

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Algebrai számelméleti és leszámoló kombinatorikai
vizsgálatok

Arnóczki Tímea

Témavezető: Dr. Nyul Gábor



DEBRECENI EGYETEM
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2023

1. Bevezető

A disszertáció két nagyobb részből áll. Az I. részben az algebrai számelmülethez kapcsolódóan algebrai számtestek monogenitásával foglalkozunk, a II. részben pedig a leszámpláló kombinatorikához kötődően különböző Stirling-típusú számokat vizsgálunk.

I.

Algebrai számtestek monogenitásának vizsgálata, ehhez szorosan kapcsolódóan adott indexű elemek keresése, a minimális index és testindex meghatározása az algebrai számelmélet egy lényeges területét képezik.

Ismert, hogy minden algebrai számtestnek létezik egész bázisa. Ezzel szemben az $(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})$ alakú egész bázis, az úgynevezett *hatvány egész bázis* létezése már nem garantált. Egy algebrai számtestet akkor nevezünk *monogénnek*, ha létezik hatvány egész bázisa. Ekkor α -t a fenti hatvány egész bázis *generátorának* hívjuk.

A bevezető további részében legyen K egy n -edfokú algebrai számtest és jelölje \mathbb{Z}_K a K -beli algebrai egészek gyűrűjét. Egy $\alpha \in \mathbb{Z}_K$ primitív elem $I(\alpha)$ *indexén* a $(\mathbb{Z}[\alpha], +)$ részcsoport indexét értjük a $(\mathbb{Z}_K, +)$ csoportban. A definícióból azonnal következik, hogy α pontosan akkor generál hatvány egész bázist, ha az indexe 1.

Egy algebrai számtestet jellemző két érték a minimális index és a testindex. A K számtest m_K *minimális indexét*, illetve i_K *testindexét* rendre a K -beli primitív algebrai egész elemek indexeinek minimumaként, illetve legnagyobb közös osztójaként definiáljuk. Nyilvánvaló, hogy a számtest testindexe egyúttal osztója a minimális indexnek is, továbbá egy számtest minimális indexe pontosan akkor 1, ha a számtest monogén.

Legyen $(\omega_1 = 1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ egész bázisa K -nak. Ekkor létezik $I(X_2, \dots, X_n)$ egész együtthatós, homogén, $n - 1$ határozatlanú, $\frac{n(n-1)}{2}$ fokú polinom úgy, hogy ha az $\alpha \in \mathbb{Z}_K$ primitív elem az egész bázisban $\alpha = x_1 + x_2\omega_2 + \dots + x_n\omega_n$ ($x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$) alakú, akkor

$$I(\alpha) = |I(x_2, \dots, x_n)|.$$

Ezt a polinomot a fenti egész bázisához tartozó *index formának* nevezzük.

Adott A pozitív egész szám esetén az A indexű elemek keresése így ekvivalens az

$$I(x_2, \dots, x_n) = \pm A$$

diofantoszi egyenlet, az úgynevezett *index forma egyenlet* megoldásával.

A disszertáció 2. fejezetében egy negyedfokú számtestcsalád, a biciklikus bikvadratikus számtestek esetén végzünk monogenitáshoz kötődő vizsgálatokat. A szakirodalom áttekintése után a [4] publikációra épülő 2.2. alfejezetben szükséges és elégséges feltételeket adunk teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestekben prím, illetve kis indexű elemek létezésére, valamint meg is határozzuk ezeket az adott indexű elemeket. A [6] cikkben alapuló 2.3. alfejezetben T. Nakahara egy tételének erősítéseként megmutatjuk, hogy tetszőleges természetes szám esetén végtelen sok olyan teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest van, melynek 1 a testindexe, minimális indexe pedig éppen az adott számmal egyenlő. Hasonló állításokat bizonyítottunk a testindex többi lehetséges értékére is.

A 3. fejezetben a [7] publikáció eredményeit mutatjuk be, megválaszolva egy tiszta negyedfokú számtestek monogenitásával kapcsolatos korábbi sejtést. Gaál I. és Remete L. azt sejtették, hogy az $m \equiv 1 \pmod{4}$ kongruenciát teljesítő, négyzetmentes m értékeket tekintve pontosan három monogén $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ alakú számtest létezik. Ezzel szemben belátjuk, hogy ha az *abc*-sejtés igaz, akkor az ilyen monogén számtestek száma végtelen. Vizsgáljuk továbbá a négyzetmentes paraméterű tiszta negyedfokú számtestek minimális indexét, teljesen komplex esetben pedig leírjuk a minimális indexű elemeket is.

II.

A leszámoló kombinatorikában alapvető fontosságúak a Stirling-számok. Ismert, hogy az $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ *elsőfajú Stirling-szám* az $1, \dots, n$ számok olyan permutációit számlálja össze, melyek k darab páronként idegen ciklus szorzatára bomlanak, míg az $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ *másodfajú Stirling-szám* az $1, \dots, n$ elemek k darab osztályba történő osztályozásainak számát jelöli ($0 \leq k \leq n$). Ezeket a számokat J. Stirling [79] rendre az emelkedő faktoriálisok és hatványok, valamint a hatványok és süllyedő faktoriálisok közötti

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k, \quad x^n = \sum_{k=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^k$$

polinomos összefüggésekkel definiálta, ahol x -nek az n -edik *emelkedő* és k -adik *süllyedő faktoriálisát* az

$$x^{\bar{n}} = \prod_{j=0}^{n-1} (x + j), \quad x^{\underline{k}} = \prod_{j=0}^{k-1} (x - j)$$

módon értelmezzük.

A másodfajú Stirling-számok definícióját úgy módosítva, hogy az osztályokon belül számít az elemek sorrendje, a Lah-számokhoz jutunk, azaz az $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ Lah-szám az $1, \dots, n$ elemek k darab rendezett osztályba történő osztályozásainak számát adja meg ($0 \leq k \leq n$). A Lah-számok segítségével leírható az emelkedő és süllyedő faktoriálisok közötti kapcsolat, eredetileg I. Lah [54, 55] is ezzel a polinomos azonossággal definiálta a később róla elnevezett számokat. Az $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ Lah-szám előállítható n felső paraméterű elsőfajú Stirling-számok és k alsó paraméterű másodfajú Stirling-számok szorzatösszegeként az

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \sum_{j=k}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right] \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} \right\} \quad (\star)$$

formulával.

Az első- és másodfajú Stirling-számoknak sok általánosítása és változata ismert. A dolgozatban számunkra az r -általánosítás kiemelt fontosságú, amikor megtiltjuk, hogy bizonyos elemek egy ciklusba, illetve egy osztályba kerüljenek.

Legyenek $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$ egész számok. Az $1, \dots, n+r$ számok egy permutációját/osztályozását r -permutációnak/ r -osztályozásnak nevezzük, ha az $n+1, \dots, n+r$ elemek különböző ciklusokban/osztályokban állnak. Ekkor az $n+1, \dots, n+r$ számokat *kitüntetett elemeknek* nevezzük, az őket tartalmazó ciklusokat és osztályokat pedig *kitüntetett ciklusoknak* és *kitüntetett osztályoknak* hívjuk. Az $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$ elsőfajú r -Stirling-szám az $1, \dots, n+r$ elemek olyan r -permutációinak számát jelöli, melyek ciklusfelbontásában $k+r$ darab páronként idegen ciklus szerepel, míg az $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r$ másodfajú r -Stirling-szám az $1, \dots, n+r$ számok $k+r$ darab osztályba történő r -osztályozásainak számát adja meg. L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] és R. Merris [58] egymástól függetlenül definiálták ezeket a kombinatorikus számokat.

A fentiekhez hasonlóan Nyul G. és Rácz G. [73] az $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$ r -Lah-számot az $1, \dots, n+r$ elemek $k+r$ darab rendezett osztályba történő r -osztályozásainak számaként értelmezték.

Az r -Stirling-számokat tovább általánosítják a Mező I. [59] által bevezetett elsőfajú és másodfajú r -Whitney-számok, melyeknek Gyimesi E. és Nyul G. [41] az elemek színezésével tulajdonított kombinatorikus tartalmat.

A fejezet hátralévő részében legyenek $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$ egész számok. Egy m -színes Whitney-színezett r -permutáción egy olyan r -permutációt értünk, ahol

- a ciklusok legnagyobb elemei nincsenek színezve,
- egy kitüntetett ciklusban egy elem nincs színezve, ha a kitüntetett elemtől eddig az elemig tartó ciklusívén nincs nála nagyobb elem,

- minden más elem m szín valamelyikével színezett.

A $w_{m,r}(n, k)$ m -színes elsőfajú r -Whitney-szám az $1, \dots, n+r$ elemek olyan m -színes Whitney-színezett r -permutációinak számát adja meg, melyek $k+r$ darab páronként idegen ciklus szorzataként írhatóak fel.

Egy m -színes Whitney-színezett r -osztályozás egy olyan r -osztályozást jelent, ahol

- az osztályok legnagyobb elemei nincsenek színezve,
- a kitüntetett osztályok elemei nincsenek színezve,
- minden más elem m szín valamelyikével színezett.

A $W_{m,r}(n, k)$ m -színes másodfajú r -Whitney-szám az $1, \dots, n+r$ elemek $k+r$ darab osztályba történő, m -színes Whitney-színezett r -osztályozásait számlálja össze.

Megjegyezzük, hogy Mező I. a fenti számokat polinomos azonosságokkal definiálta, melyekben már m differenciájú n -edik emelkedő és m differenciájú k -adik süllyedő faktoriálisok jelennek meg. Ezeket az

$$(x|m)^{\overline{n}} = \prod_{j=0}^{n-1} (x+mj), \quad (x|m)^{\underline{k}} = \prod_{j=0}^{k-1} (x-mj)$$

módon jelöljük és értelmezzük.

Az r -Whitney–Lah-számokat G.-S. Cheon és J.-H. Jung [14] a (\star) formula mintájára első- és másodfajú r -Whitney-számok szorzatösszegeként definiálták. Később Gyimesi E. és Nyul G. [41] kombinatorikusan is értelmezték ezeket a számokat az előbb említett színezési szabályok megfelelő módosításával.

Egy m -színes Whitney-színezett, rendezett osztályokba történő r -osztályozáson egy olyan rendezett osztályokba való r -osztályozást értünk, ahol

- a rendezett osztályok legnagyobb elemei nincsenek színezve,
- egy kitüntetett rendezett osztályban egy elem nincs színezve, ha ezen elem és a kitüntetett elem között nincs nála nagyobb elem,
- minden más elem m szín valamelyikével színezett.

A $WL_{m,r}(n, k)$ m -színes r -Whitney–Lah-szám az $1, \dots, n+r$ elemek m -színes Whitney-színezett, $k+r$ darab rendezett osztályba történő r -osztályozásainak számát jelöli.

Az értekezés 4. fejezetében a másodfajú r -Stirling-számok egy olyan változatával foglalkozunk, ahol az osztályok elemszáma legfeljebb 2 lehet. Az így adódó korlátozott r -Stirling-számokra vonatkozó kombinatorikus tételeinket, valamint a korlátozott r -Bell-polinomokon keresztül vizsgált log-konkv és unimodális tulajdonságaikat a [8] publikáció tartalmazza.

Az 5. fejezetben a röviden ismertetett Jacobi–Stirling-számok Whitney-típusú általánosításaként új kombinatorikus számokat értelmezünk. Az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok bizonyos Whitney-színezett r -permutációkból, illetve r -osztályozásokból álló rendezett párokat számlálnak össze. Tulajdonságaik igazolásánál itt is törekszünk a kombinatorikus úton történő bizonyításokra, továbbá belátjuk, hogy a segítségükkel képzett Jacobi–Dowling-polinomok gyökei valósak. Eredményeink a [9] cikkben találhatóak.

A Lah-számok Jacobi–Whitney-változatának bevezetésére két út áll előttünk: értelmezhetjük őket kombinatorikusan vagy a (\star) formulához hasonlóan az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok segítségével. Várakozásainkkal ellentétben a különbözőképpen definiált Jacobi–Whitney–Lah-számok nem esnek egybe, vizsgálatukat az [5] publikációnak megfelelően a disszertáció 6. fejezetében részletezzük.

I. rész

Algebrai számelméleti vizsgálatok

2. Biciklikus bikvadratikus számtestek

2.1. Monogenitással kapcsolatos korábbi eredmények

Legyenek $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ különböző négyzetmentes egész számok. Ekkor a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ alakú algebrai számtesteket *biciklikus bikvadratikus számtesteknek* nevezzük. A dolgozatban csak *teljesen komplex* biciklikus bikvadratikus számtestekkel foglalkozunk, azaz amikor $m < 0$ vagy $n < 0$. A $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ biciklikus bikvadratikus számtest esetén m és n legnagyobb közös osztóját jelölje $d > 0$, illetve legyenek m_1 és n_1 olyan egészek, hogy $m = dm_1$ és $n = dn_1$ teljesül.

Minden $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest m, n, m_1 és n_1 előjele, illetve 4-gyel vett osztási maradéka alapján besorolható az alábbi nyolc eset valamelyikébe:

1. eset: $m > 0, n < 0, m \equiv 1 \pmod{4}, n \equiv 1 \pmod{4}, m_1 \equiv 1 \pmod{4}, n_1 \equiv 1 \pmod{4}$
2. eset: $m > 0, n < 0, m \equiv 1 \pmod{4}, n \equiv 1 \pmod{4}, m_1 \equiv 3 \pmod{4}, n_1 \equiv 3 \pmod{4}$
- 3/A. eset: $m > 0, n < 0, m \equiv 1 \pmod{4}, n \equiv 2 \pmod{4}$
- 3/B. eset: $m < 0, n > 0, m \equiv 1 \pmod{4}, n \equiv 2 \pmod{4}$
- 4/A. eset: $m > 0, n < 0, m \equiv 2 \pmod{4}, n \equiv 3 \pmod{4}$
- 4/B. eset: $m < 0, n > 0, m \equiv 2 \pmod{4}, n \equiv 3 \pmod{4}$
- 5/A. eset: $m > 0, n < 0, m \equiv 3 \pmod{4}, n \equiv 3 \pmod{4}$
- 5/B. eset: $m < 0, n < 0, m \equiv 3 \pmod{4}, n \equiv 3 \pmod{4}$

Biciklikus bikvadratikus számtestek monogenitási kérdéseivel T. Nakahara, Gaál I., Pethő A., M. Pohst, M.-N. Gras, F. Tanoé, Y. Motoda, H. H. Kim, Z. Wolske, B. Jadrijević, T. Funakura, Nyul G., valamint M.-L. Chang foglalkozott.

Most kiemeljük azokat az eredményeket, amelyekre a továbbiakban szükségünk lesz. K. S. Williams [80] minden esetben megadta a biciklikus bikvadratikus számtestek egy egész bázisát (2.1. Lemma), majd Gaál I., Pethő A. és M. Pohst [29] kiszámították az ezekhez tartozó index formákat (2.2. Lemma). Továbbá szükséges és elégséges

feltételeket igazoltak arra vonatkozóan, hogy biciklikus bikvadratikus számtestek testindexe pontosan mikor egyenlő 12 egy adott osztójával (2.3. Lemma).

2.2. Prím és kis indexű elemek

Nyul G. [70] 1 indexű elemekre vonatkozó eredményének kiterjesztéseként először páratlan prím indexű elemek létezésére adunk szükséges és elégséges feltételeket teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestekben, és meg is határozzuk ezeket az adott indexű elemeket.

