Doktori (PhD) értekezés tézisei

Általánosított Bajraktarević-közepek

Grünwald Richárd

Témavezető: Prof. Dr. Páles Zsolt

DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2024.

1. Fejezet – Alapvető fogalmak és eredmények

Ebben a fejezetben I egy nemüres, nyílt, valós intervallumot. Bevezetjük az általánosított Bajraktarević-közép fogalmát és harmadrendig kiszámítjuk a parciális deriváltjait. Az eredmények megtalálható a [4] dolgozatunkban.

1.1. Az általánosított Bajraktarević-közép definíciója. A Bajraktarević-közép fogalmának kiterjesztéséhez szükségünk lesz az alábbi lemmára, amely szigorúan monoton (de nem feltétlenül folytonos) függvények általánosított bal inverzének létezéséről és tulajdonságairól szól.

Állítás. *Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton függvény. Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott $g\colon \operatorname{conv}(f(I)) \to I$ monoton függvény, amely bal inverze f-nek, azaz*

$$(g \circ f)(x) = x \qquad (x \in I). \tag{1}$$

Továbbá g folytonos, ugyanabban az értelemben monoton, mint f,

$$(f \circ g)(y) = y \qquad (y \in f(I)), \tag{2}$$

és

$$\liminf_{x \to g(y)} f(x) \leq y \leq \limsup_{x \to g(y)} f(x) \qquad (y \in \operatorname{conv}(f(I))).$$

Így, ha f alulról (felülről) félig folytonos $g(y)$-ban, akkor $f \circ g(y) \leq y$ ($y \leq f \circ g(y)$).

Definíció. A fenti lemmában jellemzett g függvényt a *szigorúan monoton $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény általánosított bal inverzének* nevezünk és az $f^{(-1)}$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyzés. Az (1) és (2) egyenletekből világos, hogy $f^{(-1)}$ leszűkítése $f(I)$-re az f függvény klasszikus inverze. Tehát $f^{(-1)}$ az f inverzének a folytonos és monoton kiterjesztése a legszűkebb olyan intervallumra, amely tartalmazza f értékkészletét.

Egy meglehetősen általános közép, amely számos nevezetes közepet speciális esetként magában foglal, a kváziaritmetikai közép, amelyet az alábbiak szerint definiálunk.

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Adott $f\colon I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonos függvény esetén az $A_f^{[n]}\colon I^n \to I$ módon jelölt *n-változós kváziaritmetikai közepet* az alábbi képlettel definiáljuk:

$$A_f^{[n]}(x) := f^{-1}\left(\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}\right) \qquad (x \in I^n).$$

Azt mondjuk, hogy f az $A_f^{[n]}$ *generátorfüggvénye*.

Bajraktarević [1]-ben, illetve [2]-ban a kváziaritmetikai közép alábbi súlyozott kiterjesztését vezette be és vizsgálta.

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Adott $f\colon I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonos és $p\colon I \to \mathbb{R}_+$ pozitív értékű függvény esetén a $B_{f,p}^{[n]}\colon\ I^n \to I$ módon jelölt *n-változós Bajraktarević-közepet* az alábbi képlettel definiáljuk:

$$B_{f,p}^{[n]}(x) := f^{-1}\left(\frac{p(x_1)f(x_1) + \cdots + p(x_n)f(x_n)}{p(x_1) + \cdots + p(x_n)}\right) \qquad (x \in I^n). \tag{3}$$

Azt mondjuk, hogy f a $B_{f,p}^{[n]}$ *generátorfüggvénye*, míg p a $B_{f,p}^{[n]}$ *súlyfüggvénye*.

Tekintsük a Bajraktarević-közép egy esetlegesen aszimmetrikus általánosítását.

