

Doktori (PhD) értekezés tézisei

**Általánosított fraktálok
általánosított kontextusokban**

Pénzes Evelin

Témavezető: Dr. Bessenyei Mihály



DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2026.

Motiváció.

Mandelbrot, a "Fraktálok atyja" hangsúlyozta, hogy a minket körülvevő világot szabálytalan alakzatok uralják. A felhők, hegyek, tengerpartok, fakérgek és villámok mind olyan tulajdonságokat mutatnak, amelyek természetes módon fraktálként értelmezhetők. Fraktálok nemcsak fizikai, kémiai és biológiai jelenségekben jelennek meg, hanem a művészetben és a zenében is. Mindazonáltal széles körű elterjedtségük és népszerűségük ellenére a matematikai irodalomban nem létezik a fraktál fogalmának általánosan elfogadott definíciója.

A fraktálok két alapvető jellemzője az *önhasonlóság* és a *töredezett* szerkezet. A Mandelbrot által képviselt korai definíciók az utóbbi tulajdonságra helyezték a hangsúlyt, és a fraktálokat olyan halmazokként jellemezték, amelyek Hausdorff–Besicovitch-dimenziója szigorúan nagyobb topológiai dimenziójuknál [20, 21]. Mandelbrot később ezt a definíciót túl korlátozónak tekintette. Ezzel szemben a fixpontelmélet az ön-hasonlóságot állítja középpontba. Ezt a szemléletet Hutchinson dolgozta ki [14], aki a fraktálokat ön-hasonló leképezések által generált fixpont-egyenletek megoldásaiként vizsgálta. Út-törő munkája megteremtette a modern fraktálmélet alapjait. Az értekezésben szintén Hutchinson [14] és Barnsley [7] munkásságát követve fixpontelméleti megközelítésből tanulmányozzuk a fraktálokat.

Klasszikus eredmények.

Értekezésünk központi fogalma az invarianciaoperátor.

Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ a $\mathcal{P}(X)$ hatványhalmazon értelmezett önmagukba ható leképezések családja. Azt mondjuk, hogy a

$$\Phi(H) := \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F(H)$$

módon értelmezett $\Phi: X \rightrightarrows X$ leképezés az $\mathcal{F}$ család *invariancia operátora*. Továbbá, a $H \subseteq X$ halmaz $\mathcal{F}$ -invariáns, ha

$$H = \Phi(H)$$

teljesül, azaz H *fixpontja* az invariancia operátornak.

Az (X, d) metrikus térben legyen $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$, ahol $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow X$. Egy $\mathcal{F}$ -fraktál alatt az X metrikus tér egy nemüres, kompakt, $\mathcal{F}$ -invariáns részhalmazát értjük.

Hutchinson klasszikus fraktálméleti tétele [14] azt állítja, hogy ha $\mathcal{F}$ kontrakciók véges családja egy teljes metrikus térben, akkor pontosan egy $\mathcal{F}$ -fraktál létezik.

Legyen (X, d) metrikus tér, és jelölje $\mathcal{K}(X)$ az X nemüres és kompakt részhalmazainak családját. Ekkor tetszőleges $A, B \in \mathcal{K}(X)$ halmazokra definiálhatjuk az A és B halmazok *Hausdorff–Pompeiu-távolságát*, amelyet jelöljön d_{HP} . A $(\mathcal{K}(X), d_{HP})$ metrikus teret gyakran *fraktáltérnek* nevezik, lásd [13] és [23].

Blaschke [8] belátta, hogy a fraktáltér örökli az alaptér teljességét. Azaz, ha (X, d) teljes metrikus tér, akkor $(\mathcal{K}(X), d_{HP})$ is teljes.

Hutchinson fraktálokhoz vezető útját tehát a következőképpen foglalhatjuk össze: Az invarianciaegyenletet felfoghatjuk úgy, mint egy fixpontproblémát, ahol a keresett fixpont a $\mathcal{K}(X)$ család elemei közül kerül ki. Kiderül, hogy ha $\mathcal{F}$ kontrakciók véges családja, akkor a Φ invarianciaoperátor maga is kontrakció a fraktáltéren. Továbbá, ha az eredeti tér teljes, akkor a Blaschke-tétel alapján a fraktáltér is teljes. Ezért alkalmazhatjuk a Banach-féle fixponttételt [1]: *Teljes metrikus tér bármely kontrakciója pontosan egy fixponttal rendelkezik.*

Összességében a kapott fixpont egy nemüres, kompakt, $\mathcal{F}$ -invariáns halmaz. Más szóval: egy fraktál.

Megjegyezzük azonban, hogy Hutchinson tételének létezik olyan alternatív bizonyítása is, amely nem támaszkodik sem a Banach-féle kontrakciós elvre, sem a Blaschke-féle teljességi

tételre. Ez a megközelítés helyett a Cantor-féle metszettétel, valamint a Hausdorff–Pompeiu-metrika bizonyos tulajdonságain alapul; lásd [11]. Azt is megjegyezzük, hogy Hutchinson eredeti elképzeléseinek [14] és különböző fixponttételeknek az ötvöztetésével számos általánosítás nyerhető metrikus terekben. E kutatási irány áttekintését, valamint több jelentős további fejlemény ismertetését Leśniak, Snigireva és Strobin [19] tanulmányában találhatjuk meg.

Munkánk a fraktálok fixpontelméleti megközelítését követi, azonban az itt kidolgozott módszerek függetlenek a klasszikus Hutchinson-féle keretrendszerrel, és lényegesen különböznek attól. Konkrétabban, az alapul szolgáló matematikai környezetet általánosítjuk oly módon, hogy a Hutchinson klasszikus eredményeiben szereplőknél általánosabb leképezéssorozatok és/vagy általánosabb tereket vizsgálunk. Más szóval, egy alternatív módszer segítségével általánosított fraktálokat tanulmányozunk általánosított környezetekben.

1. Monoton leképezések invariáns halmazai.

Ez a fejezet egy elemi utat mutat a fraktálokhoz és csupán a naiv halmazelméletre támaszkodik. A monoton és folytonos leképezések állnak vizsgálataink középpontjában.

Az első fejezet fő eredményeiben megfogalmazunk egy fraktáltételt tisztán naiv halmazelméleti kontextusban. A Kantorovics-iteráció [17] és a Knaster–Tarski fixponttétel [18] segítségével megadjuk az invariancia egyenlet minimális megoldását.