2.5. Tétel. ([4, Theorem 3.1])

Legyenek $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ különböző négyzetmentes egész számok, melyek a teljesen komplex esetben korábban felsorolt nyolc eset valamelyikébe tartoznak, továbbá jelölje $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ biciklikus bikvadratikus számtest 2.1. Lemmában megadott egész bázisát. Ekkor ha p pozitív páratlan prím szám, akkor a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ számtestben p indexű elem létezésének szükséges és elégséges feltételeit, illetve az adott feltételek teljesülése esetén a p indexű $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 + x_4\omega_4$ ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$) elemeknek az egész bázisra vonatkozó koordinátáit az 1. táblázat tartalmazza. Az 1. és 2. esetben nincs p indexű elem.

Az alábbiakban az előző tételből kimaradó, legfeljebb 10 indexű elemek létezését vizsgáljuk teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtestekben.

2.6. Tétel. ([4, Theorem 3.2])

Legyenek $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ különböző négyzetmentes egész számok, melyek a teljesen komplex esetben korábban felsorolt nyolc eset valamelyikébe tartoznak, továbbá jelölje $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ biciklikus bikvadratikus számtest 2.1. Lemmában megadott egész bázisát. Ekkor a $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ számtestben $A \in \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ indexű elem létezésének szükséges és elégséges feltételeit, illetve az adott feltételek teljesülése esetén az A indexű $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 + x_4\omega_4$ ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$) elemeknek az egész bázisra vonatkozó koordinátáit a 2–7. táblázatok tartalmazzák. Az A indexű elemek táblázatában nem szereplő esetekben nincs A indexű elem.

Itt a 4 indexű elemekre vonatkozó eredményt mutatjuk be, a többi táblázat a disszertációban megtalálható.

1. táblázat. Prím indexű elemek

eset	feltétel	(x_2, x_3, x_4)
3/A.	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$: $d = 1, m - 4n = p$ (*)	$\pm(1, 1, 0), \pm(1, -1, 0)$
	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$: $m_1 = 1, d - 4n_1 = p$ (*)	$\pm(1, -1, 2), \pm(1, 1, -2)$
3/B.	ha $p = 3$: $m = -3, n = 6$ (*)	$\pm(1, 0, 1), \pm(1, -1, 1),$ $\pm(-1, 0, 1), \pm(-1, -1, 1)$
	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$: $m_1 = -1, d - 4n_1 = -p$	$\pm(1, -1, 2), \pm(1, 1, -2)$
	ha $p \equiv 3 \pmod{4}$: $m_1 = -1, d - 4n_1 = p$	
	ha $p \equiv 3 \pmod{4}$: $d = 1, 4n - m = p$ (*)	$\pm(1, 1, 0), \pm(1, -1, 0)$
	ha $p \equiv 5 \pmod{16}$, $p - 1$ négyzetszám és $\frac{p+3}{4}$ négyzetmentes: $m = -3, n = \frac{p+3}{4}$ (*)	$\pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, 0, 1), \pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, -1, 1),$ $\pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, 0, -1), \pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, 1, -1)$
4/A.	$m_1 = 2, d - n_1 = 2p$ (*)	$\pm(0, 0, 1), \pm(-1, 0, 1)$
	ha $p = 3$: $m = 2, n = -1$ (*)	$\pm(0, 1, 1), \pm(0, -1, 1),$ $\pm(-1, 1, 1), \pm(-1, -1, 1)$
	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$, $p - 1$ négyzetszám és $p + 1$ négyzetmentes: $m = p + 1, n = -1$ (*)	$\pm(0, \frac{\sqrt{p-1}}{2}, 1), \pm(0, \frac{\sqrt{p-1}}{2}, -1),$ $\pm(-1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}, 1), \pm(1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}, -1)$
4/B.	$m_1 = -2, d - n_1 = \pm 2p$	$\pm(-1, 0, 1), \pm(0, 0, 1)$
5/A.	$d = 1, m - n = 4p$ (*)	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$: $n_1 = -1, 4d - m_1 = p$	$\pm(-1, 2, 1), \pm(1, -2, 1)$
	ha $p \equiv 3 \pmod{4}$: $n_1 = -1, 4d - m_1 = -p$	
	ha $p \equiv 1 \pmod{16}$, $p - 1$ négyzetszám és $\frac{3p+1}{4}$ négyzetmentes: $m = \frac{9p+3}{4}, n = \frac{-3p-1}{4}$ (*)	$\pm(0, 1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}), \pm(0, -1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}),$ $\pm(-1, 1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}), \pm(1, -1, \frac{\sqrt{p-1}}{2})$

5/B.	$d = 1, m - n = \pm 4p$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$: $n_1 = -1, 4d - m_1 = p$ (*)	$\pm(-1, 2, 1), \pm(1, -2, 1)$
	ha $p \equiv 1 \pmod{4}$: $m_1 = -1, 4d - n_1 = p$ (*)	$\pm(1, 0, 1), \pm(-1, 0, 1)$

3. táblázat. 4 indexű elemek

eset	feltétel	(x_2, x_3, x_4)
2.	$n_1 = -1, 4d - m_1 = 1$	$\pm(1, 1, 2), \pm(1, -3, 2)$
	$n_1 = -1, d - 4m_1 = -1$	$\pm(2, -1, 4), \pm(2, -3, 4)$
	$n_1 = -1, d - m_1 = \pm 4$	$\pm(1, 0, 2), \pm(1, -2, 2)$
3/A.	$n_1 = -2, d - m_1 = \pm 4$	$\pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$
3/B.	$m = -3, n = 2$	$\pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$
	$m = -3, n = 6$	
	$m_1 = -1, d - 16n_1 = -1$	$\pm(1, -2, 4), \pm(1, 2, -4)$
5/A.	$m = 3, n = -13$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	$m = 11, n = -5$	
	$m = 3, n = -1$	$\pm(0, 1, 1), \pm(-1, 1, 1),$ $\pm(0, 1, -1), \pm(-1, 1, -1)$
	$m = 15, n = -1$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0),$ $\pm(-2, 4, 1), \pm(-2, 4, -1)$
	$n_1 = -1, 16d - m_1 = 1,$ $(m, n) \neq (15, -1)$	$\pm(-2, 4, 1), \pm(-2, 4, -1)$
5/B.	$d = 1, m - n = \pm 16$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$

Megjegyzés. Világos, hogy rögzített p prím mellett csak véges sok olyan m és n egész szám létezik, melyek eleget tesznek a (*)-gal jelölt feltételeknek és az adott esetben tartoznak. Az 1. táblázatban szereplő többi feltételről, valamint a 2–7. táblázatok nem konkrét m és n értékeket adó feltételeiről igazolható, hogy azokat végtelen sok (m, n) számpár teljesíti.

2.3. Minimális index

A minimális index kapcsán több számtestcsalád esetén is születtek olyan eredmények, amelyek szerint tetszőlegesen rögzített természetes szám esetén végtelen sok, az adott testcsaládba tartozó számtest létezik, amelynek minimális indexe nagyobb az előre megadott számnál. Ilyen típusú állítást bizonyított M. Hall, D. S. Dummit, H. Kisilevsky, T. Funakura, valamint T. Nakahara [68], aki többek között igazolta, hogy bármely természetes szám esetén végtelen sok biciklikus bikvadratikus számtest van, amelynek testindexe 1 és minimális indexe nagyobb, mint az előre rögzített szám.

B. K. Spearman, Q. Yang és J. Yoo [76] a fenti problémakört új irányból közelítették meg. Igazolták, hogy tetszőleges köbmentes természetes szám esetén végtelen sok tiszta harmadfokú számtest létezik, melynek minimális indexe pontosan az adott számmal egyenlő. Az alábbi tételben T. Nakahara fenti, biciklikus bikvadratikus számtestekre vonatkozó eredményét erősítjük ilyen módon és az állítást kiterjesztjük a testindex többi lehetséges értékére is.

2.7. Tétel. ([6, Theorem 1.1])

- (1) *Ha $a \in \{1, 3\}$, akkor a bármely A pozitív többszöröse esetén végtelen sok teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest létezik, melynek testindexe a és minimális indexe A .*
- (2) *Ha $a \in \{2, 4, 6, 12\}$, akkor $2a$ bármely A pozitív többszöröse esetén végtelen sok teljesen komplex biciklikus bikvadratikus számtest létezik, melynek testindexe a és minimális indexe A .*

Megjegyzés. A 2.6. Tétel alapján mutathatók példák arra, hogy a második állítás a nem minden A pozitív többszöröse esetén teljesül.

3. Tiszta negyedfokú számtestek

3.1. Monogenitással kapcsolatos korábbi eredmények

Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-4\}$ negyedikhatvány-mentes egész szám, ami nem négyzetszám. Ha ϑ gyöke az $X^4 - m$ irreducibilis polinomnak, akkor a $K_m = \mathbb{Q}(\vartheta)$ algebrai számtestet *tiszta negyedfokú számtestnek* nevezzük, melyre a továbbiakban a $K_m = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ jelölést használjuk. A fejezetben csak olyan K_m tiszta negyedfokú számtestekkel foglalkozunk, ahol m négyzetmentes.

A K_m tiszta negyedfokú számtestek vizsgálatánál négyzetmentes m esetén a következő három esetet különböztetjük meg:

1. eset: $m \equiv 2$ vagy $3 \pmod{4}$
2. eset: $m \equiv 1 \pmod{8}$
3. eset: $m \equiv 5 \pmod{8}$

T. Funakura [25] (lásd még [34, 63]) megadta a tiszta negyedfokú számtestek egy egész bázisát és a hozzá tartozó index formát (3.1. Lemma), ezzel együtt vizsgálta a monogenitásukat is.

Gaál I. és Remete L. [34] olyan négyzetmentes m értékek esetén, melyekre $m \not\equiv 9 \pmod{16}$, teljeskörűen leírták a K_m tiszta negyedfokú számtestek monogenitását (lásd még T. Funakura előbb említett eredményét). A kimaradó eset kapcsán az alábbi sejtést fogalmazták meg: Ha m négyzetmentes és $m \equiv 9 \pmod{16}$, akkor K_m pontosan akkor monogén, ha $m = 73$ vagy 89 , egyébként pedig K_m minimális indexe 8. Mint látni fogjuk, a helyzet ennél jóval bonyolultabb, ugyanis nem csak ez a két kivétel van, hanem valószínűleg végtelen sok.

3.2. Minimális index

Az alábbi tétel alapján négyzetmentes paraméterű tiszta negyedfokú számtestek minimális indexe 1, 4 vagy 8, és mindhárom érték végtelen sok ilyen számtest esetén fordul elő. Ha azonban a fenti eseteket külön-külön tekintjük, a helyzet korántsem írható le ilyen egyszerűen.

3.3. Tétel. ([7, Theorem 3.1])

Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ négyzetmentes egész szám és $K_m = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$.

- Az 1. esetben K_m minimális indexe 1.

- A 2. esetben K_m minimális indexe 1 vagy 8. A minimális index végtelen sok m esetén 8, és ha az abc-sejtés igaz, akkor szintén végtelen sok m esetén 1. Feltéve azonban, hogy $m < 0$, a minimális index csak $m = -7$ esetén 1.
- A 3. esetben K_m minimális indexe $m = -3$ esetén 1, amúgy 4.

A teljesen komplex esetben, azaz a negatív paraméterű tiszta negyedfokú számtestek esetén meg is határozzuk az összes minimális indexű elemet.

3.4. Tétel. ([7, Theorem 3.2])

Legyen $m < 0$ négyzetmentes egész szám, $K_m = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$, továbbá $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ jelölje a K_m számtest 3.1. Lemmában megadott egész bázisát. Ekkor a minimális indexű $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 + x_4\omega_4$ ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$) elemeknek az egész bázisra vonatkozó koordinátái

- $m = -1$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(1, 0, 0)$;
- $m = -3$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(-1, 0, 1), \pm(1, 1, 0), \pm(1, -1, 0)$;
- $m = -7$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$;
- $m = -15$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1), \pm(1, 0, 0)$;
- $m \notin \{-1, -3, -7, -15\}$ esetén $(x_2, x_3, x_4) = \pm(1, 0, 0)$.

II. rész

Leszámláló kombinatorikai vizsgálatok

4. Korlátozott r -Stirling-számok

4.1. A korlátozott r -Stirling-számok fogalma

Bizonyos másodrendű differenciálegyenletek megoldásaként H. L. Krall és O. Frink [53] vezették be a Bessel-polinomokat, melyek együtthatóit kombinatorikus megközelítésből J. Y. Choi és J. D. H. Smith [16] vizsgálták elsőként. Kombinatorikus tartalommal látták el a Bessel-polinomok átparaméterezett együtthatóit, melyeket Bessel-számoknak neveztek. A Stirling-számokkal való szoros kapcsolatukat jelzi, hogy a szakirodalomban a Bessel-számokat korlátozott Stirling-számokként is említik, a dolgozatban mi ezt a szóhasználatot követjük.

Az $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{\leq 2}$ korlátozott Stirling-szám az $1, \dots, n$ számok k darab legfeljebb kételemű osztályba történő osztályozásait számlálja össze ($0 \leq k \leq n$).

A Stirling-számok korábbi r -általánosításához hasonlóan G.-S. Cheon, J.-H. Jung és L. W. Shapiro [15] az $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}$ korlátozott r -Stirling-számot az $1, \dots, n+r$ elemek $k+r$ darab legfeljebb kételemű osztályba történő r -osztályozásainak számaként értelmezte ($0 \leq k \leq n, r \geq 0$).

4.2. A korlátozott r -Stirling-számok tulajdonságai

A korlátozott r -Stirling-számok definíciójából azonnal következik, hogy $0 \leq k \leq n, r \geq 0$ és $n > 2k + r$ esetén $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = 0$, míg ha $n \leq 2k + r$, akkor van megfelelő r -osztályozás.

Nyilvánvaló továbbá, hogy $n, r \geq 0$ esetén $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = r^n$ és $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = 1$.

A korlátozott r -Stirling-számok rekurzióját kombinatorikus gondolatmenettel bizonyítjuk.

4.1. Tétel. ([8, Theorem 2.1])

Ha $1 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$, akkor

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} + (2k+r-n) \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}.$$

A következő tétel függőleges rekurziót ad a korlátozott r -Stirling-számokra.

4.2. Tétel. ([8, Theorem 2.2])

Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$, akkor

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = \sum_{j=k}^n (2k+r+1-j)^{\overline{n-j}} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}.$$

A korlátozott r -Stirling-számok polinomos azonosságai az eltolts süllyedő és a 2 differenciájú süllyedő faktoriálisok, illetve az eltolts emelkedő és a 2 differenciájú emelkedő faktoriálisok között teremtenek kapcsolatot.

4.3. Tétel. ([8, Theorem 2.3])

Ha $n, r \geq 0$, akkor

$$(x+r)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} (x|2)^{\underline{k}},$$

$$(x-r)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} (x|2)^{\overline{k}}.$$

Az alábbi tételben a klasszikus másodfajú Stirling-számoknál megszokott alakú explicit formulát igazolunk a korlátozott r -Stirling-számokra vonatkozóan a szitaformula segítségével.

