BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓKKAL ÉS HATVÁNYÖSSZEGEKKEL KAPCSOLATOS DIOFANTIKUS EREDMÉNYEK

DIOPHANTINE RESULTS CONNECTED WITH BINOMIAL COEFFICIENTS AND POWER SUMS

doktori (PhD) értekezés tézisei

Rakaczki Csaba

Debreceni Egyetem,
Debrecen, 2005

1 BEVEZETÉS

A diofantikus egyenletek elméletében központi helyet foglalnak el a kétismeretlenes polinomiális egyenletek, azok egész és racionális megoldásainak a vizsgálata. A megoldásszám végességével kapcsolatban számos fontos eredmény született, Runge, Thue, Mordell, Siegel és mások végességi eredményeket nyertek egyenletek egy-egy széles osztályára. Végül 1929-ben Siegel [48] általánosságban megmutatta, hogy ha $F(x, y)$ egy racionális együtthatós, abszolut irreducibilis polinom, úgy az

$$F(x, y) = 0$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van, feltéve hogy az egyenlet által definiált algebreai görbe g génuszára $g > 0$ teljesül. 1983-ban Faltings [17] azt is bebizonyította, hogy $g > 1$ esetén még a racionális megoldások száma is véges.

Siegel és Faltings nevezetes tételei ineffektívek, azaz a bizonyításaik nem szolgáltatnak semmilyen eljárást a megoldások megkeresésére. Megjegyezzük továbbá, hogy ezen általános tételeknek egy-egy egyenletosztályra való alkalmazása gyakran sikertelen marad, mivel a reducibilitás eldöntése és a génusz megállapítása esetenként komoly nehézségekbe ütközik. Ez a helyzet az

$$f(x) = g(y) \tag{1.1}$$

alakú egyenleteknél, ahol f és g racionális együtthatós polinomok. Az ilyen típusú egyenletek különösen fontosak és érdekesek azokban a speciális esetekben, amikor f és g közül legalább az egyik mint z polinomja $z(z-1)\cdots(z-(m-1))$, $\binom{z}{n}$, z^k vagy $1^l + 2^l + \cdots + z^l$ alakú, ahol m, n, k, l adott pozitív egész számok. Ezen egyenletosztályok megoldásszámával igen sokan foglalkoztak. Ujabban Bilu és Tichy [7] teljes általánosságban jellemezték azon f, g polinompárokat, melyekre (1.1)-nek véges sok egész megoldása van. Tételük azonban ineffektív. Továbbá olyan komplikált feltételeket tartalmaz, hogy az említett egyenletosztályokra való alkalmazása jórészt mindmáig eredménytelennek bizonyult.

Disszertációnk 2. és 3. fejezetében (1.1) típusú egyenletek egy-egy fontos, sokat vizsgált osztályára nyerünk általános ineffektív végességi eredményeket. Tételeink a korábbi, idevágó eredmények messzemenő általánosításai és egyben lényeges pontosításai, finomításai. A 4. fejezetben a 2. fejezet bizonyos eredményeinek effektív változatát adjuk, sőt a tekintett egyenleteket egy sor konkrét esetben teljesen megoldjuk.

Az alábbiakban röviden vázoljuk az egyes fejezetek legfontosabb eredményeit.

II

A 2. fejezetben az

$$x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l \tag{1.2}$$

típusú egyenletek megoldásszámával foglalkozunk, ahol $m,\,n \geq 1$ adott pozitív egészek, $\lambda(\neq 0)$ és l pedig rögzített racionális számok. Az $l = 0$ speciális esetben számos szerző, köztük Saradha, Shorey és Tijdeman [38]-[44] nyertek végességi eredményeket az (1.2) alakú egyenletekre vonatkozóan. [5]-ben Beukers, Shorey és Tijdeman leírták mindazon m, n és λ számhármasokat, amelyek mellett $l = 0$ esetén (1.2)-nek végtelen sok racionális, illetve egész megoldása lehet.

Disszertációnk második fejezetének egyik fő eredménye az 2.2. Tétel, mely az említett [5]-beli eredmények általánosítása tetszőleges l esetére. Következményként (2.1. Tétel) jellemezzük mindazon a, b, k, m és n egészeket, melyekre a sokat vizsgált

$$a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n} \tag{1.3}$$

egyenletnek végtelen sok $x \geq m$, $y \geq n$ egész megoldása lehet.

A fejezet második felében az (1.3) egyenletre vonatkozó eredményünket kiterjesztjük az általánosabb

$$F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n} \tag{1.4}$$

egyenletekre, ahol F nem szükségképpen lineáris (mint (1.3)-ban), hanem prímfokszámú egész együtthatós polinom (2.7. és 2.8. Tétel).

Az (1.3) és (1.4) alakú egyenletekre vonatkozó tételeink jelentős mértékű ineffektív általánosításai számos korábbi, ilyen irányú eredménynek.

Az 2.2. Tétel bizonyítása során először jellemezzük azon

$$F(x,y) = x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) - \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) - l$$

alakú racionális együtthatós polinomokat, melyek abszolut irreducibilisek, és melyeknek a génusza pozitív, illetve nagyobb mint 1. Ezt követően Siegel és

Faltings említett tételeit alkalmazzuk. Külön is foglalkozunk azzal az esettel, amikor $F(x,y)$ reducibilis, és szükséges és elégséges feltételt fogalmazunk meg arra vonatkozóan, hogy ekkor (1.2)-nek véges sok megoldása legyen.

III

Igen gazdag irodalma van az

$$S_m(x) = g(y), \; x \geq 1, y \text{ egész ismeretlenek,} \tag{1.5}$$

alakú egyenleteknek, ahol $m \geq 1$ adott egész, $S_m(x) = 1^m + 2^m + \cdots + x^m$ és $g(y)$ racionális együtthatós polinom. Mint ismeretes, $S_m(x)$ felírható az x $(m+1)$-ed fokú racionális együtthatós polinomjaként.

A $g(y) = y^n$ speciális esetben adott n mellett Schäffer [45] 1956-ban meghatározta mindazon m, n párokat, melyekre (1.5)-nek végtelen sok megoldása van. Később Schäffer eredményének Győry, Tijdeman, Voorhove, Brindza és mások több irányú kiterjesztését és általánosítását adták, egyebek között arra az esetre, amikor n is ismeretlen.

Egy másik irányban Bilu, Brindza, Kirschenhofer, Pintér és Tichy [6] $y(y-1)\cdots(y-(n-1))$ alakú $g(y)$ polinomok esetén ujabban meghatározta azon m, n párokat, melyekre (1.5)-nek végtelen sok megoldása van.

A 3. fejezet fő eredménye a 3.1. Tételünk, mely adott m mellett az összes olyan racionális együtthatós g polinom leírását adja, melyekre az (1.5) egyenletnek végtelen sok megoldása lehet. Tételünk lényegében közös általánosítása Schäffer [45], valamint Bilu és társai [6] fent említett nevezetes tételeinek. A 3.1. Tétel alkalmazásával még pontosabb állítást nyerünk (3.2. Tétel) abban az esetben, amikor $g(y)$ $F\left(\binom{y}{n}\right)$ alakú, ahol $n \geq 1$ adott egész szám, F pedig egy lineáris vagy páratlan prímfokszámú racionális együtthatós polinom.

A 3.1. és 3.2. Tételeink bizonyítása végső soron Bilu és Tichy [7] már említett általános tételén alapszik. Ezen általános tétel alkalmazásához azonban kilenc, többségükben az $S_m(x)$ polinom különféle speciális tulajdonságaival foglalkozó lemmára, valamint hosszú, bonyolult okoskodásokra lesz szükségünk.

IV

Az (1.2), (1.3) és (1.4) egyenletekre vonatkozó végességi tételeink nem effektívek, mivel bizonyításainkban felhasználjuk Siegel, Faltings, valamint Bilu és Tichy ineffektív eredményeit.

A 4. fejezetben az a és b-re tett bizonyos feltételek mellett effektív felső korlátot nyerünk (4.1. Következmény) az (1.3) egyenlet megoldásaira abban az esetben , amikor $m \geq 5$ és $n \in \{2, 4\}$. Eredményünket kiterjesztjük (4.1. Tétel) az általánosabb

$$a\binom{x}{m} + f(x) + g(x) = b\binom{y}{n} \tag{1.6}$$

egyenletre is, ahol $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egész értékű, legfeljebb $m-1$-ed fokú polinom. Ezen eredmény egy alkalmazásaként effektív felső korlátot adunk (4.2. Következmény) mindazon $x \geq m$, $y \geq n$ egészekre, amelyekre az

$$f(x) + g(x), \binom{x}{m}, \binom{y}{n}$$

számok valamilyen sorrendben számtani sorozatot alkotnak. A bizonyítás során a vizsgált egyenleteket hiperelliptikus egyenletekre vezetjük vissza, majd pedig Baker [3] hiperelliptikus egyenletekre vonatkozó nevezetes effektív tételét alkalmazzuk.

Végül a

$$2\binom{x}{m} = \binom{y}{n} + k$$

egyenlet összes megoldását meghatározzuk (4.2. Tétel) abban az esetben, amikor (m, n) vagy $(n, m) \in \{(2, 3), (2, 6), (3, 4), (4, 6)\}$ és $0 \leq k \leq 10$. Ezen esetekben egyenleteinket elliptikus egyenletekre redukáljuk, s azután a Gebel, Pethő és Zimmer [20] módszerén alapuló SIMATH programcsomagot használjuk a megoldások megkeresésére.

A 4.1. és 4.2. Tételeink egy sor korábbi eredmény jelentős mértékű általánosításai, kiterjesztései, illetve pontosításai.

Értekezésünk eredményeit a [33], [34], [35] és [36] dolgozatainkban publikáltuk.

2 AZ $F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n}$ ALAKÚ DIOFANTIKUS EGYENLETEKRŐL

A fejezet első részében az

$$a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n}, \quad x \geq m, y \geq n \tag{2.1}$$

egyenlet x, y megoldásainak a számával foglalkozunk, ahol a, b, k, m, n adott egészek az $a \neq 0$, $b \neq 0$ és $1 < m \leq n$ tulajdonsággal. A $k = 0$ esetben az a, b, m, n paraméterek különféle speciális megválasztása mellett számos végességi és numerikus eredmény található a szakirodalomban; például az [1], [8], [14], [23], [28], [29], [31], [52], [53], [59], [60] cikkekben a szerzők az összes egész megoldást leírták. A $k = 0$ esetben az első általános végességi eredmény Kisstől [26] származik, aki 1988-ban megmutatta, hogy ha m egy adott páratlan prím, akkor az

$$\binom{x}{m} = \binom{y}{2}$$

diofantikus egyenletnek csak véges sok $x \geq m$, $y \geq 2$ egész megoldása van, amely megoldások effektíve meghatározhatóak. Brindza [11] három évvel később általánosította Kiss eredményét arra az esetre, amikor $m \geq 3$ tetszőleges, adott egész szám.

