényegében" azonosak. Ugyancsak a bizonyítási igény és készség fejlesztésére szolgál annak tisztázása, hogy megtalálták-e az összes, a feladat feltételeinek megfelelő gráfot. Annak bizonyítása, hogy a felsorolt tíz eseten kívül nincsen más, az esetek rendszerezésével történhet. A rendszerezés alapja lehet a pontok lehetséges fokszáma, vagy a gráfban található utak hossza.

Középiskolában az ez iránt érdeklődő tanulókkal számítógépes programot is írathatunk, amely az összes lehetséges megoldást megkeresi. Ez is, mint az esetek rendszerezése, az algoritmikus gondolkozást fejleszti.

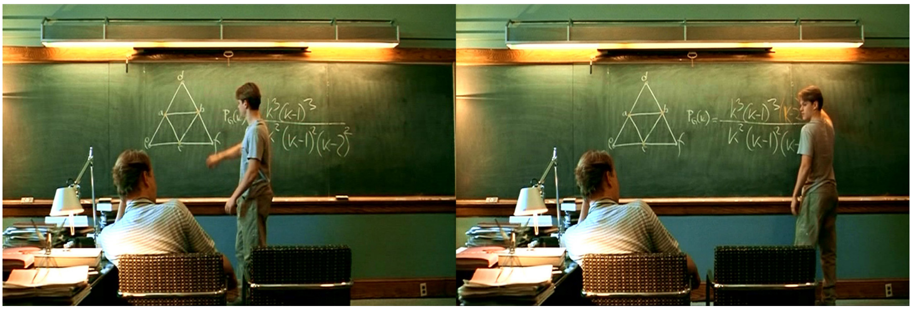
A probléma tárgyalásának újabb szintjét jelenti, ha a diákok felvetik (vagy a tanár felveti), hogy tetszőleges számú pont (illetve város) esetén hány gráfból áll a megoldás. A tanulók számára most az lehet meglepő, és így érzelmi kötődéseket kialakító, hogy az általánosított probléma már tényleg igen nehéz, még senki sem tudta megoldani. Ez – mint a nagy nyitott problémák felvetés általában is – alkalmas a tanulók érdeklődésének felkeltésére, illetve fokozására. Várhatólag néhány érdeklődőbb tanuló meg is próbálkozik azzal, hogy majd ő megoldja – ez főleg középiskolában várható –, amely próbálkozás még sikertelenség esetén is számos matematikai kompetencia fejlesztésére alkalmas.

3. tábla

Ez a harmadik, egyben utolsó olyan jelenet a filmben, amikor a szereplők pontosan értelmezhető matematikai tartalommal foglalkoznak.

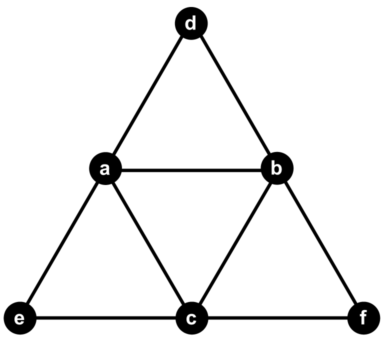
Abból a jelenetből való, amelyben a táblán a filmbeli professzor és Will Hunting közösen csinálnak matematikát, úgy, hogy felváltva írnak a táblára.

A tábla jól olvasható, bár a fimben valamelyik része mindig takarásban van, így most két képet szerepeltetünk.



5.12. ábra.

A táblán ez a rajz és ez a képlet szerepel:



$$P_G(k) = \frac{k^3(k-1)^3(k-2)^6}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}$$

5.13. ábra.

A rajz egy gráf rajza, egy nap-gráfé. A képlet pedig ennek a gráfnak a kromatikus polinomja. Vagyis egy olyan polinom, ami azt adja meg, hogy egy adott gráfot hányféleképpen lehet k darab színnel jólszínezni.

Azt, hogy ez a polinom ilyen törtes formában milyen gondolatmenet során jön ki, a korábbi részben már megírtuk. De ugyanez a probléma elemi eszközökkel, középiskolában is vizsgálható, alkalmas az érdeklődés felkeltésére és a matematikai kompetencia fejlesztésére.

Ehhez mutatunk egy lehetséges felépítést.

Az alábbi feladatokban a gráfok csúcsait megkülönböztetjük. (Számozott csúcsok.)

- Rajzoljuk meg az összes olyan n-pontú gráfot, amelyek színezhetőség szempontjából különböznek! ($n = 1$; 2; 3 vagy 4)

(Manipulatív tevékenység során összefüggések felismerése, megfogalmazása. A rendszerező-képesség fejlesztése. A bizonyítási igény fejlesztése.)

(A továbbiakban csak egyszerű, számozott csúcsú gráfokkal foglalkozunk.)

- Az első feladat megoldása során kapott gráfok közül melyiket hányféleképpen lehet kiszínezni 1, 2, 3, 4 vagy 5 színnel?

(Manipulatív tevékenység, erre épülő csoportosítások, általánosítások. A felismert összefüggések megfogalmazása, képletekbe foglalása a fogalmazási készséget, az absztrakciós szintet és a jelölések, képletek használatát fejleszti. Várhatóan több, egymásnak ellentmondó formulát írnak fel a tanulók. Ezek ütköztetése a szaknyelv-használatot, az érvelési készséget, a bizonyítási igényt és a bizonyítási készségüket is fejleszti.)

- Az első feladat megoldása során kapott gráfok közül melyiket hányféleképpen lehet kiszínezni k színnel?

(Manipulatív tevékenység. Összefüggések absztrakt megfogalmazása, képletekbe foglalása. A bizonyítási igény és a bizonyítási technikák fejlesztése.)

– Hányféleképpen színezhető k színnel egy n hosszú lánc? Hányféleképpen színezhető k színnel egy n hosszú kör?

(Analógiák keresése és használata. Képlethasználat.)

– Hányféleképpen színezhető k színnel az 5.13. ábrán látható gráf?

Ez maga a filmbeli probléma. (A ráismerés élménye, motiváció.) A tárgyalt feladatok után ezt a tanulók többsége meg tudja oldani. (Sikerélmény nyújtása a tanulóknak, önbizalmuk erősítése.)

– Ha egy két komponensű gráf egyik komponensét $f(k)$-, másik komponensét $g(k)$-féleképpen lehet színezni k színnel, akkor hányféleképpen lehet színezni a gráfot?

– Milyen összefüggés érvényes egy olyan gráf esetén, amelynek m komponense van, amely komponensek külön-külön $f_1(k)$, $f_2(k)$, …, $f_m(k)$-féleképpen színezhetők k színnel?

(Kombinatorikus gondolkozás fejlesztése. Absztrakciós készség fejlesztése. Általánosítás, analógiák felismerése, használata.)