4.4. Tétel. ([8, Theorem 2.4])

Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$, akkor

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = \frac{1}{2^k k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (2(k-j)+r)^{\underline{n}}.$$

$0 \leq k \leq n$ és $r, s \geq 0$ esetén az elsőfajú r -Stirling-számok és a másodfajú s -Stirling-számok segítségével értelmezzük a

$$p_{n,k,r,s}(x) = \sum_{j=k}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_s x^{j-k}$$

polinomot. Megmutatjuk, hogy -2 helyettesítésével ezek a polinomok előjeles korlátozott $(2s - r)$ -Stirling-számokat adnak.

4.5. Tétel. ([8, Theorem 2.5])

Ha $0 \leq k \leq n$ és $0 \leq r \leq 2s$, akkor

$$p_{n,k,r,s}(-2) = (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{2s-r}^{\leq 2}.$$

Kombinatorikusan bizonyítjuk, hogy másodfajú r -Stirling-számokat kombinálva korlátozott s -Stirling-számokkal 2-színes másodfajú $(r+s)$ -Whitney-számokhoz jutunk.

4.6. Tétel. ([8, Theorem 2.6])

Ha $0 \leq k \leq n$ és $r, s \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}_r \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_s^{\leq 2} = W_{2,r+s}(n, k).$$

4.3. Korlátozott r -Bell-polinomok

A jól ismert Bell-polinomok együtthatói rögzített felső paraméterű másodfajú Stirling-számok, így természetes módon értelmezhetőek a korlátozott r -Bell-polinomok a korlátozott r -Stirling-számok segítségével.

$n, r \geq 0$ esetén a

$$B_{n,r}^{\leq 2}(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^k$$

polinomot az n -edik *korlátozott r -Bell-polinom*nak nevezzük. Ezeket a polinomokat J.-H. Jung, Mező I. és J. L. Ramírez [49] vezették be, de megjegyezzük, hogy $r = 0$ esetén már F. L. Miksa, L. Moser és M. Wyman [60] is vizsgálta őket.

A korlátozott r -Stirling-számok rekurziójának felhasználásával a korlátozott r -Bell-polinomokra is megadható rekurzió.

4.7. Tétel. ([8, Theorem 3.1])

Ha $n, r \geq 0$, akkor

$$B_{n+1,r}^{\leq 2}(x) = (x + r - n)B_{n,r}^{\leq 2}(x) + 2x \left(B_{n,r}^{\leq 2}(x) \right)'$$

A következőkben J.-H. Jung, Mező I. és J. L. Ramírez [49] korlátozott r -Bell-polinomok valós gyökűségére vonatkozó sejtését igazoljuk.

4.8. Tétel. ([8, Theorem 3.2])

Ha $n \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinom minden gyöke valós és nempozítív.

Ennek következményeként kapjuk, hogy rögzített felső paraméter esetén a korlátozott r -Stirling-számok sorozata log-konkáv és unimodális.

4.9. Következmény. ([8, Corollary 3.3])

Ha $n \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor az $\left(\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}_r^{\leq 2}\right)_{k=0}^n$ sorozat log-konkáv és unimodális.

A gyökökre vonatkozóan a fentiekén túl egy erősebb állítást sejtünk, mely szerint a negatív gyökök mind egyszeresek.

4.10. Sejtés. ([8, Conjecture 3.4])

Legyen $n \geq 1$ és $r \geq 0$. Ha $n \leq r$, akkor a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinom minden gyöke negatív és egyszeres. Ha $n > r$ és

- $n \equiv r \pmod{2}$, akkor a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinomnak $\frac{n-r}{2}$ -szeres gyöke a 0, a többi gyöke negatív és egyszeres,
- $n \not\equiv r \pmod{2}$, akkor a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinomnak $\frac{n-r+1}{2}$ -szeres gyöke a 0, a többi gyöke negatív és egyszeres.

A sejtéssel kapcsolatban az alábbi részeredményt bizonyítjuk.

4.11. Tétel. ([8, Theorem 3.5])

Legyen $n \geq 1$, $r \geq 0$ és $n \equiv r \pmod{2}$. Ha a sejtésben szereplő állítás igaz a $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ polinomra, akkor a $B_{n+1,r}^{\leq 2}(x)$ polinomra is teljesül.

5. Jacobi–Whitney-számok

5.1. A Jacobi–Whitney-számok fogalma

W. N. Everitt, L. L. Littlejohn és R. Wellman [23] újfajta Stirling-típusú számokat definiáltak, az úgynevezett másodfajú Legendre–Stirling-számokat. Ezek általánosításaként néhány év múlva K. H. Kwon és G. J. Yoon szerzőkkel közösen [22] értelmezték a másodfajú Jacobi–Stirling-számokat. Mindkét változatot mély analízisbeli probléma, a klasszikus másodrendű Legendre-, illetve Jacobi-differenciálkifejezések kompozíciós hatványainak spektrálmélete kapcsán vezették be. A [2, 22] cikkekben ezeknek a számoknak az elsőfajú változatait is értelmezték (lásd még [3, 21]).

G. E. Andrews és L. L. Littlejohn [3], E. S. Egge [21], valamint G. E. Andrews, E. S. Egge, W. Gawronski és L. L. Littlejohn [1] a Legendre–Stirling- és Jacobi–Stirling-számokat kombinatorikus nézőpontból is vizsgálták (lásd még [35, 61]), viszont az első- és másodfajú esetre egységes kombinatorikus értelmezés nem született. A következőkben olyan interpretációkat adunk meg, melyekben egyszerre jelennek meg permutációk és r -permutációk, illetve osztályozások és r -osztályozások, ezáltal illeszkednek a közös Stirling-számok definícióihoz is. Eredményeink azonban nem csak ezeket a kombinatorikus számokat érintik, hanem jóval általánosabbak. Figyelembe véve az r -Stirling-számok korábban említett Whitney-általánosítását, első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számokat definiálunk, amelyek speciális esetként a Jacobi–Stirling-számokat, azok pedig a Legendre–Stirling-számokat adják vissza.

5.1. Definíció. ([9, Definition 2.1])

Legyenek $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$. Egy (π_1, π_2) rendezett párt (n, k) paraméterű m -színes r -Jacobi–Whitney-permutációpárnak nevezünk, ha

- π_1 az $1, \dots, n$ elemek egy m -színes Whitney-színezett 0-permutációja, amely k darab páronként idegen ciklus szorzatára bomlik,
- π_2 az $1, \dots, n + r$ elemek egy m -színes Whitney-színezett r -permutációja, amely $k + r$ darab páronként idegen ciklus szorzataként áll elő,
- a π_1 -ben lévő ciklusok maximumainak halmaza megegyezik a π_2 -beli nem-kitüntetett ciklusok maximumainak halmazával.

Ezen permutációpárok számát jelöli a $jw_{m,r}(n, k)$ m -színes elsőfajú r -Jacobi–Whitney-szám.

Ha $m = 1$, azaz lényegében eltekintünk a színezéstől, akkor az $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r$ elsőfajú r -Jacobi–Stirling-számhoz jutunk, speciálisan $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_1$ pedig elsőfajú Legendre–Stirling-szám.

5.2. Definíció. ([9, Definition 2.2])

Legyenek $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$. Egy (Π_1, Π_2) rendezett párt (n, k) paraméterű m -színes r -Jacobi-Whitney-osztályozáspárnak nevezünk, ha

- Π_1 az $1, \dots, n$ elemek egy k darab osztályba történő, m -színes Whitney-színezett 0 -osztályozása,
- Π_2 az $1, \dots, n + r$ elemek egy $k + r$ darab osztályba történő, m -színes Whitney-színezett r -osztályozása,
- a Π_1 -ben lévő osztályok maximumainak halmaza megegyezik a Π_2 -beli nemkitüntetett osztályok maximumainak halmazával.

Ezeket az osztályozáspárokat számlálja össze a $JW_{m,r}(n, k)$ m -színes másodfajú r -Jacobi-Whitney-szám.

Ha $m = 1$, akkor az $\left\{\left\{\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right\}\right\}_r$ másodfajú r -Jacobi-Stirling-számot kapjuk, speciálisan $\left\{\left\{\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right\}\right\}_1$ pedig másodfajú Legendre-Stirling-szám.

5.2. A Jacobi-Whitney-számok tulajdonságai

Ebben az alfejezetben a Jacobi-Whitney-számok tulajdonságait ismertetjük, melyekből $m = 1$, valamint $m = r = 1$ helyettesítésekkel kapjuk a Jacobi-Stirling- és a Legendre-Stirling-számokra vonatkozó megfelelő állításokat.

A definíciókból könnyen adódik, hogy $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$ esetén

$$jw_{m,r}(n, 0) = JW_{m,r}(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad jw_{m,r}(n, n) = JW_{m,r}(n, n) = 1.$$

Kombinatorikus ötletekkel a Jacobi-Whitney-számok más speciális értékeit is megkaphatjuk.

5.3. Tétel. ([9, Theorem 2.3])

Ha $n, m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$jw_{m,r}(n, 1) = m^{n-1}(n-1)!(m+r|m)^{\overline{n-1}}, \quad JW_{m,r}(n, 1) = (m(m+r))^{n-1},$$

$$jw_{m,r}(n, n-1) = JW_{m,r}(n, n-1) = m \left(2m \binom{n}{3} + (m+r) \binom{n}{2} \right).$$

A Jacobi-Whitney-számokra vonatkozó rekurziókat is kombinatorikusan bizonyítjuk.

5.4. Tétel. ([9, Theorem 2.4])

Ha $1 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$jw_{m,r}(n+1, k) = jw_{m,r}(n, k-1) + mn(mn+r)jw_{m,r}(n, k),$$

$$JW_{m,r}(n+1, k) = JW_{m,r}(n, k-1) + mk(mk+r)JW_{m,r}(n, k).$$

Az alábbi tételben a Jacobi–Whitney-számok függőleges rekurzióját írjuk le, melyekre kombinatorikus bizonyítást adunk.

5.5. Tétel. ([9, Theorem 2.5])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$jw_{m,r}(n+1, k+1) = \sum_{j=k}^n (mn|m)^{n-j} (mn+r|m)^{n-j} jw_{m,r}(j, k),$$

$$JW_{m,r}(n+1, k+1) = \sum_{j=k}^n (m(k+1))^{n-j} (m(k+1)+r)^{n-j} JW_{m,r}(j, k).$$

$n, r \geq 0$ és $m \geq 1$ esetén értelmezzük az n -edik (m, r) -négyzetesen emelkedő, valamint (m, r) -négyzetesen süllyedő faktoriális az

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \prod_{j=0}^{n-1} (x + mj(mj+r)), \quad x^{\underline{\underline{n, m, r}}} = \prod_{j=0}^{n-1} (x - mj(mj+r))$$

összefüggésekkel. A Jacobi–Whitney-számok polinomos azonosságai írják le a kapcsolatot a négyzetesen emelkedő, illetve négyzetesen süllyedő faktoriálisok és a hatványok között.

5.6. Tétel. ([9, Theorem 2.6])

Ha $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n jw_{m,r}(n, k)x^k, \quad x^{\underline{\underline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} jw_{m,r}(n, k)x^k,$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n JW_{m,r}(n, k)x^{\underline{\underline{k, m, r}}}, \quad x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} JW_{m,r}(n, k)x^{\overline{\overline{k, m, r}}}.$$

A polinomos azonosságok felhasználásával megmutatható az elsőfajú és másodfajú Jacobi–Whitney-számok ortogonalitása.

5.7. Tétel. ([9, Theorem 2.7])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} j w_{m,r}(n, j) J W_{m,r}(j, k) = \delta_{n,k},$$

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} J W_{m,r}(n, j) j w_{m,r}(j, k) = \delta_{n,k}.$$

Az alábbi tételben az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számokat elemi és teljes szimmetrikus polinomok segítségével állítjuk elő és egyúttal kombinatorikus bizonyítást is adunk ezekre az összefüggésekre.

5.8. Tétel. ([9, Theorem 2.8])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$j w_{m,r}(n, k) = e_{n-k}(m(m+r), 2m(2m+r), \dots, m(n-1)(m(n-1)+r)),$$

$$J W_{m,r}(n, k) = h_{n-k}(m(m+r), 2m(2m+r), \dots, mk(mk+r)),$$

ahol $e_{n-k}(x_1, \dots, x_l)$ és $h_{n-k}(x_1, \dots, x_l)$ rendre az $(n-k)$ -edik l határozatlanú elemi és teljes szimmetrikus polinomokat jelölik.

A következő tételben a klasszikus másodfajú Stirling-számokéhoz hasonló explicit formulát igazolunk a másodfajú Jacobi–Stirling-számokra.

5.9. Tétel. ([9, Theorem 2.9])

Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$, akkor

$$\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\}_r = \frac{1}{(2k+r)!} \sum_{j=0}^{2k+r} (-1)^j \binom{2k+r}{j} (k-j+1)^{\overline{r}} ((k-j)(k-j+r))^n.$$

5.3. Átmeneti együtthatók

Ebben az alfejezetben azoknak a Jacobi–Whitney-számoknak a kapcsolatát vizsgáljuk, melyeknél a színek száma, valamint a kitüntetett elemek száma is különböző. Ehhez szükségünk van az alábbi számok bevezetésére.

Rögzített $m, l \geq 1$ és $r, s \geq 0$ esetén a $T_{m,l,r,s}(n, k)$ átmeneti együtthatókat ($0 \leq k \leq n$) definiáljuk a következő kezdeti értékek és rekurzió segítségével:

- $T_{m,l,r,s}(n, 0) = \delta_{n,0}$ ($n \geq 0$), $T_{m,l,r,s}(n, n) = 1$ ($n \geq 0$),
- $T_{m,l,r,s}(n+1, k) = T_{m,l,r,s}(n, k-1) + (mn(mn+r) - lk(lk+s))T_{m,l,r,s}(n, k)$ ($1 \leq k \leq n$).

Megjegyezzük, hogy $m \geq 1$ és $r \geq 0$ esetén $T_{m,m,r,r}(n, k) = \delta_{n,k}$ ($0 \leq k \leq n$).

Az átmeneti együttható elnevezést az indokolja, hogy ezek a számok az (m, r) -, valamint (l, s) -négyzetesen emelkedő, illetve süllyedő faktoriálisok közötti összefüggések együtthatóiként jelennek meg.

5.10. Tétel. ([9, Theorem 3.1])

Ha $n, r, s \geq 0$ és $m, l \geq 1$, akkor

$$x^{\overline{n, m, r}} = \sum_{k=0}^n T_{m,l,r,s}(n, k) x^{\overline{k, l, s}},$$

$$x^{\underline{n, m, r}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} T_{m,l,r,s}(n, k) x^{\underline{k, l, s}}.$$

Az átmeneti együtthatók segítségével megadható a kapcsolat az m -színes r -Jacobi-Whitney-számok és az l -színes s -Jacobi-Whitney-számok között.

5.11. Tétel. ([9, Theorem 3.2])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ és $r, s \geq 0$, akkor

$$jw_{m,r}(n, k) = \sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n, j) jw_{l,s}(j, k),$$

$$JW_{m,r}(n, k) = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW_{l,s}(n, j) T_{l,m,s,r}(j, k).$$

Az alábbi tételben az elsőfajú és másodfajú Jacobi-Whitney-számok általánosított ortogonalitását mutatjuk meg, melyből $m = l$ és $r = s$ esetén az 5.7. Tétel állításait kapjuk vissza.

