

DOKTORI (PHD) ÉRTEKEZÉS

*A matematika
informális háttere*

Málik József Zoltán



DEBRECENI EGYETEM

BTK

2010

A MATEMATIKA INFORMÁLIS HÁTTERE

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
filozófia tudományágban.

Írta: *Dr. Málík József Zoltán* okleveles filozófus.

Készült a Debreceni Egyetem
Humán Tudományok Doktori Iskolája
Modern filozófia programja keretében.

Témavezető: *Dr. Mihálydeák Tamás*

.....
a témavezető aláírása

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr.....

tagok: Dr.....

Dr.....

A doktori szigorlat időpontja: 2010.....

Az értekezés bírálói:

Dr.....

Dr.....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.....

tagok: Dr.....

Dr.....

Dr.

Dr.

A nyilvános vita időpontja: 2010.

Én, Dr. Málik József Zoltán teljes felelősségem tudatában kijelentem, hogy a benyújtott értekezés a szerzői jog nemzetközi normáinak tiszteletben tartásával készült. Jelen értekezést korábban más intézményben nem nyújtottam be és azt nem utasították el.

.....
jelölt

Semmiben sem vagyok olyan bizonyos, mint a szív szenvedélyeinek és a Képzelet igazságának szentségében... Amit a Képzelet Szépségként fog fel, az igazzá is válik. A Képzelet Ádám álmához hasonlatos. Felébredt és úgy találta, hogy álma valóra vált.

JOHN KEATS

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ	6
1. A MATEMATIKAI MODELLÁLÁS ELŐFELTEVÉSEI.....	12
2. A LOGIKAI RENDSZEREK SZEREPE A MATEMATIKÁBAN	30
2.1. A NYELVBÁZIS.....	31
2.1.1. GÖDEL ÉS TARSKI TÉTELE.....	35
2.1.2. A NYELVBÁZISON ÉRTELMEZETT SZINTAKTIKAI FOGALMAK.....	37
2.1.3. ELSŐRENDŰ FORMÁLIS NYELVEK, LOGIKAI RENDSZEREK.....	38
2.2. LOGICIZMUS	41
2.3. A TRADICIONÁLIS LOGIKÁVAL SZEMBENI NÉHÁNY TOVÁBBI KIHÍVÁSRÓL	56
3. A MATEMATIKAI IGAZSÁG FILOZÓFIAI PROBLÉMÁI	61
3.1. AZ IGAZSÁG KORRESPONDENCIA-ELMÉLETE	62
3.2. AZ IGAZSÁG KOHERENCIAELMÉLETE	70
3.3. A MATEMATIKA REJTŐZKÖDŐ IGAZSÁGA	71
3.4. GÖDEL, CHURCH ÉS CHAITIN TÉTELÉNEK KÓDOLT ÜZENETE	77
4. A MATEMATIKAI DEFINÍCIÓ ÉS BIZONYÍTÁS.....	87
4.1. A FOGALOMHASZNÁLAT KLASSZIKUS ÉRTELMEZÉSE	88
4.2. MI A BIZONYÍTÁS?	93
4.3. BIZONYÍTÁS-GENERÁLT FOGALOMHASZNÁLAT	99
4.4. A GEOMETRIA MINT A TÉR EPISZTEMIKUS REPREZENTÁCIÓJA.....	102
4.5. FIZIKA ÉS GEOMETRIA – A NEWTONI ÉS EINSTEINI PARADIGMA	109
5. MATEMATIKAI PLATONIZMUS ÉS KONSTRUKTIVIZMUS.....	126
6. A MATEMATIKA „ARCHAIKUS” PROBLÉMÁI ÉS AZ ÉLŐ MATEMATIKA.....	146
BIBLIOGRÁFIA	183

Előszó

A matematika alapjainak vizsgálata, a matematika filozófiája mint szakfilozófia, amibe ez a mű besorolható, filozófiai megfontolásokon alapuló feltevéseket és elméleteket fogalmaz meg a matematikai szemléletről és objektumokról, a matematikai igazságról és bizonyításról, végül is a matematika kifejezőerejéről és korlátairól, hogy azután ezeket tesztelje matematikai eszközökkel. Az emberiség intellektuális történetében a matematika sajátos szerepet tölt be. Saját szabályrendszert alakított ki a gondolkodásra, amely révén bizonyított állításokat fogalmaz meg. Ennek első mesterműve volt Euklidész *Elemek* című munkája.

Már e mű definíciót és tételeit tanulmányozva is, felvethető a kérdés: mi a kapcsolat a pre-analitikus fogalmakkal rendelkező informális matematika és a definíciókkal, valamint szakmai axiómákkal dolgozó matematikai elméletek között? Ez a dolgozat arra tesz kísérletet, hogy a matematika informális háttérének megvilágításával, ezt a kérdést megválaszolja.

Az informális háttérben döntések születnek, amelyek előfeltevéseikkel beépülnek a matematika elméleteibe. Úgy tűnik, hogy a létezés és a kontinuitás filozófiai problémái a matematikai gondolkodást is megterhelik. Már a görögök szembekerültek ezzel a problémával. Geometriai szemléletük szerint, létezés az, amikor a dolgok formát öltenek, határuk lesz, és így mérhetők lesznek. Mármint, Euklidész a vonalat úgy definiálja, mint ami kiterjedés nélküli pontokból áll. A vonalnak van mérete – a hossza. Tehát, hogy pontokból vonal legyen, végtelen sok pont kell. De hogyan lehet egy nem-létezőből valami létezőt kapni? A kiterjedés nélküli, vagyis nem-létező pont semmi vagy valami? S ha semmi, akkor hogyan kaphatunk valamit, a vonalat? Általánosabb formában, felvethető az előbbi probléma az ellenkező irányból is, ami a kontinuitás problémájához vezet: vajon a teret (és az időt) korlátlanul oszthatónak, vagy pedig tovább nem osztható kisebb „atomokból” állónak képzeljük-e el? Zénón apóriákkal próbálta kimutatni, hogy mind az egyik, mind a másik feltételezés ellentmondáshoz vezet.

A létezés és folytonosság problémájához kapcsolódva, a matematikai gondolkodásnak van három permanens „archaikus” problémája: az irracionális mennyiségek, a végtelen és az önreferencia problémája. Az antik matematika számára az irracionális mennyiségek kezelése komoly gondot, az antik filozófia számára a végtelen problémája kihívást jelentett. Az előbbit a Püthagoreusok egyenesen kimondhatatlannak nevezték el, az utóbbinak a következménye az lett, hogy a XIX. század végéig a matematikát az arisztotelészi „*infinitum actu non datur*” elve vezérelte. Az aktuális végtelen tabuját azonban fel kellett adni a matematikában, mivel a fizika és matematika területén egyszerre jelentkező igény, hogy a végtelen kis változásokat és az ezzel összefüggő határátmenetet kezelhessék, ezt követelte meg. A Newton és Leibniz által kidolgozott függvény-kalkulus a természettudomány rendkívül hatékony eszközének bizonyult, azonban alkalmazott alapfogalmát, az infinitezimálist nem lehetett kifogástalanul használni. Kiváló matematikusok (Cauchy, Heine, Weierstrass) hosszú erőfeszítésére volt szükség, hogy a határérték fogalmát tisztázzák, ám csak a végtelen halmazok Cantor-féle elméletében nyert egzakt megalapozást.

Azonban nehézségeink a halmazelméletben fennmaradtak. Az irracionális mennyiségek problémája a kontinuum-hipotézisben, a végtelen problémája a Skolem-paradoxonban köszön vissza. Ha eldönthetetlen kérdés, hogy a valós számok „hézagmentesen” helyezkednek-e el a számegyenesen, akkor végül is nem mondható szilárdnak az alap, amelyen bizonyítható a szabályos sorozatok határértékének egzisztenciája és a kontinuum folytonosságára vonatkozó állítások. A végtelenség fogalma szétfeszíti a létezés intuitív felfogását. A létezés egyik kritériuma lehet a koherencia elve: mindaz, ami belsőleg nem ellentmondásos, létezik. Egy másik – a „naiv realizmus” szellemében fogant – kritérium: a konstruktivitás. A Skolem-paradoxon kérdése, hogyan férhet el nemmegszámlálható halmazok rendszere egy modell megszámlálható tartományán, mindkét kritériumot megfojtja.

Alig pár évvel Cantor megoldása után, ami az aktuális végtelent visszahozta a matematikába, olyan paradoxonokat mutattak ki, amiket a halmazelméletből száműzni nem, csak kizárni lehet. A megarai iskola paradoxona hívta

életre az önreferencia problémáját, amelynek háttérében olyan kifejezéseket találunk, amelyek önmagukra utalnak vissza. Ez a probléma a halmazelméletben is feltűnik: vajon önmagának az eleme-e az összes olyan halmazoknak a halmaza, amelyek nem elemei önmaguknak? A kézenfekvő válasz, hogy akkor és csak akkor eleme önmagának, ha nem eleme önmagának. Az önreferencia jelenségének alkalmazása rejlik Gödel tételének háttérében is, amelyben kimutatta, hogy a matematikai elméletek nem lehetnek zárt rendszerek, mivel ilyen rendszer alapjai igazolhatatlanok a rendszerben.

Révén, hogy az igazság fogalma nem hozzáférhető, ezért a matematika informális háttérét nem statikusan, hanem – Lakatos Imre „bizonyítások és cáfolatok” módszerét használva – dinamikusan kezeljük. Kiindulási pontunk az informális háttér, amelyből fogalmak és levezetések generálódnak. Új tételek, elméletek jönnek létre, amelyek azonban nem kőbe vésettek, mivel fogalmaik és bizonyításaik sem azok. Az elmélet fogalmainak jelentése a nyelven kívül, kognitív úton körvonalazódik, az elmélet alkalmazásában ölt testet, majd visszahat a nyelven kívüli, informális háttérre. S ez az oda-visszafelé történő mozgás folyik szüntelen: ez az „élő matematika”. A „bizonyítások és cáfolatok” módszere egy olyan episztemiológiai pozíciót képvisel, amelynek centrális jelentősége, hogy a matematikát fejlődésében vizsgálja. A fogalmak formálódnak és a bizonyításaik hozzá igazodnak. Tehát nincsenek statikus fogalmak a matematikai elméletekben, és így a matematika nem lehet univerzális kommunikációs és logikai eszköz arra, hogy „a természet nagy könyvét” megírják vele.

A 4. fejezetben tárgyalt „tér” vizsgálata jól illusztrálja ezt. A matematikában a „tér” a struktúrák egyik típusa, amelyet környezetrendszerrel vagy vele ekvivalens nyílt halmazok rendszerével jellemezhetünk. Az így nyert formális térstruktúrát *topológiának* nevezzük, amelynek elemi alkotórészét, a pontot, definiálatlan alapfogalomként kezeli a topológia. Végül is bármilyen halmaz felruházzható topológikus struktúrával. A mi valóságos terünk szintén topológikus struktúra, azonban e térnek nemcsak az alapszerkezete, de e szerkezetet hordozó halmaz is empirikus jelentéssel bír, amik a fizikai tér fogalmának egzisztencia-előfeltevéseiként tekinthetők. Ez a térfogalom soha

nem lehet befejezett, mivel a térben lévő fizikai test jellemzői (anyag, hely, idő, mozgás) a világ minden lényeges vonásában megnyilvánulnak és kapcsolatban vannak. Megmutatható, hogy a geometria axiómaiba bevitt egzisztencia-előfeltevések és a fizikai elméletek explicite, posztulátumokban kifejezett egzisztencia-előfeltevései úgy hathatnak egymásra, hogy a világ eseményeinek izomorf episztemikus reprezentációihoz jutunk. Ugyanakkor a fizikai elméletek egzisztencia-előfeltevései által karakterizált világképek nyilvánvalóan inkompatibilisek. A fizikusok ezért kénytelenek megrostálni a különböző interpretációkat, de ezek szükségszerűen olyan kritériumok alapján történnek, amik az elméletek szempontjából exogén elemet is tartalmaznak. Ezek nem evidenciák, hanem az elmélet informális háttéréből származó, koherensnek mutakozó, magyarázó tények.

A folytonos és diszkrét matematikai struktúrák egymáshoz való viszonyának kényes problémája, ami az antikvitás óta fennáll a matematikában, mára, mint a matematika két egymás mellett élő programja gyökeresedett meg: a matematika tradicionális (platonista) és konstruktív programja. A matematika objektumait, az alkalmazott matematikai és logikai módszereket két különböző módon is kezelhetjük, ami például megnyilvánul abban, hogy számos matematikai tételnek létezik egzisztenciális és konstruktív bizonyítása. Az 5. fejezetben bemutatunk egy – Gödel, Tarski és Lakatos gondolatait ötvöző – tételt, amely alapján úgy tűnik, hogy a matematika számos szempontja, így a matematikai objektumok, matematikai és logikai módszerek, az algoritmuselmélet alaptézise (Church tézis), de még az elsőrendű logika adekvátsága is – Quine szavaival élve – ontológia-függő. Ez azt jelenti, hogy a „koherens matematikai tudás” feltétele mellett, bizonyos szempontok nem tarthatók fent anélkül, hogy egy matematikus ne tisztázza magáról, legalább a matematikai és logikai módszereket illetően, hogy platonista vagy konstruktivista. Ugyanakkor, példákat mutatunk, hogy ezzel paradoxonok zsákutcájába jut intuíciónk, és megkérdőjelezhető, hogy a kiindulásként vett definíciókat és szakmai axiómákat tényleg igaznak vehetjük-e.

Az ellentmondások feloldására, a „bizonyítások és cáfolatok” módszere mellett, egy formálódó metafizikai szemléletre teszünk javaslatot. Egy mate-

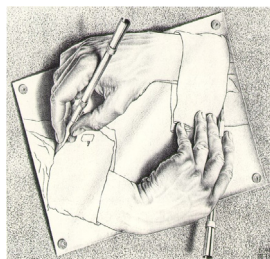
matikai elmélet megragadható mentális-nyelvi konstrukcióként, és ez a konstrukció korlátozott és ontológiailag elkötelezett. Ezért a világ azon része, amit megszólítunk elméleteinkkel emberarcú lesz, amit pedig nem, rejtetten – például paradoxonok álruhájában – misztikumként jelenik meg „megszólított” világunkban.

Ez a misztikum egyrészt értelmezhető a kanti magánvalóként (*Ding an sich*) [dualista metafizikai interpretáció]. Értelmezhető ugyanakkor úgy is, mint egy komplexus, amelynek minden egyes alkotórésze (*Gestalt*) meghatározott módon viszonyul egymáshoz, és amelyek fogalmaik (Wittgeinstein) vagy formáik (Spencer Brown) révén kiszakítottak az egészből [monista metafizikai interpretáció]. Ebben a felfogásban az „élő matematika” egy potenciálisan végtelen, autopoetikus rendszer, amelyben tükröződik az is, ami kívül esik rajta (pl. „nem szándékolt” interpretációk, paradoxonok).

A dualista szemlélet a matematikai ihletet a matematikus szellemi tevékenységének tartja, ezért a kivételek és az antinómiák kezelésére „kivételkizáró” módszert és leszűkítéseket alkalmaz a problémamegoldás és formalizálás során. A monista szemlélet a „bizonyítások és cáfolatok” módszerét használva, állandóan „benne van” a problémában a problémamegoldás során. Számára egy axiomatikus rendszer kontingens: nem fejez ki logikai szükségszerűséget, mégis úgy működik, mintha valami szükségszerűséggel bírna. A matematika formális rendszereinek nincs szüksége egzisztencia-feltevésre, mert megfelelően előkészített formális rendszer automatikusan termeli komplex formáit. A rendszert nem lehet evidenciával vagy bizonyítással alátámasztani, de megcáfolni sem, mert ezek nem csak az igazolás, hanem az érvelés feltételeit is jelentik. Azonban éppen itt érhetők tetten informális egzisztencia-előfeltevések, amelyeken a formális konstrukció alapul, és ami leválaszthatatlan az informális háttérrel, amibe – Putnam szavaival – a matematika „noumenális jószágai” is beletartoznak.

A matematikus a platonizmus-konstruktivizmus dilemmájába kerül, mert az elméleten belül konstruktivista, az elméleten kívül platonista módon kénytelen szemlélni a tárgyát, és a paradoxonok jelzik, ha átlépi a határt. A matematika olyan önfejlődő rendszer, amelyet tartalom, forma és viszony jellemez, és

ami túlnövi bármely alkotójának képzeletét.



1. A matematikai modellálás előfeltételei

A matematikát formális tudománynak és a deduktív módszer mintaképének tekintik. Euklidész műve nagy hatást gyakorolt a későbbi korokra és többen tettek kísérletet, hogy a saját területüket (analitikus mechanika, spinozai etika, walrasi piaci modell) ilyen elegáns módon mutassák be. A metamatematikai vizsgálatok háttere is mindig valamely formális elmélet, amely biztosítja a tárgyalás általánosságát és koherenciáját. Ezek az elméletek bizonyos **A** szakmai axiómákból indulnak ki, amelyek rögzítik azokat az alapszabályokat, amelyeket bizonyos típusú problémák megoldására felhasználhatunk. A szóban forgó problémák a következő alakúak. Adva van egy **T** állítás, amely az **A** axiómarendszer alapfogalmai, továbbá a formális elméletben explicált fogalmak segítségével megfogalmazható; és azt kérdezzük, igaz-e a **T** állítás vagy sem. Az **A** axiómarendszer helyességében olyan értelemben megbízunk, hogy a szóban forgó problémát megoldottnak tekintjük, akár a **T** állítást, akár kontradiktórikus tagadását, a **T^c** állítást sikerül bizonyítani, az **A** axiómáiból kiindulva, az ott megengedett következtetésmódok véges számú felhasználásával. Az első esetben azt mondjuk, a probléma megoldása az, hogy **T** igaz, míg a második esetben, hogy a **T** állítás hamis.

A matematika formális elméleteiben a logikai rendszer és a szakmai axiómák együtt adják azt az épületet, amibe a gyakorló matematikus belép, hogy ott valamilyen konkrét problémát végiggondoljon. A gyakorló matematikus használja a formális elmélet szabályait, nem léphet ki a ház falai közül, azonban magára a szakmai axiómákra nem szükséges reflektálnia. A gyerekek már elemi iskolában foglalkozhatnak aritmetikai vagy geometriai problémákkal anélkül, hogy tisztában lennének a Peano-axiómákkal vagy az elemi geometria valamely axiómarendszerével.

A szimbolikus logika az a terület, amely a következtetésmódok formális szabályaival foglalkozik; a „formális” szó itt arra utal, hogy nem az állítások jelentése, hanem szerkezetük érdekel bennünket, és az, hogy igazak-e. A logika ezért a matematikai vizsgálatok egy igen kifinomult eszköze, habarcsa és állványzata lehet a matematikai elméletek épületének, de (ahogy erre később rámutatunk) nem lehet – a russeli értelemben vett – pillére, mivel a szakmai axiómák egzisztencia-előfeltevéseitől nem tekinthetünk el.

A logikában a következtetések elsősorban állítások közötti viszony, az állítások információtartalmához hozzáférni azonban csak a természetes nyelv kijelentő mondatain keresztül tudunk. A kijelentő mondatok szerkezetében jelen lévő bizonyos, az információtartalomra releváns sajátosságok, az állítás logikai jellemzői is. A természetes nyelvi struktúráknak szemantikai szerepük van, és amennyiben ezek nem specifikusak, hanem (a kompozicionalitási elv szellemében) univerzálisak, akkor logikai elemzés tárgyává tehetők. Mivel a logikai törvényszerűségek a logikai szerkezetre és a szerkezet állványzataként megjelenő, logikai szavak jelentésére alapozódnak, így a logikai vizsgálatokhoz elengedhetetlen egy olyan eszköz megkonstruálása, amely megjeleníti a szerkezeti sajátosságokat. Ez az eszköz egy olyan formális nyelv, amely a nem logikai alkatrészek sajátosságaiból, pusztán kategóriájukat veszi figyelembe.

Az így nyert formális nyelv és a formális (matematikai) elméletek közötti viszony a következő. Formális elméleteken egy olyan $\langle L, A \rangle$ párt értünk, ahol L egy logikai rendszer: ez az elmélet formális nyelvét, továbbá egy ehhez adekvátan definiált következmény-relációt jelent, míg A az elmélet szakmai axiómái (és egyúttal a logikai rendszer zárt formulái). A szakmai axiómák és a logikai rendszer között finom kapcsolat van. Az axiómák megfogalmazása függ az elmélet logikai rendszerétől, amely strukturálisan megjeleníti őket. Ez azt jelenti, hogy a matematikai elméletekben két oldalról is korlátozzuk magunkat: egyrészt az axiómák egzisztencia-előfeltevései révén, másrészt az alkalmazott logikai rendszeren keresztül.

A természetes nyelv egyik alapfunkciója az információközlés. A nyelv e feladatának nyilván csak akkor tud eleget tenni, ha legalább bizonyos kifejezései kapcsolatban vannak a nyelven kívüli világgal. A logika atyjának tekinthető Arisztotelész is felismerte már mindezt. Így például az *Organon* című művében (elsősorban a *Kategóriákban*), egy természetes nyelvből, az ógörögből kiindulva vizsgálja a külső, nyelven kívüli világ szerkezetét. Amikor azt a kérdést feszegetjük, vajon a logikailag helyes következtetéseinknek mi az alapja, Arisztotelész ajánlata, hogy ezeket strukturális attribútumokra vezessük vissza: a világ ontikus struktúráját a kategóriák szolgáltatják. A kategóriák feszítik

ki a nyelvet és a világ azon részét, amiről beszélünk. Ebben az értelemben a világ, amiről beszélünk, ugyanolyan struktúrájú, mint a logika. Kétségtelen, hogy a logika és így a matematika is (ez utóbbihoz hozzájárulnak még a szakmai axiómák egzisztencia-kapcsolatai a világgal) nagyrészt ebből merítik realitásukat. Ez az oka annak, hogy a matematikai modellek olyan sikeresen használhatók a tudomány számtalan területén. De valahol ebben gyökerezik a modellek korlátozottsága is. Mert hát mi a kapcsolata a körülöttünk lévő világnak azzal a világgal, amiről a logikával, matematikával beszélünk?

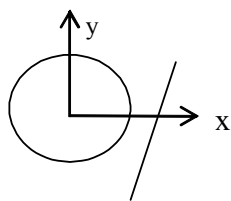
A logikai következtetés szabályait alapvetően az igazságmegőrző tulajdonsága teszi „helyessé”, hogy igaz premisszákból igaz konklúzióra vezetnek – ez az arisztotelészi elv. A korai Wittgenstein ezt az arisztotelészi tradíciót (a világ ontikus struktúráját a kategóriák szolgáltatják + arisztotelészi elv) folytatva állítja azt, hogy strukturális izomorfia van a világ tényei és a nyelvi (logikai) kijelentések között, és a *Tractatus*-ában egy ilyen nyelvi-logikai kategóriák által kicövekelte világ vízióját vázolja fel olvasójának. Mivel a premisszák és a konklúziók végül is a világ tényei, így

$$\begin{array}{ccc}
 \text{ha a premisszák igazak} & \rightarrow & \text{a konklúzió igaz} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \text{a világ tényei} & & \text{a világ ténye.}
 \end{array}$$

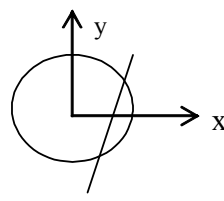
Később maga is belátta álláspontjának „szélsőségét”. A természetes nyelv misztikumával már az ősi egyiptomiak is szembesültek. A képek és szójegyek önmagukért beszélnek. A skarabeusz, a fecske vagy az eke nem kíván magyarázatot, egy-egy cselekvés ábrázolása sem okoz nehézséget. Azonban az egyiptomi nyelvben is, mint minden nyelvben, vannak szótagjegyek, amelyeknek csak hangértéke van és nem akarnak semmit sem ábrázolni (pl. névmás, prepozíciók, stb.). Ezekre az egyiptomiak egy másik azonos hangzású homonim szó jelét alkalmazták. A mutató névmás például az egyiptomiban úgy hangzott, mint a „repülés” szó, így a szavak helyébe: „ez(ek)”, „az(ok)”, a repülő madár képét írták be.

Egy másik problémát jelent a fogalmi általánosítás és szemléletesség kérdése. Ha a mindennapi embert megkérdezzük, melyik ábrán metszi az

egyenes a kört, akkor az 1. b) ábrát fogja megnevezni. A *metszésnek* ez a mindennapi jelentése, mondjuk, *lemetszek* egy darabot egy egész sajtból, ezt érti a metszés tényén, ezt tanulta elemi matematikából az iskolában is.



1. a) ábra



1. b) ábra

Egy átlagember bizonyára meglepődik, ha azt mondjuk neki: bizonyítható, hogy egy egyenes az imaginárius pontokban mindig metszi a kört; még akkor is, ha az 1. a) ábrán, a valós síkon ez nem látszik. Ez egyáltalán nem nyilvánvaló állítás. Az átlagember félreértésre gyanakszik („ez az ember nem érti a jelentését, vagy illegitim módon használja a *metszés* szót”) vagy csalásra, és joggal vár magyarázatot¹. A matematika nyelvén az „imaginárius (képzetes)” kifejezést, azért használjuk, hogy a számfogalmat kiterjesszük. A számfogalom algebrai tárgyalását a természetes számokkal kezdjük, a valós és a komplex számokon keresztül, lényegében a Frobenius tétellel zárhatjuk. Minden egyes lépést úgy lehet jellemezni, hogy az ismert struktúrából kiindulva egy újabb, általánosabb számstruktúrát képzünk, amelybe beágyazzuk a kiindulási struktúrát. Az újabb számstruktúrát csak egy izomorfizmustól eltekintve határozzuk meg egyértelműen, de ez algebrai szempontból elegendő.

Mármost hogyan írjuk le algebrailag a metszés tényét? A kör és egyenes egyenletének rendszerét kell megoldani (a szokásos jelöléssel):

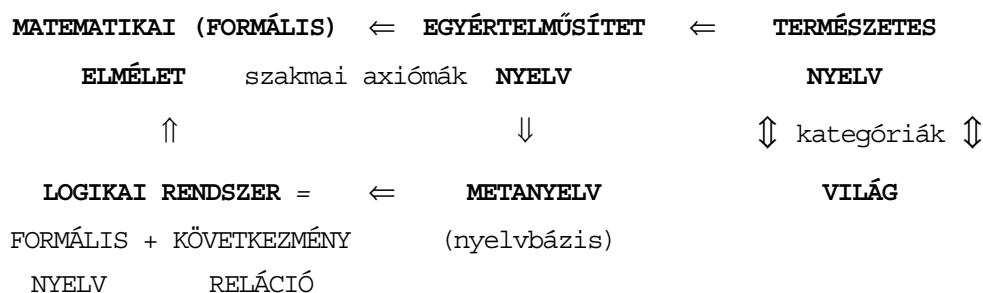
$$\begin{cases} y = mx + b \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow (m^2 + 1)x^2 + (2mb)x + (b^2 - R^2) = 0.$$

A valós sík pontjaiban az egyenes nem fogja metszeni a kört, ha az alábbi diszkrimináns feltétel teljesül: $D = R^2(m^2 + 1) - b^2 < 0$. Az általánosabb komplex síkon azonban a $D < 0$ feltétel mellett is van megoldás: metszés az imaginárius pontokban. Az 1. a) ábra egyenese a kört nem metszi valós, csak ima-

¹ A példát, a magyarázatot mellőzve, Wittgenstein említette meg a matematika alapjairól tartott 1939-es

ginárius pontokban. Most a „metszi” szót úgy használjuk, ahogy a valós síkon nem. Mindkettőt *metszésnek* nevezzük, kiegészítve egy bizonyos klauzulával: „az imaginárius pontokban”, valamint „a valós pontokban”. Ezek a klauzulák fejezik ki a két kifejezés és a metszés tényének mint a számstruktúra geometriai következményének egymástól való megkülönböztetését.

Úgy tűnik, hogy a logika által reprezentált világ és a valós világ kapcsolata fontos, a matematika fentebb említett filozófiai kérdései végül is visszavezethetők erre a problémára. Amikor a matematika modellálásának előfeltevéseit kívánjuk számba venni, hasznos foglalkoznunk azzal a kérdéssel, hogy milyen módon építünk fel matematikai elméleteket. A kérdés megválaszolásához tekintsük a következő folyamatábrát.



2. ábra

Munkahipotézisként a 2. ábra alapján próbáljuk felvázolni a matematikai elméletek megkonstruálásának folyamatát.² Kiindulási alapunk a világ és a természetes nyelv kapcsolata, valamint a világ és a nyelv struktúrájának magját adó kategóriák. Itt alkalom adódik egy ritkán szóvá tett probléma vizsgálatára: milyen alapon beszélhetünk azonos típusú nem logikai alkatrészekről, a nem logikai kifejezések kategóriáiról? Első megközelítésben azt mondhatjuk, hogy a természetes nyelv azon kifejezéseit soroljuk egy logikai kategóriába, amelyek az információközlésben ugyanolyan típusú objektumokkal vannak kapcsolatban³. A természetes nyelv esetében ez nem mindig lehetséges, nem lehet szó valódi osztályozásról, hiszen ugyanaz a természetes nyelvi kifejezés kü-

cambridge-i első előadásában (Diamond (1989a)).

² A modell alapeszméje Montague-tól (1970) származik.

³ A kategória és típus fogalmát itt szinonimként kezeljük, de megjegyezzük, hogy a kategória szintaktikai fogalom, a típusba sorolás pedig szemantikai jellegű, és logikai szempontból az egy fontos kérdés, hogy milyen típust generálnak a kategóriák.

lönböző előfordulásaiban, különböző típusú objektumokkal lehet kapcsolatban. A formális nyelv esetében azonban ilyen átfedések nem megengedettek, a jelentésrögzítés miatt. Ezért van szükségünk az egyértelműsített nyelvre, amely lehetővé teszi a természetes nyelvről formális nyelvre történő egyértelműsítést, normalizálási transzformációt: ha egy természetes nyelvi kifejezés két különböző kategóriába is beletartozik, akkor a logikai elemzés szempontjából két különböző kifejezésként kell felfognunk. Ez azonban azt is jelenti, hogy a formális nyelv különböző kategóriáival együtt számot kell adnunk a formális nyelv szemantikájáról.

A modern szimbolikus logika megalkotója, Frege tett először kísérleteket, hogy a lehetséges szintaktikai kategóriák logikai rendszerét megadja. Frege szerint, mindenekelőtt meg kell különböztetni a nyelv befejezett és hiányos kifejezéseit. A befejezett kifejezések lehetséges kategóriái közül alapvetőnek tekinti a kijelentő mondatok és az individuumnevek kategóriáját. A kijelentő mondatok kategóriáját azért tekinti alapvetőnek, mert azok mint elsődleges információhordozók szerepelnek a nyelvünkben, míg a nem mondatnyi alkotórészei izoláltan nem információhordozó egységek. Az individuumneveket pedig azért tekinti Frege befejezettnek, mert ezen kifejezések alapvető funkciója valamely individuális objektum megnevezése. Úgy tűnik, hogy az információközlésben e két kategória kifejezései alapvető szerepet játszanak. A mondatoknak, illetve neveknek azokat az alkotórészeit, amelyek önmagukban nem mondatok, illetve nem nevek, de alkatrészként részt vállalnak a hatékony információközlés alapjául szolgáló struktúrák létrehozásában, funktoroknak nevezzük. A *funktor* olyan kifejezés, amely kitöltetlen helye(ke)t tartalmaz, és amennyiben ezt a helyet megfelelően kitöltjük, végső eredményül nevet vagy mondatot kapunk. *Predikátumnak* nevezzük azt a funktort, amely névből (nevekből) mondatot képez. A matematikai elméletekben különösen fontos szerepe van az olyan funktoroknak, amelyek tulajdonságokat, relációkat és relációk tulajdonságait fejezik ki.

Minden jelentéssel bíró összetett kifejezésben a funktorok argumentumaikhoz való viszonya felfogható úgy, hogy a kifejezés (mondat vagy név) két részre osztható: egyik rész a funktor (esetleg ugyancsak összetett kifejezés),

a másik rész az argumentumok. A jelentésrögzítés tehát a formális nyelven funktor-argumentum felbontást implikál. Az egyértelműsített nyelv a mondat különböző felbontásaihoz – normalizálási transzformáció révén – különböző normalizált mondatot rendel hozzá. Példaként vegyük a *Viki sír* természetes nyelvi mondatot. Ennek kétfajta felbontása is lehet, vagyis az egyértelműsített nyelven két formája van a mondatnak:

- Ha a mondat argumentumaként a Vikit tekintem, akkor ebben az esetben a *(Viki) sír* a mondat azon formája, amikor a *(valaki) sír* funktorba a Viki nevet helyettesítettük be.
- A másik felbontás, a *Viki (sír)* esetén, a *Viki (egy adott tevékenységet végez)* funktorról beszélhetünk, amely argumentumába a sír ige helyettesítettük.

E felbonthatóságra nézve egy igen általános kritériumot fogalmaz meg a logika (ez a funkcionalitási elv egyik alkalmazása): az argumentumnak tekintett alkatrész legyen helyettesíthető más, de ugyanazon kategóriába tartozó kifejezéssel, mégpedig úgy, hogy a kimenet kategóriája változatlan maradjon. (Erre utaltunk fent a funktor üres helyeinek megfelelő kitöltésével.) E kritérium alapján lehetséges a funktorok egyfajta osztályozása, de az alaposabb vizsgálatok azt mutatják, hogy az információközlésben azonos típusú bemenettel és kimenettel rendelkező funktorok is lényegesen eltérő szerepet játszanak.

A funktorok egy árnyaltabb osztályozására van módunk, ha szemantikai megfontolásokat is tekintetbe veszünk. Szintén Frege volt az, aki felismerte, hogy a szintaktikai értelemben jólképzett egységekhez általában kétfajta szemantikai érték rendelhető. Egy kifejezés szemantikai értékével vehet részt az információközlésben. A konvencióval bevezetett tulajdonnevek kivételével, minden jól formált kifejezésnek van intenziója (jelentése). Egy név intenziója nem más, mint denotátumát meghatározó feltételek összessége. Egy mondat intenziója pedig a mondat igazságértékét meghatározó feltételek összessége. A funktor intenzióját szemantikai alapfogalomnak kell tekinteni. Egy funktort akkor értünk, ha bemenetének intenziója alapján meg tudjuk határozni kimenetének intenzióját. E megfogalmazás hallgatólagosan magába foglalja a *funkcionalitási elv* elfogadását, amely szerint a funktor intenziója és az argu-

mentumainak intenziói egyértelműen meghatározzák kimenetének intenzióját. A funkcionalitási elv a funktor logikai kezelésén túl, rávilágít a logikai szintaxis és szemantika közötti kapcsolat legfontosabb sajátosságára: valamely természetes nyelv szintaktikai kategóriáinak rendszere nem őrizhető meg változtatás nélkül a logika formalizált nyelveiben. Előfordulhat, hogy valamely természetes nyelv valamely kategóriájának kifejezései a logikai szintaxis szerint több kategóriába sorolandók és az is megtörténhet, hogy a logikai felosztás szerint egy kategóriába sorolt kifejezések a természetes nyelv két vagy több kategóriájába tartoznak.

A logikai rendszerek kiépítése során döntő szerepe van a formális nyelvhez definiált következmény-relációnak, amely alapján értelmezni tudjuk a következmény (levezethetőség) fogalmát a logikai rendszerekben, matematikai elméletekben. A logikában a következmény fogalmát kétféle módon lehet felépíteni: szemantikai és szintaktikai úton. A szemantikai felépítés menete vázlatosan a következő. Tekintsük az alábbi ábrát.



3. ábra

A felépítés központi eleme a szemantikai értékrendszer. Ezzel tudjuk definiálni a centrális szemantikai fogalmakat, köztük a szemantikai következmény-

relációt (jelben: $\models$) is. Ezért érdemes kicsit elidőznünk a szemantikai érték-

rendszer felépítésének kérdéseivel. A felépítésnek három fázisa van: az első fázis az interpretáció megadása, a második a változók értékelése, míg a harmadik fázisban a szemantikai szabályokat rögzítik. Ebben az utolsó fázisban

folyik a logikai konstansok szemantikai értékelése. Egyben azt az informális követelményt is megfogalmazza a logikai rendszerrel szemben, hogy a nyelv logikai konstansai legyenek megmagyarázhatók a természetes nyelv szavaival.

A matematikáról szóló természetes nyelvi kommunikáció igen fontos mozzanatának tűnik az igaz és hamis kijelentések egymástól való megkülönböztetése, és az igaz kijelentésekből történő következtetések levezetése a szintaktikai következmény-reláció alapján. A szemantika feladatát matematikai szempontból két törekvés jellemezi:

1. *Tarski* : az „igaz kijelentés” fogalmának definiálása, és e definíció alapján, a szemantikai következmény fogalmának bevezetése;
2. *Montague*: nem indokolt a formális és a természetes nyelv közötti lényegi különbségtétel.

Tarski az általa alkotott halmazelméleti szemantika alapfeladatát abban jelöli ki, hogy meg kell különböztetni a tárgynyelvet a metanyelvtől. Ez a megkülönböztetés egy nyelv szintaxisának elemzése szempontjából evidens, Tarski ennek jelentőségét hangsúlyozza a szemantikai vizsgálatok esetében is, azaz a tárgynyelv kijelentéseit le lehet fordítani a metanyelvre (Tarski (1935/1990)). Azonban ő még csak extenzionális logikai rendszerben gondolkodott, ami nem bizonyult elégségesnek a természetes nyelv esetén. Tanítványa, Montague ismerte fel azt, hogy a természetes nyelvet univerzális algebraként felfogva, az lefordítható egy olyan intenzionális nyelvre, amelyhez formálisan jól felépített szemantika konstruálható, és ezzel – Chomsky nyomdokain haladva – a természetes nyelv mondatai formalizálhatókká és grammatikailag elemzhetőkké válnak (Montague (1970)). Ekkor, tekintettel a matematikai modellálás 2. ábrán bemutatott folyamatára, a szemantikai interpretálás formális végrehajtásánál a következő „transzformációs” lépéseket kell tekintetbe vennünk: $M \rightarrow \mathbf{N}(M) \rightarrow \varphi(\mathbf{N}(M)) \rightarrow [\varphi(\mathbf{N}(M))]_{\text{ip}}$, ahol M : a természetes nyelv egy mondata; $\mathbf{N}(M)$: M egy normalizált formája az egyértelműsített nyelven; $\varphi(\mathbf{N}(M))$: egy logikai formula a formális nyelvben; $[\varphi(\mathbf{N}(M))]_{\text{ip}}$: a $\varphi(\mathbf{N}(M))$ formula interpretációját jelenti a logikai rendszerben.

Az interpretáció során, egy nem üres halmazzal, az ún. tárgyalási univerzummal adjuk meg az interpretációban előfordulható objektumok körét. Ez a törekvés azonban több filozófiai releváns problémát is magában rejt. Az első az, hogy vajon a világ halmazelméletileg reprezentálható-e, vagyis a világ entitásai halmazba sorolhatók-e. Vajon tényleg azok az objektumok, amiket annak tekintünk? Nem lehet esetleg más utat találni, ami a világ egy másfajta értelmezését nyújtja? Ezek nem könnyű kérdések, amelyek azt a problémát feszegetik, hogy az a mód, ahogy a logika szerint a világ van, milyen összefüggésben van azzal, ahogy a világ valójában van.

A nehézségekkel kapcsolatban nyugtalanító válaszok adhatók. Először is, logikai szempontból egy objektumról csupán annyit tudunk ontológiailag mondani, hogy i) ellentmondás nélkül állítható róla, hogy halmaz eleme-e; ii) az objektum megnevezhető. Logikailag az nem releváns kérdés, hogy milyen objektumokat fogadunk el, de az már igen, hogy ha ezeket az objektumokat elfogadjuk, akkor milyen más dolgokat kell még entitásnak (származtatott létezőknek) tekintenünk. Az interpretáció és általában a szemantika mögött a halmazelmélet áll, amiről Gödel megmutatta, hogy nem eldönthető a halmazelméleti rendszeren belül, hogy ellentmondástalan-e. Másrészt magát a halmazelméletet is, mint formális elméletet, logikai eszközökkel definiáljuk. Tehát a *circulus vitiosus* veszélye áll fent: a halmazelméletre alapozzuk a logikai (szemantikai) rendszerünket, ugyanakkor logikai eszközökkel adjuk meg a halmazelméletet. Ezeket a nehézségeket próbálják a szintaktikai következményfogalom segítségével feloldani, így nyerjük a kalkulus fogalmát. Erről azonban egy kicsit később. Foglalkozzunk előbb a tárgyalási univerzummal kapcsolatban felmerülő további filozófiai előfeltevésekkel:

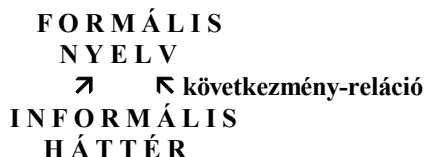
- A logikai rendszereken belül lévő létezőket (objektumokat) a tárgyalási univerzum fogja tartalmazni. Tehát a logika és a ráépülő matematikai rendszerek is, direkt értelemben nem elkötelezettek ontológiailag, mivel interpretációfüggő, mit tekintünk létezőnek, azonban ami a származtatott létezőket (objektumokat) illeti, ezek iránt már elkötelezetté válunk (Quine (1986)). Az elsőrendű logikában ugyan nincsenek származtatott létezők, de ennek meg is van a következménye: például, csak másodrendben tudjuk a „véges”, és

így a „nem véges” tulajdonságokat is definiálni, tehát a „véges” vagy a „végtelen” fogalma definiálhatatlan az elsőrendű logikában.

- A tárgyalási univerzum nem lehet a világ összes objektumát tartalmazó halmaz. Ekkor ugyanis paradoxonok veszélyével kell szembe nézünk, ahogy ezt világosan a Russell-paradoxon illusztrálja⁴. A modern axiomatikus halmazelméletben éppen ezért a világ összes objektumát tartalmazó tárgyalási univerzumot nem is tekintik halmaznak. Tehát egy adott interpretációban a világnak csak bizonyos részét tudjuk vizsgálni.

Ez a két tény arra utal, hogy a logika és így a matematikai elméletek is, ontológiailag a világ csak egy bizonyos, az interpretáció szerinti részét tudják megragadni. Vagyis a logika és a matematika által reprezentált világ homomorf azzal a móddal, ahogy felfogjuk a valós világot. (A korai wittgeinsteini izomorf-felfogással szemben.) A valós világ létezőinek összessége csakis ilyen homomorf struktúrák sorozataként ragadható meg a logikában és a matematikában.

Térjünk rá a logikai rendszerek másik, szintaktikai felépítésére. A szintaktikai felépítés menete vázlatosan a következő. Tekintsük az alábbi ábrát:



4. ábra

Mivel a logikai rendszerben lévő nyelvi kijelentések jelentése nehezen defini-

⁴ Tekintsünk olyan osztályokat, amelyeket a világ objektumainak különböző összegyűjtésével nyerünk. Ekkor minden osztályt két csoportba lehet sorolni. Az egyik csoportba azok az osztályok tartoznak, amelyek elemként nem tartalmazzák önmagukat ($H \notin H$), ezek az osztályok a *halmazok*. A másik csoportba ezzel ellentétben olyan osztályok tartoznak, amelyek elemként tartalmazzák önmagukat ($O \in O$), ezek a *valódi osztályok*. A Russell-paradoxon kérdése: ha tekintjük az összes halmazok N osztályát, akkor vajon ez az osztály halmaz, vagy valódi osztály-e. Bizonyítható, hogy N halmaz ($N \notin N$), mivel minden eleme halmaz. Bizonyítható ugyanakkor, hogy az N valódi osztály ($N \in N$), mivel N minden halmazt magában foglal, így önmagát is elemként tartalmazza. Két egymásnak ellentmondó állítást ($N \notin N$ és $N \in N$) kaptunk, amelyek feloldásának módja az lehet, hogy az osztályokat leszűkítjük halmazokra, kizárva ezekből a valódi osztályt mint halmaz-konstrukciót.

álható, így ezt nem egy szemantikai értékrendszerhez kötjük, amellyel mint láttuk, több nehézségünk is adódik, hanem még az informális háttérben próbáljuk körvonalazni. Az informális háttérben szemantikai jellegű strukturális jegyeket lehet elkülöníteni, amelyek közös jellemzője, hogy a premisszában lévő strukturális attribútumok öröklődnek a konklúzióban. Ilyen strukturális jegyek lehetnek például a szabályok betartása vagy a konstruálhatóságon alapuló helyesség fogalom. Lényegében a strukturális jegyekkel ragadjuk meg a helyes következtetéseket. A szintaxis az informális háttér egyik metasztintú reprezentációja, amelyben az alkalmazott strukturális attribútumok alapján

definiáljuk a szintaktikai következmény-relációt (jelben: $\vdash$) a kalkulusban, és a

következtetéseket ezek szerint minősítjük helyesnek.

Az informális háttér másik reprezentációja a szemantika, ami mögött az igazság fogalma áll. A logikai vizsgálatokban fontos kérdés, hogy az informális háttér e kétféle reprezentációja összeér-e. A teljesség fejezi ki azt a tényt, hogy az informális metasztint és tárgyszint a következmény-reláció szempontjából ekvivalensek. Ennek érdekében szükséges a szintaktikai és a szemantikai következmény-reláció ekvivalenciáját biztosítani; vagyis azt megmutatni, hogy ha Γ egy tetszőleges premisszahalmaz, A pedig egy tetszőleges állítás,

akkor $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow \Gamma \models A$ teljesüljön (*adekvátsági kritérium*). Ez úgy történik, hogy

i) definiáljuk a szintaktikai következmény-relációt, azután ii) bevezetjük a szemantikai értékrendszert és a centrális szemantikai fogalmakat (köztük elsősorban a modellt és a szemantikai következmény-relációt), végül iii) bizonyítjuk a kalkulus helyességét és teljességét a szemantikára nézve. Az elsőrendű logika esetén Gödel 1929-es doktori dolgozatában bizonyította be a predikátumkalkulus teljességét az elsőrendű szemantikára nézve, így kimutatta, hogy a

szemantikai következmény-reláció definiálható pusztán szintaktikai eszközökkel is. Ugyanakkor kiderült, hogy ez magasabbrendű logikákban nem biztosítható.

A fenti példában az $y = mx + b$ és $x^2 + y^2 = R^2$ egyenletrendszer meghatározza x és y értékét, mivel ismerjük a „+”, „=”, „(.)”⁵ jelek jelentését vagy legalábbis faktuális értékét⁵ (ismertebb terminológiában: extenzióját). Ha e jelek jelentését vagy faktuális értékét az egyenletrendszerből kellene meghatározni, ezt nem tudnánk megtenni. Csak azért határozható meg x és y értéke, mert tudjuk, mindkét egyenlet igaz. A terminusok referenciája csak igaz állítások (elmélet) alapján határozható meg, ami a hamis állításokat (elméletet) illeti, azok terminusainak referenciái meghatározatlanok. Tehát egy elmélet nemcsak terminusainak referenciáit határozza meg, hanem egy lehetséges világot (ti. amiben az állítások rendszere, vagyis az elmélet igaz) is konstituál. Ezért végül is az igazi kérdés az, hogy mi tesz egy matematikai állítást igazzá.

A matematikai állítások igazak vagy hamisak, és realista álláspontot elfoglalva (amit a 2. ábra munkahipotézise előfeltételez), leírják valamilyen módon a tőlünk független létező valóságot. Nyilván, a matematika nem lehet empirikus tudomány abban az értelemben, mint a fizika (s valójában mennyire az a modern fizika is?!), hiszen a matematika fogalmai sokszor nincsenek közvetlen megfelelésben a valóság elemeivel. Például, mi felelne meg a végtelen(ek) fogalmának a külső (a matematikán kívüli) világban? A matematikai realizmust a PLATONIZMUS képviseli, amely a matematika klasszikus foglmainak önálló létezését tulajdonít, függetlenül attól, gondoljuk-e azokat vagy nem, és úgy véli, a matematikai állítások igazságát pusztán e fogalmak analízisével, logikai úton fedezhetjük fel.

A realizmus elvetésének több formája is van a matematikában. A KONSTRUKTIVISTÁK (vagy INTUICIONISTÁK) tagadják a matematikai objektumoknak – az értelemszerűen véges – konstrukciójuktól független létezését. Ám helyette (Curry szavaival) „saját istenük”, az intuíció létezésében hisznek, vagyis valami olyasmiben, ami az egyetemes emberi értelem számára *a priori*

⁵ Az összeadás jelentéséről beszélni meglehetősen problematikus. A Peano-axiómákba lefektetett „rákövetkezés” is inkább szabályleírásnak tekinthető, hogyan tudok összeadni számértékeket.

adott, garantálva ezzel a matematika objektivitását és használhatóságát. A platonisták és intuicionisták hisznek abban, hogy a matematikai állításoknak jelentésük van, s ha – a Hilbert programot követve – formalizáljuk is a matematika nyelvezetét, azt azért tesszük, hogy e jelentést precízebben és tömörebben adhassuk vissza. Az elég nyilvánvalónak tűnik, hogy a matematikai objektumokra vonatkozó állítások helyességének forrása nem lehet a tapasztalat. Senkinek sem jut eszébe, hogy a laboratóriumba siessen eldönteni, vajon a 2 páros szám-e. Hasonlóan felvethető, hogy nem az egyes személyek intuícióján alapuló szubjektív vélekedésekről van szó, sőt, még csak nem is valamiféle egyetemes emberi intuíción alapuló közvélekedésről, hiszen a matematikai állításoknak a helyességét nem pszichológusok vagy szociológusok döntenek el, hanem matematikusok. Még hozzá úgy, hogy bebizonyítják, azaz jól definiált szabályok szerint egyértelműen megadott axiómákból levezetik őket.

Ezzel jutunk el egy újabb anti-realista állásponthez: a matematika FORMALISTA felfogásához, amely szerint a matematikai kifejezéseknek nincs jelentése, a matematika a formális rendszerek tudománya; jeleket definiál és szabályokat, melyek alapján e jeleket kombinálhatjuk. A matematika (a kései Wittgeinsteint követve) egy játék, amelyben a matematikát nem megismerjük, hanem konstruáljuk, azonban – a konstruktivistákkal szemben – a matematika bizonyossága nem emberi intuíción alapul, csupán konvención. A matematikának semmi köze nincs a végtelen metafizikai fogalmához, és közömbös a térre, időre, valószínűségre vagy a folytonosságra vonatkozó intuíciónkkal szemben. A matematika nem produkál és nem old meg Zénón-paradoxonokat.

A matematikusok hajlamosak a kalkulusokban végzett, szintaktikai vizsgálatokat előnyben részesíteni a szemantikaival szemben, mondván, kevesebb velük a baj az előfeltevés-mentesség terén. Ennek a szemléletnek egy abszolút következetes képviselői a formalisták.

Tekintsük példaként a következő egyszerű S formális elméletet:

Az S elmélet formális nyelve		S axiómái:
S primitív elemei:	Levezetési szabályok:	
Individuumnevek: ♣, ♦, ♠, ♥;	(MP): $\{p \rightarrow q \text{ és } p\} \Rightarrow q$;	(1) $\forall x (\odot x \rightarrow \otimes x)$;
Predikátumok: $\odot, \otimes$;	(UE): $pq \Rightarrow \exists x(px)$;	(2) $(\exists x \otimes x) \rightarrow \odot \clubsuit$;

Változók: $x \in \text{Var}$.	(UI): $\forall x(px \rightarrow qx) \Rightarrow pr \rightarrow qr$	(3) $\odot \blacklozenge$;
S konnektívumai:	(p, q, r az S terminusaiból és S konnektívumaiból álló szavak)	
(,) , $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$;		

Ekkor S-ben bizonyítható a következő **Tétel**: $\odot \clubsuit$.

- Bizonyítás:** 1. $\odot \blacklozenge$ (3. axióma)
2. $\exists x \odot x$ (UE alapján)
3. $\odot \clubsuit$ (2. axióma és MP alapján)
4. $\odot \clubsuit \rightarrow \odot \clubsuit$ (1. axióma és UI alapján)
5. $\odot \clubsuit$ (MP alapján)

Az S elmélet primitív elemei, köztük $\clubsuit$, $\blacklozenge$, $\odot$ és $\odot$ is, jelentésnélküliek és S csupán precízen szabályozott manipulációk elmélete. A matematika tehát nem különbözik egy szimpla sakk- vagy bridzspartitól. A formális rendszer axiómái olyan kikötések, amelyek a levezetési szabályokkal együtt, szimbólumokat manipulál, tehát az olyan kérdések, hogy „igazak-e S axiómái?” vagy „mit fejez ki ez a tétel: $\odot \clubsuit$?”, teljeséggel értelmetlenek. A formalizmus kiemelkedő egyénisége, Curry szerint, a formális rendszer egy fiktív gépként ragadható meg, amelyet konvenciók egy halmaza definiál, és amely jelkombinációkat termel. A formális rendszerről szóló elmélet nem szorul szemantikára, mert tetszőleges szimbólumokkal végzett, szabályozott műveletek gyűjteményeként foghatjuk fel. Kijelentései empirikus kijelentések, bizonyításai egymás után végrehajtott szintaktikai szabályok.

Azonban a szintaxist a szemantikával szemben preferáló szemlélet, így a formalista iskola szemlélete is, úgy látszik, leegyszerűsítő, mivel a szintaktikai és szemantikai aspektusok nem választhatók el élesen egymástól. Habár a formális rendszer vizsgálata során nem kell tekintettel lenni a rendszer interpretációjára (a szimbólumok jelentésére), a vizsgálat matematikai eredményét azonban már értelmezzük. Ez a filozófus, Searle érve az ellen, hogy a megértés csupán szintaktikus szimbólum-manipuláció lenne⁶. Searle elképzelte magát egy szobában (*Searle kínai szobája*). A szoba egyik falán van egy nyílás, amelyen keresztül kínaiul írt kérdéseket adnak be neki, az ő feladata pedig,

⁶ Searle, J. R.: "Az elme, az agy és a programok világa", in Pléh Cs.(1996): *Kognitív tudomány*. Budapest: Osiris Kiadó.

hogyan egy másik nyíláson keresztül válaszoljon ezekre a kérdésekre kínaiul. A gond az, hogy Searle egy szót sem tud kínaiul, így a kínai írás semmit sem jelent számára. Azonban vannak a szobában olyan szabálykönyvek, amelyek révén manipulálni képes az értelmetlen kínai szimbólumokat. A külvilág számára Searle nem különbözik egy kínai anyanyelvű embertől, azonban szemben egy ilyen emberrel, Searle semmilyen értelemben nem érti azokat a szimbólumokat, amelyeket manipulál.

Azonban felvethető, hogy bár Searle nem ért kínaiul, ám ő és a szabálykönyvek együttesen már igen. Másképpen fogalmazva, vajon nem végezhetnénk a formális rendszerek eredményének értelmezését is formális játékszabályokkal? Ezzel kapcsolatban két problémával kell szembe néznünk:

- A metamatematika is lehet formális, de az ember (matematikus) szereti tudni, hogy mit csinál: tudatosan cselekszik, nem gépiesen.
- Mit érünk el, ha ugyanazokat a formális nyelvi eszközöket vagy ezek szűkebb rendszerét (pl. finit eszközök) használjuk a rendszerről szóló bizonyításban, mint amiket a rendszerbe építettünk? Gödel óta tudjuk, hogy bármelyik rendszer, ami elég erős az aritmetika konzisztenciájának bizonyításához, legalább olyan erős, mint maga az aritmetika. Márpedig, ha a matematikai elméletek konstrukciós folyamatára gondolunk, a metamatematikára ez teljesül.

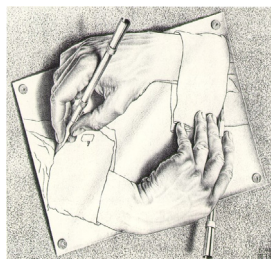
Searle kínai szoba példájához visszatérve, meg tud-e tanulni valaha anyanyelvi szinten kínaiul, például egynyelvű kínai szótár segítségével, amelyben számára értelmetlen szimbólumokat értelmetlen szimbólumok magyaráznak meg. A szimbólumok zárt, önmagával definiáló rendszerét csak úgy lehet feltörni, és így jelentés csak akkor léphet be a rendszerbe, ha a rendszer egy része lehorgonyoz a világban (ezt nevezik a *szimbólum lehorgonyozás problémájának*).

Észre kell venni, hogy a formalizmus egzaktabb, de nem szigorúbb eszköz kezünkben. Ennek az oka, hogy a matematikai intuíciónk szemantikai sajátosságai öröklődnek a matematika formális rendszereire csakúgy, mint bizonyos természetes nyelvi jegyek a formális nyelvre⁷. A logikai rendszerek

⁷ Vannak arra törekvések (pl. logikai-nyelvészeti kutatások, mesterséges intelligencia, nyelvfilozófia),

létrehozásakor is szemantikai megfontolások húzódnak meg a szintaxisban követett eljárások mögött. Az informális háttérben, elsősorban a metanyelven értelmezzük, de valójában a szemantika szabatos felépítése útján válnak explicitté azok a szabályszerűségek, amelyeken keresztül – az információközlésben résztvevő – nemlogikai alkatrészeknek (neveknek, mondatoknak, predikátumoknak) a világgal való kapcsolata realizálódhat. Erre jó példa lesz a 2.1. fejezetben bemutatott kísérletünk, amelynek során a metanyelv egy formalizált fragmentumába, a nyelvbázisba, és így rajta keresztül a szintaxisba csempésszük be azokat a szemantikai strukturális és kategoriális jegyeket, amelyekről eddig szóltunk, és amelyek a matematika formális nyelveit, továbbá a rájuk épülő elméleteit jellemzi.

hogyan ezt a folyamatot visszafelé is lejátszák, vagyis felidézve a 2. ábrát, a matematikai-logikai rendszerek irányából közelítenek a természetes nyelv és világ kapcsolata felé.



2. A logikai rendszerek szerepe a matematikában

Ez a fejezet három szakaszból áll. Az elsőben a logikai rendszerek szintaxisának fő komponensét jelentő, elsőrendű formális nyelvek nyelvbázisát mutatjuk be, amelyre a későbbiek folyamán számos alkalommal fogunk hivatkozni. Ahogy azt már említettük, a matematikai gyakorlatban elsőrendű logikai rendszer használatos, ezért a bemutatásra kerülő nyelvbázis igen releváns a matematikai elméletek vonatkozásában. Ugyanakkor, látni fogjuk, hogy egy ilyen fajta elkötelezettség, milyen komoly matematikafilozófiai problémákat vet fel.