A (2.1) egyenletre vonatkozó 2.1. Tételünk az említett végességi tételek messzemenő, ineffektív általánosítása.

2.1. Tétel *Legyenek a, b, k, m, n egész számok és tegyük fel, hogy $a \neq 0, b \neq 0$ és $1 < m \leq n$. Ekkor eltekintve az alábbi esetektől*

1) $m = n, a = b, k = 0$;
2) $(m, n) = (2, 2)$;
3) $(m, n) = (2, 4)$ *és* $\frac{-24k+3a}{b} = 1$ *vagy* $-\frac{9}{16}$;
4) $(m, n) = (4, 4)$ *és* $\frac{-24k+a}{b} = 1$;

a (2.1) *egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. Továbbá a fent felsorolt kivételes esetek mindegyikében meg tudjuk választani az a, b és k paramétereket úgy, hogy a* (2.1) *egyenletnek végtelen sok x, y egész megoldása legyen.*

Megjegyezzük, hogy a fenti tételünket tartalmazó [34] dolgozatunk megjelenése után egy évvel tőlünk függetlenül Stoll és Tichy [50] a 2.1. Tételünk egy kevésbé pontos változatát publikálták.

A 2.1. Tétel speciális esete az alábbi végességi eredményünknek:

2.2. Tétel *Legyen*

$$f(x) = x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) \quad \textit{és}\ g(y) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l$$

ahol $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ *és* $\lambda, l \in \mathbb{Q}$. *Tegyük fel, hogy* $\lambda \neq 0$. *Ekkor az*

$$f(x) = g(y) \tag{2.2}$$

egyenletnek csak véges sok x, y *egész megoldása van, kivéve az alábbi eseteket:*

1) $m = n$ *és* $\lambda = 1, l = 0$ *vagy* $m = n$ *páratlan,* $\lambda = -1, l = 0$;

2) $(m, n) = (2, 2)$*;*

3) $(m, n) = (2, 4)$, $4\lambda - 4l = 1$ *vagy* $9\lambda + 16l = -4$*;*

4) $(m, n) = (4, 4)$, $\lambda - l = 1$.

Továbbá a (2.2) *egyenletnek csak véges sok* x, y *racionális megoldása van, eltekintve az* 1)-4) *illetve az alábbi esetektől:*

5) $(m, n) = (2, 3)$*;*

6) $(m, n) = (2, 4)$, $9\lambda + 16l \neq -4$*;*

7) $(m, n) = (2, 6)$, $-\frac{225}{64}\lambda + l = -\frac{1}{4}$*;*

8) $(m, n) = (3, 3)$*;*

9) $m = n = 4$, $-\lambda + l = \frac{9}{16}$ *és* $l \neq -\frac{7}{16}$, *vagy* $\frac{9}{16}\lambda + l = -1$ *és* $l \neq -\frac{7}{16}$.

A fent felsorolt esetek valóban kivételesek abban az értelemben, hogy minden esetben meg tudjuk választani a λ, l *paramétereket oly módon, hogy a* (2.2) *egyenletnek végtelen sok* x, y *megoldása legyen.*

Tételünk ineffektív. Megjegyezzük, hogy ha speciálisan $\lambda = 1$, $l \in \mathbb{Z}$, $lnko(m, n) > 1$ és az $f(x) - g(y)$ polinom $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis, úgy Runge [37] ismert tétele felhasználásával a (2.2) egyenlet x, y egész megoldásaira egy effektív felső korlát adható. Ebben az esetben a legjobb korlát Tengelytől [53],

[54] származik, aki egy hatékony algoritmust dolgozott ki ilyen típusú konkrét egyenletek megoldására.

$l = 0$ esetén a 2.2. Tételünk visszaadja Beukers, Shorey és Tijdeman-nak [5] a bevezetőben már említett eredményét.

A következő tételünkben egy még általánosabb alakú egyenletet vizsgálunk. Bár az egyenlet általánosabb, a 2.3. Tételt vissza lehet vezetni a 2.2. Tételre.

2.3. Tétel *Legyenek d_1 és d_2 pozitív racionális számok, és $\tilde{\lambda} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\tilde{l} \in \mathbb{Q}$. Ekkor az*

$$x\,(x+d_1)\cdots(x+(m-1)\,d_1) = \tilde{\lambda} y\,(y+d_2)\cdots(y+(n-1)\,d_2) + \tilde{l} \tag{2.3}$$

egyenletnek, ahol $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$, csak véges sok egész, illetve racionális x, y megoldása van, eltekintve a 2.2 Tételben felsorolt kivételes esetektől a

$$\lambda = (-1)^{m+n}\tilde{\lambda}\frac{d_2^n}{d_1^m} \qquad \text{és} \qquad l = (-1)^m \frac{\tilde{l}}{d_1^m}$$

választással.

Ez az állítás az $\tilde{l} = 0$ speciális esetben magába foglalja Beukers, Shorey és Tijdeman [5]-beli végességi eredményét az

$$x\,(x+d_1)\cdots(x+(m-1)\,d_1) = y\,(y+d_2)\cdots(y+(n-1)\,d_2) \tag{2.4}$$

egyenletre vonatkozóan.

Az alábbi, önmagukban is érdekes 2.4., 2.5. és 2.6. Tételek lényeges szerepet játszanak a 2.1-2.3 Tételek bizonyításában.

Tekintsük az

$$F(x,y) = x\,(x-1)\cdots(x-m+1) - \lambda y\,(y-1)\cdots(y-n+1) - l \tag{2.5}$$

polinomot, ahol m, n pozitív egészek az $m \leq n$ tulajdonsággal, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $l \in \mathbb{C}$. Az $l = 0$ speciális esetben Beukers, Shorey és Tijdeman [5] 1999-ben meghatározták az összes olyan m, n, λ számokat, melyekre $F(x,y)$ $\mathbb{C}[x,y]$-ban reducibilis. Következő tételünk ezen eredmény általánosítása arra az esetre, amikor $l \in \mathbb{C}$ tetszőleges szám.

2.4. Tétel *Ha az $F(x,y)$ polinom reducibilis a komplex számok teste felett, akkor az alábbi feltételek valamelyike fennáll:*

1) $m=n$, $\lambda=1$, $l=0$ *és* $x-y$ *egy faktora* $F(x,y)$*-nak;*

2) $m=n$ *páratlan egészek,* $\lambda=-1$, $l=0$ *és* $x+y-m+1$ *egy faktora* $F(x,y)$*-nak;*

3) $(m,n)=(2,2)$, $\lambda-4l=1$ *és*
$F(x,y)=\frac{1}{4}(2x-2Ay+A-1)(2x+2Ay-A-1)$, *ahol* $A=\sqrt{4l+1}$*;*

4) $(m,n)=(2,4)$, $4\lambda-4l=1$ *és*
$F(x,y)=\frac{1}{4}\left(2x+2Ay^2-6Ay+2A-1\right)\left(2x-2Ay^2+6Ay-2A-1\right)$, *ahol* $A=\sqrt{l+\frac{1}{4}}$*;*

5) $(m,n)=(4,4)$, $\lambda-l=1$ *és*

$$F(x,y)=\left(x^2-3x+Ay^2-3Ay+A+1\right)\times \times\left(x^2-3x-Ay^2+3Ay-A+1\right),$$

ahol $A=\sqrt{l+1}$*;*

6) $(m,n)=(4,4)$, $\lambda=-1$, $l=-\frac{7}{16}$ *és*
$F(x,y)=\left(x^2-\sqrt{2}xy-\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x+y^2-\left(3-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y+\frac{13}{4}-\frac{9}{4}\sqrt{2}\right)\times$
$\times\left(x^2+\sqrt{2}xy-\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x+y^2-\left(3+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y+\frac{13}{4}+\frac{9}{4}\sqrt{2}\right)$*;*

7) $(m,n)=(6,6)$, $\lambda=-1$, $l=-\frac{320}{27}$ *és*

$$F(x,y)=\left(y^2-5y+x^2-5x+\frac{20}{3}\right)\left(y^4-10y^3-x^2y^2+5xy^2+\right. \left.+\frac{85}{3}y^2+5x^2y-25xy-\frac{50}{3}y+x^4-10x^3+\frac{85}{3}x^2-\frac{50}{3}x+\frac{16}{9}\right).$$

Az 1)-es és a 2)-es esetekben $F(x,y)=0$-nak nyilván van végtelen sok egész, és ezáltal racionális megoldása is. A 3)-7) esetekkel értekezésünkben külön is foglalkozunk. Minden egyes esetben szükséges és elégséges feltételt adunk meg arra vonatkozóan, hogy az $F(x,y)=0$ egyenletnek végtelen sok x, y egész, illetve racionális megoldása legyen.

Tekintsük a

$$C: x(x-1)\cdots(x-(m-1))=\lambda y(y-1)\cdots(y-(n-1))+l$$

alakú görbéket, ahol $n\geq m>1$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ és $l\in\mathbb{C}$. A következő két tételben felsoroljuk mindazon m, n, λ, l értékeket, melyekre a megfelelő C görbe génusza 0, illetve 1.

2.5. Tétel *Tegyük fel, hogy a C görbe irreducibilis a komplex számok teste felett. Ha C génusza 0, akkor az alábbi esetek valamelyike fennáll:*

1) $(m,n) = (2,2)$, $\lambda - 4l \neq 1$;

2) $(m,n) = (2,3)$, $t\lambda + l = -\frac{1}{4}, t^2 = \frac{4}{27}$;

3) $(m,n) = (2,4)$, $\frac{9}{16}\lambda + l = -\frac{1}{4}$;

4) $(m,n) = (2,6)$, $t\lambda + l = -\frac{1}{4}, 27t^2 + 320t - 2304 = 0$;

5) $(m,n) = (3,3)$, $l \neq 0$ *és* $t(\lambda \pm 1) = -l$, $t^2 = \frac{4}{27}$;

6) $(m,n) = (3,4)$, $\lambda = \frac{64}{225}t$, $l = \frac{14}{225}t$, $t^2 = 3$;

7) $(m,n) = (3,6)$, $\lambda = \frac{3}{392}t$ *és* $l = \frac{20}{441}t$, $t^2 = 21$.