5.12. Tétel. ([9, Theorem 3.3])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ és $r, s \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} jw_{m,r}(n, j) JW_{l,s}(j, k) = T_{m,l,r,s}(n, k),$$

$$\sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} JW_{m,r}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) jw_{l,s}(i, k) = \delta_{n,k}.$$

5.4. Jacobi–Dowling-polinomok

Azokat a Bell-típusú polinomokat, melyek együtthatói rögzített első paraméterű másodfajú r -Whitney-számok, r -Dowling-polinomoknak nevezzük (lásd [10, 14, 40]). Ennek mintájára a másodfajú Jacobi–Whitney-számok segítségével definiálhatóak a Jacobi–Dowling-polinomok.

5.13. Definíció. ([9, Definition 4.1])

$n, r \geq 0$ és $m \geq 1$ esetén a

$$JD_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^n JW_{m,r}(n, k)x^k$$

polinomot az n -edik m -színes r -Jacobi–Dowling-polinomnak nevezzük.

A Jacobi–Dowling-polinomok teljesítik a következő rekurziót.

5.14. Tétel. ([9, Theorem 4.2])

Ha $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$JD_{n+1,m,r}(x) = xJD_{n,m,r}(x) + m(m+r)xJD'_{n,m,r}(x) + m^2x^2JD''_{n,m,r}(x).$$

Az alábbi tételben belátjuk, hogy a Jacobi–Dowling-polinomok minden gyöke valós, nempozitív és egyszerű.

5.15. Tétel. ([9, Theorem 4.3])

Ha $n, m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor a $JD_{n,m,r}(x)$ polinom minden gyöke valós és egyszerű, valamint egyik gyöke a 0, a többi gyöke pedig negatív.

Rögzített első paraméter esetén az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok sorozata is log-konkáv és unimodális.

5.16. Következmény. ([9, Corollary 4.4])

Ha $n, m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor a $(jw_{m,r}(n, k))_{k=0}^n$ és $(JW_{m,r}(n, k))_{k=0}^n$ sorozatok szigorúan log-konkávak és unimodálisak.

6. Jacobi–Whitney–Lah-számok

6.1. A Jacobi–Whitney–Lah-számok fogalma

Az 1. fejezetben láthattuk, hogy a Stirling-számok különböző általánosításai a Lah-számok esetén is értelmezhetőek. A Lah-, r -Lah- és r -Whitney–Lah-számokat is kombinatorikus interpretáción keresztül vezettük be, de azok a (\star) formulának megfelelően rendre az első- és másodfajú Stirling-, r -Stirling- és r -Whitney-számok segítségével is definiálhatóak.

A szakirodalomban a Lah-számoknak sem a Legendre-, sem a Jacobi-változata nem szerepel. Most az 5. fejezethez hasonlóan még általánosabb kombinatorikus számokat vezetünk be, a Jacobi–Whitney–Lah-számokat, amit a fentiek alapján kétféleképpen tehetünk meg.

A másodfajú Jacobi–Whitney-számok kombinatorikus definíciójában osztályok helyett rendezett osztályokat tekintve az első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számokhoz jutunk.

6.1. Definíció. ([5, Definition 2.1])

Legyenek $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$. Egy (Φ_1, Φ_2) rendezett párt (n, k) paraméterű m -színes r -Jacobi–Whitney–Lah-osztályozáspárnak nevezünk, ha

- Φ_1 az $1, \dots, n$ elemek egy m -színes Whitney-színezett, k darab rendezett osztályba történő 0 -osztályozása,
- Φ_2 az $1, \dots, n + r$ elemek egy m -színes Whitney-színezett, $k + r$ darab rendezett osztályba történő r -osztályozása,
- a Φ_1 -ben lévő rendezett osztályok maximumainak halmaza megegyezik a Φ_2 -beli nem-kitüntetett rendezett osztályok maximumainak halmazával.

Ezen rendezett osztályokba történő osztályozásokból álló párok számát jelöli a $JWL_{m,r}^{(1)}(n, k)$ első típusú m -színes r -Jacobi–Whitney–Lah-szám.

A második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számokat rögzített első paraméterű elsőfajú Jacobi–Whitney-számok és rögzített második paraméterű másodfajú Jacobi–Whitney-számok szorzatösszegeként vezetjük be.

6.2. Definíció. ([5, Definition 3.1])

Legyenek $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$. Ekkor a

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n, k) = \sum_{j=k}^n jw_{m,r}(n, j)JW_{m,r}(j, k)$$

formulával értelmezett $JWL_{m,r}^{(2)}(n, k)$ számot *második típusú m-színes r-Jacobi-Whitney-Lah-számnak* nevezzük.

A fejezet további részében látni fogjuk, hogy a Lah-számok korábbi általánosításával ellentétben a Jacobi-Whitney-Lah-számok kétféle megközelítése különböző kombinatorikus számokat eredményez.

6.2. Első típusú Jacobi-Whitney-Lah-számok

Az első típusú Jacobi-Whitney-Lah-számok kombinatorikus definíciója alapján megfontolható, hogy $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$ esetén

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad JW_{m,r}^{(1)}(n, n) = 1.$$

Az alábbi tételben az első típusú Jacobi-Whitney-Lah-számok további speciális értékeit adjuk meg.

6.3. Tétel. ([5, Theorem 2.2])

Ha $n, m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, 1) = m^{n-1}n!(2m + 2r|m)^{\overline{n-1}},$$

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, n-1) = 4m \left(2m \binom{n}{3} + (m+r) \binom{n}{2} \right).$$

Az első típusú Jacobi-Whitney-Lah-számok rekurzióját is kombinatorikus gondolatokkal bizonyítjuk.

6.4. Tétel. ([5, Theorem 2.3])

Ha $1 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n+1, k) = JW_{m,r}^{(1)}(n, k-1) + m(n+k)(m(n+k) + 2r)JWL_{m,r}^{(1)}(n, k).$$

Az első típusú Jacobi-Whitney-Lah-számok függőleges rekurziójának igazolásához szintén kombinatorikus ötletet használunk.

6.5. Tétel. ([5, Theorem 2.4])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$\begin{aligned} JWL_{m,r}^{(1)}(n+1, k+1) \\ = \sum_{j=k}^n (m(n+k+1)|m)^{\overline{n-j}} (m(n+k+1) + 2r|m)^{\overline{n-j}} JWL_{m,r}^{(1)}(j, k). \end{aligned}$$

A következő tételben a Jacobi–Whitney-számok szimmetrikus polinomos előállításához hasonló formulát adunk meg az első típusú Jacobi–Whitney–Lah-számokra.

6.6. Tétel. ([5, Theorem 2.5])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n-1} \prod_{j=1}^{n-k} m(2i_j - j + 1)(m(2i_j - j + 1) + 2r).$$

6.3. Második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok

A második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok definíciója, illetve az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok megfelelő tulajdonságai alapján kapjuk, hogy $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$ esetén

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad JWL_{m,r}^{(2)}(n, n) = 1.$$

A második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok más speciális értékeit a következő tételben adjuk meg.

6.7. Tétel. ([5, Theorem 3.2])

Ha $n, m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n, 1) = \frac{(m(m+r))^{\overline{n, \overline{m, r}}}}{m(m+r)},$$

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n, n-1) = 2m \left(2m \binom{n}{3} + (m+r) \binom{n}{2} \right).$$

A második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok segítségével írható le a kapcsolat a négyzetesen emelkedő és négyzetesen süllyedő faktoriálisok között.

6.8. Tétel. ([5, Theorem 3.3])

Ha $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n JWL_{m,r}^{(2)}(n, k) x^{\overline{\overline{k, m, r}}},$$

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} JWL_{m,r}^{(2)}(n, k) x^{\overline{\overline{k, m, r}}}.$$

A második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok rekurziójában az első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számok rekurzióiban szereplő együttthatók összege jelenik meg.

6.9. Tétel. ([5, Theorem 3.4])

Ha $1 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n+1, k) = JWL_{m,r}^{(2)}(n, k-1) + (mn(mn+r) + mk(mk+r)) JWL_{m,r}^{(2)}(n, k).$$

A második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok teljesítik a következő függőleges rekurziót.

6.10. Tétel. ([5, Theorem 3.5])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n+1, k+1) = \sum_{j=k}^n \frac{(m(k+1)(m(k+1)+r))^{\overline{\overline{n+1, m, r}}}}{(m(k+1)(m(k+1)+r))^{\overline{\overline{j+1, m, r}}}} JWL_{m,r}^{(2)}(j, k).$$

Az alábbi tételben a második típusú 1-színű r -Jacobi–Whitney–Lah-számok explicit formuláját adjuk meg.

6.11. Tétel. ([5, Theorem 3.6])

Ha $0 \leq k \leq n$ és $r \geq 0$, akkor

$$JWL_{1,r}^{(2)}(n, k) = \frac{1}{(2k+r)!} \sum_{j=0}^{2k+r} (-1)^j \binom{2k+r}{j} (k-j+1)^{\overline{r}} ((k-j)(k-j+r))^{\overline{\overline{n, 1, r}}}.$$

A Lah-számokhoz hasonlóan a második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok is ön-ortogonálisak.

6.12. Tétel. ([5, Theorem 3.7])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JWL_{m,r}^{(2)}(n, j) JWL_{m,r}^{(2)}(j, k) = \delta_{n,k}.$$

A következő tétel a második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok és az első-, illetve másodfajú Jacobi–Whitney-számok közötti összefüggéseket írja le.

6.13. Tétel. ([5, Theorem 3.8])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ és $r \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) j w_{m,r}(j, k) = j w_{m,r}(n, k),$$

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} JW_{m,r}(n, j) JW L_{m,r}^{(2)}(j, k) = JW_{m,r}(n, k).$$

Az 5.3. alfejezetben bevezetett átmeneti együtthatók segítségével megadhatóak a 6.8. Tételnél általánosabb kapcsolatok a négyzetesen emelkedő és négyzetesen süllyedő faktoriálisok között.

6.14. Tétel. ([5, Theorem 3.9])

Ha $n, r, s \geq 0$ és $m, l \geq 1$, akkor

$$x^{\overline{n, \overline{m, \overline{r}}}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, k) x^{\overline{k, l, s}},$$

$$x^{\overline{n, \overline{m, \overline{r}}}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n, j) JW L_{l,s}^{(2)}(j, k) x^{\overline{k, l, s}},$$

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, k) x^{\overline{\overline{k, l, s}}},$$

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{n-k} T_{m,l,r,s}(n, j) JW L_{l,s}^{(2)}(j, k) x^{\overline{\overline{k, l, s}}}.$$

Az alábbiakban ismét az átmeneti együtthatók alkalmazásával általánosítjuk először a 6.12. Tételt, majd a 6.13. Tételt.

6.15. Tétel. ([5, Theorem 3.10])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ és $r, s \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) JW L_{l,s}^{(2)}(i, k) = T_{m,l,r,s}(n, k).$$

6.16. Tétel. ([5, Theorem 3.11])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ és $r, s \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} JW_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) jw_{l,s}(i, k) = jw_{m,r}(n, k),$$

$$\sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{n-j} JW_{m,r}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) JW_{l,s}^{(2)}(i, k) = JW_{l,s}(n, k).$$

Végül megvizsgáljuk, mi történik, ha a második típusú Jacobi–Whitney–Lah-számok definíciójában olyan első- és másodfajú Jacobi–Whitney-számokat kombinálunk, ahol a színek száma és a kitüntetett elemek száma is különböző.

6.17. Tétel. ([5, Theorem 3.12])

Ha $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ és $r, s \geq 0$, akkor

$$\sum_{j=k}^n jw_{m,r}(n, j) JW_{l,s}(j, k) = \sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n, j) JW_{l,s}^{(2)}(j, k).$$



Nyilvántartási szám: DEENK/143/2023.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Arnóczki Tímea

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

MTMT azonosító: 10063750

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

1. **Arnóczki, T.:** Elements with prime and small indices in bicyclic biquadratic number fields.

Period. Math. Hung. 77 (1), 83-93, 2018. ISSN: 0031-5303.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10998-017-0233-9>

IF: 0.664

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (1)

2. **Arnóczki, T., Nyul, G.:** Minimal index of bicyclic biquadratic number fields.

Rocky Mt. J. Math. 50 (1), 1-8, 2020. ISSN: 0035-7596.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1216/rmj.2020.50.1>

IF: 0.568

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 1,232

**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):
1,232**

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudományometriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2023.05.08.



Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

Investigations in algebraic number theory and enumerative
combinatorics

Tímea Arnóczki

Supervisor: Dr. Gábor Nyul



UNIVERSITY OF DEBRECEN
Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
Debrecen, 2023

1 Introduction

The thesis consists of two main parts. In Part I we study the monogeneity of algebraic number fields related to algebraic number theory, then in Part II we discuss different Stirling-type numbers in enumerative combinatorics.

I

An essential topic of algebraic number theory deals with monogeneity of algebraic number fields and, in close connection, finding elements with given index, determining minimal index and field index.

It is known that all algebraic number fields have an integral basis. However, the existence of an integral basis of the form $(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})$, the so-called *power integral basis*, is not guaranteed. We say that a number field is *monogeneous* if it admits a power integral basis. Then α is called the *generator* of the above power integral basis.

In this section let K be an algebraic number field of degree n and denote by \mathbb{Z}_K the ring of algebraic integers in K . If $\alpha \in \mathbb{Z}_K$ is a primitive element, then its *index* $I(\alpha)$ is defined as the index of the subgroup $(\mathbb{Z}[\alpha], +)$ in the group $(\mathbb{Z}_K, +)$. It follows directly from the definition that α generates a power integral basis if and only if its index equals 1.

Two characteristic values of an algebraic number field are the minimal index and the field index. Considering the number field K , we define its *minimal index* m_K and *field index* i_K as the minimum and the greatest common divisor of the indices of all primitive algebraic integers in K , respectively. It is obvious that the field index divides the minimal index, furthermore the minimal index of a number field equals 1 if and only if it is monogeneous.

Let $(\omega_1 = 1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ be an integral basis of K . Then there exists a homogeneous polynomial $I(X_2, \dots, X_n)$ of degree $\frac{n(n-1)}{2}$ with integer coefficients and $n - 1$ variables such that if the primitive element $\alpha \in \mathbb{Z}_K$ has the form $\alpha = x_1 + x_2\omega_2 + \dots + x_n\omega_n$ ($x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$) in the integral basis, then

$$I(\alpha) = |I(x_2, \dots, x_n)|.$$

This polynomial is called the *index form* corresponding to the above integral basis.

Hence finding elements with a positive integer index A is equivalent to solving a diophantine equation

$$I(x_2, \dots, x_n) = \pm A,$$

the so-called *index form equation*.

In Section 2 we study a family of quartic number fields, the bicyclic biquadratic number fields in connection with monogeneity. After reviewing the literature, in Subsection 2.2, which is based on the publication [4], we give necessary and sufficient conditions for the existence of elements with prime as well as small indices in totally complex bicyclic biquadratic number fields, and we also determine these elements with given index. In Subsection 2.3, collecting the results of [6], we strengthen a theorem of T. Nakahara by showing that for an arbitrary natural number there exist infinitely many totally complex bicyclic biquadratic number fields whose field index is 1 and minimal index just equals to the fixed number. We prove similar assertions also for the other possible values of the field index.