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Adott $f\colon I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvény és $p = (p_1, \dots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ pozitív koordinátájú vektorértékű függvény esetén az $A_{f,p}^{[n]}\colon I^n \to I$ szimbólummal jelölt *n-változós általánosított Bajraktarević-közepet* az alábbi képlettel definiáljuk:

$$A_{f,p}^{[n]}(x) := f^{(-1)}\left(\frac{p_1(x_1)f(x_1) + \cdots + p_n(x_n)f(x_n)}{p_1(x_1) + \cdots + p_n(x_n)}\right) \qquad (x \in I^n), \tag{4}$$

és, a jelölések egyszerűsítése végett, az alábbi definíciókat is használni fogjuk:

$$R_{f,p}^{[n]}(x) := \frac{p_1(x_1)f(x_1) + \cdots + p_n(x_n)f(x_n)}{p_1(x_1) + \cdots + p_n(x_n)} \qquad \text{és} \qquad p_0 := p_1 + \cdots + p_n.$$

Hasonlóan az előző definíciókhoz, azt mondjuk f az $A_{f,p}^{[n]}$ *generátorfüggvénye*, míg p az $A_{f,p}^{[n]}$ *súlyfüggvénye*.

Megjegyzés. Kihangsúlyozzuk, hogy $A_{f,p}^{[n]}$ valóban egy nem szükségképpen szimmetrikus általánosítása $B_{f,p}^{[n]}$-nek, hiszen, abban az esetben, amikor f folytonos, az összes súlyfüggvényt egyformának választva, azaz a $p := p_1 = \cdots = p_n$ helyettesítést végrehajtva (4)-ben, visszakapjuk (3)-mat.

Állítás. *Legyen $n \in \mathbb{N}, f\colon I \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton függvény és legyen $p = (p_1, \dots, p_n)\colon\ I \to \mathbb{R}_+^n$. Ekkor a* (4) *képlettel definiált $A_{f,p}^{[n]}\colon I^n \to I$ függvény jóldefiniált és egy közép, azaz*

$$\min(x) \le A_{f,p}^{[n]}(x) \le \max(x) \qquad (x \in I^n).$$

1.2. Az általánosított Bajraktarević-közép parciális deriváltjai. Az alábbi tételben, feszes regularitási feltételek mellett, I^n diagonális pontjaiban, harmadrendig meghatározzuk általánosított Bajraktarević-közép parciális deriváltjait. Feszes regularitási feltételek alatt azt értjük, hogy például, ahogy alább az (1), (2b), (3c) állításokban látható, $m \in \mathbb{N}$ esetén csupán $(m-1)$-szeri folytonos differenciálhatóságot feltételezünk p_i-ről ahhoz, hogy bizonyítsuk a ∂_i^m alakú parciális deriváltak létezését és kiszámítsuk azokat. A parciális deriváltak kulcsszerepet játszanak a későbbi fejezetekben, hiszen az egyik eszköz, amelyet a fő tételek bizonyításához használunk az nem más, mint a szóban forgó függvényegyenlet értelmezési tartományának diagonálisán történő differenciálása által nyert differenciálegyenletek megoldása.

Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}, \ell \in \{1,2,3\}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ egy ℓ-szer differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvény, és legyen $p = (p_1, \dots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$. Ekkor az alábbi állítások érvényesek.*

(1) Ha $\ell = 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$, és p_i folytonos, akkor a $\partial_i A_{f,p}^{[n]}$ elsőrendű parciális derivált létezik a $\operatorname{diag}(I^n)$ diagonálison, és

$$\left(\partial_i A_{f,p}^{[n]}\right)^{\Delta} = \frac{p_i}{p_0}.$$

(2a) Ha $\ell = 2$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, hogy $i \ne j$, továbbá p_i és p_j differenciálhatók, akkor a $\partial_i\partial_j A_{f,p}^{[n]}$ másodrendű parciális derivált létezik a $\operatorname{diag}(I^n)$

diagonálison, és

$$\left(\partial_i\partial_j A_{f,p}^{[n]}\right)^\Delta = -\frac{(p_ip_j)'}{p_0^2} - \frac{p_ip_j}{p_0^2}\cdot\frac{f''}{f'}.$$

(2b) *Ha* $\ell = 2$, $i \in \{1,\dots,n\}$, *és* p_i *folytonosan differenciálható, a* $\partial_i^2 A_{f,p}^{[n]}$ *másodrendű parciális derivált létezik a* $\mathrm{diag}(I^n)$ *diagonálison, és*

$$\left(\partial_i^2 A_{f,p}^{[n]}\right)^\Delta = 2\frac{p_i'(p_0-p_i)}{p_0^2} + \frac{p_i(p_0-p_i)}{p_0^2}\cdot\frac{f''}{f'}.$$