TÉTEL. Ha $\mathcal{F}$ monoton leképezéscsalád, akkor létezik egy legszűkebb $\mathcal{F}$ -invariáns halmaz. Továbbá, ha $\mathcal{F}$ folytonos család, akkor a Kantorovics-iteráció az adott szubinvariáns halmazt a legszűkebb invariáns halmazzá bővíti, ami ezt a szubinvariáns halmazt tartalmazza.

Megmutatjuk néhány klasszikus példán keresztül, hogyan találhatjuk meg az invariancia egyenlet minimális megoldását. Az is kiderül, hogy a Kantorovics-iteráció nem csupán elméleti szempontból fontos: Ugyanis a módszer implementálásával könnyen approximálhatunk fraktálokat. Ennek illusztrálásaként bemutatjuk a klasszikus Sierpeński-szőnyeg és egy saját “Wave” fraktál approximációját. Azt is láthatjuk továbbá, hogy bármelyik minimális megoldás lezártja épp a kapcsolódó klasszikus fraktál. Ez a megfigyelés kiemelkedő szerepet játszik a későbbi fejezetekben is. A fejezet fő eredményei Bessenyei és Pénzes [3] cikkén alapulnak.

2. Kondenzáló családok fraktáljai.

Ebben a fejezetben metrikus terekben vizsgáljuk a fenti invariancia operátort. Tehát az $\mathcal{F}$ család a metrikus tér véges sok önmagába ható leképezését tartalmazza. Azaz, $\mathcal{F}$ -fraktál alatt a metrikus tér egy nemüres, kompakt, $\mathcal{F}$ -invariáns részhalmazát értjük.

Hutchinson [14] klasszikus eredményeit általánosítjuk abban az értelemben, hogy kontrakciók helyett kondenzáló leképezéseket valamint Matkowski kontrakciókat használunk.

A stratégiánk a fraktáltételek bizonyításához a következő. A Darbo–Szadovszkij fixponttétel [10, 24] szerint az $\mathcal{F}$ minden elemének létezik legalább egy fixpontja. Vegyük bármelyiknek egy tetszőleges fixpontját. A Kantorovics-iterációt [17] alkalmazva egy nemüres $\mathcal{F}$ -invariáns halmazhoz jutunk. Továbbá, ez a halmaz korlátos, mivel a Kantorovics-iteráció Cauchy-sorozatot származtat. A Hausdorff nemkompaktsági mérték tulajdonságait alkalmazva kiderül, hogy az invariáns halmaz relatív kompakt. Végezetül megmutatjuk, hogy az invariáns halmaz lezártja (ami tehát nemüres és kompakt) is $\mathcal{F}$ -invariáns. Ez pedig épp egy $\mathcal{F}$ -fraktál létezését jelenti.

TÉTEL. Ha $\mathcal{F}$ egy Banach-tér nemüres, korlátos, zárt, konvex részhalmazán értelmezett kondenzáló leképezések véges családja, akkor létezik legalább egy $\mathcal{F}$ -fraktál.

Ha az invariancia operátor Matkowski kontrakciókat tartalmaz, akkor nem csupán a fraktál létezését, hanem egyértelműségét is tudjuk bizonyítani. Ez azonnali következménye annak a ténynek, hogy maga az invariancia operátor Matkowski kontrakció a fraktáltérben és a Matkowski kontrakciónak legfeljebb egy fixpontja van a Matkowski fixponttétel [22] szerint.

TÉTEL. Ha $\mathcal{F}$ egy teljes metrikus téren értelmezett Matkowski kontrakciók véges családja, akkor létezik pontosan egy $\mathcal{F}$ -fraktál.

A fejezet lezárásaként olyan fraktál példákat mutatunk be, amikor a klasszikus Hutchinson Tételt nem lehet alkalmazni. Ezt a tényt csupán numerikus módszerekkel támasztjuk alá szigorú matematikai bizonyítás helyett. Ahogyan korábban is tettük, implementáljuk a Kantorovics-iterációt, hogy fraktálok approximációjára alkalmazzuk. A fő eredmények Bessenyei és Péntes [4] cikkén alapulnak.

3. Általánosított fraktálok szemimetrikus térben.

Ebben a fejezetben szemimetrikus terekben értelmezett fraktálokat vezetünk be. Szemimetrikus tér alatt egy olyan (X, d) párt értünk, ahol X nemüres halmaz, míg $d: X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ pozitív definit és szimmetrikus függvény, azaz teljesíti a Fréchet-féle metrikus terek első két axiómáját. Az ilyen tereket részletesen vizsgálták Jachymski, Matkowski és Świątkowski [15], valamint Chrzęszcz, Jachymski és Turoboś [9]. Ebben a fejezetben az invarianciaoperátor leképezései egy szemimetrikus tér véges sok kondenzáló leképezéséből, illetve Matkowski kontrakciójából állnak.

TÉTEL. Ha $\mathcal{F}$ egy normális, teljes és reguláris szemimetrikus téren értelmezett kondenzáló leképezések véges családja úgy, hogy az invariancia operátor korlátos Kantorovics-iterációt származtat egy nemüres $\mathcal{F}$ -szubinvariáns H halmazból, akkor létezik legkisebb $\mathcal{F}$ -fraktál, ami tartalmazza H -t.

TÉTEL. Ha $\mathcal{F}$ egy normális, teljes és reguláris szemimetrikus téren értelmezett Matkowski kontrakciók véges családja, akkor létezik egyértelmű $\mathcal{F}$ -fraktál.

A bizonyítások alapgondolatai megegyeznek az előző fejezetben alkalmazottakkal, azonban szükség van a szemimetrikus terek tulajdonságainak mélyebb vizsgálatára. Ehhez felhasználjuk a reguláris szemimetrikus és metrikus terek között főnálló uniform ekvivalenciát [9], továbbá Bessenyei és Páles szemimetrikus terek Matkowski kontrakcióira vonatkozó fixponttételét [2]. Emellett megvizsgáljuk a Hausdorff-féle nemkompaktsági mérték tulajdonságait szemimetrikus térben. Lényeges szerepet játszik a Hausdorff-féle kompaktsági tétel szemimetrikus térbeli megfelelője. Eszerint teljes és reguláris szemimetrikus terekben egy részhalmaz pontosan akkor relatív kompakt, ha Hausdorff-féle nemkompaktsági mértéke nulla.

A fő eredmények Bessenyei és Péntes [5] cikkén alapulnak.