In Section 3 we present the results of [7], answering a former conjecture on the monogeneity of pure quartic number fields. I. Gaál and L. Remete conjectured that there exist exactly three monogeneous number field $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ with square-free m satisfying $m \equiv 1 \pmod{4}$. Contrary to this, we show that the number of such monogeneous fields is infinite if the *abc* conjecture is true. Furthermore, we study the minimal index of pure quartic number fields with square-free parameter, and in the totally complex case we also describe the elements with minimal index.

II

Stirling numbers are basic objects in enumerative combinatorics. It is known that the *Stirling number of the first kind* $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ counts the permutations of the numbers $1, \dots, n$ that are the product of k pairwise disjoint cycles, while the *Stirling number of the second kind* $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ denotes the number of partitions of the elements $1, \dots, n$ into k blocks ($0 \leq k \leq n$). J. Stirling [79] introduced these numbers by the polynomial identities

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] x^k, \quad x^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^k$$

between rising factorials and powers, as well as powers and falling factorials, respectively, where the n th *rising* and k th *falling factorial* of x are defined by

$$x^{\overline{n}} = \prod_{j=0}^{n-1} (x + j), \quad x^{\underline{k}} = \prod_{j=0}^{k-1} (x - j).$$

If we modify the definition of Stirling numbers of the second kind such that the order of the elements in the blocks matters, then we obtain Lah numbers, that is the *Lah number* $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ gives the number of partitions of the elements $1, \dots, n$ into k ordered blocks ($0 \leq k \leq n$). The Lah numbers describe the connection between rising and falling factorials, I. Lah [54, 55] introduced the numbers named after him also by this polynomial identity. The Lah number $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ can be expressed as the sum of the products of Stirling numbers of the first kind with upper parameter n and Stirling numbers of the second kind with lower parameter k , that is by the formula

$$\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \sum_{j=k}^n \left[\begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right] \left\{ \begin{smallmatrix} j \\ k \end{smallmatrix} \right\}. \quad (\star)$$

Stirling numbers of the first and second kind have several generalizations and variants. In the thesis the r -generalization plays an important role, when certain elements cannot belong to the same cycle or block.

Let $0 \leq k \leq n$ and $r \geq 0$ be integers. We say that a permutation/partition of the elements $1, \dots, n+r$ is an r -permutation/ r -partition if $n+1, \dots, n+r$ stand in distinct cycles/blocks. Then $n+1, \dots, n+r$ are called *distinguished elements*, and a cycle or block containing a distinguished element will be referred to as a *distinguished cycle* or a *distinguished block*. The r -Stirling number of the first kind $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$ denotes the number of r -permutations of the elements $1, \dots, n+r$ with $k+r$ pairwise disjoint cycles in their cycle decomposition, while r -partitions of the elements $1, \dots, n+r$ into $k+r$ blocks are counted by the r -Stirling number of the second kind $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}_r$. These combinatorial numbers were defined independently by L. Carlitz [12], A. Z. Broder [11] and R. Merris [58].

Similarly to the above, G. Nyul and G. Rácz [73] introduced the r -Lah number $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r$ as the number of r -partitions of the elements $1, \dots, n+r$ into $k+r$ ordered blocks.

As a further generalization of r -Stirling numbers, I. Mező [59] defined r -Whitney numbers of the first and second kind. For these numbers E. Gyimesi and G. Nyul [41] provided combinatorial meanings by colouring the elements.

In the rest of this section let $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$ be integers. A *Whitney-coloured r -permutation with m colours* is an r -permutation where

- the greatest elements of the cycles are not coloured,
- in a distinguished cycle an element is not coloured if there is no greater element on the arc from the distinguished element to this element,

- any other element is coloured with one of the m colours.

The m -colour r -Whitney number of the first kind $w_{m,r}(n, k)$ gives the number of Whitney-coloured r -permutations of the elements $1, \dots, n + r$ with m colours that split into the product of $k + r$ pairwise disjoint cycles.

A *Whitney-coloured r -partition with m colours* is an r -partition where

- the greatest elements of the blocks are not coloured,
- the elements of the distinguished blocks are not coloured,
- any other element is coloured with one of the m colours.

The m -colour r -Whitney number of the second kind $W_{m,r}(n, k)$ counts these Whitney-coloured r -partitions of the elements $1, \dots, n + r$ with m colours into $k + r$ blocks.

We note that I. Mező introduced the above numbers by their polynomial identities, in which n th rising factorials with difference m and k th falling factorials with difference m appear. They are denoted and defined by

$$(x|m)^{\overline{n}} = \prod_{j=0}^{n-1} (x + mj), \quad (x|m)^{\underline{k}} = \prod_{j=0}^{k-1} (x - mj).$$

Similarly to the formula (\star) , G.-S. Cheon and J.-H. Jung [14] introduced r -Whitney-Lah numbers as the sum of products of r -Whitney numbers of the first and second kind. Later, E. Gyimesi and G. Nyul [41] gave combinatorial interpretations to these numbers by modifying the previous colouring rules.

A *Whitney-coloured r -partition with m colours into ordered blocks* is an r -partition into ordered blocks where

- the greatest elements of the ordered blocks are not coloured,
- in a distinguished ordered block an element is not coloured if there is no greater element between this element and the distinguished element,
- any other element is coloured with one of the m colours.

The m -colour r -Whitney-Lah number $WL_{m,r}(n, k)$ denotes the number of these Whitney-coloured r -partitions of the elements $1, \dots, n + r$ with m colours into $k + r$ ordered blocks.

In Section 4 we discuss a variant of r -Stirling numbers of the second kind where the cardinality of the blocks is at most 2. Our combinatorial theorems regarding these restricted r -Stirling numbers, as well as the log-concavity and unimodality properties studied through the restricted r -Bell polynomials are contained in [8].

In Section 5, as a Whitney-type generalization of the briefly reviewed Jacobi–Stirling numbers, we define new combinatorial numbers. The Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind count certain ordered pairs of Whitney-coloured r -permutations and r -partitions. We aim to prove their properties also combinatorially, furthermore we show that the roots of the Jacobi–Dowling polynomials, which we construct from these numbers, are real. Our results can be found in [9].

To introduce the Jacobi–Whitney variant of the Lah numbers we have two options: we can define them combinatorially or with the help of Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind, similarly to the formula (\star) . Contrary to our expectations, the differently defined Jacobi–Whitney–Lah numbers do not coincide, we detail their investigations in Section 6, based on [5].

Part I

Investigations in algebraic number theory

2 Bicyclic biquadratic number fields

2.1 Former results on monogeneity

Let $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ be distinct square-free integers. Then algebraic number fields of the form $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ are called *bicyclic biquadratic number fields*. In the thesis we investigate only *totally complex* bicyclic biquadratic number fields, that is when $m < 0$ or $n < 0$. Regarding the bicyclic biquadratic number field $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$, denote by $d > 0$ the greatest common divisor of m and n , and let m_1 and n_1 be defined by $m = dm_1$ and $n = dn_1$.

Considering the signs and residues of m, n, m_1, n_1 modulo 4, any totally complex bicyclic biquadratic number field $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ is included in one of the following eight cases:

Case 1: $m > 0, n < 0, m \equiv 1 \pmod{4}, n \equiv 1 \pmod{4}, m_1 \equiv 1 \pmod{4}, n_1 \equiv 1 \pmod{4}$

Case 2: $m > 0, n < 0, m \equiv 1 \pmod{4}, n \equiv 1 \pmod{4}, m_1 \equiv 3 \pmod{4}, n_1 \equiv 3 \pmod{4}$

Case 3/A: $m > 0, n < 0, m \equiv 1 \pmod{4}, n \equiv 2 \pmod{4}$

Case 3/B: $m < 0, n > 0, m \equiv 1 \pmod{4}, n \equiv 2 \pmod{4}$

Case 4/A: $m > 0, n < 0, m \equiv 2 \pmod{4}, n \equiv 3 \pmod{4}$

Case 4/B: $m < 0, n > 0, m \equiv 2 \pmod{4}, n \equiv 3 \pmod{4}$

Case 5/A: $m > 0, n < 0, m \equiv 3 \pmod{4}, n \equiv 3 \pmod{4}$

Case 5/B: $m < 0, n < 0, m \equiv 3 \pmod{4}, n \equiv 3 \pmod{4}$

Monogeneity of bicyclic biquadratic number fields was studied by T. Nakahara, I. Gaál, A. Pethő, M. Pohst, M.-N. Gras, F. Tanoé, Y. Motoda, H. H. Kim, Z. Wolske, B. Jadrijević, T. Funakura, G. Nyul and M.-L. Chang.

Now we summarize the results that we need later. In each case K. S. Williams [80] described an integral basis of bicyclic biquadratic number fields (Lemma 2.1), then I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst [29] determined the corresponding index forms (Lemma 2.2). They also established necessary and sufficient conditions for

bicyclic biquadratic number fields to have a given field index for any divisor of 12 (Lemma 2.3).

2.2 Elements with prime and small indices

As an extension of the result of G. Nyul [70] on elements with index 1, first we give necessary and sufficient conditions for totally complex bicyclic biquadratic number fields to have elements with odd prime index, as well as we determine all these elements with given index.

Theorem 2.5. ([4, Theorem 3.1])

Let $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ be distinct square-free integers belonging to one of the eight cases listed in the totally complex case, furthermore denote by $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ the integral basis of the bicyclic biquadratic number field $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ given in Lemma 2.1. If p is a positive odd prime, then the necessary and sufficient conditions for the existence of elements with index p in $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$, as well as the coordinates of these elements $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 + x_4\omega_4$ ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$) with index p are contained in Table 1. In Cases 1 and 2 there exist no elements with index p .

In the following we study the existence of elements with index at most 10, which are not covered by the previous theorem, in totally complex bicyclic biquadratic number fields.

Theorem 2.6. ([4, Theorem 3.2])

Let $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ be distinct square-free integers belonging to one of the eight cases listed in the totally complex case, furthermore denote by $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ the integral basis of the bicyclic biquadratic number field $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ given in Lemma 2.1. The necessary and sufficient conditions for the existence of elements with index $A \in \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$, as well as the coordinates of these elements $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 + x_4\omega_4$ ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$) with index A are contained in Tables 2–7. In those cases which do not appear in the table belonging to index A , there exist no elements with index A .

Here we present the result on elements with index 4, the other tables can be found in the thesis.

Table 1. Elements with prime index

Case	Condition	(x_2, x_3, x_4)
3/A	if $p \equiv 1 \pmod{4}$: $d = 1, m - 4n = p$ (*)	$\pm(1, 1, 0), \pm(1, -1, 0)$
	if $p \equiv 1 \pmod{4}$: $m_1 = 1, d - 4n_1 = p$ (*)	$\pm(1, -1, 2), \pm(1, 1, -2)$
3/B	if $p = 3$: $m = -3, n = 6$ (*)	$\pm(1, 0, 1), \pm(1, -1, 1),$ $\pm(-1, 0, 1), \pm(-1, -1, 1)$
	if $p \equiv 1 \pmod{4}$: $m_1 = -1, d - 4n_1 = -p$	$\pm(1, -1, 2), \pm(1, 1, -2)$
	if $p \equiv 3 \pmod{4}$: $m_1 = -1, d - 4n_1 = p$	
	if $p \equiv 3 \pmod{4}$: $d = 1, 4n - m = p$ (*)	$\pm(1, 1, 0), \pm(1, -1, 0)$
	if $p \equiv 5 \pmod{16}$, $p - 1$ is a square and $\frac{p+3}{4}$ is square-free: $m = -3, n = \frac{p+3}{4}$ (*)	$\pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, 0, 1), \pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, -1, 1),$ $\pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, 0, -1), \pm(\frac{\sqrt{p-1}}{2}, 1, -1)$
4/A	$m_1 = 2, d - n_1 = 2p$ (*)	$\pm(0, 0, 1), \pm(-1, 0, 1)$
	if $p = 3$: $m = 2, n = -1$ (*)	$\pm(0, 1, 1), \pm(0, -1, 1),$ $\pm(-1, 1, 1), \pm(-1, -1, 1)$
	if $p \equiv 1 \pmod{4}$, $p - 1$ is a square and $p + 1$ is square-free: $m = p + 1, n = -1$ (*)	$\pm(0, \frac{\sqrt{p-1}}{2}, 1), \pm(0, \frac{\sqrt{p-1}}{2}, -1),$ $\pm(-1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}, 1), \pm(1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}, -1)$
4/B	$m_1 = -2, d - n_1 = \pm 2p$	$\pm(-1, 0, 1), \pm(0, 0, 1)$
5/A	$d = 1, m - n = 4p$ (*)	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	if $p \equiv 1 \pmod{4}$: $n_1 = -1, 4d - m_1 = p$	$\pm(-1, 2, 1), \pm(1, -2, 1)$
	if $p \equiv 3 \pmod{4}$: $n_1 = -1, 4d - m_1 = -p$	
	if $p \equiv 1 \pmod{16}$, $p - 1$ is a square and $\frac{3p+1}{4}$ is square-free: $m = \frac{9p+3}{4}, n = \frac{-3p-1}{4}$ (*)	$\pm(0, 1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}), \pm(0, -1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}),$ $\pm(-1, 1, \frac{\sqrt{p-1}}{2}), \pm(1, -1, \frac{\sqrt{p-1}}{2})$

5/B	$d = 1, m - n = \pm 4p$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	if $p \equiv 1 \pmod{4}$: $n_1 = -1, 4d - m_1 = p$ (*)	$\pm(-1, 2, 1), \pm(1, -2, 1)$
	if $p \equiv 1 \pmod{4}$: $m_1 = -1, 4d - n_1 = p$ (*)	$\pm(1, 0, 1), \pm(-1, 0, 1)$

Table 3. Elements with index 4

Case	Condition	(x_2, x_3, x_4)
2	$n_1 = -1, 4d - m_1 = 1$	$\pm(1, 1, 2), \pm(1, -3, 2)$
	$n_1 = -1, d - 4m_1 = -1$	$\pm(2, -1, 4), \pm(2, -3, 4)$
	$n_1 = -1, d - m_1 = \pm 4$	$\pm(1, 0, 2), \pm(1, -2, 2)$
3/A	$n_1 = -2, d - m_1 = \pm 4$	$\pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$
3/B	$m = -3, n = 2$	$\pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$
	$m = -3, n = 6$	
	$m_1 = -1, d - 16n_1 = -1$	$\pm(1, -2, 4), \pm(1, 2, -4)$
5/A	$m = 3, n = -13$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$
	$m = 11, n = -5$	
	$m = 3, n = -1$	$\pm(0, 1, 1), \pm(-1, 1, 1),$ $\pm(0, 1, -1), \pm(-1, 1, -1)$
	$m = 15, n = -1$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0),$ $\pm(-2, 4, 1), \pm(-2, 4, -1)$
	$n_1 = -1, 16d - m_1 = 1,$ $(m, n) \neq (15, -1)$	$\pm(-2, 4, 1), \pm(-2, 4, -1)$
5/B	$d = 1, m - n = \pm 16$	$\pm(0, 1, 0), \pm(-1, 1, 0)$

Remark. For a fixed prime p , it is obvious that there exist only finitely many integers m and n satisfying the conditions signed by (*) and belonging to the given case. It can be shown that the other conditions in Table 1 and those conditions in Tables 2–7 which do not give particular values for m and n hold for infinitely many pairs (m, n) .