(3a) *Ha* $\ell = 3$, $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$, *hogy* $i \neq j \neq k \neq i$, *továbbá* p_i, p_j *és* p_k *differenciálhatók, akkor a* $\partial_i\partial_j\partial_k A_{f,p}^{[n]}$ *harmadrendű parciális derivált létezik a* $\mathrm{diag}(I^n)$ *diagonálison, és*

$$\left(\partial_i\partial_j\partial_k A_{f,p}^{[n]}\right)^\Delta = 2\frac{p_ip_j'p_k' + p_i'p_jp_k' + p_i'p_j'p_k}{p_0^3} + 2\frac{(p_ip_jp_k)'}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'} + \frac{p_ip_jp_k}{p_0^3}\left(3\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - \frac{f'''}{f'}\right).$$

(3b) *Ha* $\ell = 3$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$, *hogy* $i \neq j$, *továbbá* p_i *kétszer differenciálható és* p_j *differenciálható, akkor a* $\partial_i^2\partial_j A_{f,p}^{[n]}$ *harmadrendű parciális derivált létezik a* $\mathrm{diag}(I^n)$ *diagonálison, és*

$$\begin{aligned}\left(\partial_i^2\partial_j A_{f,p}^{[n]}\right)^\Delta &= \frac{2p_i'p_j'(2p_i-p_0) + p_j(2(p_i')^2 - p_i''p_0)}{p_0^3}\\ &\quad + \frac{(2p_i'p_j + p_ip_j')(2p_i-p_0)}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'}\\ &\quad + \frac{p_ip_j}{p_0^3}\left((3p_i-p_0)\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - p_i\frac{f'''}{f'}\right).\end{aligned}$$

(3c) *Ha* $\ell = 3$, $i \in \{1,\dots,n\}$, *és* p_i *kétszer folytonosan differenciálható, akkor a* $\partial_i^3 A_{f,p}^{[n]}$ *harmadrendű parciális derivált létezik a* $\mathrm{diag}(I^n)$ *diagonálison,* *és*

$$\Big(\partial_i^3 A_{f,p}^{[n]}\Big)^{\Delta} = 3\,\frac{(p_0-p_i)\big(p_0p_i''-2(p_i')^2\big)}{p_0^3} + 3\,\frac{p_i'(p_0-2p_i)(p_0-p_i)}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'} - \frac{p_i(p_0-p_i)}{p_0^3}\left(3p_i\left(\frac{f''}{f'}\right)^2-(p_0+p_i)\frac{f'''}{f'}\right).$$

2. Fejezet – Egyenlőségi probléma

A [4] dolgozat tartalmazza az eredményeket ebből a fejezetből, amelyben az n-változós általánosított Bajraktarević-közép egyenlőségi problémájával foglalkozunk, azaz szükséges, illetve elégséges feltételeket adunk az alább felsorolt ismeretlen függvényekre nézve ahhoz, hogy az

$$\begin{aligned} f^{(-1)}&\left(\frac{p_1(x_1)f(x_1)+\cdots+p_n(x_n)f(x_n)}{p_1(x_1)+\cdots+p_n(x_n)}\right)\\ &= g^{(-1)}\left(\frac{q_1(x_1)g(x_1)+\cdots+q_n(x_n)g(x_n)}{q_1(x_1)+\cdots+q_n(x_n)}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

függvényegyenlet fennálljon lokálisan vagy globálisan, ahol $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ rögzített, I egy nemüres, nyílt, valós intervallumot jelöl, amely az egész fejezetben így lesz, az $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ ismeretlen függvények szigorúan monotonak, és $p = (p_1, \ldots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$, illetve $q = (q_1, \ldots, q_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ szintén ismeretlen függvények.

Ezt a kérdést a szimmetrikus 2-változós esetben, azaz amikor $n = 2$ és $p_1 = p_2$, Losonczi [8]-ben már vizsgálta, és meg is oldotta hatodrendű regularitási feltételek mellett. Később Páles és Zakaria [14]-ben megjavította ezt az eredményt, sikerült ugyanazt igazolniuk elsőrendű megszorítások mellett. Az előbb említett eset kivételével, ebben a formában, a fejezet minden más eredményét mi publikáltuk először [4]-ben. Pontosabban, az aszimmetrikus 2-változós esetben, azt feltételezve, hogy f, g háromszor differenciálható, és hogy létezik $i \in \{1, 2\}$, hogy vagy p_i kétszer folytonosan differenciálható és p_{3-i} folytonos, vagy p_i kétszer differenciálható és p_{3-i} differenciálható, azt bizonyítjuk, hogy az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha léteznek $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy $ad \neq bc$, és

$$cf + d > 0, \qquad g = \frac{af + b}{cf + d} \qquad \text{és} \qquad q_\ell = (cf + d)p_\ell \qquad (\ell \in \{1, \ldots, n\}).$$