4. Általánosított fraktálok dimenziója.

Ebben a fejezetben bevezetjük a Hausdorff-mértéket szemimetrikus terekben, és az általánosított fraktálok dimenzióját vizsgáljuk. Mértékelméleti alapforrásunk Járai könyve [16].

Hutchinson nemcsak a fraktálok létezését és egyértelműségét tanulmányozta, hanem azok dimenzióját is. Egy dimenzióképletet adott meg [14] olyan kontraktív hasonlóságokra, amelyek teljesítik a nyílt halmaz feltételt.

Ha $\mathcal{F}$ kontraktív hasonlóságok véges családja egy teljes metrikus térben, teljesíti a nyílt halmaz feltételt, és a leképezések arányai rendre $q_1, \dots, q_n$, akkor a generált fraktál Hausdorff-dimenziója az

$$q_1^r + \dots + q_n^r = 1$$

exponenciális egyenlet egyértelmű megoldásaként adódik.

Fő eredményeinkben a fraktáldimenzió-képlet egy változatát mutatjuk be olyan fraktálokra, amelyeket szemimetrikus terek Matkowski kontrakciói generálnak. A képlet exponenciális alakú, azonban a kontrakciós tényezőket a Matkowski kontrakciókhoz tartozó összehasonlító függvények jobb felső Dini-deriváltjai helyettesítik.

TÉTEL. *Legyenek $f_1, \dots, f_n$ egy teljes, normális és reguláris szemimetrikus tér Matkowski kontrakciói a hozzájuk tartozó $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ összehasonlító függvényekkel. Ha a generált H fraktálra valamely $r > 0$ esetén $0 < \chi^r(H) < +\infty$ teljesül, akkor az összehasonlító függvények Dini-deriváltjai nem lehetnek egyszerre nullák, $\dim_{\mathcal{H}}(H) = r$, valamint*

$$1 \leq (D\varphi_1(0))^r + \dots + (D\varphi_n(0))^r.$$

Továbbá, ha $\chi^r(f_k(H) \cap f_l(H)) = 0$ minden $k \neq l$ esetén és minden Matkowski kontrakció hasonlóság erős összehasonlító függvényrel, akkor az összes nullabeli derivált szigorúan kisebb egynél és a fenti egyenlőtlenség egyenlőséggé teljessül.

A fejezet fő eredményei Bessenyei és Péntes [5] cikkén alapulnak.

5. Egy axiomatikus megközelítés.

Ebben a fejezetben ismét visszatérünk az értekezés fő eredményeihez, és megmutatjuk, hogy a Hausdorff-mérték szerepe nem olyan kitüntetett, mint amilyennek első látásra tűnhet a topológiai fixponttételek vagy a fraktálmélet szempontjából. Halmazfüggvények és burokoperátorok fogalmát használjuk fel ahhoz, hogy még általánosabb fraktáltételekhez jussunk.

Az X nemüres halmazon értelmezett $\Phi: X \rightrightarrows X$ leképezést *burokoperátornak* nevezzük, ha monoton, idempotens és extenzív.

A halmazfüggvények és a burokoperátorok közötti megfelelő kapcsolat megteremtéséhez, illetve a kondenzáló leképezések fogalma által motiválva, pontosítanunk kell a vizsgált leképezésoosztályt:

A $\chi: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ halmazfüggvényt *Φ -kompatibilisnek* nevezzük, ha minden $A, B \subseteq X$ esetén

$$\chi(\Phi(A \cup B)) \leq \max\{\chi(A), \chi(B)\}.$$

Továbbá az $F: X \rightrightarrows X$ leképezést *χ -redukálónak* nevezzük, ha $\chi(F(A)) < \chi(A)$ teljesül minden olyan $A \subseteq X$ halmazra, amelyre $0 < \chi(A) < +\infty$.

A fejezet fő eredményeiben megmutatjuk, hogy egy invarianciaoperátor értelmezési tartományát lecserélhetjük egy "kicsi" tartományra oly módon, hogy az örökölje az eredeti tartomány tulajdonságait, és az invarianciaoperátor továbbra is önmagába ható leképezés maradjon rajta. Ebben ismét kulcsszerepet játszik a Knaster–Tarski-féle fixponttétel és a Kantorovics-iterációs eljárás.

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy $\Phi: X \rightrightarrows X$ burok operátor, a $D \subseteq X$ nemüres, Φ -invariáns halmaz, valamint χ Φ -kompatibilis, véges, nematomos D -n. Ha $\mathcal{F}$ a D -n értelmezett*

önmagukba ható, χ -redukáló leképezések véges halmaza és $F: D \rightrightarrows D$ az indukált invariancia operátor, akkor létezik egy nemüres Φ -invariáns halmaz $H \subseteq D$ úgy, hogy $F: H \rightrightarrows H$ és $\chi(H) = 0$.

A fő eredmény alkalmazásával olyan fraktáltételt igazolhatunk, amely a Hausdorff-féle nemkompaktsági mértéktől különböző, a García és Mora [12] által bevezetett, úgynevezett nemsűrűségi mérték fogalmára épít. A fejezet fő eredményei Bessenyei és Péntes [6] cikkén alapulnak.

Irodalomjegyzék

- [1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. **3** (1922), 133–181.
- [2] M. Bessenyei and Zs. Páles, *A contraction principle in semimetric spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **18** (2017), no. 3, 515–524.
- [3] M. Bessenyei and E. Péntes, *Fractals for minimalists*, Aequat. Math. **94** (2020), no. 3, 595–603.
- [4] M. Bessenyei and E. Péntes, *Hutchinson without Blaschke: An alternative way to fractals*, Expo. Math. **39** (2021), 25–32.
- [5] M. Bessenyei and E. Péntes, *Generalized fractals in semimetric spaces*, Nonlinear Anal. **220** (2022) art no. 112853.
- [6] M. Bessenyei and E. Péntes, *Shrinking bounded domains to totally bounded ones*, J. Math. Anal. Appl. **552** (2025) art no. 129808.
- [7] M. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [8] W. Blaschke, *Kreis und Kugel (1916)*, Chelsea Publishing Co., New York, 1949.
- [9] K. Chrzyszcz, J. Jachymski, and F. Turoboś, *On characterizations and topology of regular semimetric spaces*, Publ. Math. Debrecen, **93** (2018), no. 1-2, 87–105.
- [10] G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **24** (1955), 84–92.