2.3 Minimal index

In connection with the minimal index we know results for several families of number fields, which assert that for an arbitrary natural number there exist infinitely many number fields belonging to the given family whose minimal index is greater than the fixed number. Statements of this type were proved by M. Hall, D. S. Dummit, H. Kisilevsky, T. Funakura and T. Nakahara [68], who showed, among others, that for any natural number there exist infinitely many bicyclic biquadratic number fields with field index 1 and minimal index greater than the given number.

B. K. Spearman, Q. Yang and J. Yoo [76] approached the above problem from a different point of view. They proved that for an arbitrary cube-free natural number there exist infinitely many pure cubic fields with minimal index just equal to the given number. In this direction we strengthen the previous result of T. Nakahara on bicyclic biquadratic number fields and extend it for all the other possible values of the field index.

Theorem 2.7. ([6, Theorem 1.1])

- (1) *If $a \in \{1, 3\}$, then for any positive multiple A of a , there exist infinitely many totally complex bicyclic biquadratic number fields with field index a and minimal index A .*
- (2) *If $a \in \{2, 4, 6, 12\}$, then for any positive multiple A of $2a$, there exist infinitely many totally complex bicyclic biquadratic number fields with field index a and minimal index A .*

Remark. By Theorem 2.6 we can give examples that the second assertion does not hold for all positive multiples A of a .

3 Pure quartic number fields

3.1 Former results on monogeneity

Let $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-4\}$ be a 4-power-free integer, which is not a square. If ϑ is a root of the irreducible polynomial $X^4 - m$, then the algebraic number field $K_m = \mathbb{Q}(\vartheta)$ is called a *pure quartic number field*. Briefly, we shall write $K_m = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$. In this section we are interested in only those pure quartic number fields K_m where m is square-free.

Considering pure quartic number fields K_m with square-free m , we distinguish the following three cases:

Case 1: $m \equiv 2$ or $3 \pmod{4}$

Case 2: $m \equiv 1 \pmod{8}$

Case 3: $m \equiv 5 \pmod{8}$

T. Funakura [25] (see also [34, 63]) gave an integral basis of pure quartic number fields and determined the corresponding index form (Lemma 3.1). He studied the monogeneity of these fields as well.

I. Gaál and L. Remete [34] completely described the monogeneity of pure quartic number fields K_m with square-free m and $m \not\equiv 9 \pmod{16}$ (see also the above mentioned result of T. Funakura). For the remaining case they formulated the following conjecture: If m is square-free and $m \equiv 9 \pmod{16}$, then K_m is monogeneous precisely if $m = 73$ or 89 , otherwise the minimal index of K_m equals 8. In fact, it will turn out that the situation is much more complicated, since there are probably infinitely many exceptions, not just these two.

3.2 Minimal index

According to the following theorem, the minimal index of a pure quartic number field with square-free parameter is 1, 4 or 8, and each value appears for infinitely many such fields. However, if we study the above cases separately, the situation is not so easy to describe.

Theorem 3.3. ([7, Theorem 3.1])

Let $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ be a square-free integer and $K_m = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$.

- In Case 1 the minimal index of K_m equals 1.

- In Case 2 the minimal index of K_m equals 1 or 8. The minimal index equals 8 for infinitely many m , and if the abc conjecture is true, then it equals 1 also for infinitely many m . But assuming $m < 0$, the minimal index equals 1 only for $m = -7$.
- In Case 3 the minimal index of K_m equals 1 for $m = -3$, otherwise it equals 4.

In the totally complex case, in other words if we additionally assume that the parameter of the pure quartic number field is negative, we also find all elements with minimal index.

Theorem 3.4. ([7, Theorem 3.2])

Let $m < 0$ be a square-free integer, $K_m = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$, and denote by $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ the integral basis of K_m given in Lemma 3.1. Then the coordinates of the elements $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 + x_4\omega_4$ ($x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$) with minimal index are

- $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(1, 0, 0)$ for $m = -1$;
- $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(-1, 0, 1), \pm(1, 1, 0), \pm(1, -1, 0)$ for $m = -3$;
- $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1)$ for $m = -7$;
- $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0, 0, 1), \pm(0, -1, 1), \pm(1, 0, 0)$ for $m = -15$;
- $(x_2, x_3, x_4) = \pm(1, 0, 0)$ for $m \notin \{-1, -3, -7, -15\}$.

Part II

Investigations in enumerative combinatorics

4 Restricted r -Stirling numbers

4.1 The notion of restricted r -Stirling numbers

H. L. Krall and O. Frink [53] introduced Bessel polynomials as the solution of certain second-order differential equations. The coefficients of these polynomials were first studied from a combinatorial point of view by J. Y. Choi and J. D. H. Smith [16]. They provided a combinatorial meaning for the reparametrized coefficients, which they called Bessel numbers. Their close connection with Stirling numbers is indicated by the fact that in the literature Bessel numbers are also referred to as restricted Stirling numbers, in the thesis we follow this terminology.

The *restricted Stirling number* $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{\leq 2}$ counts the partitions of the elements $1, \dots, n$ into k blocks with the restriction that each block contains at most 2 elements ($0 \leq k \leq n$).

Similarly to the r -generalization of Stirling numbers, G.-S. Cheon, J.-H. Jung and L. W. Shapiro [15] defined the *restricted r -Stirling number* $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}$ as the number of r -partitions of the elements $1, \dots, n+r$ into $k+r$ blocks such that each block has at most 2 elements ($0 \leq k \leq n, r \geq 0$).

4.2 Properties of restricted r -Stirling numbers

It follows directly from the definition of restricted r -Stirling numbers that $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = 0$ if $0 \leq k \leq n, r \geq 0$ and $n > 2k+r$, while there exists at least one required r -partition in case of $n \leq 2k+r$.

It is also obvious that $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = r^n$ and $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = 1$ if $n, r \geq 0$.

We prove the recurrence relation of restricted r -Stirling numbers by a combinatorial argument.

Theorem 4.1. ([8, Theorem 2.1])

If $1 \leq k \leq n$ and $r \geq 0$, then

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} + (2k+r-n) \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}.$$

The following theorem gives a vertical recurrence for restricted r -Stirling numbers.

Theorem 4.2. ([8, Theorem 2.2])

If $0 \leq k \leq n$ and $r \geq 0$, then

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = \sum_{j=k}^n (2k+r+1-j)^{\overline{n-j}} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2}.$$

The polynomial identities of restricted r -Stirling numbers describe the connection between shifted falling factorials and falling factorials with difference 2, as well as between shifted rising factorials and rising factorials with difference 2.

Theorem 4.3. ([8, Theorem 2.3])

If $n, r \geq 0$, then

$$(x+r)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} (x|2)^{\underline{k}},$$

$$(x-r)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} (x|2)^{\overline{k}}.$$

In the next theorem we prove an explicit formula for restricted r -Stirling numbers that is similar to the usual one for classical Stirling numbers of the second kind, by using the inclusion–exclusion principle.

Theorem 4.4. ([8, Theorem 2.4])

If $0 \leq k \leq n$ and $r \geq 0$, then

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} = \frac{1}{2^k k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (2(k-j)+r)^{\underline{n}}.$$

In case of $0 \leq k \leq n$ and $r, s \geq 0$, with the help of r -Stirling numbers of the first kind and s -Stirling numbers of the second kind we define the polynomial

$$p_{n,k,r,s}(x) = \sum_{j=k}^n \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_s x^{j-k}.$$

We show that these polynomials give signed restricted $(2s - r)$ -Stirling numbers after substituting -2 .

Theorem 4.5. ([8, Theorem 2.5])

If $0 \leq k \leq n$ and $0 \leq r \leq 2s$, then

$$p_{n,k,r,s}(-2) = (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_{2s-r}^{\leq 2}.$$

We prove in a combinatorial way that combining r -Stirling numbers of the second kind and restricted s -Stirling numbers, we obtain 2-colour $(r + s)$ -Whitney numbers of the second kind.

Theorem 4.6. ([8, Theorem 2.6])

If $0 \leq k \leq n$ and $r, s \geq 0$, then

$$\sum_{j=k}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\}_r \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_s^{\leq 2} = W_{2,r+s}(n, k).$$

4.3 Restricted r -Bell polynomials

The coefficients of the well-known Bell polynomials are Stirling numbers of the second kind with fixed upper parameter, hence we can define naturally the restricted r -Bell polynomials by using restricted r -Stirling numbers.

In case of $n, r \geq 0$, the polynomial

$$B_{n,r}^{\leq 2}(x) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{\leq 2} x^k$$

is called the n th restricted r -Bell polynomial. These polynomials were introduced by J.-H. Jung, I. Mező and J. L. Ramírez [49], but we remark that they were already studied by F. L. Miksa, L. Moser and M. Wyman [60] for $r = 0$.

The recurrence of restricted r -Stirling numbers implies a recurrence relation for the restricted r -Bell polynomials.

Theorem 4.7. ([8, Theorem 3.1])

If $n, r \geq 0$, then

$$B_{n+1,r}^{\leq 2}(x) = (x + r - n)B_{n,r}^{\leq 2}(x) + 2x \left(B_{n,r}^{\leq 2}(x) \right)'.$$

In the following we prove the conjecture of J.-H. Jung, I. Mező and J. L. Ramírez [49] on the real-rootedness of restricted r -Bell polynomials.

Theorem 4.8. ([8, Theorem 3.2])

If $n \geq 1$ and $r \geq 0$, then all roots of the polynomial $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ are real and non-positive.

Log-concavity and unimodality of the sequence of restricted r -Stirling numbers with a fixed upper parameter are immediate consequences of the previous theorem.

Corollary 4.9. ([8, Corollary 3.3])

If $n \geq 1$ and $r \geq 0$, then the sequence $\left(\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\}_r^{\leq 2}\right)_{k=0}^n$ is log-concave and unimodal.

We formulate a stronger conjecture about the roots, namely we expect that the negative roots are all simple.

Conjecture 4.10. ([8, Conjecture 3.4])

Let $n \geq 1$ and $r \geq 0$. If $n \leq r$, then all roots of the polynomial $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ are negative and simple. If $n > r$ and

- $n \equiv r \pmod{2}$, then 0 has multiplicity $\frac{n-r}{2}$, the other roots of the polynomial $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ are negative and simple,
- $n \not\equiv r \pmod{2}$, then 0 has multiplicity $\frac{n-r+1}{2}$, the other roots of the polynomial $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$ are negative and simple.

We prove a partial result concerning this conjecture.

Theorem 4.11. ([8, Theorem 3.5])

Let $n \geq 1$, $r \geq 0$ and $n \equiv r \pmod{2}$. If the assertion in the conjecture holds for the polynomial $B_{n,r}^{\leq 2}(x)$, then it also holds for the polynomial $B_{n+1,r}^{\leq 2}(x)$.

5 Jacobi–Whitney numbers

5.1 The notion of Jacobi–Whitney numbers

W. N. Everitt, L. L. Littlejohn and R. Wellman [23] introduced a new class of Stirling-like numbers, the so-called Legendre–Stirling numbers of the second kind. A few years later the authors together with K. H. Kwon and G. J. Yoon [22] defined Jacobi–Stirling numbers of the second kind as their generalization. Both of them came from a deep problem in analysis, namely the spectral theory of composition powers of the classical second-order Legendre and Jacobi differential expressions. In the papers [2, 22] the first kind variants of these numbers were introduced as well (see also [3, 21]).

G. E. Andrews and L. L. Littlejohn [3], E. S. Egge [21], G. E. Andrews, E. S. Egge, W. Gawronski and L. L. Littlejohn [1] investigated Legendre–Stirling and Jacobi–Stirling numbers from a combinatorial point of view (see also [35, 61]), but there have been no unified combinatorial interpretations for the first and second kind case. In the following we give definitions where permutations and r -permutations, or partitions and r -partitions appear together, hence they also fit with the definitions of ordinary Stirling numbers. However, our results concern not only these combinatorial numbers, but they are far more general. With respect to the earlier mentioned Whitney-generalization of r -Stirling numbers, we introduce Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind, which give back Jacobi–Stirling and Legendre–Stirling numbers as special cases.

Definition 5.1. ([9, Definition 2.1])

Let $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$. An ordered pair (π_1, π_2) is an m -colour r -Jacobi–Whitney pair of permutations with parameter (n, k) if

- π_1 is a Whitney-coloured 0-permutation of the elements $1, \dots, n$ with m colours that is the product of k pairwise disjoint cycles,
- π_2 is a Whitney-coloured r -permutation of the elements $1, \dots, n+r$ with m colours that is the product of $k+r$ pairwise disjoint cycles,
- the set of maxima of the cycles in π_1 coincides with the set of maxima of the non-distinguished cycles in π_2 .

The number of these pairs of permutations is denoted by the m -colour r -Jacobi–Whitney number of the first kind $jw_{m,r}(n, k)$.

If $m = 1$, that is essentially we disregard the colouring, we obtain the r -Jacobi–Stirling number of the first kind $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r$, and specially $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_1$ is the Legendre–Stirling number of the first kind.

Definition 5.2. ([9, Definition 2.2])

Let $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$. An ordered pair (Π_1, Π_2) is an m -colour r -Jacobi–Whitney pair of partitions with parameter (n, k) if

- Π_1 is a Whitney-coloured 0-partition of the elements $1, \dots, n$ with m colours into k blocks,
- Π_2 is a Whitney-coloured r -partition of the elements $1, \dots, n + r$ with m colours into $k + r$ blocks,
- the set of maxima of the blocks in Π_1 coincides with the set of maxima of the non-distinguished blocks in Π_2 .

These pairs of partitions are counted by the m -colour r -Jacobi–Whitney number of the second kind $JW_{m,r}(n, k)$.

If $m = 1$, we have the r -Jacobi–Stirling number of the second kind $\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\}_r$, and specially $\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\}_1$ is the Legendre–Stirling number of the second kind.

5.2 Properties of Jacobi–Whitney numbers

In this subsection we present the properties for Jacobi–Whitney numbers, the corresponding assertions for Jacobi–Stirling and Legendre–Stirling numbers follow by substituting $m = 1$ and $m = r = 1$, respectively.

It comes easily from the definitions that if $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, then

$$jw_{m,r}(n, 0) = JW_{m,r}(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad jw_{m,r}(n, n) = JW_{m,r}(n, n) = 1.$$

By combinatorial observations we can obtain other special values of Jacobi–Whitney numbers.

Theorem 5.3. ([9, Theorem 2.3])

If $n, m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$jw_{m,r}(n, 1) = m^{n-1}(n-1)!(m+r|m)^{\overline{n-1}}, \quad JW_{m,r}(n, 1) = (m(m+r))^{n-1},$$

$$jw_{m,r}(n, n-1) = JW_{m,r}(n, n-1) = m \left(2m \binom{n}{3} + (m+r) \binom{n}{2} \right).$$

We prove the recurrence relations of Jacobi–Whitney numbers also combinatorially.

Theorem 5.4. ([9, Theorem 2.4])

If $1 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$jw_{m,r}(n+1, k) = jw_{m,r}(n, k-1) + mn(mn+r)jw_{m,r}(n, k),$$

$$JW_{m,r}(n+1, k) = JW_{m,r}(n, k-1) + mk(mk+r)JW_{m,r}(n, k).$$

In the next theorem we show the vertical recurrences of Jacobi–Whitney numbers, where we give combinatorial proofs.