Tulajdonképpen ehhez kapcsolódunk, amikor elemezni fogjuk a (nominálizmus hagyományának követőjeként felfogható) LOGICIZMUS programját mint matematikafilozófiai irányzatot. Közismert, hogy a modern, szimbolikus logika kialakulásának kezdetén, Frege az aritmetikát, Russell pedig az egész matematikát kívánta egy átfogó logikai rendszerre visszavezetni. Már a Russell-paradoxon arra készítette Fregét, hogy belássa: ez a törekvés még olyan korlátozottabb program esetén sem kivitelezhető, mint az aritmetika. Kiderült, hogy vannak olyan alapvető szakmai axiómák a matematika elméleteiben, amelyek nem logikaiak. Ugyanakkor, akadnak olyanok, akik a logicizmus fregei programját mégsem tarják elvetendőnek, és kísérletet tesznek, az elsőrendű logika átlépésével, a program részbeni rekonstrukciójára. Ez vizsgálatunk tárgya a fejezet második részében.

Végezetül, szükségesnek látszik a logikai rendszerek egy általános elemzése, tekintettel fontos szerepükre a matematikai elméletekben (vö. 2. ábra). Ennek szellemében, a dolgozat harmadik részében, egy összehasonlító elemzést fogunk végezni, számos kihívással szembesítve a klasszikus – vagyis az extenzionális, elsőrendű, kétértékű – logikát mint az összehasonlítás bázisát.

2.1. A nyelvbázis⁸

1. Definíció Az $L = \langle A, A^*, \Delta, M \rangle$ négyest *nyelvbázisnak* nevezzük, ha

- A elemek egy osztálya: a nyelv ábécéje,
- A^* osztály a nyelv szavai, ahol $A \subseteq A^*$,
- $\Delta \in A^*$ egy kitüntetett szó, az üres szó,

⁸ E szakaszban elsősorban Smullyan (1999) művére, illetve Ruzsa (1997) könyvére támaszkodunk.

- M műveletek egy osztálya: a nyelv ábécéjéből az ebben lévő műveletek segítségével képezzük a szavakat.⁹

Bevezetve az alábbi jelöléseket

ϵ : L kifejezéseinek osztálya ($\epsilon \subseteq A^*$)

S: L mondatainak osztálya (**S** $\subseteq \epsilon$)

P: L bizonyítható mondatai osztálya (**P** $\subseteq \mathbf{S}$)

T: L igaz mondatainak osztálya (**T** $\subseteq \mathbf{S}$)

R: L cáfolható mondatai osztálya (**R** $\subseteq \mathbf{S}$)

H: L predikátumainak osztálya (**H** $\subseteq \epsilon$)

a következő feltételekkel élünk:

- minden olyan $P \in \mathbf{H}$, amely egy L-re támaszkodó formális nyelv predikátuma, csak olyan elemekre vonatkozhat, amely eleme az adott interpretáció (amelyről a 2. definíció után szólnunk) tárgyalási univerzumának (U). Filozófiailag, az U azon elemei tekinthetők létezőknek, amelyek az adott interpretáció révén annak minősülnek (Quine (1986)).
- L-t *korrektnek* mondjuk, ha **P** $\subseteq \mathbf{T}$ és **T** $\cap \mathbf{R} = \emptyset$.

2. Definíció Legyen x a tárgyalási univerzum eleme, P pedig L egy predikátuma, akkor az $\{x : P(x)\} \subset U$ alakú kifejezést *osztályabsztrakciónak* nevezzük.

Gödel szerint minden predikátum tekinthető valamely természetes számhoz kötődő osztályabsztrakció névének.

3.a. Definíció Definiáljunk e célból olyan Φ függvényt, amelyre

- $\text{Dom}(\Phi) = \epsilon \times \mathbb{N}$,
- $\text{Im}(\Phi) \subseteq \epsilon$,
- ha $P \in \mathbf{H}$ és $n \in \mathbb{N}$ akkor $P(n) = \Phi(P, n)$.

⁹ Hagyományosan M egyelemű osztály, amely az ún. $\cap$ konkatenáció műveletét tartalmazza, az alábbi tulajdonságokkal:

- $x, y \in A^* \Rightarrow x \cap y \in A^*$,
- $x, y, z \in A^* \Rightarrow (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z) \in A^*$,
- ha $y \in A^*$ és $\alpha \in A \Rightarrow y \cap \alpha \neq \Lambda$,
- ha $x, y \in A^* \Rightarrow (x \cap \Lambda = y \cap \Lambda) \Rightarrow (x = y)$,
- ha $x \in A^* \Rightarrow x \cap \Lambda = \Lambda \cap x = x$,
- ha B osztály, melyre teljesül, hogy $\Lambda \in B$ és $(x \in B \text{ és } \alpha \in A) \Rightarrow x \cap \alpha \in B$ akkor $A^* \subseteq B$.

A Φ függvény és a $\mathbf{T}$ igaz mondatok osztálya együtt generál egy interpretációt, amely megadja a predikátumok értékét, azaz egy $P(n) \in \mathbf{H}$ predikátum $n \in \mathbf{N}$ számot nevezi meg, mond valamit róla. (Például azt állítja, hogy „n prím”.) Mivel $\Phi(P, n) = P(n)$, ezért P predikátumnak két olvasata lehetséges:

- n -ről állítja P -t (pl. „5 prímszám”),
- egy mondat (pl. „Péter okos”).

Vagyis a nyelvbázisra épülő elsőrendű logikai rendszer tárgyalási univerzuma: $\mathbf{N}$. Beszélhetünk-e akkor másról, mint a természetes számok részhalmazairól? A kérdésre még visszatérünk az 5. fejezetben.

3.b. Definíció Azt mondjuk, hogy P predikátum *kifejezi (jelöli)* $A \subseteq \mathbf{N}$ számhalmazt, ha $P \in \mathbf{T} \Leftrightarrow n \in A$. Tehát egy A számhalmaz kifejezhető L -ben, ha van olyan predikátum, ami kifejezi.

Bevezetjük a *Gödel-számozást*, amely lényege, hogy minden kifejezéshez egy természetes számot rendelünk. Legyen $g: \varepsilon \rightarrow \mathbf{N}$ egy-egy értelmű függvény. Ekkor ha $E \in \varepsilon$ kifejezés, akkor $g(E)$ az E kifejezés Gödel-száma. Jelölje E_n azt a kifejezést, amelynek Gödel-száma: n . Ekkor $g(E_n) = n$.

Gödel neves elemzésének fontos felismerése az volt, hogy megszerkeszthető olyan formula, amelynek Gödel-száma n és a következő matematikai állításnak feleltethető meg: „Az n Gödel-számú formula nem bizonyítható”. Ez a saját bizonyíthatatlanságát állítja. Ezt az önreflexiót egy kifejezés diagonalizáltjának értelmezésével emeljük be a rendszerünkbe.

4. Definíció E_n predikátum *diagonalizálja* az a mondat, amely akkor igaz, ha E_n igaz a saját Gödel-számára, azaz $E_n(n) = \Phi(E_n, n)$.

Az önreflexiót az alábbi példával világíthatjuk meg. Tegyük fel, hogy minden athéni igazmondó és minden krétai hazudik. Ha mármost én egy megrögzött igazmondó vagyok, tehát nem krétai, ugyanakkor athéni sem, hogyan hozom ezt a tényt beszélőtársam tudtára?



Kérdés: Hogyan kell tudtára adni valakinek, hogy $\otimes$ -ba tartozom?

Válasz: Én igazmondó vagyok, de nem athéni.

Gödel szerint a példában az athéniaiak felfoghatók úgy, mint a bizonyítható mondatok (**P**), míg a krétaik, mint a cáfolható mondatok (**R**) osztálya. Ekkor E_n kifejezés $E_n(n)$ diagonalizáltja azt az állítást fogalmazza meg, hogy „ha én predikátum vagyok, akkor igaz vagyok a saját Gödel-számomra nézve”. S így valósul meg az önreflexió.

5. Definíció A $d(n)$ *diagonális függvény* megegyezik $E_n(n)$ Gödel-számával, vagyis $d(n) = g(E_n(n))$.

5. Definíció korrolárium: Legyen $A \subseteq \mathbb{N}$ és vezessük be $A^+ = \{n: n \in \mathbb{N} \text{ és } d(n) \in A\}$ halmazt. Mivel $A^+ = d^{-1}(A)$, ezért az előbbi két definíció alapján, bármely $n \in \mathbb{N}$ -re és P predikátumra, $P(n) \in \mathbf{T} \Leftrightarrow n \in A^+$.

Legyen továbbá B a bizonyítható mondatok Gödel-számainak osztálya: $B = g(P)$. Ha B^C a B komplementerét jelöli, akkor legyen $(B^C)^+ = \{n: n \in \mathbb{N} \text{ és } d(n) \in B^C\}$. A következő egyszerű lemmában rögzítjük azokat a tényezőket, amelyek szükségesek ahhoz, hogy – ahogy mondani szokás – egy nyelv „élég kifejező” legyen.

6. Lemma $(B^C)^+$ halmaz *kifejezhető*, ha teljesülnek a következő feltételek:

(G1) Ha $A \subseteq \mathbb{N}$ kifejezhető L -ben, akkor A^+ is kifejezhető L -ben.

(G2) Ha $A \subseteq \mathbb{N}$ kifejezhető L -ben, akkor A^C is kifejezhető L -ben.

(G3) $A \cup B = g(P)$ kifejezhető L -ben.

Bizonyítás A (G3)-t (G2)-be írva, majd erre (G1)-et alkalmazva kapjuk az állítást.

Ezek a feltételek meghatározzák, hogy „mit tud” a nyelv és a későbbi tételek, melyek ezekre hivatkoznak, majd azt mutatják meg, hogy „milyen ára” van ennek. A (G1) technikai jellegű feltétel szerint, egy halmaz kifejezhetőségét a diagonális függvény megtartja, másképp fogalmazva, a kifejezhetőségre nézve az önreferáló predikátumok nem relevánsak. Ez a feltétel fogalmazza meg az elsőrendű relációk kezelésének igényét. A (G2) feltétel azt követeli meg a nyelvtől, hogy benne ne csak állítások, hanem azok tagadásai is kifejezhetők legyenek, míg (G3) a bizonyítható mondatok karakterizálhatóságát mondja ki. A (G2)-es feltétel teljesüléséhez szükséges, hogy negáció legyen értelmezve a nyelvben. Továbbá ha a nyelvhez egy modellt (szemantikus megközelítés) vagy axiómákat és levezetési szabályokat (szintaktikai megkö-

zelítés) rendelünk, amelyek révén a következmény-fogalom meghatározható, akkor (G3) is teljesülni fog a nyelvre.

Végezetül még egy Carnaptól származó fogalmat ismertetünk, amely a következő pont tételeinek bizonyítását segíti.

8. Definíció Egy $E_n \in \mathbf{S}$ mondatot az A halmaz *Gödel-mondata*, ha fennáll valamelyik lehetőség: i) E_n igaz és $g(E_n) = n$ eleme A -nak, vagy ii) E_n hamis és n nem eleme A -nak. Tehát E_n pontosan akkor Gödel-mondata $A \subseteq \mathbb{N}$ halmaznak, ha $E_n \in \mathbf{T} \Leftrightarrow n \in A$.

Intuitíve az A számhalmaz Gödel-mondatára úgy gondolhatunk, mintha azt állítaná, hogy saját Gödel-száma az A halmaz eleme. Ha ez a mondat igaz, akkor Gödel-száma valóban A -beli, ha viszont hamis, akkor nem.

2.1.1. Gödel és Tarski tétele

9. Diagonális lemma

(1) Ha A^+ kifejezhető L -ben, akkor A -nak van Gödel-mondata.

(2) Ha L kielégíti a (G1) feltételt, akkor minden $A \subseteq \mathbb{N}$ kifejezhető halmaznak van Gödel-mondata.

Bizonyítás

(1) Ha L -ben A^+ kifejezhető, akkor legyen $P \in \mathbf{H}$ az a predikátum, amely A -t kifejezi, és legyen $g(P) = h$. Ekkor az 5. definíció korroláriumája alapján, $P(h) \in \mathbf{T} \Leftrightarrow h \in A^+ \Leftrightarrow d(h) \in A$. A d értelmezése folytán $d(h) \in A \Leftrightarrow g(P(h)) \in A$. Vagyis azt kaptuk, hogy $P(h) \in \mathbf{T} \Leftrightarrow g(P(h)) \in A$, és ez azt jelenti, hogy $P(h)$ Gödel-mondata A -nak.

(2) Az előző (1)-ből és a (G1) feltétel alapján triviális.

10. A Gödel-féle nemteljességi tétel Ha L elég bonyolult, azaz $(B^C)^+$ kifejezhető L -ben és L korrekt, akkor L -nek van olyan igaz mondata, ami nem bizonyítható, tehát $\mathbf{T} - \mathbf{P} \neq \emptyset$.

Bizonyítás A diagonális lemma (1) alapján $(B^C)^+$ kifejezhető L -ben, ha B^C -nek van Gödel-mondata, azaz $E \in \mathbf{T} \Leftrightarrow n \in B^+$. Tehát találtunk egy olyan E mondatot, amely igaz, mégsem bizonyítható.

A következő lemmában arra adunk választ, hogy a Gödel-tételben mi zárja ki a $\mathbf{P}=\mathbf{T}$ teljesülését, majd általánosítjuk az ennek kimutatása során alkalmazott módszert.

11. Lemma $(B^C)^+$ kifejezhető $\Leftrightarrow \mathbf{P} \neq \mathbf{T}$.

Bizonyítás Mivel $(B^C)^+$ kifejezhető, így (G3) alapján $B = g(P)$ is kifejezhető. Indirekten tegyük fel, hogy $\mathbf{P}=\mathbf{T}$. Ekkor $g(\mathbf{P}) = g(\mathbf{T})$, vagyis $B = g(\mathbf{T})$ is kifejezhető. De $B = g(\mathbf{T}) \Leftrightarrow$ ha L minden E Gödel-mondatára teljesül, hogy $E \in \mathbf{T} \Leftrightarrow g(E) \in B$. Ez pedig azt jelenti, hogy B^C nem tartalmazhatja L egyetlen Gödel-mondatát sem. Viszont a diagonális lemma (1) szerint, ha B^C -nek nincs Gödel-mondata, akkor $(B^C)^+$ nem kifejezhető L -ben. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat. Ellenkező irányba hasonlóan belátható a lemma.

Vegyük észre, hogy $\mathbf{P}=\mathbf{T}$ kizárását (G3) feltétel implikálja, vagyis L -l szemben támasztott ezen kritérium miatt nem esik egybe L bizonyítható és igaz mondatainak osztálya. Ez másképpen fogalmazva pontosan azt jelenti, hogy a Gödel-féle nemteljességi tétel állítását, miszerint (G1)-(G3) mellett az igaz mondatok köre szükségszerűen bővebb, mint amit egy korrekt nyelv eszközeivel bizonyítani tudunk, nem oldható fel a nyelven belül, amíg a bizonyíthatóság igényével lépünk fel.

12. Lemma Legyen $g(\mathbf{T})=I$. Ekkor I^C -nek nincs Gödel-mondata.

Bizonyítás Indirekten tegyük fel, hogy I^C -nek van Gödel-mondata, akkor ha ez E úgy, hogy $E \in \mathbf{T} \Leftrightarrow g(E) \in I^C$ teljesül. Ez viszont ellentmond annak, hogy $g(\mathbf{T})=I$ lenne.

13. Tarski tétele Ha $g(\mathbf{T})=I$, akkor

- 1) $(I^C)^+$ nem kifejezhető L -ben,
- 2) (G1) feltétel mellett I^C nem kifejezhető L -ben,
- 3) (G1) és (G2) feltételek mellett I nem kifejezhető L -ben.

Bizonyítás

- 1) Indirekten tegyük fel, hogy $(I^C)^+$ kifejezhető L -ben, akkor I^C -nek a diagonális lemma (1) szerint van Gödel-mondata, de ez ellentmond az előző lemmának.
- 2) Indirekten tegyük fel, hogy I^C kifejezhető, akkor (G1) miatt $(I^C)^+$ is kifejezhető és ez ellentmond az előző 1)-nek.

3) Indirekten tegyük fel, hogy I kifejezhető, akkor I^C is kifejezhető (G2) alapján. Viszont (G1) feltétel mellett I^C kifejezhetősége ellentmond 2)-nek.

Megjegyzés A 3) parafrázálva azt mondja, hogy L -ben (G1) és (G2) feltételek mellett nem lehet a nyelv eszközeivel igazságfogalmat definiálni. Mégis maga Tarski a szemantika legfontosabb feladatának tartotta az „igaz kijelentés (mondat)” fogalmának definiálását (ld. Tarski-elv).¹⁰

2.1.2. A nyelvbázison értelmezett szintaktikai fogalmak

14. Definíció Az L nyelv *konzisztens*, ha $P \cap R = \emptyset$.

15. Lemma Ha L korrekt, akkor L konzisztens.

Bizonyítás L korrektsége és a konzisztencia definíciója folytán evidens.

Fontos megjegyezni, hogy L konzisztenciájából nem következik L korrektsége, vagyis egy nyelv korrektségének nem elegendő kritériuma a nyelv konzisztenciája. Ez csak akkor teljesül, ha az igaz és a bizonyítható mondatok osztálya egybeesik. Ehhez pedig a 11. lemma alapján L -et korlátozni kell, mégpedig úgy, hogy (G3) feltételt ne teljesítse.

16. Definíció Egy $s \in S$ mondat *eldönthető*, ha $s \in P \cup R$.

17. Definíció Algoritmuson valamely problémamasorozat (problémák végtelen serege) elemeire alkalmazott eljárást értünk. Mármint ha az eljárással a problémamasorozat minden eleme megoldható, akkor *univerzálisnak*, ha véges lépésben eredményre vezet, akkor *effektívnek* mondjuk az algoritmust.

Az algoritmusok azonban nem mindig effektívek és ez már a nyelvbázis szintjén megjelenik.

18. Definíció L *teljes*, ha L minden $s \in S$ mondata eldönthető.

19. Tétel Ha $(B^C)^+$ kifejezhető és L korrekt, akkor L nemteljes.

¹⁰ Megoldást Tarski szemantikai igazságfogalma szolgáltatja, amelyet a 3.1. fejezetben fogunk ismertetni.

Bizonyítás Mivel L korrekt, így $T \cap R = \emptyset$ (1). Ugyanakkor L korrekt $\Rightarrow L$ konzisztens folytán $P \cap R = \emptyset$ (2). A $(B^C)^+$ kifejezhetősége miatt $T - P \neq \emptyset$ (3). Így (1), (2) és (3) miatt $P \cup R \neq S$ kell teljesülni, tehát L nemteljes.

20. Korollárium A 19. tételbeli feltételek melletti L nyelvbázisban (és az erre épülő formális nyelvekben) vannak olyan mondatok, amelyek algoritmussal nem eldönthetők.

2.1.3. Elsőrendű formális nyelvek, logikai rendszerek

Az ismertetett nyelvbázisra formális nyelvet úgy építhetünk, hogy a nyelvbázishoz egy szabályrendszert rendelünk, amely a szintaxis szintjén biztosítja a formális nyelv szabályainak definiálását.

21. Induktív szintaktikai definíció

Szintaktikai szabályok egy $H \subseteq A^*$ osztályát két részben határozzuk meg:

1. az *indukció bázisa*: megadunk egy $B \subseteq A^*$ bázisosztályt úgy, hogy $B \subseteq H$ teljesüljön;
2. *indukciós szabályok*: felsorolunk „ $a_1, \dots, a_k \in H \Rightarrow b \in H$ ” alakú szabályokat, ahol $a_1, \dots, a_k$ és b hagyományosan „ $c_0 \cap x_1 \cap c_1 \cap x_2 \cap \dots \cap x_n \cap c_n$ ” alakú szavak, ahol $c_0, c_1, \dots, c_n \in A^*$, míg $x_1, \dots, x_n$ A^* típusú változók.
3. H csak olyan szavakat tartalmazhat, amelyeket 1) és 2) szabályok generálnak.

22. Definíció Az $\langle L, H \rangle$ párt *formális nyelvnek* nevezzük.

Az $\langle L, H \rangle$ *formális nyelvhez* tartozó elsőrendű logikai rendszereket a következő fontos metatételekkel karakterizálhatjuk:

23. Adekvátsági tétel Az elsőrendű logikai kalkulus (QC) adekvát az elsőren-

dű nyelvre nézve, azaz $\Gamma \vdash A \Rightarrow \Gamma \models A$ (helyesség) és $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$ (teljes-

ség).

A **bizonyítás** mindkét irányban elég hosszadalmas. A helyességhez a QC kalkulus összes axiómájáról be kell látni (pl. analitikus táblázat módszerét használva), hogy érvényes formulák.

A teljesség bizonyításának első lépése, hogy belátjuk: ha Γ konzisztens, akkor Γ kielégíthető. Ehhez vesszük Γ maximális konzisztens bővítését: $\Gamma = \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_k$.

A bővítés lehetséges módja, hogy i) analitikus táblázatok módszerével Γ formuláinak származékait fokozatosan hozzáadjuk Γ -hez ($i=1,2,\dots,k-1$); ii) bizonyítjuk, hogy az így nyert analitikus táblázatnak van nyílt ága; végül iii) a nyílt ág használatával értelmezünk egy interpretációt és bizonyítjuk, hogy ez az interpretáció Γ_k összes elemét ki fogja elégíteni.

Kontrapólálva az első lépést: ha Γ kielégíthetetlen, akkor Γ inkonzisztens.

De $\Gamma \models A$ csak akkor teljesül, ha $\Gamma \cup \{\sim A\}$ kielégíthetetlen, és ekkor ez inkon-

zisztens is. Ugyanakkor ismert, hogy $\Gamma \cup \{\sim A\}$ inkonzisztens akkor és csak

akkor, ha $\Gamma \vdash A$.

24. Löwenheim-Skolem tétel Γ kielégíthető legfeljebb megszámlálhatóan végtelen tárgyalási univerzumon.

Bizonyítás Tekintsük Γ maximális konzisztens bővítését: $\Gamma = \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_k$. Mivel tudjuk, hogy ha Γ konzisztens, akkor kielégíthető, ezért Γ_k -hoz van

olyan modell, amelyben Γ_k bármely formulája igaz. Legyen mármost Γ_k névparaméterei a következők: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Egy-egyértelmű megfeleltetést létesítünk a tárgyalási univerzum (a modell objektumtartománya) objektumai és Γ_k névparaméterei között úgy, hogy kihúzzuk

- a tárgyalási univerzum azon elemeit, amelyet Γ_k névparaméterei nem denotálnak;
- $\Gamma_k a_i = a_j, (i \neq j)$ nevei közül az egyiket, a nagyobb indexűt (két névparaméter akkor egyezik meg, ha denotátumaik azonos, vagyis ugyanazt az objektumot jelölik a tárgyalási univerzumban).

A konstrukció folytán, valóban egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető Γ_k és a modell objektumtartománya között. Ha most megszámozzuk az így kapott tárgyalási univerzum objektumait a hozzájuk tartozó névparaméter indexeivel, akkor ezek számossága maximum a természetes számok számosságával lehet azonos, következésképpen Γ tényleg kielégíthető megszámlálhatóan végtelen tárgyalási univerzumon.

25. Korollárium Mivel egy axiómarendszer felfogható úgy, mint ellentmondástalan formulahalmaz, a tétel átfogalmazható így is:

- *Alsó Löwenheim-Skolem tétel:* ha egy axiómarendszer véges sok vagy nemmegszámlálható axiómákból áll, akkor vagy megvalósíthatatlan, hiszen ellentmondásos, vagy van legfeljebb megszámlálható modellje is.
- *Felső Löwenheim-Skolem tétel:* ha egy axiómarendszernek van megszámlálhatóan végtelen modellje, akkor van nem megszámlálhatóan végtelen modellje is.

26. Kompaktsági tétel Ha $\Gamma \models A$, akkor van Γ -nak olyan Δ véges részhalma-

za, hogy $\Delta \models A$.

Bizonyítás Az adekvátsági tétel alapján, ha és $\Gamma \models A \Rightarrow \Gamma \vdash A$. Ekkor, a Γ -ból

való levezetés definíciója szerint, van olyan $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ véges formulahal-

maz, hogy $A_n = A$. Ha most Δ -nak megválasztjuk $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ -t, akkor $\Delta \vdash$

A. Ismét alkalmazva az adekvátsági tételt: $\Delta \vdash A \Rightarrow \Delta \models A$.

Következmények:

1. Ha Γ minden véges formulahalmazra kielégíthető, akkor Γ is az.
2. Ha Γ minden véges formulahalmazra konzisztens, akkor Γ is az.

Az első következményt könnyen kapjuk, ha vesszük a feltételben szereplő véges formulahalmazok unióját, a második pedig a kielégíthetőség és konzisztencia kapcsolatából adódik.

2.2. Logicizmus

A logicista iskola megalapítóinak Freget és Russellt tekintik, akik a matematikát a logika részeként fogták fel: Frege az elsőrendű logikára, Russell típuselméleti logikára kívánta visszavezetni a matematikát. Az iskola programját Russell úgy jellemzi a *Principles of Mathematics* xv. fejezetében, hogy az egész matematika kizárólagosan olyan fogalmakkal foglalkozik, amelyek ke-

vés számú logikai fogalommal definiálhatók, s az összes állítása levezethető néhány alapvető logikai alapelvből. Frege ezt a programot próbálta keresztülvinni az aritmetikára vonatkozóan *Az aritmetika alapjai* című művében. Álláspontja, mint egyfajta „korlátozott” – az aritmetikára vonatkozó – logicizmus, két kitételbe sűrítendő:

1. A *fordítási kitétel* szerint, a megfelelő definíciók kifejtésével az aritmetika tételei lefordíthatók pusztán logikai állításokra. Az aritmetikai fogalmak álrühába öltöztetett logikai fogalmak.
2. A *bizonyítási kitétel* szerint, a lefordított aritmetikai állítások mindegyikét bizonyítani tudjuk néhány alapvető, tisztán logikai axiómából, pusztán logikai levezetési szabályok szerint.

Frege kísérlete azonban összeomlott. Konceptiója azon az elképzelésen alapult, hogy a természetes számok aritmetikai tulajdonságai levezethetők az osztályok és viszonyok logikájából; a koncepció kidolgozásakor pedig a Cantor-féle naiv halmazelméletre épített. A naiv halmazelméletben, halmazon különböző objektumok bármiféle összességét értik, és nem szabják meg, hogy mi tekinthető a halmaz elemének. Bármilyen elemnek tekinthető, tehát maguk a halmazok is lehetnek saját elemeik. Ez viszont azt eredményezi, hogy az így megalkotott logikai rendszer a Russell-paradoxonnal terhes.

Úgy tűnik, hogy a logicista program realizálásának nehézsége a paradoxonok elkerülésében van. Russell ennek lehetőségét a logikai típusok elméletében látta. Szerinte a paradoxonok általában abból származnak, hogy a predikátumokat minősítés nélkül, korlátlanul alkalmazzák. A logikai paradoxonokból úgy található kiút, hogy világosan körülhatároljuk a logikai típusokat, és nyelvi tilalmakat állítunk fel az argumentumok behelyettesítéseit illetően. Tehát egy $x \in y$ kifejezést csak akkor szabad definiálni tekinteni, ha az a réteg, amelybe y tartozik, eggyel magasabbban van, mint x . Ennek megfelelően, az n -edik típusú predikátumok csak az n -edik, illetve az $(n-1)$ -dik típusú individuumokat jellemzik. Így módon, a típusszabály korlátozza az osztályok (halmazok) túlságosan szabad kezelését. A típuselmélet nem engedi meg olyan halmazok képzését, amelyek elemként tartalmazzák önmagukat, pl. $x \in x$, illetve $\sim x \in x$, és amik formális következtetésekkel paradoxonok kialakulását eredményezik.

Azonban a Russell-féle típuselmélet a paradoxonok kiküszöbölésének egy nem túlságosan elegáns módja, és a logicista programot más oldalról is éri kihívás.

A geometria axiomatizációjának többféle módszere ismert, amelyből az aritmetikai út a geometria egy logikai értelmezését kínálja. Eszerint, a geometriát részlegesen átfordíthatjuk analitikus geometriává, vagyis a valós számkörben felépíthető a geometria egy aritmetikai modellje. De vajon a geometria csupán aritmetikai fogalmakkal operál? A logicizmus szerint, a geometria alkalmazása lényegében annyit jelent, hogy a matematikai kifejezésekben szereplő logikai vagy logikaira lefordított fogalmakat helyettesítjük geometriai fogalmakkal (a geometriára vonatkozó *fordítási kitétel*nek megfelelően). Ekkor, mivel az összes fogalmakra azonos logikai törvények érvényesek, ezért (a geometriára vonatkozó *bizonyítási kitétel* szerint) ha a kiinduló, lefordított kijelentés helyes volt, a mondott helyettesítéssel belőle keletkező kijelentés is helyes lesz. Azonban, ebben az aritmetikai-logikai úton nyert geometriában elsiklik számos olyan megállapítás, amelyet más módszerrel nyerhetünk. Mondjuk, a különböző transzformációkon alapuló, algebrai út, a geometriai alakzatok gazdag leírását adja, ugyanakkor nem minden görbe és felület írható le algebrai eszközökkel sem (pl. a hélix). A görbült alakzatok egy másik megközelítési módját a függvénytan módszereket használó differenciálgeometria kínálja, amelyben az ilyen, nem algebrai térgörbék is kezelhetőkké válnak. Cserében viszont az eredmények lokálisak lesznek, vagyis a geometriai alakzatok csak egy pontban, illetve annak elegendően kicsi környezetében vizsgálhatók. Hogyan tudná ezt a tényt – fordítás után – egy logikai rendszer reprezentálni?

Koncentráljuk most egy olyan „korlátozott” logicista álláspontra, amely legalább a pozitív egész számok aritmetikáját próbálja levezetni a tiszta logikából (logikai axiómákból, pusztán logikai levezetési szabályok alapján) és definíciókból. Tekintsük az „összeadás aritmetikájának” $\langle L^+, Z_+ \rangle$ formális elméletét, ahol

- L^+ a nyelvbázis egy standard elsőrendű nyelvvé való bővítése, a $\{\sim, \supset, =, \forall, (,)\}$ logikai konstansokkal, valamint a következő nem logikai konstansokkal: $\{0, S, +\}$. Itt „0” egy névkonstans, „S” egyargumentumú névfunktor, a „rá-

következés" jele, míg „+” egy kétargumentumú névfunktor, az „összeadás” jele.

- Z_+ az elmélet axiómái: bármely x, y változókra és $A(x)$ L^+ -beli nyitott mondatra,

$$\begin{aligned} \forall x \forall y (Sx = Sy \supset x = y), & \quad \forall x (x + 0 = x), \\ \forall x (0 \neq Sx), & \quad \forall x \forall y (x + Sy = S(x + y)), \\ \forall x (x \neq 0 \supset \exists y (x = Sy)), & \quad ((A(0) \& \forall x (A(x) \supset A(Sx))) \supset \forall x A(x)). \end{aligned}$$

Ha A_+ az L^+ nyelv mondatainak egy olyan halmaza, amelyek igazak a szándékolt interpretáción (vagyis ahol a tárgyalási univerzum a pozitív egész számok, s „0” a nulla számot, „S”, valamint „+” pedig a rákövetkezés, valamint az összeadás függvényeket reprezentálja), akkor A_+ az összeadás (elsőrendű) igazságainak a halmaza.

24. Definíció Azt mondjuk, hogy A_+ *halmaz Σ szerint axiomatizálható*, ha létezik olyan effektíve meghatározható Σ axiómahalmaz, hogy bármely $\alpha \in A_+$ mondatra, van α -nak egy standard logikai következtetéseken nyugvó bizonyítása a Σ -beli feltételekből.

25. Presberger tétele Minden A_+ -beli igazság bizonyítható Z_+ -ból, vagyis A_+ Z_+ szerint axiomatizálható.

Mivel Z_+ -ból minden A_+ -beli mondat következik, ezért $\langle L^+, Z_+ \rangle$ az összeadás negációteljes axiomatikus elmélete, vagyis az elmélet bármely α mondatára teljesül, hogy vagy α , vagy $\sim\alpha$ eleme A_+ -nak (mivel α vagy $\sim\alpha$ mindig igaz, és A_+ – definíció szerint – az elmélet összes igazságainak halmaza). Tehát ezen az elméleten a „korlátozott” logicista álláspont megvalósítható. Adjuk azonban L^+ -hoz a szorzás szimbólumát a szokásos értelmezéssel, amely egy kiterjesztett L^1 elsőrendű nyelvet eredményez, és tekintsük L^1 mondatainak az A_1 halmazát, amelyek igazak az aritmetika szándékolt interpretációján; más szavakkal, A_1 most a teljes aritmetika igazságainak halmaza. Adjuk továbbá Z_+ -hoz a szorzásra vonatkozó axiómákat:

$$\forall x (x \cdot 0 = 0),$$

$$\forall x \forall y (x \cdot Sy = (x \cdot y) + x),$$

és jelöljük az így kapott teljes axiómahalmazt Z_1 -gyel. Mint előbb, azt várhatnánk, hogy Z_1 axiomatizálja A_1 -et, vagyis a teljes aritmetikát. De ez nincs így, mert A_1 -ben vannak olyan igazságok, amelyek nem bizonyíthatók Z_1 -ből. En-

nek oka, hogy L^1 -ben már megkonstruálható olyan G Gödel-mondat, amely csak akkor igaz, ha nincs olyan Gödel-száma, amely a $g(G) = g$ Gödel-számú Z_1 -beli mondat egy levezetésének a Gödel-száma¹¹. Vagyis G azt állítja, hogy nem bizonyítható, és feltételezve ennek ellentétét, megmutatható az ellentmondás. Tehát G igaz, de nem bizonyítható Z_1 -ből. Ez nemcsak azt mutatja, hogy a Z_1 axiómák nem adnak teljes aritmetikai elméletet az összeadásra és szorzásra nézve, de azt is, hogy Z_1 bármely konzisztens axiomatikus bővítése az aritmetika nemteljes elméletét eredményezi. A *Principia Mathematica* elmélete természetesen tartalmazza Z_1 -et, ezért lesznek olyan Gödel-mondatok, amelyek igazak, de nem bizonyíthatók a *Principiában*.

Jelöljük az $\langle L^1, Z_1 \rangle$ elméletet PA_1 -gyel, hangsúlyozva, hogy ez az elsőrendű Peano aritmetika, amelyben tehát csak a tárgyalási univerzum objektumai felett kvantifikálunk. Megjegyezzük, hogy ebben az esetben az induktívaxiómákat a következő sémán keresztül specifikáljuk: $((A(0) \ \& \ \forall x (A(x) \supset A(Sx))) \supset \forall x A(x))$, amelynek minden egyes példányában csak elsőrendű kvantifikáció szerepel. Ha az elsőrendű Peano aritmetikát másodrendű logikában kívánjuk rekonstruálni, az előbbi séma a következőképpen módosul: $\forall F((F(0) \ \& \ \forall x (F(x) \supset F(Sx))) \supset \forall x F(x))$. Vegyük észre, hogy ez sokkal erősebb az előbbi sémánál, sőt ez egy egyszerű másodrendű axióma az elsőrendű indukciós séma végtelen számú példányaival szemben. Az elsőrendű indukciós séma csak azokról a tulajdonságokról beszél, amelyek L^1 nyelvben kifejezhetők; a másodrendű indukciós axióma azonban az összes tulajdonságra alkalmazható. A számossági megfontolások még hangsúlyosabbá teszik a különbséget: csak megszámlálható számú nyitott mondat konstruálható L^1 -ben, és így csak megszámlálható számú tulajdonság fejezhető ki benne. De az egész számoknak nemmegszámlálható számú tulajdonsága van, ugyanis ugyanolyan sok különböző tulajdonság van, mint ahány módon felosztható a „rendelkezik/nem rendelkezik vele” bináris kód az egész számok között. Ennek

¹¹ Egy elmélet mondatai mellett premisszaosztályaiból való levezetései is kaphatnak Gödel-számot. Egy ilyen levezetés ugyanis egy véges formulasorozat, amely tagjainak Gödel-számaiból képzett Gödel-szám egyértelműen jellemzi a levezetést.

száma pedig a bináris sorozatok számával egyezik meg¹², azaz nemmegszámlálható.

Terjesszük ki most az L^1 nyelvet az L^2 nyelvre úgy, hogy megengedünk másodrendű kvantifikációt, és tekintsük a PA_2 másodrendű Peano aritmetikát, amelyet úgy kapunk, hogy PA_1 indukciós sémáját helyettesítjük a fentebb felírt másodrendű indukciós axiómával. Hasonlítsuk össze PA_1 -et az így nyert PA_2 -vel, az ismert, fontosabb sajátosságaikat felsorolva (Ruzsa és Máté (1997)):

Az aritmetika elsőrendű nyelve (L^1): A szokásos mondatfunktorkok, elsőrendű kvantorok és változók, azonosság, valamint a megkülönböztető nem logikai konstansok: $\{0, S, +, \cdot\}$. L^1 interpretációja: Mint általában, i) rögzítenünk kell egy U tárgyalási univerzumot. Ezután ii) kijelölünk egy objektumot a tárgyalási univerzumban a „0” interpretációjára; iii) kijelölünk egy $U \rightarrow U$ függvényt a rákövetkezés („S”) interpretációjára; végül iv) kijelölünk $U \times U \rightarrow U$ függvényeket az „+” és „$\cdot$” interpretációi céljából. L^1 szándékolt interpretációja: Az interpretációs tartomány a természetes számok; „0” jelöli a 0-t, az „S” a rákövetkezés függvénye, míg a „+” és a „$\cdot$” jelöli az összeadás és a szorzás műveletet. Sajátosság: Megszámlálhatóan végtelen axióma van csupán, ugyanakkor a tulajdonságok száma nemmegszámlálható (Ez már elővetíti Gödel nem-teljességi tételét). Az elsőrendű Peano aritmetika (PA_1): Az A_1 halmaz tartalmazza az L^1 összes igaz (zárt) mondatait a szándékolt interpretáción.	Az aritmetika másodrendű nyelve (L^2): L^1-hez hozzáadva a másodrendű kvantifikáció eszközszerét ($L^1 \subset L^2$). L^2 interpretációja: Vegyük a másodrendű kvantifikáció standard interpretációját. Durván ez a következőt jelenti: Az elsőrendű $\forall x(Fx)$ csak akkor igaz, ha Fx teljesül, bármilyen interpretációt is rendelünk x-hez. Hasonlóan, $\forall X(Xa)$ csak akkor igaz, ha Xa teljesül, bármilyen interpretációt is rendelünk X-hez. L^2 szándékolt interpretációja: Ugyanaz, így a másodrendű kvantorok végigfutnak a számok összes tulajdonságán. Sajátosság: A matematikai műveletek másodrendben definiálhatók. A másodrendű Peano aritmetika (PA_2): Az A_2 halmaz tartalmazza az L^2 összes igaz (zárt) mondatait a szándékolt interpretáción.
PA_1 axiómarendszere (Z_1): A következő hét jól-formált formula: $\forall x \forall y (Sx = Sy \supset x = y)$, $\forall x (0 \neq Sx)$, $\forall x (x \neq 0 \supset \exists y (x = Sy))$, $\forall x (x + 0 = x)$, $\forall x \forall y (x + Sy = S(x + y))$, $\forall x (x \cdot 0 = 0)$, $\forall x \forall y (x \cdot Sy = (x \cdot y) + x)$, továbbá az összes olyan jól-formált formula, amelyek az alábbi séma példányai: $((A(0) \& \forall x (A(x) \supset A(Sx))) \supset \forall x A(x))$, ahol $A(x)$ az L^1 bármely nyitott mondata.	PA_2 axiómarendszere (Z_2): Az első hét axióma megegyezik Z_1-el, továbbá az elsőrendű indukciós séma végtelen számú példányai helyett, az egyszerű másodrendű axióma a következő: $\forall F((F(0) \& \forall x (F(x) \supset F(Sx))) \supset \forall x F(x))$ Ez sokkal erősebb, mint az elsőrendű indukciós séma, amely csak azokról a tulajdonságokról beszél, amelyek L^1 nyelvben kifejezhetők (megszámlálható számosságúak); a másodrendű indukciós axióma azonban az összes tulajdonságra alkalmazható (nemmegszámlálható számosságúak).
Az elsőrendű Peano aritmetika jellemzése: Jelölje $\{PA_1 \models \cdot\}$ az elsőrendű Peano aritmetika	A másodrendű Peano aritmetika jellemzése: Jelölje $\{PA_2 \models \cdot\}$ a másodrendű Peano aritmeti-

¹² Mivel könnyű megmutatni, hogy a $\Phi: 2^X \rightarrow \{f \mid f: X \rightarrow \{0, 1\}\}$ egy-egy értelmű megfeleltetés, ahol X : a tulajdonságok osztálya.

szemantikai és $\{PA_1 \vdash \cdot\}$ a PA_1 elmélet szintaktikai következményeinek halmazát. Ekkor 1. a végtelen modellekkel rendelkező elsőrendű elméletek nem kategorikusak. A Löwenheim-Skolem tétel alapján, a $\{PA_1 \models \cdot\}$-nek vannak nem szándékolt „nagy” modelljei, amelyek nem izomorfak a szándékolt modellel. PA_1 tehát nem specifikálja a szándékolt modellt. 2. a PA_1 elmélet kielégíti az adekvátsági kritériumot, vagyis $\{PA_1 \models \cdot\} = \{PA_1 \vdash \cdot\}$. 3. az előző pont és a Gödel-féle nemteljességi tétel miatt, vannak olyan aritmetikai igazságok, amelyek szemantikailag nem következnek PA_1 elmélet Z_1 axiómáiból, azaz $A_1 \neq \{PA_1 \models \cdot\}$.	ka szemantikai és $\{PA_2 \vdash \cdot\}$ a PA_2 elmélet szintaktikai következményeinek halmazát. Ekkor 1. PA_2 másodrendű modellje kategorikus, a Löwenheim-Skolem tétel nem teljesül. PA_2 elmélet Z_2 axiómái egy bizonyos értelemben jellemzik a szándékolt modellt, legalábbis egy izomorfizmus erejéig. 2. mivel a másodrendű Peano aritmetika elmélete kategorikus, így $A_2 = \{PA_2 \models \cdot\}$. 3. a PA_2 elmélet megsérti az adekvátsági kritériumot, vagyis $\{PA_2 \models \cdot\} \neq \{PA_2 \vdash \cdot\}$. Ezek szerint a másodrendű Peano aritmetika nem öleli fel az axiómarendszer szemantikai háttérét.
---	---

A logicizmus fő törekvése, hogy az egész matematikát (vagy legalábbis az aritmetikát) levezesse kevés számú, alapvető logikai alapelvből. Ez egy olyan kitételnek tűnik, ami az axiomatizálhatóságról szól, amelyet Gödel az elsőrendű elméletekre (beleértve az elsőrendű Peano aritmetikát is) vonatkozóan megcáfolt. De mi a helyzet az alábbi Frege-Russell kitétellel?

(FR) A PA_2 AXIÓMÁI A TISZTA LOGIKÁBÓL ÉS DEFINÍCIÓKBÓL BIZONYÍTHATÓK.

Ekkor, mivel a PA_2 axiómái együtt az összes aritmetikai igazságot maguk után vonják, ilyen értelemben az egész aritmetikáról már megmutatható, hogy levezethető a tiszta logikából és definíciókból; tehát logikai igazságok, még ha nem is tudjuk egy axiomatikus rendszerben az összes igazságot leírni. Ez a logicizmus eredeti, Frege-Russell-féle törekvését mozdítja elő, nevezetesen, hogy az aritmetikai szükségszerűségeket bizonyos fajta logikai szükségszerűségekre redukáljuk. Tehát (FR) életben tartana egy olyan tételt, amely kényelmesen elgondolható a „korlátozott” logicizmus egyfajta változataként.

A PA_2 úgy vizsgálta az összeadást és a szorzást, hogy azok elgondolhatók olyan függvények definícióiként, amiket a rákövetkezés függvényre vezetünk vissza. Tehát egy definíciós kiterjesztéssel – mellőzve az összeadást és szorzást –, egy alapvető „rákövetkezés” aritmetikához juthatunk¹³. Ugyanakkor, habár igaz az, hogy az A_2 összes modellje izomorf, ez nem jelenti az azonoságukat is egyúttal. Amíg például a 0, 1, 2, 3,... egy lehetséges modell az axiómákra, ugyanígy a 100, 200, 300,... is az, ahol a „rákövetkezés” most százasával halad; vagy ennek számít az 1, 1/2, 1/4, 1/8,... is, ahol a „0”-t úgy vesszük, mint ami az „1”-et jelöli, a „rákövetkezés” pedig most a felezés.

Azért, hogy a deviáns modelleket elkerülje, a logicista bevezethet egy N predikátumot a természetes számok leírására, a következő axiómákkal:

- (1) $N0$ [a nulla természetes szám],
- (2) $\forall x (Nx \supset Sx)$ [minden x természetes számnak van egy egyértelműen meghatározott rákövetkezője: Sx],
- (3) $\forall x (Nx \supset 0 \neq Sx)$ [nincs olyan természetes szám, amelynek rákövetkezője nulla volna],
- (4) $\forall x \forall y (Sx \& Sy \& x \neq y \supset Sx \neq Sy)$,
- (5) $\forall F((F(0) \& \forall x (F(x) \supset F(Sx))) \supset \forall x (Nx \supset F(x)))$ [i) a 0 természetes számnak megvan valamely F tulajdonsága, ii) valahányszor az x természetes számnak megvan az F tulajdonsága, mindannyiszor a rákövetkezőjének, Sx -nek is megvan, akkor minden természetes számnak megvan az F tulajdonsága].

Russell ebben az értelemben mutatja be a Peano axiómákat és érvel mellettük (Russell (1995)). S pontosan ez az öt alapelv, amelyről őt megelőzően Frege azt állította, hogy levezethetők a logikából, továbbá definíciókból. Frege úgy vélte, hogy Hume-elvét posztulálva, a 2 számosságú fogalmakból eljuthat a 2 számhoz. Ennek alapja, hogy annak eldöntése, vajon két fogalom azonos számosságú-e, meghatározható anélkül, hogy előzőleg tudnánk, mik is azok a számosságok, és hogyan lehet őket hozzárendelni az egyes fogalmakhoz.

¹³ Ugyanez nem tehető meg PA_1 esetén, mert ennek vannak olyan furcsa modelljei, amelyben az interpretációs tartomány néhány „száma” nem a nulla rákövetkezője, és ezért szükség van olyan – az összeadásra és szorzásra vonatkozó – axiómákra, amelyek meghatározzák a függvényeket ezen „furcsa” számok felett.

Hume definiáló elve szerint F és G fogalom azonos számosságú, ha a terjedelmükbe eső objektumok között egy-egy értelmű megfeleltetés létesíthető. Tegyük fel, hogy bevezetünk egy Nx terminus-képző operátort a predikátumokon; legyen ez $Nx:Fx$, amelynek olvasata: „ F -et megillető szám (F számossága)”. S jelölje $F \approx G$ az egy-egy értelmű megfeleltetésben megtestesülő ekvivalencia tényét F és G között. Ekkor Hume-elvét a következőképpen írhatjuk fel:

$$Nx:Fx = Nx:Gx \Leftrightarrow (F \approx G).$$

Ez alapján ($F \approx G$) szabályosan definiálható a másodrendű logikában az alábbi módon:

$F \approx G$ PONTOSAN AKKOR, HA $\exists R\{\forall x (Fx \supset \exists y (Gy \ \& \ Rxy)) \ \& \ \forall x \ \forall y \ \forall z (Fx \ \& \ (Gy \ \& \ Rxy) \ \& \ (Gz \ \& \ Rxz) \supset y = z) \ \& \ \forall x (Gx \supset \exists y (Fy \ \& \ Ryx)) \ \& \ \forall x \ \forall y \ \forall z (Gx \ \& \ (Fy \ \& \ Ryx) \ \& \ (Fz \ \& \ Rzx) \supset y = z)\}$.

Frege és Russell alapvetően két állítást fogalmaznak meg:

- (a) Az $Nx:Fx$ -et explicite definiálni tudjuk logikai terminusokban úgy, hogy Hume-elve igazzá váljon.
- (b) A Hume-elv és további definíciók mellett, Peano (1)-(5) axiómái levezethetők.

Nagyon fontos, hogy a két állítást élesen szétválasszuk egymástól:

- Frege koncepciójának összeomlását csakúgy, mint Russell számára problémákat, az (a) állítás védelme okozza.
- Ugyanakkor (b) igaz lehet: Hume-elvének posztulálása és további definíciók mellett, valóban levezethetjük Peano (1)-(5) axiómáit a másodrendű logika egy elfogadható konzisztens rendszerében. Nevezzük ezt – Boolos nyomán – *Frege tételének*.

Frege központi megállapítása *Az aritmetika alapjaiban* az, hogy „az F fogalomhoz tartozó számosság az <<egyenlő számosságú az F fogalommal>> fogalom terjedelme”. Durván fogalmazva, Frege azt állítja, amit tulajdonképpen Russell is, hogy az F fogalmat megillető szám az F -el megegyező számosságú összes osztályok osztálya¹⁴. Így például a *Napunk bolygóinak*

¹⁴ vö. Frege (1999): 68-69. §, valamint Russell (1995): 2. fejezet.

száma a bolygókkal megegyező számosságú összes osztályok osztálya, azaz a kilenc elemű osztályok osztálya (objektum). Ebből a definícióból a Hume-elv közvetlenül adódik: $F\text{-et megillető szám} = G\text{-t megillető szám} \Leftrightarrow \text{az } F\text{-el megegyező számosságú összes osztályok osztálya} = \text{a } G\text{-vel megegyező számosságú összes osztályok osztálya} \Leftrightarrow F \text{ azonos számosságú } G\text{-vel.}$

De az „F-et megillető szám” Frege-Russell-féle meghatározása, vajon konform-e a logicista programmal, amely csak logikai fogalmakat kíván segítségül hívni? Röviden, az osztály fogalma logikai fogalom-e? Frege hitt ebben, hiszen az így értelmezett osztály-fogalom egyszerűnek és problémamentesnek tűnik. Nem gondolta, hogy lényeges dolog lenne, mik az osztályok. Ha megnézzük, mondjuk, mi a közös azokban a fogalmakban, amiket a 9 szám illet meg, nyilvánvaló lehet a válasz: az („ $\approx$ ” ekvivalenciából fakadó) osztályozásukban ugyanabba az osztályba tartoznak. Megfelelve minden tulajdonságnak, a dolgok osztálya az, ami rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. S éppen ez az, ami végzetes Frege rendszerére. Tekintsük ugyanis azt a tulajdonságot, hogy néhány (az összes?) osztály nem eleme önmagának. Frege értelmezése szerint ekkor lesz a dolgoknak egy olyan osztálya, amelyet ez a tulajdonság – nevezzük R-nek – határoz meg. Tehát $R = \{x: x \notin x\}$, azaz $x \in R \Leftrightarrow x \notin x$. Most kérdezhetjük, hogy R vajon elem-e R-nek, és rögtön a Russell-paradoxonnal szembesülünk.

Russell álláspontja ebben a kérdésben összetettebb. Valójában úgy véli, hogy az osztályok logikai fikciók csupán és át tudjuk fordítani az osztályokról szóló beszédet „kijelentésfüggvényekről” szóló beszédre. Azonban, hogy elkerülje a paradoxonokat, típusokba rétegyi a kijelentésfüggvényeket, és szabályokat ró ki arra, hogy a különböző típusú szimbólumok mely kombinációi megengedettek. Az élet itt kezd bonyolódni, ugyanis amikor a kívánt paradoxon-elkerülő rétegek rendszerét működésbe hozza, kiderül, hogy néhány alapvető eredményt nem tud bizonyítani. Ezért fel kell vennie egy újabb axiómát – az ún. reducibilitási axiómát –, hogy el tudjon tekinteni típus-rétegektől bizonyos esetekben. Az egész nem valami vonzó. Ramsey ugyan javasolt egy egyszerűsítést Russell típuselméletére, de még ez az egyszerűsítés is igényel egy nem logikai axiómát, az ún. végtelen axiómáját. Úgy tűnik tehát, hogy a

logicistáknak fel kell adni azt a próbálkozást, hogy a Hume-féle elvből valami alapvetőbbet vezessenek le, mondjuk az „F-et megillető szám” explicit definícióját.

Ahogy már fentebb utaltunk rá, van azonban egy másik megközelítés is: miért nem kezeljük a Hume-elvet posztulátumként, egy kontextuális definíciót adva az $Nx:Fx = Nx:Gx$ formula állításainak? E célból, tekintsük a másodrendű logika nyelvét, amelybe vegyünk fel egy „N” terminus-képző operátort a következő szintaktikai szabállyal: legyen v változó, $A(v)$ egy bizonyos mondat; ekkor „ $Nv:A$ ” egy jól-formált, 1-típusú kifejezés (terminus). Ilyen módon elképzelhető egy olyan H másodrendű elmélet, amelyet kizárólag az alábbi posztulátum határoz meg:

$$(HP) \quad \forall F \forall G (Nx:Fx = Nx:Gx \Leftrightarrow (F \approx G)), \text{ ahol}$$

„ $F \approx G$ ” azt a standard másodrendű definíciót rövidíti, hogy „egy-egy értelmű reláció létesíthető F és G között”¹⁵. Az ismerős kapcsolat az F és G közötti egy-egy értelmű megfeleltetés és azonos számosságuk között, indokolja, hogy miért olvasható „ $Nx:Fx$ ” úgy, mint „F-et megillető szám”. Ez azonban csak egy heurisztikus magyarázat, hivatalosan nem lehet többet beleolvasni „N”-be annál, mint amit (HP) megenged.

Frege tétele mármost az, hogy levezethetjük a másodrendű Peano aritmetika axiómáit H -ban, a „természetes szám” megfelelő definícióját, a „0”-t és a „rákövetkezést” használva. Emlékezzük vissza, hogy PA_2 axiómái viszont szemantikailag maguk után vonják az összes aritmetikai igazságot, hiszen A_2

$= \{PA_2 \models \cdot\}$. Mivel azonban $\{PA_2 \models \cdot\} \neq \{PA_2 \vdash \cdot\}$, azaz az adekvátsági kritériu-

mot PA_2 megsérti, ezért nem áll fent, hogy az axiómákból az összes aritmeti-

¹⁵ Itt jegyezzük meg (HP) egyik azonnali következményét: bármely F -re $Nx:Fx$ létezik. Ugyanis $Nx:Fx = Nx:Fx \Leftrightarrow (F \approx F)$, azaz $Nx:Fx = Nx:Fx$. Így az elsőrendű logika szerint triviálisan adódik, hogy $\exists y (Nx:Fx = y)$. Tehát az „ $Nx:Fx$ ” terminus tényleg referál.

kai igazság levezethető lenne a másodrendű logika valamely axiomatikus rendszerében, valamely másodrendű kalkulusban.

Frege tétele eszerint egy feltételes állítást fogalmaz meg: ha rögzítjük axiómaként (HP)-t, ezután pusztán a logika, valamint definíciók elégségesek ahhoz, hogy a Peano axiómákat levezessük. Megjegyezzük azonban, hogy (HP) nem igaz véges interpretációs tartományon. Tekintsünk pl. egy kételemű tartományt. Ekkor a predikátumok az egyenlő számosságú predikátumok három osztályába fognak beleesni (az üres predikátumok, valamint azok, amelyek csak egy, illetve amelyek két objektumra teljesülnek). Ha F, G és H három különböző osztályhoz tartozik, akkor (HP) alapján – ahogy azt a legutóbbi lábjegyzetben kimutattuk – az $Nx:Fx$, $Nx:Gx$ és $Nx:Hx$ mindegyike létezik és különbözők, tehát a tartománynak legalább három elemet kell tartalmaznia, ami ellentmondás. Ez az érv természetesen általánosítható bármely véges interpretációs tartományra. Látható, hogy (HP) a végtelen egyfajta axiómája, és így talán nem meglepő, hogy (HP) elfogadása mellett, egy bizonyos módon aritmetikát tudunk konstruálni. Csak arra van szükségünk, hogy kiválasszuk a tartományban az elemek egy végtelen sorozatát, egy bizonyos természetes rendezés szerint, amelyek számokként szolgálnak. Ezután már beszélhetünk a sorozat egy eleméről, mint ami „rákövetkezője” egy másiknak.

De hogyan valósítható meg mindez? Mindenekelőtt szükséges definiálnunk a „Nat” (természetes szám), a „0” és a rákövetkezés „ S_{xy} ” relációját olyan módon, hogy (HP)-ből generálják az öt Peano axiómát.

1. A *nulla* pl. olyan dolgok száma, amelyek nem azonosak önmagukkal:

$$0 =_{\text{def}} \neg \exists x (x = x).$$

2. Tegyük fel, hogy a F terjedelmébe esik. Ekkor az F-et megillető szám eggyel nagyobb lesz azon dolgok számánál, amelyek F-be esnek, de nem azonosak a-val. Ez indokolja a *rákövetkezés reláció* alábbi definícióját:

$$S_{xy} =_{\text{def}} \exists F \exists a (Fa \ \& \ y = \neg \exists z (Fz \ \& \ x = \neg \exists z (Fz \ \& \ z \neq a)).$$

3. Tekintsük a kapcsolatot az őse és a szülője relációk között. Az x őse y-nak, ha x szülője y-nak, vagy x szülője y szülőjének, vagy x az y szülőjének szülőjének szülője, é.i.t. Általánosabban, tekintsük az R^*_{xy} relációt, ami akkor teljesül, ha R_{xy} , vagy $\exists z_1 (R_{xz_1} \ \& \ R_{z_1y})$, vagy $\exists z_1 \exists z_2 (R_{xz_1} \ \& \ R_{z_1z_2} \ \& \ R_{z_2y})$, é.i.t. Azt is mondhatjuk, hogy R^* örököse R-nek. Így a természetes számok nyilvánvaló definíciója az, hogy x természetes szám, ha „0”, vagy ha a „0” rákövetkezés relációjának örököse, ami triviálisan adja az első Peano axiómát:

$$\text{Nat } x =_{\text{def}} (x = 0 \vee S^*0x).$$

4. Eszerint, teljessé akkor tehetjük az alapvető definícióinkat, ha definiálni tudjuk egy reláció örökösét.

- Azt mondjuk, hogy egy F tulajdonság *R-örökített*, ha adott Fx és Rxy , akkor Fy . Ekkor
 - ha R^*xy , akkor y rendelkezni fog minden R -örökített tulajdonsággal, amellyel x rendelkezik; s fordítva,
 - ha y rendelkezik minden R -örökített tulajdonsággal, amellyel x rendelkezik, akkor y az x örökösével relációban áll.