– Adott egy egyszeresen összefüggő gráfunk, amelynek egy elválasztó éle által összekötött G_1 és G_2 részgráfját $f_1(k)$-, illetve $f_2(k)$-féleképpen lehet k színnel színezni. Hányféleképpen színezhető k színnel a gráf?

– Miért biztos, hogy egy gráf k színnel való színezéseinek száma mindig k egy polinomjával írható le?

Az egyszerűbb, közvetlenül a filmbeli problémákhoz kapcsolódó feladatok után nem lesz riasztó nehezebb, mélyebb összefüggések felismerését célzó feladatok, problémák vizsgálata sem. (Kombinatorikus gondolkozás fejlesztése. Absztrakciós készség fejlesztése. Belső matematikai összefüggések keresése, felismerése, megfogalmazása.)

6. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban elsősorban a populáris média és a matematika kapcsolatát vizsgáló kutatásokról számoltunk be. E kutatások során matematikusképpel (C/1), matematikai tartalmakkal (C/2) és oktatási lehetőségekkel (C/3) kapcsolatos kérdésekre kerestünk válaszokat.

A kérdéseket részben általánosan, részben konkrétan vizsgáltuk. Tanulmányoztuk a nemzetközi szakirodalom anyagát, elemztük egy, a hallgatók körében végzett nem reprezentatív felmérés eredményeit, továbbá esettanulmányként elemeztünk egy konkrét filmet, a Good Will Hunting-ot.

A dolgozatban az alábbi konkrét kérdéseket vizsgáltuk:

C/1/a: Milyen tudós, illetve matematikus-kép van jelen a társadalomban?

C/1/b: Ezek mennyire függnek kortól, országtól, rassztól?

C/1/c: Megváltoztatható-e a konkrét emberek matematikus-képe, és ha igen, mi módon?

C/1/d: Milyen matematikus-kép jelenik meg a médiumokban, milyen sztereotípiák hatnak a matematikus-ábrázolásokra, illetve milyen sztereotípiákat alakítanak ki a médiumok?

C/2: Milyen konkrét matematikai tartalmak jelennek meg ezekben a médiumokban?

C/3/a: Mit mondanak a különböző matematikai kultúrával rendelkező embereknek ezek a matematikai tartalmak?

C/3/b: Miért és mi módon lehet érdemes használni a pop-kultúrában megjelenő matematikai tartalmakat a közoktatásban és a felsőoktatásban?

A kutatás eredményei a hipotézisek szerinti bontásban

H/1/a: A társadalomban élő matematikus-kép egy létező dolog, amivel a matematika tanítása során számolni kell. Ez a kép sztereotipikus, előítéletes, a matematikusokra nézve jobbára előnytelen.
E/1/a: A nemzetközi kutatások alapján egyértelmű, hogy létezik az emberekben egy intuitív tudós-kép, illetve matematikus-kép. A matematikus-kép néhány jellegzetes vonása már kisiskolás kortól kimutatható. A kép számos külsődleges jegyet is tartalmaz, és kiterjed a személyiség jegyekre, szociális kapcsolatokra és munkamódszerbeli jellemzőkre is. A kép nem igazán pozitív, a valóságtól valószínűleg meglehetősen messze áll.
H/1/b: A társadalmakban élő matematikus-kép bizonyos vonásai függnek, bizonyos vonásai lényegében függetlenek kortól, országtól, rassztól.
E/1/b: Ez a hipotézisünk bizonyítást nyert. A nemzetközi kutatások anyagai alapján kiderült, hogy a matematikus-kép jellemzői közül nagyobb hányadot képviselnek azok, amelyek függetlenek a vizsgálatok helyszínétől. A hazai – nem reprezentatív – vizsgálatok is illeszkednek ezekhez a tapasztalatokhoz. Ugyanakkor akadnak országoktól függő eltérések is, például Magyarországon a matematikust lényegében csak fehér bőrűnek tudják elképzelni.

A tudóskép a vizsgálatok szerint időben lassan változik. A matematikuskép időbeni stabilitását a kutatások egyelőre sem megerősíteni, sem megcáfolni nem tudják, mivel ennek vizsgálata nemzetközileg is alig több, mint tíz éve kezdődött el.

A nagyfokú stabilitást több kutató a populáris médiumok hatásának is tulajdonítja.
H/1/c: Az emberekben a matematikusokról élő sztereotip kép alakítható, az megfelelő módszerekkel a valósághoz közelebbivé tehető.
E/1/c: Ez a hipotézisünk megerősödött, valószínűbbé vált.

Matematika szakos egyetemi hallgatók matematikus-képét vizsgáltuk, és megállapítottuk, hogy a vizsgált minta tagjai kétharmadának megváltozott vagy nagyon megváltozott a matematikusokról alkotott képe egyetemi tanulmányai során, jellemzően pozitív irányba. Kiderült, hogy az emberekben élő és a médiumok által is visszatükrözött matematikus-kép nem megváltoztathatatlan. Például oly módon tud változni, ha az emberek személyes, közvetlen tapasztalatokra tesznek szert a matematikusokkal és a matematika művelésével kapcsolatban. Ilyenkor a kép jellemző módon pozitív irányba változik.

Az eredmény nem tekinthető bizonyítéknak, mivel a vizsgálatban részt vett hallgatók létszáma alacsony volt. A hipotézis tudományos igényű vizsgálatához további kutatások szükségesek.

H/1/d: A társadalmakban élő matematikus-képre a különféle médiumok, köztük a populáris kultúra médiumai számottevő hatással vannak, és a társadalomban jelen lévő kép is hat a pop-kultúrában megjelenő matematikus-képre.

E/1/d: A nemzetközi szakirodalom egy része a médiumok tudós-kép alakító hatását magától értetődőnek tekinti, anélkül, hogy konkrét hatásmechanizmusokra vonatkozó vizsgálatokat mutatna fel. Egy konkrét filmet esettanulmányként elemezve megmutattuk, hogy a filmekben megjelenő matematikus-kép nagyon sok vonásában hasonló a társadalomban élő matematikus-képhez. Látható, hogy médiumokban megjelenő kép tükrözi a társadalomban élő sztereotípiákat. Általában nem tud elszakadni azoktól, illetve felhasználja azt. Ugyanakkor saját - például dramaturgiai - céljai érdekében időnként módosít rajta.

H/2: A médiumokban, helyenként még a pop-kultúra körében tartozókban is érvényes matematikai tartalmak jelennek meg.

E/2: Ezt a hipotézist bizonyítottuk. A Good Will Hunting című filmet használva megmutattuk, hogy abban érvényes, döntő többségében korrekt matematikai tartalmak jelennek meg.