Theorem 5.5. ([9, Theorem 2.5])

If $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$jw_{m,r}(n+1, k+1) = \sum_{j=k}^n (mn|m)^{n-j} (mn+r|m)^{n-j} jw_{m,r}(j, k),$$

$$JW_{m,r}(n+1, k+1) = \sum_{j=k}^n (m(k+1))^{n-j} (m(k+1)+r)^{n-j} JW_{m,r}(j, k).$$

In case of $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, we define the n th (m, r) -quadratically rising and (m, r) -quadratically falling factorial by the expressions

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \prod_{j=0}^{n-1} (x + mj(mj+r)), \quad x^{\underline{\underline{n, m, r}}} = \prod_{j=0}^{n-1} (x - mj(mj+r)).$$

The polynomial identities of Jacobi–Whitney numbers describe the connections between these quadratically rising as well as quadratically falling factorials and powers.

Theorem 5.6. ([9, Theorem 2.6])

If $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, then

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n jw_{m,r}(n, k)x^k, \quad x^{\underline{\underline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} jw_{m,r}(n, k)x^k,$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n JW_{m,r}(n, k)x^{\underline{\underline{k, m, r}}}, \quad x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} JW_{m,r}(n, k)x^{\overline{\overline{k, m, r}}}.$$

The polynomial identities enable us to derive the orthogonality of Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind.

Theorem 5.7. ([9, Theorem 2.7])

If $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} j w_{m,r}(n, j) J W_{m,r}(j, k) = \delta_{n,k},$$

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} J W_{m,r}(n, j) j w_{m,r}(j, k) = \delta_{n,k}.$$

In the following theorem we express Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind with the help of elementary and complete symmetric polynomials, and we also prove them by combinatorial arguments.

Theorem 5.8. ([9, Theorem 2.8])

If $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$j w_{m,r}(n, k) = e_{n-k}(m(m+r), 2m(2m+r), \dots, m(n-1)(m(n-1)+r)),$$

$$J W_{m,r}(n, k) = h_{n-k}(m(m+r), 2m(2m+r), \dots, mk(mk+r)),$$

where $e_{n-k}(x_1, \dots, x_l)$ and $h_{n-k}(x_1, \dots, x_l)$ denote the $(n-k)$ th elementary and complete symmetric polynomial in l indeterminates, respectively.

In the next theorem we prove an explicit formula for Jacobi–Stirling numbers of the second kind, which is similar to the one for classical Stirling numbers of the second kind.

Theorem 5.9. ([9, Theorem 2.9])

If $0 \leq k \leq n$ and $r \geq 0$, then

$$\left\{ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right\}_r = \frac{1}{(2k+r)!} \sum_{j=0}^{2k+r} (-1)^j \binom{2k+r}{j} (k-j+1)^{\overline{r}} ((k-j)(k-j+r))^n.$$

5.3 Transition coefficients

In this subsection we investigate the connections between Jacobi–Whitney numbers where the number of colours as well as the number of distinguished elements are different. In order to do this, we need to introduce some auxiliary numbers.

For fixed $m, l \geq 1$ and $r, s \geq 0$, the *transition coefficients* $T_{m,l,r,s}(n, k)$ ($0 \leq k \leq n$) are defined by the following initial values and recurrence relation:

- $T_{m,l,r,s}(n, 0) = \delta_{n,0}$ ($n \geq 0$), $T_{m,l,r,s}(n, n) = 1$ ($n \geq 0$),
- $T_{m,l,r,s}(n+1, k) = T_{m,l,r,s}(n, k-1) + (mn(mn+r) - lk(lk+s))T_{m,l,r,s}(n, k)$ ($1 \leq k \leq n$).

We note that for $m \geq 1$ and $r \geq 0$, $T_{m,m,r,r}(n, k) = \delta_{n,k}$ ($0 \leq k \leq n$).

The reason of the choice of this name is that these numbers appear as coefficients in the transition relations between (m, r) - and (l, s) -quadratically rising and falling factorials.

Theorem 5.10. ([9, Theorem 3.1])

If $n, r, s \geq 0$ and $m, l \geq 1$, then

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n T_{m,l,r,s}(n, k) x^{\overline{\overline{k, l, s}}},$$

$$x^{\underline{\underline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} T_{m,l,r,s}(n, k) x^{\underline{\underline{k, l, s}}}.$$

Transition coefficients allow us to describe the connections between m -colour r -Jacobi–Whitney and l -colour s -Jacobi–Whitney numbers.

Theorem 5.11. ([9, Theorem 3.2])

If $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ and $r, s \geq 0$, then

$$jw_{m,r}(n, k) = \sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n, j) jw_{l,s}(j, k),$$

$$JW_{m,r}(n, k) = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW_{l,s}(n, j) T_{l,m,s,r}(j, k).$$

In the next theorem we show the generalized orthogonality relations of Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind. If $m = l$ and $r = s$, then they give back the assertions of Theorem 5.7.

Theorem 5.12. ([9, Theorem 3.3])

If $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ and $r, s \geq 0$, then

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} jw_{m,r}(n, j) JW_{l,s}(j, k) = T_{m,l,r,s}(n, k),$$

$$\sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} JW_{m,r}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) jw_{l,s}(i, k) = \delta_{n,k}.$$

5.4 Jacobi–Dowling polynomials

Those Bell-type polynomials whose coefficients are r -Whitney numbers of the second kind with fixed first parameter are called r -Dowling polynomials (see [10, 14, 40]). Similarly, we can define Jacobi–Dowling polynomials related to Jacobi–Whitney numbers of the second kind.

Definition 5.13. ([9, Definition 4.1])

For $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, the polynomial

$$JD_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^n JW_{m,r}(n, k)x^k$$

is called the n th m -colour r -Jacobi–Dowling polynomial.

Jacobi–Dowling polynomials satisfy the following recurrence relation.

Theorem 5.14. ([9, Theorem 4.2])

If $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, then

$$JD_{n+1,m,r}(x) = xJD_{n,m,r}(x) + m(m+r)xJD'_{n,m,r}(x) + m^2x^2JD''_{n,m,r}(x).$$

In the next theorem we show that all roots of the Jacobi–Dowling polynomials are real, non-positive and simple.

Theorem 5.15. ([9, Theorem 4.3])

If $n, m \geq 1$ and $r \geq 0$, then the polynomial $JD_{n,m,r}(x)$ has only real and simple roots, one of them is 0, the others are negative.

For a fixed first parameter the sequences of Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind are also log-concave and unimodal.

Corollary 5.16. ([9, Corollary 4.4])

If $n, m \geq 1$ and $r \geq 0$, then the sequences $(jw_{m,r}(n, k))_{k=0}^n$ and $(JW_{m,r}(n, k))_{k=0}^n$ are strictly log-concave and unimodal.

6 Jacobi–Whitney–Lah numbers

6.1 The notion of Jacobi–Whitney–Lah numbers

In Section 1 we have seen that the mentioned generalizations of Stirling numbers also exist for Lah numbers. We introduced Lah, r -Lah and r -Whitney–Lah numbers by their combinatorial interpretations, but we can also define them with the help of Stirling, r -Stirling and r -Whitney numbers of the first and second kind, respectively, by the counterpart of the formula (\star) .

In the literature we find neither the Legendre nor the Jacobi variant of Lah numbers. Now, similarly to Section 5, we introduce more general combinatorial numbers, the Jacobi–Whitney–Lah numbers. According to the above, we can do this in two different ways.

If we consider ordered blocks instead of blocks in the combinatorial definition of Jacobi–Whitney numbers of the second kind, we obtain Jacobi–Whitney–Lah numbers of the first type.

Definition 6.1. ([5, Definition 2.1])

Let $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$. An ordered pair (Φ_1, Φ_2) is an m -colour r -Jacobi–Whitney–Lah pair of partitions with parameter (n, k) if

- Φ_1 is a Whitney-coloured 0-partition of the elements $1, \dots, n$ with m colours into k ordered blocks,
- Φ_2 is a Whitney-coloured r -partition of the elements $1, \dots, n + r$ with m colours into $k + r$ ordered blocks,
- the set of maxima of the ordered blocks in Φ_1 coincides with the set of maxima of the non-distinguished ordered blocks in Φ_2 .

The number of these pairs of partitions into ordered blocks is given by the m -colour r -Jacobi–Whitney–Lah number of the first type $JWL_{m,r}^{(1)}(n, k)$.

We introduce Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type as the sum of the products of Jacobi–Whitney numbers of the first kind with fixed first parameter and Jacobi–Whitney numbers of the second kind with fixed second parameter.

Definition 6.2. ([5, Definition 3.1])

Let $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$. Then the number $JWL_{m,r}^{(2)}(n, k)$ defined by the formula

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n, k) = \sum_{j=k}^n jw_{m,r}(n, j)JW_{m,r}(j, k)$$

is called an m -colour r -Jacobi–Whitney–Lah number of the second type.

In the remaining part of this section we will see that, contrary to the previous generalizations of Lah numbers, the two approaches of Jacobi–Whitney–Lah numbers produce different combinatorial numbers.

6.2 Jacobi–Whitney–Lah numbers of the first type

The combinatorial definition of Jacobi–Whitney–Lah numbers of the first type implies that if $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, then

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad JW_{m,r}^{(1)}(n, n) = 1.$$

In the next theorem we give further special values of Jacobi–Whitney–Lah numbers of the first type.

Theorem 6.3. ([5, Theorem 2.2])

If $n, m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, 1) = m^{n-1}n!(2m+2r|m)^{\overline{n-1}},$$

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, n-1) = 4m \left(2m \binom{n}{3} + (m+r) \binom{n}{2} \right).$$

We show the recurrence relation of Jacobi–Whitney–Lah numbers of the first type also in a combinatorial way.

Theorem 6.4. ([5, Theorem 2.3])

If $1 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n+1, k) = JW_{m,r}^{(1)}(n, k-1) + m(n+k)(m(n+k)+2r)JWL_{m,r}^{(1)}(n, k).$$

The vertical recurrence of Jacobi–Whitney–Lah numbers of the first type is also proved by a combinatorial idea.

Theorem 6.5. ([5, Theorem 2.4])

If $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$\begin{aligned} JWL_{m,r}^{(1)}(n+1, k+1) \\ = \sum_{j=k}^n (m(n+k+1)|m)^{n-j} (m(n+k+1) + 2r|m)^{n-j} JWL_{m,r}^{(1)}(j, k). \end{aligned}$$

In the following theorem we present a formula for Jacobi–Whitney–Lah numbers of the first type, which is similar to the expression of Jacobi–Whitney numbers with symmetric polynomials.

Theorem 6.6. ([5, Theorem 2.5])

If $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$JWL_{m,r}^{(1)}(n, k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} \leq n-1} \prod_{j=1}^{n-k} m(2i_j - j + 1)(m(2i_j - j + 1) + 2r).$$

6.3 Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type

From the definition of Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type as well as the corresponding properties of Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind we obtain that if $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, then

$$JWL_{m,r}^{(2)}(n, 0) = \delta_{n,0}, \quad JWL_{m,r}^{(2)}(n, n) = 1.$$

Other special values of Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type are given in the next theorem.

Theorem 6.7. ([5, Theorem 3.2])

If $n, m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$\begin{aligned} JWL_{m,r}^{(2)}(n, 1) &= \frac{(m(m+r))^{\overline{n,m,r}}}{m(m+r)}, \\ JWL_{m,r}^{(2)}(n, n-1) &= 2m \left(2m \binom{n}{3} + (m+r) \binom{n}{2} \right). \end{aligned}$$

With the help of Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type we can describe the connection between quadratically rising and quadratically falling factorials.

Theorem 6.8. ([5, Theorem 3.3])

If $n, r \geq 0$ and $m \geq 1$, then

$$x^{\overline{n,m,r}} = \sum_{k=0}^n JW L_{m,r}^{(2)}(n, k) x^{\overline{k,m,r}},$$

$$x^{\overline{n,m,r}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n, k) x^{\overline{k,m,r}}.$$

In the recurrence relation of Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type, the sum of the coefficients in the recurrences of Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind appears.

Theorem 6.9. ([5, Theorem 3.4])

If $1 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$JW L_{m,r}^{(2)}(n+1, k) = JW L_{m,r}^{(2)}(n, k-1) + (mn(mn+r) + mk(mk+r)) JW L_{m,r}^{(2)}(n, k).$$

For Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type the following vertical recurrence holds.

Theorem 6.10. ([5, Theorem 3.5])

If $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$JW L_{m,r}^{(2)}(n+1, k+1) = \sum_{j=k}^n \frac{(m(k+1)(m(k+1)+r))^{\overline{n+1,m,r}}}{(m(k+1)(m(k+1)+r))^{\overline{j+1,m,r}}} JW L_{m,r}^{(2)}(j, k).$$

In the next theorem we present the explicit formula of 1-colour r -Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type.

Theorem 6.11. ([5, Theorem 3.6])

If $0 \leq k \leq n$ and $r \geq 0$, then

$$JW L_{1,r}^{(2)}(n, k) = \frac{1}{(2k+r)!} \sum_{j=0}^{2k+r} (-1)^j \binom{2k+r}{j} (k-j+1)^{\overline{r}} ((k-j)(k-j+r))^{\overline{n,1,r}}.$$

Similarly to Lah numbers, Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type are also self-orthogonal.

Theorem 6.12. ([5, Theorem 3.7])

If $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) JW L_{m,r}^{(2)}(j, k) = \delta_{n,k}.$$

The following theorem gives relations between Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type and Jacobi–Whitney numbers of the first as well as second kind.

Theorem 6.13. ([5, Theorem 3.8])

If $0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$ and $r \geq 0$, then

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) jw_{m,r}(j, k) = jw_{m,r}(n, k),$$

$$\sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} JW_{m,r}(n, j) JW L_{m,r}^{(2)}(j, k) = JW_{m,r}(n, k).$$

By using the transition coefficients introduced in Subsection 5.3, we can prove more general connections between quadratically rising and quadratically falling factorials than Theorem 6.8.

Theorem 6.14. ([5, Theorem 3.9])

If $n, r, s \geq 0$ and $m, l \geq 1$, then

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, k) x^{\overline{\overline{k, l, s}}},$$

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n, j) JW L_{l,s}^{(2)}(j, k) x^{\overline{\overline{k, l, s}}},$$

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{n-j} JW L_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, k) x^{\overline{\overline{k, l, s}}},$$

$$x^{\overline{\overline{n, m, r}}} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n (-1)^{n-k} T_{m,l,r,s}(n, j) JW L_{l,s}^{(2)}(j, k) x^{\overline{\overline{k, l, s}}}.$$

Now, applying transition coefficients again, we generalize first Theorem 6.12, then Theorem 6.13.

Theorem 6.15. ([5, Theorem 3.10])

If $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ and $r, s \geq 0$, then

$$\sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} JW_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) JW_{l,s}^{(2)}(i, k) = T_{m,l,r,s}(n, k).$$

Theorem 6.16. ([5, Theorem 3.11])

If $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ and $r, s \geq 0$, then

$$\sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{j-k} JW_{m,r}^{(2)}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) jw_{l,s}(i, k) = jw_{m,r}(n, k),$$

$$\sum_{j=k}^n \sum_{i=k}^j (-1)^{n-j} JW_{m,r}(n, j) T_{m,l,r,s}(j, i) JW_{l,s}^{(2)}(i, k) = JW_{l,s}(n, k).$$

Finally, we consider what happens if we combine Jacobi–Whitney numbers of the first and second kind with different number of colours and different number of distinguished elements in the definition of Jacobi–Whitney–Lah numbers of the second type.