2.6. Tétel *Tegyük fel, hogy a C görbe irreducibilis a komplex számok teste felett. Ha C génusza 1, akkor az alábbi esetek valamelyike teljesül:*

1) $(m,n) = (2,3)$, $\frac{2}{9}t\lambda + l \neq -\frac{1}{4}$, $t^2 = 3$;

2) $(m,n) = (2,4)$, $\frac{9}{16}\lambda + l \neq -\frac{1}{4}$;

3) $(m,n) = (2,5)$, $t\lambda + l = -\frac{1}{4}, 3125t^4 - 47500t^2 + 82944 = 0$;

4) $(m,n) = (2,6)$, $-\frac{225}{64}\lambda + l = -\frac{1}{4}$;

5) $(m,n) = (2,8)$, $t\lambda + l = -\frac{1}{4}, t^3 + 576t^2 - 54432t - 4665600 = 0$;

6) $(m,n) = (3,3)$, $l = 0$ *vagy* $l \neq 0$ *és* $t(\lambda \pm 1) \neq -l$, $t^2 = \frac{4}{27}$;

7) $(m,n) = (3,4)$, $-\lambda + l = t$ *és* $(\lambda, l) \neq \left(-\frac{32}{25}t, -\frac{7}{25}t\right)$, $t^2 = \frac{4}{27}$;

8) $(m,n) = (3,6)$, $\lambda = -\frac{256s}{2025+576t}$, $l = \frac{2s}{9} - \frac{100s}{225+64t}$, *ahol* $s^2 = 3$ *és* $27t^2 + 320t - 2304 = 0$;

9) $m = n = 4$, $-\lambda + l = \frac{9}{16}$ *és* $l \neq -\frac{7}{16}$, *vagy* $\frac{9}{16}\lambda + l = -1$ *és* $l \neq -\frac{7}{16}$.

Az $l = 0$ esetben a 2.5. és a 2.6. Tételek speciális esetként visszaadják Beukers, Shorey és Tijdeman [5]

$$x(x+1)\cdots(x+m-1) = \lambda y(y+1)\cdots(y+n-1)$$

alakú görbék génuszára nyert eredményét. Megjegyezzük továbbá, hogy 2001-ben Avanzi és Zannier [2] meghatározták az összes 1 génuszú, $f(x) = g(y)$

alakú görbét, ahol az f és a g polinomok fokszáma relatív prím. A 2.6. Tételben szereplő 1)-es, 3)-as és 7)-es esetek ezen eredmény felhasználásával is levezethetőek.

A fejezet következő két tételében meghatározzuk mindazon (m, n) számpárokat és $F(x)$ prímfokszámú, egész együtthatós polinomokat, amelyekre az

$$F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n} \tag{2.6}$$

egyenletnek csak véges sok $x \geq m$, $y \geq n$ egész megoldása van. A páros, illetve a páratlan prímfokszámú eseteket külön tárgyaljuk, mivel a tételek bizonyítása során eltérő módszereket használunk.

2.7. Tétel *Legyen $F(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ egy másodfokú egész együtthatós polinom, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, m, $n \geq 2$ pozitív egészek. Ekkor a (2.6) egyenletnek csak véges sok $x \geq m$, $y \geq n$ egész megoldása van, kivéve az $n = 2$, $2a_1^2 - 8a_0a_2 - a_2b = 0$ és az $(n, m) \in \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(4,1),(4,2),(4,4)\}$ eseteket. A kivételes esetek mindegyikében meg lehet választani a $F(x)$ polinomot és a b egész számot úgy, hogy a (2.6) egyenletnek végtelen sok egész megoldása legyen.*

2.8. Tétel *Legyen $F(x) = a_px^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, ahol $a_p \neq 0$, $p \geq 3$ prím. Legyenek továbbá m, $n \geq 2$ pozitív egészek, és $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ekkor a (2.6) egyenletnek csak véges sok $x \geq m$, $y \geq n$ egész megoldása van, kivéve az alábbi eseteket:*

i) $n = 2$, $m = 1, 2$ *vagy* 4*;*

ii) $n = p$ *és* $F(x) = \frac{b}{p!}\delta(x)(\delta(x)+1)\cdots(\delta(x)+p-1)$, *ahol* $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *lineáris;*

iii) $n = 2p$, $m = 1$, 2 *vagy* 4, *és*
$F(x) = \frac{b}{(2p)!}\left(\delta(x) - \frac{1}{4}\right)\left(\delta(x) - \frac{9}{4}\right)\cdots\left(\delta(x) - \frac{(2p-1)^2}{4}\right)$, *ahol* $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *lineáris.*

A tételek bizonyítása során minden kivételes esetben megadunk olyan konkrét egyenleteket, amelyek rendelkeznek végtelen sok x, y egész megoldással.

A 2.7. és a 2.8. Tételek kiterjesztései a 2.1. Tételünknek, amelyben az $F(x)$ egy lineáris polinom volt.

3 HATVÁNYÖSSZEGEK POLINOMÉRTÉKEI

A fejezet eredményeinek ismertetéséhez vezessünk be néhány jelölést, elnevezést. A továbbiakban $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ lineáris, racionális együtthatós polinomot, $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ pedig nem azonosan nulla racionális együtthatós polinomot fog jelölni. Mint ismeretes,

$$S_m(x) = 1^m + 2^m + \cdots + x^m$$

x-ben egy $m+1$-ed fokú racionális együtthatós polinom, amelyre igaz, hogy páratlan m esetén felírható

$$S_m(x) = \psi_m\left((x+1/2)^2\right)$$

alakban, ahol $\psi_m(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Definiáljunk most úgynevezett speciális típusú $(m, g(x))$ párokat az alábbi módon:

- I-es speciális típus: $(m, S_m(q(x)))$, ahol $q(x)$ nem konstans polinom.
- II-es speciális típus: m páratlan és $g(x) = \psi_m\left(\delta\left(x\right) q(x)^2\right)$.
- III-as speciális típus: m páratlan és $g(x) = \psi_m\left(c\delta\left(x\right)^t\right)$, ahol $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $t \geq 3$ páratlan egész.
- IV-es speciális típus: m páratlan és $g(x) = \psi_m\left(\left(a\delta\left(x\right)^2 + b\right) q(x)^2\right)$, ahol $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
- V-ös speciális típus: m páratlan és $g(x) = \psi_m\left(q(x)^2\right)$.
- VI-os speciális típus: $m = 3$ és $g(x) = \delta(x)q(x)^2$.
- VII-es speciális típus: $m = 3$ és $g(x) = q(x)^2$.

3.1. Tétel *Legyen m egy tetszőleges pozitív egész és $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy legalább harmadfokú polinom. Ekkor az*

$$S_m(x) = g(y) \tag{3.1}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van, kivéve, ha az $(m, g(x))$ pár speciális típusú. Továbbá minden ilyen kivételes esetben meg lehet választani a

$\delta(x)$, $q(x)$ polinomokat és az a, b, c, t paramétereket úgy, hogy a megfelelő $g(x)$ polinom és m egész mellett a (3.1) *egyenletnek legyen végtelen sok x, y egész megoldása.*

Mint láthatjuk, a 3.1. Tételben jellemezzük az összes olyan $(m, g(y))$ párt, amelyek mellett (3.1)-nek lehet végtelen sok megoldása. Így speciális esetekben, rögzített m és $g(y)$ mellett, csak azt kell megvizsgálni, hogy a $g(y)$ polinom lehet-e a tételben felsorolt alakú.

Amennyiben speciálisan $g(y) = F\left(\binom{y}{n}\right)$ alakú, ahol F racionális együtthatós polinom és $n \geq 1$ adott egész szám, úgy a 3.1. Tételünkből a következő pontosabb állítást vezetjük le.

3.2. Tétel *Legyen $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$ racionális együtthatós p-ed fokú polinom, ahol $p = 1$ vagy $p \geq 3$ prímszám. Ekkor az*

$$S_m(x) = F\left(\binom{y}{n}\right) \tag{3.2}$$

egyenletnek, ahol $n > 2$ ha $p = 1$, csak véges sok egész megoldása van, eltekintve az alábbi kivételektől:

- *$p = 1$ és $(m, n) \in \{(1, 4), (2, 3), (3, 4)\}$,*
- *$F(x) = S_m(\delta(x))$, ahol $p \geq 3$, $m = p - 1$ és $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ lineáris,*
- *$F(x) = \psi_m(\delta(x))$ és $n = 1$, 2 vagy 4, ahol $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ lineáris,*
- *$m = 3$, $F(x) = \delta(x)q(x)^2$ és $n = 1$, 2 vagy 4, ahol $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ lineáris.*

Az $F(x) = n!x$ speciális választás mellett a 3.2. Tételből azt kapjuk, hogy ha $m \geq 1$, $n > 2$ és $(m, n) \neq (1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, akkor az

$$S_m(x) = y(y-1)\cdots(y-(n-1)) \tag{3.3}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. Ez lényegében Bilu, Brindza, Kirschenhofer, Pintér és Tichy (3.3) egyenletre vonatkozó [6]-beli eredménye. Abban az esetben pedig, ha $F(x) = x^p$ és $n = 1$, a 3.2. Tétel lényegében visszaadja Schäffer [45] 1956-os végességi állítását az $S_m(x) = y^n$ egyenletre vonatkozóan.

4 $a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n}$ ALAKÚ EGYENLETEKRE VONATKOZÓ EFFEKTÍV ÉS NUMERIKUS EREDMÉNYEK

A fejezet első tétele az (1.3), illetve a (2.1) egyenlet egy általánosítására vonatkozó effektív végességi eredmény.

4.1. Tétel *Legyenek $a \neq 0$, $b \neq 0$, $m \geq 5$ egész számok, $n \in \{2, 4\}$, $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy egész értékű, legfeljebb $m-1$-ed fokú polinom, és legyen $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Tegyük fel továbbá, hogy létezik olyan p prím, melyre*

$$m \geq p \geq \frac{m+3}{2} \qquad \text{és} \qquad (a, p) = 1 \tag{4.1}$$

teljesül. Ekkor az

$$a\binom{x}{m} + f(x) + g(x) = b\binom{y}{n} \tag{4.2}$$

egyenlet $x \geq m$, $y \geq n$ megoldásaira

$$\max\{|x|, |y|\} < C_1$$

teljesül, ahol C_1 egy effektíve kiszámítható konstans, mely csupán a, b, m, f és g-től függ.

Megjegyezzük, hogy ha m elegendően nagy az $|a|$-hez képest, úgy mindig van olyan p prím, melyre (4.1) teljesül. A következő állítások egyszerűen adódnak a 4.1. Tételünkből.

4.1. Következmény *Legyenek a, b, m, n egész számok a 4.1. Tételben meghatározott tulajdonságokkal, és legyen k egész. Ekkor az*

$$a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n}, \quad x \geq m, y \geq n \tag{4.3}$$

egyenletnek csak véges sok megoldása van, és az összes megoldás effektíve meghatározható.

A felsorolt tulajdonságú speciális a, b, m, n, k értékek mellett a 4.1. Következmény a 2.1. Tételünk effektív változatának tekinthető. Az $m \geq 5$, $k = 0$ speciális esetben magába foglalja Kiss [26] és Brindza [11] említett effektív végességi tételeit.