Ennek a dolgozatnak nem volt célja részletes összeállítás készítése, de a példa cseppet sem egyedülálló. Például az „It's My Turn" című amerikai filmben (1980) a Snake-lemma teljes, korrekt bizonyítása elhangzik.

H/3/a: A médiumokban megjelenő matematikai tartalmak releváns üzenetet hordozhatnak a társadalom tagjai számára.

E/3/a: Ezt a hipotézist is bizonyítottuk, ugyancsak a Good Will Hunting című filmet felhasználva. Megmutattuk, hogy az egyes matematikai tartalmak milyen jelentést hordoznak a különböző matematikai képzettségű emberek számára. Megmutattuk, mit mond egy matematikus, egy matematika szakos egyetemi hallgató illetve egy számottevő matematikai képzettséggel nem rendelkező személy, például egy általános- vagy középiskolás számára.

H/3/b: A filmekben megjelenő matematikai tartalom bevihető a tanórákra, azok hatékonyságát növelheti. A populáris médiumokban megjelenő matematikai tartalmak közül alkalmasan választva különböző életkorú és matematikai előképzettségű célcsoportok esetén is készíthető didaktikailag megalapozott feldolgozás.

E/3/b: Példát mutattunk rá, hogy hogyan vihető be az általunk részletesebben vizsgált film matematikai tartalma matematika szakos egyetemi hallgatók közé. A módszert az ELTE hallgatói között kipróbáltuk. A matematikai tartalom a téma elővezetése miatt – nevezetesen, hogy egy népszerű filmben megjelenő matematikai tartalomról van szó – különösen nagy érdeklődést keltett. E megfigyelés kiscsoportos, nem mért, empirikus eredmény volt.

Készítettünk egy feladatsort középiskolások számára készült is. E feladatsor kipróbálása folyamatban van: Két középiskolai tanárral is megegyeztünk, hogy tesztelik a 2012 őszén, az egyik egy normál, a másik egy speciális matematikai tagozatos osztályban.

Kitekintés:

A dolgozat egy nemrég kezdődött és sokfelé ágazó magyarországi kutatásnak csupán a kezdeteit mutatja be. Mindezek alapján a bemutatott anyagokat elsősorban a jövőbeni vizsgálatok bevezetésének tekintjük.

A dolgozatban bemutatott vizsgálatok, illetve a dolgozat megírása során számos, a továbbiakban megvizsgálandó vagy részletesebben megvizsgálandó kérdés, kutatási irány és téma vetődött fel.

Ezek közül folyamatban lévő vizsgálatok:

Mintegy ezer, a populáris kultúra körébe tartozó tételt tartalmazó lista elemzése a matematikus szereplők tulajdonságai szempontjából az ebben a dolgozatban a Good Will Hunting című filmen bemutatott feldolgozási módszer szerint.

Az előző pontban említett lista elemeiben előforduló konkrét matematikai tartalmak összegyűjtése, rendszerezése.

A középiskolások számára készült feladatsor kipróbálása folyamatban van: Egyelőre két középiskolai tanárral is megegyeztünk, hogy tesztelik a 2012 őszén, az egyik egy normál, a másik egy speciális matematikai tagozatos osztályban. Ennek során elsősorban azt vizsgáljuk, hogy egy népszerű filmben megjelenő matematikai tartalom mennyire lehet alkalmas olyan gyermekek érdeklődésének felkeltésére, akikben már kognitív gát alakult ki az iskolai kereteken belül tanult matematikai tartalmakkal szemben, a film a maga, elsősorban érzelmekre ható eszközeivel mennyire tud segíteni a kognitív gát megkerülésben.

További tervezett vizsgálatok:

A társadalomban élő „matematikus" sztereotípiát illetően reprezentatív mintán, kvantitatív módon is megvizsgálandónak gondoljuk, hogy milyen is ez a matematikus-kép ma Magyarországon.

A matematikus-képet illetően az egyik legizgalmasabb kérdés, hogy a sztereotípiák milyen mértékben tükröznek matematikusokra általánosan jellemző tulajdonságokat. Ezt a kérdést a dolgozatban csak nagyon kevéssé érintettük.

A matematika szakos hallgatóink körében végzett vizsgálat egyik nyitott kérdése még, hogy mennyire befolyásolta pozitívan a hallgatók pályaválasztását éppen a matematikai tanulmányok irányába az, hogy bennük valami miatt az átlagtól eltérő, az átlagnál pozitívabb kép élt a matematikusokról, a matematikával való foglalkozásról korábban is.

Nagyon fontosnak gondoljuk megvizsgálni azt, hogy milyen összetevők okozták, hogy a hallgatókban pozitívabb kép élt a matematikusokról, mint általában a társadalomban.

A filmekben megjelenő matematikai tartalmak oktatásban való felhasználásának hatékonyságáról egyelőre szórványos empirikus tapasztalataink vannak. Szükséges lenne ezek hatékonyságának normatív módon való mérése is.

Szükséges lenne megvizsgálni a médiumok tudós-kép, illetve matematikus-kép alakító hatásmechanizmusát.

Ezen belül fel kellene mérni, hogy egyes emberek matematikus-képének kialakulására milyen konkrét médiumok voltak hatással.

Kísérleteket kellene végezni arra vonatkozólag is, hogy bizonyos médiumokon – például portréfilmeken, ismeretterjesztő filmeken, illetve filmdrámákon – keresztül milyen módon és mértékben alakítható az emberek matematikus-képe. Ezen vizsgálatok eredményeitől függően stratégiákat kéne kidolgozni az emberek matematikus-képének valósághoz közelebbivé tételre.

7. fejezet

Summary

In the dissertation we report in the first place on investigations about the connections between mathematics and popular media. In the course of this we look for answers for questions connected to the mathematician-image (C/1), the mathematical content (C/2) and the educational possibilities (C/3).

We investigate these questions in part generally, in part concretely. We study the international literature, analyze the results of one – not representative – survey amongst students, and in addition we analyze a particular film – Good Will Hunting – as a case study.

We investigated the following concrete questions:

C/1/a: What is the scientist- or specifically the mathematician-image present in the society like?

C/1/b: To what extent they depend on age, country and race?

C/1/c: Is it possible to change the mathematician-image of a certain person, and if it is possible, how?

C/1/d: What is the mathematician-image of the media, what are the stereotypes affecting this image, and what kind of stereotypes are created by the media?

C/2: What kind of concrete mathematical content appears in these media?

C/3/a: What do these mathematical contents mean for people with different mathematical background?
C/3/b: Why and in what way is it worth to use in the education (in the schools and in the universities) these mathematical contents, appearing in the pop-culture.