-
- [11] K. Falconer, *Fractal Geometry*, Second Edition. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 2003.
 - [12] G. García and G. Mora, *The degree of convex nondensifiability in Banach spaces*, J. Convex Anal. **22**, no. 3 (2015), 871–888.
 - [13] F. Hausdorff, *Grundzuege der mengenlehre*, Viet, Leipzig, 1914.
 - [14] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), no. 5, 713–747.
 - [15] J. Jachymski, J. Matkowski, and T. Świątkowski, *Nonlinear contractions on semimetric spaces*, J. Appl. Anal. **1** (1995), no. 2, 125–134.
 - [16] A. Járαι, *Mérték és Integrál*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
 - [17] L. Kantorovitch, *The method of successive approximations for functional equations*, Acta Math. **71** (1939), 63–97.
 - [18] B. Knaster and A. Tarski, *Un théoreme sur les fonctions d'ensembles*, Ann. Soc. Polon. Math. **6** (1927), 133–134.
 - [19] K. Leśniak, N. Snigireva and F. Strobın, *Weakly contractive iterated function systems and beyond: a manual*, J. Difference Equ. Appl. **26** (2020), no 8, 1114–1173.
 - [20] B. Mandelbrot, *Les objets fractals*, Flammarion, Editeur, Paris, 1975, *Forme, hasard et dimension*, Nouvelle Bibliothèque Scientifique.
 - [21] B. Mandelbrot, *Fractals: form, chance, and dimension*, revised ed., W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1977, Translated from the French.
 - [22] J. Matkowski, *Integrable solutions of functional equations*, Dissertationes Math. **127** (1975), 1–68.
 - [23] D. Pompeiu, *Sur la continuité des fonction de variables complexes (ph.d. thesis)*, Ann. Fac. Sci. de Toulouse **7** (1905), 264–315.
 - [24] B. N. Sadovskiĭ, *On a fixed point principle*, Funkcional. Anal. i Priložen. **1** (1967), no. 2, 74–76.

A jelölt publikációs listája

- [1] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Separation problems in the context of h -convexity*, J. Convex Anal. **25** (2018), no. 3, 1033–1043., ISSN: 0944-6532, IF: 0.794
- [2] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Higher-order quasimonotonicity and integral inequalities*, Math. Inequal. Appl. **21** (2018), no. 3, 897–909., ISSN: 1331-4343, IF: 1.083
- [3] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Fractals for minimalists*, Aequat. Math. **94** (2020), no. 3, 595–603., ISSN: 0001-9054, IF: 0.832
- [4] Bessenyei M. és Péntzes E., *Monoton leképezések fixpontjai I*, KöMaL **70** (2020), no. 3, 141–146., ISSN: 1215-9247
- [5] Bessenyei M. és Péntzes E., *Monoton leképezések fixpontjai 2*, KöMaL **70** (2020), no. 6, 328–333., ISSN: 1215-9247
- [6] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Hutchinson without Blaschke: an alternative way to fractals*, Expo. Math. **39** (2021), 25–32., ISSN: 0723-0869, IF: 1.339
- [7] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Generalized fractals in semimetric spaces*, Nonlinear Anal. **220** (2022), Article no. 112853, ISSN: 0362-546X, IF: 1.4
- [8] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Support theorems for generalized monotone functions*, J. Convex Anal. **30** (2023), no. 1, 359–369., ISSN: 0944-6532, IF: 0.6
- [9] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Shrinking bounded domains to totally bounded ones*, J. Math. Anal. Appl. **552** (2025) art no. 129808., ISSN: 0022-247X, IF: 1.3

A jelölt konferencia előadásai

- [1] *Separation problems in context of h -convexity*, International Student's Conference on Analysis'13 Ustroń (Lengyelország), 2017. február 4–7.
- [2] *Szeparációs problémák h -konvex függvényekre*, Miskolci Egyetem, Intézeti Szeminárium, 2017. május 3.
- [3] *Separation problems in context of h -convexity*, Debreceni Egyetem, Analízis Tanszéki Szeminárium, 2017. május 31.
- [4] *Magasabbrendű kvázimonotonitás és integrálegyenlőtlenségek*, Miskolci Egyetem, Intézeti Szeminárium, 2017. november 8.
- [5] *Magasabbrendű kvázimonotonitás és integrálegyenlőtlenségek*, Debreceni Egyetem, KTDK, 2017. november 24.
- [6] *Higher-order quasimonotonicity and integral inequalities*, Debreceni Egyetem, Analízis Tanszéki Szeminárium, 2017. december 20.
- [7] *Magasabbrendű kvázimonotonitás és integrálegyenlőtlenségek*, Debreceni Egyetem, ÚNKP beszámoló, 2018. január 29.
- [8] *Higher-order quasimonotonicity and integral inequalities*, International Student's Conference on Analysis'14, Síkfőkút, 2018. február 3–6.
- [9] *A h -konvexitás a konvex geometria tükrében*, Debreceni Egyetem, KTDK, 2018. november 30.
- [10] *Fractals for minimalists*, International Student's Conference on Analysis'15, Ustroń (Lengyelország), 2019. február 2–5.

- [11] *A h-konvexitás a konvex geometria tükrében*, Eger, OTDK, 2019. április 25.
- [12] *A fraktálmélet alaptétele*, Miskolci Egyetem, Intézeti Szeminárium, 2019. május 8.
- [13] *Hutchinson without Blaschke: An alternative way to fractals*, Debreceni Egyetem, Analízis Tanszéki Szeminárium, 2019. május 30.
- [14] *Konvexitás és fraktálmélet*, Debreceni Egyetem, ÚNKP beszámoló, 2019. június 17.
- [15] *An alternative way to fractals*, International Student's Conference on Analysis'16 Síkfőút, 2020. február 1–4.
- [16] *Fixponttételek és fraktálmélet*, Debreceni Egyetem, ÚNKP beszámoló, 2020. június 6.
- [17] *Általánosított fraktálok*, Debreceni Egyetem, KTDK, 2020. november 20.
- [18] *Általánosított fraktálok*, Szeged, OTDK, 2021. április 6.
- [19] *Support theorems for generalized monotone functions*, Katowice-Debrecen Winter Seminar'21 Brenna (Lengyelország), 2022. február 2-5.
- [20] *Generalized fractals in semimetric spaces*, Debreceni Egyetem, Analízis Tanszéki Szeminárium, 2022. május 4.
- [21] *Generalized fractals in semimetric spaces*, International Symposium of Functional Equations'58 Innsbruck (Ausztria), 2022. június 19-26.
- [22] *Dimension of generalized fractals in semimetric spaces*, Katowice-Debrecen Winter Seminar'22 Hajdúszoboszló, 2023. február 1-4.
- [23] *Invariant subsets of invariant domains*, International Symposium of Functional Equations'59 Hajdúszoboszló, 2023. június 18-25.