Theorem 6.17. ([5, Theorem 3.12])

If $0 \leq k \leq n$, $m, l \geq 1$ and $r, s \geq 0$, then

$$\sum_{j=k}^n jw_{m,r}(n, j) JW_{l,s}(j, k) = \sum_{j=k}^n T_{m,l,r,s}(n, j) JW_{l,s}^{(2)}(j, k).$$



Registry number: DEENK/143/2023.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Tímea Arnóczki

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

MTMT ID: 10063750

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

1. **Arnóczki, T.**: Elements with prime and small indices in bicyclic biquadratic number fields.

Period. Math. Hung. 77 (1), 83-93, 2018. ISSN: 0031-5303.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10998-017-0233-9>

IF: 0.664

Foreign language scientific articles in international journals (1)

2. **Arnóczki, T.**, Nyul, G.: Minimal index of bicyclic biquadratic number fields.

Rocky Mt. J. Math. 50 (1), 1-8, 2020. ISSN: 0035-7596.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1216/rmj.2020.50.1>

IF: 0.568

Total IF of journals (all publications): 1,232

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 1,232

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

08 May, 2023



Irodalomjegyzék/References

- [1] G. E. Andrews, E. S. Egge, W. Gawronski and L. L. Littlejohn, *The Jacobi–Stirling numbers*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **120** (2013), 288–303.
- [2] G. E. Andrews, W. Gawronski and L. L. Littlejohn, *The Legendre–Stirling numbers*, Discrete Mathematics **311** (2011), 1255–1272.
- [3] G. E. Andrews and L. L. Littlejohn, *A combinatorial interpretation of the Legendre–Stirling numbers*, Proceedings of the American Mathematical Society **137** (2009), 2581–2590.
- [4] T. Arnóczki, *Elements with prime and small indices in bicyclic biquadratic number fields*, Periodica Mathematica Hungarica **77** (2018), 83–93.
- [5] T. Arnóczki, *Two types of Jacobi–Whitney–Lah numbers*, kézirat.
- [6] T. Arnóczki and G. Nyul, *Minimal index of bicyclic biquadratic number fields*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **50** (2020), 1–8.
- [7] T. Arnóczki and G. Nyul, *On a conjecture concerning the minimal index of pure quartic fields*, közlésre benyújtva.
- [8] T. Arnóczki and G. Nyul, *On restricted r -Stirling numbers or r -Bessel numbers*, közlésre benyújtva.
- [9] T. Arnóczki and G. Nyul, *New combinatorial numbers: the Jacobi–Whitney numbers*, közlésre benyújtva.
- [10] M. Benoumhani, *On some numbers related to Whitney numbers of Dowling lattices*, Advances in Applied Mathematics **19** (1997), 106–116.
- [11] A. Z. Broder, *The r -Stirling numbers*, Discrete Mathematics **49** (1984), 241–259.
- [12] L. Carlitz, *Weighted Stirling numbers of the first and second kind I*, Fibonacci Quarterly **18** (1980), 147–162.
- [13] M.-L. Chang, *Monogeneity in biquadratic fields*, International Journal of Pure and Applied Mathematics **31** (2006), 481–490.

-
- [14] G.-S. Cheon and J.-H. Jung, *r-Whitney numbers of Dowling lattices*, Discrete Mathematics **312** (2012), 2337–2348.
- [15] G.-S. Cheon, J.-H. Jung and L. W. Shapiro, *Generalized Bessel numbers and some combinatorial settings*, Discrete Mathematics **313** (2013), 2127–2138.
- [16] J. Y. Choi and J. D. H. Smith, *On the unimodality and combinatorics of Bessel numbers*, Discrete Mathematics **264** (2003), 45–53.
- [17] R. B. Corcino and C. B. Corcino, *On the maximum of generalized Stirling numbers*, Utilitas Mathematica **86** (2011), 241–256.
- [18] R. B. Corcino, C. B. Corcino and R. Aldema, *Asymptotic normality of the (r, β) -Stirling numbers*, Ars Combinatoria **81** (2006), 81–96.
- [19] R. Dedekind, *Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Congruenzen*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **23** (1878), 3–37.
- [20] D. S. Dummit and H. Kisilevsky, *Indices in cyclic cubic fields*, in: Number Theory and Algebra (ed.: H. Zassenhaus), Academic Press, 1977, 29–42.
- [21] E. S. Egge, *Legendre–Stirling permutations*, European Journal of Combinatorics **31** (2010), 1735–1750.
- [22] W. N. Everitt, K. H. Kwon, L. L. Littlejohn, R. Wellman and G. J. Yoon, *Jacobi–Stirling numbers, Jacobi polynomials, and the left-definite analysis of the classical Jacobi differential expression*, Journal of Computational and Applied Mathematics **208** (2007), 29–56.
- [23] W. N. Everitt, L. L. Littlejohn and R. Wellman, *Legendre polynomials, Legendre–Stirling numbers, and the left-definite spectral analysis of the Legendre differential expression*, Journal of Computational and Applied Mathematics **148** (2002), 213–238.
- [24] J.-H. Evertse and K. Györy, *Discriminant Equations in Diophantine Number Theory*, Cambridge University Press, 2017.
- [25] T. Funakura, *On integral bases of pure quartic fields*, Mathematical Journal of Okayama University **26** (1984), 27–41.

- [26] I. Gaál, *Diophantine Equations and Power Integral Bases*, Birkhäuser, 2019.
- [27] I. Gaál and B. Jadrijević, *Determining elements of minimal index in an infinite family of totally real bicyclic biquadratic number fields*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **39** (2017), 307–326.
- [28] I. Gaál and G. Nyul, *Index form equations in biquadratic fields: the p -adic case*, Publicationes Mathematicae Debrecen **68** (2006), 225–242.
- [29] I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst, *On the indices of biquadratic number fields having Galois group V_4* , Archiv der Mathematik **57** (1991), 357–361.
- [30] I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst, *On the resolution of index form equations in quartic number fields*, Journal of Symbolic Computation **16** (1993), 563–584.
- [31] I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst, *On the resolution of index form equations in biquadratic number fields III. The bicyclic biquadratic case*, Journal of Number Theory **53** (1995), 100–114.
- [32] I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst, *Simultaneous representation of integers by a pair of ternary quadratic forms – with an application to index form equations in quartic number fields*, Journal of Number Theory **57** (1996), 90–104.
- [33] I. Gaál and L. Remete, *Binomial Thue equations and power integral bases in pure quartic fields*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **32** (2014), 49–61.
- [34] I. Gaál and L. Remete, *Integral bases and monogeneity of pure fields*, Journal of Number Theory **173** (2017), 129–146.
- [35] Y. Gelineau and J. Zeng, *Combinatorial interpretations of the Jacobi–Stirling numbers*, Electronic Journal of Combinatorics **17** (2010), R70.
- [36] A. Granville, *abc allows us to count squarefrees*, International Mathematics Research Notices (1998), 991–1009.
- [37] M.-N. Gras and F. Tanoé, *Corps biquadratiques monogènes*, Manuscripta Mathematica **86** (1995), 63–79.
- [38] E. Grosswald, *Bessel Polynomials*, Springer-Verlag, 1978.

-
- [39] E. Gyimesi and G. Nyul, *A note on combinatorial subspaces and r -Stirling numbers*, *Utilitas Mathematica* **105** (2017), 137–139.
- [40] E. Gyimesi and G. Nyul, *A comprehensive study of r -Dowling polynomials*, *Aequationes Mathematicae* **92** (2018), 515–527.
- [41] E. Gyimesi and G. Nyul, *New combinatorial interpretations of r -Whitney and r -Whitney–Lah numbers*, *Discrete Applied Mathematics* **255** (2019), 222–233.
- [42] K. Györy, *Sur les polynômes à coefficients entiers et de discriminant donné III*, *Publicationes Mathematicae Debrecen* **23** (1976), 141–165.
- [43] M. Hall, *Indices in cubic fields*, *Bulletin of the American Mathematical Society* **43** (1937), 104–108.
- [44] H. Han and S. Seo, *Combinatorial proofs of inverse relations and log-concavity for Bessel numbers*, *European Journal of Combinatorics* **29** (2008), 1544–1554.
- [45] J. G. Huard, B. K. Spearman and K. S. Williams, *Integral bases for quartic fields with quadratic subfields*, *Journal of Number Theory* **51** (1995), 87–102.
- [46] B. Jadrijević, *Establishing the minimal index in a parametric family of bicyclic biquadratic fields*, *Periodica Mathematica Hungarica* **58** (2009), 155–180.
- [47] B. Jadrijević, *Solving index form equations in two parametric families of biquadratic fields*, *Mathematical Communications* **14** (2009), 341–363.
- [48] B. Jadrijević, *On elements with index of the form $2^a 3^b$ in a parametric family of biquadratic fields*, *Glasnik Matematički* **50** (2015), 43–63.
- [49] J.-H. Jung, I. Mező and J. L. Ramírez, *The r -Bessel and restricted r -Bell numbers*, *Australasian Journal of Combinatorics* **70** (2018), 202–220.
- [50] Zs. Kereskényi-Balogh and G. Nyul, *Stirling numbers of the second kind and Bell numbers for graphs*, *Australasian Journal of Combinatorics* **58** (2014), 264–274.
- [51] H. H. Kim and Z. Wolske, *Number fields with large minimal index containing quadratic subfields*, *International Journal of Number Theory* **14** (2018), 2333–2342.

- [52] T. Komatsu and J. L. Ramírez, *Generalized poly-Cauchy and poly-Bernoulli numbers by using incomplete r -Stirling numbers*, *Aequationes Mathematicae* **91** (2017), 1055–1071.
- [53] H. L. Krall and O. Frink, *A new class of orthogonal polynomials: the Bessel polynomials*, *Transactions of the American Mathematical Society* **65** (1949), 100–115.
- [54] I. Lah, *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*, *Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses* **9** (1954), 7–15.
- [55] I. Lah, *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*, *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik* **7** (1955), 203–212.
- [56] L. Lovász and M. D. Plummer, *Matching Theory*, North-Holland, 1986.
- [57] T. Mansour, M. Schork and M. Shattuck, *The generalized Stirling and Bell numbers revisited*, *Journal of Integer Sequences* **15** (2012), Article 12.8.3.
- [58] R. Merris, *The p -Stirling numbers*, *Turkish Journal of Mathematics* **24** (2000), 379–399.
- [59] I. Mező, *A new formula for the Bernoulli polynomials*, *Results in Mathematics* **58** (2010), 329–335.
- [60] F. L. Miksa, L. Moser and M. Wyman, *Restricted partitions of finite sets*, *Canadian Mathematical Bulletin* **1** (1958), 87–96.
- [61] P. Mongelli, *Combinatorial interpretations of particular evaluations of complete and elementary symmetric functions*, *Electronic Journal of Combinatorics* **19** (2012), P60.
- [62] P. Mongelli, *Total positivity properties of Jacobi–Stirling numbers*, *Advances in Applied Mathematics* **48** (2012), 354–364.
- [63] Y. Motoda, *Notes on quartic fields*, *Reports of the Faculty of Science and Engineering, Saga University, Mathematics* **32** (2003), 1–19, **37** (2008), 1–8.
- [64] Y. Motoda, *On integral bases of certain real monogenic biquadratic fields*, *Reports of the Faculty of Science and Engineering, Saga University, Mathematics* **33** (2004), 9–22.

-
- [65] Y. Motoda and T. Nakahara, *Power integral bases in algebraic number fields whose Galois groups are 2-elementary abelian*, Archiv der Mathematik **83** (2004), 309–316.
- [66] Y. Motoda, T. Nakahara and K. H. Park, *On power integral bases of the 2-elementary abelian extension fields*, Trends in Mathematics **9** (2006), 55–63.
- [67] T. Nagel, *Zur Arithmetik der Polynome*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **1** (1922), 178–193.
- [68] T. Nakahara, *On the indices and integral bases of non-cyclic but abelian biquadratic fields*, Archiv der Mathematik **41** (1983), 504–508.
- [69] T. Nakahara, *On the minimum index of a cyclic quartic field*, Archiv der Mathematik **48** (1987), 322–325.
- [70] G. Nyul, *Power integral bases in totally complex biquadratic number fields*, Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae **28** (2001), 79–86.
- [71] G. Nyul, *Non-monogeneity of multiquadratic number fields*, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis **10** (2002), 85–93.
- [72] Nyul G., *Monogenitási vizsgálatok algebrai számtestekben*, PhD doktori értekezés, Debreceni Egyetem, 2007.
- [73] G. Nyul and G. Rácz, *The r -Lah numbers*, Discrete Mathematics **338** (2015), 1660–1666.
- [74] G. Nyul and G. Rácz, *Matchings in complete bipartite graphs and the r -Lah numbers*, Czechoslovak Mathematical Journal **71** (2021), 947–959.
- [75] A. Pethő and M. E. Pohst, *On the indices of multiquadratic number fields*, Acta Arithmetica **153** (2012), 393–414.
- [76] B. K. Spearman, Q. Yang and J. Yoo, *Minimal indices of pure cubic fields*, Archiv der Mathematik **106** (2016), 35–40.
- [77] R. P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Annals of the New York Academy of Sciences **576** (1989), 500–535.

- [78] D. Stenlund, *On the connection between Stirling numbers and Bessel numbers*, Electronic Journal of Combinatorics **29** (2022), P1.40.
- [79] I. Tweddle, *James Stirling's Methodus Differentialis: An Annotated Translation of Stirling's Text*, Springer-Verlag, 2003.
- [80] K. S. Williams, *Integers of biquadratic fields*, Canadian Mathematical Bulletin **13** (1970), 519–526.
- [81] S. L. Yang and Z. K. Qiao, *The Bessel numbers and Bessel matrices*, Journal of Mathematical Research and Exposition **31** (2011), 627–636.

Publikációs lista/List of publications

1. T. Arnóczki, *Elements with prime and small indices in bicyclic biquadratic number fields*, Periodica Mathematica Hungarica **77** (2018), 83–93.
2. T. Arnóczki and G. Nyul, *Minimal index of bicyclic biquadratic number fields*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **50** (2020), 1–8.
3. T. Arnóczki and G. Nyul, *On a conjecture concerning the minimal index of pure quartic fields*, közlésre benyújtva.
4. T. Arnóczki and G. Nyul, *On restricted r -Stirling numbers or r -Bessel numbers*, közlésre benyújtva.
5. T. Arnóczki and G. Nyul, *New combinatorial numbers: the Jacobi–Whitney numbers*, közlésre benyújtva.
6. T. Arnóczki, *Two types of Jacobi–Whitney–Lah numbers*, kézirat.

Előadáslista/List of talks

1. *Elements with given index in bicyclic biquadratic number fields*, 23rd Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Ostravice (Csehország), 2017. augusztus 28. – szeptember 1.
2. *Monogeneity of bicyclic biquadratic number fields*, International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, Prága (Csehország), 2019. május 16–19.
3. *Biciklikus bikvadratikus számtetek monogenitása*, ADA konferencia, Debrecen, 2019. május 24–25.
4. *Minimal index of some quartic fields*, 24th Central European Number Theory Conference, Komárno (Szlovákia), 2019. szeptember 2–6.
5. *On a new approach in studying minimal indices*, Third meeting on monogeneity and power integral bases, online, 2021. május 13.
6. *Jacobi–Whitney numbers*, Number Theory Conference in honour of Professors Kálmán Győry, János Pintz and András Sárközy, Debrecen, 2022. július 4–8.