4.2. Következmény *Legyen $m \geq 5$ egész szám és $n \in \{2, 4\}$. Továbbá legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy egész értékű, legfeljebb $m-1$-ed fokú polinom, és legyen $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Ekkor létezik egy effektíve kiszámítható C_2 konstans, ami csak m-től, illetve az $f(x)$ és a $g(x)$ polinomoktól függ, úgy hogy ha az $x \geq m, y \geq n$ egészekre az*

$$f(x) + g(x), \binom{x}{m}, \binom{y}{n}$$

számok valamilyen sorrendben számtani sorozatot alkotnak, akkor

$$\max\{x, y\} \leq C_2. \tag{4.4}$$

A 4.2. Következményt arra a speciális esetre alkalmazva, amikor $f(x) = \binom{x}{k}$, ahol $1 \leq k \leq m-1$ és $g(x) \equiv 0$, azt kapjuk, hogy amennyiben $m \geq 5, n \in \{2, 4\}$ és az $\binom{x}{k}, \binom{x}{m}, \binom{y}{n}$ binomiális együtthatók valamilyen sorrendben számtani sorozatot alkotnak, akkor (4.4) teljesül egy olyan effektíve meghatározható C_2 konstanssal, ami csak m értékétől függ.

Megjegyezzük, hogy $m = n = 2$ esetén a 4.2. Következmény nem lesz igaz. Ebben az esetben ugyanis a $0, \binom{x}{2}, \binom{y}{2}$ számtani sorozat a

$$2(2x-1)^2 - (2y-1)^2 = 1. \tag{4.5}$$

Pell-egyenletre vezet, aminek van végtelen sok $x, y \geq 2$ egész megoldása. Nem tudjuk viszont, hogy vajon a 4.1. Tétel igaz-e $m = 3$, illetve $m = 4$ esetén.

A következő tételben azon speciális számtani sorozatokkal foglalkozunk, amelyeknek három egymást követő tagja: egy k konstans és két $\binom{x}{m}, \binom{y}{n}$ binomiális együttható ebben a sorrendben. Mint már említettük, ez a probléma a

$$2\binom{x}{m} = \binom{y}{n} + k \tag{4.6}$$

egyenlet vizsgálatára vezet. Az alábbi 4.2. Tételünkben a (4.6) egyenlet összes megoldását megadjuk abban az esetben, amikor

$$(m, n) \text{ vagy } (n, m) \in \{(2,3), (2,6), (3,4), (4,6)\} \tag{4.7}$$

és

$$0 \le k \le 10. \tag{4.8}$$

A (4.7) feltétel mellett a (4.6) egyenletet elliptikus egyenletté lehet transzformálni. A következő táblázatban a tekintett m, n értékek mellett láthatjuk a (4.6) egyenletünket, a transzformált elliptikus egyenleteket és a megfelelő transzformációkat.

	equation	transformed elliptic equation	transformations
(4.9)	$2\binom{x}{2} = \binom{y}{3} + k$	$u^2 = v^3 - 36v + 324(4k+1)$	$u = 36x - 18$, $v = 6y - 6$
(4.10)	$2\binom{x}{3} = \binom{y}{2} + k$	$u^2 = v^3 - 36v - 81(8k-1)$	$u = 18y - 9$, $v = 6x - 6$
(4.11)	$2\binom{x}{3} = \binom{y}{4} + k$	$u^2 = v^3 - 64v - 64(24k+1)$	$u = 2(2y-3)^2 - 10$, $v = 8x - 8$
(4.12)	$2\binom{x}{4} = \binom{y}{3} + k$	$u^2 = v^3 - 64v + 256(12k+1)$	$u = 4(2x-3)^2 - 20$, $v = 8y - 8$
(4.13)	$2\binom{x}{2} = \binom{y}{6} + k$	$u^2 = v^3 - 302400v +$ $4320000(972k + 235)$	$u = 64800x - 32400$, $v = 45(2y-5)^2 - 525$
(4.14)	$2\binom{x}{6} = \binom{y}{2} + k$	$u^2 = v^3 - 302400v -$ $1080000(1944k - 211)$	$u = 32400y - 16200$, $v = 45(2x-5)^2 - 525$
(4.15)	$2\binom{x}{4} = \binom{y}{6} + k$	$u^2 = v^3 - 33600v +$ $160000(972k + 73)$	$u = 900(2x-3)^2 -$ $- 4500$, $v = 15(2y-5) - 175$
(4.16)	$2\binom{x}{6} = \binom{y}{4} + k$	$u^2 = v^3 - 33600v -$ $40000(1944k - 49)$	$u = 450(2y-3)^2 -$ $- 2250$, $v = 15(2x-5)^2 - 175$

4.1 Táblázat

Az alábbi tételünk a (4.9)-(4.16) egyenletek összes megoldását szolgáltatja $0 \leq k \leq 10$ mellett. Megjegyezzük, hogy módszerünkkel ezen egyenletek 10-nél nagyobb k-kra is megoldhatók. Sőt, eredményünk "kis" a és b együtthatók esetén a (4.3) egyenletünkre is kiterjeszthető, amennyiben m, n-re (4.7) teljesül. Valójában pusztán számítógépes kapacitástól függ, hogy mekkora a, b és k

értékek mellett lehet még kiszámolni a fellépő elliptikus egyenletek megoldására szolgáló algoritmusban felhasznált paramétereket, s ezáltal megoldani a (4.3) egyenletet.

4.2. Tétel *Legyenek m, n és k egész számok a* (4.7) *és a* (4.8) *tulajdonsággal. Ekkor a* 4.1 *Táblázatban szereplő nyolc egyenlet minden $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x \geq m, y \geq n$, megoldását megadjuk a* $4.2 - 4.9$ *Táblázatokban.*

Az alábbi táblázatokban csak azokat a k értékeket tüntetjük fel, melyekre a megfelelő egyenletnek van megoldása.

(4.9)	$2\binom{x}{2} = \binom{y}{3} + k$
k	(x, y)
0	(85,36), (5,6), (8,8), (1190,205)
1	(2,3), (970,179)
2	(158,54), (167,56), (25482929,157357), (4,5), (37,21), (3,4), (1234,210)
5	(3,3)
6	(743,150), (758,152), (2530912508,3374701), (61,29), (10,9)
7	(7,7), (5209,547), (22,15)
8	(4,4)
10	(195,62), (71,32), (5,5), (6,6), (360311,9202), (5866,592)

4.2 Táblázat

(4.10)	$2\binom{x}{3} = \binom{y}{2} + k$
k	(x, y)
1	(3,2)
2	(20,68), (4,4)
4	(6,9), (7,12), (590,11672)
5	(4,3), (90,686), (5,6), (12,30), (11,26), (166,1731)
7	(4,2), (15,43), (8,15)
9	(10,22)
10	(5,5)

4.3 Táblázat

(4.11)	$2\binom{x}{3} = \binom{y}{4} + k$
k	(x, y)
0	(7,8), (11,11)
1	(3,4)
3	(4,5)
5	(5,6), (6,7)
7	(4,4)

4.4 Táblázat

(4.12)	$2\binom{x}{4} = \binom{y}{3} + k$
k	(x, y)
0	(5,5)
1	(4,3)
6	(5,4)
9	(5,3)
10	(6,6)

4.5 Táblázat

(4.13)	$2\binom{x}{2} = \binom{y}{6} + k$
k	(x, y)
0	(15,10), (22,11)
1	(2,6)
2	(90,16), (6,8)
5	(3,6), (4,7)
6	(10,9), (31,12), (42,13)

4.6 Táblázat

(4.14)	$2\binom{x}{6} = \binom{y}{2} + k$
k	(x, y)
0	(18,273)
1	(6,2), (8,11)
4	(7,5)
8	(7,4)

4.7 Táblázat

(4.15)	$2\binom{x}{4} = \binom{y}{6} + k$
k	(x, y)
1	(4,6)
2	(6,8)
3	(5,7)
9	(5,6)

4.8 Táblázat

(4.16)	$2\binom{x}{6} = \binom{y}{4} + k$
k	(x, y)
1	(6,4)
9	(7,5)

4.9 Táblázat

1 INTRODUCTION

The investigation of integer and rational solutions of polynomial equations in two unknowns plays an important role in the theory of diophantine equations. Many important results have been obtained on the finiteness of the number of solutions. Runge, Thue, Mordell, Siegel and others established finiteness results for some wide classes of equations. Finally, in 1929 Siegel [48] showed in full generality that if $F(x, y)$ is an absolute irreducible polynomial with rational coefficients then the equation

$$F(x, y) = 0$$

has only finitely many integer solutions x, y, provided that the genus g of the algebraic curve defined by the equation is positive. In 1983 Faltings [17] proved that if $g > 1$ then even the number of rational solutions is finite.

The famous theorems of Siegel and Faltings are ineffective, that is they do not furnish any algorithms for finding the solutions. Further, we remark that it is not easy at all to apply these results to special equations because general it is difficult to decide the reducibility or compute the genus.

There is a similar situation in case of equations

$$f(x) = g(y), \tag{1.1}$$

where f and g are polynomials with rational coefficients. The equations of this kind are especially important and interesting in those cases when $f(x)$ or $g(x)$ is of the form $x(x-1)\cdots(x-(m-1))$, $\binom{x}{n}$, x^k or $1^l + 2^l + \cdots + x^l$, where m, n, k, l are given positive integers. There are several results concerning the number of solutions of these classes of equations. Extending some earlier works of Davenport, Lewis and Schinzel [15], Schinzel [46] and Fried [18], [19], Bilu and Tichy [7] have recently published a general finiteness criterion for (1.1). More precisely, they characterized those polynomials f and g for which equation (1.1) has only finitely many integer solutions x, y. Their theorem is ineffective and contains very complicated conditions. Hence, it is general a hard problem to apply this criterion to the above mentioned classes of equations.

Our dissertation consists of four chapters. In Chapters 2 and 3 we give general ineffective finiteness results for some important classes of equation of the form (1.1). Our theorems are considerable generalizations and refinements of the earlier relevant results. In Chapter 4 we prove some effective versions of certain results of Chapter 2 and we resolve some concrete equations under consideration.

We remark that the results of the present thesis have been published in our papers [33], [34], [35] and [36].

Now we summarize chapter by chapter the most important results of our dissertation.

II

In Chapter 2 we investigate the number of integer and rational solutions x, y of equations of the form

$$x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l, \tag{1.2}$$

where $m, n \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$ and $\lambda, l \in \mathbb{Q}$ with $\lambda \neq 0$.

In case $l = 0$ equation (1.2) was studied by several authors, including Saradha, Shorey [38]-[40] and Saradha, Shorey, Tijdeman [41]-[44]. For a survey of recent results on (1.2) we refer to [47]. Using an algebraic-geometrical approach, Beukers, Shorey and Tijdeman [5] gave all the values of parameters λ, m, n for which (1.2) has only finitely many integer or rational solutions x, y, respectively.