Nyilvántartási szám: DEENK/498/2026.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Péntes Evelin

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

MTMT azonosító: 10078316

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (4)

1. Bessenyei, M., **Péntes, E.**: Shrinking bounded domains to totally bounded ones.
J. Math. Anal. Appl. 552 (1), 1-7, 2025. ISSN: 0022-247X.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.129808>
IF: 1.3
2. Bessenyei, M., **Péntes, E.**: Generalized fractals in semimetric spaces.
Nonlinear Anal.-Theory Methods Appl. 220, 1-15, 2022. ISSN: 0362-546X.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.na.2022.112853>
IF: 1.4
3. Bessenyei, M., **Péntes, E.**: Hutchinson without Blaschke: An alternative way to fractals.
Expo. Math. 39 (1), 25-32, 2021. ISSN: 0723-0869.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.exmath.2019.10.001>
IF: 1.339
4. Bessenyei, M., **Péntes, E.**: Fractals for minimalists.
Aequ. Math. 94 (3), 595-603, 2020. ISSN: 0001-9054.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00010-019-00678-1>
IF: 0.832

További közlemények

Magyar nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (2)

5. Bessenyei, M., **Péntes, E.**: Monoton leképezések fixpontjai 1.
Középisk. Mat. Fiz. Lapok. 70 (3), 141-146, 2020. ISSN: 1215-9247.
6. Bessenyei, M., **Péntes, E.**: Monoton leképezések fixpontjai 2.
Középisk. Mat. Fiz. Lapok. 70 (6), 328-333, 2020. ISSN: 1215-9247.





Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

7. Bessenyei, M., **Pénzes, E.**: Support theorems of generalized monotone functions.

J. Convex Anal. 30 (1), 359-369, 2023. ISSN: 0944-6532.

IF: 0.6

8. Bessenyei, M., **Pénzes, E.**: Higher-order quasimonotonicity and integral inequalities.

21 (3), 897-909, 2018. ISSN: 1331-4343.

DOI: <http://dx.doi.org/10.7153/mia-2018-21-61>

IF: 1.083

9. Bessenyei, M., **Pénzes, E.**: Separation problems in the context of h -convexity.

J. Convex Anal. 25 (3), 1033-1043, 2018. ISSN: 0944-6532.

IF: 0.794

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 7,348

**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):
4,871**

A DEENK a Jelölt által a Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudásmetria ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2026.07.29.



Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

**Generalized fractals
in generalized contexts**

by Evelin Péntzes

Supervisor: Dr. Mihály Bessenyei



UNIVERSITY OF DEBRECEN

Doctoral School of Mathematical
and Computational Sciences

Debrecen, 2026.

Motivation

Mandelbrot, the “Father of Fractals,” emphasized that the world around us is dominated by irregular shapes. Clouds, mountains, coastlines, tree bark, and lightning all exhibit features that can naturally be viewed as fractals. Fractals appear not only in physical, chemical, and biological phenomena but also in art and music. Despite their ubiquity and popularity, however, there is no universally accepted definition of a fractal in the mathematical literature.

Two fundamental characteristics of fractals are their *self-similarity* and *fragmented* structure. Early definitions, advocated by Mandelbrot, focused on the latter aspect and characterized fractals as sets whose Hausdorff–Besicovitch dimension strictly exceeds their topological dimension [20, 21]. Later, Mandelbrot considered this definition as too restrictive. In contrast, fixed point theory emphasizes self-similarity. This perspective was developed by Hutchinson [14], who studied fractals as solutions of fixed point equations generated by self-similar mappings. His pioneering work laid the foundations of modern fractal theory. In this Thesis we are also following the fixed point approach to fractals initiated by Hutchinson [14] and Barnsley [7].

The classical results.

Our main concept throughout the Thesis is the invariance operator.

Let $\mathcal{F}$ be a family of self-maps of the power set $\mathcal{P}(X)$. We say that the map $\Phi: X \rightrightarrows X$,

$$\Phi(H) := \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F(H)$$

is the *invariance operator* of $\mathcal{F}$. Moreover, the set $H \subseteq X$ is $\mathcal{F}$ -invariant, if

$$H = \Phi(H)$$

is satisfied, that is H is a *fixed point* of the invariance operator.

In a metric space (X, d) let $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$, where $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow X$. Under an $\mathcal{F}$ -fractal we mean a nonempty, compact, $\mathcal{F}$ -invariant subset of the metric space X .

Hutchinson's classical fractal result [14] states that: *If $\mathcal{F}$ is a finite family of contractions in a complete metric space, then there exists precisely one $\mathcal{F}$ -fractal.*

Let (X, d) be a metric space and denote by $\mathcal{K}(X)$ the family of nonempty and compact subsets of X . Then for arbitrary sets $A, B \in \mathcal{K}(X)$, we can define the *Hausdorff–Pompeiu distance* of the sets A and B , which we denote by d_{HP} . The metric space $(\mathcal{K}(X), d_{HP})$ is often called *fractal space*, see [13] and [23].

Blaschke [8] proved that the fractal space inherits the completeness of the original space. That is *if (X, d) is a complete metric space, then $(\mathcal{K}(X), d_{HP})$ is also complete.*

Therefore, Hutchinson's approach to fractals can be summarized as follows: We can consider the invariance equation as a fixed point problem such that the desired fixed point belongs to the family $\mathcal{K}(X)$. It turns out that if $\mathcal{F}$ is a finite family of contractions, then the Φ invariance operator is also a contraction in the fractal space. Moreover, if the original space is complete, then so is the fractal space by the Blaschke theorem. So we can apply the Banach Contraction Principle [1]: *Any contraction of a complete metric space has exactly one fixed point.*

Altogether, the found fixed point is a nonempty, compact, $\mathcal{F}$ -invariant set. In other words, a fractal.

However, we note that there exists an alternative proof to Hutchinson's Theorem that does not rely on the Banach Contraction Principle or the Blaschke Completeness Theorem. Instead, it is based on Cantor's Intersection Theorem and certain properties of the Hausdorff–Pompeiu metric; see [11]. We also note that numerous extensions in metric spaces can be derived by combining various fixed point theorems with Hutchinson's original ideas [14]. An excellent overview of this line of research, together with several important further developments, is provided in the survey by Leśniak, Snigireva, and Strobin [19].