Ez magyarázza a következő definíciót:

$$R^*xy \Leftrightarrow \forall F(\forall w \forall z (Fw \& R wz \supset Fz) \& \forall z (R xz \supset Fz)) \supset Fy.$$

- Mármost azt mondjuk, hogy x természetes szám, ha x a 0 rákövetkezőjének ősével relációban áll. Sx csak akkor áll 0 ősével relációban, ha x rendelkezik az összes 0 rákövetkezés-örökített tulajdonságával. Tehát ha x természetes szám, akkor bármely olyan tulajdonsággal rendelkezik, ami a rákövetkezés reláció szerint örökített, amellyel a 0 is. Vegyük észre, hogy ez nem más, mint a *Peano-féle indukciós axióma*.
5. Végül az maradt hátra, hogy megnézzük, hogyan juthatunk a tulajdonságok szükséges végtelen sorozatához, amely a természetes számok végtelen sorozatát adja, azon dolgok száma, amelyek kielégítik ezeket a különböző tulajdonságokat. Ehhez tekintsük a következő sorozatot: $x \neq x$; $x = 0$; $x = 0 \vee x = S0$; $x = 0 \vee x = S0 \vee x = SS0$; é.í.t., ahol természetesen $y = S0$ pontosan akkor, ha Sxy . Ahogy kívántuk, azon dolgok száma, amelyek kielégítenek minden egyes predikátumot, a 0 , $S0$, $SS0$, $SSS0$, é.í.t.
6. Azt a fontos tételt kell még belátni, hogy ha x egy természetes szám és y azon számok száma, amelyek vagy megelőzik x -et vagy azonosak vele, akkor y rákövetkezője x -nek. Azaz: ha $\text{Nat } x$ és $y = \text{Nz}:(\text{Nat } z \& (S^*zx \vee z = x))$, akkor Sxy . Ez a tétel, valamint a többi Peano axióma bizonyítható egy, – a Hume-elv által kibővített – másodrendű, konzisztens elmélet keretei között (Boolos és Heck (1996)).

Úgy tűnik tehát, hogy másodrendű logikát és definíciókat, valamint a Hume-elvet használva, létrehozhatunk egy olyan Peano aritmetikát, amely A_2 -t, azaz az összes aritmetikai igazságot tartalmazza. De mennyire védi meg, és mennyire igazolja mindez a logicizmus álláspontját? Nos, ez vita tárgya lehet. A megítélés úgy látszik, függ

- a *Hume-elv státusától*. Biztosítható-e olyan konzisztens, absztrakt elv létezése, amely a szándékolt elmélet objektumainak struktúrájával rendelkezik. Az aritmetika esetén ilyen lehetne (HP), amely olyan objektumok egy sorozatának létezését garantálja, amely a természetes számok struktúrájával rendelkezik. Az irányzat egyik neves alakja, Boolos azt javasolja, hogy hasonlítsuk össze a Hume elvet egy másik absztrakt elvvel,

a *paritási elvvel*. Vezessük be az „**F • G**” jelölést arra a tényre, hogy F és G *párosan különbözik* egymástól. Ez a reláció akkor teljesül, ha azon objektumok száma, amelyek F, de nem G, vagy G, de nem F terjedelmébe esnek, páros szám (és véges). Ekkor a paritási elv pontos alakja a következő:

$$(PP) \quad Px:Fx = Px:Gx \Leftrightarrow (F \bullet G), \text{ ahol}$$

„Px” egy másik terminus-képző operátor, éppen úgy, mint „Nx”, és „•” egy másodrendű terminusokban definiált ekvivalencia-reláció csakúgy, mint „≈”. Az elképzelés az, hogy „F • G”, azaz F és G paritása megegyezik, ha legfeljebb véges azon dolgok száma, amelyek vagy F és nem G, vagy G és nem F terjedelmébe esnek. Az „F • G” kifejezhető másodrendű terminusokban, ehhez mindösszesen vennünk kell két, egymást nem átfedő D_1 és D_2 tulajdonság-osztályt, amelyek végesek és egyenlő számosságúak, és amelyekre teljesül, hogy $D_1 \vee D_2$ egyenlő számosságú az $(F \& \sim G) \vee (\sim F \& G)$ -vel¹⁶. Azt gondolhatnánk, hogy a „paritás” fogalmi tisztázása révén, megragadtuk azt a tényt, hogy van az objektumoknak egy olyan párja, amelyek kielégítik (PP)-t. A probléma csak az, hogy megmutatható (Boolos (1996), p. 250): a paritási elv csak véges interpretációs tartományon igaz.

Egy rendkívül érdekes eredményhez jutottunk. Legyen τ egy terminus-képző operátor és ρ egy ekvivalencia-reláció, ekkor a „ $\tau x:Fx = \tau x:Gx \Leftrightarrow (F \rho G)$ ” általános elv átfordítható egymással össze nem egyeztethető státuszú, két konzisztens elvre: a Hume-elvre és a paritási elvre, amelyek egyszerre sohasem lehetnek igazak, mivel az első csak végtelen, a másik csak véges interpretációs tartományon teljesül. Tehát nem lehet, hogy mind a Hume-elv, mind a paritási elv, definiáló logikai igazságok legyenek, mivel nem definiálhatják ugyanazt a modellosztályt, azaz nem ugyanazok a modelljeik. Az aritmetika esetén, a Hume-elvvel

¹⁶ Hasonlóan (HP)-hez, (PP)-nek is azonnali következménye, hogy bármely F-re $Px:Fx$ létezik. (PP) ugyanis implikálja, hogy $Px:Fx = Px:Fx \Leftrightarrow (F \bullet F)$, és mivel a jobboldal triviális, a $\exists y (Px:Fx = y)$ már könnyen nyerhető. Tehát (PP) elfogadása azt jelenti, hogy minden tulajdonság tényleg rendelkezik paritással.

szemben, a paritási elv nem biztosítja az objektumok egy olyan tartományának létezését, amely a természetes számok struktúrájával rendelkezik.

- *magától a másodrendű logika alkalmazásától.* Még ha minden felmerülő kérdést, amely a Hume-elvvel vagy más absztrakt elvvel kapcsolatban felvetődik, sikerülne is tisztázni, a technikai eredmények akkor is egy magasabb rendű logikai rendszertől függenek. Úgy tűnik, hogy a matematikusoknak egy kihívással kell szembenéznük: vagy egy adekvát logikai rendszert használnak, amely azonban nem kategorikus (beleértve az aritmetikát is) és vannak az elméletnek olyan modelljei, amelyek nem izomorfak a szándékolt modelljével. A másik lehetőség, hogy egy nem axiomatizálható logikát választanak, amelyben rátalálhatnak az aritmetika kategorikus elméletére, és az elmélet axiómái képesek jellemezni a szándékolt modellt legalább egy izomorfizmus erejéig.

De a másodrendű logika mennyire logika valójában? Számos matematikai állítás megfogalmazható a másodrendű logika nyelvén. Quine álláspontja az, hogy a másodrendű logika csupán a halmazelméletnek egy álruhába öltöztetett része, mivel olyan sok matematikát tartalmaz, hogy már nem lehet logikának tekinteni. Igazat is adhatnánk Quine-nak, ha lenne éles határvonal logika és matematika között. Shapiro (1991) azt állítja, hogy ha valaki elfogadja a klasszikus matematikát, akkor a matematika szemantikájának tanulmányozására egy magasabb rendű logika megfelelőbb eszköz, mint az elsőrendű, mert rendelkezik azzal a kifejezőerővel, ami a matematikai konstrukciók, elméletek megragadásához szükséges. Látni fogjuk, hogy számos filozófiai probléma elemzése során legvégül az elsőrendű logika használatába fogunk ütközni, ezért e kérdés meglehetősen fontos.

- Végül maradnak az *ismeretelméleti fenntartások*. A matematikai elméleteknek a logikára való visszavezethetősége alapvetően problematikusnak tűnik, mivel vannak olyan alapvető szakmai axiómák a matematika elméleteiben, amelyek nem logikaiak.

2.3. A tradicionális logikával szembeni néhány további kihívásról

Már Arisztotelész felismerte, hogy amikor a következtetések logikai helyességét vizsgáljuk, állítások közötti viszonyt kell meghatározni: a premissák igazságából következik-e a konklúzió helyessége. Ezt nevezik a logikában az *arisztotelészi elv*nek. Persze ezen elv alapján még többféle módon lehet megadni és vizsgálni az említett viszonyt, éppen ezért Arisztotelész e viszonyt a következtetésbe bevitt állításokra vonatkozó feltételekkel karakterizálja, egyértelműsíti. Azokat tekintjük logikailag igaz állításoknak, amelyeknek csak a logikai szerkezete, illetve a bennük szereplő logikai konstansok jelentése alapján azok.

A helyes következtetés minősítése a logikai szerkezeten túl semmi másra nem támaszkodhat, más információt nem szabad figyelembe venni. Így a következtetés helyessége független attól, hogyan interpretáljuk a felbonthatatlan alkatrészek helyére lépő paramétereket. Legyen Γ formulák egy tetsző-

leges osztálya: $\Gamma \subseteq \text{Form}$. Definiáljunk egy $\vartheta(\Gamma) = \{A \in \text{Form} : \Gamma \models A \text{ vagy } \Gamma \vdash A\}$

halmazt, amelyet következmény-halmaznak nevezünk. Logikailag *helyes kö-*

vetkeztetésről akkor beszélünk, mind szemantikai (ha $\Gamma \models A$ teljesül a $\vartheta(\Gamma)$ -

ban), mind szintaktikai (ha $\Gamma \vdash A$ teljesül a $\vartheta(\Gamma)$ -ban) téren, ha az alábbi tulaj-

donságok teljesülnek: i) $\Gamma \subseteq \vartheta(\Gamma)$, ii) $\Gamma \subseteq \nabla \Rightarrow \vartheta(\Gamma) \subseteq \vartheta(\nabla)$, iii) $\vartheta(\Gamma) = \vartheta(\vartheta(\Gamma))$.

Az arisztotelészi elven nyugvó logikailag helyes következtetések két igazságértéken alapulnak: az állításokat igaz-hamis diszjunkt osztályokra bontják, és ezek együttese lefedi az állítások teljes tartományát. Ez a formális elméleteink kezelésére tökéletesen megfelel, gondoljunk csak az 1. fejezet nyitó bekezdésében elmondottakra. Egy elmélet tétele vagy igaz vagy hamis, nem lehet kicsit igaz, kicsit hamis. A klasszikus logika kifogástalanul juttatja érvényre a *tertium non datur* és az ellentmondás elvét¹⁷, amelyek a deduktív rendszerek metodológiájának alappillérei.

A klasszikus logika módszertanával szemben azonban több kihívás is megjelent. Néhányat, magából az elsőrendű logikai rendszerből fakadót, már említettünk a logizmus vizsgálata során. Egy másik kihívást jelent e módszertannal szemben, a később vizsgálandó, konstruktivista (intuicionista) irányzat. Azonban az egész módszertant alapjaiban megkérdőjelezi, az a Hérakleitosztól kiinduló és Hegel dialektikájában új formát öltő szemlélet, amely a világ megismerését nem koherens keretek között képzelel el, hanem ellentmondásokat enged meg a gondolkodásban. Ezek az ún. parakonzisztens logikai rendszerek. Ismeretes, hogy a logikai következmény-reláció tradicionális elméletében egy logikai ellentmondásból bármely kijelentés következik. A parakonzisztens logika képviselői így érvelnek: a mindennapi diskurzusban és a tudomány területén is előfordulnak ellentmondásos diskurzusok és elméletek, amelyek mégis sikeresen működnek. Ezért értelmes dolog a következmény-reláció olyan elméletének felépítése, amelyben az előbbi tradicionális szabály nem érvényes.

Az első formális parakonzisztens rendszert, ún. diszkurzív logikaként, Jaśkowski (1948/1969) fejlesztette ki. Elképzelésének lényege a következő. Egy adott diskurzus minden résztvevője bizonyos információt közöl a többiekkel, és feltesszük, hogy ezek az állítások az egyes résztvevők meggyőződése alapján igazak. De az, hogy mi igaz a diskurzusban, a résztvevők által tett állítások összességéből adódik. Mármint, minden egyes résztvevő véleménye lehet önmagában konzisztens, miközben másokéval inkonzisztensnek bizonyulhat. E

¹⁷ Arisztotelész is a logika e két alapelvét nevesíti a *Metafizikában*: i) az ellentmondás elve: „A legbiztosabb alapelv ez: lehetetlen, hogy egy és ugyanaz az állítmány egy és ugyanazon alanyhoz egyszerre és ugyanazon vonatkozásban hozzá is tartozzék, még ne is”. (Arisztotelész: *Metafizika* Γ, 1005b, 19-23.); ii) a *Tertium Non Datur* elve: „Az ellentmondás két tagja között nem állhat fent semmi közbeeső, hanem mindenről mindent vagy állítani, vagy tagadni kell.” (Arisztotelész: *Metafizika* Γ, 1011b, 23-24.).

diszkurzív logika formalizálása modális logikával történik. Jaśkowski a résztvevők meggyőződését olyan mondatok halmazaként képzei el, amelyek az S5 modális rendszer modelljének egy világában igazak. Tehát a diskurzus egyik résztvevőjének A állítását úgy interpretálja, hogy $\Diamond A$: „lehetséges, hogy A”. Mivel egy A mondat igaz lehet az S5 modelljének egyik világában, míg egy másikban hamis, így A és $\neg A$ is egyszerre teljesülhet egy racionális diskurzusban, ha a résztvevők bizonyos ügyekben nem értenek egyet egymással.

Egy másik parakonzisztens rendszer, az ún. adaptív logika, amelynek fókuszában a nem monoton következtetések állnak, amelyek inkonzisztens premissza-halmaz esetén okoznak parakonzisztenciát. Illusztrációként vegyünk két következtetést:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| A madarak repülnek (i). | Minden pingvin madár (iii). |
| Twity madár (ii). | A pingvinek nem repülnek (iv). |
| Tehát Twity repül (konkl.). | Twity pingvin (v). |
| | Tehát Twity nem repül (konkl.). |

Ha az öt igaz tényt kifejező premisszát együtt tekintjük, akkor az (i) és (ii) premisszákból való következtetés, valamint a (iii), (iv) és (v) premisszákból való következtetés, ellentmondó konklúziót eredményeznek. Ez a klasszikus következtetésekben elképzelhetetlen: az igaznak vett premisszák bővítése nem eredményezhet ellentmondást a konklúzióban – ez a következtetések monotonitási elve¹⁸. A megoldás az lehet, hogy az ún. *univerzálisan generalizáló* premissza-állításokat („a madarak repülnek” és „a pingvinek nem repülnek”) egymással szembeállítjuk, és a specifikusabbat tekintjük erősebb állításnak a következtetésben, tehát ezt használjuk fel. Mivel minden pingvin madár, de nem minden madár pingvin, ezért Twity-t inkább pingvinnek tekintjük, mint madárnak a következtetésben, vagyis a (iv) premissza specifikusabb az (i)-nél, és ezért ezt használjuk erősebb állításként a következtetésben. Tehát a végső konklúzió, hogy (i)-(v) tudás-hipotézisrendszerből az következik, hogy Twity nem repül.

A szakirodalomban többféleképpen felépített parakonzisztens logika ismert (az említetteken túl, pl. releváns logika, dialektikus logika, stb.). Bár plauzibilis érvéket hoznak fel álláspontjuk védelmére, a parakonzisztens logika művelőinek gyakran interpretációs nehézségekkel kell szembenézniük, mivel az eredményül nyert logikai kalkulus meglehetősen különös vagy csökevényes, és természetesen más logikai konstansokat és szabályokat definiál, mint

¹⁸ Ez a logikailag helyes következtetések jellemzésére adott fenti ii) tulajdonság: $\Gamma \subseteq \nabla \Rightarrow \vartheta(\Gamma) \subseteq \vartheta(\nabla)$.

Hagyományos alakja pedig a következő: Γ, Δ formulahalmazra és A formulára: ha $\Gamma \models A$, akkor $\Gamma \cup \Delta \models$

A.

a tradicionális (Priest (2002)). Úgy tűnik, hogy a normativitás, a dedukció nem emancipálhatja magát egészen a konzisztencia súlya alól.

A klasszikus logikával szemben egy újabb kihívást jelent az a kritika, hogy a klasszikus logika a világot csak feketén és fehéren képes láttatni. A nyelv és világ kapcsolata alapján egy **P** predikátum bevezetésével a világ is két osztályra „esik szét”: **P**-re és **nem-P**-re. Vegyük például a *kopasz* predikátumot! Ez a predikátum az embereket két osztályra bontja: a kopaszokéra és a nem kopaszokéra. Már pedig joggal felvethető, hogy a valóságban az ilyen éles dichotómia nem áll fent mindig, mert a predikátumok nagy része nem rendelkezik jól meghatározott igazságtartománnyal, extenzióval. A *kopasz* predikátuma esetén még talán nem ez a helyzet¹⁹, de például az *okos* vagy *szép* predikátum esetén már könnyen belátható e nehézség. A kihívásra a logika többfajta választ adott, így például a többértékű logikai rendszereket²⁰, vagy – ismét csak az extenzionalitási elv feladásával, de más stratégiával – a predikátumok intenziójának bevonását a szemantikai vizsgálatokba, elmenve a szemantikai értékresek felvállalásáig és kezeléséig²¹.

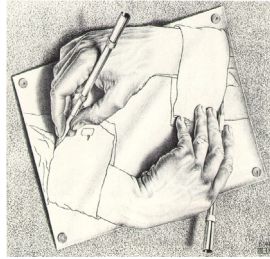
¹⁹ a kopaszság megítélésében nehézséget jelenthet, mikortól tekintünk valakit kopasznak: ha egy hajszála hiányzik még nem kopasz, ha két hajszála hiányzik még mindig nem az, é.í.t., de bizonyos hajszál elvesztése után már kopasznak tartjuk. Így a census megítélése e predikátum esetén is a szóban forgó problémához vezet.

²⁰ A többértékű logikai rendszerek részben vagy egészben megsérteneek három klasszikus elvet, hogy i) pontosan két igazságérték létezik: igaz, hamis; ii) a nyelv minden mondata minden egyes interpretációban meghatározott igazságértékkel rendelkezik; iii) bármely mondat igazságértékét a mondat adott interpretáció szerinti részeinek extenziója határozza meg (az extenzionalitás elve). Kleene, például, a rekurzív függvények elméletéből származó problémák kiküszöbölésére (hogy egy jól működő algoritmus bizonyos bemenetek esetén nem ad eredményt) olyan többértékű logikai rendszert hozott létre 1938-ban, amelyben a két igazságérték mellett bevezet egy újat, a definiátlanságot, és így rendszerében egy összetett mondatnak akkor is lehet igazságértéke, ha bizonyos komponensei nem rendelkeznek igazságértékkel. Egy másik többértékű logika, a fuzzy logika az első alapelvet azért adja fel, felvállalva akár a kontinuum sok igazságértékét is, hogy tudásunk bizonytalanságát képesek legyünk kezelni. Hogyan értelmezzük például az „elég magas emberek” osztályát? A fuzzy logika atyja, Zadeh 1965-ben bevezeti a *fuzzy halmaz* fogalmát: ha X az x objektumok egy osztálya, akkor az X -en értelmezett fuzzy halmaz, rendezett párokból álló, $A = \{(x, \mu(x)): x \in X\}$ halmaz. A $\mu(x)$ -et *tagsági függvénynek* nevezzük, ami leképezi X -et M tagsági értékebe, és megmutatja az x tagsági arányát az A -ban. A fuzzy kifejezések igazságértéke nem egyszerűen igaz (1) vagy hamis (0), hanem egy szám 0 és 1 között. A fuzzy logikában az összetett kifejezéseket az alkatrészek értékeiből számítjuk ki, a fuzzy logika szabályai szerint.

²¹ Ruzsa és Máté (1997), p. 295-303

Úgy véljük azonban, hogy a koherens informális háttérben a klasszikus kétértékűség uralkodik. Tehát a világot és a logikai, matematikai rendszereinket – amelyekben esetenként több igazságérték kezelésének igényével is felépünk – egy két igazságértékű informális híd kapcsolja össze. Amikor a több értéket kezelni tudó kalkulusokat létrehozunk, a hozzájuk rendelt szemantika mögött mindig megmagyarázzuk a harmadik, negyedik,..., esetleg a kontinuum sok igazságérték „származását”, alkalmazási módját és motivációit – a kétértékű informális háttérben (ld. fuzzy igazságértékek).

Azt, hogy az informális háttérben kétértékűség uralkodik, úgy véljük, arra vezethető vissza, hogy a logikai és a matematikai rendszerek konstruálását olyan informális döntések, distinkciók előzik meg, amelyeknek két kimenetele lehetséges, illetve visszavezethető két kimenetelre, és ez rányomja bélyegét az egész informális háttérre. Ilyen döntések húzódnak meg már a természetes nyelv fogalmi használata (különösen a tudományos elméletek esetén elengedhetetlen jelentésrögzítés) mögött is, amelyről részletesebben a 4. fejezetben fogunk beszélni, vagy ugyanez érvényesül a szakmai axiómák, az egzisztencia-feltételek rögzítése esetén is: bizonyos objektumokat, bizonyos állításokat kitüntetünk, felvesszük rendszereinkbe, másokat pedig nem. Az informális háttér egyik fontos elemében, a metanyelvben is fellelhetők informális döntések, amelyek kétértékűsége abban érhető utol, hogy a metanyelv a formális nyelvről beszél, a formális nyelvben pedig egy kategóriaosztály – a természetes nyelv kategóriáinak elmosódott határaival szemben (egyfajta szűkítés árán) – sokkal élesebb kontúrral körvonalazódik, és ezért hogy egy nyelvi kifejezés alkalmazható-e valamely objektumra, csak két esetet feltételez: igen vagy nem. Emlékeztetünk arra, hogy a 2.1. fejezetben ismertetett nyelvbázisba, mint az elsőrendű nyelvek metanyelvének egy fragmentumába, a kétértékűséget közvetlenül tápláltuk be, mögötte tehát az említett szándék húzódott meg. A tárgynyelvről a metanyelvre tehát elvégezhető egy ilyen két igazságértékre történő *informális redukció*. Az utolsó fejezet végén megmutatjuk, hogy ez a redukció az élő, önfejlődő matematikai rendszerben hogyan értelmezhető. A matematikai rendszerek informális háttérében a klasszikus logika két igazságérték létezését kimondó alapelve védhetőnek tűnik.



3. A matematikai igazság filozófiai problémái

Az igazság problémája az ismeretelmélet egyik igen kényes és problematikus kérdése. Nem könnyű ennek a fogalomnak megragadása a matematikában sem. Talán akkor jutunk közelebb az igazsághoz, ha visszamegyünk ahhoz a kérdéshez, hogyan hozunk létre matematikai elméleteket. Hiszen nyilván ezt a cselekvést, formalizálási szándékot éppen az motiválja, ahogy erről az 1. fejezetben is szóltunk, hogy az igaz kijelentéseket (következtetéseket) próbáljuk megkülönböztetni azoktól, amik hamisak. Abban a fejezetben felvázoltuk ennek a formalizálási folyamatnak a főbb és szükségesnek látszó állomásait is. Kerülve a felesleges ismételéseket, két olyan fontos elemet emelnénk ki, amelyek az igazságfogalom körvonalazásában fontosnak tűnnek, és kapcsolatban vannak a fent kifejtett állásponttal.

A matematikai elméletekben az igazságot úgy fogják fel, mint állítások (formális kifejezések) tulajdonságát: arra a kérdésre kell választ adni, mit értünk azon, hogy egy állítás az elméleten belül igaz. Éppen erre szerkesztették az igazság koherenciaelméletét. Ez lesz az egyik igazságelmélet, amellyel foglalkozni fogunk. Másfelől, a realizmus álláspontján állva, az absztrakció bizonyos szintjén, a matematikai állítások mint nyelvi kifejezések, kapcsolatba hozhatók a nyelven kívüli világgal. A mindennapi nyelvhasználatban egy kijelentés akkor igaz, ha a „dolog”, amit kifejez, *de facto* van. Tehát az igazság karakterizálásánál fontos szempont, hogy a nyelvi kifejezés és az a minőség, amelyet kijelentésünkkel megjelölünk, valóban kijár-e a „dolognak”. Ez éppen az igazság korrespondencia-elméletének tárgya, ami az igazság ügyében zajló vizsgálatunk másik eleme lesz. Felvethető még az igazság egy pragmatikus és egy konvencionalista megközelítése is. Mivel azonban mind a praxist, mind a konvenciókat mi hozzuk létre, meg fogjuk mutatni, hogy egy pragmatikus és egy konvencionális igazságfelfogás végső soron ugyanannak a problémának (Münchhausen-trilemma) más stratégiákkal való megközelítése, mint amilyenek az előbbi igazságelméletek voltak; azzal a kiegészítéssel, hogy ekkor igazságok nem léteznek, csak konstruáljuk őket, illetve a matematikusok meggyezésén alapul.

3.1. Az igazság korrespondencia-elmélete

Az igazság meghatározásának e klasszikus felfogását már Arisztotelész *Metafizikájában* fellelhetjük. A következőképpen ír róla: „Hamis az, amikor azt mondják arról, ami van [„létezik”], hogy nincs [„nem-létező”], vagy amikor arról, ami nincs [„nem-létező”], azt mondjuk, hogy van [„létezik”]; igaz pedig az, amikor azt mondjuk arról, ami van [„létező”], hogy van [„létezik”], vagy amikor arról, ami nincs [„nem-létező”], azt mondjuk, hogy nincs [„nem létezik”].”²²

Russell, az alábbi módon érvel a korrespondencia-elmélet mellett: „Ha egy olyan hitet veszünk, mint Othello azt hiszi, hogy Desdemona szereti Cassiót, Desdemonát és Cassiót a tárgy-tagoknak, a szeretést pedig a tárgy-relációknak fogjuk nevezni. Ha van egy komplex egység: Desdemona szerelme Cassio iránt, amelyben a tárgy-reláció által relációba hozott tárgy-tagok ugyanabban a rendben állnak, mint a hitben, akkor ezt a komplex egységet a hitnek megfelelő ténynek nevezzük. Eszerint egy hit igaz, ha van neki megfelelő tény, és hamis, ha nincs neki megfelelő tény. Belátható, hogy az elmék nem hozzák létre az igazságot, illetve hamisságot. Csak hitet hoznak létre. [...] *A hitet egy tény teszi igazzá* (ha az megfeleltethető neki - a szerző)”²³

Folytatva Russell eszmefuttatását tegyük fel, hogy vélekedéseinket interperszonálissá kívánjuk tenni. Ezt csak úgy tehetjük meg, hogy amit hiszünk kifejezésekbe foglalva közöljük²⁴, valamilyen módon, például a nyelv által. Ekkor a kijelentéseink igazsága hitünk igazságától függ, tehát az eddigiek szerint az igazság, illetve hamisság a tény és a kijelentés megegyezését vagy meg nem egyezését jelentik, éppen úgy, ahogy ezt Arisztotelésztől idéztük. Ez az igazság korrespondencia-elmélete.

Vegyük észre, hogy a korrespondencia-elmélet mögött egy logikai intuíció húzódik meg:

²² Arisztotelész: *Metafizika* Γ könyv, 1011b, 27.

²³ Russell (1996), p. 140.

²⁴ Ezt feltételezi Arisztotelész is a fenti idézetben, és ezt arra alapozhatja, hogy vélekedéseinknek hangot adunk a mindennapokban és nagyon is elvárjuk, hogy ez ne "süket fülekre találjon."

Korrespondencia-intuíció (CI) Minden p -re, p igaz akkor és csak akkor, ha

$\exists s$ állapot (körülmény), amely között p igaz: $s \models p$.

A (CI) két előfeltevésből következik:

1. Igazság-konstituáló axióma (TA) Minden p -re, ha p igaz, akkor van

olyan s úgy, hogy $s \models p$.

Szavakban: az ami igaz, valami másnak a létezése, fennállása által válik igazzá. Például, az „apa vagyok” kijelentés nem lehet igaz, ha nincs olyan gyermek, akinek én egyáltalán az apja lehetnék. Tehát p igaz s -ben, azaz s

$\models p$, csak akkor állhat fent, ha s igazzá teszi a p állítást.

2. Faktív feltétel (FC) Minden s és p -re, ha $s \models p$, akkor p igaz.

Szavakban: Az igazság-konstituáló axióma faktív, azaz ha valami p -t igazzá teszi, akkor p valóban igaz.

Megjegyzés (TA) helyett alkalmazható volna a Dummet (1978, p. 14.) által javasolt:

(BA) Minden p -re, van olyan s úgy, hogy $s \models p$ vagy $s \models \sim p$.

A (TA) és (BA) között, a *tertium non datur* elvének elfogadásával, közvetlen kapcsolatot létesíthetünk. Tegyük fel ugyanis, hogy minden p -re: $p \vee \sim p$ igaz.

Ekkor (TA) alapján $\exists s: s \models p \vee \sim p \Leftrightarrow s \models p$ vagy $s \models \sim p$, mivel Tarski szerint a

„ $\vee$ ” jelentése kifejezhető – a korrespondencia szemléletet érvényesítve – az alábbi módon: „ $p \vee \sim p$ igaz” akkor és csak akkor, ha p vagy nem- p .

A korrespondencia-elméleti felfogás egyrészt realista és elkötelezett a *tertium non datur* elve mellett: minden kijelentés vagy igaz vagy hamis, attól függően, hogy megfelelő körülmények között van-e a jól-formált mondathoz olyan tény, ami megfelel annak, amit az állítás kifejez, vagy nincs. Másrészt, a faktivitásból eredően, a korrespondencia-elmélet a logikai rendszer szintjén ellentmondásmentes:

Tétel Minden p -re, ha van olyan s úgy, hogy $s \models p$, akkor nincs olyan s' , hogy

$s' \models \sim p$.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy bizonyos s és s' -re: $s \models p$ és $s' \models \sim p$. Ekkor az

(FC) feltétel alapján p és $\sim p$ egyszerre igaz, ami lehetetlen. Tehát ha valamely

s -re $s \models p$, akkor nincs olyan s' , hogy $s' \models \sim p$.

Azonban a korrespondencia-elmélet a természetes nyelvben paradoxonokhoz vezet, tehát az ellentmondás-mentesség ezen a szinten már nem biztosítható. Nem tudjuk ugyanis differenciálni a kijelentéseket aszerint, hogy azokat kijelentésekről vagy nem nyelvi tényekről tesszük²⁵. Érezhető, hogy a természetes nyelvünkön megfogalmazható paradoxonok veszélyeztetik az igazság korrespondencia-elméleti felfogását: ezek bekerülve a formális elméleteinkbe antinómiákat eredményeznek. Ez bizony alkalmatlanná teszi a korrespondencia-elméletet arra, hogy az igazság megragadására használjuk. Márpedig, e felfogás el nem fogadása, elszakítva a nyelvi kifejezést attól, amit vele megnevezünk, szintén az ellentmondás veszélyével fenyegetnek. Nyilván az ilyen ellentmondásokat ki kellene szűrni a formalizálási folyamat során (vö. 2. ábra), és a korrespondencia-elmélet ellentmondás-mentességét garantálni kell a logikai rendszer felől nézve.

Úgy tűnik, hogy a formális nyelvek metanyelvi szintjén van mód erre. Az egyik lehetséges (Russell-szerű) megoldás, hogy nem tesszük nyelvileg lehetővé, hogy a hazug paradoxonja-típusú mondatok megfogalmazhatók legyenek a formális nyelvekben. Például, ha a nyelvbázis feltételrendszeréhez a

²⁵ Példának okáért vizsgáljuk ezt meg a hazug paradoxonján keresztül. Tekintsük a következő állítást: "Amit kijelentek az hazugság." Ha az állítás tényszerűen igaz, akkor – én hazudós vagyok, tehát az "amit kijelentek az hazugság" – kijelentésem nem lehet igaz. Ha viszont az állítás tényszerűen hamis – akkor nem igaz, hogy "amit kijelentek az hazugság", vagyis az állításhoz tartozó kijelentésem nem hazugság, tehát – a kijelentésem igaz. Mármint igazmondó vagy hazudós vagyok?

T₀R=S feltételt hozzá vesszük, akkor ezt el is érjük. Ezzel azonban mellett, hogy a nyelv kifejező erejét csökkentjük, a nyelv inkomplettségét nem tudjuk felszámolni, szemben a következő, Tarski nevével fémjelzett szemantikai igazságfogalommal, amely miatt inkább ez utóbbit preferáljuk.

Tarski (1935/1990) kimutatta, hogy egy vizsgált nyelv kifejezéseinek denotációjából kiindulva, megadható a formalizált nyelvek egy széles családjában az igaz mondat fogalmának logikailag szabatos és tartalmilag adekvát definíciója. A formalizált nyelvet úgy adjuk meg, hogy i) leírjuk atomi mondatok egy osztályát, majd ii) egy rekurzív módszert adunk (a „kielégítés” fogalmára), amellyel előírjuk, hogyan lehet egyszerűbb mondatokból összetett mondatokat létrehozni. Az atomi mondatok nevekből és predikátumból állnak, amelyek nem nyelvi entitásokkal vannak kapcsolatban: tárgyakkal (nevek), valamint tulajdonságokkal és relációkkal (predikátumok). A metanyelvnek olyannak kell lennie, hogy egyrészt megnevezhető legyen benne a tárgynyelv minden kifejezése, másrészt a tárgynyelv minden mondata lefordítható legyen a metanyelvre. Ezenfelül, a metanyelvnek elég erős (a klasszikus elsőrendű logikánál erősebb) logikát is magában kell foglalnia. Ekkor, lényegében adaptálva és kiterjesztve Arisztotelész fenti igazságértelmezését, a metanyelvben megadható a tárgynyelv igaz mondatának definíciója.

Konstruáljunk meg e célból egy L_0 formális nyelvet! A konstrukció során arra kell figyelni, hogy L_0 nem tartalmazhat – antinómia veszélye nélkül – eszközöket saját szemantikájának definiálására, amelyek L_0 kifejezések neveit kapcsolatba hozzák azokkal a nyelven kívüli tényekkel, amelyekre a kifejezések referálnak. L_0 formális nyelv létrehozásakor szükségünk van egy L_1 szemantikai metanyelvre, amely magasabbrendű abban az értelemben, hogy L_1 nyelv szintaxisában rekonstruálható az L_0 szemantikája.

L_0 -ban definiáljuk az ún. (T) konvenciót:

(T) „X” igaz mondat akkor és csak akkor, ha p,

ahol X helyébe L_0 egy adott mondata, p helyébe pedig a szóban forgó mondat metanyelvi megfelelője írandó.

Fontos megjegyezni, hogy ez nem az igazságfogalom a nyelvbázisra épülő formális nyelv szemantikájában, hanem csak egy igazság-elv, amely

azonban jellemzi L_0 $\mathbf{T}(\subseteq \mathcal{E}_{L_0})$ osztályában lévő mondatait. Ugyanakkor, ontológiai értelemben sem válunk elkötelezetté elfogadása esetén, hiszen nem lényeges, hogy mit fogadunk el ismeretelméleti szempontból ténynek.²⁶ A (T) konvenció éppen azért nem mondható haszontalannak, mert rámutat arra, hogy bármilyen ismeretelméleti koncepció, illetve igazságfogalom meghatározására irányuló próbálkozás – paradoxonok veszélye nélkül – nem cáfolhatja ezt az elvet. Ezért is használható ez az elv anélkül, hogy az általánosság megsérülne.

A fentiek alapján azonban (T) nem lehet L_0 -ban állítható elv, hiszen (T) is szemantikai terminus és a hazug paradoxonja miatt, ha L_0 tartalmazná (T)-t, akkor L_0 szükségszerűen inkonzisztenssé válna. Valóban, ha pl. „ λ ” név L_0 -ban a „ λ nem igaz” mondatot jelöli, akkor a megfelelő (T) formula a következő alakú: „ λ nem igaz akkor és csak akkor, ha λ nem igaz.” Ez pedig L_0 -ban ellentmondásra vezet, ha a sémában szereplő kifejezést nevével, azaz „ λ ”-val helyettesítjük. Így tehát a (T) konvenciót csakis L_1 tartalmazhatja.²⁷

L_0 helyébe L_1 -et írva az előbbi érveléssel belátható olyan L_2 formális nyelv létezésének szükségszerűsége, amelynek szintaxisa tartalmazza az L_1 szemantikájában lévő (T) konvenciót. Ilyen módon az is elérhető, hogy L_1 se tartalmazzon önreferens terminusokat. Az eljárást *ad infinitum* folytatva, az ún. Tarski-féle nyelvhierarchiához jutunk: ebben az L_n tárgynyelv szemantikájában lévő (T) igazságkonvenció egy magasabbrendű L_{n+1} metanyelv szintaxisának a része. Ez biztosítja, hogy a nyelvhierarchia minden egyes szintje mentes az önreferens szemantikai terminusoktól, tehát a paradoxonokat kiküszöbölhetjük az egyes nyelvszintekről.

Mivel a definíciót mindig a metanyelven adjuk meg, így valójában az igazságkritérium áthárul a metanyelvre. Ezzel azonban a logika szintjén be kell érünk. Az a kérdés, hogy a metanyelvi állítás igazságának megállapítását meddig hárítjuk át a meta-metanyelvre és mikor folyamodunk – a Tarski-

²⁶A (T) definíciója ugyanis nem implikálja azokat a feltételeket, amelyek teljesülése esetén, pl. "A hó fehér" mondatot állíthatjuk. Csupán az következik belőle, hogy bármikor, amikor ezt a mondatot állítjuk vagy elvetjük, ugyanakkor a hozzátársított "A hó fehér mondat igaz" mondatot is el kell fogadnunk, illetve el kell vetnünk. (ld. Tarski (1944/1990), p. 349.).

hierarchiát megszakítva – a gyakorlathoz, már nem tisztán logikai, hanem ismeretelméleti probléma. Tarski igazságelmélete a formális logikában a modell-elmélet kialakulásához vezetett, de az igazság korrespondencia-elméletének filozófiai vitájához is nagyban hozzájárult.

Tarski elmélete ihlette a korrespondencia-elmélet újragondolására az amerikai filozófust, Davidson-t. Szemben Tarskival, ő lehetőséget lát a (T)-elv kiterjesztésére a természetes nyelvre, azonban a némileg áértelmezett elvnek Davidsonnál nem az igazság definiálásában van szerepe, hanem egy mondat jelentésének meghatározásában, amelyben (T)-nek tesztelési szerep jut (Davidson (1984)). Tarski minimalista elméletével szemben, vannak olyan kritikai elméletek is, amelyek szerint az igazság tulajdonítása lényegében felesleges, mivel nem mond többet, mint a mondat, amelynek igazságát állítjuk (Prior (1960-1)). Ezt redundancia-elméletnek nevezik. Az USA-ban, majd Új-Zélandon tevékenykedő filozófus hölgy, Grover prozentenciális igazságelmélete pedig azt teszi hozzá ehhez, hogy egy kijelentés igazságának az állítása nem csak ismét állítja, amit valaki mondott, hanem jóváhagyja azt (Grover (1992)). Végül, említsük meg, hogy vannak Tarski korrespondencia-elméletét elutasító elgondolások is (Putnam (1981), Wright (1992)). Putnam szerint, Tarski elmélete nem nyújt semmiféle filozófiai belátást az igazság fogalmával kapcsolatban. Putnam a „belső realizmust” védelmezi Tarski „metafizikai realizmusával” szemben. A belső magyarázat elgondolása a matematikai konstruktivizmus nézetén alapul (ld. 5. fejezet), és azt állítja, hogy nincs olyan külső nézőpont, ahonnan azt, amit mondunk és gondolunk, összehasonlíthatnánk azzal, ahogy a dolgok állnak; csak belső nézőpont létezik²⁸.

Számunkra a Tarski-féle igazságfelfogás minimalista koncepciójának lényeges elemei a következők: i) a korrespondencia-elmélet a logikai rendszer szintjén ellentmondásmentes; ii) a végtelen nyelvhierarchia bázisnyelve meghatározza, hogy mit tekintünk matematikai objektumoknak; iii) a metanyelven megnevezhető a tárgynyelv minden kifejezése (a tárgynyelv-metanyelv kapcsolatát a (T)-konvenció határozza meg), továbbá iv) a metanyelvnek az elsőrendű logikánál erősebb logikát kell tartalmaznia. A következő fejezetben ismertetett megfontolások alapján, a Tarski-féle nyelvhierarchiához egy elmélet-hierarchiát kapcsolunk (Fazekas és Málík (1999)), és az igazság egy sajátos axiológiai megközelítését nyerjük²⁹.

²⁷ Mind a tárgynyelvi, mind a metanyelvi nevek jelölésére ugyanazt a jelet használtuk.

²⁸ A témának kiterjedt irodalma van (Lynch (2001)), mi itt csak kiemeltünk egy-egy lényeges vonalat, hogyan viszonyulnak Tarski elméletéhez.

²⁹ Erről a következő két szakaszban lesz szó. Emeljük már most ki ennek filozófiai jelentőségét, hogy ebben a megközelítésben egy axiomatikus rendszer kontingensnek tekinthető: nem fejez ki logikai szük-

3.2. Az igazság koherenciaelmélete

A fenti nyelvhierarchia egyes szintjein lévő nyelvekkel hozható kapcsolatba az igazság már említett másik megközelítése. Eszerint egy állítást akkor tekintünk igaznak egy L_n ($n=0,1,2,\dots$) nyelven, ha az állítás koherens: az állítás nem mond ellen az elmélet többi állításának, vagyis a koherenciaelmélet a logikai rendszer szintjén ellentmondásmentes.

Tekintsük az L_n nyelven megfogalmazott állítások rendszerét, T_n formális elméletet. Ekkor $T_n = \langle L_n, A_n \rangle$ pár, ahol az A_n szakmai axiómákra teljesül, hogy

- formalizált: kvantifikálni kell és ez egy predikátumkalkulust követel meg;
- informális igazság: bár A_n L_n szintaxisával leírható ($A_n \subseteq \text{Form}_{L_n}$) mégis T_k ($k > n$) elméletek valamelyikében van igazi értelmük.

Vegyük észre, hogy az L_n -re megfogalmazott koherencia követelmény nem a kijelentés igazságának kritériuma (ahogy a koherencia-elmélet alapítói, a *Bécsi Kör* gondolta egykoron), csupán a formális nyelv konzisztencia-követelménye. Ebből azonban még nem következik a nyelv korrektsége és teljessége, ami az igazságot valójában karakterizálná nyelvünkben. Sőt mi több, amint nyelvünket használni kezdjük, (A_n -ből állításokat próbálunk levezetni) szembe találjuk magunkat

- Tarski tételével, amely szerint az igazságfogalmat nem lehet definiálni L_n -ekben,
- Gödel nemteljességi tételével: igaz mondataink köre bővebb, mint ami levezethető, és ezzel összefüggésben,
- a nyelv inkomplettségével: reményünk sincs arra, hogy minden állítás eldönthető legyen, és így a szakmai axiómákból levezethessünk minden állításunkat.

ségszerűséget, mégis mivel a rendszer logikai szintjén ellentmondásmentesen működik, így olyan, mint-ha valami szükségszerűséggel bírna (vö. 6. fejezet).

A következőket javasolhatjuk megoldásként a felvetett problémákra: a Tarski-tétel kellemetlensége a Tarski-féle $L_0 \rightarrow L_1 \rightarrow \dots \rightarrow L_n \rightarrow \dots$ nyelvhierarchiában oldódik fel. Ebben a hierarchiában kitüntetett szerep jut L_0 -nak: azt, hogy mit tekintünk matematikai objektumoknak, meghatározza ezt a nyelvet. Elfogadva bizonyos A_i szakmai axiómák igazságát a nyelvhierarchiához meg tudunk konstruálni olyan $T_i = \langle L_i, A_i \rangle$ elmélethierarchiákat, amelyek nem lineárisan, hanem mint egy fa ágai kapcsolódnak a nyelvhierarchiában lévő nyelvekhez. Az elmélethierarchián belül egyrészt elvégezhető a szakmai axiómák "informális magyarázata", másrészt a Gödel-tétel problematikus állításait kiküszöbölhetjük ki azáltal, hogy ezeket új szakmai axiómaként hozzávesszük az eddigiekhez és eggyel feljebb lépünk az elmélethierarchiában. A végtelen elmélethierarchia egyes szintjeiről a nyelv inkomplettségét is felszámolhatjuk, így elérve a nyelvek relatív teljességét.

3.3. A matematika rejtőzködő igazsága

Foglaljuk össze mire jutottunk eddig a 3. fejezetben! A kommunikáció során használt természetes nyelvi kijelentéseket a nyelven kívüli tényekkel szembe-sítve azt találtuk, hogy nem tudjuk paradoxonok veszélye nélkül az igazság fogalmát a természetes nyelven megadni, de egy végtelen formális nyelvhierarchián keresztül „megközelíthetjük”. Ugyanakkor elfogadva bizonyos állítások, a szakmai axiómák igazságát, e nyelvhierarchiához tudunk konstruálni olyan elmélethierarchiákat, amelyek törvényszerűségek leírását célozzák és egyúttal kiküszöbölik a Gödel-tétel problematikus állításait. Ezáltal elérve a nyelv relatív teljességét.

Kiderült tehát, hogy nyelvünk és logikánk által az elméletek igazságát nem tudjuk eldönteni, hiszen felkutatása a nyelv- és elméletlánc végtelensége miatt nem lehetséges. Ahogy e láncokat felszakítjuk, rögvest paradoxonnal és a nyelv inkomplett voltával találjuk magunkat szembe. Helyzetünk azonban még kényelmetlenebb, ugyanis az előbb említett két igazságelmélet egy kicsit túl keveset és egy kicsit túl sokat követel tőlünk. Nyilvánvaló például, hogy a koherenciát nem csak az elmélet állításai között, hanem az elméletek egymás

közötti viszonyában is elvárjuk a matematikában. Kérdéses azonban, hogy elvárható-e mindez? Ugyanahhoz a tárgynyelvhez különböző elméletláncok kapcsolhatók és ezek viszonya meglehetősen problematikus lehet. Másrészt, nyelvi szinten, elvileg lehetséges, hogy ugyanaz a metanyelv több különböző tárgynyelvhez kapcsolódjék, de ez a metanyelv nem szólhat ugyanarról az objektumról, mert ekkor például egy névnek több denotátuma is lenne. Végül, egy adott nyelven kérdéses az is, hogy bizonyos fontos fogalmak kijárnak-e annak a dolognak, amit vizsgálunk.

A Galois-elmélet az absztrakt algebra egy igen szép és mély fejezete, amely szoros kapcsolatot tárt fel bizonyos algebrai testek résztestei és bizonyos algebrai csoportok rész-csoportjai között. Az elmélet eredményeként magyarázatot nyerünk arra, hogy $n \geq 5$ esetén az n -edfokú általános algebrai egyenleteknek miért nincs gyökképlete (Abel-Ruffini tétel); vagy hogy miért nem lehetséges a kör „négyszögesítése”, azaz adott kör területével egyenlő területű négyzet oldalának a szerkesztése. De mi lenne, ha egy másik elméletből, amelyet ugyanolyan megalapozottnak és szépnek tartanánk, mint Galois elméletét, esetleg épp ellenkező eredményekhez jutnánk?

A matematikában (függvényanalízis, topológia) és a természet-tudományokban alapvető fogalom a függvény folytonossága. Folytonosság: ez nagyon szemléletes fogalomnak tűnik. Könnyen megállapítható, hogy egy görbe vonal mikor mondható folytonosnak és mikor nem. Szemléletünk az olyan görbét tekinti folytonosnak, amelyen nem látunk ugrásokat és szakadásokat, így az olyan függvény, amelyik bizonyos helyen „ugrik”, mint az $f(x) =$

$$\begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ -1 & \text{ha } x < 0 \end{cases} \text{ függvény, nem folytonos. Mindazonáltal szükséges, hogy korrekt fogalmi meghatározást adjunk a folytonosságról.}$$

Ez Cauchy és Weierstrassnak köszönhetően, a XIX. században sikerült is, de számos esetben kiderült, hogy nem tudjuk, valójában ez a fogalom megfelel-e annak, amit „folytonosság” néven a függvényektől elvárunk.

$$\text{Tekintsük, mondjuk, az } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases} \text{ . Ez a függvény miközben az egész } (-\infty, \infty) \text{ intervallumon folytonos,}$$

grafikusan már nem ábrázolható, mert x -szel 0-hoz közeledve, a függvényértékek végtelen sokszor ingadoznak az $y = x$ és $y = -x$ egyenesek között. Tehát a folytonosság matematikai fogalmába olyasmis is belefér, ami a szemlélet (grafikus ábrázolás) számára már nem. Persze erre mondható, hogy végül is egy empirikus és egy egzakt fogalom

$$\text{nem is fedheti egymást. Vegyük most az } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{ha } x = p/q \text{ redukált tört} \\ 0 & \text{ha } x = 0 \text{ és } x \text{ irracionális} \end{cases} \text{ . Ez egy olyan}$$

függvény, amely racionális pontokban nem folytonos, ugyanakkor az $x = 0$ pontban és minden

irracionális helyen folytonos. De megadható olyan valós függvény is, amely egyetlen helyen sem folytonos, mint a nevezetes Dirichlet-féle függvény: $D(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2^n}(m! \pi x)$. Az ilyen diszkontinuitás azért problematikus, mert így a Dirichlet-függvénynek nincs (Riemann) integrálja. Ez arra készítette a matematikusokat, hogy általánosítsák az integrálfogalmat (Lebesgue-féle integrál), amely szerint már az ilyen függvény is integrálható lesz, és átgondolják a matematikai mérték fogalmát, amely az alakzatok területének és térfogatának általánosítása.

A helyzet azonban még tovább bonyolítható. A klasszikus matematikában gyakran dolgozunk olyan nem folytonos függvényekkel, mint amilyeneket az előbb bemutatunk. Ugyanakkor, ha a matematikai entitásokra és a levezetésekre kikötéseket teszünk, hogy csak konstruktív eszközöket használhatunk (vagyis konstruktivista szemléletre váltunk), akkor bebizonyítható, hogy a valós függvények mindig folytonosak³⁰. S amíg az a nyilvánvaló tétel a klasszikus matematikában teljesül, hogy

Bolzano tétele: ha az f függvény egy $[a, b]$ intervallumon folytonos és $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek, akkor van az intervallumban olyan c pont, amelyre $f(c) = 0$, addig a konstruktív matematikában ez a tétel nem érvényes!

Hogyan járunk el a nehézségek feloldása céljából? Az igazságelméletben van egy nevezetes állítás, amit Münchhausen-trilemmának neveznek (Albert (1985)): bármely adott elmélet elveken alapul. Mármost ezeket az elveket vagy (1) igazként kezeljük, bár nem megalapozottak; vagy (2) ezek az elvek más elveken alapulnak és ezek a más elvek még további elveken, *ad infinitum*; vagy (3) ezeket az elveket holisztikusan, a konzekvenciáikon (tehát nem abszolút módon) kezeljük megalapozottként. A trilemmában a tudományos bizonyosságok Münchhausen báró történetét elevenítik fel, a legendás bárót,

³⁰A bizonyításhoz először a Cauchy-sorozat intuicionista definícióját kell megadni, amit kiválasztási sorozatnak hívnak:

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : |x_m - x_n| \leq 1/m + 1/n$$

Legyen most $P \subseteq (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}) \times \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $\langle a \rangle$ racionális sorozatra létezik olyan n természetes szám, hogy $(a, n) \in P$. Konstruktivista nézőpontból, ez azt jelenti, hogy van olyan véges eljárás, amelyik bármely $\langle a \rangle$ sorozatra kiszámítja n -t. Az eljárásnak a sorozat egy véges $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ kezdősorozatából kell meghatároznia azt az n -t, amelyre $(a, n) \in P$, mivel bármely időpillanatban $\langle a \rangle$ -nak csak véges szeletét ismerhetjük. Így az eljárás ugyanazt az n -t fogja rendelni minden olyan $\langle b \rangle$ sorozathoz is, amelyre teljesül, hogy $a_i = b_i$, ha $i \leq n$. Tehát a kiválasztási sorozatokon értelmezett függvény minden sorozatra annak véges kezdősorozata alapján kell, hogy eldöntse, mit rendel az adott sorozathoz. Ezért valóban teljesül, hogy minden valós függvény folytonos.

aki képes volt magát a hajánál keresztül kihúzni az ingoványból, amibe bele-
ragadt. Ha a trilemma első opcióját választjuk, akkor a tudás fideista elméleté-
hez jutunk: felismerjük, hogy az adott elmélet nem demonstratív elveken ala-
pul, de ennek dacára az elveket stabilnak és érvényesnek tekintjük. Ilyennek
tartjuk a matematikai igazság konvencionalista felfogását, a platonista és
konstruktivista matematikai irányzatot. A második opció szerint, mivel bármely
elmélet ellen kifogások vethetők fel és elveik megalapozására konzekvens,
átlátható érvrendszer nem létezik, így a matematikus alapvetően szkeptikus,
de a nehézségek dacára úgy próbálja alkalmazni tárgyát, hogy az eredmények
felhasználhatók legyenek. Ez jellemzi a matematikai igazság pragmatista fel-
fogását, és ezt vallották a formalisták is, amíg nem jött Gödel, hogy bizonyítsa:
abban is szkeptikusak legyünk, hogy a matematika ilyen módon
instrumentalizálható. A harmadik opció, méltányolja az előbbi kettő érveit, de
az igazság egy minimalista, axiológiai útját mutatja fel. A Tarski-típusú korres-
pondencia és koherenciaelméleti érveléssel ehhez a stratégiához jutunk. Mivel
az igazság fogalma nem hozzáférhető, ezért az elmélet szemantikai-
pragmatikai háttérét nem statikusan, hanem dinamikusan kezeljük. E harmadik
opció kiindulópontja egy informális háttér, amelyből fogalmak és levezetések
generálódnak. Új tételek, elméletek jönnek létre, amelyek azonban nem stabi-
lak és végérvényesek, mivel fogalmaik és bizonyításaik sem azok. Az elmélet
fogalmainak jelentése a nyelven kívül, kognitív úton körvonalazódik, az elmélet
alkalmazásában ölt testet, majd visszahat a nyelven kívüli, informális háttérre
(ebben az értelemben az alkalmazás és az informális háttér egy szintre, az
elméleten kívülre kerül). S ez az oda-visszafelé történő mozgás folyik szüntel-
len: ez az „élő matematika”. Erről részletesebben fogunk szólni a 4.3. fejezet-
ben.

Amikor a matematika formális elméleteivel dolgozunk, mindig bizonyos
axiómákból indulunk ki, és ezekből származtatunk matematikai állításokat.
Tulajdonképpen ez az eljárás algoritmikusan történik, (bár lehetnek olyan állí-
tások, amelyeket nem tudunk származtatni) de annak eldöntése, hogy megfe-
lelőek-e azok az axiómák, amik a kiindulási alapunkat adják, INTUITIV BELÁTÁST,
azaz intuitíve MEGSEJTETT, TUDATOSAN JÓL MEGFONTOLT, NEM PUSZTÁN

ALGORITMIKUS DÖNTÉSEKET igényelnek. Ezt a vélekedést a *Lucas-Penrose érv*-vel szokás magyarázni, amely Gödel és Tarski eredményein alapul (Lucas (1961), Penrose (1993)): bármilyen algoritmust is használ egy matematikus a matematikai igazság megállapítására, mindig lesznek olyan G állítások az elméleten belül, amelyekre algoritmusuk nem tud válaszolni. Ha a matematikus tevékenysége csupán algoritmikus volna, akkor ítéleteinek kialakítására használt algoritmusuk nem lenne képes kezelni a saját algoritmusuk által készített G állítást. Mindazonáltal (elvileg) mi tudhatjuk, hogy G igaz. Ez ellentmondásra vezet, hiszen ezt neki is tudnia kellene: ha magától nem veszi észre, akkor közöljük és megvitatjuk vele. Ha ugyanis a matematikusok az igazság eldöntésére nem ekvivalens algoritmusokat használnak, az állítások igazsága formális bizonyítással akkor is eldönthető. Tehát egy helyes matematikai bizonyítás, amely meggyőzi az egyik matematikust, meg fogja győzni a másikat is. Nevezzük ezt a matematikai szemlélet *interpersionalitási kritériumának*. Az interpersionalitási kritérium minden G állításra is igaz. Ha ugyanis egy matematikus kész elfogadni egy formális elmélet minden szakmai axiómáját és levezetési szabályait, amelyek csak igaz állításokat adnak, akkor el kell hogy fogadja a G állítást is mint igaz állítást, ha az valamelyik rendszer tétele. Pontosan ugyanez áll a másik matematikusra is.

Érdekes itt megemlíteni, hogy a Lucas-Penrose érvben a matematikai szemlélet interpersionalitási kritériumának egy liberális változata szerepel, nevezetesen, a másik matematikus respektálja az övétől különböző szemléletet a matematika tárgyában és módszerében. El tudja fogadni az ezen alapuló elméletet is, ha a bizonyítások helyesek és az elmélet konzisztens rendszert alkot. Elképzelhető azonban a kritérium egy olyan változata, amelyben a másik matematikus fenntartásokat tesz, mondjuk, az alkalmazott módszerek miatt – pl. egy konstruktivista azért, mert a levezetések során indirekt bizonyítást alkalmaznak. Mindkét nézetnek van relevanciája. A kérdéshez az 5. fejezetben még visszatérünk.

Az a lehetőség (Dennett (1995)) nem áll fent, hogy csupán számos különféle algoritmus, amelyeket talán nem is e célból hoztak létre, eredményezhet egy olyan intuitív belátást, amely képes dönteni arról, vajon megfelelőek-e az eredetileg megválasztott axiómák, és az eredeti rendszer G állításait is bizonyítani tudják e rendszerekben. A következő problémák jelentkeznek:

- vajon az adott rendszerek axiómái megfelelőek-e az eredeti probléma szempontjából? Mi van ezek G állításával? Végtelen regresszus fenyeget.