Az $n \geq 3$ esetben ugyanezt a konklúziót kapjuk gyengébb regularitási feltételek mellett. Nevezetesen, azt tesszük fel, hogy f és g háromszor differenciálható, p folytonos és léteznek $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$, hogy $i \neq j \neq k \neq i$ és p_i, p_j, p_k differenciálhatók.

2.1. Elégséges feltételek.

Tétel. *Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton növekedő függvény, $n \in \mathbb{N}$, és legyen $p = (p_1, \dots, p_n)\colon\ I \to \mathbb{R}_+^n$. Ekkor az $y = A_{f,p}^{[n]}(x)$ egyenlet pontosan akkor áll fenn minden $x \in I^n$-re, ha, $z \in I$ esetén,*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i)(f(z) - f(x_i)) \begin{cases} < 0 & \textit{if } z < y \\ > 0 & \textit{if } z > y. \end{cases} \tag{6}$$

Ha f szigorúan monoton csökkenő, akkor a (6)*-beli egyenlőtlenségek fordított relációs jellel teljesülnek.*

Következmény. *Legyen $f\colon I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton, $n \in \mathbb{N}$, és legyen $p = (p_1, \dots, p_n)\colon\ I \to \mathbb{R}_+^n$. Ekkor, minden $x \in I^n$ esetén, az $y = A_{f,p}^{[n]}(x)$ érték egyértelmű megoldása az alábbi egyenletnek:*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i)(f(y) - f(x_i)) = 0.$$

A következő eredmény egy elégséges feltételt ad két n-változós általánosított Bajraktarević-közép egyenlőségére. Ezt az esetet az *egyenlőség kanonikus esetének* fogjuk hívni.

Tétel. *Legyenek $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton függvények, $n \in \mathbb{N}$, és legyenek $p = (p_1, \dots, p_n)\colon\ I \to \mathbb{R}_+^n$, $q = (q_1, \dots, q_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$. Ha léteznek $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy $ad \neq bc$, és*

$$cf + d > 0, \qquad g = \frac{af + b}{cf + d} \qquad \textit{és} \qquad q_i = (cf + d)p_i \qquad (i \in \{1, \dots, n\}) \tag{7}$$

teljesülnek I-n, akkor $A_{f,p}^{[n]} = A_{g,q}^{[n]}$ globálisan érvényes.

2.2. Szükséges feltételek. Az alábbi lemma segítségével csökkenteni tudjuk a regularitási feltételeket állításainkban.

Legyen $n \in \mathbb{N}$. Minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén jelölje $\mathbb{R}^n$ természetes bázisának i-edik vektorát $e_i \in \mathbb{R}^n$, azaz legyen $e_i := (\delta_{i,j})_{j=1}^n$. Két adott $p =$

$(p_1,\dots,p_n)\colon I\to\mathbb{R}_+^n$ és $q=(q_1,\dots,q_n)\colon I\to\mathbb{R}_+^n$ súlyfüggvény esetén az alábbi jelölést is használni fogjuk:

$$r_0:=\frac{q_0}{p_0}=\frac{q_1+\dots+q_n}{p_1+\dots+p_n}.$$

Lemma. *Legyenek $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonos függvények, $n\in\mathbb{N},n\geq 2$, és legyenek $p=(p_1,\dots,p_n)\colon I\to\mathbb{R}_+^n$, $q=(q_1,\dots,q_n)\colon I\to\mathbb{R}_+^n$. Tegyük fel, hogy $A_{f,p}^{[n]}=A_{g,q}^{[n]}$ lokálisan teljesül. Ekkor az alábbi két állítás érvényes.*

(i) Minden $i\in\{1,\dots,n\}$ esetén a p_i függvény pontosan akkor folytonos, ha q_i folytonos.