Our work follows the fixed point approach to fractals; however, the methods developed here are independent of and substantially different from the classical Hutchinson framework. In particular, we extend the underlying setting by considering more general classes of mappings and/or more general spaces than those employed in Hutchinson's classical results. That is, we are investigating generalized fractals in generalized contexts through an alternative method.

1. Invariant sets of monotone maps

This Chapter presents an elementary way to fractals and uses only naive set theory. Our focus is isotone and continuous mappings.

In the main results of Chapter 1, we formulate a fractal theorem purely in naive set theoretical context. The Kantorovich-iteration [17] and Knaster–Tarski Fixed Point Theorem [18] lead to the minimum solution of the invariance equation.

THEOREM. *If $\mathcal{F}$ is a family of isotone maps, then there exists a smallest $\mathcal{F}$ -invariant set. Moreover, if $\mathcal{F}$ is a continuous family, then the Kantorovich-iteration expands a given subinvariant set to the smallest invariant set which contains this subinvariant set.*

We show through some classical examples how one can find the minimal solution of the invariance operator. It turns out that the Kantorovich-iteration is important not only in theoretical aspects: Implementing this method we can easily approximate fractals. To illustrate this phenomena we present the approximations of the classical Sierpeński-carpet and our own “Wave” fractal. Moreover, we conclude that the closure of any minimal solution yields the same result. This idea plays a main role in the following sections. The main results of this Chapter are based on the paper of Bessenyei and Péntzes [3].

2. Fractals obtained by condensing families

In this Chapter we consider the above invariance operator in metric space. So the family $\mathcal{F}$ contains finitely many self maps of the metric space. Under an $\mathcal{F}$ -fractal we mean a nonempty, compact, $\mathcal{F}$ -invariant subset of the metric space.

We generalize the classical results of Hutchinson [14] in the sense that instead of contractions we use condensing maps and Matkowski contractions.

Our strategy for constructing fractals is the following. According to the Darbo–Sadovskii Fixed Point Theorem [10, 24], there exists a fixed point for each member of $\mathcal{F}$. Take the fixed point of any of them. Then, using the Kantorovich-process [17], we can produce a nonempty $\mathcal{F}$ -invariant set. Moreover, this set is bounded, since the Kantorovich-iteration creates a Cauchy-sequence. Applying the properties of the Hausdorff noncompactness measure, the invariant set turns out to be a relatively compact one. Finally, we show that the closure of the invariant set (which is hence a nonempty and compact one), is $\mathcal{F}$ -invariant, as well. This results in the existence of an $\mathcal{F}$ -fractal.

THEOREM. *If $\mathcal{F}$ is a finite family of condensing self-maps of a nonempty, bounded, closed, convex subset in a Banach space, then there exists at least one $\mathcal{F}$ -fractal.*

If the invariance operator consists of Matkowski contractions, then we can prove not only the existence of a fractal but also its uniqueness. It is an immediate consequence of the facts that the invariance operator is a Matkowski contraction in the fractal space and that a Matkowski contraction can have at most one fixed point by the Matkowski Fixed Point Theorem [22].

THEOREM. *If $\mathcal{F}$ is a finite family of Matkowski contractions of a complete metric space, then there exists precisely one $\mathcal{F}$ -fractal.*

We conclude the Chapter by showing some fractal examples where the classical Hutchinson Theorem cannot be applied. Instead of rigorous mathematical proof we accept this fact using numerical methods. As previously, we implement the Kantorovich-iteration in order to approximate our fractals. The main results are based on the paper of Bessenyei and Péntzes [4].

3. Generalized fractals in semimetric spaces

In this Chapter we introduce fractals in semimetric spaces. Under a semimetric space we mean a pair (X, d) where X is a

nonempty set, and $d: X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ is a positive definite, symmetric function, that is, fulfils the first two axioms of metric spaces by Fréchet. Such spaces are intensively studied by Jachymski, Matkowski, Świątkowski in [15] and Chrząszcz, Jachymski, Turoboś in [9]. In this Chapter, the mappings of the invariance operator consist of finitely many condensing maps or Matkowski contractions of a semimetric space.

THEOREM. *If $\mathcal{F}$ is a finite family of condensing self-maps of a normal, complete and regular semimetric space such that the invariance operator generates a bounded Kantorovich-iteration on a nonempty $\mathcal{F}$ -subinvariant set H , then there exists a smallest $\mathcal{F}$ -fractal containing H .*

THEOREM. *If $\mathcal{F}$ is a finite family of Matkowski contractions of a complete, normal and regular semimetric space, then there exists a unique $\mathcal{F}$ -fractal.*

The ideas behind the proofs are the same as in the previous chapter, but we need some extra considerations of the properties of semimetric spaces. We use the connection between semimetric and metric spaces through uniform equivalency. We introduce an appropriate fixed point theorem of Matkowski contractions of semimetric spaces by Bessenyei and Páles [2]. Moreover, we need to investigate the properties of the Hausdorff non-compactness measure in semimetric space. A correspondence of the Hausdorff Compactness Theorem is essential. Namely, in a complete and regular semimetric space, a subset is relatively compact if and only if its Hausdorff measure of noncompactness is zero.

The main results are based on the paper of Bessenyei and Péntzes [5].

4. Dimension of generalized fractals

In this Chapter we introduce the Hausdorff measure in semi-metric spaces and study the dimension of generalized fractals. Our main reference of measure theory is the book of J  rai [16].

Hutchinson studied not only the existence and uniqueness of fractals, but also their dimension. He proved a dimension formula [14] for contractive similarities that satisfy the open set condition.

If a finite family of contractive similarities $\mathcal{F}$ of a complete metric space fulfils the open set condition and the ratios of the members are $q_1, \dots, q_n$, then the Hausdorff dimension of the induced fractal is obtained as the unique solution of the exponential equation

$$q_1^r + \dots + q_n^r = 1.$$

In the main results, we present a variant of the fractal dimension formula for fractals obtained by Matkowski contractions of semimetric spaces in terms of an exponential expression. The factors of contractions are replaced with the right-upper Dini-derivatives of the comparison functions related to the Matkowski contractions.