Sőt továbbmenve az érveléssel, előfordulhat az is, hogy az egyik algoritmust a másakra akarjuk alkalmazni, szembesülve a Gödel-féle problémával, újabb G állítást szülve. A 2.1. fejezet 11. lemmája alapján ezekkel a problémákkal mindaddig szembe kell néznünk, amíg a bizonyítás igényével lépünk fel. De mi másért hoznánk létre axiomatikus elméleteket?

- milyen alapon választjuk meg éppen ezeket az algoritmusokat? Ha erről ismét algoritmus dönt, akkor milyen kritérium dönt arról, hogy éppen ez az algoritmus döntsön? Könnyen látható, hogy ezek a kérdések ismét végtelen regresszushoz vezetnek. S mivel minden matematikus halandó és elég sok matematikai elméletet hoztak már létre, lennie kell valamiféle végső döntésnek, intuitív belátásnak.

Az a lehetőség viszont elképzelhető, hogy az INTUITIV BELÁTÁS a VÉLETLEN eredménye. Véletlen folytán (pl. véletlenül „bekattan” egy ötlet, egy sejtés vagy egy szerencsésen kiválasztott algoritmus hozza meg a végső döntést), ismert eljárásokat hasznosítva algoritmikusan axiomatizálunk. Azonban bizonyára van a véletlenül megtalált axiómákat MAGYARÁZÓ TÉNY, amely megvilágítja a kiválasztásuk okát. Ilyen magyarázat létezésének garanciája a rendszer konzisztenciája. Azt, hogy az intuitív belátás jó, vagy sem, a rendszer igazolja vissza, a rendszer ellentmondás-mentességének kérdése. Egy deduktív rendszer konzisztenciája vagy magyarázó tény nélkül, a létrejött rendszer „igazsága” vagy „értelmessége (használhatósága)” kérdésessé válik.

Összegezve az elmondottakat, úgy tűnik: az axiomatikus rendszerek, amelyek algoritmusok sokaságának tárháza, INTUITIV BELÁTÁSOK (HEURISZTIKÁK), azaz i) megsejtett, tudatosan jól megfontolt, nem pusztán algoritmikus döntések eredménye, illetve ii) véletlen + magyarázó tények révén konstruálhatók. A matematikai igazságot megállapító eljárások, algoritmusok közölhetők. A matematikai igazság ezzel szemben úgy látszik nem olyan valami, amit csupán algoritmus(ok) használatával megállapíthatunk. Eddigi vizsgálódásaink konklúziója az, hogy a matematikai igazságot nem lehet pontosan definiálni, nem tudunk róla az ellentmondás veszélye nélkül beszélni, nem tudjuk utolérni, mert egy lépéssel mindig előttünk jár. Az igazság az informális háttér fátyla mögött rejtezkedik.

3.4. Gödel, Church és Chaitin tételének kódolt üzenete³¹

Egy *univerzális gépen* olyan rendszert értünk (pl. digitális számítógépet), amely egy kezdeti időpontban megfelelően előkészített állapotváltozókból, az inputból, egy meghatározott dinamikai folyamatot követően, bizonyos állapotváltozóba, az outputba jut. Ha az inputot tovább oszthatjuk két csoportba, tényleges bemenetre és programra, akkor az *univerzális gépet programozhatónak* nevezhetjük. Rögzített program esetén a programozható gép egy

$$\text{output} = f(P, \text{input})$$

függvényt realizál. Az f függvény P argumentuma arra utal, hogy f az adott rendszerbe írt programhoz tartozik. Tehát egy kijelölt programú, inputú és outputú programozható gép, a programjától függően egy függvényhalmazt realizál. Ha változtatjuk a programot, akkor a rendszer különböző függvényeket számol ki. A XX. század harmincas éveitől úgy vélték, hogy minden függvény kiszámítható egy programozható univerzális gép valamely G konstrukciójával, illetve annak bővítésével. A G bővítésén a következőt értjük: ha a G rendszer által D adaton, P programmal kiszámítható függvények halmaza $G(P,D)$, akkor kapcsoljuk össze a G gépet egy másik olyan G géppel, amely olyan függvényeket is ki tud számolni, amelyekre az előző nem volt képes. Ezzel a $G(P,D) \cup G(P',D)$ kiszámításhoz jutunk. Azonban a Gödel-tétel szellemében már sejthető, hogy ez a bővítés bizonyára korlátokba ütközik.

Turing mutatta meg 1936-ban, hogy a számítást végző rendszerek bővítése nem sokáig gazdagítja a kiszámítható függvények körét, és ennek demonstrálására egy olyan gépet (programozható univerzális gépet) konstruált, amelyről a tapasztalatok szerint azt tartják, hogy ki tud számolni minden egyáltalán kiszámítható függvényt (Church tézise).

Definíció A $G = \langle \Sigma, S, P, S_0, F, \Lambda \rangle$ hatost *Turing-gépnek* nevezzük, ahol

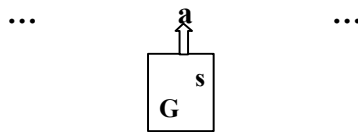
³¹ E szakaszban Trahtenbrot (1978) könyvére támaszkodunk.

- Σ : a külső ábécé;
- S : állapotok egy véges halmaza, ezek a G gép utasításai;
- Három kitüntetett szavunk van: $S_0 \in S$: a kezdőszó, amelyből a Turing-gép bekapcsolás után kiindul, $F = \{h, 1, 0\} \in S$: a befejező szó, amelyre a gép megáll, $\Lambda \in \Sigma$: az üres szó (blank);
- P : a gép programja, amely parancsokból álló véges sorozat: $p_1, p_2, \dots, p_k$. Minden parancs a következő módon írható fel:

bármely $a, b \in \Sigma$ és $s, s' \in S$: $(s, a) \rightarrow (s', u, b)$, ahol az a helyére írt új betű b, u lehetséges értékei:

- ♦ $\text{Right}(\rightarrow)$: az új állapot a pillanatnyhoz képest jobbra van,
- ♦ $\text{Left}(\leftarrow)$: az új állapot a pillanatnyhoz képest balra van,
- ♦ $\text{Stay}(\bullet)$: az új állapot a pillanatnyhoz képest nem változik.

Reprezentálva:



5. á b r a

Ha a Turing-gépet „rendes” gépként kívánjuk elképzelni, akkor tekintsünk egy programozható gépet, amely P programja alapján, egymást követő ütemek során, az S állapotok valamelyikében van. Továbbá van egy végtelen, cellákra osztott szalag, amely a Turing-gép szavát tartalmazza (cellánként egy betűt), valamint egy író-olvasó fej, amely a szalag egy cellája alatt helyezkedik el, és annak tartalmát tudja olvasni, illetve felülírni. (Ez áll a fenti reprezentáció hátterében.)

Definíció A G Turing-gép a (b, s, a) konfigurációban van, ha $a, b \in \Sigma^*$ (Σ^* : a Σ betűkből képzett szavak), $s \in S$ és a gép I/O feje az $a \in \Sigma^*$ szó első betűjére mutat. Az (S_0, a) konfigurációt, amelyre $a \neq \Lambda$, *kezdő konfigurációnak*, a -t pedig *inputnak*, míg a (σ, F, a) [$\sigma \in (\Sigma - \{\Lambda\})^*$] konfigurációt *végkonfigurációnak* nevez-

zük, σ -t pedig outputnak. Két eset van. A Turing-gép P programjától függően, az (S_0, a) kezdő konfigurációból kiindulva,

1. véges sok ütemben megáll és a (σ, F, a) végkonfigurációba kerül.

Mármost, ha a gép

- az $F=\{0\}$ befejező állapotban van, akkor azt mondjuk, hogy G nem fogadja el a kezdő konfiguráció $a \in \Sigma^*$ szavát, ha pedig $F=\{1\}$, akkor azt mondjuk, hogy elfogadja. Ekkor definiálhatjuk a G által az $a \in \Sigma^*$ szóra válaszként adott kimenetet:

$$G(P, a) = \begin{cases} 1, & \text{ha } G \text{ elfogadja az } a \in \Sigma^* \text{ szót} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

- az $F=\{h\}$ befejező állapotban van, akkor a szalagon a számítási folyamat eredményeként valamilyen $\sigma \in (\Sigma - \{\Lambda\})^*$ szó áll: $G(P, a) = \sigma$.

2. sohasem jut el a végkonfigurációba, azaz a gép nem áll meg.

Kiegészítés Ha egy szalag helyett több, mondjuk, k darab szalagot tud a Turing-gép használni, és ugyanilyen számú író-olvasó fejjel rendelkezik, akkor minden egyes lépés a k db szalag mindegyikén párhuzamosan egy-egy olyan műveletnek a végrehajtását jelenti, mint amelyet az egyszalagos Turing-gépnél már láttunk. Bizonyítható ugyanakkor, hogy a szalagok számának növekedése nem bővíti a Turing-géppel megoldható feladatok körét.

Tétel: Bármely k -szalagos Turing-gép szimulálható egyszalagos Turing-géppel.

Turing tette fel a következő kérdést.

Megállási probléma: Egy adott P programmal működő G Turing-gép esetén, van-e arra valamilyen univerzális módszer, hogy eldöntsük, vajon G meg fog-e állni valaha vagy sem?

A Turing-gép használata mögött egy előfeltevés áll, nevezetesen, hogy a probléma, amin éppen dolgozunk, kódolható. A 2.1. fejezetben ismertetett Gödel-féle számozási eljárás erre egy általános módszert szolgáltat. Követke-

zéseképpen a problémák több típusa úgy tekinthető, mint az arról való döntés problémája, mely természetes számok rendelkeznek bizonyos tulajdonsággal.

Definíció A számok (kódok) bizonyos R tulajdonságáról akkor mondjuk, hogy *kiszámítható*, ha van olyan P program egy G Turing-gépen, amelyre teljesül, hogy

$N \text{ rendelkezik } R \text{ tulajdonsággal} \Leftrightarrow G(P,N)=1 \text{ és}$

$N \text{ nem rendelkezik } R \text{ tulajdonsággal} \Leftrightarrow G(P,N)=0.$

Szavakban: R tulajdonság kiszámíthatóságán a következő tulajdonságot értjük: a Turing-gépnek van olyan P programja, amely igen(1) vagy nem(0) választ ad véges lépésben arra, hogy N rendelkezik-e egy R tulajdonsággal vagy sem, bármely N kód (szám) esetén.

Megjegyzés Az R tulajdonság egy predikátumként jelenik meg a formális nyelvben. Így például a „prímszámnak lenni” tulajdonság azt az R predikátumot jelenti, amelyre R(N) az „N szám prím” tulajdonságot fejezi ki. A továbbiakban a „... lenni” tulajdonságon mindig egy predikátumot kell érteni.

A „prímszámnak lenni” tulajdonság egy példa kiszámítható tulajdonságra. Bármely N egész számra tekintsünk egy $n < N$ ($n > 1$) egész számot és próbáljuk N-t ezzel osztani. Az aritmetika alaptétele alapján, ha N prím, akkor nincs olyan egynél nagyobb és önmagánál kisebb n szám, amely maradék nélkül osztaná N-t, míg ha N összetett szám, akkor van legalább egy ilyen. A következő magasszintű pszeudo-program, amely ezt a vizsgálatot végzi el a program (3) részében, demonstrálja a „prímszámnak lenni” tulajdonság kiszámíthatóságát az egész számok számstruktúrájában használt három aritmetikai műveletet használva:

```
(1.) INPUT N /* N szám bekérése */
(2.) P(N):= 0 /* N szám nem prím */
(3.) FOR n:=2 to N
    (3.1.) m:=1
    (3.2.) WHILE mn < N
        (3.2.1.) q=N-mn
        (3.2.2.) m:=m+1
        (3.2.3.) IF q=0 THEN P(N):=1 /* N szám prím */
(4.) PRINT P(N) /* N szám tulajdonságának kiírása */
```

De ez a program, ami (egy adott fordítóprogrammal) lefut egy digitális számítógépen, milyen kapcsolatban van a Turing-géppel? Erre vonatkozik *Church tézise*:³² a „kiszámíthatónak lenni” tulajdonság abszolút fogalom. Ez azt jelenti, hogy ha egy bizonyos $f(K)=N$ függvény értékei egyáltalán kiszámíthatók bármiféle programozható géppel, akkor kiszámítható Turing-géppel is. Ha tehát adott egy tetszőleges digitális számítógép, tetszőleges inputtal, mindig találhatunk egy olyan P programot és D adatkódot, hogy a Turing-gép $G(P,D)$ kiszámítása ugyanazon kimenethez vezet.

Mi alapoz meg egy olyan hipotézist, mint Church tézise? Az ún. zártsági és ekvivalencia-tételek. A zártsági tételek közös gondolata, hogy a Turing-gépre átfogalmazható algoritmusok osztálya zárt az összes olyan műveletre nézve (pl. ismételt alkalmazás, párhuzamos alkalmazás, elágazás, stb.), amellyel adott algoritmusokból újakat képezhetünk. Tehát, ha a kiinduló algoritmusokat Turing programok alakjában lehet megadni, akkor az eredményül kapott bonyolultabb algoritmust is meg lehet így adni. Az ekvivalencia-tételek azt mondják ki, hogy ha rögzítünk két algoritmosztályt, legyen ez K_1 és K_2 , akkor a K_1 osztályba tartozó, tetszőleges σ algoritmushoz van vele ekvivalens τ algoritmus a K_2 osztályban. Néhány ilyen ismert osztály a következő: i) Kleene általános rekurzív függvényei (1936); ii) Church λ -definiálható függvényei (1936); iii) Turing-géppel kiszámítható függvények (1936); iv) Post kanonikus rendszerfüggvényei (1943); v) Markov algoritmussal adott függvények véges ábécé fölött (1951); vi) URM-kiszámítható (**UNLIMITED REGISTER MACHINE**) függvények (1963). Ha tehát egy feladat olyan, hogy van algoritmus az egyik (K_1) osztályban, amely megoldja a feladatot, akkor egy másik (K_2) osztály is tartalmaz algoritmust a feladat megoldására.

Ezek szerint különösen fontossá válik, mi a válasz a Turing által felvetett megállási problémára, hiszen Church tézisének értelmében, ha egy bizonyos probléma kiszámíthatósága Turing-gépen nem megoldható, akkor semmiféle módon sem lehet megoldani.

³² A Church-tézis matematikailag szabatosabb formájával és kritikájával az 5. fejezetben fogunk foglalkozni.

Turing tétele „Egy olyan programnak lenni, amely nem fut a végtelenségig” tulajdonság, azaz a megállási probléma, nem kiszámítható. Másképpen fogalmazva: jelentse $G(P,D)=0$ azt, hogy a G Turing-gép P program és D adathalmaz esetén nem áll meg, míg $G(P,D)=1$ azt, hogy megáll. Ekkor nincs olyan a G gép programját ellenőrző $H(P,D)$ Turing-gép, amely a következő lehetséges eredményekkel kiszámítást tudna végezni:

$$H(P,D)=0 \Leftrightarrow a \ G(P,D)=0$$

$$H(P,D)=1 \Leftrightarrow a \ G(P,D)=1.$$

Bizonyítás

Először arra használjuk H -t, hogy egy másik olyan $H\#$ gépet konstruálunk, amely veszi a P programot mint input adatot és felcseréli a 0 és 1 szerepeit, így $H\#$ pontosan fordítva működik mint H ; például akkor áll meg, amikor H a 0 outputot produkálja. Ezután betápláljuk a $H\#$ kódját a $H\#$ gépbe és vesszük a $H\#(H\#)$ gép X kimenetelű kiszámítását:

$$H \text{ szerint } X=0 \Leftrightarrow H(H\#,H\#)=0 \rightarrow H\#(H\#)=0 \rightarrow X=1;$$

$$H \text{ szerint } X=1 \Leftrightarrow H(H\#,H\#)=1 \rightarrow H\#(H\#)=1 \rightarrow X=0.$$

Turing tételének értelmében bármikor, amikor egy Turing-gép valamely P programját le akarjuk egy H géppel ellenőrizni, – a bizonyítás szerinti konstrukció folytán – találhatunk egy olyan X kiszámítást, amely megáll, még ha H szerint X a végtelenségig is fog futni, és hasonlóan, X nem fog megállni, még ha H ezt ellenkezőleg is ítéli meg.

Turing tételének bizonyításában ugyanaz az önreferens trükk szerepel, mint Gödel nemteljességi tételében. Alapvetően X egy olyan kiszámítás, ami azt állítja magáról, hogy „egy olyan kiszámítás, ami akkor és csak akkor áll meg, ha H szerint nem fog megállni”. Most tegyük fel, hogy a Turing-gép szagjára a saját programjának fordítását írtuk fel a gép ábécéjével. Ha a gép alkalmazható erre a konfigurációra, azaz erről a konfigurációról elindítva, a gép véges sok lépés után megáll, akkor azt mondjuk *a Turing-gép önmagára alkalmazható*. Turing-tételének következménye a következő

Korollárium A Turing-gép „önmagára alkalmazhatónak lenni” tulajdonsága nem kiszámítható.

Definíció A számok (kódok) bizonyos R tulajdonságáról akkor mondjuk, hogy *listázható*, ha van olyan G Turing-gép P programmal, amelyre teljesül, hogy N rendelkezik R tulajdonsággal $\Leftrightarrow G(P,K)=N$, bizonyos K szám esetén.

Habár a megállási probléma eredményeként nem kiszámítható, hogy egy program vajon végtelenségig fut-e vagy sem, de ez a tulajdonság listázható. Megmutatható ugyanis, hogy az összes olyan programok egy halmaza, amely megáll, a következő R tulajdonsággal rendelkezik: bármely adott K szám esetén, tudunk konstruálni egy olyan Turing-gépet, amely az idő egyre növekvő periódusa során egyik programot teszteli a másik után, egészen addig, amíg megtalálja az első K olyan programot, amelyre megáll. Ezután kiírja a K. ilyen programok kódját. Teljesül tehát a következő

Tétel A megállási probléma listázható, azaz „egy olyan programnak lenni, amely nem fut a végtelenségig” tulajdonság listázható.

A kódolás kérdéskörének vizsgálata révén azt találjuk, hogy az igazság problémája abba a kérdésbe megy át, mely számok rendelkeznek az igaz mondatok kódjainak tulajdonságával.³³ Church és Gödel tételei érvényesek maradnak, és a „kiszámítható”, valamint „listázható” fogalmakkal a következő formában mondhatók ki.

Church tétele Ha Th elmélet formális nyelvének nyelvbázisa elég bonyolult és korrekt, akkor „a Th tételének lenni” tulajdonság kiszámítható, de nem listázható.

Gödel nemteljességi tétele Ha Th elmélet formális nyelvének nyelvbázisa elég bonyolult és korrekt, akkor „az igaz mondatnak lenni Th elmélet formális nyelvében” tulajdonság sem nem listázható, sem nem kiszámítható.

Tegyük fel, hogy Th a fenti feltételeket teljesítő elmélet, gondoljunk például a teljes ismert matematikára, amelyet egy Th elméletbe kódoltak. Az általunk használt axiómákat csoportosítani lehet véges számú, egyszerű sémákba. Egy újonnan jelentkező S tétel ellenőrzése az axiómasémákkal szemben, egy mechanikus eljárást jelent, amely egy pontos IGEN vagy NEM választ szolgáltat véges időn belül. Tehát a „Th tételének lenni” tulajdonság kiszámítható, ahogy azt a Church-tétel állítja. Annak eldöntése azonban, hogy Th-ból egy tétel bizonyítható-e, már sokkal nehezebb, mivel nincs mód azt előre megítélni, hogy milyen hosszú lehet egy adott tétel bizonyítása.

³³ Ezt nevezhetjük a matematikai igazság "konstruktivista" megközelítésének, tekintettel a konstruktivista matematika módszertani elvére (ld. 5. fejezet).

Bármilyen információ kódolható 0 és 1 számokból álló bináris sztringként. Mármint ha M egy bináris sztring, akkor $|M|$ -en az M -ben lévő szimbólumok számát értjük. Tegyük fel, hogy olyan univerzális, programozható géppel dolgozunk, amely számos egyszerű utasítást használ. Legyen az egyik ilyen **Print** M , ahol M az az információ, ami minket érdekel. Most **Print** M bináris sztringje egy olyan P program, amely M -et kinyomtatja. Ekkor a **Print** utasításnak egy rögzített c konstans lesz a hossza, és bármely M információ (bit-minta) komplexitása: $\text{complexity}(M) \leq |M| + c$. Minél inkább redundáns M , annál kisebb lesz M komplexitása.

Tegyük fel, hogy Th elegendően bonyolult és korrekt elmélet, valamint végesen adott. Ez utóbbi azt jelenti, hogy Th elgondolható olyan gépként, amely tételeket, az elmélet logikai következményeit írja ki, és az egész elmélet olyan komplexitású, mint azon gép programjának a szalag-komplexitása³⁴, amely a Th tételeit kilistázza. Gödel tétele ekkor úgy fogalmazható át, hogy minden elég bonyolult és korrekt, végesen adott matematikai elmélet szükségképpen inkomplett.

Mivel végtelen sok bináris sztring van, tetszőleges komplexitású bit-mintákkal, ezért mindig van olyan információ (bit-minta), amelynek komplexitása nagyobb egy tetszőleges t számnál. Ezt a tételt fogalmazta meg 1965-ben Chaitin:

Chaitin tétele Ha Th elmélet formális nyelvének nyelvbázisa elég bonyolult és korrekt, valamint az elmélet végesen adott, akkor van olyan t szám, hogy Th -val nem bizonyítható, hogy van t -nél nagyobb komplexitású, tetszőleges információ (bit-minta).

A **bizonyítás** vázlata a következő. Ha a Th elmélettel bizonyítható tetszőlegesen bonyolult bit-minták létezése, akkor a következő legális program generálni fog egy meghatározott számot: **Print** az első Th -val bizonyítható bináris sztring, amelynek komplexitása nagyobb, mint ennek a programnak a hossza. Most egy klasszikus logikai paradoxont használunk föl, az ún. írógép-paradoxont: legyen n a legkisebb 100-nál kevesebb jellel nem definiálható

³⁴ Egy Turing-gépet $l(n)$ szalag-komplexitásúnak mondunk, ha minden legfeljebb n -hosszúságú bemenő szóra legfeljebb $l(n)$ mezőt használ fel a szalagján.

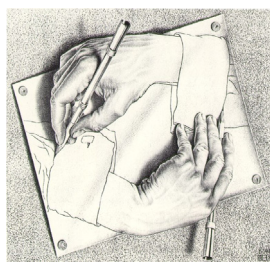
szám, akkor éppen most definiáltuk n -t 100-nál kevesebb jellel. Tehát, e paradoxonnal analóg módon, megválaszthatunk egy rövid nevű, nagy p számot úgy, hogy ekkor a **Print** az első Th -val bizonyítható bináris sztring, amelynek komplexitása nagyobb, mint $complexity(Th) + p$ program egy olyan név lesz, amelynek komplexitása kisebb, mint $complexity(Th) + p$. Ha mármost ez a program egy M információt írna ki, akkor ellentmondáshoz jutnánk, ugyanis M egyszerre lenne nagyobb és kisebb komplexitású, mint $complexity(Th) + p$. Ez az ellentmondás csak úgy kerülhető el, ha a Th elmélettel nem bizonyítható tetszőlegesen komplex információ (bit-minta) létezése. A Chaitin-tételben szereplő t számot ennek megfelelően megválasztva, az állítást nyerjük.

Vegyük észre, hogy Turing, Gödel és Church tétele milyen szoros kapcsolatban van Chaitin tételével. Ha Chaitin tétele nem lenne igaz, akkor az algoritmussal megoldható problémák nem lehetnének akármilyen bonyolultak, mert bármely M információ feldolgozásához szükséges lépések számát felülről mindig tudnánk előre becsülni. Ezért nem meglepő, hogy a Turing-gép „ön-magára alkalmazhatónak lenni” tulajdonsága nem kiszámítható, hiszen nem tudjuk kiszűrni a végtelen ideig futó programokat. S ahogy Gödel tételében az igaz mondat, Church tételében a matematikai elméletek tételei, Chaitin tételében az optimális kód algoritmikus felkutatása ütközik akadályba.

Most nézzünk egy példát listázható, de nem kiszámítható tulajdonságra. Gondoljuk el, hogy kezünkbe kerül a „BÖLCSESSÉG KÖNYVE”. Ennek egy tetszőleges S lapjáról azt eldönteni, hogy része-e a magyar nyelvnek, egy kiszámítható eljárás. Csak ellenőrizni kell, hogy a szavak benne vannak-e a Magyar Értelmező Kéziszótárban, a mondatok pedig jólképzettek-e. Azonban ettől még S tökéletesen értelmetlen lehet számunkra: lehet, hogy az egész lap grammatikailag helyes mondatokból álló halandzsa, vagy olyan elméletre utal, amelyet nem ismerünk. Mi vagyunk csak azok, akik megítélhetik, hogy S érthető-e számunkra vagy sem. Rendszerint minél tovább élünk és minél többet tanulunk, a könyv különböző S lapjai annál érthetőbbekké válhatnak. De lehetetlen előre azt látni, mely lapok válnak idővel valójában értelmessé számunkra. Ebben a kontextusban, az S lap „értelmesnek lenni” tulajdonsága listázható, de nem kiszámítható. Church tétele azt a tényt fejezi ki, hogy nincs olyan

mechanikus, effektív eljárás, amely IGEN vagy NEM választ ad fontos kérdésekre.

Gödel tétele egy lépéssel még tovább megy. Tegyük fel, hogy az S lap olyan „magasabbrendű” tulajdonságokat is tartalmaz, mint „igaznak lenni”, „erkölcsösnek lenni”, „szépnek lenni”, stb. Gödel nemteljességi tétele szerint nincs olyan univerzális és effektív eljárás, amelyekkel az ilyen magasabbrendű emberi ideákat kiszámíthatnánk, azaz megismerhetnénk őket. De arra sincs remény, hogy egy „BÖLCSEK TANÁCSA” majd valamikor (ha elég bölcsek leszünk) összeül és a világból kiszűri az „igazat”, a „jót” és a „szépet”. Világunk komplikáltabb annál, mintsem bármiféle egyszerű eljárással meghatározhatnák vagy bizonyos (véges számú) szabályok előírhatnák nekünk, hogyan éljünk, hogyan kell cselekednünk, mert a dolgok mindig túlnövik ezeket – ez Chaitin tételének filozófiai lényege. A Gödel, Church és Chaitin tételével karakterizált világ üzenete a következő: „a világban, az utolsó szó jogán, szabadon dönthetsz”.



4. A matematikai definíció és bizonyítás

A matematikai elméletek formalizálási folyamata során, amikor egy fogalom tartalmi megvilágítását célozzuk meg, két lehetőségünk adódik. Ha a kérdéses fogalom nem alapfogalom, más fogalmakból származtatott, akkor a meghatározása a már előtte megvilágított fogalmakkal történik. Ha azonban a kérdéses fogalom alapfogalom vagy az elmélet primitív eleme, abban az értelemben, hogy más fogalmakkal nem definiáljuk, akkor mögötte nem lehet más, mint egy intuitív tartalom, amelyet azáltal ismerünk, hogy legalább egy, alapvető és fontosnak tartott tulajdonsággal rendelkezik. Hogy ezáltal a kérdéses fogalom esetleg nem nyer egyértelmű megvilágítást, az nem okoz nagy zavart, ha csak a rögzített tulajdonságait használjuk. Ezen az úton mind az alapfogalmak, mind az alapfogalmakkal definiált fogalmak jelentésével (tartalmával) tisztában lehetünk, legalábbis annyira, hogy használhatókká válnak. Ezen a módon képesek vagyunk a fogalmak jelentésrögzítésére, amely elengedhetetlen a szigorú (egzakt) tárgyaláshoz. Az előző észrevételek alapján eljárhatunk úgy egy elmélet felépítésekor, hogy az alapfogalmak tartalmát, tulajdonságait szakmai axiómák segítségével határoljuk körül, majd ezekből származtatunk szükség-szerű összefüggéseket a bizonyítás során. Ekkor a filozófiai kérdés a következő: mit jellemeznek maguk a szakmai axiómák?

4.1. A fogalomhasználat klasszikus értelmezése

A fogalom meghatározásának arisztotelészi módszere a következő (Fazekas (2000)): a definíció megadja a legközelebbi *genus proximumot* (nemfogalmat) és a *differentia specificát* (faji különbséget), feltételezve, hogy egyértelműen elkülöníthetők egymástól a genushoz és a specificához tartozó jegyek. A fogalmi sajátosságok valójában predikátumok, legyenek ezek rendre $T_1, T_2, \dots, T_n$. Tegyük fel, hogy valamely fogalmat három lényegi sajátosság (T_1, T_2, T_3) definiál, és e fogalom alapján definiálunk egy ennek „alárendelt” fogalmat. Ez a fogalom tehát a legközelebbi genus proximumként szerepel. Tegyük fel, hogy a differentia specificát a „ T_4 ” predikátum testesíti meg. A definiálandó új fogalom ezek szerint a legközelebbi genus proximum jegyeit és a differentia specificát, mint predikátumokat egyesíti magában:

- Genus proximum = $\{T_1 \& T_2 \& T_3\}$,
- Differentia specifica = $\{T_4\}$,
- Definiált fogalom = $\{\{T_1 \& T_2 \& T_3\} \& T_4\}$.

Például az alábbi geometriai fogalmakat a következőképpen definiáljuk predikátumokkal, mint a fogalmakat meghatározó sajátosságokkal:

SOKSZÖG = $\{\dots\}$.

NÉGYSZÖG = $\{\dots\} \& T_1:\{\text{van négy csúcspontja}\}$.

PARALELOGRAMMA = $\{\dots\} \& T_1 \& T_2:\{\text{két-két szemközti oldala párhuzamos}\}$.

TÉGLALAP = $\{\dots\} \& T_1 \& T_2 \& T_3:\{\text{szögei derékszögek}\}$.

NÉGYZET = $\{\dots\} \& T_1 \& T_2 \& T_3 \& T_4:\{\text{oldalai egyenlő hosszúak}\}$.

A klasszikus (euklideszi) geometria az első ismert, egzaktul megalkotott, deduktív jellegű elmélet és fogalmi rendszere a fent leírt módon van felépítve. A példánkban említett fogalmak visszavezethetők nem definiált fogalmakra és axiómákra (ezek benne vannak valahol $\{\dots\}$ -ban), amelyeket a geometria kiinduló fogalmaknak, elveknek tart. Ahogy a példánk is demonstrálja, a $\{\dots\}$ -ban lévő (informális) előfeltevések, elvek mint konvenciók a fogalmakat egy állandó hierarchiába rendezik. Az így nyert konvencionális hierarchiából alkotott szabályokra érvényesek a logikai szabályok, máskülönben az informális és formális szemantika között ellentmondások jelennek meg, ha az elmélet elveinek és előfeltevéseinek szempontjából nem konvencionális hierarchiára alkalmazzuk őket.

Frege a geometria alapjairól írt könyvében nem definiált terminusokból (primitív elemekből) indul ki, és úgy gondolja, hogy minden definíció egy jelet (kifejezés, szó) tartalmaz, amelynek nincs előzetes referenciája, hanem azt a definíción keresztül kapja (Kenny (1995)). Az axiómák ilyen primitív elemekkel vagy definiált terminusokkal vannak kifejezve. Azonban feltételezni kell harmadik típusú állításokat is, az ún. magyarázó állításokat, amelyek Frege szerint nem tartoznak magához a matematikához, hanem a matematikai elmélet propaedeutikájának tekintendők. Így, mondjuk, a halmazelmélet nem definiált terminusai a „halmaz” és az „elem”, s bár nem definiáljuk őket, bizonyos leírásokkal (pl. „bizonyos tárgyak osztálya”, „faiskola”, „farkasfalka”, „szúnyog-

felhő”) megmagyarázzuk azt, hogy mit értünk halmazon, és mi a halmazhoz tartozás feltétele.

Hilbert a kontextuális definíciók használatát részesítette előnybe (Brown (1999)). A terminusokat nem expliciten és függetlenül definiáljuk, hanem inkább jelentésüket axiómákban kimutatva szedjük össze. Ezzel csak az a probléma, hogy ha egy terminus nem kap jelentést még azelőtt, hogy az axiómát állítanánk, akkor az axióma nem fejezhető ki gondolatot. Ez azonban nem zavarta Hilbertet, sőt ellenkezőleg, ezt erénynek tekintette. Úgy vélte, minden elmélet fogalmak egy keretrendszeré, azok egymáshoz való szükségszerű relációival együtt. Minden axióma hozzáad valamit a definícióhoz, és ezért minden új axióma változtat a fogalom jelentésén. Tehát a „pont” valami mást jelent az euklideszi, a Riemann-féle vagy a Bolyai–Lobacsevszkij geometriában.

De ha az alapfogalmak vagy az axiómák értelmüket az elméleten kívülről, az informális szemantikából merítik, akkor van-e lehetőség arra, hogy a rendszeren belül magyarázzuk meg az állításokat? Szellemes példával szolgál erre a játékelmélet egy klasszikus nem kooperatív mátrixjátéka, a fogolydilemma.

Két foglyot, akiket két különböző börtönbe csuknak, gyanúsítanak egy súlyos bűncselekmény miatt. A büntetésük attól függ, hogy vallanak-e vagy sem. Mindkét fogolynak két lehetősége van: vagy bevallja a bűncselekményt, vagy nem. Ha mindketten vallanak, öt évre ítélik őket. Ha egyikük sem vall, akkor egy bizonyított kisebb bűntény miatt mindkettejüket egy-egy évre lecsukják. Ha az egyik vall és a másik nem, akkor az elsőt szabadon bocsátják (vádalku), a másik viszont tíz évet kap. A két fogollyal ismertetik ezt a helyzetet, ugyanakkor semmilyen lehetőséget nem biztosítanak arra, hogy kommunikáljanak egymással. Mit tegyenek?

Képzeljük el magunkat az egyik fogoly helyébe, próbáljunk meg logikusan gondolkodni az ő fejével. Két módon is gondolkodhatunk:

- Ha a társam vall, akkor két eset lehetséges: ha én is vallok, öt évet kapok, ha nem vallok, akkor tizet. Ha tehát a társam vall, akkor jobb, ha én is vallok. Ha a társam nem vall, akkor szintén két eset lehet: ha én vallok, holnaptól szabad leszek, ha nem vallok, kapok egy évet. Ha a társam nem vall, akkor is jobb, ha én vallok. Tehát akár vall a társam, akár nem, én akkor járok jobban, ha *vallok*.

De a logika ugyanezt parancsolja a társamnak is. Tehát mindketten (a logika alapján) vallani fogunk. Mindketten kapunk öt évet, holott ha egyikünk sem vallott volna, egy évvel megúszhatnánk. Ezért másképp gondolkodom:

- Feltételezem, hogy társam ugyanazt a döntést fogja hozni, mint én, hiszen ugyanolyan logikusan gondolkodik, mint én. Következésképpen, ha én arra a következtetésre jutok, hogy vallok, akkor ő is erre az eredményre jut. Mármint ha a következtetésem az, hogy vallok, akkor öt évet kapok, ha pedig a következtetésem az, hogy nem vallok, akkor egy évet kapok. Egy évet ülni jobb, mint ötöt, tehát *nem vallok*.

E második gondolatmenet valójában ugyanolyan logikusnak látszik, mint az első, mégis két különböző eredményhez jutottunk. Hogyan hozzam meg akkor döntésemet? Baj van a logikámmal?

A két gondolatmenet ugyanazokat az elemi logikai lépéseket használja, ám az utóbbi tartalmaz még egy kiegészítő feltételezést. Mivel a logikus gondolatmenet ugyanarra az eredményre vezet, bárki gondolja is végig, így csakis a második gondolatmenetben lévő előfeltételezés okozhatta az ellentmondást. A racionalitás atyja, Descartes *Elmélkedések az első filozófiáról* című művében éppen arra az előfeltevésre alapozva, hogy minden ember egyforma szellemi képességekkel bír és logikus gondolkodó, azt bizonygatja, hogy bár hosszantartó viták után, de végül megtalálhatjuk ismereteink evidenciáit. Azokat pedig, akik ebben a vitában - alkalmatlanságuk miatt - nem vesznek részt, egyszerűen csak örülteknek nevezi őket, akikkel foglalkozni sem érdemes. Vajon a descartesi értékrend szerint, foglyaink a dilemmájukban, a börtönüket nem válthatnák-e fel az elmeegógyintézetekkel, mivel vagy örülnek minősülnének, vagy valószínűleg megőrülnének a lehetetlen helyzetükben?

Descartes értékrendjét megtartva úgy érvelne, hogy a két gondolatmenetből együtt valójában az következik, hogy a fogolydilemma helyzetek egyáltalán nem léteznek. Az első gondolatmenet csupa olyan lépést alkalmazott, ami a második gondolatmenetben is megengedett. Ezért a második gondolatmenetet továbbvihetjük úgy, hogy egyszerűen hozzávesszük az elsőt. Így egy ellentmondáshoz jutunk, ezért gondolatmenetünkben, a logika szabálya szerint, következik a kiinduló állításnak a lehetetlensége. Ha pedig nem létezik fogoly-

dilemma helyzet, akkor nyilván nem meglepő, hogy egy ebben a helyzetben logikus vallani és nem vallani is, ahogy az első, illetve a második gondolatmenetünkéből következik. Descartes ezen érvelésében nincs semmi hiba, kapcsolatba hozható a leibnizi lehetséges világok elképzelésével. Logikailag lehetséges, hogy a világ olyan legyen, amelyben nincsenek fogolydilemmák. A mi világunk azonban úgy tűnik, hogy nem ilyen.

Nézzünk egy másik példát, a Banach-Tarski paradoxont (Beke (1989)). A paradoxon abból a bizonyított tételből ered, hogy az $\mathbf{R}^3$ tér bármely korlátos részhalmazainak, amelyeknek van nem üres belső része, létezik ekvivalens felbontásuk.

Részletesen ez a következőt jelenti: ha A és B az $\mathbf{R}^3$ két részhalmaza, pl. két különböző sugarú gömb, amelyek

- korlátosak, azaz egy r véges sugarú, meghatározható méretű gömbbe bezárhatók: bármely $x, y \in A$: $d(x, y) \leq r$, illetve minden $v, w \in B$: $d(v, w) \leq r$;
- belsejük nem üres, azaz $\text{int}(A) \neq \emptyset$ és $\text{int}(B) \neq \emptyset$, ahol $\text{int}(H) = \{x: \text{létezik olyan } S(x, \varepsilon) \text{ környezet, hogy } S(x, \varepsilon) \subset H\}$, tetszőleges $H \subset \mathbf{R}^3$ halmaz esetén;

akkor szétvághatjuk őket $A_1, A_2, \dots, A_n$, valamint $B_1, B_2, \dots, B_n$ véges darabokra úgy, hogy A_1 B_1 -gyel, A_2 B_2 -vel, ..., A_n pedig B_n -nel legyen azonos.

Ennek következtében, ha van két tömör gömbünk és az egyik nagyobb, mint a másik, akkor feldarabolhatjuk őket úgy, hogy darabjaik páronként egybevághók legyenek. Eszerint ha egy kicsi aranygömböt véges sok darabra vágok, a darabokból újra összerakhatok egy nagyobb aranygömböt. Sikertől megoldást találni az alkímisták régi álmára? Nos, van egy kis probléma. Nevezetesen, hogy az említett tétel bizonyítása nem konstruktív. Hiába vagyok tisztában azzal, hogy elvileg egy tömör gömbből készíthetők egy nagyobb a leírt módon, halvány fogalmam sincs arról, hogyan kellene ezeknek a daraboknak kinéznie. Ennek az oka, hogy a darabok szétvágása a kiválasztási axiómán alapul. Ez az axióma azt követeli meg, hogy a halmazok nem üres rendszeréhez található egy olyan halmaz, amely mindegyikből tartalmaz elemet. Vannak matematikusok, a már említett konstruktivisták, akik éppen azért kerülnek a kiválasztási axióma használatát, mert az nem árulja el, hogyan kell ezt a halmazt létrehozni. Ráadásul sok matematikus vélte azt, hogy a kiválasztási axióma

újabb antinómiák forrása lehet, amint azt a Banach-Tarski paradoxon is mutatja.

Az, hogy ez az ellenvetés a kiválasztási axiómával szemben alaptalan, Gödel egy nevezetes, 1938-ból származó tételéből következik. Eszerint, ha a halmazelmélet akármelyik ismert axiómarendszere ellentmondástalan, akkor a kiválasztási axióma hozzáadásával is az marad. Ezt az eredményt aztán tovább élesítette Cohen 1963-ban. Megmutatta, hogy a kiválasztási axióma független a maradék axiómarendszertől, tehát érvényessége benne eldönthetetlen. A példánknál maradva, a talányos problémamegoldó, Dr. Ecco írhat egy olyan számítógépes programot, amely transzformációk útján a kisebb gömb minden darabját átviszi a nagyobb gömb megfelelő helyére és a szükséges transzformációk, valamint az egyes darabok pontjainak ismeretében már könnyű visszakövetni, hogyan kell kivágni az egyes darabokat a kisebb gölyőből. Ahol a bizonyítás a kiválasztási axiómára hivatkozik, ott a számítógép véletlenszám-generátorával adja meg, hogy a gömb egyes pontjai melyik halmazhoz tartoznak. Lehet, hogy valójában aranycsinálásból él Dr. Ecco és a problémamegoldás csupán intellektuális hobbi? A mai felfogás szerint az axiómák szerepe nem az, hogy az általuk axiomatizált tudományterület alapfogalmait, hanem tételeit jellemezze.

4.2. Mi a bizonyítás?

A bizonyítás egy gondolkodási folyamatnak, a problémamegoldásnak a része, amelyen keresztül egy állítás, egy igazolni kívánt tétel érvényességének felismeréséhez eljutottunk, és másoknak is bemutatjuk, hogy ők is felismerjék a tétel érvényességét. A bizonyítás közeli rokonságban van a következtetéssel. Mi ugyanis következtetés révén ismerjük fel a legtöbb tétel érvényességét. A különbség döntően a célban van: a következtetésben adva vannak az előzmények és keressük a következményt, a bizonyításban pedig már megvan ez a következmény, az igazolandó tétel, és megszerkesztjük hozzá az előzményeket és a következtető eljárást.

A következtetések esetén tehát már fennálló érvényes állításokból (premisszákból) egy új érvényes állítást (konklúzió) hozunk létre. Ennek egyik módja a dedukció, amelyben a következmény vagy kevésbé általános, vagy legfeljebb éppen olyan általános állítás, mint a premisszák. A dedukció leg-egyszerűbb alakját szillogizmusnak nevezzük, amely következtetésben csak két premissza van, ezért a konklúzióval együtt csupán három állítás és össze- sen három fogalom szerepel: a következmény alanya (S), állítmánya (P) és még egy fogalom, amely mindegyik előző állításban előfordul, de a követke- zményben nem. Ez a fogalom kapcsolja össze S-t és P-t, ezért középfogalom- nak (*terminus medius*) nevezik (M).

Mivel a középfogalomnak mindegyik előzményben elő kell fordulnia, tehát az egyszerű szillogizmusnak a következő négy alakja lehetséges:

M – P	P – M	M – P	P – M
S – M	S – M	M – S	M – S
—————	—————	—————	—————
S – P	S – P	S – P	S – P

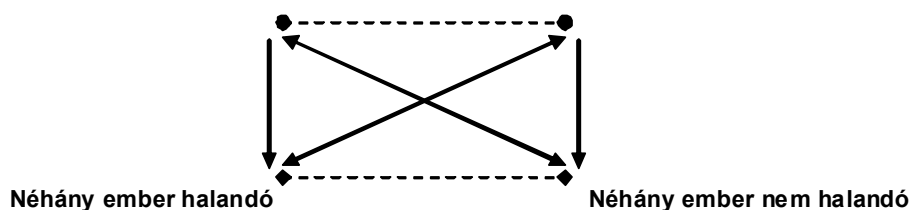
A vonal fölött lévő premisszák kategorikusak, vagyis mindegyike lehet egye- temesen állító (A-mondat), egyetemesen tagadó (E-mondat), részlegesen állí- tó (I-mondat) és részlegesen tagadó (O-mondat). Ezt szokás az arisztotelészi négyzetben ábrázolni:

A-mondat

Minden ember halandó

E-mondat

Egyetlen ember sem halandó



I-mondat

Néhány ember halandó

O-mondat

Néhány ember nem halandó

Az A-O és az E-I mondatok kontradiktórikusak, vagyis az átlók mentén az állí- tások kölcsönösen kizárják egymást. Az A-I és az E-O mondatok szubaltern viszonyban vannak, azaz az arisztotelészi logikában az univerzális állításokból következnek a partikulárisak (az elsőrendű logikában már nem, mert ebben az

univerzális kvantifikációnak nem tulajdonítunk egzisztenciális tartalmat!). Az A-E mondat viszonya kontrer, azaz a két univerzális állítás egyszerre nem lehet igaz, de lehet hamis, végül az I-O mondat viszonya szubkontrer, vagyis egyszerre lehetnek igazak, de nem lehetnek hamisak. Két példa szillogizmusra:

Minden ember halandó	A	Minden állócsillagnak van saját fénye.	A
Minden görög ember	A	Egyetlen bolygónak sincs saját fénye.	E
Minden görög halandó	A	Egyetlen bolygó sem állócsillag.	E

Az ilyen egyszerű szillogizmus mellett léteznek továbbiak. A szétválasztó (vagy diszjunktív) szillogizmusban a főtétel diszjunktív állítás, az alsó állítás pedig vagy állítja, vagy tagadja a szétválasztás tagjainak egy részét. Például:

Ha A vagy B vagy C vagy D	Az égitestek vagy állócsillagok, vagy bolygók, vagy üstökösök.
De A (est) B	A Sirius állócsillag.
A sem nem C, sem nem D	A Sirius sem nem bolygó, sem nem üstökös.

A szétválasztó szillogizmusnak van egy sajátos formája, amelyet dilemmának, vagy ha több ága is van, akkor trilemmának, tetralemmának, é.í.t. nevezünk. Itt azt mutatjuk ki, hogy a diszjunktív állítások akármelyik tagja legyen is igaz, minden esetben ugyanaz lesz a következmény. Általános formában:

A vagy B vagy C
De ha A – B, a következmény D
Ha A – C, a következmény akkor is D

Dilemmára mutattunk már fentebb egy matematikai példát, a fogolydilemmát. Híres, klasszikus dilemma Tertullianus dilemmája. Az antik Rómában Traianus császár kiadta rendeletét, hogy a keresztényeket nem kell hatóságilag üldözni, de ha valaki feljelenti őket, meg kell büntetni a keresztényeket. Erre Tertullianus így okoskodott³⁵: a keresztények vagy bűnösök, vagy ártatlanok. Ha bűnösök, akkor hatóságilag is kell őket üldözni, tehát a rendelet helytelen. Ha azonban nem bűnösök, akkor feljelentésre sem szabad őket megbüntetni, tehát a rendelet ekkor is helytelen.

Leibniz trilemmával kívánta bizonyítani, hogy a létező világ a lehető legjobb. Mert ha nem így volna, akkor Isten vagy nem ismerte volna a lehető leg-

³⁵ Tertullian: *Adversus Marcionem*, [ed. and transl. Ernest Evans, 2 vol. Oxford: Clarendon Press, 1972, i. 97-99 (II.5.)].

jobb világot, tehát nem volna mindentudó; vagy nem tudta volna a lehető legjobb világot megteremteni, tehát nem volna mindenható; vagy nem akarta volna a lehető legjobbat megalkotni, akkor pedig nem volna végtelenül jó. Mivel azonban Istenben mindhárom tulajdonság megvan, tehát a teremtett világ a lehető legjobb. Az ilyen okoskodás csak akkor helyes, ha a diszjunkt állítás tagjai kizárják egymást, és az összes lehetséges esetet felölelik. Leibniz okoskodásában ezért kifogásolhatjuk, hogy a végtelen jóságból nem következik az, hogy Isten a legtökéletesebb világot választja ki – ezzel a trilemma feloldható.

Új formájú szillogizmust kapunk, ha legalább a főtételekben feltételes állításokat használunk. Az alsó tétel lehet kategorikus, ekkor heurisztikus szillogizmusról, vagy szintén hipotetikus állítás és ekkor feltételes szillogizmusról beszélünk. Példa heurisztikus szillogizmusra:

Ha A van, akkor úgy tudjuk, hogy B is van.	Ha szárazföld van a közelben, gyakran látunk madarakat.
Kiderült, hogy B van.	Most madarakat látunk.
A hihetőbb.	Hihetőbbé vált, hogy szárazföld van a közelben.

Pólya a heurisztikus szillogizmus elnevezését a következőképpen magyarázza [Pólya (1977)]: Kolumbusz és társai már elejétől fogva sejtették, hogy nyugat felé hajózva végül is szárazföldre érnek. Ennek a sejtésnek kellett, hogy bizonyos hitelt is adjanak, mert különben nem indultak volna el. Útjukban minden eseményt egyetlen kérdés szempontjából vizsgáltak: „közel van-e már a szárazföld?”. Bizalmuk úgy nőtt vagy csökkent, ahogy egyes események következtek vagy elmaradtak. Az utazás egész drámai feszültsége az ilyen bizalom-hullámvázásokból eredt. Pólya e heurisztikus szillogizmust kiterjeszti: a jelek, amelyek a kutatót meggyőzik, hogy jó nyomon van, az útmutatások, amelyek mindennapi ügyeinkben vezérelnek, a bizonyítások minden formája két dologban megegyeznek: i) hiányzik belőlük a szigorú értelemben vett egzakt bizonyítás bizonyossága; ii) lényegesen új tudáshoz segítenek. Azt a heurisztikus okoskodást, ami az ilyen bizonyítás alapját alkotja, Pólya plauzibilis következtetésnek nevezi.

A mindennapi élet inkább induktív következtetésekkel van tele, amik a deduktív (gyakran plauzibilis) következtetések mellett használt következtetési

formák. Ha valakiről azt mondom, hogy jószívű, akkor egyes tapasztalati cselekedeteiből vonom le azt a következtetést, hogy általában minden cselekedete ilyen természetű. S hasonlóan, valamely országról vagy emberek csoportjáról indukció alapján mondok ítéletet, hiszen az összes lakost vagy embert egyáltalán nem ismerem és nem vettem vizsgálat alá, hanem csak a néhány tapasztalt megegyező sajátosságok alapján következtetek a többire. Ez az indukciós bizonyítás fonákja: nem minden esetben általánosíthatunk, ennek feltételeit meg kell állapítani. Vannak esetek, amelyekben csak akkor mondhatjuk ki az általános ítéletet, ha minden egyes egyednél külön megállapíthatjuk, kiterjeszthetjük az állítmány helyességét. Ezt az eljárást teljes indukciónak nevezzük.

Ha valamely S fogalom alá tartozó összes $s_1, s_2, \dots, s_n$ egyedekről megállapítunk egy P állítmányt és ezekből az egyes állításokból létrehozuk az $S-P$ általános állítást, akkor teljes indukciót végzünk. A teljes indukció általános alakja a következő szillogizmus:

$$\begin{array}{rcl} (s_1, s_2, \dots, s_n) - P & \text{(főtétel)} & \\ S - (s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{(alsótétel)} & \\ \hline S - P & \text{(konklúzió)} & \end{array}$$

Megjegyzendő, hogy teljes indukció csak gyűjtőfogalomra használható, amelynek köre alá tartozó egyedek pontosan megállapított zárt sokaságot alkotnak. Így általában a könyvek nem, de a könyvtárban lévő könyvek már olyan sokaságot alkotnak, amelyeknek minden egyes tagja számbavehető, megvizsgálható, tehát tudunk róluk teljes indukciót alkotni. Mivel a teljes indukció esetén végül is a következmény kizárólag összefoglalja azt, ami az egyes állításokban külön már ki van fejezve, ezt nem is tekinthetjük igazi következtetésnek. Van azonban a teljes indukciónak egy olyan fajtája, amit már valódi következtetésnek kell tekintenünk: a következményként szolgáló állítás végtelen sok esetre érvényes, és valójában végtelen sok esetre állapítjuk meg a tételt, tehát teljes indukciót végzünk. A matematikában ezt úgy használják, hogy ha valamely tétel n esetre érvényes, akkor $n+1$ esetre is érvényes. Ebből következik, hogy ha néhány esetre érvényes, akkor végtelen sok esetre is érvényes.

Példa: $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, é.í.t. Mármost az a kérdés, hogy ez a tétel kimondható-e általánosan? Világos, hogy a végtelen számsor összes tagjain nem próbálhatjuk ki, de kimutathatjuk, hogy ha n tagig igaz, akkor $n+1$ tagra is igaz. Legyen az első n páratlan számok összege: $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$. Az egyenlet mindkét oldalához $2n+1$ -et adva, akkor $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1$ nyerjük. Az egyenlőség jobb oldala nyilván $(n+1)^2$, a baloldala pedig az első $n+1$ páratlan szám összege. Vagyis valóban, ha a tétel n számra igaz, akkor $n+1$ -re is igaz. Mivel az első $1, 2, 3, \dots$ tagra igaz, ezért a végtelen számsor összes tagjaira is igaz.

Mivel a bizonyítás éppen úgy, mint a következtetés, állításokat használ, ezért csak olyan állításokból indulhatunk ki, amelyeket az, akinek bizonyítunk, már elfogadott. Függ tehát a bizonyítási eljárás attól, hogy kinek bizonyítunk. Így meg kell keresni a közös alapot, amelyet mindketten elfogadunk. Indirekt bizonyításnak nevezzük azt az eljárást, amellyel nem közvetlenül a tétel érvényességét mutatjuk ki, hanem a neki ellentmondó tétel érvényességét. Itt a közös alap az, hogy tudjuk, két egymásnak ellentmondó állítás közül pontosan az egyik igaz, mert a másik nem tartalmaz mást, mint ennek tagadását.

Példa: Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok prímszám van! Tegyük fel indirekten, hogy csak véges sok prímszám van, és legyen p a legnagyobb prímszám. Most definiáljuk az n számot úgy, mint 1 plusz az összes prím szorzatát: $n = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p) + 1$. Mármost ha n prím, akkor eredeti állításunk hamis, mivel n nagyobb, mint a feltételezett legnagyobb prím, p . Tehát p összetett szám, ami azt jelenti, hogy felbontható prímszámok szorzatára. Azonban p -ig egyetlen prím sem osztja n -t, mivel mindig fennmarad 1, vagyis bármely szám, ami osztja n -t, nagyobb kell legyen p -nél. Mindezekből az következik, hogy van egy p -nél nagyobb prímszám. Így n akár prím, akár összetett szám, az a feltevésünk, hogy van legnagyobb prímszám hamis. Ezért végtelen sok prímszám van.

A bizonyítás elegáns és meggyőző. Az indirekt bizonyítás esetén mégis vannak matematikusok – a konstruktivisták –, akik kifogásokat emelnek, tehát nincs meg a bizonyítás meggyőző erejének közös alapja. Miért akadnak fönn az indirekt bizonyításon? Mert tagadják azt a tényt, hogy egymásnak ellentmondó állításokból kiindulva, pontosan az egyik mindig igaznak bizonyul. Nincs biztosítva ugyanis, minden esetben, az állítások olyan konstrukciója, amely alapján igazságuk állítható lenne³⁶.

Példa: Definiáljuk most n számot a következőképpen:

³⁶ A konstruktivista matematika egyéb módszertani problémájával az 5. fejezetben fogunk még foglalkozni.

$$n = \begin{cases} 3, & \text{ha a Goldbach sejtés igaz} \\ 6, & \text{ha a Goldbach sejtés nem igaz} \end{cases}$$

és bizonyítsuk, hogy n prímszám! Nyilván csak $n = 3$ esetet kell vizsgálnunk. Ennek igazság-alapja azonban olyan állításon alapul, amit most nem tudunk bizonyítani. Hasonló okokból nem fogadják el azt sem, hogy ha

$$n = \begin{cases} 3, & \text{ha a Goldbach sejtés igaz} \\ 5, & \text{ha a Goldbach sejtés nem igaz} \end{cases}$$

akkor „ n prímszám” állítás triviálisan igaz lenne. Mindkét esetben hiányzik a bizonyítás konstrukciója. Az indirekt bizonyításban a két ellentmondó állítás egyikének konstrukciója, ez utóbbi esetben pedig, mert nem világos, hogy n valójában melyik prímszám.

4.3. Bizonyítás-generált fogalomhasználat

Az igazság és a fogalomhasználat klasszikus értelmezésének tárgyalása során ahhoz a konklúzióhoz jutottunk el, hogy végső soron vissza kell mennünk az elméletek informális háttéréig. Egy áttetsző fátyol választja el a matematika formális elméleteit az „empirikus” matematikától, vagyis a matematika informális háttérétől és alkalmazási területeitől, amiben a matematikai felfedezések gyökereznek. A 3.3. fejezetben ismertetett Münchhausen-trilemmának egy ilyen axiológiai opciója a matematikában Lakatos (1981) matematikafilozófiája, amely a popperi tudományfilozófiát és Pólya módszertani gondolatait ötvözi. Popper (1968) szerint a tudomány törvényszerűségeit nem lehet bizonyítani, és ez alól a matematika sem kivétel. Egy elmélet sejtésekből, találgatásokból indul ki, majd próbára teszik és kétségbe vonhatják. Csak akkor válhat átmenetileg megalapozottá, ha minden próbát kiáll. Pólya módszertanában mindez a matematikai gondolkodás két elemének hangsúlyozásával tematizálható:

- A heurisztikus szillogizmussal és okoskodással, amely nem végleges és szigorú, hanem csak átmeneti és plauzibilis következtetést jelent, s célja a kitűzött feladat megoldása. A bizonyítás úgy történik, hogy a lehetséges gondolatsor közül kiválasztunk egy bizonyos irányt, amelyet szubjektíve plauzibilisnek tartunk, és ezen az úton indulunk el. Ha ez eredménytelen, akkor új plauzibilis irányt választunk, és az eljárást megismételjük, amíg eredményre nem jutunk.