(ii) Legyen $k\in\mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ k-szor differenciálható (k-szor folytonosan differenciálható) függvények nemnulla első deriválttal. Ekkor, minden $i\in\{1,\dots,n\}$ esetén, a p_i függvény pontosan akkor k-szor differenciálható (k-szor folytonosan differenciálható), ha q_i k-szor differenciálható (k-szor folytonosan differenciálható)

A következő kiterjesztési tétel alapvető fontosságú, hiszen a fő tételek bizonyításaiban először csak az értelmezési tartomány egy részintervallumán tudjuk garantálni az egyenlőség kanonikus esetének fennállását. Aztán a következő fő lépés a bizonyításokban az az, hogy kiterjesszük ezt az egész intervallumra.

Tétel. *Legyenek $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ szigorúan monoton, folytonos függvények, $n\in\mathbb{N}$, $p=(p_1,\dots,p_n)\colon I\to\mathbb{R}_+^n$ egy folytonos függvény, és legyen $q=(q_1,\dots,q_n)\colon I\to\mathbb{R}_+^n$. Tegyük fel, hogy $A_{f,p}^{[n]}=A_{g,q}^{[n]}$ lokálisan fennáll, és hogy léteznek $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ konstansok, melyekre $ad\neq bc$ érvényes, továbbá, hogy létezik I-nek egy J nemüres, nyílt részintervalluma, amelyen* (7) *érvényes. Ekkor q folytonos és* (7) *az I intervallumon is teljesül.*

Két általánosított Bajraktarević-közép egyenlőségére vonatkozó első- és másodrendű szükséges feltételeket az alábbi két lemmában részletezzük.

Lemma. *Legyen $n\in\mathbb{N},n\geq 2$ és $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ differenciálható függvények nemnulla első deriválttal, és legyen $i\in\{1,\dots,n\}$. Legyenek továbbá $p=$*

$(p_1, \dots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ és $q = (q_1, \dots, q_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ olyan függvények, hogy p_i és q_i folytonosak. Ha $\partial_i A_{f,p}^{[n]} = \partial_i A_{g,q}^{[n]}$ fennáll a $\operatorname{diag}(I^n)$ diagonálison, akkor

$$\frac{q_i}{q_0} = \frac{p_i}{p_0} \tag{8}$$

teljesül az I intervallumon.

Lemma. *Legyen $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ és $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvények nemnulla első deriválttal. Legyenek továbbá $p = (p_1, \dots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ és $q = (q_1, \dots, q_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ folytonos függvények, és tegyük fel, hogy, minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén, a* (8) *egyenlőség fennáll az I intervallumon. Legyen $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Ekkor az alábbi két állítás érvényes.*

(i) Feltéve, hogy $j \neq k$ és a p_j, p_k, q_j, illetve q_k függvények differenciálhatók, ha $\partial_j \partial_k A_{f,p}^{[n]} = \partial_j \partial_k A_{g,q}^{[n]}$ teljesül a $\operatorname{diag}(I^n)$ diagonálison, akkor létezik egy olyan nemnulla γ konstans, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$q_i^2 g' = \gamma p_i^2 f' \tag{9}$$

érvényes az I intervallumon.

(ii) Feltéve, hogy $j = k$ és a p_j, q_j függvények folytonosan differenciálhatók, ha $\partial_j^2 A_{f,p}^{[n]} = \partial_j^2 A_{g,q}^{[n]}$ teljesül a $\operatorname{diag}(I^n)$ diagonálison, akkor létezik egy olyan nemnulla γ konstans, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén (9) *érvényes az I intervallumon.*

A következő fogalom és egy kapcsolódó lemma kulcsszerepet játszik a fejezet későbbi bizonyításaiban hiszen, megoldva a szóban forgó függvényegyenlet differenciálásával kapott differenciálegyenleteket, az egyik eset, ami adódik az pontosan az az egyenlet, amire a következő lemma ad egy szükséges feltételt, csupán annyi regularitást feltételezve, ami jóldefiniáltsághoz elengedhetetlen.

Definíció. Egy $f\colon I \to \mathbb{R}$ háromszor differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvény esetén definiáljuk a függvény $S_f\colon I \to \mathbb{R}$ módon jelölt *Schwarz-deriváltját* az alábbi képlettel:

$$S_f = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Lemma. *Legyenek $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ háromszor differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvények. Ha $S_f = S_g$ fennáll az I intervallumon, akkor léteznek $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy $ad \neq bc$, $cf + d$ pozitív I-n, és*

$$g = \frac{af + b}{cf + d}$$

teljesül az I intervallumon.