THEOREM. *If $f_1, \dots, f_n$ are Matkowski contractions of a complete, normal and regular semimetric space with comparison functions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ and $0 < \chi^r(H) < +\infty$ holds for the induced fractal H with some $r > 0$, then the Dini-derivatives of the comparison functions cannot be zero simultaneously, $\dim_{\mathcal{H}}(H) = r$, and*

$$1 \leq (D\varphi_1(0))^r + \dots + (D\varphi_n(0))^r.$$

Moreover, if $\chi^r(f_k(H) \cap f_l(H)) = 0$ whenever $k \neq l$ and each Matkowski contraction is a similarity with strong comparison function, then all derivatives at zero are strictly smaller than one and the inequality above is valid with equality.

The main results of this Chapter are based on the paper of Bessenyei and Péntzes [5].

5. An axiomatic treatment

We revisit the main results of this Thesis again, and show that the role of Hausdorff measure is not as distinguished, when we talk about topological fixed point results or fractal theory. We use the concepts of set functions and hull operators to arrive at even more general fractal theorems.

A map $\Phi: X \rightrightarrows X$ is a *hull operator* on the nonempty set X , if it is monotone, idempotent and extensive.

We have to link set-functions and hull operators properly and (motivated by the notion of condensing maps) clarify the mapping class we shall deal with:

A set-function $\chi: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ is Φ -compatible if, for all $A, B \subseteq X$,

$$\chi(\Phi(A \cup B)) \leq \max\{\chi(A), \chi(B)\}.$$

A map $F: X \rightrightarrows X$ is χ -decreasing if $\chi(F(A)) < \chi(A)$ whenever $A \subseteq X$ and $0 < \chi(A) < +\infty$.

In the main results of this Chapter, we illustrate that we can change the domain of an invariance operator to a “small” one such that it inherits the properties of the original domain and on which the invariance operator is still a self-map. The Knaster–Tarski Fixed Point Theorem and the Kantorovich-iteration process play a key role again.

THEOREM. *Assume that $\Phi: X \rightrightarrows X$ is a hull operator, $D \subseteq X$ is nonempty, Φ -invariant, and χ is Φ -compatible, finite, non-atomic on D . If $\mathcal{F}$ is a finite set of χ -decreasing self-maps of D and $F: D \rightrightarrows D$ is the induced invariance operator, then there exists a nonempty Φ -invariant set $H \subseteq D$ such that $F: H \rightrightarrows H$ and $\chi(H) = 0$.*

Applying the main results, we get another branch of fractal theorems, using different measures than the Hausdorff one. Based on the concepts introduced by García and Mora [12], we present applications for the so-called degree of nondensifiability. The main results of this Chapter are based on the paper of Bessenyei and Péntes [6].

Bibliography

- [1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. **3** (1922), 133–181.
- [2] M. Bessenyei and Zs. Páles, *A contraction principle in semimetric spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **18** (2017), no. 3, 515–524.
- [3] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Fractals for minimalists*, Aequat. Math. **94** (2020), no. 3, 595–603.
- [4] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Hutchinson without Blaschke: An alternative way to fractals*, Expo. Math. **39** (2021), 25–32.
- [5] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Generalized fractals in semimetric spaces*, Nonlinear Anal. **220** (2022) art no. 112853.
- [6] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Shrinking bounded domains to totally bounded ones*, J. Math. Anal. Appl. **552** (2025) art no. 129808.
- [7] M. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- [8] W. Blaschke, *Kreis und Kugel (1916)*, Chelsea Publishing Co., New York, 1949.
- [9] K. Chrzęszcz, J. Jachymski, and F. Turoboś, *On characterizations and topology of regular semimetric spaces*, Publ. Math. Debrecen, **93** (2018), no. 1-2, 87–105.
- [10] G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **24** (1955), 84–92.

-
- [11] K. Falconer, *Fractal Geometry*, Second Edition. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 2003.
 - [12] G. García and G. Mora, *The degree of convex nondensifiability in Banach spaces*, J. Convex Anal. **22**, no. 3 (2015), 871–888.
 - [13] F. Hausdorff, *Grundzuege der mengenlehre*, Viet, Leipzig, 1914.
 - [14] J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), no. 5, 713–747.
 - [15] J. Jachymski, J. Matkowski, and T. Świątkowski, *Nonlinear contractions on semimetric spaces*, J. Appl. Anal. **1** (1995), no. 2, 125–134.
 - [16] A. Járαι, *Mérték és Integrál*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
 - [17] L. Kantorovitch, *The method of successive approximations for functional equations*, Acta Math. **71** (1939), 63–97.
 - [18] B. Knaster and A. Tarski, *Un théoreme sur les fonctions d'ensembles*, Ann. Soc. Polon. Math. **6** (1927), 133–134.
 - [19] K. Leśniak, N. Snigireva and F. Strobın, *Weakly contractive iterated function systems and beyond: a manual*, J. Difference Equ. Appl. **26** (2020), no 8, 1114–1173.
 - [20] B. Mandelbrot, *Les objets fractals*, Flammarion, Editeur, Paris, 1975, *Forme, hasard et dimension*, Nouvelle Bibliothèque Scientifique.
 - [21] B. Mandelbrot, *Fractals: form, chance, and dimension*, revised ed., W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1977, Translated from the French.
 - [22] J. Matkowski, *Integrable solutions of functional equations*, Dissertationes Math. **127** (1975), 1–68.
 - [23] D. Pompeiu, *Sur la continuité des fonction de variables complexes (ph.d. thesis)*, Ann. Fac. Sci. de Toulouse **7** (1905), 264–315.
 - [24] B. N. Sadovskiĭ, *On a fixed point principle*, Funkcional. Anal. i Priložen. **1** (1967), no. 2, 74–76.