One of the main results of Chapter 2 is Theorem 2.2 which is a generalization of this result of Beukers, Shorey and Tijdeman for arbitrary rational number l. In the proof first we characterize (cf. Theorems 2.4 to 2.6) those polynomials

$$F(x,y) = x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) - \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) - l$$

which are irreducible over $\mathbb{C}$ and for which the curves $F(x,y) = 0$ have genus 0 or 1. Then the theorems of Siegel [48] and Faltings [17] imply the finiteness of the number of integer and rational solutions, respectively. Further, when $F(x,y)$ is reducible, we describe those cases when $F(x,y) = 0$ has infinitely many solutions.

An important special case of (1.2) is the combinatorial diophantine equation

$$a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n} \quad \text{in integer } x \geq m, y \geq n, \tag{1.3}$$

where a, b are non-zero integers, and k, m, n are integers with $1 < m \leq n$.

In the trivial case $m = n$, $a = b$ and $k = 0$, equation (1.3) has obviously infinitely many solutions. In 1988, Kiss [26] showed that if m is a given odd prime, then the equation

$$\binom{x}{m} = \binom{y}{2}$$

has only finitely many integer solutions $x \geq m$, $y \geq 2$ which can be effectively determined. In 1991, this was generalized by Brindza [11] to the case when $m \geq 3$ is an arbitrary but fixed integer.

As an application of our Theorem 2.2 we establish a general finiteness result (cf. Theorem 2.1) for equation (1.3) which includes, in an ineffective form, the above-quoted results of [26] and [11].

In the second part of Chapter 2 we extend our result concerning equation (1.3) to the more general equation

$$F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n}, \tag{1.4}$$

where the polynomial $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ is not linear like in (1.3), the degree of F is a prime number. In Theorem 2.7 and Theorem 2.8 we describe all the pairs (m, n) and polynomials F for which (1.4) may have infinitely many integer solutions $x \geq m$, $y \geq n$. Further, we give for each of these pairs (m, n) an equation of the form (1.4) which has infinitely many solutions.

Using the above-mentioned general ineffective result of Bilu and Tichy [7], Kulkarni and Sury [27] have recently obtained a finiteness result concerning equations of the form $x(x+1)\cdots(x+(m-1)) = g(y)$, where $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$ is of degree ≥ 2. In the proof of Theorem 2.7 and 2.8 we combine among other things this theorem of [27] with some finiteness theorems of Ping-Zhi [30], Brindza [10] and Siegel [48].

III

In Chapter 3 we study the diophantine equation

$$S_m(x) = g(y) \quad \text{in positive integers } x, y, \tag{1.5}$$

where $g(y)$ is a polynomial with rational coefficients, m is a positive integer and

$$S_m(x) = 1^m + 2^m + \cdots + x^m.$$

In 1956, Schäffer [45] established an ineffective finiteness theorem for the number of solutions of (1.5) in the special case when $g(y) = y^n$. An effective version of this result was proved by Győry, Tijdeman and Voorhoeve [22] who investigated Schäffer's equation in the more general case when the exponent n is also unknown. Later, several generalizations, extensions and related results have been obtained, see e.g. [9],[12], [13], [16], [25], [32], [55]-[58] and the references given there. Recently, Jacobson, Pintér and Walsh [24] and Bennett, Győry and

Pintér [4] resolved Schäffer's equation for $n = 2$, m even with $m \leq 58$, and for arbitrary n and $m \leq 11$, respectively. For a survey of these results we refer to [21].

A related result concerning equation (1.5) was obtained in 2000 by Bilu, Brindza, Kirschenhoffer, Pintér and Tichy [6] who proved that if $g(y) = y(y - 1)\cdots(y-(n-1))$ then (1.5) has only finitely many integer solutions x, y, provided that $m \geq 1$, $n \geq 2$ and $(m, n) \neq (1, 2)$.

In our Theorem 3.1 we characterize those integers m and polynomials $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$ for which (1.5) may have infinitely many integer solutions x, y. Further, we give for each type of these pairs $(m, g(y))$ an equation of the form (1.5) which has infinitely many solutions. We remark that Theorem 3.1 is in fact a common generalization of the above-mentioned results of Schäffer [45] and Bilu, Brindza, Kirschenhoffer, Pintér and Tichy [6].

In our Theorem 3.2 we give an application of Theorem 3.1, characterizing those positive integers m and polynomials $F(x)$ with integer coefficients and with degree one or odd prime for which equation

$$S_m(x) = F\left(\binom{y}{n}\right) \qquad \text{in integers } x \geq 1, y \geq n,$$

has only finitely many integer solutions.

Our Theorems 3.1 and 3.2 are ineffective because their proofs depend ultimately on the ineffective finiteness criterion of Bilu and Tichy [7] on diophantine equations of the form $f(x) = g(y)$.

IV

In Chapter 4 we study the equation

$$a\binom{x}{m} + f(x) + g(x) = b\binom{y}{n}, \tag{1.6}$$

where a, b are non-zero integers, m, n are given positive integers, $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ is an integer-valued polynomial with $\deg f(x) \leq m - 1$, and $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Our Theorem 4.1 is an effective finiteness result concerning equation (1.6) in the case when $n \in \{2, 4\}$ and there exists a prime number p satisfying

$$m \geq p \geq \frac{m+3}{2} \qquad \text{and} \qquad (a, p) = 1. \tag{1.7}$$

We note that if m is sufficiently large compared with $|a|$ then the condition (1.7) is always satisfied. The proof of this theorem is based upon some technical lemmas and the Baker's method.

As an application we prove (cf. Corollary 4.1) that if $n \in \{2,4\}$ and (1.7) hold then, for given integer k, the equation (1.3) has only finitely many solutions, and all these can be effectively determined. In the special situation under consideration, this makes effective on Theorem 2.1. Our result includes as special cases the effective results of Kiss [26] and Brindza [11], mentioned above.

As an other application of our Theorem 4.1, we give (Corollary 4.2) an effective upper bound for those integers $x \geq m$, $y \geq n$ for which the numbers

$$f(x) + g(x), \binom{x}{m}, \binom{y}{n}, \quad n \in \{2,4\},$$

form in some order an arithmetic progression.

There are several numerical results concerning the equation (1.3) when $a = b = 1$ and $k = 0$. For $(m,n) = (3,2)$ Avanesov [1], for $(m,n) = (2,4)$ de Weger [59] and independently Pintér [31], for $(m,n) = (3,4)$ de Weger [60], for $(m,n) = (6,2)$ and $(m,n) = (6,4)$ Stroeker and de Weger [52] and independently Hajdu and Pintér [23], for $(m,n) = (3,6), (m,n) = (2,8)$ and $(m,n) = (4,8)$ Stroeker and de Weger [52] determined all the integer solutions of the equation (1.3) under the above conditions. In our last Theorem 4.2 we give all integer solutions x, y of equation (1.3) in those special cases when $a = 2$, $b = 1$, $-10 \leq k \leq 0$ and

$$(m,n) \in \{(2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (2,6), (6,2), (4,6), (6,4)\}.$$

For each pair (m,n) in question we transform the corresponding equation to an elliptic equation of the form

$$u^2 = v^3 + rv + s \ \text{ in integers } u, v, \tag{1.8}$$

where r, s are given integers depending on n, m and k. In 1994 Gebel, Pethő and Zimmer [20], and independently Stroeker and Tzanakis [51] worked out an efficient algorithm for finding all solutions of elliptic equations. This algorithm was implemented in the program package SIMATH [49]. We used this program package to solve our transformed elliptic equations (1.8), and hence our equations of the form (1.3), too.

2 ON DIOPHANTINE EQUATIONS OF THE FORM $F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n}$

Our Theorem 2.1 provides a characterization of those pairs (m, n) and parameters a, b, k for which equation (2.1) may have infinitely many solutions.

Theorem 2.1. *Let a, b, k, m, n be integers with $a \neq 0, b \neq 0$ and $1 < m \leq n$. Apart from the cases*

1) $m = n, a = b, k = 0$;
2) $(m, n) = (2, 2)$;
3) $(m, n) = (2, 4)$ *and* $\frac{-24k+3a}{b} = 1$ *or* $-\frac{9}{16}$;
4) $(m, n) = (4, 4)$ *and* $\frac{-24k+a}{b} = 1$;

equation

$$a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n}, \quad x \geq m, y \geq n \tag{2.1}$$

has only finitely many integer solutions. Further, for each pair (m, n) listed in 2) to 4), the parameters a, b and k can be chosen so that (2.1) has infinitely many integer solutions.

Our Theorem 2.1 includes as special cases the finiteness results mentioned in the Introduction on equation (2.1).

Theorem 2.1 is a simple consequence of

Theorem 2.2. *Let*

$$f(x) = x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) \text{ and } g(y) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l$$

where $m, n \in \mathbb{N}$ with $m \leq n$ and $\lambda, l \in \mathbb{Q}$ with $\lambda \neq 0$. Then the equation

$$f(x) = g(y) \tag{2.2}$$

has only finitely many integer solutions apart from the following cases:

1) $m = n$ *and* $\lambda = 1, l = 0$ *or* $m = n$ *is odd*, $\lambda = -1, l = 0$;
2) $(m, n) = (2, 2)$;

3) $(m,n)=(2,4)$, $4\lambda-4l=1$ *or* $9\lambda+16l=-4$*;*

4) $(m,n)=(4,4)$, $\lambda-l=1$.

Moreover, equation (2.2) *has only finitely many rational solutions except the cases* 1) *to* 4) *and the following ones:*

5) $(m,n)=(2,3)$*;*

6) $(m,n)=(2,4)$, $9\lambda+16l\neq-4$*;*

7) $(m,n)=(2,6)$, $-\frac{225}{64}\lambda+l=-\frac{1}{4}$*;*

8) $(m,n)=(3,3)$*;*

9) $m=n=4$, $-\lambda+l=\frac{9}{16}$ *and* $l\neq-\frac{7}{16}$, *or* $\frac{9}{16}\lambda+l=-1$ *and* $l\neq-\frac{7}{16}$.

Further, for each pair (m,n) *listed above, the parameters* λ,l *can be given in infinitely many ways such that equation* (2.2) *has infinitely many solutions* x,y.

It is easy to check that for $l=0$, Theorem 2.2 gives back the result of Beukers, Shorey and Tijdeman [5] mentioned in the Introduction.

In the following theorem we investigate a more general equation.

Theorem 2.3. *Let* d_1 *and* d_2 *be positive rational numbers,* $\tilde{\lambda}\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\tilde{l}\in\mathbb{Q}$. *Then the equation*

$$x\,(x+d_1)\cdots(x+(m-1)\,d_1)=\tilde{\lambda}y\,(y+d_2)\cdots(y+(n-1)\,d_2)+\tilde{l} \tag{2.3}$$

where $m,n\in\mathbb{N}$ *with* $m\leq n$*, has only finitely many integer and rational solutions, respectively, apart from the exceptional cases listed in Theorem 2.2 with*

$$\lambda=(-1)^{m+n}\tilde{\lambda}\frac{d_2^n}{d_1^m}\qquad\textit{and}\qquad l=(-1)^m\frac{\tilde{l}}{d_1^m}.$$

In the special case $\tilde{l}=0$ Theorem 2.3 contains the result of Beukers, Shorey and Tijdeman [5] concerning the equation

$$x\,(x+d_1)\cdots(x+(m-1)\,d_1)=y\,(y+d_2)\cdots(y+(n-1)\,d_2)\,. \tag{2.4}$$

The next results will be very important in our proofs. The first one describes those cases in which the polynomial

$$F(x,y)=x\,(x-1)\cdots(x-(m-1))-\lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1))-l \tag{2.5}$$

is reducible in $\mathbb{C}[x,y]$.