The results of research according to the hypotheses

H/1/a: There exists a living mathematician-image in the society, that we have count with when teaching mathematics. This image is stereotypic, biased, mainly not too advantageous for the mathematicians.
E/1/a: According to the international researches it is unambiguous that there exists an intuitive scientist- and mathematician-image. Some characteristic feature of the mathematician-image can be traceable from the age of early school-years. This image contains quite a few external features and extends to the characteristics of personality, social relationships and attributes of working method as well. The image is not really positive, is quite far from reality probably.
H/1/b: Certain features of the mathematician-image living in different societies depend upon age, country, race, other features are essentially independent from these.
E/1/b: This hypothesis have become proved. Based on the materials of international researches it become clear that amongst of the characteristics of the mathematician-image the proportion of those independent from the location of the investigations is the bigger. The national – not representative – researches fit in these experiences. At the same time there are some differences, depending on the countries – for example the Hungarians can imagine the mathematician only as a white person. According to the researches the scientist-image changes slowly. These researches cannot neither confirm nor disaffirm the stability of the mathematician-image in time, because the investigation of these questions started not much more then ten years only. More researchers attribute this high stability to the impact of the popular media.

H/1/c: The stereotypic mathematician-image, living in people's mind, can be altered, by proper methods made more realistic.

E/1/c: This hypothesis of ours strengthened, became more probable. We investigated the mathematician-image of students, studying mathematics, and found that the mathematician-image of the two-thirds of them changed or changed very much during their university studies, characteristically in the positive direction. It became clear, that the mathematician-image, living in the people's mind and reflected in the media, is not unalterable. It can change for example by getting personal, direct experiences about mathematicians and about the meaning of occupation with mathematics. Then the image characteristically changes for the better.

The result cannot be considered as a proof, because the low number of the students taking part in the investigation. A scientifically established investigation of the hypothesis needs further researches.

H/1/d: The different media, the popular media amongst them, affect substantially the mathematician-image living in the different societies, and at the same time this image also affects the mathematician-image appearing in pop-culture.

E/1/d: There is a part of the international literature which considers self-evident that the media has an important role in the forming of the scientist-image without producing investigations on the special modes of these actions. Analyzing a film as a case study we found that the mathematician-image appearing in the media is in many ways very similar to the mathematician-image living in the society. It shows quite clearly that the image appearing reflects the stereotypes living in the society: cannot split with these stereotypes and uses them. At the same time for the sake of its aims – for example dramaturgic aims – it modifies the reflected image in some cases.

H/2: The mathematical content appearing in the media, sometimes in the pop-media too, is correct in many cases.

E/2: We proved this hypothesis. Analyzing in details the mathematical content appearing in the film 'Good Will Hunting' we found that the main majority of it is mathematically correct. It was not the aim of the dissertation to produce a detailed collection, however this example this example is not

unique at all. Just another example is the American film (1980) 'It is my turn' the audience can listen to the whole, correct proof of the Snake lemma.
H/3/a: The mathematical content appearing in the media may carry relevant messages for the members of the society.
E/3/a: Using the film 'Good Will Hunting' we could prove this hypothesis as well. We demonstrated what kind of meaning could the several elements of mathematical content carry for people with different level of maths knowledge: what do they say for a person without any mathematical qualification, for example an elementary or secondary school student.
H/3/b: The mathematical content appearing in movies can be used in school lessons, it may increase the efficiency of teaching. If chosen properly, these mathematical contents can be used to create didactically valid materials for groups of different age and grounding.
E/3/b: We elaborated in details some possible ways of using the mathematical content of one film in the university maths courses, and tried them amongst the students of ELTE. Thanks to the introduction of the topic, presenting it as the mathematical content of a popular film, it aroused unusually great interest. This observation is a non-measured, small group, empirical result.

We made a series of problems and exercises for secondary school students as well. Trying of this module is now going on: We have an agreement with two secondary school teachers to test it in the autumn of 2012, one in a normal and the other in a special maths class.

Summary and prospects

The dissertation introduces only the beginnings of a not very old and diverging Hungarian research. According to that we primarily consider the presented materials only an introduction of future investigations.

During the investigations presented in the dissertation and the process of writing many new questions, topics and directions of research came to the surface, which would be worth to be investigated or investigated in more details.

Some examples of investigations already proceeding:

Analysis of a list, containing around one thousand items concerning the characteristics of the role of mathematicians based on a processing method presented in the case study of the film 'Good Will Hunting'.

Collecting and organising the concrete mathematical content occurring in the list.

Trying of the module, developed from the mathematical content of a film, for secondary school pupils is proceeding: We have an agreement with two secondary school teachers to test it in the autumn of 2012, one in a normal and the other in a special maths class. In this our main interest is in the suitability of the mathematical content, appearing in a popular film, for motivate children, who already have a cognitive inhibition against the mathematical contents learned in the frame of school teaching. We would like to find out if the film itself, with its ability to appeal to emotions, can help in overcoming or by-passing this cognitive inhibition.

Further plans:

Concerning the „mathematician" stereotype living in the society we think that it should be investigated quantitatively, by a representative survey, what is the mathematician-image like now in Hungary.

Concerning the mathematician-image one of the most exciting questions is the extent of the reality in the stereotypes, reflecting general characteristics of mathematicians. This question was only slightly touched in the dissertation.

Another open question of the investigation carried out amongst our students is whether the inner mathematician-image of students made an influence on their choice of studying mathematics. If it made a positive influence having an image, about mathematicians and about doing mathematics, different and more positive than the average.

We think that it would be very important to investigate the constituents which create a more positive mathematician-image than the image usually present in society.

We have only scattered empirical experiences about the efficiency of using in school teaching the mathematical content appearing in films. It would be necessary to fulfil normative measuring on the efficiency of these.

It would be important to investigate those modes of these actions which are responsible for the formation of the scientist-, mathematician-image of the media.

As a part of the above research, data should be collected about the formation of the mathematician-image of concrete persons, what kind of media had an impact in the creation of their image.

Experiments should be planned to understand deeper the possibilities of influencing the mathematician-image of people through certain media – for example portray-films, popular films and film-dramas – the possible ways and extent of this. Depending on the results of these the researchers should work out strategies how to change the mathematician-image of people to get it closer to reality.

Irodalomjegyzék

[1] A. Ambrus. *Bevezetés a matematikadidaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, 1995

[2] C. R. Barman. How Do Students Really View Science and Scientist? *Science and Children* 34(1), pp.30–33, 1996.

[3] D. C. Beardslee, D. D. O'Dowd The College-student Image of the Scientist. *Science* 133(3454), pp. 997–1001, 1961.

[4] H. Bessoondyal, S. J. Gribble. Mauritian Students' Perceptions of Mathematicians and Mathematics, pp. 421–430, 2003. http://s3.amazonaws.com/zanran_storage/www.gasat-international.org/ContentPages/2485850801.pdf

[5] F. Bergeron, G. Labelle, P. Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures*, volume 67 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Translated from the 1994 French original by Margaret Readdy, With a foreword by Gian-Carlo Rota.