List of publications

- [1] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Separation problems in the context of h -convexity*, J. Convex Anal. **25** (2018), no. 3, 1033–1043., ISSN: 0944-6532, IF: 0.794
- [2] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Higher-order quasimonotonicity and integral inequalities*, Math. Inequal. Appl. **21** (2018), no. 3, 897–909., ISSN: 1331-4343, IF: 1.083
- [3] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Fractals for minimalists*, Aequat. Math. **94** (2020), no. 3, 595–603., ISSN: 0001-9054, IF: 0.832
- [4] Bessenyei M. és Péntzes E., *Monoton leképezések fixpontjai I*, KöMaL **70** (2020), no. 3, 141–146., ISSN: 1215-9247
- [5] Bessenyei M. és Péntzes E., *Monoton leképezések fixpontjai 2*, KöMaL **70** (2020), no. 6, 328?333., ISSN: 1215-9247
- [6] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Hutchinson without Blaschke: an alternative way to fractals*, Expo. Math. **39** (2021), 25–32., ISSN: 0723-0869, IF: 1.339
- [7] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Generalized fractals in semimetric spaces*, Nonlinear Anal. **220** (2022), Article no. 112853, ISSN: 0362-546X, IF: 1.4
- [8] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Support theorems for generalized monotone functions*, J. Convex Anal. **30** (2023), no. 1, 359–369., ISSN: 0944-6532, IF: 0.6
- [9] M. Bessenyei and E. Péntzes, *Shrinking bounded domains to totally bounded ones*, J. Math. Anal. Appl. **552** (2025) art no. 129808., ISSN: 0022-247X, IF: 1.3

List of talks

- [1] *Separation problems in context of h -convexity*, International Student's Conference on Analysis'13 Ustroń (Poland), February 4–7, 2017.
- [2] *Szeparációs problémák h -konvex függvényekre*, Research Seminar, University of Miskolc, May 3, 2017.
- [3] *Separation problems in context of h -convexity*, Research Seminar on Analysis, University of Debrecen, May 31, 2017.
- [4] *Magasabbrendű kvázimonotonitás és integrálegyenlőtlenségek*, Research Seminar, University of Miskolc, November 8, 2017.
- [5] *Magasabbrendű kvázimonotonitás és integrálegyenlőtlenségek*, KTDK, University of Debrecen, November 24, 2017.
- [6] *Higher-order quasimonotonicity and integral inequalities*, Research Seminar on Analysis, University of Debrecen, December 20, 2017.
- [7] *Magasabbrendű kvázimonotonitás és integrálegyenlőtlenségek*, ÚNKP conference, University of Debrecen, January 29, 2018.
- [8] *Higher-order quasimonotonicity and integral inequalities*, International Student's Conference on Analysis'14 Síkfőkút (Hungary), February 3–6, 2018.
- [9] *A h -konvexitás a konvex geometria tükrében*, KTDK, University of Debrecen, November 30, 2018.
- [10] *Fractals for minimalists*, International Student's Conference on Analysis'15 Ustroń (Poland), February 2–5, 2019.

- [11] *A h -konvexitás a konvex geometria tükrében*, OTDK, Eger, April 25, 2019.
- [12] *A fraktálmélet alaptétele*, Research Seminar, University of Miskolc, May 8, 2019.
- [13] *Hutchinson without Blaschke: An alternative way to fractals*, Research Seminar on Analysis, University of Debrecen, May 30, 2019.
- [14] *Konvexitás és fraktálmélet*, ÚNKP conference, University of Debrecen, June 17, 2019.
- [15] *An alternative way to fractals*, International Student's Conference on Analysis'16 Síkfőkvút, February 1–4, 2020.
- [16] *Fixponttételek és fraktálmélet*, ÚNKP conference, University of Debrecen, June 6, 2020.
- [17] *Általánosított fraktálok*, KTDK, University of Debrecen, November 20, 2020.
- [18] *Általánosított fraktálok*, OTDK, Szeged, April 6, 2021.
- [19] *Support theorems for generalized monotone functions*, Katowice-Debrecen Winter Seminar'21 Brenna (Poland), February 2-5, 2022.
- [20] *Generalized fractals in semimetric spaces*, Research Seminar on Analysis, University of Debrecen, May 4, 2022.
- [21] *Generalized fractals in semimetric spaces*, International Symposium of Functional Equations'58 Innsbruck (Austria), June 19-26, 2022.
- [22] *Dimension of generalized fractals in semimetric spaces*, Katowice-Debrecen Winter Seminar'22 Hajdúszoboszló, February 1-4, 2023.
- [23] *Invariant subsets of invariant domains*, International Symposium of Functional Equations'59 Hajdúszoboszló, June 18-25, 2023.



Registry number:
Subject:

DEENK/498/2026.PL
PhD Publication List

Candidate: Evelin Péntzes

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

MTMT ID: 10078316

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (4)

1. Bessenyei, M., **Péntzes, E.**: Shrinking bounded domains to totally bounded ones.
J. Math. Anal. Appl. 552 (1), 1-7, 2025. ISSN: 0022-247X.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2025.129808>
IF: 1.3
2. Bessenyei, M., **Péntzes, E.**: Generalized fractals in semimetric spaces.
Nonlinear Anal.-Theory Methods Appl. 220, 1-15, 2022. ISSN: 0362-546X.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.na.2022.112853>
IF: 1.4
3. Bessenyei, M., **Péntzes, E.**: Hutchinson without Blaschke: An alternative way to fractals.
Expo. Math. 39 (1), 25-32, 2021. ISSN: 0723-0869.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.exmath.2019.10.001>
IF: 1.339
4. Bessenyei, M., **Péntzes, E.**: Fractals for minimalists.
Aequ. Math. 94 (3), 595-603, 2020. ISSN: 0001-9054.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00010-019-00678-1>
IF: 0.832

List of other publications

Hungarian scientific articles in Hungarian journals (2)

5. Bessenyei, M., **Péntzes, E.**: Monoton leképezések fixpontjai 1.
Középisk. Mat. Fiz. Lapok. 70 (3), 141-146, 2020. ISSN: 1215-9247.
6. Bessenyei, M., **Péntzes, E.**: Monoton leképezések fixpontjai 2.
Középisk. Mat. Fiz. Lapok. 70 (6), 328-333, 2020. ISSN: 1215-9247.





Foreign language scientific articles in international journals (3)

7. Bessenyei, M., **Pénzes, E.**: Support theorems of generalized monotone functions.

J. Convex Anal. 30 (1), 359-369, 2023. ISSN: 0944-6532.

IF: 0.6

8. Bessenyei, M., **Pénzes, E.**: Higher-order quasimonotonicity and integral inequalities.

21 (3), 897-909, 2018. ISSN: 1331-4343.

DOI: <http://dx.doi.org/10.7153/mia-2018-21-61>

IF: 1.083

9. Bessenyei, M., **Pénzes, E.**: Separation problems in the context of h -convexity.

J. Convex Anal. 25 (3), 1033-1043, 2018. ISSN: 0944-6532.

IF: 0.794

Total IF of journals (all publications): 7,348

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 4,871

The Candidate's publication data submitted to the Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

29 July, 2026