Theorem 2.4. *Let m and n be positive integers with $m \leq n$ and let $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $l \in \mathbb{C}$. If $F(x, y)$ is reducible in $\mathbb{C}[x, y]$, then one of the following conditions holds:*

1) $m = n$, $\lambda = 1$, $l = 0$, *in which case* $x - y$ *is a factor of* $F(x, y)$*;*

2) $m = n$ *is odd,* $\lambda = -1$, $l = 0$, *in which case* $x + y - m + 1$ *is a factor of* $F(x, y)$*;*

3) $(m, n) = (2, 2)$, $\lambda - 4l = 1$, *in which case* $F(x, y) = \frac{1}{4}(2x - 2Ay + A - 1)(2x + 2Ay - A - 1)$ *where* $A = \sqrt{4l + 1}$*;*

4) $(m, n) = (2, 4)$, $4\lambda - 4l = 1$, *in which case* $F(x, y) = \frac{1}{4}\left(2x + 2Ay^2 - 6Ay + 2A - 1\right)\left(2x - 2Ay^2 + 6Ay - 2A - 1\right)$ *where* $A = \sqrt{l + \frac{1}{4}}$*;*

5) $(m, n) = (4, 4)$, $\lambda - l = 1$, *in which case*

$$F(x, y) = \left(x^2 - 3x + Ay^2 - 3Ay + A + 1\right) \times \\ \times \left(x^2 - 3x - Ay^2 + 3Ay - A + 1\right),$$

where $A = \sqrt{l + 1}$*;*

6) $(m, n) = (4, 4)$, $\lambda = -1$, $l = -\frac{7}{16}$ *in which case* $F(x, y) = \left(x^2 - \sqrt{2}xy - \left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x + y^2 - \left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y + \frac{13}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{2}\right) \times \left(x^2 + \sqrt{2}xy - \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)x + y^2 - \left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)y + \frac{13}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{2}\right)$*;*

7) $(m, n) = (6, 6)$, $\lambda = -1$, $l = -\frac{320}{27}$ *in which case*

$$F(x, y) = \left(y^2 - 5y + x^2 - 5x + \frac{20}{3}\right)\left(y^4 - 10y^3 - x^2y^2 + 5xy^2 + \right. \\ \left. + \frac{85}{3}y^2 + 5x^2y - 25xy - \frac{50}{3}y + x^4 - 10x^3 + \frac{85}{3}x^2 - \frac{50}{3}x + \frac{16}{9}\right).$$

In [5, Theorem 2.1], Beukers, Shorey and Tijdeman characterized the polynomials

$$x(x + 1) \cdots (x + m - 1) - \lambda y(y + 1) \cdots (y + n - 1)$$

with $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ which are reducible in $\mathbb{C}[x, y]$. For $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, our Theorem 2.4 is an extension of Theorem 2.1 of [5] to the inhomogeneous case.

Consider the curves

$$C : x\,(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y\,(y-1)\cdots(y-(n-1)) + l,$$

where $n \geq m > 1$, and λ, l are not necessarily rational, but $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ and $l \in \mathbb{C}$. In the following two theorems we list those curves C, which have genus zero and one, respectively.

Theorem 2.5. *Suppose C is irreducible. Then its genus is zero in the following cases:*

1) $(m,n) = (2,2)$, $\lambda - 4l \neq 1$*;*

2) $(m,n) = (2,3)$, $t\lambda + l = -\frac{1}{4}, t^2 = \frac{4}{27}$*;*

3) $(m,n) = (2,4)$, $\frac{9}{16}\lambda + l = -\frac{1}{4}$*;*

4) $(m,n) = (2,6)$, $t\lambda + l = -\frac{1}{4}, 27t^2 + 320t - 2304 = 0$*;*

5) $(m,n) = (3,3)$, $l \neq 0$ *and* $t\,(\lambda \pm 1) = -l$, $t^2 = \frac{4}{27}$*;*

6) $(m,n) = (3,4)$, $\lambda = \frac{64}{225}t$, $l = \frac{14}{225}t$, $t^2 = 3$*;*

7) $(m,n) = (3,6)$, $\lambda = \frac{3}{392}t$ *and* $l = \frac{20}{441}t$, $t^2 = 21$.

Theorem 2.6. *Assume that C is irreducible. Its genus is one in the following cases:*

1) $(m,n) = (2,3)$, $\frac{2}{9}t\lambda + l \neq -\frac{1}{4}$, $t^2 = 3$*;*

2) $(m,n) = (2,4)$, $\frac{9}{16}\lambda + l \neq -\frac{1}{4}$*;*

3) $(m,n) = (2,5)$, $t\lambda + l = -\frac{1}{4}, 3125t^4 - 47500t^2 + 82944 = 0$*;*

4) $(m,n) = (2,6)$, $-\frac{225}{64}\lambda + l = -\frac{1}{4}$*;*

5) $(m,n) = (2,8)$, $t\lambda + l = -\frac{1}{4}, t^3 + 576t^2 - 54432t - 4665600 = 0$*;*

6) $(m,n) = (3,3)$, $l = 0$ *or* $l \neq 0$ *and* $t(\lambda \pm 1) \neq -l$, $t^2 = \frac{4}{27}$*;*

7) $(m,n) = (3,4)$, $-\lambda + l = t$ *and* $(\lambda, l) \neq \left(-\frac{32}{25}t, -\frac{7}{25}t\right)$, $t^2 = \frac{4}{27}$*;*

8) $(m,n) = (3,6)$, $\lambda = -\frac{256s}{2025+576t}$, $l = \frac{2s}{9} - \frac{100s}{225+64t}$, *where* $s^2 = 3$ *and* $27t^2 + 320t - 2304 = 0$*;*

9) $m = n = 4$, $-\lambda + l = \frac{9}{16}$ *and* $l \neq -\frac{7}{16}$, *or* $\frac{9}{16}\lambda + l = -1$ *and* $l \neq -\frac{7}{16}$.

For $l = 0$, Theorem 2.5 and 2.6 give as a special case Theorem 2.2 of [5] concerning the curves $x\,(x+1)\cdots(x+(m-1)) = \lambda y\,(y+1)\cdots(y+(n-1))$.

We remark that recently Avanzi and Zannier [2] classified the genus 1 curves of the form $f(x) = g(y)$ where the polynomials f and g have coprime degrees. From this result of [2] one can deduce the cases $(m, n) = (2, 3), (2, 5)$ and $(3, 4)$ of our Theorem 2.6.

In the following two theorems of Chapter 2 we characterize those pairs (m, n) and those polynomials $F(x)$ of prime degree for which equation

$$F\left(\binom{x}{m}\right) = b\binom{y}{n} \tag{2.6}$$

has only finitely many integer solutions.

Theorem 2.7. *Let* $F(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ *be a quadratic polynomial with integer coefficients, let* $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, *and* $n \geq 2$ *and* m *be positive integers. Then equation* (2.6) *has only finitely many integer solutions* $x \geq m$, $y \geq n$, *unless* $n = 2$ *and* $2a_1^2 - 8a_0a_2 - a_2b = 0$ *or* $(n, m) \in \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 4)\}$. *Further, for each of these cases the polynomial* $F(x)$ *and the integer* b *can be chosen so that* (2.6) *has infinitely many integer solutions.*

In Theorem 2.8 we deal with the case when the degree of $F(x)$ is an odd prime.

Theorem 2.8. *Let* $F(x) = a_px^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, *where* $a_p \neq 0$ *and* $p \geq 3$ *is a prime. Further, let* $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *and let* $n \geq 2$, m *be positive integers. Then equation* (2.6) *has only finitely many integer solutions* $x \geq m$, $y \geq n$, *unless*

i) $n = 2$, $m = 1, 2$ *or* 4;

ii) $n = p$ *and* $F(x) = \frac{b}{p!}\delta(x)\,(\delta(x)+1)\cdots(\delta(x)+p-1)$, *where* $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *is linear;*

iii) $n = 2p$, $m = 1$, 2 *or* 4, *and* $F(x) = \frac{b}{(2p)!}\left(\delta(x) - \frac{1}{4}\right)\left(\delta(x) - \frac{9}{4}\right)\cdots\left(\delta(x) - \frac{(2p-1)^2}{4}\right)$, *where* $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *is linear.*

In the proofs of Theorems 2.7 and 2.8 we will give in each exceptional case a concrete equation which has infinitely many integer solutions x, y.

3 POLYNOMIAL VALUES OF POWER SUMS

To present our results we define special pairs $(m, g(x))$. In what follows, let $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ be a linear polynomial, and $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ a non-zero polynomial. As is known

$$S_m(x) = 1^m + 2^m + \cdots x^m$$

is a polynomial from $\mathbb{Q}[x]$ with degree $m+1$. Further, for m odd, $S_m(x)$ can be written in the form $\psi_m\left((x+1/2)^2\right)$ with an appropriate polynomial $\psi_m(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Now define special pairs $(m, g(x))$ as follows:

- Special pair of type I: $(m, S_m(q(x))$, where $q(x)$ is not constant.
- Special pair of type II: m is odd and $g(x) = \psi_m\left(\delta\left(x\right)q(x)^2\right)$.
- Special pair of type III: m is odd and $g(x) = \psi_m\left(c\delta\left(x\right)^t\right)$, where $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $t \geq 3$ is an odd integer.
- Special pair of type IV: m is odd and $g(x) = \psi_m\left(\left(a\delta\left(x\right)^2 + b\right)q(x)^2\right)$, where $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.
- Special pair of type V: m is odd and $g(x) = \psi_m\left(q(x)^2\right)$.
- Special pair of type VI: $m = 3$ and $g(x) = \delta(x)q(x)^2$.
- Special pair of type VII: $m = 3$ and $g(x) = q(x)^2$.

Theorem 3.1. *Let m be a positive integer and $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ be a polynomial of degree greater than 2. Then equation*

$$S_m(x) = g(y) \tag{3.1}$$

has only finitely many integer solutions x, y, unless $(m, g(x))$ is a special pair. Further, for each type of special pairs, the polynomials $\delta(x)$, $q(x)$ and the numbers a, b, c, t can be chosen so that for the corresponding $g(x)$ and integers m, equation (3.1) *has infinitely many integer solutions x, y.*

In 2002, Bilu, Brindza, Kirschenhoffer, Pintér és Tichy [6] proved that, for $m \geq 1$, $n \geq 2$ with $(m,n) \neq (1,2)$, the equation $S_m(x) = y(y-1)\cdots(y-(n-1))$ has at most finitely many solutions in rational integers x, y. Our following theorem in the special case $F(x) = n!x$ gives in fact back this result of [6].