[6] J. S. Berry, S. H. Picker. Your pupils' images of mathematicians and mathematics. *Mathematics in School.* 29:24–26, 2000.

[7] A. Bodzin, M. Gehringer. Breaking Science Stereotypes. Can meeting actual scientists change students' perceptions of scientists? *Science and Children* 39(1), 2001. http://urbanecologyscience.org/ed546/wp-admin/readings/science_stereo_type1.pdf

[8] M. L. Bohrmann, V. L. Akerson. A teacher's reflections on her actions to improve her female students' self-efficacy toward science. *Journal of Elementary Science Education* 13(2), pp. 41–55, 2001.

[9] C. W. Borchardt. Über eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations-Resultante. *J. Reine Angew. Math.*, 57:111–121, 1860.

[10] A. Cayley. A theorem on trees. *Quaterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, XXIII.:376–378, 1889.

[11] D. W. Chambers. Stereotypic images of the scientist: The Draw-a-Scientist Test. *Science Education,* 67(2):255–265, 1983. `http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/sce.3730670213/pdf`

[12] J. M. Dickson, C. F. Saylor, A. J. Finch. Personality factors, family structure, and sex of drawn figure on the Draw-A-Person Test. *J Pers Assess.* 55(1–2), pp. 362–366, 1990.

[13] K. D. Finson. Applicability of the DAST-C to the images of scientists drawn by students of different racial groups. *Journal of Elementary Science Education,* **15**(1), Spring, pp. 15–27, 2003.

[14] K. D. Finson, J. B. Beaver, B. L. Cramond. Development of a field-test checklist for the draw-a-scientist test. *School Science and Mathematics* 95(4), pp. 195–205, 1995.

[15] L. Flick. Scientist in residence program improving children's image of science and scientists. *School Science and Mathematics* 90, pp. 204–214, 1990.

[16] T. Gallai, R. Péter. Matatematika a középiskolák I.osztálya számára. Tankönyvkiadó Nemzeti Vállalat, pp. 333–336. 1949..

[17] C. L. Mason, J. B. Kahle, A. L. Gardner. Draw-A-Scientist Test: Future Implications. *School Science and Mathematics* 91, pp. 193–198, 1991.

[18] L. Gerőcs, Gy. Orosz, J. Paróczay, J. Szászné Simon. Matematika. Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény. Nemzeti Tankönyvkiadó, pp. 51–82, 2010. 18. kiadás.

[19] B. Grevholm. Norwegian upper secondary school students' views of mathematics and images of mathematicians. *In K. Kislenko (Ed.), Current state of research on mathematical beliefs XVI, Proceedings of the MAVI-16 Conference,* June 26–29, 2010, Tallinn, Estonia, pp. 120–136. Tallin University. 2010.

[20] I. Hajnal. Matematika IV. (Fakultatív B változat) Nemzeti Tankönyvkiadó, pp. 432–435, 1982.

[21] I. Hajnal, F. Pintér. Matematika III. (fakultatív B változat) Nemzeti Tankönyvkiadó, pp. 406–411, 2001.

[22] P. Hajnal. *Összeszámlálási problémák.* Polygon, Szeged, 1997.

[23] F. Harary, G. Prins. The number of homeomorphically irreducible trees, and other species. *Acta Math.*, **101**, pp. 141–162, 1959.

[24] G. Horváth, J. Korándi, Cs. Szabó. Mathematics and Good Will Hunting II: Problems from the students perspective. *Teach. Math. Comput. Sci.*, 2012. közlésre elfogadva.

[25] T. Kántor. Referensi vélemény Korándi József *A matematika és a média kapcsolata* című előzetes formában levő PhD disszertációjáról. Kézirat, 2012.

[26] M. Kocsis, P. Marosvári, Cs. Molnár, A. Siposs. Matematika feladatgyűjtemény 12. osztályosok számára, pp. 61–64.

[27] J. Korándi, G. Pluhár. Matematikusok ábrázolása a Good Will Hunting című filmben. *Agora* 8:89-99 2012.

[28] J. Korándi, G. Pluhár. Mathematics and Good Will Hunting I: The mathematicians in Good Will Hunting. *Teach. Math. Comput. Sci.*, 2012. közlésre elfogadva.

[29] J. Kosztolányi, I. Kovács, K. Pintér, J. Urbán, I. Vincze. Matematika 11., Mozaik Kiadó, Szeged, pp. 38–62., 2005.

[30] L. Lovász. *Combinatorial problems and exercises.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, second edition, 2007.

[31] L. Lovász. *Kombinatorikai problémák és feladatok.* Typotex Kiadó Budapest, pp. 72–73. 1999.

[32] M. Mead, R. Metraux. The image of the scientist among high school students: a pilot study, *Science,* 126(3270), pp. 384–390., 1957.

[33] M. R. I. Odell, P. Hewitt, J. Bowman, W. J. Boone. Stereotypical images of scientists: A cross-age study. *Paper presented at the 41st annual national meeting of the National Science Teachers Association, Kansas City, MO.* 1993

[34] G. Pólya and G. Szegő. *Problems and theorems in analysis. Vol. I: Series, integral calculus, theory of functions.* Springer-Verlag, New York, 1972. Translated from the German by D. Aeppli, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 193.

[35] H. Prüfer. Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. *Arch. d. Math. u. Phys. (3)*, 27, pp. 142–144, 1918.

[36] A. Rampal. Images of science and scientists: A study of school teachers' views I. Characteristics of scientists. *Science Education,* 76(4) pp. 415–436, 1992

[37] R. J. Rensaa. The Image of a Mathematician *[Maths-Education] Philosophy of Mathematics Education Journal* 19 (Dec. 2006) `http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome19/index.htm`

[38] D. B. Rosenthal. Images of scientists: A comparison of biology and liberal studies majors. *School Science and Mathematics* 93(4), pp. 212–216, 1993.

[39] R. A. Schibeci, I. Sorenson. Elementary school children's perceptions of scientists. *School Science and Mathematics.* 83(1):14–19, 1983

[40] R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.

[41] H. Türkmen, H. Turkish primary students' perceptions about scientist and what factors affecting the image of scientists. *Eurasia Journal of Mathematics, Science &Technology Education*, 4(1):55–61, 2008.

[42] R. Wilson. A millenium of mathematical puzzles: Homeomorphically irreducible trees. `http://www.youtube.com/watch?v=811LbompjPg`.