- Az analógiákra és utánzásra épülő problémamegoldással és diszkusszióval. A nehézség itt abban áll, hogy minden problémakörnek sajátos megoldási módszerei vannak, amelyeket más területen már csak részben lehet alkalmazni vagy egyáltalán nem használhatók. Mondjuk, az aritmetika jellegzetes bizonyítási formája a teljes indukció, amely számos más matematikai probléma bizonyítása esetén irreleváns. Az elemi geometriában a kiindulás alapja sokszor egy ábra, amely a kiinduló adatokat tartalmazza, és amelyből bizonyos érvényes összefüggések („geometriai viszonyok”) közvetlenül leolvashatók. Ugyanakkor a felsőbb geometriában csakúgy, mint a felsőbb matematikában, az ábrákat már csak szemléltetésre használják, de bizonyos esetekben – pl. diszkrét metrikus térben – még ilyen szemléletes ábra sem készíthető. Ismét más jellegzetes bizonyítási módszerek vannak az analízisben, mondjuk a sorozatok konvergenciájának³⁷, vagy annak bizonyítására, hogy egy differenciálegyenlet megoldása egyáltalán létezik.

Ezek szerint egy tudományos elmélet igazságát teljességgel sohasem tudhatjuk, és a matematikában is csak azért hihetünk, mert a felbukkanó ellentmondások dacára működik: Pólya általános, „heurisztikus algoritmusát” követve, matematikai problémákat tudunk megoldani, sőt – a diszkusszió során – újabb elméleteket felállítani.

Lakatos szerint a matematika a kritikától és helyesbítésektől fejlődik, tehát nem tévedhetetlen. Egy sejtésből kiindulva párhuzamosan keressük a bizonyításokat és ellenpéldákat, amelyek összefüggnek: az új bizonyítások régi ellenpéldákat magyaráznak, az új ellenpéldák pedig régi bizonyításokat ingatnak meg. Ez az elemzés nem a formális matematikára alkalmazható, ha-

³⁷ A sorozatok konvergenciájának bizonyítása például becslésen alapulhat: annak bizonyítása, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ $\mathbb{R}$ -ben, a sorozat határértékének definíciója alapján nem könnyű, ha $\{x_n\}$ túlságosan bonyolult. Ebben az esetben választhatunk egy olyan egyszerűbb $\{y_n\}$ felülről becsülő sorozatot, hogy i) bármely n -re: $|x_n - a| \leq y_n$ és ii) tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett, az $y_n < \varepsilon$ egyenlőtlenséget könnyű megoldani. Tegyük fel, hogy ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása a következő formájú: $n > f(\varepsilon)$, ahol $f(\varepsilon) > 0$. Ekkor megválaszthatjuk N -nek $[f(\varepsilon)]$ -t (ha kiderül, hogy $[f(\varepsilon)] = 0$, akkor az egyenlőtlenség bármely n -re érvényes), s így bármely $n > N = [f(\varepsilon)]$ -ra fennáll $|x_n - a| < \varepsilon$, ami – definíció szerint – éppen azt jelenti, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

nem a felfedezések fókuszában, az állandó fejlődésben lévő, pre-analitikus matematikára, amivel már az iskolában a diákoknak és a tanároknak találkoznia kell, vagy inkább kellene. Lakatos *Bizonyítások és cáfolatok* című könyvében, amely lényegében egy tanár-diák dialógus az Euler-tételről, a matematikai felfedezésnek egy általános sémáját nyújtja. Ennek alapvető elemei a következők:

1. Primitív sejtés.
2. Bizonyításelemzés: egy gondolat kísérlet, amely a primitív sejtést részsejtésekre vagy lemmákra bontja.
3. Mind a primitív sejtéssel, mind bizonyos lemmával szemben ellenpéldák merülhetnek fel. Az első esetben globális, a második esetben helyi ellenpéldáról beszélünk.
4. A bizonyításelemzés ismételt vizsgálata: azonosítják a bűnös lemmát, amelynek a globális ellenpélda helyi ellenpéldája. Ez a bűnös lemma korábban rejtett maradt, vagy tévesen azonosították. Most explicitté teszik, és a következő megfontolások alapján, feltételként beépíthetik a primitív sejtésbe. Tegyük fel, ugyanis, hogy egy S primitív sejtés felbontható a $P_1, P_2, \dots, P_n$ részsejtésekre vagy lemmákra, azonban van olyan eset, amelyben S hamis (globális ellenpélda), de P_1 -től P_n -ig minden állítás igaz. Ez egy új P_{n+1} lemma megfogalmazásához vezet, amelyet az eset ismét megcáfol (helyi ellenpélda). Miután a P_{n+1} lemmát feltételként beépítik a primitív sejtésbe, az ellenpélda már nem teszi kérdésessé a P_1 -től P_{n+1} -ig tartó feltételrendszer és a primitív sejtés közötti feltételes állítás igazságát, mivel az most igaz, az eset alapján hamis feltételrendszer miatt.
5. A tétel, azaz a helyesbített sejtés, felváltja a primitív sejtést. Ennek legfontosabb új jellemzője a bizonyításból származó fogalom, amely lehet, hogy különböző bizonyítások metszéspontjában található, és így alapvető jelentőségű.

Ez utóbbi pontban van a lakatosi szemlélet legrelevánsabb meglátása dolgozatunkra nézve. Az elméletalkotás végső soron a fogalmak tartalmi megvilágítását végzi és tulajdonképpen a formális elméletekben alkalmazott fogalmak megváltozását jelenti. Tehát nincsenek statikus fogalmak, mivel a fo-

galmi változás a matematika formalizálási folyamatának (vö. 2. ábra) elkerülhetetlen terméke. A bizonyítások szerepe sem az, mint a hagyományos (Lakatos szavaival: dogmatikus) matematikában, tehát nem deduktív-formális jellegű. Inkább szkeptikus, heurisztikus jellegű, és célja bizonyos matematikai gondolatok, intuíciók evidenssé tétele. Ehhez magyarázó tényekre és a koherencia betartására van szükség.

4.4. A geometria mint a tér episztemikus reprezentációja

A közvetlen tapasztalatunkban megmutatkozó tér, geometriai szempontból háromdimenziós, vagyis három adat szükséges ahhoz, hogy valamely pont helyét a „térben” meghatározzuk. Az így alkotott tér homogén, azaz a tér bármely helyén az „egyenes” azonos, két pont között a legrövidebb távolság. Ez a szemlélet vezet az euklideszi tér fogalmához. Az euklideszi tér már nem valami kézzel fogható dolog, hanem pontok, egyenesek és síkok sokasága, amelyek között az összefüggést szakmai axiómák szabályozzák. Az euklideszi geometria szakmai axiómái közül az ötödik lett később sok vita tárgya, amely a következőképpen hangzik: ha egy egyenes úgy metsz két egyenest, hogy az egyik oldalán keletkező belső szögek összege kisebb két derékszögnél, akkor e két egyenes a metszőnek ezen az oldalán meghosszabbítva metszi egymást. Ez a szakmai axióma implicite magában foglalja azt is, hogy egy háromszög szögeinek összege két derékszög. Továbbá, hogy egy egyeneshez a rajta kívül álló ponton keresztül csak egy párhuzamos húzható. Euklidész ötödik szakmai axiómája erősen kiválik a többi alaptétel közül, mivel nem elég egyszerű, az evidencia szintje másnak tűnik. Figyelemreméltó, hogy Euklidész sem használja fel a bizonyításaiban, amíg nélkülözni tudta³⁸, és később is több matematikus úgy vélte, hogy ez a többi szakmai axiómától független, ami akár azt is jelentheti, hogy vele ellentmondóval helyettesíthető.

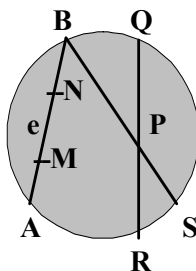
Az azt megelőző korszakok próbálkozásai után, hogy direkt (pl. az arab Aganisz) vagy indirekt módon (pl. Sacchieri) vagy, mint Lambert, mindkét úton bizonyítsák a párhuzamossági posztulátumot a többi axiómából, a XIX. század-

³⁸ Például az *Elemek* I. könyvének 1-28. és a III. könyv 1-19. tételeiben.

tól kezdve több matematikus (Gauss, Bolyai, Lobacsevszkij, Riemann) is arra a felismerésre jutott, hogy az euklideszi geometriától különböző geometriák felállítása lehetséges, amelyekben valamennyi korábbi szakmai axióma érvényes marad, az ötödik kivételével. A Riemann geometria kiindulópontja az euklideszi második szakmai axióma volt, amely szerint az egyenes mindkét irányban végtelenül meghosszabbítható. Riemann szerint a probléma az, hogy az euklideszi geometria informális szinten nemcsak az egyenes határtalanságát, hanem végtelenségét is feltételezi. Azonban ha az adott ponton áthaladó egyenest határtalannak, de nem végtelennek tekintjük, akkor egy olyan geometriát kapunk, amelynek jellemzője, hogy a „gömbfelületen” érvényes. Ezen a gömbfelületen az euklideszi geometria valamennyi szakmai axiómája teljesül, az ötödik kivételével. Ebben az összefüggésben az „egyenes” a főkörív egy darabja. A Riemann geometriában a háromszög szögeinek összege nagyobb, mint két derékszög (amíg az euklideszi geometriában egyenlő és a Bolyai-Lobacsevszkij geometriában kisebb, mint két derékszög összege), az egy ponton át valamely egyeneshez húzható párhuzamos egyenesek száma pedig zérus (amíg az euklideszi geometriában csak egy és a Bolyai-Lobacsevszkij geometriában végtelen számú párhuzamos egyenes húzható).

Végül is az n -dimenziós nemeuklideszi geometriák olyan geometriák, amelyek az $(n+1)$ -dimenziós euklideszi, illetve pseudo-euklideszi tér valós, illetve képzetes sugarú gömbjén jönnek létre (Jegorov (1986)). Az n növekedésével a nemeuklideszi terek lehetséges típusai is sokasodnak. A következő, ún. Cayley-Klein modell az euklideszi tér egy részében valósít meg Bolyai-Lobacsevszkij geometriát (Ruzsa (1967)). Tekintsünk egy körlapot a szélét alkotó körív nélkül, továbbá nevezzük az A és B pontok közötti húst *e egyenesnek*. Legyen most P a körlap tetszőleges belső pontja. Ha a körlap belsejében lévő húrokat nevezzük egyeneseknek, akkor a Q és R pontokat összekötő húr éppen a P ponton átmenő, *e*-vel *párhuzamos egyenes*: párhuzamos *e*-vel, hiszen a körlapon belül sehol sem metszi *e*-t. Ugyanakkor a P ponton átmenő *e*-vel párhuzamos egyenes az S és B pontokat összekötő húr is, mert ez csak B pontban metszi *e*-t, de B már a körlap szélén van, tehát nem tartozik a körlap belsejéhez (a modell teréhez). Hasonlóan, bármely más P-n át-

menő húr, amely a körlap belsejében nem metszi e -t, e -vel párhuzamos egyenesnek tekinthető.



6. ábra

Kimutatható, hogyha a körlap belsejében fekvő húrokat valóban egyeneseknek tekintjük, akkor az így nyert rendszer az euklideszi geometria összes axiómáit kielégíti, kivéve az ötödiket: látható, hogy a P ponton át nem csak egy, hanem végtelen e -vel párhuzamos, de e -t a körlap belsejében nem metsző egyenes (húr) húzható.

Euklideszi térszemlélettel két ellenvetést lehet ezzel szemben tenni:

- A kör belsejében lévő húrok nem „igazi” egyenesek, hanem csak az egyenesek részei. Ez az érv abból az elképzelésből származik, hogy az „igazi” egyenes euklideszi jellegű, azaz valami olyan, amilyennek mi megszoktuk őket. De mit tudunk valójában egy egyenesről? Csak azt, ami az egyenesre vonatkozó szakmai axiómákból következik. Amit ezen felül elképzelünk, az nem tartozik szükségképpen az egyenes tulajdonságaihoz: nem a szakmai axiómákból következik, hanem önkényesen adjuk hozzá, pl. megszokásból. Márpedig nekünk a tér leírásánál csak a szakmai axiómákra szabad támaszkodni, mint egyetlen biztos alapra.
- Az „igazi” egyeneseknek végtelen hosszúnak kellene lennie, máskülönben a modell tere speciális, véges lenne. Azonban a modell egyenesei a nemeuklideszi távolságfogalom szerint végtelen hosszúak. A modell két pontjának nemeuklideszi távolságát ugyanis a következő módon kell értelmezni. Legyenek M és N a körlap belsejében lévő pontok és jelölje $d(M,N)$ az euklideszi távolságot, míg $D(M,N)$ a nemeuklideszi távolságot a modellben. Az M és N pontokon átmenő e egyenes A és B pontokban metszi a modell teréhez nem tartozó körvonalat. A projektív geometriában kettősviszornak szokás nevezni az

$$(MNAB) = \frac{d(M,A)}{d(M,B)} \div \frac{d(N,A)}{d(N,B)} \text{ számot.}$$

Mármost az M és N pontok $D(M,N)$ nemeuklideszi távolságát a $D(M,N) = |\log (MNAB)|$ mennyiségként definiáljuk a modell terében. Ha az egyik pont, mondjuk N , a kör széléhez közeledik, akkor $d(M,N)$ vagy $d(N,B)$ nullává válik. Ekkor pedig az $(MNAB)$ kettősviszony

logaritmus végtelenné válik. Tehát a modell egyenesei nemeuklideszi értelemben végtelen hosszúak.

- Végül a modell párhuzamos egyenesei is, a 6. ábrán BA és BS, megfelelnek a „párhuzamosság” fogalmi tartalmának, hogy azok valóban a sík egymást nem metsző egyenesei³⁹.

A Cayley-Klein modell az euklideszi síkon modellezi a teljes Bolyai-Lobacsevszkij-féle hiperbolikus síkot, és hasonlóan elkészíthető ennek térbeli megfelelője, a hiperbolikus tér gömbmodellje. Ezzel minden hiperbolikus geometriai tételnek megfeleltettünk egy euklideszit. Ez logikai szempontból egy relatív természetű vizsgálathoz vezet: a Bolyai-Lobacsevszkij geometria ellentmondásmentes, ha az euklideszi geometria is az. S mi a helyzet az euklideszi geometriával? Mivel az euklideszi geometria modellje az analitikus geometria is, így minden geometriai tételnek megfelel egy összefüggés a valós számok körében. Ha tehát az euklideszi geometria ellentmondásos lenne, akkor ez megmutatkozna a valós számok körében is. A valós számok rendszerét úgy értelmezhetjük, mint olyan teljesen rendezett kommutatív testet, amelyben bármely monoton és korlátos sorozat konvergens. Ezzel az értelmezéssel szemben is felvethető, hogy az ezt jellemző axiómarendszer ellentmondástalan-e, illetve létezik-e egyáltalán olyan halmaz, amely teljesíti a valós számrendszer axiómáit?

Mindkét kérdés visszavezethető a természetes számok Peano-féle axiómarendszerére. Ami az ellentmondás-mentességet illeti, Hilbert adott először példát olyan axiómarendszerre, amelynek ellentmondástalanságát, más axiómarendszerek ellentmondástalanságára való hivatkozás nélkül, be tudta bizonyítani. Később, Hilbert gondolatait továbbfejlesztve, Gentzennek sikerült ellentmondás-mentességi bizonyítást találni a Peano-féle axiómarendszerre. Ami az egzisztencia-problémát illeti, az egyféle intuitív belátásnak tulajdonítható a következők miatt. Ha létezik olyan halmaz, amely kielégíti a Peano-féle axiómákat, akkor létezik olyan halmaz is, amely teljesíti a valós számok axiómarendszerét is.⁴⁰

³⁹ Euklidesz az *Elemek* I/23. definíciójában ekképp definiálja két egyenes párhuzamosságát.

⁴⁰ Miután a természetes számok halmazától eljutunk a racionális számok halmazáig, ahhoz Cantor és Dedekind nyomán meg tudunk adni olyan halmazt, amely a valós számok szándékolt modelljeként szolgálhat.

Azonban felmerül egy kis nehézség. A halmazelmélet szakmai axiómái felfoghatók egy formulahalmaznak. Erre alkalmazva a Löwenheim-Skolem tételt kiderül, hogy ha a halmazelméletnek van modellje, akkor van megszámlálható modellje is, azaz a modellhez tartozó tárgyalási univerzum megszámlálható. De akkor hogyan férnek bele egy ekkora modellbe a nemmegszámlálható halmazok? A halmazelmélet véges, formális nyelvének valamennyi kategóriájában (így pl. a relációk és függvények kifejezésében is) csak megszámlálható sok kifejezés létezik. A halmazelmélet megszámlálható modelljében, amelynek tárgyalási univerzuma a rendszeren kívülről nézve nyilván ω , az $\in$ -reláció nem feltétlenül egyezik meg a szemléletünkben fakadó szándékolt értelmezéssel. A nyelv végessége folytán elfér egy ω -nyi tartományon a végtelen halmazok végtelen hierarchiája:⁴¹ ez a Skolem paradoxon, aminek tárgyalására a 6. fejezetben még visszatérünk. Ha ezt a Peano axiómarendszerre alkalmazzuk, akkor mivel ennek van végtelen modellje (ez a standard aritmetika), ezért van akármilyen nagy végtelen számosságú modellje is (ami egy nem standard aritmetikai elmélet). Ez az állítás a Peano axiómarendszerre vonatkozóan azért meglepő, mert szemléletünk csak a standard aritmetikát, vagyis a megszámlálhatóan végtelen („nulla”, „egy”, „kettő”, „három”, é.í.t.) tárgyalási univerzumot tudja elképzelni a természetes számok modellálására.

Ahhoz tehát, hogy bebizonyítsuk, a természetes számok halmaza kielégíti a Peano axiómákat, a halmazfogalom tisztázására lenne szükség. A halmazelmélet művelői hisznek abban, hogy a halmazelmélet konzisztens, és így van a halmazelméletnek modellje. A halmazelmélet kurrens szakmai axiómarendszerében definiálnak egy osztályt, amely kielégíti a Peano axiómákat, majd állítják erről az osztályról, hogy halmaz.

A halmazelmélet informális alapkoncepciója az ún. kumulatív osztály-inklúzió elvén alapul, vagyis az osztályba foglalás eljárása iterálható. Egy osztály elemei nemcsak primitív objektumok lehetnek, hanem bizonyos osztályok is, és azokat az osztályokat nevezzük halmaznak, amelyek maguk is elemei lehetnek más osztályoknak. Ezek szerint, csupán üres halmazt használva, a természetes számok értelmezhetők az alábbi módon:

$$0 \leftrightarrow \{\emptyset\}, 1 \leftrightarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, 2 \leftrightarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \text{ é.í.t.}$$

Cantor a kumulatív osztály-inklúzió elvének megfelelően, „halmazon” intuíciónk vagy gondolatunk meghatározott, jól elkülöníthető n objektumainak egy egész N osztályba való sorolását értette. Ezt az elképzelést rombolta le a Russell-paradoxon, mivel nincs az objektumoknak olyan halmaza, amely megfelelne a „nem eleme önmagának” gondolatnak. Tehát az osztály-inklúzió elve nem folytatható tetszőlegesen, az eljárásnak korlátai vannak, amit szakmai axiómák által szabályozni kell. Kiderült az is, hogy a matematikában használt axiómarendszerek nem monomorfak, vagyis egy axiómarendszer bármely két modellje nem izomorf egymással.

⁴¹ Így nyerjük a felső Löwenheim-Skolem tételt (ld. 2.1.3. 25. korollárium).

(Monomorf axiómarendszerre csak olyan példákat ismerünk, amelyek véges halmazokat jellemeznek.) Nyilván, ha egy axiómarendszer monomorf, akkor kategorikus is (ellenkező esetben ugyanis volna olyan állítás, amely megfogalmazható lenne a rendszerben, de benne nem lenne bizonyítható, sem cáfolható. Ekkor az axiómarendszer modelljének tekinthető a rendszer alapfogalmai, plusz axiómái, plusz az állítás együttese, valamint az ezzel nyilván nem izomorf modell, amelyben a rendszer alapfogalmai, plusz axiómái, plusz az állítás tagadása állna). Azonban kategorikus axiómarendszer nem feltétlenül monomorf: ilyen a Peano-féle axiómarendszer is.

A lakatosi felfogás alapján, azt mondhatjuk, hogy akár egy geometriai fogalmat („poliéder”), akár a számfogalmat, akár egy halmazelméleti fogalmat („halmaz eleme”) tekintünk, nincs olyan pre-analitikus fogalom, amelyet először rögzíthetünk, majd ezután ebből a biztos pontból haladva megalkothatjuk a megfelelő formális elméletet. Ami a halmaz fogalmát illeti, a halmazelmélet radikálisan megváltozott Cantor óta és ez ismét megtörténhet. Mindez egy olyan folyamat, ami az elméletalkotás során bukkan fel, amikor az informális szféra egyik pre-analitikus fogalmát beveszik vagy az elmélet primitív elemei közé, vagy az ebből származtatott definiált fogalmak körébe. Nincs okunk ezért azt gondolni, hogy egy fogalom valaha is stabilizálódik és statikussá válik egy formális elméleten belül. Az elméleteket nem értelmezhetjük sterilen tehát, minden esetben „kívülről”, vagyis az informális szintről nézve válik az elmélet megalapozottá. Azonban, hogy még tapasztalat birtokában sem lehet ez evidencia, arra éppen a geometrián keresztül láthatunk példát.

Kétezer éven keresztül Euklidész szakmai axiómáit, magát az euklideszi teret úgy tekintették, mintha a világ megismeréséhez szükséges végső tapasztalati igazságok volnának. Ez nyilvánul meg Kant filozófiájában is, amely a térről azt tanítja, hogy az ember minden tapasztalatot megelőző, ún. *a priori* szemlélete. A nemeuklideszi geometriák alapján azonban többféle tér is lehetséges, tehát Kant álláspontja nem tartható, hacsak nincs többféle *a priori* szemléleti lehetőségünk. Mivel az euklideszi geometria nem szükségképpen az egyetlen szemléleti lehetőség, Bolyai, Gauss és Lobacsevszkij kezdeményezték, hogy a tapasztalat útján keressünk választ arra a kérdésre, hogy a világ tényeinek episztemikus reprezentációjára melyik geometria alkalmas. Azonban még a tapasztalatot, a megfigyelést sem tekinthetjük végső evidenciának. Erre Poincaré (1908) adott példát. Képzeljünk el ugyanis, olyan kétdi-

menziós lényeket, akik egész életük során egy R sugarú euklideszi körlapon élnek. Vannak méterrúdjaik, amivel távolságot tudnak mérni. Azonban a körlap hőmérséklet eloszlása nem homogén. A középponttól kifelé haladva a hőmérséklet a $T(r) = T_0(R^2 - r^2)$ formula szerint csökken. Tegyük fel, továbbá, hogy ebben a világban valamennyi testnek azonos hőtágulási együtthatója van, hossza a hőmérséklettel arányosan változik. Tehát a körlap széléhez közelítve a méterrudak hossza nullához tart. Ebben a világban, a fény különböző közegeken áthaladva, a törésmutató $(R^2 - r^2)$ kifejezéssel fordítottan arányos. Ilyen körülmények között a fénysugarak nem egyenes irányban, hanem körív mentén terjednek tovább. Ilyen empirikus tapasztalatok birtokában, hogyha a körlap lakói úgy tartják, hogy méterrúdjaik hossza mindenütt egyforma, ahhoz a konklúzióhoz jutnak, hogy egy végtelen kiterjedésű, konstans, negatív görbületű Bolyai-Lobacsevszkij világban élnek.

Tehát a geometriának és a fizikai elméletnek együtt kell megfelelni annak a tapasztalatnak, amelyet a kétdimenziós lények műszereikkel, mint a világ tényeit realizálják:

(geometria) + (fizikai elmélet) = (világ tényeinek episztemikus reprezentációja).

A világ tényeire vonatkozó egzisztencia-előfeltevések, hogy hol húzzuk meg a határt geometria és fizika között, végül is – Poincaré szavaival – konvenció kérdése⁴²:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(Euklideszi geometria)} + \text{(a világ hőmérséklete: } T(r) = T_0(R^2 - r^2)) & = & \text{(v.t.e.r.)} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Updownarrow \\
 \text{(Bolyai-Lobacsevszkij geometria)} + \text{(a világ hőmérséklete állandó)} & = & \text{(v.t.e.r.)}
 \end{array}$$

Persze ismét érvelhetünk azzal, hogy ha e gondolat kísérletből a valóságba lépünk át, akkor lehetnek olyan tapasztalataink, amelyek igazolják valamelyik interpretációt a kettő közül. A fizikai, hőmérsékleten alapuló magyarázat csak akkor fér össze egy másik fizikai elmélettel, a termodinamikával, ha a modell világának középpontjában van valamilyen hőforrás, pl. egy égitest. Ha azonban nincs ott égitest, akkor a helyzetet stacionernek tekintjük, a hőmérsékleti gradiens léte ellentmond a termodinamikának, és a geometriai értelme-

⁴² Ezzel kapcsolatos fejtegetéseit lásd: Poincaré (1908), 4. és 5. fejezet.

zés kerül előtérbe. Ez azonban elkerülhető, ha feltesszük, hogy volt Nagy Bumm, és azóta még nem telt el elég idő ahhoz, hogy beálljon a termikus egyensúly.

Mivel a térben lévő fizikai test jellemzői (anyag, hely, idő, mozgás) a világ minden lényeges vonásában megnyilvánulnak és kapcsolatban vannak, ezért a valóságos tér fogalmát soha nem tekinthetjük befejezettnek. A geometria axiómaiba betáplált egzisztencia-előfeltevések és a fizikai elméletek expliciten, posztulátumokban kifejezett egzisztencia-előfeltevései úgy hatnak egymásra, hogy a világ eseményeinek izomorf episztemikus reprezentációihoz jutunk. Ugyanakkor a fizikai elméletek egzisztencia-előfeltevései által karakterizált világképek nyilván inkompatibilisek. A fizikusok ezért kénytelenek megrostálni a különböző interpretációkat, de ezek szükségszerűen olyan kritériumok alapján történnek, amik az elméletek szempontjából exogén elemet is tartalmaznak. Ezek nem evidenciák, hanem az elmélet informális háttéréből származó, koherensnek mutakozó, magyarázó tények, amelyek esetleg más fizikai elméletek tényei (a példánkban termodinamikai).

4.5. Fizika és geometria – a newtoni és einsteini paradigma

A gravitáció Newton előtti fogalma olyan transzformációs csoporttal kapcsolatos, amelyre vonatkozóan a Föld felületére merőleges irány abszolút rögzített. Az ilyen transzformációkra vonatkozóan a nehézségi erőter iránya és nagysága invariáns, azaz a súly a testnek olyan belső tulajdonsága, amelyet magával visz. A helyzet alapvetően megváltozott, amikor Newton felfedezte, hogy a gravitáció csupán az általános tömegvonzás speciális esete. A transzformációs csoportot úgy általánosította, hogy a tér izotróppá vált, kitüntetett irány nélkül. Így a súly a gravitációs erő komponensévé válik. A newtoni klasszikus mechanika az ún. Galilei-transzformációkkal van összhangban, amelyek a teret és az időt külön kezelik. Newton I. posztulátuma szerint, egy inerciarendszerben az erőhatás nélküli mozgás gyorsulásmentes (egyenletes, egyenesvonalú). Newton ezt a szakmai axiómát eredetileg egy abszolút térben nyugvó, kitüntetett vonatkoztatási rendszerre mondta ki; nevezzük ezt a kitün-

tetett rendszert K_0 -nak. A *Galilei-féle relativitási elv* szerint, a K_0 inerciarendszerrel mechanikai szempontból egyenértékű minden hozzá képest v =konstans sebességgel mozgó K' vonatkoztatási rendszer. Egyenértékű abban az értelemben, hogy a $K_0 \rightarrow K'$ áttérés során a mechanika alapegyenletének szerkezete változatlan (invariáns) marad.

Nem ez a helyzet az elektrodinamika esetén. Az a követelmény, hogy a Maxwell-egyenletek a Galilei-transzformációra nézve invariánsak legyenek, ellentmondó transzformációs szabályokhoz vezet, ugyanis a Maxwell-egyenletek nem invariánsak a Galilei-transzformációval szemben. A mechanika és elektrodinamika alapegyenleteinek Galilei-transzformációval szembeni különböző viselkedése miatt, új transzformációs egyenleteket kellett keresni. Egy tágabb transzformációs csoportot, az ún. Lorentz-transzformációkat használja a relativitáselmélet.

A relativitáselmélet posztulátumai

- (1) Minden K_0 inerciarendszerben az erőhatás nélküli mozgás gyorsulásmentes (NEWTON I) és mechanikai szempontból egyenértékű minden hozzá képest állandó sebességgel mozgó K' vonatkoztatási rendszer is (GALILEI-FÉLE RELATIVITÁSI ELV).
- (2) A c fénysebesség vákuumban állandó.
- (3) Egyetlen vonatkoztatási rendszer sincs kitüntetve bármelyik másikkal szemben a térbeli és időbeli transzformációk során (LORENTZ-KOVARIANCIA ELV).

A Galilei-transzformációhoz hasonlóan tekintsük a $K_0 \rightarrow K'$ áttérést, de az egyszerűség kedvéért, szorítsuk a transzformációt most csak egydimenzióra (x -irányba történő transzformációra, miközben $y' = y$ és $z' = z$).

Ekkor matematikai szempontból a fenti posztulátumok a következőket jelentik:

(1) $\Rightarrow$ A hely és az idő lineárisan transzformálódnak:

$$x' = \alpha x - \beta t, \text{ ahol } \alpha \text{ és } \beta \text{ transzformációs együtthatók}$$

$$t' = \mu x - \pi t, \text{ ahol } \mu \text{ és } \pi \text{ transzformációs együtthatók.}$$

(2) $\Rightarrow$ $x' = ct'$, ha $x = ct$.

(3) $\Rightarrow$ Ha ismerjük α , β , μ és π transzformációs együtthatókat, mint a v sebesség függvényeit, akkor az $x = x(x', t')$ és $t = t(x', t')$ ellentétes transzformációt úgy nyerjük, hogy v -t helyettesítjük $(-v)$ -vel. Most meghatározzuk ezeket az együtthatókat.

Mivel K_0 v = konstans sebességgel mozog K' -höz képest, ezért $x = vt$ következtében $x' = \alpha vt - \beta t$, így $\beta = \alpha v$. Ebből $x' = \alpha(x - vt)$ következik és a (3) szakmai axiómának megfelelő-

en: $x = \alpha(x' + vt')$. A (2) posztulátum pedig (3) alapján a következő formájú lesz: ha $ct = \alpha t'(c + v)$, akkor $ct' = \alpha t(c - v)$, és ezzel $ct' = \alpha(\alpha t' \frac{c+v}{c})(c-v) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Tehát $\beta = \alpha v$ és $x' = \alpha(x - vt)$. Ebből a (3) posztulátum alapján a következőket kapjuk:

$$x = \alpha(x' + vt') = \alpha(\alpha x - \alpha vt + vt') \Rightarrow t' = \alpha t + \frac{x(1 - \alpha^2)}{\alpha v} = \alpha \left(t - \frac{vx}{c^2} \right).$$

Meghatároztuk tehát a transzformációs együtthatókat, és felírhatjuk a Lorentz-transzformációkat:

$$x' = \alpha(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \alpha \left(t - \frac{vx}{c^2} \right), \quad \text{ahol } \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Három dimenzióban az y' és z' koordinátákra hasonló összefüggés kapható.

A Galilei-transzformációk a newtoni klasszikus mechanika, míg a Lorentz-transzformációk a relativisztikus mechanika összefüggései. Összehasonlítva az (egydimenziós) Galilei- és Lorentz-transzformációkat a következőket láthatjuk:

Galilei-transzformációk

$$x' = x - vt$$

$$t' = t$$

Lorentz-transzformációk

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Tehát az olyan mennyiségek, amelyek a régebbi, newtoni elméletben invariánsnak számítottak, a relativitáselméletben közvetlenül hozzá nem férhető,

invariáns mennyiségek komponensévé váltak. Ugyanakkor, ha $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, akkor

a Lorentz-transzformációk gyakorlatilag a Galilei-transzformációkkal azonos eredményt adnak, a relativitáselmélet összefüggései a klasszikus mechanika egyenleteibe mennek át. Található tehát olyan transzformációs törvény, amely megtestesíti a két elmélet közötti matematikai kapcsolatot. A Lorentz-transzformációk – a (2) szakmai axiómára tekintettel – kielégítik az

$x'^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2$ összefüggést. Általánosabban a Lorentz-transzformációk az $x^2 - (ct)^2$ mennyiséget invariánsan hagyják. A Lorentz-transzformációk matematikai értelemben csoportot alkotnak, az ún. Lorentz-csoportot. A Lorentz-transzformációk három fontos fizikai következményét kell még itt tárgyalnunk:

$$(1) \text{ Lorentz-kontrakció: } L' = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2) \text{ Idődilatáció: } T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$(3) \text{ Lorentz-féle empirikus tömegnövekedési formula: } m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Bizonyítás

(1) Legyen a nyugvó K_0 vonatkoztatási rendszerben, az x tengelyen elhelyezett nyugvó rúd hossza: $L = x_2 - x_1$. A K' -beli megfigyelő a rúd hosszát úgy mérheti meg, hogy végpontjainak helyzetét $(x_2 - x_1)$ ugyanabban a T' időpontban olvassa le:

$$L' \equiv (x_2' - x_1') = (x_2 - x_1) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

A v sebességgel mozgó megfigyelő számára a nyugvó rúd a mozgás irányában $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ faktoralal rövidebbnek látszik.

(2) Legyen két esemény x_1 és x_2 helyen egyidejű a nyugvó K_0 -ban, vagyis $t_1 = t_2$. Ekkor a

$$\text{Lorentz-transzformáció alapján } t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ és } t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ azaz } t_1' \neq t_2'. \text{ A } K'\text{-beli meg-}$$

figyelő számára tehát a két esemény nem egyidejű (az egyidejűség relativitása).

Most az x_1 helyen adjon egy óra jeleket $T = t_2 - t_1$ időközönként. Ekkor

$$T' \equiv (t_2' - t_1') = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Tehát a mozgó óra lassabban jár, mint a nyugvó.

(3) Az impulzus- és energiamegmaradás klasszikus törvényei nincsenek összhangban a Lorentz-transzformációkkal. Ha pl. két egyenlő, m_0 tömegű test rugalmasan ütközik és sebességük iránya megváltozik, miközben a nagyságuk változatlan marad, akkor $m_0 \mathbf{v}_1 + m_0 \mathbf{v}_2$ mennyiség ütközés után nem egyezik meg az ütközés előtti mennyiséggel. Ez úgy mutatható meg,

hogy a két test tömegközéppontjához rögzített rendszerről a Lorentz-transzformációkkal egy nyugalmi rendszerre térünk át. Tehát a klasszikus összimpulzus nem marad állandó. Azonban

hasonló számítással kimutatható, hogy az $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v}_1 + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v}_2$ mennyiség értéke rugal-

mas ütközés után is megmarad. Azért, hogy a klasszikus mechanika megmaradási törvényei-
vel összhangban maradjanak, mind Lorentz, mind Einstein a tömegről azt gondolják, hogy a

sebesség függvényében változik: $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. (Ez a döntés empirikus igazolást nyert az

elektronok impulzusának és sebességének mérésekor nagyenergiájú ciklotronban. Ezért be-
szélünk empirikus formuláról.) Szorozzuk meg most a tömegnövekedési formulát c^2 -tel, és az

összefüggést sorba fejtve a következőt kapjuk: $mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + \dots$ Ha

$\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, akkor ezt a képletet az $mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2$ (1) közelítő formulával helyettesíthet-

jük. Bevezetve az $E_0 = m_0c^2$ és $E = mc^2$ jelölést, s mivel egy v sebességgel mozgó, m tömegű

test kinetikus energiája $K = \frac{1}{2}mv^2$, ezért (1)-ből az $E - E_0 = \frac{1}{2}m_0v^2$ (2) kapjuk. Vagyis ha az

eredetileg nyugvó test, mozgásba jön, tömege a Lorentz-formula szerint növekedik, s ennek
megfelelően nő az energiája is. A mozgó test megnövekedett energiája E_0 -ból (amit Einstein,
a nevezetes $E_0 = m_0c^2$ képlet szerint, mint a tehetetlen tömeg energiája interpretált) és a kine-
tikai energiából tevődik össze. Tehát energia és tömeg között szoros összefüggés áll fent, a
tömeg- és energiamegmaradás törvénye egybeforr: minden energiamennyiségnek megfelel
egy bizonyos mennyiségű tömeg és minden tömegmennyiségnek meghatározott mennyiségű
energia.

Kuhn szerint az einsteini relativitáselmélet és a newtoni mechanika két
különböző fizikai valóságról beszél, mert az einsteini fogalmaknak más fizikai
valóság felel meg, mint a hasonló nevet viselő newtoni fogalmaknak. Ezért az
 $E_1, E_2, \dots, E_n$ állításhalmazból, amely a relativitáselmélet törvényeit fejezi ki,
nem vezethető le a newtoni mechanika $N_1, N_2, \dots, N_n$ törvényszerűségei. A
newtoni mechanikát éppen ezért nem lehet az einsteini elmélet határesetének
tekinteni, még ha a paraméterek és a változók tartományának szűkítésével (pl.

kimondjuk, hogy $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$) formálisan vissza is nyerjük a newtoni törvényeket.

Határátmenetnél ugyanis nemcsak a törvények formája változik meg, hanem a törvények által leírt világ strukturális alapelemei is (Kuhn (2000), p. 110).

Mivel a fogalmak háttérében különböző tulajdonságok állnak, a két elmélet törvényei által leírt világ strukturális alapelemei valóban megváltoznak, konceptuálisan és perceptuálisan is különböznek. Sőt, Kuhn továbbmegy, azt állítja, hogy nincs olyan közös független empirikus bázis, amelyre mindkét elmélet vonatkoztatható lenne, így a két elmélet nem összemérhető, inkommenzurábilis. Ezért a két elmélet különböző fizikai valóságról beszél. Mivel ezekkel az elméletekkel máshogy rakjuk össze a világot, a világ két különböző *episztemikus reprezentációját* tekintjük, amelyet a különböző fogalmak (elméletek) háttérében meghúzódó tulajdonságok határoznak meg.

A Lorentz-Fitzgerald (L-F) elmélet egy kísérlet a klasszikus newtoni mechanikának a Lorentz-transzformációkkal történő összeegyeztetésre. Kizárólag a Maxwell-egyenletekből kiindulva, az elmélet a Lorentz-elvvel helyettesíti a Lorentz-kovariancia elvet, levezeti a Lorentz-kontrakciót, valamint az idődilatációt, és ezzel megmagyarázza a Michelson-Morley kísérlet eredményét és a relativitáselmélet minden egyéb kísérleti következményét. Ugyanakkor nem lép ki a newtoni paradigma keretei közül (Jánossy és Elek (1963), E. Szabó (2002)).

Az L-F elmélet feltételezi, amint azt a maxwelli elektrodinamika is, hogy az elektrodinamika egyenletei egy adott vonatkoztatási rendszerben érvényesek és minden további megfontolás ezen a rendszeren alapszik. Ebben az értelemben ez a vonatkoztatási rendszer kitüntetett, legyen ez K_0 (az éter). Tekintsünk egy q ponttöltést, amely állandó v sebességgel mozog az x -tengely irányába. Egy ilyen ponttöltés tere a Maxwell-egyenletek szerint:

$$\begin{aligned} E_x &= qx' (x'^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}, & B_x &= 0, \\ E_y &= qy (x'^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, & B_y &= -\frac{v}{c} E_z, \\ E_z &= qz (x'^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, & B_z &= \frac{v}{c} E_y, \end{aligned}$$

ahol $x' = \frac{x - x_q(t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ és $x_q(t)$ a töltés helye a t időpontban.

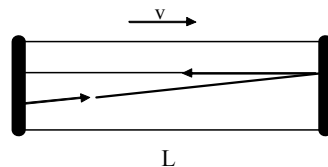
Világos, hogy a $v = 0$ esetén visszkapjuk a nyugvó töltés gömbszimmetrikus Coulomb-terét.

Az elektron pályája egyetlen atomban, az atommag (elhanyagolva gyorsulását) következtében az alábbi mozgásegyenlet szerint alakul:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathbf{a} = -e \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \right].$$

Ezt a mozgásegyenletet numerikusan megoldva, azt találjuk, hogy a mozgó atomban az elektronpálya a mozgás irányában „belapul”, másképp szólva az atom átmérője $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ arányú Lorentz-kontrakciót szenved.

Most tekintsünk egy mozgó dobozt, amelynek két oldalára tükröket szereltek, és közöttük lézersugár fut ide-oda. Számítsuk ki ennek a folyamatnak periódusidejét:



7. á b r a

Ha a doboz áll: $T = \frac{2L}{c}$.

Ha a doboz mozog: $T' = \frac{L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c - v} + \frac{L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c + v} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$

Lorentz ezekből a megfontolásokból arra a következtetésre jutott, hogy a mozgó testek elektrodinamikai leírásakor az objektumok a mozgás irányába

$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ arányú Lorentz-kontrakciót szenvednek, és a testekben lezajló folyamatok időintervallumai, a nyugalmi helyzetben végbement ugyanilyen fo-

lyamatok T időintervallumaihoz képest $\frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ arányú idődilatációt mutat-

nak. Lorentz azt állapította meg, hogy v sebességgel mozgó fizikai rendszer viselkedését megkapjuk, ha ugyanilyen álló rendszer viselkedésére vonatkozó feladatot oldjuk meg, és az eredményekben elvégezzük az

$(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$ helyettesítést, ahol

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ezek az új változók a mozgó objektumhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben lévő koordináták. Ezek alapján kimondhatjuk az ún. Lorentz-elvet: a fizika törvényei olyanok, hogy minden fizikai rendszer a kitüntetett, nyugvó K_0 -hoz (éterhez) viszonyított mozgás során úgy deformálódik, hogy ebből az eredményből nem állapítható meg egyetlen vonatkoztatási rendszernek sem a K_0 -hoz viszonyított sebessége. Vegyük észre, hogy az L-F elmélet Lorentz-elve megfelel a relativitáselmélet Lorentz-kovariancia elvének, tehát a relativitáselmélet által leírt világ tényei, az L-F elmélet által leírt tények is. Érdekes a relativitáselmélet posztulátumainak megfelelő L-F elmélet posztulátumait megadni:

A Lorentz-Fitzgerald elmélet posztulátumai

- (1) Minden K_0 inerciarendszerben az erőhatás nélküli mozgás gyorsulásmentes (NEWTON I) és mechanikai szempontból egyenértékű minden hozzá képest állandó sebességgel mozgó K' vonatkoztatási rendszer is (GALILEI-FÉLE RELATIVITÁSI ELV).
- (2) Van egy kritikus c sebesség, a vákumbeli fénysebesség (c -t a Maxwell-egyenletek határozzák meg): a fényforrás független a fényforrás mozgási állapotától (LOKALITÁSI ELV).
- (3) A fizika törvényei olyanok, hogy minden fizikai rendszer a K_0 -hoz (éterhez) rögzített, newtoni téridő-geometriához viszonyított mozgás hatására, a Maxwell-egyenletek következményeként úgy deformálódik, hogy ebből az eredményből nem állapítható meg egyetlen vonatkoztatási rendszernek sem a K_0 -hoz viszonyított sebessége (LORENTZ-ELV).

Az L-F elmélet alapvető megfontolásai a Maxwell-egyenleteken alapulnak, a Lorentz-transzformációkat az elektrodinamikából vezeti le. Einstein azonban

úgy vélte, hogy egy olyan alapvető tételt, mint az összes természettörvény kovarianciája a Lorentz-féle transzformációs csoporttal szemben, általánosabb megfontolásokból kellene levezetni. A relativitáselmélet posztulátumaiból kiindulva, azt feltételezi, hogy azok az egész világra érvényesek. A tér és idő különféle tulajdonságait kifejezve igyekszik az empirikus tényeket megmagyarázni. Ahogy arra később Minkowski rámutatott, a relativitáselmélet posztulátumai inkább geometriai, mint fizikai jellegűek. Az elmélet szerint a természetben egy olyan geometria valósul meg, amely meghaladja a klasszikus euklideszi geometriának kereteit: a térhez hozzá kell kapcsolni az időt is, és a metrikt úgy kell kiterjeszteni, hogy az időt, mint újabb dimenziót magába foglalja. Az így nyert téridőt pszeudo-euklideszi térnek foghatjuk fel, amelyben a skaláris szorzatot a szokásos tulajdonságokkal értelmezzük, kivéve, hogy egy vektor norma négyzete negatív is lehet. Ezzel szemben az L-F elméletben a fizikai tartalom hangsúlyosabb a geometriainál, az elmélet szerint csak az idő lefolyása alatt az euklideszi térben mozgó testeknek vannak tulajdonságai, amelyek bizonyos sajátosságaira, szimmetriájára következtethetünk.

A relativitáselméletben elvárjuk minden K_0 , K' , stb. vonatkoztatási rendszer ekvivalenciáját az összes fizikai törvények érvényessége szempontjából. Az elmélet a következő alaptételből indul ki: a természeti tényeket olyan egyenletekkel kell kifejezni, amelyek kovariánsak a folytonos koordináta-transzformációk csoportjával szemben. A folytonos koordináta-transzformáció azt jelenti, hogy amikor elemi események leírását a K rendszer helyett K' rendszerben akarjuk elvégezni, az új koordináták folytonos függvényei kell hogy legyenek a régieknek. Ekkor ismét a geometriai szemlélet érvényesül a relativitáselméletre. A gravitációt nem fizikai mező, hanem a téridő geometriája írja le, a téridő nem euklideszi jellegű, és a téridő eltérését az euklideszi jellegtől a térben lévő anyag okozza. Ezt igazolják azok a megfigyelések, hogy a fénysugár a Napot körülvevő térben görbe pályán halad. De vajon abból, hogy a fény görbén terjed, valóban az következik-e, hogy a tér görbült? Az L-F elmélet alapján, ugyanezt a jelenséget – a fizikai tartalom prioritását fenntartva – egyszerűen úgy is magyarázhatjuk, hogy nem a tér görbül meg az anyag ha-

tására, hanem a gravitáció hatására, a Napot körülvevő közeg húzódik össze, amelyben a fény terjed.

A relativitáselmélet a gyorsuló inerciarendszerben a Descartes-féle X^1, X^2, X^3 térbeli és az $X^4 = ct$ időbeli koordinátákat használva a

$$(ds)^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 - (dX^4)^2,$$

illetve általános görbevonallú koordinátákra áttérve, a

$$(ds)^2 = \sum_{i,k=1}^4 g_{ik} dx_i dx_k \quad [R]$$

kifejezés invarianciáját posztulálja a folytonos koordináta-transzformációkkal szemben. Végül is itt a tehetetlenség és a gravitáció ekvivalenciájának posztulátumáról van szó, de csak lokálisan, infinitezimális méretű gravitációs mezőre vonatkozóan. (Matematikailag ez azt jelenti, hogy egy X_n differenciálható sokaság érintőnyalábján megadunk egy pszeudo-euklideszi struktúrát, amely differenciálható módon függ az $x \in X_n$ ponttól. A g tenzormező pedig az X_n sokaság térképein értelmezett lokális koordinátákban felírható a fenti $[R]$ alakban). Einstein azonban ezt véges kiterjedésű tartományokra is kiterjeszti: a sokaság Riemann metrikáját globálisan úgy nyerhetjük, hogy az előbbi lokális metrikákat összeragasztjuk. (Matematikailag a lokális metrikák ilyen összeragasztása az (X_n) sokaság differenciálható egységesítésén alapul). Fizikai szempontból, Einstein úgy érvel, hogy a g_{ik} együtthatók a kiválasztott tetszőleges lokális koordináta-rendszerre vonatkozólag, mind a téridő-koontinuum metrikus viszonyait, mind a gravitációs mezőt leírják. Ez vezet el ahhoz a gondolathoz, hogy a gravitációs mezőnek a görbült kontinuum, a g_{ik} együtthatók által meghatározott Riemann-metrika a lényege.

Einstein célkitűzése egy olyan téregyenlet felállítása volt, amelynek egyik oldalán geometriai, a másikon pedig fizikai mennyiségek szerepelnek. Azért, hogy határesetben a keresett egyenlet olyan megoldásra vezessen, hogy egy statikus csillagtól távol, legyen egyenlő a newtoni gravitációs potenciállal, Einstein az anyageloszlást a geometriával összekötő tér-egyenletet a $G_{ik} = kT_{ik}$ alakban kereste, ahol G_{ik} a metrikus tenzor komponenseiből és azok parciális deriváltjaiból képzett szimmetrikus tenzor (az ún. *Einstein-tenzor*), T_{ik} a feszültség-energia-impulzus tenzor és k egy konstans.

Az Einstein-tenzor meghatározása a következő megfontolásokon alapul (Norwood (1981)): i) a g_{ik} másodiknál nagyobb deriváltjai ne jelenjenek meg; ii) az egyenlet a második deriváltakra vonatkozóan lineáris legyen (ezt teszi lehetővé, hogy határesetben visszanyerjük a newtoni téregyenletet); iii) legyen $\text{div}(G_{ik}) = 0$, mivel a jobb oldalon T_{ik} áll, és $\text{div}(T_{ik}) = 0$ végül is az anyag kontinuitási egyenletének kiterjesztése; iv) $G_{ik} \equiv 0$, ha a téridő sík.

Az i) és ii) feltételek kielégítése csak az $R_{ik} + cg_{ik}$ kifejezéssel lehetséges, ahol R_{ik} a Ricci-tenzor, R a Ricci-skalár, c pedig egy konstans. A iii) feltétel determinálja, hogy $c = -\frac{1}{2}$, így $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} Rg_{ik}$, és ha a iv) követelményt is elhagyjuk, akkor egy Λg_{ik} tagot is hozzá kell adnunk az Einstein-tenzorhoz, ahol Λ az ún. *kozmológiai állandó*. A téregyenlet általános formája tehát $R_{ik} - \frac{1}{2} Rg_{ik} + \Lambda g_{ik} = kT_{ik}$ alakú lesz.

Azonban nem kell ragaszkodnunk e geometriai interpretációhoz. Az L-F elméletben maradva, a $(ds)^2$ -et kapcsolhatjuk a fényterjedés fizikai jelentéséhez is (Jánossy (1973)). Ebben az esetben a $(ds)^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 - (dX^4)^2 = 0$ éppen a fényterjedés egyenlete, a g_{rs} tenzort pedig a fényterjedés matematikai leképezésének fogjuk fel. A relativitáselméletben a gravitáció hatása tulajdonképpen azt jelenti, hogy a Minkowski-teret Riemann-térre alakítja, és a geodetikus vonal magához a görbült térhez tartozik. Az L-F elméletben a folytonos koordináta-transzformációt, a Lorentz-elv alapján, nemcsak koordináta-, hanem alakzat-transzformációként is értelmezzük. Ez az alakzat-transzformáció azonban csak kis méretű fizikai rendszerekre vonatkoztatható, mert a Lorentz-transzformáció csak a gravitációs mező paramétereitől függ, a nagyobb méretű fizikai rendszer tényleges változásai viszont saját fizikai tulajdonságaitól is függnének.

Az L-F elméletben a metrikus tenzor pusztán matematikai fogalom, a fizikai rendszerek mechanikai mozgásával és a fényterjedéssel van kapcsolatban. A geodetikus vonal ugyanezen fizikai mozgásjelenségek leírását szolgáltatja: a gravitációs mezőben szabadon mozgó, viszonylag kisméretű fizikai rendszer bármely pontjának (pl. tömegpontjának) pályáját. Jánossy azt is kimutatja, hogy ha gravitációs mezőben a fizikai rendszer állapotát nem abban a koordinátarendszerben írjuk le, amelyben a fény homogén módon viselkedik, hanem egy másikban, amelyben a fényterjedés tenzora pontról pontra változik, akkor a fizikai rendszer állapotjelző vektormennyiségei közötti különbségek a Christoffel-féle szimbólumok segítségével fejezhetők ki⁴³. Az általános relativitáselméletben a Christoffel-szimbólumoknak differenciálgeometriai jelentősége és jelentése van: a g_{ik} -val jellemzett tér görbületének leírásakor a párhuzamossági struktúra (Levi-Civita konnexió) értelmezéséhez, másrészt a geodetikus vonal Euler-Lagrange egyenleteinek felírásához van szükségünk rájuk.

A két elméletet összehasonlítva láthatjuk, hogy habár a posztulátumaik informális szinten különböző egzisztencia-előfeltevésekből indulnak ki, és a két elmélet radikálisan különbözik abban, amit térről és időről állít, a két felfogás izomorf episztemikus reprezentációt eredményez. Így téves az az ellenvetés is, hogy az L-F elmélet nem képes számot adni egy álló rúdnak és egy álló órának a mozgó megfigyelő rendszerében tapasztalt kontrakciójáról és idődilatációjáról, mert az álló rúd és az álló óra Lorentz-kontrakcióját, valamint idődilatációját nem okozhatták a K_0 -hoz viszonyított mozgásból származó tényleges fizikai változások.

⁴³ Ekkor a gravitációs mezőben történő, általában inhomogén fényterjedésnek lehetséges olyan reprezentációját adni, amelyben a fény terjedése homogén, és így az inhomogén fényterjedést felfoghatjuk úgy, mint a homogén fényterjedésnek görbevonalú koordinátákkal való leírását.

A téves érv maga így hangzik⁴⁴: Tegyük fel, hogy a rúd nyugalomban van egy vasúti töltésen, ekkor megmérve a hosszát, az pontosan 1 méternek adódik. Most mellette elhalad egy vonat v sebességgel, a vonatról mérve pedig a hossza – a Lorentz-kontrakció szerint – $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ -nek adódik. Azonban, ha a párhuzamos vágányon egy másik vonat is elhalad, $V > v$ sebességgel, onnan mérve a rúd hossza kisebbnek, mégpedig $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$ -nek adódik. Ha tehát a rúd ténylegesen deformálódna, akkor két különböző – az eredetihez képest – kisebb hosszal kellene rendelkeznie, ami képtelenség. A mérési különbségek a nyugalmi és a két mozgási vonatkoztatási rendszer mérőszámainak különbözőségeiből fakadnak. Hasonló a helyzet az órák által mért időtartamok esetén is.

Ezt az érvelést Bell a következő ellenérvvel cáfolta, amelyben megmutatta azt is, hogy a deformáció – ahogy azt (3)-ban megállapítottuk – valóban levezethető a Maxwell-egyenletekből (Bell (1987), p. 75-76).

A Lorentz-invariancia alapján a mozgó megfigyelőről meg kell állapítanunk, hogy azok a vesszős változók, amelyek a fentiekben csak formális munkaeszközök voltak⁴⁵, valójában azok a helyes változók, amelyeket egy állandó sebességgel mozgó, ugyanakkor magát nyugvónak képzelő A megfigyelő gondol. Az A megfigyelő természetes módon egy hozzá képest nyugvó pontot fog vonatkoztatási rendszere origójául választani. Ezzel rögzítettük a vt tagot

az $x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ összefüggésben, az A méterrúdjai pedig $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ mértékű Lorentz-

kontrakciót szenvednek.

A kérdés: miért nem érzékeli az A megfigyelő, hogy méterrúdjai összehúzódnak, amikor x irányba fekteti őket és meghosszabbodnak, amikor z irányába elforgatja? Azért, mert A szemének retinája szintén Lorentz-kontrahálódik, és így ugyanazok a sejtek érzékelik a méterrúd képét, mintha a rúd és a megfigyelő is nyugalomban lenne. Hasonlóan, A nem érzékeli, hogy órája lelassult, mert lelassult saját gondolkodásának ritmusa (periódusa) is. S mivel magát nyugalomban lévőnek képzei, nem tud róla, hogy a feléje közeledő fényjelek különböző, $c \pm v$ relatív sebességgel haladnak. Ezért A helytelenül szinkronizálja az egy-

⁴⁴ Id. Novobátsky lábjegyzetbe foglalt érvelését Einstein (1978) könyvének 12. fejezetéhez.

⁴⁵ Hasonlóan, mint amikor az $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ negyedfokú egyenletben az $x^2 \rightarrow a$ helyettesítést elvégezve, az $a^2 - 5a + 4 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk.

mástól távoli órákat, és végül azt fogja hinni, hogy a valódi idő $t' = \frac{t - \frac{v^2}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, hiszen ezzel

a választással a fénysebesség is minden irányban c .

Ráadásul ez közvetlenül ellenőrizhető és levezethető a Maxwell-egyenletekből is. Az elektromos térerősség mérésekor A a saját mérőberendezéséhez képest nyugvó próbatöltést fog használni, miután valójában E és B egy kombinációját fogja mérni. A mozgó töltésekre vonatkozó jól ismert effektusok segítségével, definiálva E -t és B -t, valójában E' -höz és B' -höz jut, ahol

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - \frac{v}{c} B_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad E'_z = \frac{E_z + \frac{v}{c} B_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c} E_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c} E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ezek után az A megfigyelő ellenőrizheti a fizikai törvényeket, valamint az alkalmazott definíciókat és eljárásokat, amelyek jól működnek. Ha valami hibát talál, akkor az a mérőberendezések meghibásodásának tudható be.

Tekintsünk most egy álló megfigyelőt, B -t. Mivel A magát nyugalomban lévőnek hiszi, ezért B -t hiszi mozgónak. Könnyen kifejezhetjük az A és B megfigyelők által használt változókat egymásból, csak a v előjelét kell megváltoztatni:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Az A megfigyelő úgy gondolja, hogy B megfigyelő azért használ rossz változókat, mert méterrúdjai Lorentz-kontrahálódtak és órái idődilatációt szenvedtek el. Az A megfigyelő vilásképe konzisztens, összhangban van a tényekkel, a B megfigyelőnek nincs módja, hogy meggyőzze tévedéséről.

Bell érvelése mutatja, hogy az álló rúdnak a mozgó megfigyelő által észlelt Lorentz-kontrakciója és idődilatációja jól értelmezhető a mozgó megfi-

gyelő mérőműszereiben (méterrúd, óra) bekövetkezett fizikai deformációk következményeként. A mozgó objektumok deformációja pedig a Maxwell-egyenletekből és a K_0 -hoz rögzített newtoni téridő-geometriából levezethető.

Az L-F elmélet és a relativitáselmélet tehát ugyanúgy megmagyarázza az empirikus tényeket, azaz nincs olyan *experimentum crucis*, amely a két különböző elmélet magyarázata közül dönteni tudna. Azonban amíg az L-F elmélet nem lép ki a newtoni paradigma keretei közül, a relativitáselmélet egy új paradigmával dolgozik. Le kell tehát mondanunk arról az igényről, hogy a világot egyetlen fogalmi rendszerrel (elmélettel) írjuk le. Poincaré úgy érvelne ismét, hogy a téridő geometriájának és a fizikai elméletnek együtt kell megfelelni a világ tényeinek episztemikus reprezentációjával:

(téridő geometria) + (fizikai elmélet) = (világ tényeinek episztem. reprezent.).