Theorem 3.2. *Let $F(x) \in \mathbb{Q}[x]$ be a polynomial of degree p with $p = 1$ or $p \geq 3$ prime. Then the equation*

$$S_m(x) = F\left(\binom{y}{n}\right) \quad \text{in integers } x \geq 1, y \geq n, \tag{3.2}$$

where $n > 2$ if $p = 1$, has only finitely many solutions, apart from the following cases when

- $\deg F(x) = 1$ *and* $(m,n) \in \{(1,4),(2,3),(3,4)\}$,
- $F(x) = S_m(\delta(x))$, *where* $m = p-1$ *and* $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *is linear,*
- $F(x) = \psi_m(\delta(x))$ *and* $n = 1$, 2 *or* 4, *where* $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *is linear,*
- $m = 3$, $F(x) = \delta(x)q(x)^2$ *and* $n = 1$, 2 *or* 4, *where* $\delta(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *is linear.*

For $F(x) = x^p$ and $n = 1$ we get back the ineffective finiteness result of Schäffer [45] concerning the equation $S_m(x) = y^n$.

In the proof of Theorem 3.2 we shall give in each exceptional case, apart from the last one, a concrete equation which has infinitely many integer solutions x, y. It is possible that in the last exceptional case there are equations with infinitely many integer solutions, but we are not able to find such an equation.

4 EFFECTIVE AND NUMERICAL RESULTS CONCERNING THE EQUATION $a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n}$

The first theorem of this chapter is an effective finiteness result concerning a generalization of equation (2.1).

Theorem 4.1. *Let $a \neq 0$, $b \neq 0$, $m \geq 5$ be integers, $n \in \{2,4\}$, $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ an integer-valued polynomial with $\deg f(x) \leq m-1$, and $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Assume that there exists a prime number p satisfying*

$$m \geq p \geq \frac{m+3}{2} \quad \text{and} \quad (a,p) = 1. \tag{4.1}$$

Then all the integer solutions $x \geq m$, $y \geq n$ of the equation

$$a\binom{x}{m} + f(x) + g(x) = b\binom{y}{n} \tag{4.2}$$

satisfy

$$\max\{|x|, |y|\} < C_1$$

where C_1 is an effective computable constant depending only on a, b, m, f and g.

We note that if m is sufficiently large compared with $|a|$ then there always exits a prime number p for which (4.1) holds.

The next results are simple consequences of our Theorem 4.1.

4.1. Corollary *Let a, b, m, n be integers as in Theorem 4.1, and let k be an integer. Then the equation*

$$a\binom{x}{m} + k = b\binom{y}{n}, \quad x \geq m, y \geq n \tag{4.3}$$

has only finitely many integer solutions which can be effectively determined.

In the special case $m \geq 5$, $k = 0$ our result contains the effective results of Kiss [26] and Brindza [11] mentioned in the Introduction.

4.2. Corollary *Let $m \geq 5$ be an integer and $n \in \{2, 4\}$. Further, let $f(x)$ be an integer-valued polynomial with $\deg f(x) \leq m - 1$, and let $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Then there exists an effectively computable constant C_2 depending only on m and the polynomials $f(x)$ and $g(x)$ such that if for the integers x, y with $x \geq m, y \geq n$ the numbers*

$$f(x) + g(x), \binom{x}{m}, \binom{y}{n}$$

form in some order an arithmetic progression, then

$$\max\{x, y\} \leq C_2. \tag{4.4}$$

In particular, our Corollary 4.2 applies to the case when $f(x) = \binom{x}{k}$ with $1 \leq k \leq m-1$ and $g(x) \equiv 0$. Then we get that if $m \geq 5, n \in \{2, 4\}$ and $\binom{x}{k}, \binom{x}{m}, \binom{y}{n}$ form an arithmetic progression, then (4.4) follows with an effective constant C_2 depending only on m.

We note that for $n = m = 2$ our Corollary 4.2 does not remain valid. In this case the an arithmetic progression $0, \binom{x}{2}, \binom{y}{2}$ leads to the Pell equation

$$2\,(2x-1)^2 - (2y-1)^2 = 1 \tag{4.5}$$

which has infinity many solutions in integers $x, y \geq 2$. We do not know whether Corollary 4.2 is true or not for $m = 3$ and 4.

In the next theorem we consider arithmetical progressions of the form k, $\binom{x}{m}$, $\binom{y}{n}$, where k is constant. This problem can be reduced to the equation

$$2\binom{x}{m} = \binom{y}{n} + k. \tag{4.6}$$

We give the complete list of solutions of equation (4.6) for

$$(m, n) \text{ or } (n, m) \in \{(2,3), (2,6), (3,4), (4,6)\} \tag{4.7}$$

and

$$0 \leq k \leq 10. \tag{4.8}$$

The following table contains the corresponding equations. All these equations can be reduced to elliptic equations after suitable transformations.

	equation	transformed elliptic equation	transformations
(4.9)	$2\binom{x}{2} = \binom{y}{3} + k$	$u^2 = v^3 - 36v + 324(4k+1)$	$u = 36x - 18,$ $v = 6y - 6$
(4.10)	$2\binom{x}{3} = \binom{y}{2} + k$	$u^2 = v^3 - 36v - 81(8k-1)$	$u = 18y - 9,$ $v = 6x - 6$
(4.11)	$2\binom{x}{3} = \binom{y}{4} + k$	$u^2 = v^3 - 64v - 64(24k+1)$	$u = 2(2y-3)^2 - 10,$ $v = 8x - 8$
(4.12)	$2\binom{x}{4} = \binom{y}{3} + k$	$u^2 = v^3 - 64v + 256(12k+1)$	$u = 4(2x-3)^2 - 20,$ $v = 8y - 8$
(4.13)	$2\binom{x}{2} = \binom{y}{6} + k$	$u^2 = v^3 - 302400v +$ $4320000(972k + 235)$	$u = 64800x - 32400$, $v = 45(2y-5)^2 - 525$
(4.14)	$2\binom{x}{6} = \binom{y}{2} + k$	$u^2 = v^3 - 302400v -$ $1080000(1944k - 211)$	$u = 32400y - 16200,$ $v = 45(2x-5)^2 - 525$
(4.15)	$2\binom{x}{4} = \binom{y}{6} + k$	$u^2 = v^3 - 33600v +$ $160000(972k + 73)$	$u = 900(2x-3)^2 -$ $- 4500,$ $v = 15(2y-5) - 175$
(4.16)	$2\binom{x}{6} = \binom{y}{4} + k$	$u^2 = v^3 - 33600v -$ $40000(1944k - 49)$	$u = 450(2y-3)^2 -$ $- 2250,$ $v = 15(2x-5)^2 - 175$

Table 4.1

Theorem 4.2. *Let k be an integer with $0 \leq k \leq 10$. Then all the solutions $(x, y) \in \mathbb{N}^2, x \geq m, y \geq n$ of the eight equations $(4.9) - (4.16)$ occurring in Table 4.1 are listed in the following Tables $4.2 - 4.9$. (We indicate only those values of k for which there is at least one solution.)*

(4.9)	$2\binom{x}{2} = \binom{y}{3} + k$
k	(x, y)
0	(85,36), (5,6), (8,8), (1190,205)
1	(2,3), (970,179)
2	(158,54), (167,56), (25482929,157357), (4,5), (37,21), (3,4), (1234,210)
5	(3,3)
6	(743,150), (758,152), (2530912508,3374701), (61,29), (10,9)
7	(7,7), (5209,547), (22,15)
8	(4,4)
10	(195,62), (71,32), (5,5), (6,6), (360311,9202), (5866,592)

Table 4.2

(4.10)	$2\binom{x}{3} = \binom{y}{2} + k$
k	(x, y)
1	(3,2)
2	(20,68), (4,4)
4	(6,9), (7,12), (590,11672)
5	(4,3), (90,686), (5,6), (12,30), (11,26), (166,1731)
7	(4,2), (15,43), (8,15)
9	(10,22)
10	(5,5)

Table 4.3

(4.11)	$2\binom{x}{3} = \binom{y}{4} + k$
k	(x, y)
0	(7,8), (11,11)
1	(3,4)
3	(4,5)
5	(5,6), (6,7)
7	(4,4)

Table 4.4

(4.12)	$2\binom{x}{4} = \binom{y}{3} + k$
k	(x, y)
0	(5,5)
1	(4,3)
6	(5,4)
9	(5,3)
10	(6,6)

Table 4.5

(4.13)	$2\binom{x}{2} = \binom{y}{6} + k$
k	(x, y)
0	(15,10), (22,11)
1	(2,6)
2	(90,16), (6,8)
5	(3,6), (4,7)
6	(10,9), (31,12), (42,13)

Table 4.6

(4.14)	$2\binom{x}{6} = \binom{y}{2} + k$
k	(x, y)
0	(18,273)
1	(6,2), (8,11)
4	(7,5)
8	(7,4)

Table 4.7

(4.15)	$2\binom{x}{4} = \binom{y}{6} + k$
k	(x, y)
1	(4,6)
2	(6,8)
3	(5,7)
9	(5,6)

Table 4.8

(4.16)	$2\binom{x}{6} = \binom{y}{4} + k$
k	(x, y)
1	(6,4)
9	(7,5)

Table 4.9

REFERENCES

[1] E. T. Avanesov, *Solution of a problem on figurate numbers (in Russian)*, Acta Arith. **12** (1966/1967), 409-420.

[2] R. M. Avanzi, U. M. Zannier, *Genus one curves defined by separated variable polynomials and a polynomial Pell equation*, Acta Arith. **99** (2001), 227-256.

[3] A. Baker, *Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation*, Proc. Camb. Phil. Soc. **65** (1969), 439-444.

[4] M. A. Bennett, K. Győry and Á. Pintér, *On the diophantine equation* $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^n$, Compositio Math. **140** (2004), 1417-1431.

[5] F. Beukers, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *Irreducibility of polynomials and arithmetic progressions with equal products of terms*, in : 'Number Theory in Progress' (K. Győry, H. Iwaniec and J. Urbanowicz, eds.), Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1999, 11-26.

[6] Y. F. Bilu, B. Brindza, P. Kirschenhofer, Á. Pintér and R. F. Tichy (with an appendix by A. Schinzel), *Diophantine equations and Bernoulli polynomials*, Compositio Math. **131** (2002), 173-188.

[7] Y. F. Bilu, R. F. Tichy, *The diophantine equation* $f(x) = g(y)$, Acta Arith. **95** (2000), 261-288.

[8] D. W. Boyd, H. H. Kisilevsky, *The Diophantine equation* $u(u+1)(u+2)(u+3) = v(v+1)(v+2)$, Pacific J. Math. **40** (1972), 23-32.