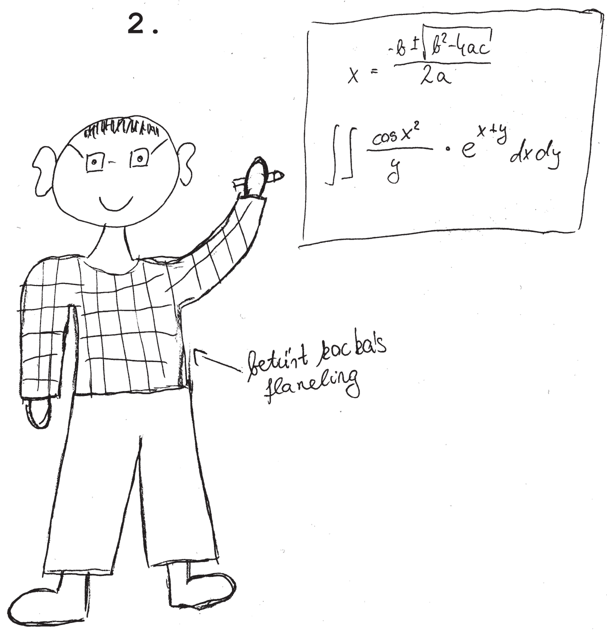
[43] J. L. Wilson, C. M. Latterell. Nerds? Or nuts? Pop culture portrayals of mathematicians. *ETC: A Review of General Semantics,* 58:172–178, 2001

[44] K. Y. Wong, Images of mathematicians. In *R. P. Hunting, G. E. Fitzsimons, P. C. Clarkson, and A. J. Bishop (Eds.), Regional collaboration in mathematics education 1995*, 785–794). Melbourne: Monash University. 1995.

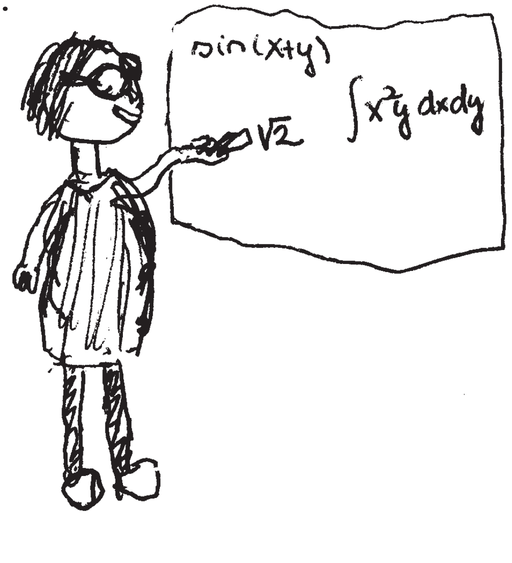
Függelék

1.

2.



3.



4.

(szarkalábas férfi, gondolatokkal ráncolt homlok, öltöny-nyakkendős ruha, asztal előtt görnyedve, számítógép, papírstóc előtte, tea mellette, mindig tele kuka mellette)

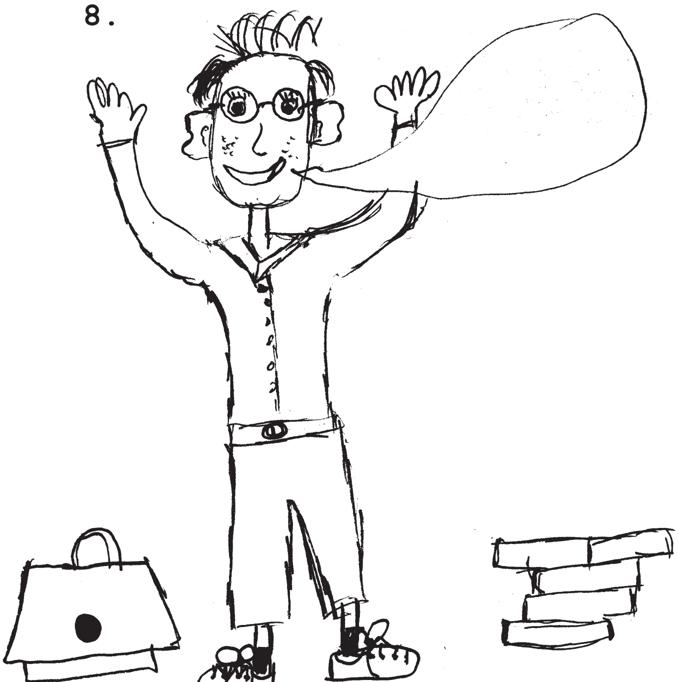
1. számú melléklet

5.

6.

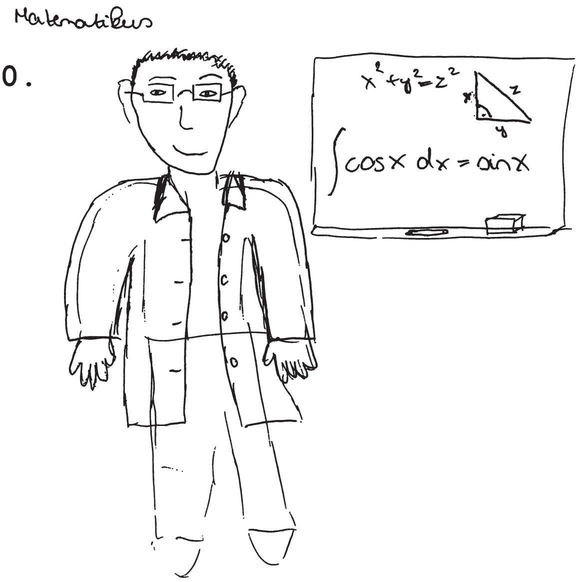
7.

8.



9.

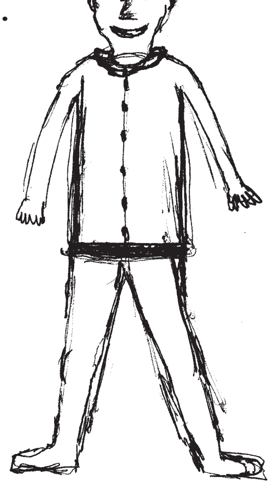
10.



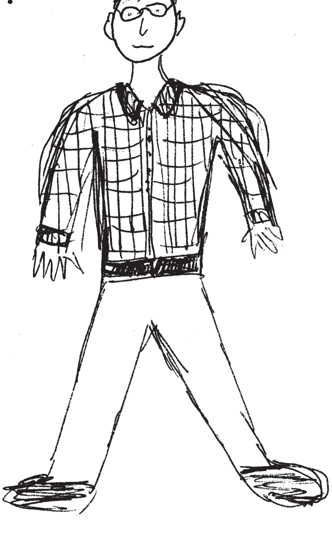
11.