S ez voltaképpen egzisztencia-előfeltevés és konvenció kérdése az L-F elméletre és a relativitáselméletre nézve:

(Newtoni téridő) + (Lorentz-Fitzgerald elmélet) = (v. t. e. r.)

(Minkowski/Riemanni téridő) + (Relativitáselmélet) = (v. t. e. r.).

Azt hihetnénk, hogy a téridőnek csak a metrikus tulajdonságai – amelyek meghatározzák az egyes események téridőbeli távolságát – konvencionálisak. Azonban a téridő struktúrájának a topológiája is konvencionális jellegű. Misner, Thorne és Wheeler mutatták meg⁴⁶, hogy a vákuum Einstein egyenleteknek létezik megoldása az $S^1 \times S^2 \times \mathbb{R}$ topológiában, vagyis egy olyan téridő sokaságon, amelyben a térszerű hiperfelületek topológiája $S^1 \times S^2$. Ezeket a jelenségeket nevezte Wheeler féreglyukaknak. A megoldás olyan, mintha az $S^1 \times S^2$ -n a féreglyuk két szája körül a téridő geometriája egy-egy külső Schwarzschild-megoldás lenne, vagyis mintha a vákuum topológiában nagy pontszerű tömegek lennének. Ezt a jelenséget nevezte Wheeler úgy, hogy „tömeg, tömeg nélkül”.

Wheeler azt is megmutatta, hogy a csatolt vákuum Einstein-Maxwell-egyenleteknek is létezik megoldása a féreglyukak vákuum topológiájában. Ilyenkor a féreglyuk két szája nemcsak tömegként, de töltésként is viselkedik, miközben a tereknek nincsenek forrásai a valóságban, hiszen vákuum megoldásról van szó: „töltéseket látunk töltés nélkül”. Továbbá az is megmutatható (E. Szabó (1982)), hogy a tömeghez és az elektromos töltéshez hasonlóan létezik „Yang-Mills töltés, Yang-Mills töltés nélkül”. Tehát a többi kölcsönhatást leíró fizikai mezők töltései is generálhatók a tér nem egyszeresen összefüggő topológiájával. A téridő topológiájában is van egy konvencionális elem:

(Egyszeresen összefüggő topológia) + (Fizikai mezők és töltések) = (v.t.e.r.)

⁴⁶ Misner, Thorne, Wheeler (1973), Chapter 44.

(Nem egyszeresen összefüggő topológia) + (Fizikai mezők és töltések) = (v.t.e.r.).

A téridő struktúrájának elmélete és a fizikai elméletek együtt a világ tényeinek izomorf episztemikus reprezentációját eredményezik. Különböző tulajdonságokra és előfeltevésekre építő fogalmi rendszerekkel, szakmai axiómákkal és posztulátumokkal dolgozunk, amelyekben olyan alapvető fogalmak, mint például tömeg, egyidejűség, töltés, más jelentéstartalmat kapnak, s rajtunk áll, hol húzzuk meg a határt geometria és fizika között. Mind a téridő geometriája, mind a fizikai elmélet olyan eszközök, amelyeket felhasználunk a világról szóló tudományos kommunikáció során (*kommunikatív funkció*), és amelyeket az empirikus tények „helyes” interpretációja céljából összhangba kell hozni (*kognitív funkció*). Az érdekesség az, hogy ebben a kontextusban, a matematika – a geometria szakmai axiómáin keresztül – a kommunikatív funkció, a hozzá konstruált fizikai elmélet – a newtoni klasszikus mechanika posztulátumain keresztül – a kognitív funkció szerepét játssza az L-F elmélet fogalmi rendszerében. Éppen fordítva, mint a relativitáselméletben, ahol a téridő által létrehozott kognitív háttérben a fizikai fogalmak csupán a médiumot jelentik a fizika többi részéhez.

Az elméletek fogalmi mindig bizonyos tulajdonságokkal rendelkeznek, amik jellemzik az általuk leírni kívánt dolgokat. Ugyanakkor bizonyos fogalmakról, amelyek addig egy dolog tulajdonságait fogták össze, kiderülhet, hogy valójában egy projekció sajátosságai csupán (ld. az invariánsokat a Galilei- és Lorentz-féle transzformációkban). Elvégezve a megfelelő transzformációkat, az elméletek episztemikus szinten izomorfá tehetők. Ez a kulcsmozzanat, ami a klasszikus newtoni elméletet az L-F-től és a relativitáselmélettől megkülönbözteti.

A tudomány történetében többen osztoznak annak a tézisnek az elfogadásában, hogy a természet nyelve maga a matematika. Valójában már a görögöknél megjelenik ez a hiedelem: a geometria nélküli világ maga a káosz, amiből a világ létrejött (Anaximandrosz). S amint azt a platóni Akadémia híres felirata hirdette: ne akarjon az a világról filozofálni, aki nem ért a geometriához. Persze, ahogy erről Arisztotelész beszámol, alternatíva már ekkor is adódott, a

püthagoreusok, de a matematikát ők is alapvetőnek tartották.⁴⁷ A modern tudományos gondolkodás, a fizika is ebből az álláspontból indult el, amelyet Galilei híres sorai tanúsítanak az olaszul 1623-ban megjelent *// Saggiatore* című munkájában: „A filozófia nagykönyve, az univerzum, szüntelenül nyitva áll tekintetünk előtt, de nem érthetjük meg, hacsak előbb meg nem tanuljuk a nyelvet, amelyben íródott. Ez a matematika nyelve, és írásjelei a háromszögek, körök és más geometriai alakzatok, amelyek nélkül emberileg képtelenség egyetlen szót is felfognunk belőle; e nélkül, akár ha sötét útvesztőben kóborolnánk.”

De vajon a világ valóban izomorf valamilyen gigantikus matematikai struktúrával? Amikor fentebb azt a lakonikus összefüggést írtuk fel, hogy a **(geometria) + (fizikai elmélet) = (világ tényeinek episztemikus reprezentációja)**, akkor ebben az a mechanikai szemlélet tükröződik, hogy a világ nem más, mint pontszerű részecskék együttese, amelyek a téridőben – a téridő geometriai és fizikai törvényeinek eleget téve – mozognak.

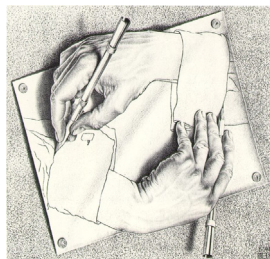
Mármost jelöljük meg a tér pontjait egy adott S halmaz elemeivel, és a tér minden egyes pontszerű P részét írjuk le egy f függvénynel, amely P pályája (trajektóriája). Rendeljük az S halmazhoz egy matematikai struktúrát, ami az S elemei közötti térbeli relációkat adja meg (pl. euklideszi metrika). Ezután a világot az $\langle S, \rho, F \rangle$ struktúrával reprezentálhatjuk, ahol S a világ pontjainak halmaza, ρ a tér metrikája, $F = \{f_P: \mathbb{R} \rightarrow P, \text{ és } P: \text{ a tér egy létező pontszerű része} \}$ pedig a tér pontszerű részeinek pályái. Ekkor mechanikai szempontból az $\langle S, \rho, F \rangle$ matematikai struktúra „izomorf” a fizikai világgal.

A felvetődő kérdések ezek után a következők: 1) Megszámálhatók-e S elemei, vagyis miközben megcímkezzük a tér pontjait S halmaz elemeivel, nem „futunk-e ki” a címkéző nevekkkel? Ez a probléma elkerülhető, ha mondjuk 2) elfogadjuk a Zorn-lemmát, amit mint a halmazelmélet kiválasztási axiómájának ekvivalensét használják, és ez biztosítja, hogy tetszőleges test fölötti

⁴⁷ „A püthagoreusok is egyfajta számot ismernek, és pedig a matematikait, de azt tanítják, hogy ez nem különálló létező, hanem belőle állnak az érzéki valóságok. Ők ugyanis az egész világot számokból építik fel, de nem oszthatatlan egységekből, hanem felteszik, hogy az egységeknek van nagyságuk, kiterjedésük. De arra nézve, hogy miképpen jött létre az első olyan egység, amelynek kiterjedése van, úgy látszik, nem tudnak feleletet adni.” (Arisztotelész: Metafizika, M könyv, 1080 b, 16.)

vektortérnek legyen bázisa (az $\mathbb{R}$ a racionális számok teste fölött alkot vektor-teret, amelynek bázisait *Hamel-bázis*nak nevezik). 3) Létrehozható-e konstruk-tív módon a címkézés? Mindhárom kérdés előfeltételezi azt, hogy a térnek van valamilyen matematikai struktúrája. Tehát nem lehet a címkézést és a térnek megfelelő $\langle S, \rho, F \rangle$ matematikai struktúrát megadni anélkül, hogy ne tételez-zük fel már eleve, hogy a tér struktúrája matematikai. Ráadásul, mivel a Löwenheim-Skolem tétel szerint, olyan struktúráknak, mint $\mathbb{N}$ vagy $\mathbb{R}$, bármely elsőrendű karakterizációja nem szándékolt modellekkel is jár, így a szándékolt modellel együtt, a térnek többszörös modellje lehet. Nem segít, ha elsőrendű karakterizáció helyett magasabb rendre térünk át, mert ekkor akár az is elkép-zelhető, hogy nem lesz a térnek modellje, ugyanis elveszítjük a teljességi tétel biztonságot nyújtó állítását, hogy konzisztens elsőrendű állítások halmazának van modellje.

Visszatérve Galilei soraihoz, úgy tűnik, hogy az univerzum különböző alapelvekből, fogalmakból kiindulva magyarázható, és elvileg több különböző alapú fizikatörténet létezhet. Mind a fizikát, mind a matematikát emberek alkot-ják, ezért letörölhetetlenül magán viselik az emberi intellektus jegyeit. Wittgeinstein szerint, „nyelvem határai, világom határai”, elemzésünk alapján ezt állíthatjuk: a világ határai a fogalmaim határai (nyelvi-matematikai és kog-nitív-fizikai korlátaival); de legalább ebben a világban jogunk van szabadon dönteni (Gödel, Church és Chaitin). A dolgozat fennmaradó részében, a 3)-as kérdés kibontásával, kiderül, hogy ez a szabadság elköteleződéssel is jár, és ennek az elköteleződésnek érdekes következményei vannak a matematika különböző ágaiban. Ezek egy része természetes, intuíciónknak megfelelő állí-tások, de nagy számban vannak olyan következmények is, amelyek kontra-intuitívnek, nehezen hihető állításnak, sőt egyenesen bizarrnak tűnnek.



5. Matematikai platonizmus és konstruktivizmus

Rényi (1965) veti fel a következő kérdést: a matematikus felfedező-e, mint egy hajós, aki felfedez olyan szigetet, amelyről azelőtt senki sem halott, vagy feltaláló, mint egy festő, aki olyan új festéket kever ki, amelyet előtte senki sem használt? Ezt a kérdést úgy is feltehetjük, hogy ha egy matematikus valamilyen új matematikai igazságot talál, akkor ezt ő vajon megtalálja vagy kitalálja? A matematikai platonizmus szerint, az összes felfedezett matematikai fogalom és absztrakció, így a számok, a halmazok, az algebrai struktúrák (csoportok, gyűrűk, testek, stb.), a geometriai alakzatok (pontok, háromszögek, stb.), sőt a végtelen is, valójában tőlünk függetlenül léteznek. A matematikusok tehát nem alkotják, hanem feltalálják a matematikát, amely tőlük függetlenül létezik. A konstruktivisták szerint azonban, a matematikusok nem felfedezik a matematikai objektumokat, hanem megalkotják őket, mégpedig úgy, hogy azok az általuk intuitíve nyilvánvaló, alapvető absztrakciók egy csoportján végzett műveletekkel konstruáltak.

A matematikai konstruktivizmust és az intuicionista matematikai irányzatot már többször említettük ebben a dolgozatban. Az intuicionizmus első teljes kifejtése Brouwer holland matematikus nevéhez fűződik, aki először 1907-ben a matematika megalapozásáról szóló doktori disszertációjában fejtette ki nézeteit. Brouwer szerint, a matematika az elme belső szabad alkotása és független mindenféle nyelvtől vagy platonikus valóságtól. Szerinte a matematika nem függ a logikától, a logika a matematika része, és a matematikát nem lehet axiomatikus módon megalapozni. Úgy vélte, hogy a matematikai gondolkodás matematikai struktúrák megalkotásából áll, és a szillogizmusokhoz hasonló logikai struktúrák megjelenését csak a szabály alkalmazása közben végzett matematikai konstrukció igazolja. A logikát alkalmazott matematikának tekintette és empirikus tudománynak abban az értelemben, hogy nincsenek tapasztalattól, tudásunktól független igazságok. Ez vezette a klasszikus matematika egy jelentős részének, valamint a formalizmusnak és a Cantor-féle halmazelméletnek elutasításához. A nevéhez fűződik a *kiválasztási sorozatok* fogalmának kidolgozása is, amely révén, a klasszikus matematikával szemben bizonyítható, hogy a valós függvények mindig folytonosak (ld. 3.3. szakasz). Rendszeres, formális intuicionista elméleteket tanítványa,

Heyting dolgozott ki (pl. intuicionista propozicionális és predikátum kalkulust, valamint intuicionista aritmetikát). Később Glivenko, Gentzen és Gödel bizonyították be az intuicionista és a klasszikus elméletek ekvivalenciáját (George és Velleman (2002)).

A konstruktivista matematika megalkotása Markov orosz matematikus-hoz köthető, aki azt a *normál algoritmusok* elméletén keresztül formalizálta. Elmélete tekinthető úgy, mint intuicionista alapokon álló rekurzív matematika, amelyben a matematika objektumait mint különböző ábécék fölötti szavak fogta fel; s úgy vélte, hogy a matematikában csak a realizálható absztrakció megengedett, így elvi kifogás vethető fel a végtelen halmazok (aktuális végtelen) vagy a logikai szabályok túlságosan szabad használata ellen (Trosztnyikov (1981)). Például, egy A állítást akkor tudunk csak tagadni, ha A -nak már van konstrukciója, ezért A -t csak korlátozottan lehet tagadni: tehát, például, a $\neg\neg A \supset \neg A$ implikáció helyes, míg a $\neg\neg A \supset A$ nem az.

Markov konstruktív szemlélete szigorúbb az intuicionista szemléleténél, ugyanis csak olyan kiválasztási sorozatokat enged meg, amelyek egy véges algoritmus (pl. egy Turing gép) által előre meghatározottak. Más tekintetben azonban engedékenyebb, amire példaként a *Markov-elvet* hozhatjuk: ha lehetetlen, hogy egy bizonyos Turing-gép örökké fut, akkor létezik egy olyan algoritmus, amely a kimenetet előállítja, és fel kell tennünk, hogy a gép egyszer megáll. Az intuicionisták ezt az elvet, mint intuitíve nem tisztát, elutasították (Troelstra és Van Dalen (1988)).

A konstruktívizmus pusztán a matematikáról vallott eltérő felfogása révén hozzájárult a logika, a matematika és informatika⁴⁸ fejlődéséhez. A kiválasztási axióma kapcsán azt a szembenállásukat fogalmazzuk meg, hogy egy konstruktivista azért kerüli a kiválasztási axióma használatát, mert az nem árulja el, hogyan kell azt a halmazt *létrehozni*. De miért olyan fontos, hogy ez a halmaz megkonstruálható-e vagy sem? A helyzet a következő példával érzé-

⁴⁸ Az informatikában a klasszikus megközelítést a procedurális, illetve objektum-orientált programozás képviseli, míg a konstruktív (intuicionista) utat a deklaratív programozás jelenti, ahol csak a feladat specifikációját (feltételeit) írjuk le, és a rendszer fogja a megoldáshoz vezető utat megkeresni (pl. a PROLOG): nem utasításokat, hanem tényeket és szabályokat közlünk a számítógéppel, amelyek ismeretében egy állítás igaz vagy hamis voltát dönti el a rendszer.

keltethető. Tegyük fel, hogy egy rabot bezárnak egy nagy sötét cellába. Nem tudja, hogy van-e ablak a cellán – végigtapogatva a falat úgy tűnik neki, hogy nincs (befalazták). Egyszer csak igen magasan, fény szűrődik be a cellába. A rab ezt észreveszi, de semmi módja sincs arra, hogy az ablak közelébe kerüljön, mert az olyan magasan van, hogy nem képes felérni. Vajon nincs különbség a két történés között? Annak tudata, hogy létezik ablak, még ha az nem is jelenthet közvetlen szabadulást és egyáltalán nem tudni van-e ablak a cellán? A konstruktivista szerint nincs, éppen azért, mert az ablak felérése nélkül nincs szabadulás. Azonban a nem konstruktivista matematikust, akárcsak egy filozófust, jobban érdekli a megvalósítható alternatívák számbavétele, mintsem a megvalósítható cselekvés kérdése. A példánknál maradva, a konstruktivista nem számol azzal a lehetőséggel, hogy az ablak létezése, legalább ad valamilyen esélyt a szabadulás lehetőségének végiggondolására (pl. az ablakon keresztül jövő külső segítség).

Nézzünk egy analóg matematikai példát, ami egy egzisztencia-állítás gyakorlati jelentőségét demonstrálja. A matematikai analízis egyik klasszikus tétele a Weierstrass-tétel: korlátos, zárt halmazon folytonos függvény mindig felveszi szélsőértékeit. Ez a klasszikus analízis egy tipikus egzisztencia-tétele, vagyis egy olyan állítás, amely valaminek a létezését (itt a függvény szélsőértékeit) mondja ki anélkül, hogy annak meghatározására konkrét effektív eljárást dolgozna ki (pl. a Weierstrass-tételben megadná azt a helyet, ahol a függvény felveszi a szélsőértékeit). Egy konstruktivista az egzisztencia-tételekkel nem tud mit kezdeni, ezért az ilyen tételeket nem fogadja el.

A logisztika jellemző tevékenységei közé tartozik a szállítás gazdaságos megtervezésének problémája. A matematika operációkutatás ága foglalkozik ennek modellezésével. Legyen adott m telephely, amelyeken tetszőleges termékből $a_1, a_2, \dots, a_m$ mennyiséget tárolnak. Adott továbbá n felvevőhely, amelyek $b_1, b_2, \dots, b_n$ mennyiséget igényelnek ebből a termékből. Tegyük fel, hogy egységnyi áru i -edik telephelyről j -edik felvevőhelyre való szállításának fajlagos költsége c_{ij} , és x_{ij} az i -edik telephelyről a j -edik felvevőhelyre szállítandó áru mennyiségét jelöli. Feltesszük továbbá, hogy $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, azaz a tárolt

áru összes mennyisége megegyezik az igényelt áru összes mennyiségével (ún. zárt feladat). Mármint tervezzük meg úgy a szállítást, hogy minden telephelyről minden árut elszállítsanak, az egyes felvevőhelyek igényeit kielégítsék és a fellépő szállítási költségek összege minimális legyen.

A szállítási probléma matematikai alakja a következő. Legyen

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \text{ egy } m \times n \text{-es mátrix és}$$

legyenek $a_1 \geq 0, \dots, a_m \geq 0, b_1 \geq 0, \dots, b_n \geq 0$ olyan számok, amelyekre $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$ teljesül.

Meghatározandók az olyan x_{ij} mennyiségek, amelyek teljesítik a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \text{ ahol } i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \text{ ahol } j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ ahol } i = 1, \dots, m \text{ és } j = 1, \dots, n$$

feltételeket, és amelyekre z a minimumát veszi fel, ahol $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$.

Minél nagyobb n és m , annál nehezebb a szállítási probléma megoldása. Nyilvánvalóan érdemes a problémát számítógépre vinni, tehát algoritmust készíteni rá. Csakhogy felvetődik egy kérdés: van-e egyáltalán optimális megoldása, véges optimuma a problémának? Ez különösen megszívlelendő kérdés a 3.4. fejezetben végzett elemzésünk után, hiszen lehet, hogy a probléma effektíve nem kiszámítható, azaz van olyan helyzet, hogy véges lépésben nem jutunk megoldáshoz. Nos, a kérdésre adott válasz az, hogy a szállítási probléma mindig megoldható, és ez abból következik, hogy a szállítási probléma feltételeinek eleget tevő $x \geq 0$ vektorok korlátos, zárt halmazt határoznak meg, amely sohasem üres; e felett pedig – a Weierstrass-tétel értelmében – egy folytonos függvény mindig felveszi szélsőértékeit. De mit kezd a problémával az a konstruktivista, programozó matematikus, aki a Weierstrass-tételt mint egzisztencia tételt, nem hajlandó elfogadni? Konkrét algoritmust kell készítenie

a szállítási probléma megoldására, és erről kell belátnia konstruktív eszközöket használva, hogy az mindig effektív.

Azonban a konstruktivisták módszertani kritikájával nem törődő, platonista matematikusoknak is szembe kell nézni problémákkal. A kiválasztási axióma kapcsán már láttuk egy példát, a Banach-Tarski paradoxont. De úgy tűnik, hogy a 3.4. fejezetben említett Church-tézis is mint a kiszámíthatóság alaphipotézise, szűk cipő számukra (Kalmár (1957)).

Definíció (Kleene) *Általános rekurzív függvénynek* nevezzük az olyan aritmetikai függvényt, amelyet a kérdéses függvényt és további segédfüggvényeket tartalmazó egyenletrendszerrel lehet definiálni, amelyből a függvény értékét bármely adott helyen, a következő két lépés valamelyikének véges számú alkalmazásával ki lehet számolni:

- valamely egyenletben a változók helyébe adott nemnegatív egész számok helyettesítése;
- valamely már megkapott egyenletben egy másik már megkapott egyenlet egyik oldalának másik oldalával történő helyettesítése.

Példa Tekintsük az $y = x!$ faktoriális függvény rekurzív definícióját, amellyel bármely nemnegatív egész n -re, az $n!$ értékét véges lépésben ki tudjuk számolni.

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (x+1)! = x! (x+1) \end{cases}$$

Az $n = 0$ esetén az első egyenlet közvetlenül megadja a $0!$ értékét. Mármost ha n -re teljesül, hogy véges számú lépésben ki tudjuk számolni az $n!$ értékét, akkor $n+1$ -re is, hiszen $(n+1)!$ kiszámításához csak azt kell tenni, hogy a második egyenletben x helyébe n -t helyettesítjük, majd a jobboldalon $n!$ -t – a feltevés szerint véges számú lépésben – kiszámítható értékével pótoljuk, végül elvégezzük az $n!(n+1)$ szorzatot. A fenti definíció második lépését jelenti a példánkban az, amikor $n!(n+1)$ szorzást elvégezzük, ekkor ugyanis az $n!(n+1) = m$ (ahol m : az $n!(n+1)$ szorzat numerikus értéke) egyenletnek baloldalát helyettesítettük jobboldalával.

Megjegyzés Vegyük észre, hogy az általános rekurzív függvények – definíció szerint – effektíve kiszámítható függvények, azaz olyan aritmetikai függvények, amelyek numerikus értéke véges számú lépésben meghatározható.

Most Church tézisét, az általános rekurzív függvény fogalmának segítségével, a következőképpen mondhatjuk ki szabatos formában:

Church tézise Minden effektíve kiszámítható függvény általános rekurzív függvény.

Church tézise tulajdonképpen egy definíció: az effektíve kiszámítható függvényeket mint általános rekurzív függvény⁴⁹ értelmezi. Mindenkinek joga van ahhoz, hogy szabatosan meghatározza mit ért egy olyan tulajdonságon, mint „kiszámíthatónak lenni”. Ezt tette Church és ezt tette Turing is, amikor a kiszámítható függvény fogalmát olyan aritmetikai függvénnyel azonosította, amelyhez egy Turing-gép konstruálható, és ezzel a géppel a kérdéses függvény értékét bármely adott helyen, véges lépésben ki lehet számítani. Megmutatható, hogy a Turing-gépen kiszámítható függvény ekvivalens a Church-féle kiszámítható függvénnyel, azaz szintén általános rekurzív függvény.

Azonban láttuk, hogy egy definíció mindig korlátozást, információvesztést jelent. Az olyan fogalmak definiálása pedig, amelyeket definíció nélkül, informálisan is használ az ember, komoly veszélyt rejt magában. Megeshet ugyanis, hogy valamely függvényről be lehet bizonyítani, hogy nem kiszámítható a Church-Turing-féle értelemben, mégis kiderül, hogy megadható olyan eljárás, amelyet használva bármely adott helyen, véges számú lépésben kiszámítható a függvény értéke.

Kleene (1936) mutatta meg, hogy van olyan g egyváltozós, aritmetikai függvény, amelyet ha f kétváltozós, általános rekurzív függvénnyel definiálunk a következő módon

$$g(x) = \begin{cases} \text{a legkisebb } y \text{ nemnegatív egész szám, amelyre } f(x, y) = 0, & \text{ha van ilyen } y; \\ 0, & \text{ha nincs olyan } y \text{ nemnegatív egész szám, amelyre } f(x, y) = 0. \end{cases}$$

⁴⁹ Church eredetileg kiszámíthatónak a λ -definiálható függvényeket nevezte, vagyis az általa alkotott ún. λ -kalkulusban jólképzett formulával előállítható függvényeket. A λ -definiálható függvény azonban egyenértékű a Kleene-féle általános rekurzív függvénnyel.

akkor g nem általános rekurzív függvény. Mivel g nem általános rekurzív függvény, a Church-tézis értelmében nincs olyan effektív eljárás, amely bármely adott n helyen kiszámíthatná a $g(n)$ függvényértéket. Ugyanakkor tegyük fel, hogy

- n olyan nemnegatív egész szám, amelyhez van olyan y nemnegatív egész szám, hogy $f(x,y) = 0$. Ekkor, mivel f általános rekurzív függvény, sorra kiszámíthatjuk az $f(n,0), f(n,1), \dots$ függvényértékeket, amíg nem találjuk meg az első olyan i -t, amelyre $f(n,i) = 0$. Ekkor $g(n) = i$. Tehát a $g(n)$ függvényértéket véges lépésben kiszámíthatjuk. Azonban még nem bizonyítottuk be, hogy valóban létezik ilyen i . De erre – azért hogy kimutassuk, a $g(n)$ függvényérték véges lépésben kiszámítható – nincs is szükség, ha nem ragaszkodunk konstruktív eszközökhöz (pl. kihasználjuk, hogy nem teljesül a konstruktivista tagadáson alapuló *tertium non datur*). Tegyük fel, ugyanis, hogy valaki be akarja bizonyítani, hogy van olyan n nemnegatív egész szám, amelyre ez az eljárás nem vezet véges számú lépésben a $g(n)$ függvényérték kiszámításához. Ehhez azonban be kellene bizonyítania azt is, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, amelyre $f(n,y) = 0$. Ezzel azonban megadná annak egy bizonyítását, hogy a fenti eljárás mégis csak a $g(n)$ függvényérték kiszámításához vezet véges lépésben, mégpedig úgy, hogy $g(n) = 0$.
- n olyan nemnegatív egész szám, amelyről be lehet bizonyítani, hogy nincs olyan y nemnegatív egész szám, hogy $f(x,y) = 0$. Ekkor az előbb említett érvelés alapján, ennek a bizonyításnak szükségszerűen véges lépésből kell állnia, amely a $g(n) = 0$ eredményhez vezet.

Ha tehát nem ragaszkodunk konstruktív eszközökhöz, akkor találhatunk olyan g nem általános rekurzív függvényt, amely véges lépésben kiszámítható. A nem konstruktivista matematikus számára tehát az effektív kiszámíthatóság Church-Turing meghatározása úgy tűnik, nem kielégítő, annál általánosabb fogalmat kellene találnia. Mégis a Church-tézist mint az algoritmuselmélet alaphipotézisét használják a matematikában, mivel eddig praktikusán az effektív kiszámítható függvények általános rekurzívnek bizonyultak. Konstruktivista szemüvegen keresztül a Church-tézis teljesen plauzibilis marad.

Érdemes Quine véleményét⁵⁰ idézni arról, hogy a matematikai filozófiai iskolák szembenállása, mint rivalizáló ontológiai felfogások jelennek meg, amelyek között nem lehet győztest hirdetni. Nézzük így is, úgy is a világra. Most röviden összehasonlíttuk a tradicionális (platonista) és a konstruktivista (intuicionista) iskolákat a következő táblázatban, a felfogásuk különböző szempontjait szembeállítva:

Szempontok	Tradicionális (platonista)	Konstruktivista
MATEMATIKAI OBJEKTUMOK	Ideálisak (pl. nagyon nagy természetes számok, nagy számosságú halmazok, globális végtelen).	Reálisak (pl. mátrixok, egyenesek és síkok, kis természetes számok, potenciális végtelen).
A MATEMATIKA TÁRGYA	Az objektumok léte abszolút módon, eleve adott.	Olyan szavak, amelyekkel az objektumokat kódolni (leírni) tudjuk, azaz az objektumok emberi alkotás eredményei. Ezzel elvetjük a globális végtelen absztrakcióját (halmazt) és csak a potenciális végtelenséggel dolgozunk, ti. amíg egy tetszőleges hosszú szóval leírunk (kódolunk) egy objektumot.
MÓDSZER • Matematikai	Célja az abszolút módon létező matematikai objektumok feltárása: • konzisztens rendszerek felépítése, • állítások bizonyítása: pl. bebizonyítani a klasszikus analízis egyik tételét, a Weierstrass-tételt: Korlátos, zárt halmazon folytonos függvény felveszi a szélső értékeit a halmazon.	Csak konstruktíve előállított objektumokat ismer el. Nem fogadja el tehát • a nem konstruktív jellegű axiómákat (pl. kiválasztási axióma), • az egzisztenciátételeket: pl. a Weierstrass-tételt a konstruktivista nem fogadja el, mert az abban szereplő függvény tipikusan nem konstruktív: nem mondja meg, hol veszi fel pontosan a szélső értékeit a halmazon. • Az indirekt bizonyításokat.

⁵⁰ Id. On what there is, In: Quine (1980), p. 1-19.

Szemponatok	Tradicionális (platonista)	Konstruktivista
Logikai (intuicionizmus)	Adva vannak a különböző állítások és ezeket különböző igazság-funktorokkal összekapcsolva újabb állításokhoz jutunk.	Egy A állítás akkor igaz, ha tudunk adni egy olyan konstrukciót, amely A-t előállítja. Pl. $A \vee B = \langle 0, k \rangle \vee \langle 1, l \rangle$, ahol - a k az A, az l pedig B konstrukciója, 0,1 indexek mutatják meg, hogy a konstrukció a diszjunkció hányadik állítására vonatkozik. $A \supset B =$ olyan P algoritmus, amely az A-hoz tartozó bármely k konstrukciót a B-hez tartozó P(k) konstrukcióba viszi. $\forall x A(x) =$ olyan P algoritmus konstrukcióját jelenti, amelynek az outputja bármely x esetén: $P(x) \equiv A(x)$.
➤ Tertium non datur (TND) és a reductio ad absurdum (RA) elve	Elfogadja.	Episztemikus szinten elveti.
	Tegyük fel, hogy A egy tetszőleges állítás, Φ pedig egy olyan matematikai tétel, amelyről nem tudjuk bizonyítani, hogy igaz vagy hamis. Ekkor	
	- Az A állítás negálható. Tehát létezik A negációja, és így a $\sim\sim A \supset A$ vagy $\sim\sim\sim A \supset \sim A$ kondicionálisak helyesek. - TND: $\Phi \vee \sim\Phi$ alternáció mindig igaz. - RA: $(\sim\Phi \supset (\sim A \& A)) \supset \Phi$	$\neg A \equiv A \supset \downarrow$ ($\downarrow$: „Falsum”). Tehát A-t akkor tudjuk csak cáfolni (tagadni), ha A-nak már van konstrukciója, ezért A-t csak korlátozottan lehet cáfolni: pl. a $\neg\neg\neg A \supset \neg A$ helyes, míg a $\neg\neg A \supset A$ nem az. - TND: $\Phi \vee \neg\Phi$ kifejezésről nem tudjuk, hogy igaz-e vagy sem, mivel Φ-t nem tudjuk megkonstruálni, tehát a diszjunktív kifejezés értéke sem nem igaz, sem nem hamis, hanem „nem eldöntött” érték. - RA: nem elfogadható, mert Φ konstrukciója nem biztosított.

Szemponatok	Tradicionális (platonista)	Konstruktivista
SZEMANTIKA	Objektíve adott, statikus, kétértékű.	Szubjektív, (2+1)-értékű (igaz és hamis) + („nem eldöntött”), időben változó: a „nem eldöntött” érték időben – remélhetőleg – egyre csökken, míg párhuzamosan az „igaz” vagy „hamis” érték növekszik.
MATEMATIKAI IGAZSÁG	Univerzális.	Konstrukción alapuló.
	A Church-tézis nem plauzibilis hipotézis: az effektív kiszámítható függvény fogalmát nem fedi le az általános rekurzív függvény fogalma.	A Church-tézis plauzibilis, az effektív kiszámíthatóság Church-Turing fogalma elfogadható hipotézis.
Korlátok: Church és Gödel tétele		

A 3. fejezet alapján ez utóbbi, a matematikai igazsággal kapcsolatos szempont – mind az érvelés tárgyalási szintjén, mind egy érvelés-hierarchiában – eldönthetetlennek látszik, fentebb pedig ennek okait boncolgattuk. Vigyáznunk kell azonban, hogy nem érvényesíthetjük a két szemléletet egyszerre. Erre vonatkozóan tanulságos az alábbi lehetetlenségi tétel.

Feltételek:

(f1) Legyen **K** a matematikai tudás egy konzisztens rendszere, azaz bármely **A** matematikai állításra teljesül, hogy nincs olyan **A** állítás, hogy **A** és $\sim A$ egyszerre következzen **K**-ból. Plauzibilisnek tűnik azt feltételezni, hogy bármely **A** matematikai állítást, amely **K**-nak az eleme, egy matematikus igaznak tarthat. Jelölje ezt a tényt $K(A)$: „a matematikus úgy véli, hogy **A** igaz matematikai tétel”. Ez azt jelenti, hogy $A \in K \Rightarrow K(A) \in K$ ⁵¹.

⁵¹ Mertens és Zamir (1985) kimutatták, hogy megszerkeszthető olyan „univerzális típusú tér”, mint amelyen **K**, amelynek **A** és $K(A)$ is eleme lehet.

Sokféle interpretáció létezik intuicionista rendszerekhez (például Kleene, Beth és Aczél is adtak interpretációkat), mi itt Kripke szemantikai modelljét fogjuk használni, amelyre nézve megmutatható, hogy az intuicionista predikátum-logika helyes és teljes (Moschovakis (2007)). Informálisan a Kripke-féle modellre úgy gondolhatunk, mint amelyik egy „idealizált matematikus” lehetséges tudatállapotait írja le. Ez a matematikus tételeket bizonyít, valamint matematikai objektumokat konstruál. Idealizált abban az értelemben, hogy a *falsum* ($\perp$) sohasem bizonyítja be, és amit egyszer bebizonyított vagy megkonstruált, azt sohasem felejt el. Ennek a szubjektumnak a lehetséges tudatállapotait R_α struktúrával reprezentálhatjuk, amely egy D_α halmazon értelmezett relációk összessége, ahol D_α egy α időpontnak megfelelő tárgyalási univerzum. Az $\alpha \leq \beta$ jelöli azt, hogy β nem előbbi időpont, mint α (az $\leq$ egy rendezés). A lehetséges időpontok összességét jelölje T .

Ekkor $M = \langle T, \leq, D, S, K \rangle$ ötös egy Kripke-modell, ahol T a lehetséges időpontok halmaza, $\leq$ reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív reláció T -n, D és S pedig T -n értelmezett függvények: $S(\alpha)$ minden α esetén egy D_α alaphalmazú struktúra; és ha $\alpha \leq \beta$, akkor $S(\alpha) \leq S(\beta)$, minden $\alpha, \beta \in T$ -re.

A Kripke-modellben az a tény, hogy az idealizált matematikus tudja, hogy A állítás igaz, azt jelenti, hogy α időpontban és bármely $\beta \geq \alpha$ esetén, az A igaz. Mármint, ha A atomi mondat, akkor

$$(0) K(A) \Leftrightarrow S(\alpha) \models A.$$

A logikai konstansokra vonatkozó szabályok:

- (1) $K(A \& B) \Leftrightarrow K(A) \& K(B)$;
- (2) $K(A \vee B) \Leftrightarrow K(A) \vee K(B)$;
- (3) $K(\sim A) \Leftrightarrow$ bármely $\beta \geq \alpha$ esetén $\sim K(A)$;
- (4) $K(A \supset B) \Leftrightarrow$ bármely $\beta \geq \alpha$ esetén, ha $K(A)$, akkor $K(B)$;
- (5) $K(\forall x A(X)) \Leftrightarrow$ bármely $\beta \geq \alpha$ és bármely $t \in D_\beta$ esetén $K(A(t))$;
- (6) $K(\exists x A(X)) \Leftrightarrow$ van olyan $t \in D_\alpha$, hogy $K(A(t))$.

(f2) K deduktíven zárt a következmény-relációra nézve: bármely $A_1, A_2, \dots, A_n \in K$ állításrendszerre (axiómái, tételei), ha $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \Rightarrow A$, akkor $A \in K$. Vagyis ha az A állítás következménye (levezethető) egy K alapján igaznak vélt és abban lévő állításrendszernek, akkor ez a matematikus matematikai tudásának részévé válik. Az (1) feltételben elmondottak következtében az $\{A \in L : K(A) \in K\}$ halmaz is deduktíven zárt, ahol L a klasszikus elsőrendű logika nyelvénél gazdagabb formális nyelv.

(f3)

- A $\mathbf{K}$ matematikai tudásnak része az aritmetika (elsőrendű Peano axiómák).
- A *tradicionális szemlélet szerint érvényes a tertium non datur elve*, azaz bármely A állításra $A \vee \neg A$ igaz, ezért „ $A \vee \neg A$ ” $\in \mathbf{K}$.
- A Kripke-modell logikai konstansokra vonatkozó szabályaiból posztuláljuk (1)-(3)-at a tradicionális és a konstruktív szemléletű matematikai tudásra.

(f4) Minden egyes A -hoz ($A \in L$), van olyan $F(A)$ aritmetikai formula úgy, hogy $A \in \mathbf{K} \Leftrightarrow F(g[A])$, ahol

- Legyen $\text{Form}(L)$: az L nyelv összes formulája, amelynek minden egyes eleme véges szimbólumsorozat. Ekkor $F \in \text{Form}(L)$ egy egyváltozós aritmetikai formula,
- $g[A]$ a $g: \text{Form}(L) \rightarrow \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$: a természetes számok halmaza) egy-egy értelmű függvény egy A -ban vett értéke. Ezt az A állítás kódolásának nevezzük. A 2.1. fejezettel összhangban, legyen ez a Gödel-féle számozási eljárás, vagyis A Gödel-kódja megegyezik a $g[A]$ Gödel-számmal.

A Gödel-kódolást rögzítve, L -t, $\text{Form}(L)$ -t és $\mathbf{K}$ -t tekinthetjük úgy, mint $\mathbb{N}$ egy részhalmazát. Vagyis $\mathbf{K}$ -ban minden matematikai állítás Gödel-kódolt.

(f5) **Pozitív introspektív feltétel** Bármely $A \in L$ -re, ha $A \in \mathbf{K}$, akkor $K(A) \Rightarrow K(K(A)) \in \mathbf{K}$.

E feltétel implicite rögzíti a matematikai szemlélet interperszonalitási kritériumát. Tegyük fel ugyanis, hogy két „azonos szemléletű matematikus” (pl. két konstruktivista) – legyenek ezek i és j – találkoznak. Mivel azonos szemléletűek, mindkettő ugyanazt véli igaz matematikai állításnak, azaz bármely $A \in L$ -re, ha $A \in \mathbf{K}$, akkor $K_i(A) \Leftrightarrow K_j(A)$. Ekkor (f5) két formában is felírható: bármely $A \in L$ -re, ha $A \in \mathbf{K}$, akkor $K_i(A) \Rightarrow K_j(K_i(A)) \in \mathbf{K}$, és hasonlóan $K_j(A) \Rightarrow K_i(K_j(A)) \in \mathbf{K}$. A pozitív introspektivitás tehát a „matematikai szemlélet” interperszonalitását fejezi ki, hiszen „különböző szemléletű” ma-

tematikusok (pl. egy tradicionális és egy konstruktivista) nyilván nem felelnek meg ennek a feltételnek, hiszen nincs egyetértés közöttük **K** felett.

Gödel-féle fixpont lemma Legyen $F(x)$ tetszőleges aritmetikai formula. Ekkor van olyan A aritmetikai állítás, hogy az aritmetika axiómáiból levezethető: $A \Leftrightarrow \sim F(g[A])$.

Bizonyítás Minden x számra, legyen $\langle x \rangle$ az a predikátum, amelynek Gödel-kódja: x . Ekkor az $\langle x \rangle(x)$ egy állítás és Gödel-kódja: $g[\langle x \rangle(x)]$. Legyen $P(x)$ a $\sim F(g[\langle x \rangle(x)])$ predikátum és Gödel-kódja legyen p . Végül legyen A a $P(p)$ állítás. A következőket kapjuk: $A \Leftrightarrow P(p) \Leftrightarrow \sim F(g[\langle p \rangle(p)]) \Leftrightarrow \sim F(g[P(p)]) \Leftrightarrow \sim F(g[A])$.

Tétel Az (f1), (f2), (f3), (f4) és (f5) feltételek inkonzisztensek, azaz nincs olyan – az aritmetikát magába foglaló – **K** matematikai tudásrendszer, amely az összes feltételt kielégítené.

Bizonyítás Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy van ilyen **K**. Az (f3) feltétel és a Gödel-féle fixpont lemma alapján, ekkor van olyan A állítás, hogy $A \Leftrightarrow \sim F(g[A])$. Az (f2) és (f3) feltételek szerint egy matematikus képes levezetni ezt a maga számára, tehát $A \Leftrightarrow \sim F(g[A]) \in \mathbf{K}$. Így (f2) és (f4) alapján $A \Leftrightarrow \sim K(A) \in \mathbf{K}$.

Kihasználva a tertium non datur elvét, (f3) alapján $A \vee \sim A \in \mathbf{K}$. Az A -t $K(A)$ -nak választva, (f1) és (f3) alapján $K(A) \vee \sim K(A) \in \mathbf{K}$ kapjuk. Mivel $A \Leftrightarrow \sim K(A) \in \mathbf{K}$, ezért kihasználva (f1)-et, (f3)-at és (f5)-öt: $K(A) \Leftrightarrow K(\sim K(A)) \Leftrightarrow \sim K(K(A)) \Leftrightarrow \sim K(A) \in \mathbf{K}$. Tehát $K(A) \Leftrightarrow \sim K(A) \in \mathbf{K}$ kaptuk. Kombinálva $K(A) \vee \sim K(A) \in \mathbf{K}$ -val és az (f2) feltétel ismételt használatával, $\sim K(A) \in \mathbf{K}$ jutunk. Ugyanakkor $A \Leftrightarrow \sim K(A) \in \mathbf{K}$, $(f2) \Rightarrow A \in \mathbf{K}$, $(f1) \Rightarrow K(A) \in \mathbf{K}$. Megmutattuk tehát, hogy $K(A) \in \mathbf{K}$ és $\sim K(A) \in \mathbf{K}$, azaz **K** inkonzisztens, szemben az indirekt feltétellel.

A Gödel-féle fixpont lemmát alkalmaztuk az (f4)-ben lévő F -re. Intuitíve az A állítás önreferens: azt mondja „nem hiszek ebben az állításban”. Az (f1)-(f3) feltételek alapján a matematikus logikailag képes felismerni, hogy ne higgyen ilyen állításban, de ekkor a pozitív instropektivitás arra

kényszeríti, hogy mégis higgyen benne. Ez vezet ellentmondásra. Továbbá, az (f3) és (f4) feltételekben ismét két intuitív szempont ütközik egymással:

- I, Az (f4) feltétel alapján a matematikus tudásának **K** rendszerét olyan szavaknak fogja fel, amelyek a matematikai állítások kódolt rendszere (konstruktivista módszertani elv). Ez esetben a matematikával tulajdonképpen a természetes számok részhalmazairól beszélünk, vagyis az interpretációs tartomány: $\mathbb{N}$.
- II, Az (f3) feltételben, a tradicionális szemléletnek megfelelően, a matematikus elfogadja a tertium non datur elvét.

A konstruktivisták tehát következetesek, amikor a matematika apparátusából kisselektálják a „nem megfelelő” módszereket, pl. a tertium non datur elvet. A fenti lehetetlenségi tétel alapján nem lehet a módszerek között átjárni, mert az szükségképpen inkonzisztenciát eredményez matematikai tudásunkban. Ennek egy pregnáns példáját adtuk a Church-tézis kapcsán, amely csak a konstruktivista matematikus számára lehet plauzibilis.

Továbbmenve, mivel egy elsőrendű logikai rendszer nyelvbázisában az (f4) feltétel mindig kielégíthető, ami következik a 2.1. fejezetben lévő 3.a. definícióból, ezért a tradicionális matematikusnak nemcsak a Church-tézist, de az elsőrendű logikát is szűknek kellene nyilvánítani. A kétféle matematikai filozófia közötti szemlélet különbségét az alábbi tétel karakterizálja élesen:

Lindström tételei Az elsőrendű logika kifejezőerőben a legerősebb olyan logikai rendszer, amely teljesíti a kompaktsági és a Löwenheim-Skolem tulajdonságokat.

Megjegyzés Lindström tételei az elsőrendű logikai rendszer adekvátságát minősítik, hiszen

- a modell irányából haladva a teljesség szempontjainak vizsgálatát a Löwenheim-Skolem tétel határolja be,
- a kalkulus felől pedig, a helyesség feltételét a kompaktsági tétel⁵² határozza meg.

⁵² Legyen Γ tetszőleges formulahalmaz L -ben. Mármint, a kompaktsági tétel alapján, ha $\Gamma \models A$, akkor van olyan $\Delta \subseteq \Gamma$ véges formulahalmaz, hogy $\Delta \models A$. A kompaktsági tétel szemlélete-

Az adekvátság fontos tényezője a logikai vizsgálatnak. Az 1. fejezetben rámutattunk, hogy egy logikai rendszert nem lehet pusztán formuláknak és ezekkel végzett átalakításoknak tekinteni, hanem bizonyos szemantikai szempontokat is figyelembe kell venni, és ezt adekvát szemantika garantálja számunkra. Azonban a rendszer adekvátsága úgy tűnik, a matematika tárgya által vagy – Quine szavaival – *ontológiailag* meghatározott, amelyet a tradicionális szemlélet konstruktivista „szűkítésében” találunk meg, a „konzisztens matematikai tudás” feltételének megsértése nélkül. Ez persze nem jelenti a tradicionális szemlélet diszkreditálását, ahogy azt a fenti példákkal próbáltuk megvilágítani, hanem az elkülönítés hangsúlyozását a matematika tárgyában és módszertanában, különös tekintettel a szűkítés egyik „eszközére”, az elsőrendű logikára. Az elsőrendű logika szemantikai háttere szűk terepe a tradicionális matematika objektumainak, tárgyának és módszerének.

Ez a különbség a formális rendszer szintjén, tehát egy tisztán szintaktikai rendszerben (kalkulusban) is kiténik, ha az alkalmazott formális rendszert a természetes levezetés technikájának Gentzen szabályaira alapozzuk:

Gentzen-stílusú minimálkalkulus (GM)	
<i>Strukturális szabályok:</i>	
(Azonosság)	(Permutálás)
Ha $A \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash A$	Ha $\Gamma, B, C, \Delta \vdash A$, akkor $\Gamma, C, B, \Delta \vdash A$
(Bővítés)	(Vágás)
Ha $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma, B \vdash A$	Ha $\Gamma \vdash A$ és $\Delta, A \vdash B$, akkor $\Gamma, \Delta \vdash B$

sen tehát azt fejezi ki, hogy egy következtetésben mindig csak véges számú premissát használunk.

Műveleti szabályok:	
($\supset$ be)	($\supset$ ki)
Ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, akkor $\Gamma \vdash A \supset B$	Ha $\Gamma \vdash A \supset B$ és $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \vdash B$
($\&$ be)	($\&$ ki)
Ha $\Gamma \vdash A$ és $\Gamma \vdash B$, akkor $\Gamma \vdash A \& B$	Ha $\Gamma \vdash A \& B$, akkor $\Gamma \vdash A$ és $\Gamma \vdash B$
($\vee$ be)	($\vee$ ki)
Ha $\Gamma \vdash A$ vagy $\Gamma \vdash B$, akkor $\Gamma \vdash A \vee B$	Ha $\Gamma \vdash A \vee B$, akkor $\Gamma \vdash A$ vagy $\Gamma \vdash B$
($\forall$ be)	($\forall$ ki)
Ha $\Gamma \vdash A_x^t$ és $t \notin \text{Free}(\Gamma)$, akkor $\Gamma \vdash \forall x A$	Ha $\Gamma \vdash \forall x A$, akkor $\Gamma \vdash A_x^t$
($\exists$ be)	($\exists$ ki)
Ha $\Gamma \vdash A_x^t$, akkor $\Gamma \vdash \exists x A$	Ha $\Gamma \cup \{A_x^t\} \vdash C$, $\Gamma \cup \{\exists x A\} \vdash C$, feltéve, hogy $t \notin \text{Free}(\Gamma \cup \{\exists x A, C\})$
Tradicionális szemléletű bővítés (QC)	Konstruktivista szemléletű bővítés (GI)
($\sim$ be)	($\neg$ be)
Ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ és $\Gamma \cup \{A\} \vdash \sim B$, akkor $\Gamma \vdash \sim A$	Ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash \downarrow$, akkor $\Gamma \vdash \neg A$
($\sim$ ki)	($\neg$ ki)

$\text{Ha } \Gamma \vdash \sim\sim A, \text{ akkor } \Gamma \vdash A$	$\text{Ha } \Gamma \vdash \neg A \text{ és } \Gamma \vdash A, \text{ akkor } \Gamma \vdash \downarrow$
---	--

Mj.: Az A_x^t az A formula x változójának a t terminussal történő megengedett helyettesítését jelöli, míg $t \notin \text{Free}(\Theta)$ azt, hogy t nem szerepel szabadon elő Θ -ban.

Kolmogorov (1932) mindezt úgy interpretálja, hogy mivel QC állításokkal, GI pedig feladatokkal foglalkozik, összehasonlításukra nincs mód – még GM szintjén sem. Habár szintaktikai alakjaik hasonlítanak, a GI rendszer nem tekinthető logikai rendszernek, hanem inkább feladatkalkulusnak. Egyet kell értenünk Kolmogorov distinkciójával. A Church-Turing tézissel kapcsolatos diszkusszió és a fenti lehetetlenségi tétel arra ösztönöznek, hogy a két rendszer között éles határvonalat szabjunk, mivel ontikusan különböznek. Egyrészt GI-ben a logikai konstansok jelentése különböző, másrészt az intuicionista logika alkalmazási köre szűkebb, mint a tradicionális logikáé: a matematikának csupán konstruktív részére korlátozódik.

Különböző érvek vannak arra, hogy miért az intuicionista és nem a platonista szemléletet és érvelésformát preferáljuk a matematikában. Az egyik, ontológiai érv, amely szerint a matematikai állítások nem egy tőlünk függetlenül létező valóságra, hanem általunk létrehozott tárgyakra vonatkoznak. Putnam (1980) szerint nem használhatom úgy a nyelvet, hogy még nincs interpretációja. A platonizmus „realista szemantikája” viszont éppen ezt teszi. A modellek nem noumenális jószágok, amelyek arra várnak, hogy valaki megnevezze őket, hanem konstrukcióink. A Löwenheim-Skolem tételek értelmében egy olyan elmélet, mint amilyen a Peano-aritmetika vagy a halmazelmélet is, nem képes saját interpretációját rögzíteni. Ha azonban a referenciák bizonytalanok, mint a „realista szemantikában”, akkor soha nem leszünk képesek az elmélet szándékolt interpretációját kiválasztani, mert sem a tárgynyelven, sem a metanyelven nem rendelkezünk azzal a nézőponttal, amelyből szemlélve a dolgot kimondhatjuk és megértjük, és így kizárhatunk egy nem szándékolt interpretációt. Azt, hogy a modell, amire utalunk, nem szándékolt, abból a leírásból ismerjük fel, amelyen keresztül megadták, ezért a nyelv megértése egy „nem realista szemantikát” előfeltételez. Putnam ehhez egy olyan liberalizált intuicionizmust ajánl, amelynek felfogása közel van az alább bemutatásra ke-

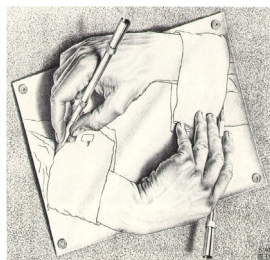
rülő Dummettéhoz, de az ő intuicionizmusa nem diszkreditálja a tradicionális matematikát, csak a „nem realista szemantika” primátusát hangsúlyozza a nyelv megértésében.

Dummett (1978, p. 215-247) úgy véli, hogy hacsak nem fogadunk el különös feltevéseket a kondicionálisokkal kapcsolatban, a fent ismertett ontológiai érv nem védhető. Ezért az ő érve inkább szemantikai megfontoláson alapul: egy mondat jelentését a használata alapján kell megértenünk. A matematika tanulása során általában nem a mondatok igazságfeltételeit tanuljuk meg, hanem azt, hogy mi számít igazságuk megalapozásának. Ha az igazságot klasszikus módon értjük, akkor egy mondat igazságának feltétele nem azonos az igazsága megalapozottságának feltételével, azaz, hogy a mondat bizonyított-e vagy sem. Ésszerűbbnek tűnik azt az intuicionista álláspontot képviselni, hogy egy mondat jelentését az határozza meg, hogy miképpen lehet bizonyítani, és hogyan használjuk ezeket az állításokat a bizonyításokban.

Rényi (1965), platonista alapon állva, a matematikus mesterségében mindkét szemlélet relevanciáját hangsúlyozza. Amikor egy új fogalmat alkot, akkor a matematikus feltalál, amikor a fogalmakat kutatja, és ezekre vonatkozó állításokat tesz és bizonyít, akkor pedig felfedez. A matematikus nem valóságos létezőkkel foglalkozik, de amit ezekről az absztrakt entitásokról megállapít, az a valóságban létező dolgokra is érvényes lehet. Rényi szerint, a matematika absztrakt entításokkal dolgozva, egyre bővebb és pontosabb információt ad arról a lehetőségmezőről, amelyet tárgya és módszere által felhasználhatunk, de a valóságban nem mond semmit arról, mit helyze tennünk.

Quine-t követve, a különböző szemléletű matematikusoknak komolyan kell venni egymást. A matematikai szemlélet interperszonalitási kritériumának liberális változatából kiindulva (vö. 3.3. fejezet), el kell fogadni, hogy a matematikusok különbözőképpen gondolkodhatnak, azonban nem gondolkodhatnak egyszerre többféle módon. Tehát nincs szó a két különböző ontológiai bázisú matematikai rendszer békés együttéléséről, saját keretei között kell értékelni és használni egy matematikai elmélet elveit, definícióit, tételeit, bizonyításait, és ezeket nem lehet alapos felülvizsgálat nélkül átemelni más matematikai elméletekbe. Azonban még ez sem véd meg bennünket egészen a

paradoxonok ellen, a „saját jogon” használt fogalmak és szakmai axiómák következtében. Amikor a matematikus arra tesz kísérletet, hogy a gondolkodás óceánjának titkait kifürkésze, a fogalmak alkotása nem csak eszköz ebben. Az előzetesen meglévő informális háttér bizonyos tulajdonságainak formális vizsgálata egy elkötelezettség, ezért az eredményül nyert formális elmélet igazságtartalma, konzisztencia-követelménye szubjektív jellegű lesz. Kanti alapon ezt úgy magyarázhatjuk, hogy a matematikai elmélet olyan emberi alkotás eredménye, amelyet az ember kognitív képességei határoznak meg. A következő fejezetben arra teszünk kísérletet, hogy megmutassuk, e kanti interpretáció mellett léteznek alternatív magyarázatok is.



6. A matematika „archaikus” problémái és az élő matematika

1.

A Nyugati gondolkodást életre hívó alapkérdés lét és gondolkodás egymáshoz való viszonyát firtatja, előfeltételezve, hogy ennek az igazi, tökéletes létezőkről kell szólnia. A probléma legismertebb elemzését, allegorikus formában, Platón *Államából* ismerjük, amelyben a hétköznapi világ egy barlanggal van összehasonlítva. Előttünk fal húzódik, mögöttünk pedig tűz ég, s ezeket az árnyakat tartjuk a valóságnak. Kilépve a barlangból a fényre, fokozatosan felismernénk a tévedésünket, előbb-utóbb eljutnánk a dolgok helyes szemléletéig, azonban szellemünk e filozófiai barlang foglya, utánzatokhoz van láncolva. A Nyugati tradíció kétféle módot is kínál a „megvilágosodáshoz”, kétféle ontológiai hagyományt dolgozott ki, amelyek egymással összebékíthetetlennek látszanak: a dualizmust és a monizmust.

Mind a két tradíció egy-egy ontológiai mítoszra épül. A dualizmus hitvallása, hogy kezdetben volt a világ, amelyben egy olyan lény született, akiben fellobbant a gondolkodás szikrája. A zsidó-keresztény felfogás a mózesi genezist vallja: a világ és minden, ami azon van, az embert is beleértve, a spirituális szféra által lett megteremtve, tehát a materiális létet megelőzi egy spirituális lét. Egy omnipotens lény, Isten szavainak hatására, több fázisban, először megteremti a világot, majd beléhelyezi az embert, akit önmaga képmására formál. Megáldja és felhatalmazza őt, hogy betöltse, és uralma alá hajtja a földet. A felvilágosodás, a tudomány forradalmi lendületével, felszámolta a csoda folytán végbemenő beavatkozás gondolatát, s a filogenezis nézetét fogadta el. Ennek két tézise van: i) a bonyolultabb fajoknak a kevésbé összetett szubsztanciákból való létrejötte; ii) a faji korlátokat az evolúció – mutáció és szelekció révén – át tudja hágni. Az evolúció tanítása tehát úgy szól, hogy a *homo sapiens* hosszú folyamat során fejlődött ki, de a materiális világ keretei és törvényei között. Ezt a folyamatot Darwin sem képzelte békésnek, az emberi létezés ugyanúgy küzdelem, mint a mózesi genezisben, csak még a centrumszerepétől és a túlvilág lehetőségétől is megfosztja az embert.