[9] B. Brindza, *On some generalizations of the diophantine equation* $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^z$, Acta Arith. **44** (1984), 99-107.

[10] B. Brindza, *On S-integral solutions of the equation* $y^m = f(x)$, Acta. Math. Hung. **44** (1984), 133-139.

[11] B. Brindza, *On a Special Superelliptic Equation*, Publ. Math. Debrecen **39** (1991), 159-162.

[12] B. Brindza, Á. Pintér, *On equal values of power sums*, Acta Arith. **77** (1996), 97-101.

[13] B. Brindza, Á. Pintér, *On the number of solutions of the equation* $1^k + 2^k + \ldots + (x-1)^k = y^z$, Publ. Math. Debrecen **56** (2000), 271-277.

[14] J. H. E. Cohn, *The diophantine equation* $y(y+1)(y+2)(y+3) = 2x(x+1)(x+2)(x+3)$, Pacific J. Math. **37** (1971) 331-335.

[15] H. Davenport, D. J. Lewis, A. Schinzel, *Equations of the form* $f(x) = g(y)$, Quart. J. Math. Oxford **12** (1961), 304-312.

[16] K. Dilcher, *On a diophantine equation involving quadratic characters*, Compositio Math. **57** (1986), 383-403.

[17] G. Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), 349-366.

[18] M. Fried, *On a theorem of Ritt and related Diophantine problems*, J. Reine Angew. Math. **264** (1973), 40-55.

[19] M. Fried, *Variables separated polynomials, the genus 0 problem and moduli spaces*, in : 'Number Theory in Progress' (K. Győry, H. Iwaniec and J. Urbanowicz, eds.), Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1999, 169-228.

[20] J. Gebel, A. Pethő and H. G. Zimmer, *Computing integral points on elliptic curves*, Acta Arith. **68** (1994), 171–192.

[21] K. Győry, Á. Pintér, *On the equation* $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^n$, Publ. Math. Debrecen **62** (2003), 403-414.

[22] K. Győry, R. Tijdeman and M. Voorhoeve, *On the equation* $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^z$, Acta Arith. **37** (1980), 233-240.

[23] L. Hajdu, Á. Pintér, *Combinatorial Diophantine equations*, Publ. Math. Debrecen **56** (2000), 391-403.

[24] M. Jacobson, Á. Pintér and P. G. Walsh, *A computational approach for solving* $1^k + 2^k + \ldots + x^k = y^2$, Math. Comp. **72** (2003), 2099-2110.

[25] H. Kano, *On the equation* $s\left(1^k + 2^k + \ldots + x^k\right) + r = by^z$, Tokyo J. Math. **13** (1990), 441-448.

[26] P. Kiss, *On the number of solutions of the diophantine equation* $\binom{x}{p} = \binom{y}{2}$, Fibonacci Quart. **26** (1988), 127-130.

[27] M. Kulkarni, B. Sury, *On the diophantine equation* $x\,(x+1)\cdots(x+(m-1)) = g(y)$, Indag. Math. (N. S.) **14** (2003), 35-44.

[28] R. A. MacLeod, I. Barrodale, *On equal products of consecutive integers*, Canad. Math. Bull. **13** (1970), 255-259.

[29] L. J. Mordell, *On the integer solutions of* $y(y+1) = x(x+1)(x+2)$, Pacific J. Math. **13** (1963), 1347-1351.

[30] Yuan Ping-Zhi, *On a special diophantine equation* $a\binom{x}{n} = by^r + c$, Publ. Math. Debrecen **44** (1994), 137-143.

[31] Á. Pintér, *A note on the Diophantine equation* $\binom{x}{4} = \binom{y}{2}$, Publ. Math. Debrecen **47** (1995), 411-415.

[32] Á. Pintér, *A note on the equation* $1^k + 2^k + \ldots + (x-1)^k = y^m$, Indag. Math. (N. S.) **8** (1997), 119-123.

[33] Cs. Rakaczki *Binomial coefficients in arithmetic progressions*, Publ. Math. **57** / 3-4, (2000), 547-558.

[34] Cs. Rakaczki, *On the diophantine equation* $x(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y(y-1)\cdots y-(m-1)) + l$, Acta Arith. **110.4** (2003), 339-360.

[35] Cs. Rakaczki, *On the diophantine equation* $F\left(\binom{x}{n}\right) = b\binom{y}{m}$, Periodica Math. Hung. **49(2)**, (2004), 119-132.

[36] Cs. Rakaczki, *On the Diophantine equation* $S_m(x) = g(y)$, Publ. Math. **65**, (2004), 439-460.

[37] C. Runge, *Über ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen*, J. Reine Angew. Math., **100** (1887), 425-435.

[38] N. Saradha, T. N. Shorey, *On the ratio of two blocks of consecutive integers*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **100** (1990), 107-132.

[39] N. Saradha, T. N. Shorey, *The equations* $(x+1)\cdots(x+k) = (y+1)\cdots(y+mk)$ *with* $m = 3, 4$, Indag. Math. (N.S.) **2** (1991), 489-510.

[40] N. Saradha, T. N. Shorey, *On the equation* $x\,(x+d_1)\cdots(x+(k-1)\,d_1) = y\,(y+d_2)\cdots(y+(mk-1)\,d_2)$, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **104** (1994), 1-12.

[41] N. Saradha, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *On arithmetic progressions with equal products*, Acta Arith. **68** (1994), 89-100.

[42] N. Saradha, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *On values of a polynomial at arithmetic progressions with equal products*, Acta Arith. **72** (1995), 67-76.

[43] N. Saradha, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *On the equation* $x\,(x+1)\cdots(x+(k-1)) = y\,(y+d)\cdots(y+(mk-1)\,d)\,, m = 1, 2$, Acta Arith. **71** (1995), 181-196.

[44] N. Saradha, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *On arithmetic progressions of equal lengths with equal products*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **117** (1995), 193-201.

[45] J. J. Schäffer, *The equation* $1^p + 2^p + \ldots + n^p = m^q$, Acta Math. **95** (1956), 155-189.

[46] A. Schinzel, *Selected Topics on Polynomials*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1982.

[47] T. N. Shorey, *Exponential Diophantine equations involving products of consecutive integers and related equations*, Number Theory, 463-495, Trends Math. Birkhäuser, Basel, 2000.

[48] C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximation*, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1929, Nr. 1, 70 pp. Gesammelte Abhandlungen, vol. I, 209-266. Springer, Berlin 1966.

[49] SIMATH, *Manual*, Saarbrücken 1993.

[50] Th. Stoll, R. F. Tichy, *The Diophantine equation* $\alpha\binom{x}{m} + \beta\binom{y}{n} = \gamma$, Publ. Math. Debrecen **64** (2004), 155-165.

[51] R. J. Stroeker, N. Tzanakis, *Solving elliptic diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms*, Acta Arith. **67** (1994), 177-196.

[52] R. J. Stroeker, B. M. M. de Weger, *Elliptic binomial Diophantine equations*, Math. Comp. **68** (1999), 1257-1281.

[53] Sz. Tengely, *On the diophantine equation F(x)=G(y)*, Acta. Arith. **110** (2003), 185-200.

[54] Sz. Tengely, *Effective Method for Diophantine Equation*, Ph.D dissertation (2004).

[55] J. Urbanowicz, *On the equation* $f(1)1^k + f(2)2^k + \ldots + f(x)x^k + R(x) = by^z$, Acta Arith. **51** (1988), 349-368.

[56] J. Urbanowicz, *On diophantine equations involving sums of powers with quadratic characters as coefficients I.*, Compositio Math. **92** (1994), 249-271.

[57] J. Urbanowicz, *On diophantine equations involving sums of powers with quadratic characters as coefficients II.*, Compositio Math. **102** (1996), 125-140.

[58] M. Voorhoeve, K. Győry and R. Tijdeman, *On the diophantine equation* $1^k + 2^k + \ldots + x^k + R(x) = y^z$, Acta Math. **143** (1979), 1-8; Corr. **159** (1987), 151-152.

[59] B. M. M. de Weger, *A binomial diophantine equation*, Quart. J. Math. Oxford II. Ser. **47** (1996), 221-231.

[60] B. M. M. de Weger, *Equal binomial coefficients: Some elementary considerations*, J. Number Theory **63** (1997), 373-386.

List of publications of the author

1. Cs. Rakaczki, *Binomial coefficients in arithmetic progressions*, Publ. Math. Debrecen **57** / 3-4, (2000), 547-558.

2. Cs. Rakaczki, *On the diophantine equation* $x(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y(y-1)\cdots(y-(m-1))+k$, Acta Arith. **110.4** (2003), 339-360.

3. Cs. Rakaczki and Á.Száz, *Semicontinuity and closedness properties of relations in relator spaces*, Mathematica (Cluj)-Tome, **45(68)**, (2003), 73-92.

4. Cs. Rakaczki, *On the diophantine equation* $F\left(\binom{x}{n}\right) = b\binom{y}{m}$, Periodica Math. Hung. **49(2)**, (2004), 119-132.

5. Cs. Rakaczki, *On the Diophantine equation* $S_m(x) = g(y)$, Publ. Math. Debrecen **65** / 3-4, (2004), 439-460.

6. Cs. Rakaczki and Sz. Tengely, *Binomial coefficients in linear recurrence sequences*, (in preparation).

7. E. Herrmann, Á. Pintér and Cs. Rakaczki, *On Mordell's equation*, (in preparation).

List of talks given by the author

1. On some combinatorial diophantine equations, 14th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Liptovský Ján, September 6-10, 1999.

2. On some diophantine equations connected with binomial coefficients, Colloquium on Number Theory in honor of the 60th birthday of Professors Kálmán Győry and András Sárközy, Debrecen, July 2-7, 2000.

3. Some diophantine equations related to binomial coefficients, 15th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Ostravice, September 3-8, 2001.

4. On the diophantine equation $x(x-1)\cdots(x-(m-1)) = \lambda y(y-1)\cdots(y-(n-1)) + k$, Explicit Algebraic Number Theory: NWO-OTKA workshop, Leiden, September 27-October 2, 2002.

5. Kombinatorikus diofantikus egyenletekről, Kiss Péter, az egri és debreceni számelmélész. Számelméleti tudományos emlékülés, Eger 2002. november 22-23.

6. On the diophantine equation $F\left(\binom{x}{n}\right) = b\binom{y}{m}$, 16th Czech and Slovak Number Theory Conference, Bratislava, June 30-July 4, 2003.

7. On the diophantine equation $F\left(\binom{x}{n}\right) = b\binom{y}{m}$, Diophantine Approximation: NWO-OTKA workshop, Leiden, July 28- August 2, 2003.

8. Binomiális együtthatókkal és hatványösszegekkel kapcsolatos diofantikus eredmények. Soproni Diofantikus Nap, Sopron 2004. október 9.