Jegyzet: - Férfi
- Ősz hajú, kopaszodó
- elegáns (általában ingben jár)
- zsebében: tollak, jegyzetek
- nem túlsúlyos
- komor
- ékszereket nem hord

12.



13.



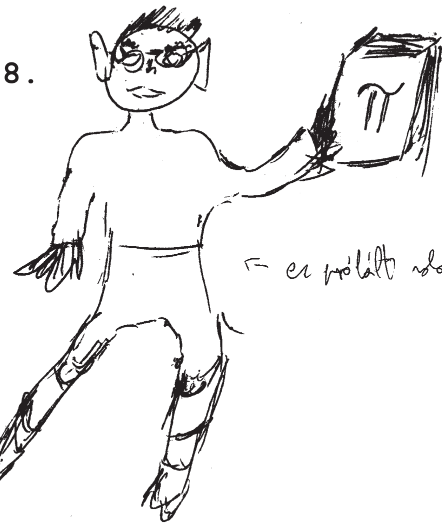
1. számú melléklet

14.

15.

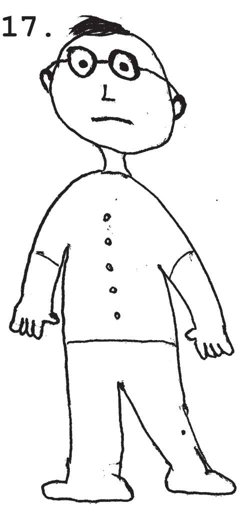
16.

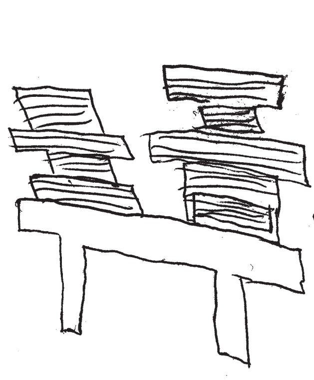
18.



← ez próbált volna átlag ember lenni

17.





←(ezek itt könyvek akarnak lenni)

2. számú melléklet

a hallgató sorszáma	nem	rassz	kor	szemüveg	haj	arcszőrzet	testalkat	arckifejezés	ráncos homlok	öltözet	képletek szerepeltetése	a munkavégzés helye	egyéb
1	férfi	indo-erópai	középkorú	nincs	kopaszodó, rendezetlen	szakáll, bajusz	vékony	mosoly	van	rendezett	nincs	nem látszik	
2	férfi	indo-erópai	fiatal	van	rövid, kevés	nincs	normál	mosoly	nincs	kicsit slampos	igen (másodfokú képlete, kettősintegrál - korrektek)	táblára ír	
3	férfi	indo-erópai	fiatal vagy középkorú	van	normál	nincs	kicsit testes	mosoly	nincs	köpeny	igen (kicsit hibás integrál)	táblára ír	
4	férfi	indo-erópai	középkorú	nincs	normál	nincs	nem kivehető	komor, kicsit kétségbe-esett	van	öltöny-nyakkendő	nincs	dolgozószoba (asztalnál ül, számítógép)	"mellette tea, papírstóc, mindig tele kuka mellette"
5	férfi	indo-erópai	fiatal	nincs	rendezetlen	borosta	normál	komor, zavart tekintet	nincs	nem kivehető	nincs	nem látszik	
6	férfi	indo-erópai	idősebb	van	erősen kopaszodó	szakáll, bajusz	kicsit testes	mosoly	nincs	öltöny-nyakkendő	nincs	nem látszik	mint írja, középiskolai matektanáráról mintázta
7	férfi	indo-erópai	idősebb	van	erősen kopaszodó	nincs	normál	zavart	van	normál	nincs	nem látszik	
8	férfi	indo-erópai	középkorú	van	kopaszodó, rendezetlen	nincs	vékony	mosoly	nincs	nemtörődöm, de normál	nincs	nem látszik	táska, könyvek
9	férfi	indo-erópai	középkorú	van	rendezetlen	szakáll, bajusz	normál	semleges	nincs	póló, rajta: 3,1415	nincs	nem látszik	
10	férfi	indo-erópai	középkorú	van	rövid, kevés	nincs	normál	mosoly	nincs	köpeny	igen (Pitagorasz tétel helyesen, integrál kicsit hibásan)	táblára ír	
11	férfi	indo-erópai	középkorú	van	"ősz hajú, kopaszodó"	nincs	normál	"komor"	nincs	"elegáns, ... ékszereket nem hord"	nincs	nem látszik	"zsebében tollak, jegyzetek"
12	férfi	indo-erópai	fiatal vagy középkorú	van	rövid de kusza	nincs	normál	mosoly	nincs	normál	nincs	nem látszik	Okosság-"glória"
13	férfi	indo-erópai	fiatal	van	normál	nincs	normál, atlétikus	semleges	nincs	normál	nincs	nem látszik	
14	férfi	indo-erópai	középkorú	van	normál	nincs	kicsit testes	mosoly	nincs	köpeny	nincs	kezében kréta	
15	férfi	indo-erópai	fiatal	van	rövid, rendezett	nincs	normál	mosoly	nincs	nem kivehető	nincs	dolgozószoba	Számítógép, asztal, könyvespolc, kezében toll, jegyzettömb.
16	férfi	indo-erópai	középkorú	van	"einsteini"	bajusz	vékony	mosoly	van	köpeny	nincs	nem látszik	
17	férfi	indo-erópai	fiatal vagy középkorú	van	erősen kopaszodó	nincs	kicsit testes	rosszkedvű	nincs	normál	nincs	nem látszik	mellette könyv tornyok
18	férfi	indo-erópai	nem kivehető	van	rendezetlen	nincs	normál	semleges	nincs	nem kivehető	kezében könyv, azon egy "pí" betű	nem látszik	"Ez próbált valami átlagember lenni"