A „modern”, karteziánus gondolkodás dualista (Robinson (2003)): két szubsztanciára tagolja a világot, a kiterjedésre (*Res Extensa*), amelyre a tiszta mechanizmus, illetve a gondolkodásra (*Res Cogito*), amelyre a tiszta racionalis-

tás a jellemző. Ez alapján, végül is az élőlények a kiterjedés szubsztanciájával rendelkező bonyolult automaták csupán. Descartes ugyanakkor világosan felismerte, hogy bár egy papagáj vagy egy automata képes kiadni hangokat, kiejteni szavakat, de nem képesek úgy elrendezni őket, hogy tanúsítsák, azt is gondolják, amit mondanak. Vagyis a gondolkodó szubjektum önálló entitás, amely nem redukálható le kizárólag a mechanikus anyag sajátosságaira. Az emberben a két szubsztancia egyesül, és így az ember az esze és akarata révén kiszakad a természeti folyamatból. A xx. században, Turing nyomán, ez a probléma új formában vetődik fel. Nem az intelligencia mivolta (ti. mi tesz intelligensé), hanem az lett a kérdés, hogy mikor tekinthető valami, pl. egy gép, intelligensnek: ha két ágens között hosszabb ideig párbeszéd folyik, és az ember nem tudja eldönteni, hogy a kettő közül melyik a gép. Ez a Turing-próba, amely azonban nem tűnik teljesen kielégítőnek, amint erre az 1. fejezetben, Searle kínai szoba példáján keresztül, rámutattunk.

A dualizmus mellett azonban van más ősi ontológiai mítoszunk is, a monizmus, amelynek ősi formái felbukkannak a preszokratikus filozófiában (Thalész, Anaximandrosz, Parmenidész), a neoplatonizmusban (Plótinosz), a kereszténységben (Assisi Szent Ferenc) vagy a panteizmusban (Spinoza). Bár a monizmusnak többféle felfogása van, amiben ezek szemlélete közös, az egység, az azonosság tulajdonítása (Schaffer (2007)). Amiben pedig különböznek az, hogy magyarázatot kell adniuk arra, minek a következtében származik az Egyből a Sok. A nagy modernkori monista, Leibniz metafizikájában ez úgy néz ki, hogy a világban egy eleve elrendelt összhang (*harmonia praestabilita*) és ezen alapuló szubsztanciák sokasága létezik, s egy adott létezőben végtelenül sok ilyen elemi egység, monász van. De hogyan hordozhatja magában az Egy a végtelen Sokat? Vegyünk egy leibnizi példát (Coutturat (1966)). Az egység nem egyéb, mint összege felének, negyedének, nyolcadának, é.í.t. a végtelenségig, azaz: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ ad infinitum. Jogunk van ezt mondani, mert ha abból a végtelen sok összeadandóból csak az első tagot vesszük, akkor 1-től való eltérése $\frac{1}{2}$; ha a két első tagot adjuk össze, akkor $\frac{1}{4}$; ha az első három tagot, akkor már csak $\frac{1}{8}$, é.í.t. Minél több ta-

got veszünk, annál jobban megközelítjük az 1-et, az eltérés annál kisebb lesz. Nem képtelenség tehát olyan kijelentést tenni, hogy az Egység a végtelen Sokat magába zárja.

A monizmus az embert a Sokban találja meg, aki eltávolodott attól, amivel egykor azonos volt, azonban nem szakadt el teljesen. E mítosz nem állítja, hogy az ember kitüntetett létező (ebben a vonatkozásban az evolúció elméletéhez hasonlít), nem állítja egymással szembe az embert és a világot, hanem az ember mintegy belesimul a létezők harmonikus, hierarchikus rendjébe (ebben teleologikus vonásokat mutat). Ugyanakkor a Nyugati gondolkodást a dualizmus mítosza dominálja. Ez az, amiben az analitikus és az ún. kontinentális filozófiai tradíció többé-kevésbé egyetértenek. Ez utóbbi filozófia képviselői (Husserl, Heidegger vagy Derrida) abban általában eltérnek az előbbitől, hogy a dualizmust történetileg kontingensnek tekintik, és antipátiával szemlélve, kirohanásokat intéznek ellene. E nézőpontból Descartes-ot öntelt racionalizmusa miatt éri kritika.

Véleményünk szerint a neves Leibniz-Newton vita sem pusztán prioritás-vitaként értelmezhető a függvénykalkulus megalkotásának kérdésében, hanem a természetfilozófia monista-dualista szemléletének összecsapásaként is. Newton hitvallásáról így ír a Principiában: „Ő [Isten] örök és végtelen [...], nem az idő és a tér, de létezik az időben és térben. Örökké van az időben és mindenütt jelen van; és mindig és mindenütt való létezésével alkotja az időt és a teret [...] Ő teljességgel híjával van mindenféle testnek és testi alkatnak, és éppen ezért sem nem látható, sem nem hallható, sem meg nem érínthető [...] Attribútumairól ugyan fogalmat alkothatunk, de hogy mi lehet a való szubsztanciája, nem tudhatjuk. Csak az alakot, a szint láthatjuk a testekben is. Csak a hangot halljuk és csak a külső felületeket érintjük, csak a szagokat szagoljuk és ízleljük az ízeket; de a belső lényegüket nem ismerjük meg sem az érzékeinken keresztül, sem elménk szemlélő aktusában: így még kevésbé lehet fogalmunk az isteni szubsztanciáról.”

Leibniz kritikája: „Newton azt mondja, hogy a tér Isten érzékelő szerve, amellyel a dolgokat észleli. De ha Istennek szüksége van bármilyen szervre ahhoz, hogy a dolgokat észlelje, az következik, hogy ezek egyáltalán nem függnék tőle és nem is ő alkotta azokat [...] Newton és társainak tanítása szerint, a Mindenható Istennek néha fel kell húznia az óráját időről időre: különben megszűnne mozogni. [...] a Jóisten igencsak ügyetlen műszerész, mert gyakran kényszerül reparálni és újraszabályozni szerkezetét [...] Az én véleményem viszont az, hogy ugyanaz az erő és erély marad mindig a világban, legfeljebb az anyag egyik részéről, a

másikra megy át, a természet törvényeinek és az eleve elrendezett harmóniának megfelelően.”⁵³

Érdekes a két metafizikai szemlélet küzdelmét a fizika nézőpontjából megvizsgálni. Mint ismert, Arisztotelész az idő fogalmát a változás fogalmához köti a *Fizikában* (218b, 221a). Ebből eredő az a metafizikai pozíció, hogy az idő csak a változás segítségével mérhető. Leibniz ebből két fontos következtetésre jutott: i) a mozgás és a nyugalom viszonylagosak; ii) a tér és idő elválaszthatatlan egységet alkot, mivel a tér két egyidejűleg létező tárgy közötti távolság, míg az idő két esemény közötti távolság. A másik metafizikai pozíció az abszolút idő gondolata (Galilei-Newton), és hogy idő létezhet olyan világban is, ahol nincs változás (Shoemaker (1969)). Tehát létezik abszolút idő, de azt nem mérhetjük. Newton úgy érvelt Leibniz ellen, mint a másik nézet képviselőjével szemben, hogy ha minden mozgás relatív, akkor a gyorsulásnak is relatívnak kell lennie, pedig fizikailag megfigyelhető, vagyis *tapasztalati* különbségek vannak egy gyorsuló és egy nem gyorsuló mechanikai rendszer között. (Például, nyilvánvalóan különbség van egy vízzel félig megtöltött nyugalomban lévő és körbeforgatott vödör között.) A mozgás relativitása elleni érvet nem lehetett a tizenhetedik század fizikájával megválaszolni. Az általános relativitáselméletre volt szükség, hogy megválaszolja Newton ellenvetését. Ugyanakkor, ahogy az a 4.4. és 4.5. szakaszokban elmondottakból következik, a kétféle metafizikai pozíció között nem lehet választani tapasztalat alapján, mivel nincs olyan tapasztalat, ami alapján eldönthető, hol húzzuk meg a határt fizika és a téridő geometriája között. Ahogy a newtoni fizika nem dönthette meg a leibnizi metafizikai pozíciót, ugyanígy az einsteini fizika sem ingathatja meg a galilei-newton-féle metafizikai pozíciót.

A xx. század második fele a történelmi borzalmak hatására ráeszmél, hogy bár az emberiség rendkívül alkalmazkodó, flexibilis, ugyanakkor az ember maga sérülékeny, akár a nádszál. A múlt század újra felfedezi magának Pascalt, aki szerint az igazságnak többféle síkja van, és reménykedik abban, hogy az ész önmaga megértésén belül eljut oda, hogy átérzi a dolgokat a saját létükben és értelmükben.

Az igazi probléma azonban mégiscsak azzal van, amire Pascal sem ad gyógyírt, hogy a megtapasztaló és gondolkodó szubjektum magát teszi a megismerés alapjává, amelyet a felvilágosodás végeredményben posztulál, és a szubjektumnak és objektumnak ez a viszonya vált – elsősorban Kant „koperni-

⁵³ A vita rekonstruálásához Newton *Principia Mathematica*jának III. könyvéhez csatolt általános magyarázó jegyzetet, valamint Leibniz és S. Clarke (1675-1729) levelezését kell tanulmányozni [Források: ♦ Newton: *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, in.: *Hutchinson, R.M. (ed.): Great Books of The Western World Vol. 34.* (Encyclopedia Britannica, INC., 1952). ♦ *H. G. Alexander (ed.): The Leibniz-Clarke Correspondence* (Manchester University Press, 1998). ♦ *Simonyi Károly: A fizika kultúrtörténete.*

kuszi fordulata” következményeként – az újkori gondolkodás alapproblémájává. Ezért miközben a kétféle ontológiai mítosz mindig is élő volt a Nyugati kultúrában, azonban a dualizmus kerekedett felül. A külvilág dualista módon elgondolt objektivitásától felrajzolható olyan ív, amely az egocentrikus, szubjektív gondolkodáshoz és vele párhuzamosan a radikális szkepszishez és relativizmushoz vezet. Az angol empirizmus vagy a xx. századi tudományfilozófia ezt az utat járta végig, Locke-tól Hume-ig és a Bécsi Körtől Feyerabendig. Mindez pedig nyugtalanítóan hat a Nyugati civilizációra, ami az „értéksemlegesség” illúziójába ájulva (vagy Nietzsche szerint értéknélküliségbe süllyedve) a nyilvánvaló örültségeket is csak kiabálva, de tehetetlenül szemléli.

Mind az angol empirizmus, mind az analitikus filozófia abból az alapvető tételtől indulnak ki, hogy minden ismeretünk tapasztalati eredetű. Locke, Berkeley és Hume filozófiájukban azt a módot kívánták rekonstruálni, ahogyan az ember elméjében a tapasztalatból származó információk ideákká, fogalmakká és elméletekké szerveződnek. Ezt a felfogást később komolyan kétségbe vonták, ezért az analitikus filozófia átfogalmazta ezt az alaptételt úgy, hogy ismereteinket logikai úton vissza lehet vezetni olyan ismeretelemekre, amelyek a „tapasztalatilag adottat” fejezik ki. Ez az attitűd az én és a megismerésre váró világ dualizmusát eredményezi.

2.

A xvii. század tudósai (pl. Newton, Huygens) és filozófusai (pl. Locke) megkülönböztették a dolgok elsődleges és másodlagos tulajdonságait⁵⁴. Egy testnek léteznek elsődleges, geometriai-mechanikai tulajdonságai, mint méret, alak, mozgás, amelyek magában a testben vannak, és a testet ezeken keresztül érzékeljük. Így jutunk a dolgok másodlagos tulajdonságaihoz, mint a test hőmérséklete, színe, íze, amelyek nem a testben vannak, hanem annak elsődleges tulajdonságai hatására az elmében alakulnak ki. Beszéltek még összetett

(Gondolat Kiadó, 1986), III. rész, XIX. sz. tábla.]

⁵⁴ Newton: *Opticks*, Huygens: *Traité de la lumière*, valamint Locke: *An Essay Concerning Human Understanding* [Források: ♦ Newton: *Optics*, ♦ Huygens: *Treatise on Light*, mindkettő in.: *Hutchinson, R.M. (ed.): Great Books of The Western World Vol. 34.* (Encyclopedia Britannica, INC., 1952). ♦ Locke: *Értekezés az emberi értelemről* (Osiris Kiadó, 2003)].

tulajdonságokról is, amelyhez olyan összetett érzéki tulajdonságok tartoznak, mint szomorú, szép, félelmetes, stb. Ennek a megkülönböztetésnek az a jelentősége, hogy egy fa lehet objektíve magas, de nem lehet komor. Ez utóbbi tulajdonság „kivetítés” eredménye. Ugyanakkor nehezen érthető, hogy a hosszúság miért nem „kivetítés” eredménye szintén, gondoljunk csak Gulliverre és a lilliputiakra, vagyis miért nem származik minden tulajdonság a szubjektumból. Ez a Berkeley által képviselt szolipszizmus álláspontja, amely szerint a külvilágról és a saját testemről való tudásom nem egyéb, mint egy elme gondolatai.

Tegyük fel, hogy egyik kezünket zsebre dugjuk, míg a másikat kint hagyjuk a hideg levegőn. Ha ezután mindkét kezünket egy vödör hideg vízbe dugjuk, akkor az egyik kézzel hidegnek érzett víz a másiknak melegnek bizonyul. Arra a kérdésre, hogy a víz hideg vagy meleg, az empirista válasz, hogy egyik sem. A víz magában sem nem hideg, sem nem meleg, hanem másodlagos tulajdonságként, a szubjektum vetíti bele ezeket a jellemzőket, attól függően, milyen állapotban van a keze. Ez a felfogás elvezetett a „magánvalóhoz”, a kanti *Ding an sich*-hez, és ahhoz, hogy „önmagában vett dologról” végül is semmit sem mondhatunk, mert minden tulajdonságát a szubjektumtól kapja.

Van azonban egy másik lehetséges válasz a fenti kérdésre. A szofista Prótagorász fogalmazta meg nevezetes *homo mensura tételét*: minden dolognak mértéke az ember; a létezőknek, hogy léteznek, a nem-létezőknek, hogy nem léteznek⁵⁵. A tételt a következőképpen értelmezhetjük. A dolgokat érzékelés útján ismerjük meg. Ha például vizet iszom, és hidegnek érzem, erről az ismeretről így számolhatok be: i) a víz hideg [est]; ii) a víz nem meleg [non est].

Vegyünk egy olyan nyelvet, amelyben a létige explicite kifejeződik. Tekintsük az alábbi öt latin mondatot, amelyekben a következő szavak szerepelnek: Socrates (tulajdonnév); est (létige, „van”, „létezik”); Centaurus („kentaur”); non (tagadószó); vir („férfi”); res fabulosa („mesebeli lény”); femina („asszony”).

1. Socrates est.

3. Socrates vir est.

5. Socrates non est femina.

⁵⁵ Prótagorász [in: Steiger, K. (szerk.): *Bevezetés a filozófiába. Szöveggyűjtemény.* (Holnap Kiadó, 2004)].

2. Centaurus non est. 4. Centaurus res fabulosa est.

Az 1. és 2. mondatban a létige az alany létezését [est], illetve nem létezését [non est] fejezi ki. Az ilyen típusú használatot a létige egzisztenciális használatának nevezzük. A 3-5. mondatokban a létige nem létezést fejez ki, hanem az alany és az állítmány között teremt kapcsolatot. Ezt szokták a létige kopulatív használatának nevezni. A létige egzisztenciális és kopulatív használatának megkülönböztetése Arisztotelésznek tulajdonítható. A szofisták, így Prótagorász is, még meg volt győződve arról, hogy a létige minden előfordulása létezést, tagadása pedig nem-létezést fejez ki.

Prótagorász i) és ii) mondatai e megjegyzések után így fogalmazhatók át: i) a víz hidegként létező; ii) a víz melegként nem-létező. Eszerint a *homo mensura* tételének következő parafrázisát adhatjuk: az általam érzékelt dolgok vonatkozásában én vagyok annak kritériuma, hogy ezek a dolgok számomra nemcsak ilyennek és ilyennek tűnnek, hanem számomra valóban így és így léteznek, illetve nem léteznek. Prótagorász tehát arra a kérdésre, hogy a vödörbe dugott kezeim szerint a víz hideg vagy meleg, az lenne, hogy mindkettő egyszerre. S amikor az ember kezei eltérő állapotban vannak, akkor mindkét tulajdonság egyszerre érzékelhető. Tehát minden érzékelésünk alapja az érzékelt dologban található.

Első pillantásra a *homo mensura* tétel valamiféle parttalan relativizmus-hoz vezet. Csakhogy tévedés volna a tételt úgy értelmezni, hogy száz ember számára a víz száz különböző hőmérséklete létezik. Van a víz és ember viszonyában egy „természetes állapot” (*κατα φύσιν*), egy olyan „objektív hőmérsékleti skála”, amelyben mindenki körülbelül ugyanazt érzékeli, de az a tény, hogy a víz egyszerre mutatkozik egyeseknek, sőt néha még saját magamnak is, melegnek és hidegnek, azt jelenti, hogy a víz mindkét sajátossággal rendelkezik. Ahogy a kvantumfizikában is egy megfigyelt elemi objektum egyidejűleg lehet hullám vagy részecske a mérőeszköz sajátosságainak függvényében.

A norvég filozófust, Naesst (2005) követve, az a kijelentés, hogy számomra a víz meleg és nem meleg egyszerre, nem vezet logikai ellentmondáshoz, mivel a víz a jobb vagy bal kezemhez viszonyítva meleg vagy hideg, ami logikai ellentmondás nélkül állítható. A fenti példát ezért úgy általánosíthatjuk, hogy a „dologról” tett kijelentés nem más, mint viszonyokról tett kijelentés. Tehát az „A dolog B” kijelentés lefordítható arra, hogy „A dolog C-hez képest B”,

azaz „a víz meleg” állítás „a víz a jobb kezemhez viszonyítva meleg” állításra. Ezért a dolgok helyett a viszonyok hálójáról beszéljünk, és a „dolgot” mint ennek a hálónak a csomópontját képzelhetjük el. Wittgenstein szellemében ezeket tekinthetjük a világ tényeinek: „a világ tények és nem dolgok összessége”⁵⁶.

Már Platón *Theaitétosz*ában foglalkozik ezzel a problémával⁵⁷. Tekintsük először a kockák példáját: adva van hat kocka – ez több mint, négy, de kevesebb, mint tizenkét kocka. Nem vettünk el semmit a hatból, a hat változatlan maradt, és ennek ellenére mégis kevesebb lett. Ebben az állításban „dolgok”, különböző számú kockák vannak, és ezek különböző relációban („több” és „kevesebb”) vannak egymással. Valójában Prótagorász mértékelve bevezet egy relációt aközött, ami van és a mérés közzé. Itt azonban nem különböző entitások közötti viszonyokról van szó, mint a kockák példájában, hanem fordítva: ami van, azt a viszonyok konstituálják – a mérés hozza létre (Feyerabend (1991)). A dialógus főszereplője, Szókratész ez alapján úgy érvel a *Theaitétosz*ban, hogy a szín (pl. egy fehér felület) amit lát az ember, nem a szemben van, és nem is valahol kívül a világban, hanem mindkettőből jön létre, a percepció folyamatának eredményeként⁵⁸.

Pontosan ezt mondja a kvantumelmélet is a mérési folyamatról (Blohincev (1987)). A kvantumelmélet alapelve, a Bohr-féle komplementaritási elv: egy elemi rész tér-idő és impulzus-energia dinamikai változói konjugált mennyiségpárok (hely-impulzus, idő-energia), amelyeket egyszerre nem ismerhetünk meg. Nincsen olyan kvantumsokaság, amelyben az egymást kiegészítő tér-idő és impulzus-energia dinamikai változók mindkét csoportja határozott értékű lenne. Ez a Heisenberg-féle elv általánosítása. Parafrázálva a Bohr-elvet: ha egyszer sikerül abszolút pontosan megmérni az impulzust, akkor nemcsak a helyről nem szerezhethetünk pontos információt, hanem lényegében már nem is létezik semmi olyasmi, mint hely.

Több fizikus, köztük Schrödinger és Einstein is, gondolkísérletekkel álltak elő, hogy bebizonyítsák, ahogyan arra Platón is kísérletet tett a *Theaitétosz*ban, hogy a „dolgok” határozott minőségekkel rendelkeznek, még mielőtt méréseket végeznének rajtuk. Schrödinger olyan kétállapotú rendszert vizsgált, amelyben az első, ψ_1 működésbe hoz egy Geiger-számlálót, a második ψ_2 viszont nem (*Schrödinger macskája paradoxon*). A Geiger-számláló

⁵⁶ vö. Wittgenstein: *Tractatus Logico-Philosophicus*, 1.1. tétel.

⁵⁷ vö. Platón: *Theaitétosz*, 151e–160d.

⁵⁸ Platón a percepció folyamatát még az empedoklészi elmélettel magyarázza, amely szerint a látás nem más, mint a szemből kibocsátott pásztázó fény összeütközése a „külső tárggyal”.

működése erősítőn keresztül szétör egy mérgező gázt tartalmazó ampullát egy tartályban, amelyben egy macska van. Ha a megfigyelő előre kívánja jelezni a mérés eredményét, akkor a megfigyelés között ott találja a két állapot szuperpozíciójának $[\psi_M(x) = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)]$ tényét a jegyzetfüzetében. Egyik állapot a macska élő $[\psi_2(x)]$, a másik a holt $[\psi_1(x)]$ állapota. Mármint a megfigyelő, hogy előrejelezze a jövőbeni mérés eredményét, belenéz a jegyzetfüzetében, amelyben ott találja a macska élő és döglött állapotai között lehetséges interferenciát $[|\psi_M|^2 = |c_1\psi_1|^2 + |c_2\psi_2|^2 + 2\text{Re}(c_1^* c_2\psi_1\psi_2)]$. A tényleges esemény megfigyelése után azonban a ψ_M helyére vagy ψ_1 vagy ψ_2 kerül. Eszerint, a megfigyelés folyamata dönt a két állapot közül. Úgy tűnik, hogy Schrödinger híven reprodukálta a komplementaritási elvet, mivel a megfigyelés előtt sem a döglött, sem az élő macska nem mutatkozik meg a valóságban. Lehetséges, hogy a macska állapotát az a fizikus hozza létre, aki a dolgot egy adott időpillanatban megvizsgálja?

Úgy tűnik, hogy a gondolatkísérlet bökkenője a mikro- és makroszintű folyamatok egymáshoz való viszonyában rejlik (Teller (1997)). Makroszinten a végső állapot hullámfüggvénye egy nagyon sokváltozós függvény, és az élő és holt macska állapotfüggvények között csak akkor lép fel interferencia, ha a két függvény az összes koordinátájában megegyezik. Ugyanakkor, az ilyen interferencia létrejöttének valószínűsége roppant csekély. Amikor megfigyelünk, méréseket végzünk. A mérés végeredménye egy makroszintű jelenség, és függ a két állapot kölcsönhatásától, interferenciájától. A mérés pontossága úgy változik, ahogy sikerül a makroszintű megfigyelést közelíteni a mikroszinthez. Ez azt jelenti, hogy a mérést csak akkor végezhetnénk el pontosan, ha az interferencia-jelenség valószínűsége zérussá válik. Ennek azonban az akadálya, hogy a makroszintű folyamatok irreverzibilisek. Ha egy eredetileg egyszerű interferenciával járó mikrofolyamat (kvantummechanikával magyarázható atomi folyamat) egy bonyolultabb konfigurációt eredményez egy későbbi állapotban, akkor az eredeti állapotot csak úgy tudnánk rekonstruálni, ha tudnánk a módját, hogy minden egyes részecske sebességét hogyan lehet az ellenkezőjére fordítani. A klasszikus mechanikának van egy ismert általános törvénye, ami Poincaré visszatérési tételéből következik, hogy majdnem minden mozgó pont visszatér kiindulási helyzetébe egy bizonyos idő után⁵⁹. Tehát szigorúan irreverzibilis dinamikai folyamat nincs. Azonban az irreverzibilitás, ha nem is determinisztikus, de statisztikus jellegű tény, vagyis a szóban forgó idő nagyon-nagyon hosszú. Bár előfordulhatna, mégsem aggódik senki attól a szituációtól, hogy megfullad egy bezárt szobában, mert egyszer csak az összes oxigénmolekula összegyűlhet az asztal alá. A mérés inheresen pontatlan: a mérés egyik végéből, ahol a klasszikus fizika uralkodik, csak akkor tudok visszajutni a mérés másik végére, ahol interferencia van és a viselkedés kvantummechanikával magyarázható, ha az interferenciát megzavarom.

Einstein és munkatársai gondolatkísérlete a következő volt (*EPR paradoxon*): Képzünk el két kölcsönhatásban lévő részecskét amint távolodnak egymástól, miközben semmi

⁵⁹ Arnold (1985), 4. fejezet, D. pontja.

mással nem kerülnek kölcsönhatásba. Ekkor bármely pillanatban mindkét részecske egy meghatározott helyen van, és mindkettő meghatározott impulzussal rendelkezik, de ezeket nem mérhetjük meg egyszerre, mivel konjugált mennyiségek. Azonban Einstein és munkatársai szerint, amikor még közel vannak egymáshoz, megmérhetjük a részecskék egymás közötti távolságát és összipulzusát, mivel a két mennyiségnek függetlennek kell lenni egymástól. Később, amikor a két részecske eltávolodik, egyszer csak megmérjük az egyik impulzusát, ami egy meghatározott értéket vesz fel. Mivel a két részecske teljes impulzusa megmarad, ezért a második részecske impulzusa szintén felvesz egy meghatározott értéket, amint megmérjük az elsőt. Tehát az első részecskén végzett mérés befolyásolja a másodikat, mivel tudjuk, hogy az összipulzusnak mennyinek kell lennie. Olyan ez, mint ha a két részecske között azonnali kommunikáció lenne. Ez viszont nincs összhangban a lokalitási elvvel, hogy nincs olyan információ, ami a fénynél gyorsabban terjedne; sőt, valójában itt „terjedésről” sincs értelme beszélni, csak azonnal bekövetkező „hatásról”. Ezért Einstein és kollégái úgy érezték, hogy egy olyan fizikai elmélet, amiben mindez megtörténhet, tehát a kvantumelmélet maga, nem lehet a valóságnak teljes leírása.

Később, Aspect és társai elvégeztek egy EPR-kísérletet Párizsban. A kísérlet egy forrás által ellentétes irányokba (nevezzük A és B pontoknak) kibocsátott fotonpárok polarizációs állapotaival foglalkozik, amelyben egyes fotonok polarizációját két lehetséges irányban mérhetjük meg. Az, hogy melyik irányban méri meg az egyes fotonok polarizációját, csak akkor dől el, amikor a fotonok már távolodnak a forrástól, A és B pontok irányába, így nincs mód, hogy üzenet érkezhessen a másik fotonhoz a mérési irányról. A kísérlet igazolta Bell híres tételét: ellentmondás van két távoli, A és B pontban végzett mérések eredményeinek csatolt valószínűségeire vonatkozó kvantummechanika elvárása és bármely „lokálisan realisztikus” modell között. A mérések eredményei kimutatták, hogy az A és B pontokban észlelt fotonok polarizációs állapotainak csatolt valószínűségei a kvantummechanika predikcióival egyeztek meg, de ellentmondásban vannak azzal a feltevéssel, hogy a két foton egymástól különálló, független dolog volna. Ez a kvantumfizikai *szeparálhatatlanság elve*: ha a részek (a fotonpár tagjai) a múltban kölcsönhatásban voltak, később már soha többé nem válhatnak függetlenné egymástól, a belső dinamikájuk következményeként (Penrose (2007)).

Mindezek a komplementaritási elvet erősítik meg: nincs olyan elemi rész, amelynek konjugált mennyiségei határozott értékűek lennének. Az EPR paradoxonban a „hatás” a rendszeren belül a rendszer belső törvényeiből bontakozik ki, tehát bármilyen trükkös is legyen egy kísérlet, nem lehet olyan mérés, amely egyidejűleg meghatározott értékű hely és impulzus állapothoz vezetne (függetlenül attól, hogy beavatkozik-e műszer vagy sem). A komplementaritási elvben lényegében ugyanaz a szemlélet nyilvánul meg, mint a szín érzékelésének magyarázata esetében a *Theaitétoszban*: a helyet és az impulzust vagy az időt és az energiát nem tekinthetjük a részecskék immanens minőségének, hanem relációknak nyilvánítjuk őket. Specifikusan, nem pusztán a relációktól független stabil minőségekkel rendelkező dolgok

közötti relációknak, mint a kockák példájában, hanem olyan dolgok közötti viszonyoknak, amelyeknek egyes minőségeit valamely kölcsönhatás konstituálja.

Minden összefügg, az egész a részekben lakozik, és az egész komplexust, amit Naess (2005) után *Gestalt*-nak nevezünk⁶⁰, csak alacsonyabb rendű egységein keresztül tudjuk megragadni. Nincsenek teljesen elkülöníthető dolgok vagy tények, ezeket csak a tények együtteséhez lehet hozzárendelni. Így mód nyílik kritika tárgyává tenni Berkeley szolipszizmusát, hogy a valóság csak annyiban létezik, amennyiben egy szubjektum érzékeli.

A kanti és Gestalt alapú gondolkodás között metafizikai különbség van: az első dualista és antropocentrikus, a másik viszont monista, amelyben a szubjektum belesimul a létezők harmonikus, hierarchikus rendjébe. A dualista koncepcióban a fogalomalkotást az ember kognitív és kommunikatív képességei befolyásolják. A Gestalt alapú gondolkodásban a fogalomalkotás akár ontológiai váltást is jelenthet, hiszen már a „dolgok”, a jelenségek sem ugyanazok a viszonyok hálójában.

3.

A módszerről írott értekezésében Descartes az euklideszi geometria hibájául rója fel, hogy bár nagyon absztrakt tárgyakat vizsgál, túlságosan kapcsolódik a szemlélethez, és ezért nem tudja gyakorolni az értelmet anélkül, hogy erősen ki ne fárasztaná a képzeletet⁶¹. Ez is motiválta akkor, amikor a szemlélet egyfajta „racionalizálásaként”, kidolgozta az analitikus geometriát, amelyben a térbeli pont szemléletes fogalmát az (x, y, z) számhármassal absztraktabb fogalommal váltja fel. Ez az új geometria, ami a geometriai vizsgálatokat algebrai

⁶⁰ A Gestalt fogalma az érzékelés pszichológiájának kutatása során bukkant fel. Jól ismertek a kétértel-

mű vizuális *Gestalt*-ok, mint amilyen az itt látható kacsanyúl fej:  . Ha az ábrán látható két nyúlvány-
nak „csőr” tulajdonságot tulajdonítunk, akkor egy kacsát látunk, ha viszont „fül” sajátosságot tulajdonítunk, akkor
egy nyúl képe rajzolódik ki előttünk. Megjegyezzük, hogy Mannheim 1929-ben a totális ideológiát, Kuhn a
paradigma-váltást lényegében egyfajta „Gestalt-switch”-ként értelmezi (Mannheim (1996) és Kuhn
(2000)).

⁶¹ Vö. Descartes (1993) művének *Geometria* című függelékét.

úton végzi el, valóban sokszor hasznos, könnyebb és rövidebb bizonyítási módot nyújt, mint a hagyományos. A módszer ráadásul tovább általánosítható és a geometria fejlődési irányát Euklidész modernkori „poriszmái” felé terelték, amelyekben nem a mennyiségi összefüggések érdekelnek bennünket, hanem a tér elemei, pl. bizonyos egyenesek létezése (ld. geodetikusak), sőt a tér struktúrája (ld. tér görbülete) ⁶².

A nagy matematikus, Gauss gyakorlati szükségletekből, térképezési probléma megoldására kívánt analitikus geometriai módszereket alkalmazni, azonban kénytelen volt Descartes-koordináták helyett általánosabb koordinátákat használni, mivel a táj domborzati viszonyai nem tették lehetővé a Descartes-koordináták használatát.

A mechanikában is a Descartes-koordináták helyett gyakran használnak másféle koordinátákat, pl. forgómozgások leírására polárkoordinátákat. Ekkor az euklideszi sík (x, y) Descartes-koordinátái és az (r, φ) polárkoordináták között a következő összefüggés van: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Mármint Gauss a térképezési feladat megoldására egészen általános (u, v) koordinátákat vett, amelyben a felületet már tetszőleges koordinátarendszerrel borítjuk be, és az előbbi összefüggés a következő lesz: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, ahol a koordináták a számunkra fontos tartományban folytonos és legalább kétszer differenciálható függvények, továbbá

függvénydeterminánsuk nem nulla: $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$. Mondjuk, polárkoordináták esetében ez

az utolsó feltétel az origóban nem teljesül, tehát ezt a pontot ki kell zárunk, ha polárkoordinátákkal akarunk számolni.

Gauss arra a mély belátásra jutott, hogy a felületet mint a tér önmagában létező, jól körülírható darabját lehet vizsgálni. Legfontosabb eredménye, amit ő maga kiemelkedő tételnek (*Theorema egregium*) nevezett, hogy a felület görbületi viszonyainak megállapítására nem kell kilépni a felületből a térbe, és mivel az általános koordináták a Gauss-féle koordinátarendszerben invariánsak, a görbület értéke a tér íveleméből megállapítható. Gauss tétele azt bizonyítja, hogy pusztán kétdimenziós földi lények be tudják látni matematikailag azt a tényt, hogy a Föld gömb alakú, ehhez nem szükséges nekik empirikus tapasztalat, ami gyakorlatilag a harmadik dimenzióra támaszkodik (pl. egy hajóból először az árbóca tűnik fel a horizonton).

⁶² Lánczos (1976).

Egy ifjú matematikus, Riemann, Gauss eredményeit általánosítva, azt a kérdést kezdte vizsgálni 1853-tól, hogy miképp jellemezhető tetszőleges dimenziójú görbült tér. A technikai részleteket mellőzve, ami csak harminc évvel Riemann halála után, Ricci és Levi-Civita alapvető munkái révén lettek kidolgozva, azt állapította meg, hogy több dimenzióban nem elégséges egyetlen mennyiség a felület görbületi viszonyainak megállapítására, mint két dimenzióban.

Gömbfelületen a görbültség mindenütt azonos, más felületeken azonban nem feltétlenül állandó a görbület. Meghatározásához körül kell járnunk egy infinitezimálisan kicsi felületdarabot és megnézni, hogy mennyire fordul el közben egy vektor. Gauss a kétdimenziós felületen még 1 számmal elboldogult, három dimenzióban azonban már 6, négyben 20, ötben 50, és általában n dimenzióban: $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ szám kell a görbültség megadásához. Végül is ezek az eredmények készítették elő azt a matematikai apparátust, a differenciálgeometriát, amit az általános relativitáselméletben felhasználtak.

Ugyanakkor a matematika egy másik fontos ágának, a függvénykalkulusnak a fejlődése, szintén kitermelt egy modernkori „poriszmát”, az infinitezimálist⁶³. A differenciál- és integrálszámítás felfedezése idején az infinitezimális, vagyis a végtelenül kicsiny mennyiségek jelentős szerepet játszottak Newton fluxióos módszerében. Az ilyen ideális mennyiségekkel való számolás problémáit azonban hamar felismerték: a dt infinitezimális mennyiséggel egy ideig, mint nem nulla értékkel számolunk, aztán hirtelen ráfogjuk, hogy nulla.

Legyen, mondjuk, egy szabadon eső kő helyfüggvénye (fluense) $s(t) = 16 \cdot t^2$, és keressük a kő pillanatnyi sebességét (fluxusát) ds/dt úgy, hogy véges legyen. A $t=1$ és $t=1+dt$ közötti távolságnövekmény meghatározása végett, számítsuk ki a kő helyét a $t=1$ időpillanatban, ami $16 \cdot 1^2 = 16$ és a $t=1+dt$ időpillanatban, ami $16 \cdot (1+dt)^2$, vagyis $32 \cdot dt + 16 \cdot dt^2$. Így a $ds/dt = 32 + 16 \cdot dt$. Miután meghatároztuk a ds/dt fluxust, Newton úgy érvel, hogy a dt növekményt nullával kell egyenlővé tenni, és így megmarad 32, ami $t=1$ esetén a szabadon eső kő pillanatnyi sebessége.

⁶³ Davis és Hersh (1984).

Ez a módszer képtelenség – szólta Berkeley korabeli éles és jogos kritikája. Képtelenség még akkor is, ha a fizikai folyamatok elemzésekor szemléletesnek tűntek és „helyes” eredményekre vezettek a *Principia*-ban.

Ha dt nem nulla, akkor a $ds/dt = 32 + 16 \cdot dt^2$ kifejezésből nem eliminálható a második tag, tehát nem jön ki a 32, ha pedig dt nulla, akkor a ds is nulla, és a ds/dt tört nem $32 + 16 \cdot dt^2$, hanem $0/0$ értelmetlen kifejezés.

A kalkulus másik felfedezője, Leibniz a helyzet tisztázására programot hirdetett meg, amelynek célja a számfogalom olyan kiterjesztése volt, amelybe a végtelen kicsi és végtelen nagy számok is beleférnek. Leibniz és követői végül is nem jártak sikerrel, és a XIX. század végétől több matematikus, Bolzano, Cauchy, Heine és Weierstrass által kidolgozott „határérték” fogalmát kezdték használni, amivel matematikailag pontos értelmet nyert a „végtelen kicsi változás” fogalma. Ezzel Descartes-ot igazolva, a „szemléleti racionalizálás” útját követve, számúzták a bizarr infinitezimálisokat az analízisből.

A pillanatnyi sebesség Cauchy-féle meghatározása úgy történik, hogy a $v = ds/dt$ mennyiséget nem két mennyiség hányadosaként kezeljük, hanem v határértékét definiáljuk a következő módon: legyen dt egy véges időnövekmény, ds pedig a megfelelő térbeli növekmény. Ekkor $ds/dt = 32 + 16 \cdot dt$ változó mennyiség. Mármost minden $\varepsilon > 0$ -ra van olyan $\delta(\varepsilon, t) > 0$, hogy minden olyan dt értékre, amelyre $|dt| < \delta$, $|ds/dt - v| < \varepsilon$. Így ha dt -t elég kicsire választjuk, akkor ds/dt a 32 értékhez olyan közeli érték, amelyet csak akarunk, így a sebesség $t=1$ esetén definíció szerint 32.

A XX. század második felére azonban a matematikai logika apparátusa megerősödött, és sikerült a valós számkör konzisztens kiterjesztése a végtelen kicsi és végtelen nagy mennyiségekkel. Az amerikai matematikusnak, Robinsonnak, Leibniz monadikus módszerét használva, a heurisztikus szemléleti szintről a szabatosság szintjére sikerült emelni az ilyen mennyiségeket. Az általa megalkotott nem standard elmélettel matematikailag pontos értelmet nyert a „végtelen kicsi változás” fogalom szemléletes tartalma.

A robinsoni nem standard analízisben a kiindulópont a véges valós számok és a standard analízis ismert része. Nevezzük ezt standard univerzumnak (jele: M), és jelöljük L -lel azt a formális nyelvet, amivel M -ről beszélünk, valamint T -vel az L nyelv összes igaz mondatát (amelynek összes állítását persze nem ismerjük). Mivel L -ben minden mondat vagy egy igaz vagy egy hamis állítás M -ről, ezért M egy modell T -re, vagyis olyan matematikai struktúra, hogy minden állítás T -ben igaz, ha M -re vonatkoztatva értelmezzük. Mármost a logika egyik nevezetes tétele, a Löwenheim-Skolem tétel miatt, az M standard modelljén kívül, létezik *M

nem standard modell is T-re, amelynek objektumai és az azok közötti relációk különböznek M hasonló objektumaitól és relációitól⁶⁴. Így az elsőrendű nyelvben felírt természetes számok Peano-axiómájának⁶⁵ nem csak az általunk használt standard modellje létezik, hanem van akármilyen nagy számosságú modellje is (ez egy nem standard aritmetika).

Egy másik logikai tétel, a kompaktsági tétel alapján viszont, amennyiben állítások egy halmaza igaz, az állításoknak van közös modellje, tehát létezik olyan nem standard univerzum, amelyben mindannyian igazak. A kompaktsági tétel alapján, létezik pszeudovalós számok nem standard univerzuma (${}^*\mathbb{R}$), amely tartalmaz olyan pozitív c számot, hogy $c < 1/n$, bármely n -re $[*]$, vagyis c infinitezimális és rendelkezik a standard valós számok összes tulajdonságával. Elemi analízis kurzusok része annak bizonyítása, hogy a standard univerzum ($\mathbb{R}$) archimédeszi tulajdonságú⁶⁶, azaz minden pozitív c elemre van olyan n természetes szám, hogy $n \cdot c > 1$. Az archimédeszi tulajdonság miatt nem léteznek infinitezimálisok $\mathbb{R}$ -ben.

A fenti $[*]$ miatt ez a tulajdonság azonban nem igaz ${}^*\mathbb{R}$ pszeudovalósaira: itt a c -nek véges összege $[c > 1; c + c > 1; c + c + c > 1; \text{é.i.t.}]$ sohasem lehet 1-nél nagyobb, akárhány tagot is veszünk. Az a tény, hogy az archimédeszi tulajdonság kifejezhető L egy mondatával a standard, de nem fejezhető ki a nem standard univerzumban, azt jelenti, hogy az állítás, amit használunk, végtelen sok mondatot takar.

Mármost, mivel ${}^*\mathbb{R}$ egy modellje L -nek, az $\mathbb{R}$ -re vonatkozó összes igaz állítás értelmezhető ${}^*\mathbb{R}$ -ben is. Specifikusan, $\mathbb{R}$ -beli számoknak megfeleltethetők ${}^*\mathbb{R}$ -beli objektumok: pl. 2-nek a *2 objektum. Így ${}^*\mathbb{R}$ tartalmazni fogja az $\mathbb{R}$ -beli standard valós számokat, az infinitezimális és a végtelen mennyiségek sokaságát, azaz a nem standard univerzum felfogható úgy, mint a standard univerzum bővítése. A standard számokon definiált minden művelet és függvény kiterjed ${}^*\mathbb{R}$ -re is változatlan tulajdonságokkal, például az összeadás ${}^*\mathbb{R}$ -ben is kommutatív.

Definíció Az $x \in {}^*\mathbb{R}$ pszeudovalós szám

- *végtelen*, ha abszolút értéke nagyobb minden standard számnál;
- *véges*, ha $|x| < n$ valamely n standard egészre;
- *infinitezimális*, ha $|x| < 1/n$ minden n standard pozitív egész számra;
- *végtelen közeliek*, ha $|x - y| < 1/n$ minden n standard pozitív egész számra.

⁶⁴ A Löwenheim-Skolem-tétel szerint (vö. 2.1.3. szakasz, 25. korollárium), a geometria Hilbert-féle axiómarendszerének, amelynek modellje az euklideszi tér (s ez a modell kontinuum számosságú), van legfeljebb megszámlálhatóan végtelen modellje is, ami ezért nyilvánvalóan nem izomorf az euklideszi térrel.

⁶⁵ amelyben a teljes indukció szokásos axiómáját, ami nem elsőrendű formula, helyettesíthetjük az összes $((A(0) \ \& \ \forall x (A(x) \supset A(Sx)) \supset \forall x A(x))$ elsőrendű formulákkal (az axiómarendszer már nem véges), ahol A tetszőleges, egy szabad változót tartalmazó formula (vö. 2.2. fejezet).

⁶⁶ vö. 1.20. tétel in W. Rudin: A matematikai analízis alapjai. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.

A definíció alapján világos, hogy x pontosan akkor infinitezimális, ha $|x| < \varepsilon$, minden pozitív sztenderd ε -ra. Mivel 0 infinitezimális, ezért $x \approx x$, továbbá $x \approx y$ esetén $y \approx x$ is igaz. Végül, ha adott két infinitezimális, $|x - y|$ és $|y - z|$, akkor tetszőleges standard n egészre:

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < 1/2n + 1/2n = 1/n,$$

azaz $|x - z|$ is infinitezimális. Tehát a $\approx$ reláció ekvivalencia, amely alapján ${}^*\mathbb{R}$ szétesik ekvivalencia-osztályokra. Minden ilyen osztályban legfeljebb egy sztenderd valós szám van, hiszen standard valós számok nincsenek végtelenül közel egymáshoz $\mathbb{R}$ archimédeszi tulajdonsága miatt.

Azt az ekvivalencia-osztályt, amibe az $r \in {}^*\mathbb{R}$ szám esik, az r monászának nevezzük [jele: $\mu(r)$]. Így egy standard valós szám [jele: $r \in \mathbb{R}$] monásza a 0 monász r -rel való eltoltja: $\mu(r) = r + \mu(0)$.

Be lehet bizonyítani, hogy Robinson határérték-definíciója általában ugyanarra az eredményre vezet, mint a Cauchy-féle definíció, tehát két különböző kalkulust építhetünk fel: egy nem standard felépítést, ami a „természet-tudományos szemléletnek” megteremti az infinitezimális mennyiségek használatának szabatos alapjait, és a standard felépítés, ami „racionalizálás” útján, fogalmilag megkerüli azt.

A nem standard analízist alkalmazva, a pillanatnyi sebesség most a $ds/dt = 32 + 16 \cdot dt$ összefüggésből, pontosan és a határérték-érvelés nélkül, azonnal adódik: mivel a ds , dt és ds/dt nem-standard valós számok, így v a ds/dt standard része lesz: $v = \mu(ds/dt) = 32 + \mu(16 \cdot dt) = 32$.

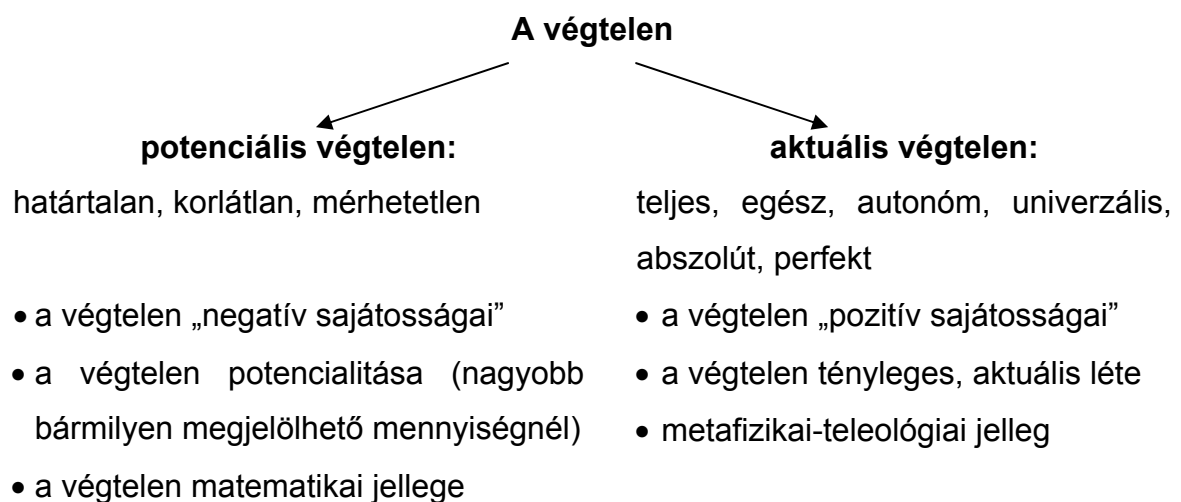
4.

Ahogy lenni szokott, amint egy kérdést megoldunk, ezzel egy újabb kérdést nyitunk meg. Amikor a határérték fogalmával dolgozunk, megköveteljük, hogy a függvény értelmezési tartománya „kontinuum” legyen. Az egyenesen a pontok két tulajdonságát várjuk el: 1) bármely két pont között van egy másik (sűrűségi sajátosság); 2) nincsenek a pontok között „hézagok”. Ha tehát veszünk egy olyan $I = [a, b]$ intervallumot, amin a függvényt értelmezzük, akkor a sűrűségi tulajdonság és a „hézagmentesség” csak akkor teljesül, ha az $[a, b]$ intervallum végtelenül osztható. Másképpen fogalmazva, vehetjük zárt intervallumok egymásba skatulyázott rendszerét, amelyre $I_{n+1} \subset I_n$ ($I_n = [a_n, b_n]$; $n = 1, 2, 3, \dots$) és ekkor ezen intervallumok metszete nem üres: $\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset$. Erre a tényre Cantor hívta fel a figyelmet, ezért Cantor-lemmának nevezik.

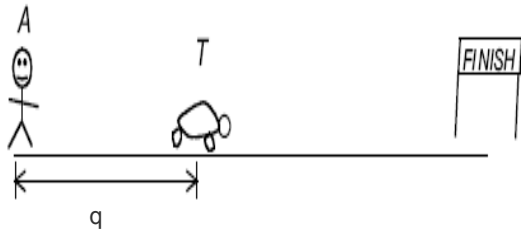
A matematikai analízis épületét nem lehet szilárdan megalapozni, ha nem posztulálunk egyet az alábbi állítások közül, amik egymásból körkörösén levezethetők és a valós számok tulajdonságait tükrözik (Trosztnyikov (1981)):

1. A valós számok olyan teljesen rendezett kommutatív testet alkotnak, amelyben bármely monoton és korlátos sorozat konvergens.
2. Az archimédeszi axióma és a fentebb ismertetett Cantor-lemma.
3. Az archimédeszi axióma és a Cauchy-kritérium: valamennyi sorozat, amelynek bármely két eleme közötti eltérés (bizonyos indextől kezdve) kisebb bármely előre megadott számnál (ún. fundamentális vagy Cauchy-sorozat), határértékkel rendelkezik.
4. Bolzano-Weierstrass-tétel: egy korlátos intervallum minden pontsorozata rendelkezik torlódási ponttal.
5. Heine-Borel-tétel: egy intervallum bármely nyílt lefedéséből kiválasztható egy véges lefedés.
6. Dedekind-axióma: ha két olyan diszjunkt valós számhalmazt tekintünk, amelyek egyesítése az összes valós számot tartalmazza, valamint az első halmaz összes eleme kisebb a második valamennyi eleménél, akkor létezik egy valós szám, amely nem nagyobb a második halmaz, illetve nem kisebb az első halmaz elemeinél.

Cantor érdeklődését a határérték vizsgálata a transzfinít matematikára irányította, amelyhez megalkotott egy új fogalmat is, a halmazét. Az aktuális és potenciális végtelen megkülönböztetése az antik görögökig nyúlik vissza. A végtelenről két különböző informális elképzelésünk él (Moore (1993)):



A végtelen azonban paradoxonokat vet fel. Ezt példázza Zénón egyik aporiája, amelyben a sebes Achilleus soha nem tudja utolérni a lassúbb teknőst, ha annak előnyt ad.



Legyen Achilleus (A) sebessége: $v = \frac{q}{t}$, a tek-

nőcé (T) pedig: $\frac{v}{2} = \frac{q/2}{t}$. Hogy megelőzze T-t,

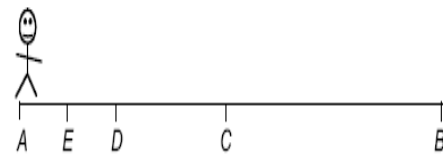
A-nak először q -t kell megtennie, ami t időt vesz igénybe, miközben T $\frac{q}{2}$ távolságot tesz

meg. Ezután A-nak $\frac{q}{2}$ megtételéhez további $\frac{t}{2}$ idő kell, de $\frac{t}{2}$ alatt T ismét megtesz $\frac{q}{4}$ utat.

A $\frac{q}{4}$ út megtételéhez pedig A-nak további $\frac{t}{4}$ idő szükséges, é.i.t. Achilleus tehát nem képes utolérni a teknőcöt.

Zénón gondolatmenete alapján azonban az is bizonyítható, hogy Achilleus soha nem éri el a célvonalat.

Valóban, hogy Achilleus elérje A pontból B pontot, el kell érnie $C = \frac{AB}{2}$ -t. Azután C-hez el kell érnie $D = \frac{AC}{2}$ pontot, é.i.t. Így AB között végtelen sok véges szakaszdarab van, és Achilleusnak végtelen időre van szüksége, hogy ezeket befussa.



Zénón gondolatmenetének két olyan előfeltevése van, amely cáfolható, és ami a „végtelen kicsik paradoxonát” eredményezi: 1) egy szakasz végtelenül osztható; 2) végtelen számú véges hosszak összege végtelen.

Az első előfeltevést már Arisztotelész megcáfolta. Úgy érvelt, hogy a természetben nem létezik csak potenciális végtelen. Achilleus és a teknőc között tehát a távolság felosztása csak potenciálisan végtelen lehet, azaz bármely n -re, fel lehet osztani a q távolságot n -nél több részre, azonban nem lehet aktuálisan végtelen, hiszen a versenypálya összhossza végül is véges. Ha két sorba írjuk fel a megtett utat és a hozzá tartozó idő összegét, akkor, ha az egyiknek van egy véges limitje, a másiknak is kell, hogy legyen. Így jutunk el a második érvhez és cáfolatáig. Számítsuk ki az Achilleus által megtett utat: S_{∞}

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}. \text{ A matematikusok kimutatták, hogy néhány}$$

végtelen sornak (amelyek részletösszegei sorozatának létezik határértéke), van véges összege. Esetünkben, S_{∞} pontosan ilyen mértani sor, és $S_{\infty} = 1$.

Azonban nem csak az osztással nyert „végtelen kicsik”, hanem a „végtelen nagyok” is okozhatnak gondot gondolkodásunknak. Tegyük fel, hogy az asztalon két kupacban ugyanolyan, de különböző számú cukorkákat helye-

zünk el, és a kicsi gyermekünket, aki nem tud számolni, felkérjük, válassza azt, amelyik több cukorkát tartalmaz. Hogyan tudja a gyermek, a számolás képessége nélkül, a helyes kupacot kiválasztani? A válasz: egy-egyértelmű megfeleltetéseket végez a két kupac cukorkái között. Mi is gyakran hozunk úgy döntést két vagy több, különböző mennyiségű elemet tartalmazó halmaz kiválasztásakor, hogy nem megszámloljuk, csupán összehasonlítjuk őket (pl. amikor sorba kell állni valamiért, és eldöntjük, melyik sorba állunk be, hogy leghamarabb célt érjünk). Nos, Cantor javasolta, hogy számok helyett, tekintünk egy alapvetőbb fogalmat, a dolgok összességét, vagyis a halmazt, és a számfogalom absztrakcióját helyettesítsük ilyen egy-egyértelmű megfeleltetéssel.

Azonban akárcsak számolás útján, a megfeleltetésen alapuló összehasonlításkor is, a végtelennel nehézségek adódnak. Ha például összehasonlítom a természetes számokat a páros számokkal, akkor azt találom, hogy azonos számosságúak:

$$\begin{array}{ccccccc} \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots \} \\ \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \updownarrow \\ \{ 0, 2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots \} \end{array}$$

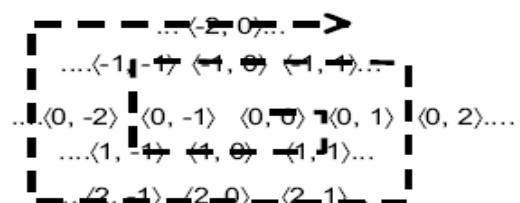
Ez ellentmondani látszik a „józan észnek”, hiszen a másodikat az elsőből úgy nyerjük, hogy elhagyjuk a páratlan számokat. Ugyanez igaz az egész és a természetes számok esetén is, csak most a természetes számokat bővítjük úgy, hogy hozzávesszük a negatív számokat. Az is megmutatható, hogy ugyanannyi egész szám-pár van, mint amennyi természetes szám.

Középről, a $\langle 0, 0 \rangle$ párból kiindulva, a nyíllal jelölt úton haladva, minden egész szám-párnak megfelel egy természetes szám:

$\langle 0, 0 \rangle \leftrightarrow 0$; $\langle 0, 1 \rangle \leftrightarrow 1$; $\langle 1, 1 \rangle \leftrightarrow 2$; é.í.t.

Ennek az állításnak a következménye, hogy

ugyanannyi racionális szám van, mint amennyi természetes szám, mivel a racionális számok egész szám-párokkal megadhatók. Ugyanakkor már az ókori görögök is ismerték a nem racionális számokat, bár ezeket kezelni nem tudták.



Az antik görögök szemlélete a geometrián alapult⁶⁷. A káosz: geometria nélküli világ. Anaximandrosznál a világ a határtalanból (*ἄπειρον*) születik meg és abban hal el. A létezés az, amikor a dolgok formát öltenek, határuk lesz, és így mérhetőek lesznek. E szemléleten alapulva, már a korai görög matematikusoknak (Püthagorasz, Theodórosz, Theaitetosz) is nehézséget okozott a „négyzetes irracionálisok” problémája. Az olyan szakaszoknak, amelyek által létrehozott négyzet területe bár egész szám, de nem négyzetszám, nincs közös mértéke a hosszegységgel (pl. $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt{5}$). Ezzel a problémával Platón a *Theaitetosz* dialógusaiban foglalkozik, de teljes kifejtését Euklidésznel az *Elemek* x. könyvében találjuk meg. A görögök a „négyzetes irracionálisokat” nem tekintették számoknak, mivel a geometriai szemléletet érvényesítve, e hosszakat nem mérhetőeknek, azaz számokkal ki nem fejezhetőeknek tartották.

Euklidész után, az antikvitás talán legnagyobb matematikusa, Archimédész egy új technikát, a „kimerítés módszerét” találta föl, amivel pl. a kör területét lehetett becsülni, és később az integrál fogalmának kialakításakor fedezték fel újra. Az egység sugarú körbe négyzetet rajzolunk, ami a körnek csak egy részét tölti ki, de ha az oldalak számát elkezdjük kétszerezni, akkor a kapott sokszögekkel egyre jobb kimerítést kapunk. A módszert alkalmazhatjuk a kör köré írt négyzetre is, és így a kör területére egy becslés adható, ami azonban egy olyan szám, aminek decimális jegyei nem szakadnak meg (mint pl. $\frac{3}{8} = 0,375$ esetén), illetve nem ismétlődnek (pl. $\frac{3}{11} = 0,272727\dots$). Kiderült tehát, hogy egy nem racionális számhoz jutottunk: ez a π (Szabó (1978), Van der Werden (1977)).

Az ilyen irracionális és a racionális számokat együtt valós számoknak nevezzük. A határérték-fogalom elemzésekor megállapítottuk, hogy a valós számoknak „sűrűn és hézagmentesen” kell elhelyezkedniük a számegyenesen, azaz bármely két racionális szám között végtelen sok irracionális szám van, és fordítva, bármely két irracionális szám között található racionális. Cantor azonban bebizonyította, hogy a racionális és irracionális számok halmaza között nem lehet egy-egyértelmű megfeleltetést létesíteni, tehát különböző számosságúak.

Elegendő az állítást a 0 és 1 közötti valós számokra igazolni. Az összes ilyen valós szám megadható végtelen tizedes alakban, és párosítható természetes számmal:

Konstruáljunk most egy olyan 0 és 1 közötti valós számot, ami nem szerepel a táblázatban. Haladjunk a táblázaton a

0	↔	0 . 3 3 3 3 ...	
1	↔	0 . 1 4 1 5 ...	
2	↔	0 . 4 1 2 ...	
3	↔	0 . 5 0 0 ...	...
⋮		⋮	...

⁶⁷ Ahogy korábban említettük, alternatíva már akkor is akadt. A püthagorasz szerint, számarányok fejezik ki a legtökéletesebb harmóniát. Amikor az oldalú négyzet átlójával (azaz a $\sqrt{2}$ -vel), amelyet kimondhatatlannak (*ἄπειρον*) nevezték összeomlott.

diagonális mentén lefelé, kezdve az első valós szám, első végtelen tizedes jegyétől (példánkban: 3, 4, 4, 0, stb.). Írjunk „3”-at, ha ez a tizedes jegy 4, és írunk „4”-et bármilyen másik szám esetén (így példánkban: 0,4334... valós számot nyerjük). Ez olyan valós szám, ami biztosan nem szerepel a táblázat jobb oldali számai között, mivel az első valós számtól az első, a második valós számtól a második tizedes jegyében, é.í.t. tér el.

Ezzel a tétellel megdőlt az a hiedelem, hogy csak egyféle végtelen létezik⁶⁸, és felvetette a végtelen halmazok összehasonlításának kérdését. A kontinuummal kapcsolatban a szemlélet számára számos egyéb nehezen elfogadható dolog bizonyítható. Például az, amit Cantor maga is így fogalmazott meg egyik, Dedekindhez írott levelében: „látom, de nem hiszem”, hogy az egységszakaszban ugyanannyi pont van, mint az egységnégyzetben (vagyis létezik a $[0, 1] \leftrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ egy-egyértelmű megfeleltetés). Döntő fontosságú az a tétel, hogy bármely H halmazra H összes részhalmazainak halmaza (ez $\wp(H)$, amit *hatványhalmaznak* nevezünk) H -nál nagyobb számosságú (Halmos (1981)).

A tételből következik, hogy nincs legnagyobb számosságú halmaz. De felvet egy kérdést is. Láttuk, hogy a racionális számok közötti űrt az irracionális számok töltik ki, így $\mathbb{R}$ méri egy kontinuum „méretét”: azt méri, hogy mennyire „közel” vannak egymáshoz a pontok az egyenesen. Ha teljes ez a kitöltés, akkor nincs a megszámlálhatónál (azaz $\text{card}(\mathbb{N}) \equiv \aleph_0$) nagyobb és a kontinuumnál (azaz $\text{card}(\mathbb{R}) \equiv \aleph_1$) kisebb számosság. Ezt *kontinuumhipotézisnek* (CH) nevezzük. A CH tehát röviden azt állítja, hogy $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. De igaz-e ez az állítás?

A Peano-féle axiómarendszert mintául véve, Zermelo 1908-ban megalkotta a halmazelmélet első axiómarendszerét, amit később Fraenkel egészített ki, így ma ZF axiómáknak nevezzük. Ezt szokás még a kiválasztási axiómával (AC) kiegészíteni⁶⁹, így nyerjük a ZFC halmazelméletet. A nemeuklideszi geometria a párhuzamossági axiómának a többitől való függetlenségének megmutatásával született. Hasonló szerepet játszik a halmazelméletben a CH.

⁶⁸ a természetes számok számosságát (amik a potenciális végtelent képviselik) megszámlálhatónak, az ennél nagyobb számosságú számokat pedig nemmegszámlálható számosságúnak nevezzük.

⁶⁹ A kiválasztási axióma azt állítja, hogy páronként diszjunkt halmazok tetszőleges rendszerének mindegyikéből kiválasztható egy elem. Ennek filozófiai nehézségeiről már az előző fejezetekben szoltunk.

A következő állítások fogalmazhatók meg:

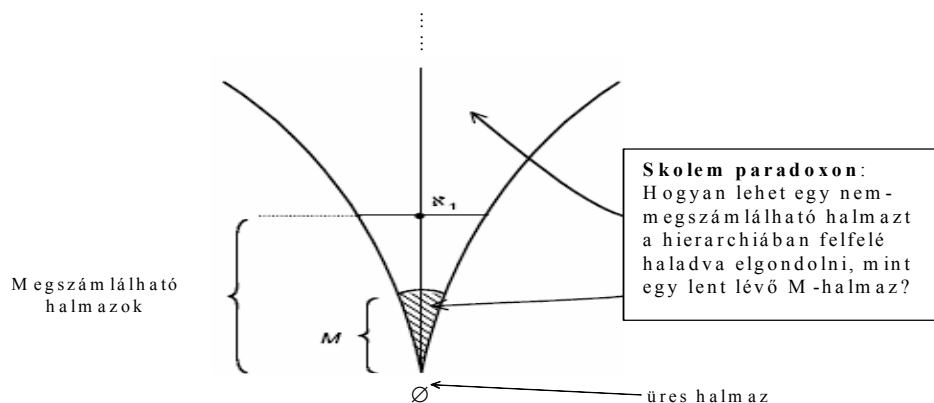
1. Gödel (1938): Ha ZF konzisztens, akkor a ZFC+CH is az.
2. Cohen (1963): Ha ZF konzisztens, akkor a ZFC+ nem CH is az.
3. Cohen (1963): Ha ZF konzisztens, akkor ZF + nem AC is az.

Tehát a halmazok körében több, logikailag egyenértékű elmélet építhető fel: a ZF és a ZFC, továbbá egy „cantori” (ZF+CH) és egy „coheni” (ZF + nem CH) halmazelmélet.

Cantor tulajdonképpen két korábbi dogmával szakítva (Euklidész azon axiómájával, hogy az egész nagyobb a résznél, valamint az aktuális végtelen létezésének tagadásával), egy új univerzumot, a transzfinit matematika világát hozta létre, amiben nemcsak a potenciális és aktuális végtelen között kell különbséget tenni, de gyakorlatilag nincs értelme többé aktuális végtelenről beszélni, mivel az aktuális végtelen is egyre nagyobb végtelenek sokaságát jelenti. A végtelenek végtelen hierarchiájához jutunk: $\aleph_0 \rightarrow \aleph_1 \rightarrow \aleph_2 \rightarrow \dots \aleph_\omega \rightarrow \dots$

Axiomatikusan a halmazelmélet nem más, mint egy $\langle L^1, ZFC \rangle$ formális elmélet, ezért a Löwenheim-Skolem tétel alkalmazható a halmazelméletre is. Feltéve, hogy a halmazelmélet konzisztens, így bár a ZFC „szándékolt” interpretációja alapján, a nemmegszámlálható halmazok végtelen hierarchiájához jutunk, ugyanakkor a Löwenheim-Skolem tétel értelmében, a ZFC interpretálható úgy is, mint ami csak megszámlálható dolgokról szól. Mármint, hogyan tudunk nemmegszámlálható halmazokat értelmezni megszámlálható halmazként? Ez a Skolem paradoxon.

Van egy technikai megoldás, ami hasonlít ahhoz, amit az „infinitezimálisok” értelmezésére alkalmaztunk a nem standard analízisben (Moore (1993)). A Löwenheim-Skolem tétel megengedi, hogy vegyünk a halmazok hierarchiájának aljából egy M-szeletet, amely megszámlálhatóan végtelen számosságú és ZFC interpretációjául szolgálhat: M elemeit mint ZFC „tárgyalási univerzumát” tekinthetjük, vagyis ezen értelmezés szerint, egy „M-halmaz” megfelel egy „ZFC halmaznak”. Így a végtelen halmazokról szóló állításokat interpretálhatjuk M-ben úgy, mint olyan állítások, amelyek megmondják, hogy bizonyos M-halmazok léteznek-e.



9. ábra

Végtelen halmazok végtelen hierarchiája

Most, például, az az állítás, hogy „ $\emptyset(\mathbb{N})$ nemmegszámálható” értelmezhető úgy M-ben, hogy van olyan M-beli M_1 halmaz, amely megfelel $\emptyset(\mathbb{N})$ -nek és van olyan M-beli M_2 halmaz, amely megfelel $\mathbb{N}$ -nek, de nincs olyan M-beli halmaz, amelynek elemei az M_1 és M_2 halmaz elemeiből képzett párok lennének.

Ezzel az értelmezéssel csak az a baj, hogy ZFC-re nézve interpretációfüggővé válik az, hogy egy halmaz megszámlálható-e vagy sem. Bármít, amit ZFC-ben megtehetünk, megtehetjük M-ben is. De mi tudjuk, hogy ZFC kiterjed M-en kívüli dolgokra is, vagyis kiterjeszkedik a teljes végtelen halmazhierarchia halmazaira is. Vajon amit mi teljes hierarchiának hiszünk, valójában nem egy *M szelet-e egy kibővített, nagyobb hierarchia aljának?

Az antik matematika számára az irracionális számok kezelése komoly gondot, az antik filozófia számára a végtelen problémája kihívást jelentett. A modern korról, a függvény fogalmára épülő matematika az infinitezimálisokkal szembesült, amiben az irracionálisok és a végtelen problémájával együtt ismét találkoztunk, de ezt a halmaz és az aktuális végtelen fogalmával sikerült áthidalni. Azonban ezek a problémák nem szűntek meg. A halmazelméletben az irracionálisok problémája a kontinuum-hipotézisben, a végtelen problémája a Skolem paradoxonban köszön vissza.

5.

A nyelv fogalmi használata a világot emberarcúvá teszi. Művelése, akárcsak a költészet: művészet. Egy lehetséges világot nyerünk általa, aminek értelme az

elméleteinken kívül van. Kanti alapon, ami dualista metafizikát képvisel, ez úgy magyarázható, hogy egy matematikai elmélet olyan emberi alkotás eredménye, amelyet az ember kognitív képességei határoznak meg.

Kant két episztemiológiai pozíciót kíván összehangolni. Egyik oldalról a racionalizmust, amely szerint az összes ismeretünk *a priori* jellegű: független az érzékeléstől és egyedül a tiszta észen alapul. A végtelen értelmünk révén fogjuk fel és a végtelen képzetét tapasztalat nélkül formáljuk. Másik oldalról az empirizmus azt hirdeti, hogy minden ismeretünk kizárólag érzékelésből adódik. Az abszolút végtelent nem tudjuk megragadni, nincs is rá igazán szükségünk. Kant szerint épp a matematikai fogalmak azok, amelyek átjárást biztosítanak a két pozíció között, mivel a matematikai ismeretek, mint *szintetikus a priori* ítéletek, nem a tapasztalatból származnak, hanem intuitív úton keletkeznek⁷⁰. Például a tér és idő fogalmai velünk született szemléleti formák, amelyek formálják tapasztalatunkat: a tárgyakat térben lévőnek gondolja az értelem és időben egymás után rendezi. A mi *a priori* tudásunk a geometriai igazságokról abból származik, hogy a tér a mi saját kreáciánk. Az aritmetika pedig az idő percepciójával hozható kapcsolatba: a döntő elem a rákövetkezés percepciója. A mi *a priori* tudásunk az aritmetikai igazságokról abból származik, hogy az idő is a saját mentális kreáciánk. Az intuíció és az értelem tiszta formái és kategóriái olyan „belénk épített” eszközök, amelyekkel az érzéki tapasztalat nyers adatait „feldolgozzuk”. A tiszta matematika tapasztalattól független, kognitív tevékenység. Alkalmazhatóságát az biztosítja, hogy ami intuitíve elgondolható, az *a posteriori* úton, azaz tapasztalatilag megkonstruálható.

A „nyers adatokat” adó világ önmagában *noumena*, az értelem számára soha meg nem ismerhető metafizikai (aktuális) végtelen. Mivel a világ megismerésében nem kerülhetjük el tudatunk beavatkozását, ami rendez és korlátoz, ezért számunkra csak a tapasztalatok világa, a *phenomena* adott. Az ember tehát metafizikailag véges lény egy metafizikailag végtelen világban. Kant antinómiákkal mutatja ki, hogy a fizikai, „phenomenális” világ mint egész, nem jelenik meg számunkra, csak részekben, vagyis nincs aktuális végtelen a fizikai világban. Ellenkező esetben, ugyanis, érvelhetünk a fizikai világ végtelen-

⁷⁰ Kant (1999).

sége mellett és ellen is. (Kant (1996)). Kant konklúziója: a világ mint egész nem létezik, hanem általunk konstruált.

A konstruktivisták, Kant nyomdokain haladva, tagadják azon fogalmak, logikai szabályok használatát, amelyek tudatilag nem konstruálhatók. Az ember, a rákövetkezés percepciója által, el tud képzelni tetszőlegesen nagy természetes számot, tehát elfogadható a potenciális végtelen fogalma, de a természetes számokat mint egészet, az aktuális végtelent már nem tudja senki elképzelni, tehát aktuálisan végtelen halmazok nem léteznek. Hasonlóan, el kell vetni a *tertium non datur* elvét, vagy az indirekt bizonyításokat, mert annak eldöntésére, hogy egy „A” állítás és tagadása közül melyik igaz, nem elég csak az egyiket igazolni vagy cáfolni: „A” kognitív konstrukciójának léteznie is kell.

A tér és idő *a priori* szerkezetére épülő kanti, intuicionista jellegű tiszta matematika alapjait a nemeuklideszi geometriák ingatták meg. Megdőlt a geometriai intuícióba vetett hit, ezután a geometriát már nem lehetett a geometriai szemléletre alapozni. A szemlélet a kalkulus (függvény-analízis) esetén is vagy a „cantori pokolba” visz vagy legalább is furcsa dolgokat produkál⁷¹. A kanti szemlélet válsága után, Kronecker és Jacobi, majd később az „igazi” intuicionisták, Brouwer és Heyting az aritmetikához való visszatérést szorgalmazták, a természetes számokat tekintették a matematikai konstruálás, és így az egész matematika alapjának. A Peano-féle klasszikus aritmetikához képest, született is egy alternatív, Heyting-féle intuicionista aritmetika.

Valójában a hilberti finitista program is kantiánus, amelyben először elkülönítjük az igazolásra nem szoruló aritmetikai állításokat: ezeket finit állításoknak nevezte Hilbert, amelyek mint „axiómák” evidensen konzisztens rendszert alkotnak⁷². Majd fel kell építeni az aritmetika átfogó, nem finit elemeket is magában foglaló rendszerét. Végül, be kell bizonyítani ezen átfogó rendszer konzisztenciáját, kizárólag a rögzített finit eszközöket használva. Bár Gödel óta tudjuk, hogy e konzisztencia bizonyítása lehetetlen, ennek az átfogó rendszernek és konstrukciójának jelentősége abban van, hogy így a rendszer nem pusztán jelentés nélküli formulák összessége, hanem a tartalmas matematikának része. A finitizmus alapján annyi

⁷¹ A konstruktivistáknak a matematikai analízis nagy része kidobható, de a folytonos függvényeket is sajátos módon kell kezelniük (vö. a 3.3-ban mondottakkal).

⁷² Hilbert ennek precíz leírását nem adta meg, Tait (1980) nyomán, aki ezt elvégezte, a rendszert primitív rekurzív aritmetikának nevezzük.

bizonyosnak látszik, hogy a szám fogalmának megragadása nem a szám ideáján, hanem konstrukciók olyan eszközén alapul, amelyek révén a számok megkaphatók.

Itt jegyezzük meg, hogy az intuicionista szemléletnek van a kantitól eltérő metafizikai megalapozása is, ami Husserl fenomenológiájára épül (Tieszen (1984)). E felfogás a neves matematikus, Weyl 1918-ban megjelent *Das Kontinuum* című művében kifejtett álláspontból indul ki, hogy a matematikai elméletek tárgyait nem szabad önkényesen posztulálni, hanem a szemléletben kell őket megragadni. A tudás eredete Husserlnél egy valamire irányuló intenció betöltődése. Mármint, mivel bármely jólformált matematikai kifejezésnek alakalmasnak kell lenni egy intenció kifejezésére, így az intenció nem csupán konkrét tárgyakra, hanem matematikai objektumokra, sőt matematikai ítéletekre is irányulhat. A matematika állításainak betöltődését a bizonyítások nyújtják, és ez szintén a logikai konstansok intuicionista értelmezésének helyességét sugallják. A fenomenológiai megközelítés azonban a kanti szemlélethez hasonlóan dualista jellegű, így az alábbi érvelésünk ugyanúgy igaz rá is, mint a kantira.

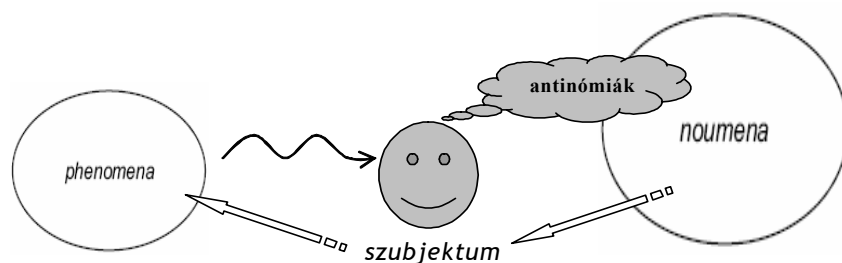
A matematikai paradoxonok forrása a kanti szemléletben az ember kognitív és kommunikatív korlátainak tulajdonítható. Az előbbi miatt szorgalmazták az intuicionisták a matematika „kiigazítását”, az utóbbi szorosan kapcsolódik a (tisztá ész által regulált) fogalomhasználatához és a bizonyításhoz. Kant szerint, a fogalom nem más, mint egy fogalmi pont és annak horizontja⁷³. Ebből, a rokonság-képzet alapján, fogalmi hierarchiát konstruálhatunk: a fogalom hatókörét specifikálva haladunk a hierarchián lefelé, és a homogenitás alapján felfelé. Kant a fogalmak kétféle használatát különbözteti meg: van a transzcendentális használat, ha a fogalmat magukra a dolgokra vonatkoztatjuk, és az empirikus használat, ha pusztán a jelenségekre, azaz valamely lehetséges tapasztalat tárgyaira. Egy matematikai tétel akkor bizonyul igaznak, ha igazolják, ami végül is *a priori* módon történik. Azonban szintetikus módon lehet a tétel érvényességi tartományát meghatározni, a kivételek felkutatását és gondos kizárásukat a tétel megfogalmazásakor (Filep (1997)).

Ezt a „kivétel-kizáró” módszert támadja Lakatos (1981) élesen, és helyette a Seidelnek tulajdonított „bizonyítások és cáfolatok” módszerét ajánla. Úgy gondolja, hogy a hagyományos matematikafilozófiai (platonista, formalista, intuicionista és logicista) szemléletek az euklideszi hagyományt folytatják, amik a matematikát tévedhetetlennek tekintik. A matematika tévedhetetlensége az euklideszi dogmák ledöntésével szertefoszlott. A „kivétel-kizáró” mód-

⁷³ Kant (1996), p. 510

szer viszont Euklidész e „rossz szellemét” továbbra is fenntartja, mivel kritikus problémahelyzetekben meggátolja a formálódó fogalmak, és így az új tételek és elméletek fejlődését. El kell fogadni Seidel 1847-ben megfogalmazott gondolatát, hogy egy matematikai bizonyítás akkor is elfogadható lehet, ha nem hibátlan. Ennek szellemében, a *Bizonyítások és cáfolatok*ban, Lakatos a matematikát végső soron történeti-társadalmi produktumnak tekinti, és – a platóni dialógusokat felelevenítve – a matematikát fejlődésében vizsgálja. Vitatja a matematikai formalizmust, támadja azt a dogmatista álláspontot, hogy a matematika tévedhetetlen, cáfolhatatlan tudomány volna. Bizonyítások és cáfolatok dialektikájában, egy racionálisan rekonstruált történetet mutat be.

A „bizonyítások és cáfolatok” módszere egy új matematikai módszertant képvisel, amelynek centrális jelentősége, hogy a matematikát fejlődésében vizsgálja, amibe belefér az intuíció botladozása, és hogy esetleg zsákutcába jut. Az „élő matematika” azonban nem csak a „kivétel-kizáró” módszeren, hanem a kanti matematikafilozófiai szemlélet metafizikai dualizmusán is megfelelnek. E szemlélet, a platóni barlanghasonlattal élve, úgy írható le, hogy a szubjektum számára felfogható világ, a *phenomena*, nem más, mint a szemléletnek tulajdonítható „noumenális” árnyékvilág (10. ábra).



10. ábra

Válthat-e a szemlélet a matematikai megismerés forrásává, ha olyan kérdésre sem tudunk válaszolni, hogy mi a „2”? A 2.2. fejezetben ismertettük, hogy Frege a számokat speciális objektumoknak tekintette: például, a „2”-es szám nem más, mint az összes kételemű osztályok osztálya. Láttuk, hogy e fregei értelmezéssel kapcsolatban vannak ellenérvek. Lehet-e akkor a „2” halmaz? A halmazelméletben a „2”-t mintahalmazok képviselik. Zermelo szerint a „2” a $\{\{\emptyset\}\}$ halmazzal azonos, Neumann szerint a $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ kételemű halmazzal, de lehet, hogy egyik sem. A számokat tekinthetjük olyan általánosított típusoknak is, amelyek példányai a

számlálásra szolgáló számjelpéldányok. Ehhez elegendő egyetlen jel: $\sqcup$, ami megfelel a 0-nak, és újabb jel konkatenációjával, ami a rákövetkezésnek felel meg, tetszőleges véges $\sqcup$ -szimbólumsorozathoz jutunk: $\sqcup, \sqcup\sqcup, \sqcup\sqcup\sqcup, \dots$. Két szimbólumsorozat, mint a szemlélet tárgyai, akkor tartoznak ugyanabba a típusba, ha ugyanazt a számot fejezik ki: ha mindkétben csak a $\sqcup$ -jel van; vagy a jobb szélén álló $\sqcup$ -jelek elhagyásával, a kapott sorozatok ugyanabba a típusba tartoznak. A „2” típusnak tehát a $\sqcup\sqcup$ -szimbólumsorozat felel meg. Azonban, bárhogyné fogjuk is fel a természetes számokat, ebből következnie kell a matematikai indukciónak⁷⁴. Ez pedig szétfeszíti a kanti kereteket, mivel az indukció általános fogalmának megértése nem ad semmilyen tárgyat a „phenomenális” világban (Parsons (1979)). A mai felfogás szerint, nem az a lényeg, hogy a számok miképpen jelennek meg a szemléletben, hanem hogy a számsor rendelkezik-e a számok struktúrájával, amellyel rekurzív definíciók adhatók meg.

Az élő és permanensen formálódó matematikai elméletnek jobban megfelel egy metafizikailag monista szemlélet, amelyben persze ismét csak nem ragadhatjuk meg a „teljes igazságot”, hanem csupán részaspektusokat, amelyek bizonyos hely és történeti feltételek között és bizonyos összefüggésekben nyilvánulnak meg számunkra. A mi *Gestaltunkban*, ami a világegész egy komplex része (Naess (2005)), mindig megmutatkozik az is, amiről hallgatunk. A *Gestaltban* Wittgenstein egy nyelvi játékot, az utóbbiban magát a misztikumot ismerné fel. A fogalmak, a szakmai axiómák, a tételek és bizonyításaik gondos és folyamatos vizsgálata révén, a Gestalt áttekinthetőbbé, a misztikum pedig közelebb kerül hozzánk. Ebben kitüntetett szerep jut a fel-felbukkanó paradoxonoknak és ellenpéldáknak, amelyek a Gestalt korlátainak, a fogalmi kiszakítotttságnak jele.

Gödel és Chaitin szelleme nyilvánul itt meg ismét. Gödel nyomán, a formálisan szigorú matematikai rendszer képtelen igazolni magát saját elemein, és bármilyen külső forrásokból származó normákra való hivatkozás is egy olyan rendszerre referál, amelynek ugyanez a sorsa. Másképpen fogalmazva,

⁷⁴ A természetes számsornak (a „számolásnak”), amelyet értelmezni kívánunk, vannak elvárt tulajdonságai: i) a számsornak van kezdőeleme; ii) a számsor mindig folytatható, azaz a számsor minden elemének van rákövetkezője; iii) a sorban nincs ismétlődés (a Peano aritmetikában ezt a tulajdonságot két axióma írja le); iv) bármely számhoz eljutunk számlálással. Ez utóbbi tulajdonsághoz a matematikai indukcióra van szükségünk. Ez posztulálja, hogy a kiinduló elemből, a rákövetkezést használva, eljuthatunk minden természetes számhoz, és csakis azokhoz juthatunk el.

egy rendszer vizsgálatának bármely vizsgálata csak relativizálja a rendszert. Ugyanakkor, ez a „relativizáció” nem feltétlenül destabilizál, és a rendszer komplexitását tükrözi.

Spencer Brown (1994) egy olyan kalkulust dolgozott ki, amelyben azt mutatja meg, hogy amikor egy teret átmetszünk vagy részekre bontunk, akkor egy világot konstruálunk. Például, egy élő organizmus bőre elválasztja egymástól a belsőt a külsőtől. Ugyanezt teszi a körvonal a síkon. Így egy világ konstruálásának első lépése, hogy egy distinkciót, megkülönböztetést teszünk („*draw a distinction*”). Ezután megjelöljük a distinkció egyik oldalát (pl. a kör belső részét), míg a másik oldal jelöletlen állapotban marad. A megjelölt állapoton további műveletek végezhetők, distinkciókat halmozva distinkciókon addig, amíg a világ formája kialakul. Minden így megkonstruált világ egyedi formája a kiindulási pontjára kontingentál, vagyis a rendszer fejlődési története meghatározza a rendszer keretét, formáját. Ezek a mintázat-világok lehetnek formálisak (logikailag vagy matematikailag leírt), illetve fizikaiak (mondjuk biológiaiilag adottak). Spencer Brown hangsúlyozza, hogy kalkulusa nem logika, nincs összekapcsolva egy szemantikai értékrendszerrel, vagyis a kalkulus állításaival kapcsolatban nem vethető fel az igazság kérdése. Csupán egy műveleti kalkulust, egy környezetfüggetlen nyelvet (vagyis Chomsky-féle 2-típusú grammatikát) hoz létre, amely a Boole-algebra kétértékű sémáját kapcsolja össze az aritmetikával úgy, hogy közben csak egyetlen jelet használ föl.

Az alapszimbólum, az egyetlen jel, amit Spencer Brown felhasznál: , amelyet keresztnek („mark” és „cross”) nevez. Ez a jel jelöli a distinkció megtételét. Az egymást nem metsző kereszt mintázatait kifejezéseknek nevezi. A kalkulusban előírjuk, hogy i) egy adott kifejezés fölé kereszt írható; ii) bármely két kifejezés összekapcsolható (konkatenációval), és iii) a distinkció tökéletesen felosztja a világot. Az elmélet két axiómája a következő:

A1 (a megnevezés axiómája): Két szomszédos kereszt, azaz amelyek egyike sincs a másikban, egy keresztbe írható, vagy egy jel kiterjeszthető két szomszédos keresztbe:

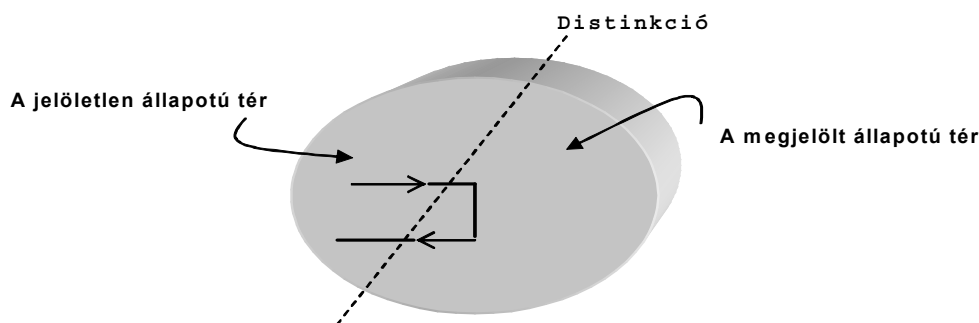
$$\begin{array}{|} \hline \hline \end{array} = \begin{array}{|} \hline \hline \end{array}.$$

Vagyis, ha egy distinkciót kétszer teszünk meg, az ugyanolyan hatású, mintha egyszer tettük volna. A jelöletlen állapoton történő kétszeri keresztezés nem megkülönböztethető az egyszerűtől.

A2 (a keresztezés axiómája): Két nem szomszédos kereszt, vagyis amelyben az egyik kereszt a másikba esik, jelöletlen állapotot („Semmit”) eredményez:

$$\begin{array}{|c|} \hline \hline \hline \end{array} = .$$

A jelöletlen állapotból történő keresztezés megjelölt állapotba visz. Az ismételt keresztezés a megjelölt állapotból visszavisz a jelöletlen állapotba (11. ábra).



11. ábra

A tér, amelyben ismételt distinkciót teszünk

Az A1 és A2 axiómák ismételt alkalmazásával, bármely kifejezés, amely kizárólag kereszteket tartalmaz, egyszerűsített kifejezésre (a kifejezés szimplifikáltjára) redukálható, legyen akár megjelölt, akár jelöletlen állapotú. Az így nyert formális elmélet alapvető metatétele⁷⁵, hogy egy kifejezésnek egyértelmű szimplifikáltja van; és az A1 és A2 ismételt alkalmazása, megjelölt és jelöletlen állapoton, nem eredményezhet olyan kifejezést, amelynek szimplifikáltja különbözik a kiinduló állapottól.

Spencer Brown munkájának, az alább elmondottakon túl, az is a filozófiai jelentősége, hogy túlmutat az arisztotelészi, fogalmi gondolkodáson, és modern formában, dinamizálva, feleleveníti az „archaikus”, mintákban (képekben) történő gondolkodást (vö. 1. fejezet). Valójában a metaelméleti vizsgálatok, amelyek a rendszerek vizsgálatának rendszeren kívüli vizsgálatai, olyan rendszerek, amelyek rájuk jellemző distinkcióikon keresztül reprodukálják önmagukat. S ezek a rendszerek interakcióban vannak egymással, minták fejlődnek ki, amelyeknek mindig vannak megjelölt és nem megjelölt részei. A nem megjelölt állapotok nem részei a rendszernek, de hozzá tartoznak ahhoz a világhoz, amelyet a rendszer konstituál.

⁷⁵ vö. T3-4, in Spencer Brown (1994).

Spencer Brown az önreferencián alapuló paradoxonok „feloldására” is mutat egy módszert kalkulusában, ami részint ötvözi Tarski (a tárgy- és metanyelvi szint megkülönböztetésével átvágni az önreferenciát) és Russell (típuselméleti) megoldását, ugyanakkor ezek valós alternatíváját is jelenti. Induljunk ki az $x^2 = ax + b$ másodfokú egyenletről, amelynek ismert a megoldási módszere. Az egyenletet átírhatjuk $x = a + b/x$ formába, amely „önreferens” abban az értelemben, hogy x a kifejezés jobb oldalán újra megjelenik. Ezt kihasználva, az egyenletet felírhatjuk x végtelen visszahelyettesítésével a következő módon: $x = a + b / (a + b / (a + b / (a + b / (a + \dots))))$. Jelöljük ezt a kifejezést: $\overline{\overline{a + b}}$. Amikor a másodfokú egyenletnek vannak valós gyökei, akkor ez a végtelen kifejezés valós értékhez tart. Például, ha $a=b=1$, akkor a $\overline{\overline{1 + 1}}$ kifejezés az $x^2 = x + 1$ másodfokú egyenlet pozitív gyökéhez tart: $(1 + \sqrt{5})/2$.

Ugyanakkor, ha $D = a^2 + 4b < 0$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek nincs valós megoldása. Például, Spencer Brownt követve, az $x = -1/x$ másodfokú egyenlet két lehetséges gyöke $+1$ és -1 , behelyettesítéssel $+1 = (-1/+1) = -1$, illetve $-1 = (-1/-1) = +1$, mindkettő ellentmondáshoz vezet a valós számok körében. Ha azonban bevezetjük az $i = \sqrt{-1}$ képzetes kifejezést, akkor az $x = -1/x$ egyenletet ismét felírhatjuk az alábbi végtelen kifejezésbe: $\overline{\overline{-1}}$ $= -1 / (-1 / (-1 / (-1 / \dots)))$.

Spencer Brown analógiát vél felfedezni az algebra és Boole-féle logika között, és bevezeti az imaginárius Boole-féle igazságértéket: a kalkulusában felírható a

$$J = \overline{\overline{J}}$$

kifejezés, amelyet felfoghatunk az $x = -1/x$ egyenlet analogonjaként. Ha veszünk egy önreferens mondatot, pl. „ez a kijelentés hamis”, akkor csupán az igaz vagy hamis két igazságérték mellett, ez a mondat paradoxon – igaz, ha hamis, és hamis, ha igaz – egy érvelési térben, de megjelenhet paradoxon nélkül is, térben és időben. A

$$J = \overline{\overline{J}}$$

kifejezésben, ha J megjelölt állapottal egyenlő, akkor az egyenlőség azt implikálja, hogy J jelöletlen állapottal egyenlő; vagy ha J jelöletlen állapottal egyenlő, akkor az egyenlőség azt implikálja, hogy J megjelölt állapottal egyenlő :

$$J = \overline{\overline{J}} \rightarrow J = \overline{\overline{J}} = \text{ ;}$$

vagy

$$J = \text{ } \rightarrow J = \overline{\overline{J}} \cdot$$

Az ilyen önreferens kifejezést ugyanúgy felírhatjuk végtelen visszahelyettesítéses alakban, ahogy azt a $x = -1/x$ egyenlet esetén tettük, és ezt nyerjük:

$$J = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \dots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}.$$

Mivel a keresztezés axiómája (A2) alapján

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = ,$$

ezért azt látjuk, hogy J véges megközelítése a megjelölt és jelöletlen állapotok között oszcillál:

Térbeli látásmód: Temporális látásmód:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} & = & \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \end{array}$$

Mármost J-t kétféleképpen nézhetjük: az egyik tisztán térbeli látásmód – egymásbázárt keresztek végtelen sorozata; a másik tisztán temporális látásmód – megjelölt és jelöletlen állapotok egymást váltó sorozata. Amikor J-re úgy tekintünk, mint időben oszcilláló állapotok sorozatára, feloldjuk a paradoxont. J egy olyan önfejlődő autopoetikus rendszernek tekinthető, amelyben egy új állapot emelkedik ki J egymásba helyettesített formájában. Spencer Brown szerint, ez a látásmódváltás olyan, mint amikor a valós számok köréből átlépünk a komplex számok körébe.

Végül is egy sajátos Gestalt alapú gondolkodáshoz lyukadunk ki ismét, amelyben a megjelölt állapotok adják a rendszert, vagyis a világegész azon részét, amit vizsgálunk, de ebben megmutatkoznak a jelöletlen állapotok is. Egy kétértékű informális szemantikai háttérrel és egy önfejlődő rendszert kapunk, amely fogalmai, axiómái, tételei, bizonyításai által meghatározva, rekurzíve generálja önmagát. A rendszerfejlődés elemzésének – Chaitin tétele alapján – határozott korlátai vannak.

A halmazelmélet ZF rendszere is felfogható egy olyan önfejlődő, autopoetikus rendszerként, amelynek axiómái a végtelen halmazok végtelen hierarchiáját állítja elő.

Vegyük sorra az axiómákat:

(ZF1): Meghatározottsági axióma: $x=y \equiv (\forall z) (z \in x \equiv z \in y)$;

(ZF2): Üres halmaz axióma: $(\exists x)(\forall y) \sim (y \in x)$;

- (ZF3): Páraxióma: $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w) (w \in z \equiv (w = x \vee w = y))$;
- (ZF4): Unió axióma: $(\forall x)(\exists y)(\forall z) (z \in y \equiv (\exists w) (w \in x \ \& \ z \in w))$;
- (ZF5): Hatványhalmaz axióma: $(\forall x)(\exists y)(\forall z) (z \in y \equiv (\forall w)(w \in z \supset w \in x))$;
- (ZF6): Végtelen halmaz axiómája: $(\exists x)(\emptyset \in x \ \& \ (\forall y)(y \in x \supset y \cup \{y\} \in x)$;
- (ZF7): Kijelölés axiómája: $(\forall x)(\neg x = \emptyset \supset (\exists y)(y \in x \ \& \ \neg(\exists z)(z \in y \ \& \ z \in x)))$;
- (ZF8): Helyettesítés axiómája: $(\forall x)(\exists y)F(x,y) \supset (\forall z)(\exists w)(\forall v)(v \in w \equiv (\exists u)(u \in z \ \& \ F(x,y)))$, ahol $F(x,y)$ L^1 egy olyan formulája, amely minden x halmazhoz pontosan egy y halmazt rendel.

A ZF első két axiómával együtt jár az üres halmaz fogalma, ami a hierarchia legalsó pontja. A harmadik és negyedik axiómát használva, (ZF6) révén tudjuk megkonstruálni az $\emptyset$; $\{\emptyset\}$; $\{\{\emptyset\}\}$; $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; $\{\{\{\emptyset\}\}\}$; $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$; $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$; $\{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; $\{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; é.í.t. sorozatot, aminek tagjai x -ben vannak. Ebben a konstrukcióban (ZF8) alapján tudunk új halmazokat létrehozni, amelyeknek hatványhalmazait képezve, (ZF5) révén, már a végtelen halmazok végtelen hierarchiájához jutunk.

Megjegyezzük, hogy az aritmetikát is értelmezhetjük autopoetikus rendszerként, ahol a természetes számokat a Peano-axiómák generálják. Mindkét rendszer autopoetikus, sajátos rekurzív formával rendelkezik, és közös absztrakt tartalmuk a természetes számok. Ez egyúttal a két elmélet között sajátos viszonyt is teremt. A halmazelméleti rendszer mint autopoetikus rendszer gyakorlatilag abszolút végtelenséget hordoz magában. Amikor azonban vizsgálat tárgyává tesszük, distinkciót hajtunk végre rajta, ezáltal lesz egy olyan „megjelölt” része, ahol a rendszer potenciálisan végtelen lesz (ezek az M-halmazok), de a „jelöletlen” állapotok is kitűnnek benne. A halmazelmélet és a Peano-elmélet közötti viszony alapján, nem csodálkozhatunk azon, hogy az aritmetikának is van „jelöletlen” része, vagyis nemmegszámálható modellje.

Ha jól meggondoljuk, azonban éppen ez a sajátosság teszi a monista és dualista metafizikai értelmezést különbözővé. A problémamegoldásban a dualista szemlélet különbséget tesz faktuális és észlelt helyzet között, feladattal pedig e két helyzetnek közelítésében látja. Ezzel kénytelen felosztani az állításokat elsődlegesre, ti. azok a fundamentális kifejezések (pl. axiómák), amikből bizonyítások indulhatnak ki, és másodlagosra, amiket igazolunk. A dualista a világról szóló korlátozott ismeretét kognitív és fogalmi okoknak tulajdonítja. A paradoxonokat olyan rejtélyeknek tekinti, amiket fel kell számolnia. A monista szemlélet nem tesz ilyen distinkciót, hanem állandóan benne van a

problémában. E szemléletben egy axiomatikus rendszer kontingens: nem fejez ki logikai szükségszerűséget, mégis úgy működik, mintha valami szükségszerűséggel bírna. A rendszert nem lehet evidenciával vagy bizonyítással alátámasztani, de megcáfolni sem, mert ezek nem csak az igazolás, hanem az érvelés feltételeit, tehát bizonyos informális egzisztencia-előfeltevéseket jelentenek.

Ahhoz, hogy végtelen halmazokkal vagy, mondjuk, lineáris terekkel kényelmesen dolgozni tudjunk, a halmazelmélet ZFC axiómarendszerét kell használnom. Gödel és Cohen eredményeiből tudjuk, hogy ehhez jogom van. Nem csodálkozhatom ugyanakkor azon, hogy a halmazelmélet ZFC axiómarendszerében dolgozva, más eredményhez jutok, mint aki ZF-ben dolgozik. De mi van akkor, ha egyenesen egymásnak ellentmondó állításokat kapunk? Példák:

- Ha adva van akárhány (véges vagy végtelen) de legalább egy természetes szám, akkor van közöttük legkisebb. Ezt a matematikusok úgy fejezik ki: a természetes számok $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ rendezett halmaza jól-rendezett, azaz minden nem üres részhalmazának van legkisebb eleme. Nem ez a helyzet az egész számok esetén, hiszen például a $\{-1, -3, \dots\}$ olyan részhalmaz, amelynek nyilvánvalóan nincs legkisebb eleme. Hasonló okokból $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ sem jól-rendezett. Csakhogy Zermelo 1904-ben bizonyította azt a tételt, hogy ha igaz a kiválasztási axióma, akkor minden halmaz jól-rendezhetővé válik, tehát a ZF-ben nyilvánvaló állításokkal szemben bizonyítható tételeket nyerhetünk ZFC-ben.
- ZF-ben nem, de Zermelo említett tételét felhasználva, ZFC-ben már megmutatható, hogy minden vektortérnek van bázisa. Ezt kihasználva, bizonyítható az a meglepő állítás, hogy az $f(x) = x$ identitás-függvény előáll két periodikus függvény összegeként.
- Végül, említsük meg a kör négyyszögesítésének problémáját, ami azt a feladatot jelenti, hogy szerkeszthető-e adott kör területével egyenlő területű négyzet. A feladat euklideszi szerkesztéssel nem oldható meg. Ezt az ókorban is sejtették, de csak 1882-ben bizonyította be Lindemann azt, hogy a π szám transzcendens, vagyis nem gyöke semmilyen racionális együtthatójú polinomiális egyenletnek. Néhány évtizeddel korábban ismert volt, hogy amennyiben a π irracionális, akkor a kör négyyszögesítése euklideszi szerkesztéssel lehetetlen. Ugyanakkor, a Banach-Tarski paradoxon (ld. 4.1. szakaszt) témakörébe tartozó tételként, Laczkovich mutatta meg a kör modern négyyszögesítésének lehetőségét (Laczkovich (1998)): egység területű négyzet felbontható véges darabokra úgy, hogy ezekből átfedés és hézag nélkül, egység területű körlap rakható össze.

Minden matematikai állítás megváltozhat, az egyik Gestaltban a rendszer keretfeltételéhez tartozhat, a másikban viszont a rendszer elemévé válhat. Mind-

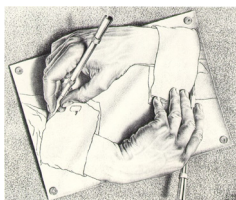
ez oda vezet, hogy a matematika szétesik egymáshoz koherensen nem illeszkedő elméletekre, ágakra. Az egyik elméletben bizonyított tételt csak alapos vizsgálat után szabad felhasználni a másikban, mivel minden matematikai fogalom az új elméletben Gestalt-váltásokat eredményezhet.

A helyzetet e fejezet elején elmondott példával szemléltethetjük. Vegyük a következő mondatot: „ez a magas fa komor”. A dualizmuson alapuló gondolkodás a fa magasságát a fa objektív sajátságának, vagyis elsődleges tulajdonságnak ismeri el, míg a fa komorságának tulajdonságát szubjektívnek, lényegében másodlagos tulajdonságnak tekinti. Holott, érvelhetünk úgy, hogy a két tulajdonság között nem ontológiai, hanem komplexitásbeli különbség van. A fa magassága leírható az $M[p, q]$ fogalommal, ahol a jellemző tulajdonságok: p a magasságegységek száma és q az egység fajtája, és a fa komorsága a $K[a, b, c, \dots]$ fogalommal, ahol a tulajdonságok hihetetlenül nagy száma sejlik fel, pl. a lehet a fa helyzete, b a szemlélő helyzete, c a szemlélő érzelmi állapota, stb.

A „fa magas” állítás azt jelenti, hogy „meghatározott külső feltételek mellett a fa magas számomra”. Az azonos kultúrájú vagy szakértelmű emberek hasonló szubjektív állításokat tesznek a fa magasságáról, és így ez az állítás interszubjektívé válik, amit a közgondolkodás objektívnek minősít. A „fa komor” állítás viszont nem kap hasonló egyetértést másoktól, mert a jellemzők nagy száma miatt ezt az álláspontomat nagy valószínűséggel nem fogják mások osztani, így szubjektív minősítést kap. Nyilvánvaló ugyanakkor, hogy a szubjektum szempontjából a két állítás között nincs különbség.

A matematika formális rendszereinek nincs szüksége egzisztenciafeltevésre, hiszen egy distinkcióból kiindulva, a matematikai apparátus automatikusan termeli komplex formáit. Komoly kétség vetődik fel ugyanakkor az igazság klasszikus felfogásával kapcsolatban, amely szerint elegendő egy mondat igazságának feltételeként elfogadni, hogy egy mondat bizonyított-e vagy sem. Mivel egy mondat jelentését meghatározza, hogy miképpen lehet bizonyítani és hogyan használjuk fel őket a bizonyításban, osztjuk Dummett álláspontját, hogy a matematikusnak érdemes intuicionista (konstruktivista) álláspontra helyezkednie. Ugyanakkor, a kiindulásul vett definíciók és axiómák

rögzítése, ezzel az egész formális konstrukció, olyan egzisztencia-előfeltevésekkel jár, ami leválaszthatatlan az elmélet informális háttéréről, amibe – Putnam szavaival – a matematika „noumenális jóságai” is beletartoznak. Ez a legsúlyosabb érv a matematikai formalizmus ellen. A matematikus a platonizmus-konstruktivizmus dilemmájában van, mert az elméleten belül konstruktivista, az elméleten kívül platonista módon kénytelen szemlélni a tárgyát, és a paradoxonok jelzik, ha átlépi a határt. A formális matematikában egyszerre van jelen tartalom, forma és viszony, és olyan önfejlődő rendszert alkot, ami túlnövi bármely alkotójának képzeletét.



Bibliográfia

- Albert, H. (1985): **Treatise on Critical Reason**. Princeton: Princeton University Press.
- Arisztotelész (1993): **Kategóriák**. Budapest: Kossuth Könyvkiadó.
- Arisztotelész (2002): **Metafizika**. Szeged: Lectum Kiadó.
- Arnold, V. I. (1985): **A mechanika matematikai módszerei**. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
- Beke T. (1989): **Hogyan csináljunk aranyat, avagy a Banach-Tarski paradoxonról**. Középiskolai Matematikai Lapok, 11. szám.
- Bell, J. S. (1987): **Speakable and unspeakable in quantum mechanics**. Cambridge: Cambridge University Press.
- Blohincev, D.I. (1987): **Kvantummechanika**. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Boolos, G. (1996): **The Standard of Equality of Numbers**. In.: Demopoulos (1996)
- Boolos, G., Heck, (1996): **The Development of Arithmetic in Frege's Grundgesetze der Arithmetik**. In.: Demopoulos (1996)
- Brown, J. R. (1999): **Philosophy of Mathematics**. London: Routledge.
- Coutturat, L. (1966): **La logique de Leibniz**. Paris: F. Alcan, 1901. (Reprint).
- Curry, B. (1977): **Foundations of Mathematical Logic**. New York: Dover Publications.
- Csaba F. (szerk.) (2003): **A matematika filozófiája a 21. század küszöbén**. Budapest: Osiris Kiadó.
- Davidson, D. (1984): **Inquiries into Truth and Interpretation**. Oxford: Oxford University Press.
- Davis, P. J. és Hersh, R. (1984): **A matematika élménye**. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
- Descartes, R. (1993): **Értekezés a módszerről**. Budapest: Ikon Kiadó.
- Demopoulos, W. (ed.) (1996): **Frege's Philosophy of Mathematics**. Cambridge: Harvard University Press.
- Dennett, D. (1995): **Darwin's Dangerous Idea**. New York: Simon & Schuster.
- Dimond, C., ed. (1989a): **Wittgenstein's Lecture on the Foundations of Mathematics, Cambridge 1933**. Chicago: University of Chicago Press.
- Dimond, C., ed. (1989b): **Wittgenstein's Philosophy of Mathematics, Cambridge 1933**. Chicago: University of Chicago Press.
- Dummet, M. (1978): **Truth and Other Enigmas**. Duckworth.
- Dunham, W. (1990): **Journey through Genius. THE GREAT THEOREMS OF MATHEMATICS**. New York: Penguin Books.
- Einstein, A. (1978): **A speciális és az általános relativitás elmélete**. Budapest: Gondolat kiadó.
- Fazekas A. I. (2000): **A modern létezésfogalom kialakulása**. Frege nézetei a 'van' kifejezés különböző értelmű használatáról. Budapest: Aletheia Kiadványok.
- Fazekas A. és Málik J. Z. (1999): **Gondolat, nyelv, tudomány**. Gond 1999/21-22, p. 143-170.
- Feyerabend, P. K. (1991): **Three Dialogues on Knowledge**. Oxford: Blackwell Publisher.

- Filep L. (1997): **A tudományok királynője**. Budapest-Nyíregyháza: a Typotex és a Bessenyei Könyvkiadó közös kiadása.
- Forrái G. (2004): **Locke és Kant a matematika filozófiájáról**. Világosság, 10-11-12., p. 115-124.
- Frege, G. (1980): **Logika, szemantika, matematika**. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Frege, G. (1999): **Az aritmetika alapjai**. Budapest: Áron Kiadó.
- Freud R. (szerk.) (1981): **Nagy pillanatok a matematika történetében**. Budapest: Gondolat Kiadó.
- George, A., Velleman, D. J. (2002): **Philosophies of Mathematics**. Oxford: Blackwell.
- Grover, D. (1992): **A Prosentential Theory of Truth**. New Jersey: Princeton University Press.
- Halmos, P. (1981): **Elemi halmazelmélet**. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
- Jaglom, I. M. (1985): **Galilei relativitási elve és egy nemeuklideszi geometria**. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Jegorov, I. P. (1986): **Geometria**. Budapest: Tankönyvkiadó.
- Jánossy L. és Elek T. (1963): **A relativitáselmélet filozófiai problémái**. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Jánossy L. (1973): **Relativitáselmélet a fizikai valóság alapján**. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Jaśkowski, S. (1948/1969): **Propositional Calculus for Contradictory Deductive Systems**. *Studia Logica*, 24, p. 143-157.
- Kalmár L. (1957): **Az ún. megoldhatatlan matematikai problémákra vonatkozó kutatások alapjául szolgáló Church-féle hipotézisről**. Az MTA Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei, 7.
- Kant, I. (1996): **A tiszta ész kritikája**. Szeged: Ictus.
- Kant, I. (1999): **Prolegomena**. Budapest: Atlantisz.
- Kenny, A. (1995): **Frege**. London: Penguin Books.
- Kleene, S. C. (1936): **General recursive functions of natural numbers**. *Math. Annalen*, 112, p. 741.
- Kolmogorov, A. N. (1932): **Zur Deutung der intuitionischen Logik**. *Math. Zeitschrift*, 35, p. 58-65.
- Kuhn, T. S. (2000): **A tudományos forradalmak szerkezete**. Budapest: Osiris Kiadó.
- Laczkovich M. (1998): **Sejtés és bizonyítás**. Budapest: Typotex Kiadó.
- Lakatos I. (1981): **Bizonyítások és cáfolatok**. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Lánczos K. (1976): **A geometriai térfogalom fejlődése**. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Lynch, M. P. (2001): **The Nature of Truth: From the Classic to the Contemporary**. Massachusetts: MIT Press.
- Lucas, J. R. (1961): **Minds, Machines and Gödel**. *Philosophy*, 36., p. 112-127.
- Mannheim, K. (1996): **Ideológia és utópia**. Budapest: Atlantisz Kiadó.

- Mendelson, E. (1987): **Introduction to Mathematical Logic**. California: Wadsworth & Brooks.
- Mertens, J.-F. és Zamir, S. (1985): **Formulation of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information**. International Journal of Game Theory, 14, p. 1-29.
- Mihálydeák T. (2008): **Functor-argumentum decomposition, Compositionality and Logical Semantics**. Debrecen: Habilitációs dolgozat (60 p.).
- Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. (1973): **Gravitation**. San Fransisco: W. Freeman & Company.
- Montague, R. (1970): **Universal Grammar**. Theoria 36, p. 373-98.
- Moore, A. W. (1993): **The Infinite**. London, New York: Routledge.
- Moschovakis, J. (2007): **Intuitionistic Logic**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy [Forrás: <http://seop.leeds.ac.uk/entries/logic-intuitionistic/>].
- Naess, A. (2005): **The Selected Works of Arne Naess**. Dordecht: Springer.
- Norwood, J. (1981): **Századunk fizikája**. Budapest: Műszaki Könyvkiadó.
- Parsons, Ch. (1979): **Mathematical Intuition**. Proceedings Of The Aristotelian Society 80, p. 145-168. Magyarul: Magyarul: In.: Csaba (2003).
- Parsons, Ch. (1983): **Mathematics in Philosophy**. Cornell University Press.
- Penrose, R. (1993): **A császár új elméje**. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Penrose, R. (2007): **A nagy, a kicsi és az emberi elme**. Budapest: Akkord Kiadó.
- Platón (1984): **Összes művei I-III**. Budapest: Európa Könyvkiadó.
- Poincaré, H. (1908): **Tudomány és föltevés**. Budapest: Királyi Magyar Természettudományi Társulat Kiadása.
- Pólya Gy. (1977): **A gondolkodás iskolája**. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Popper, K. (1968): **The Logic of Scientific Discovery**. New York: Harper & Row.
- Priest, G. (2002): **Paraconsistent Logic**. In.: Gabby, D. M. és Guenther, F.: Hanbook of Philosophical Logic. Vol 6., p. 287-387. Amsterdam: Kluwert Academic Press.
- Prior, A. (1960-1): **The Runabout Inference Ticket**. Analysis, 21, p. 8-39.
- Putman, H. (1980): **Models and Reality**. Journal of Symbolic Logic 45, p. 464-482. Magyarul: In.: Csaba (2003).
- Putnam, H. (1981): **Reason, Truth and History**. Cambridge: Cambridge University Press.
- Quine, W. O. (1975): **On Empirically Equivalent Systems of the World**. Erkenntnis, 9, p. 313-28.
- Quine, W. O. (1980): **From a Logical Point of View**. Cambridge: Harvard University Press.
- Quine, W. O. (1986): **Philosophy of Logic**. Cambridge: Harvard University Press.
- Rényi A. (1965): **Dialógusok a matematikáról**. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Robinson, H. (2003): **Dualism**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy [Forrás: <http://plato.stanford.edu/entries/dualism/>].
- Russell, B. (1968): **Filozófiai fejlődésem**. Budapest: Gondolat Kiadó.

- Russell, B. (1995): **Introduction to Mathematical Philosophy**. London: Routledge.
- Russell, B. (1996): **A filozófia alapproblémái**. Budapest: Kossuth Könyvkiadó.
- Ruzsa I. (1968): **A matematika és a filozófia határán**. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Ruzsa I. (1967): **A matematika néhány filozófiai problémájáról**. In.: Ruzsa, I. és Urbán, J. (1967): *Világnézeti nevelésünk természettudományos alapjai IV*. Budapest: Tankönyvkiadó.
- Ruzsa, I. (1997): **Introduction to Metalogic**. Budapest: Áron Publishers.
- Ruzsa I. és Máté A. (1997): **Bevezetés a modern logikába**. Budapest: Osiris Kiadó.
- Schaffer, J. (2007): **Monism**. The Stanford Encyclopedia of Philosophy [Forrás: <http://plato.stanford.edu/entries/monism/>].
- Shomaker, S. (1969): **Time without change**. Journal of Philosophy, 66, p. 363-381.
- Shannon, C. E., Weaver, W. (1949): **The mathematical theory of communication**. Urbana: University of Illinois Press.
- Shapiro, S. (1991): **Foundations without Foundationism**. Oxford: Clarendon Press.
- Smullyan, R. (1999): **Gödel nemteljességi tételei**. Budapest: Typotex.
- Spencer Brown, G. (1994): **Laws of Form**. Portland: Cognizer Company.
- Szabó Á. (1978): **A görög matematika kibontakozása**. Budapest: Magvető Kiadó.
- E. Szabó L. (1982): **Geometrodynamics in Multidimensional Unified Theory**. Gen. Rel. Grav., 14, p. 77.
- E. Szabó L. (2002): **A nyitott jövő problémája**. VÉLETLEN, KAUZALITÁS ÉS DETERMINIZMUS A FIZIKÁBAN. Budapest: Typotex Kiadó.
- Tait, W. W. (1980): **Finitism**. The Journal of Philosophy, LXXVII. Magyarul: In.: Csaba (2003).
- Tarski, A. (1990): **Bizonyítás és igazság**. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Tarski, A. (1935/1990): **Az igazság fogalma a formalizált nyelvekben**. In.: Tarski (1990).
- Tarski, A. (1944/1990): **Az igazság szemantikus felfogása és a szemantika megalapozása**. In.: Tarski (1990).
- Teller E. (1997): **Schrödinger macskája**. Fizikai Szemle 47, p. 202-206.
- Tieszen, R. (1984): **Mathematical Intuition and Husserl's Phenomenology**. Noûs 18, p. 395-421. Magyarul: In.: Csaba (2003).
- Trahtenbrot, B. A. (1978): **Algoritmusok és absztrakt automaták**. Budapest: A Műszaki és Mir Könyvkiadók közös kiadása.
- Troelstra, A. S. és Van Dalen, R. D. (1988): **Constructivism in Mathematics**. Vol. 1. Amsterdam: Elsevier.
- Trosztnyikov, V. N. (1981): **Konstruktív módszerek a matematikában**. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Van der Waerden, B. L. (1977): **Egy tudomány ébredése**. Budapest: Gondolat Kiadó.
- Wittgenstein, L. (1989): **Tractatus Logico-Philosophicus**. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- Wright, C. (1992): **Truth and Objectivity**. Cambridge: Harvard University Press.