3. számú melléklet

a hallgató sorszáma	**Hány matematikust látott, ismert az egyetemi évei előtt? Kiket, és milyen módon?**	**Milyen képe volt a matematikus személyiségéről?**	**Milyen képe volt a matematikus külsejéről?**	**Matematikusnak tekintette-e a matematika tanárait?**	**Milyen tapasztalatok, információk hozták létre ezeket a képeket**	**Változtak-e ezek a képek az egyetemi évei során? Ha igen, mi módon?**
2	0	"nagyon okosak"	"idős, ősz hajú bácsi"	Nem.	**tévé; internet**; ismerősök	"Persze" (De nem részletezi.)
3	2 (idősebbik báty és a matematika tanára)	"kedves, segítőkész emberek"; "de zárkózottak is"; "akik naphosszat egy-egy problémán tudnak agyalni, és olyankor nem foglalkoznak a környezetükkel"	"általában nem öltözködik olyan feltűnően, de konkrét sajátságai nincsenek"	"Igen, ...Számomra mindenki matematikusnak tekinthető, aki felsőfokon tanult matekot, és erre is jelentkezett"	A bátyjáról szerzett tapasztalatokat általánosítja.	Nem igazán. ("Még mindig úgy tartom, hogy a matematikusok általában - persze van jó néhány kivétel - a saját világukban élnek, és néha zárkózottak és félénkek, de ők is tudnak lazítani, és "normális" életet élni.")
4	4 - 5	szeretteljesek; családosak; kedvesek; a matematikát idealizálják, rendkívüli a tudásuk a matematikán kívül is; elhanyagolják a rendrakást a lakásukban	"finoman öltöznek"	Igen.	Személyes tapasztalatok.	Nem.
5	2-3 (szülők barátai)	"Okos, mindent megért, látja a jövőt."	"Akármilyen külsejű ember lehet matematikus."	Általában nem, de kettőt igen.	Tanárokkal és másokkal való beszélgetések.	Igen. ("Már teljesen normális embernek számítanak.")
6	"Jópárat." (Két matektanárát említi.)	"személyiségfüggő"	"nem szeretnék általánosítani"	Igen.	"teljes egészében a tanáraimtól származnak"	Nem igazán. ("Matematikusként a tanáraimra fogok gondolni.")
7	"Nem nagyon."	"reális, logikus gondolkozású"; "pozitív ember"; "minden problémára a megoldást keresi, és ez az út teszi boldoggá, nem a hétköznapi dolgok"; "Van családja, zseni gyerekei, felesége"; "Házimunkát nem végez, otthon is egy kicsit a saját világában él"	"Vékony, törékeny, izomtalan, sápadt, kopaszodó, divatot nem követő, szemüveges, magas homlok"	"megoszlott a véleményem"	"mindennapi előítéletek"; **internet**	"Részben, de nem olyan nagy mértékben." (De nem részletezi.)
9	0	Furák, visszahúzódók.	szakállas; szemüveges; vézna; kord zakós	nem igazán	**médiumokból** (konkrét nélkül)	Igen. (A matematikusok is emberek, nem lehet általánosítani.)
10	Csak a matematikatanárait.	elvont; antiszociális; más tárgyakból gyenge; befelé forduló; a magánélete kevésbé fontos, mint a szakmája	régi vagy örökölt ruhákat hord; szemüveges	Igen.	néhány specmatos ismerős; általános "közszemlélet"	Igen. ("Nem túlnyomóan fiúk; buliznak is; sokan közéletiek; legtöbben rendesen öltözködnek, sokan divatosan is. A tanárok hétköznapi dolgokkal is foglalkoznak, van magánéletük.")

11	2 (középiskolai tanárok)	komor, nem szeret viccelődni; szigorú; kényesen ügyel a részletekre; pontos; "más, mint egy hétköznapi ember"	férfi; ápolt; jó megjelenésű; általában inget hord; zsebében számológép és tollak; kopaszodó, ősz hajú; szemüveges	Igen.	A matemaika tanárokkal kapcsolatos tapasztalatok.	Igen. (Van humoruk; ők is hétköznapi emberek; számológépet nem használnak; érdeklik őket más dolgok is, nem csak a matematika.)
12	1	elvont; "nem jut ideje családra, sportra, hobbira, vagy csak alig, lehet hogy ezekre nem is vágyik"	"igénytelen, nem ad sokat a külsejére"	"bizonyos szinten"	"az ő tulajdonságait azonosítottam egy matematikuséval"	"keveset"
13	0	"határozott, nyugodt, intelligens"	"A szemüveget elhagyhatatlannak gondoltam, illetve a kockás ing is meghatározó volt. Bár már akkor gondoltam, hogy ez így nem teljesen igaz, mert az általam ismert 4 tanárból csak kettőnek volt kockás inge."	"elsősorban pedagógusnak, és csak másodsorban matematikusnak"	tanárai; mások véleménye; **könyvek; filmek**	"Most már majdnem biztos vagyok benne, hogy nem minden matematikus szemüveges. Abban is, hogy nem feltétlen nyugodt, határozott, még csak nem is kell intelligensnek lennie. Ezt inkább a szaktársaimon vettem észre."
14	1 (a gimnáziumi matematika tanára)	"nagyon elhivatott"; "hihetetlenül okos"; "nem foglakoztatják a hétköznapi történések"; "nem nagyvonalú életet élő"; "kicsit hóbortos"	"fehér köpenyt viselnek, meg persze szemüveget"	"A sajátomat igen." (mert volt olyan is az iskolában, akit nem)	a többiek véleménye; **média** (konkrét nélkül)	"Természetesen változtak." "hétköznapi emberek" "csak talán kicsit elvontabbak a többieknél"
15	0	"ami az átlagos emberben él"; "kicsit magának való,nem közösségi ember"; "mindene a tudomány és ezért sokat képes feláldozni,akár a magánéletéből is"	"slampos,vagy éppen öltönyös"; "szürke egyéniség a külseje alapján"; "Nem is fontos neki a külső, sőt azt hiszi,ha többet ad a külsejére az visszaveti az emberekben a szellemi képességeiről alkotott képet."	Nem.	"Ezeket a képeket a társadalom előítéletei hozták létre bennem."	"nagyon sokban"; "tudom,hogy nem csak ebből áll az életük"; "nőként is lehet sikereket elérni"
17	Nem.	zárkózott; komoly; "egész nap ül egy szobában és gondolkozik"; "ideges, ha megzavarják"; "nincs túl sok kapcsolata a külvilággal", "nincs oda az emberi kapcsolatokért"; "elvan magában"	középmagas; pocakos; szemüveges; férfi; régi ingben; szövetnadrágban; "kócos őszülő hajjal"	Nem.	"Nem tudom... Tapaszatlatom nem volt."	Igen. ("Annyira különbözőek, mint bárki más." "Nem mind férfi." "Nem mind kövér." "Vannak köztük meglepően fiatalok is." "Nagyobb részükről nem tudom elképzelni, hogy egész nap ül egy szobában és gondolkodik.")
18	Nem.	"úgy beszélnek hogy elalszik rajta az ember mert egy szót sem ért belőle"; "csak a matek érdekli őket és semmi más"	"ruhájuk vagy nagyon elegáns (azzal nem kell sokat szenvedni hogy akkor most mit is vegyen fel), vagy nagyon csapzott"	"meg se fordult a fejemben"	**médiából** (konkrét nélkül)	Igen. ("ezek a képek teljesen eltűntek belőlem" - de nem részletezi)

A publikáció elkészítését a TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0024 számú projekt támogatta.
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

The publication is supported by the TÁMOP-4.2.2/B-10/1-2010-0024 project. The project is co-financed by the European Union and the European Social Fund.