A fejezet első fő tétele következik, amely teljes mértékben karakterizálja két legalább 3-változós általánosított Bajraktarević-közép egyenlőségét.

Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ és $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ háromszor differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvények. Legyen továbbá $p = (p_1, \dots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ egy folytonos függvény és legyen $q = (q_1, \dots, q_n) : I \to \mathbb{R}_+^n$. Tegyük fel, hogy léteznek $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ indexek, hogy $i \neq j \neq k \neq i$ és a p_i, p_j, p_k függvények differenciálhatók. Ekkor az alábbi állítások páronként ekvivalensek.*

(i) $A_{f,p}^{[n]} = A_{g,q}^{[n]}$ *teljesül globálisan.*

(ii) $A_{f,p}^{[n]} = A_{g,q}^{[n]}$ *teljesül lokálisan.*

(iii) A q függvény folytonos, a q_i, q_j, q_k függvények differenciálhatók, és a

$$\begin{aligned} \partial_\ell A_{f,p}^{[n]} &= \partial_\ell A_{g,q}^{[n]} \qquad (\ell \in \{1, \dots, n-1\}), \\ \partial_i \partial_j A_{f,p}^{[n]} &= \partial_i \partial_j A_{g,q}^{[n]}, \\ \partial_i \partial_j \partial_k A_{f,p}^{[n]} &= \partial_i \partial_j \partial_k A_{g,q}^{[n]} \end{aligned}$$

egyenletek teljesülnek a $\operatorname{diag}(I^n)$ diagonálison.

(iv) Léteznek $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy $ad \neq bc$ és

$$g = \frac{af + b}{cf + d} \qquad \text{és} \qquad q_\ell = (cf + d)p_\ell \qquad (\ell \in \{1, \dots, n\})$$

teljesülnek az I intervallumon.

A második fő tételnek két változata van a regularitási feltételek szempontjából, és ez karakterizálja a 2-változós általánosított aszimmetrikus Bajraktarević-közepek egyenlőségét.

Tétel. *Legyenek $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ háromszor differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvények. Legyenek $p = (p_1, p_2)\colon I \to \mathbb{R}_+^2$ és $q = (q_1, q_2)\colon I \to \mathbb{R}_+^2$, hogy $p_1 \neq p_2$. Tegyük fel, hogy létezik $i \in \{1, 2\}$, hogy az alábbi regularitási feltételek egyike teljesül.*

(a) p_i kétszer folytonosan differenciálható és p_{3-i} folytonos.

(b) p_i kétszer differenciálható és p_{3-i} differenciálható.

Ekkor az alábbi állítások páronként ekvivalensek.

(i) $A^{[2]}_{f,p} = A^{[2]}_{g,q}$ teljesül globálisan.

(ii) $A^{[2]}_{f,p} = A^{[2]}_{g,q}$ teljesül lokálisan.

(iv) Léteznek $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy $ad \neq bc$ és

$$g = \frac{af + b}{cf + d}, \qquad q_1 = (cf + d)p_1, \qquad \textit{és} \qquad q_2 = (cf + d)p_2$$

teljesülnek az I intervallumon.

Ha ráadásul az f és p függvények ℓ-szer folytonosan differenciálhatók, akkor $A^{[2]}_{f,p}$ is ℓ-szer folytonosan differenciálható.

Ahogy korábban is említettük, a szimmetrikus 2-változós esetet már megoldották először hatod-, majd pedig elsőrendű regularitási feltételek mellett a [8], illetve [14] dolgozatokban.

Tétel. *Legyenek $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvények. Legyen továbbá $p\colon I \to \mathbb{R}_+$ egy folytonosan differenciálható függvény és $q\colon I \to \mathbb{R}_+$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(i) $A^{[2]}_{f,(p,p)} = A^{[2]}_{g,(q,q)}$ teljesül globálisan.

(ii) $A^{[2]}_{f,(p,p)} = A^{[2]}_{g,(q,q)}$ *teljesül lokálisan.*

(iv) *Vagy léteznek* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *konstansok, hogy* $ad \neq bc$ *és*

$$g = \frac{af + b}{cf + d} \qquad \textit{és} \qquad q = (cf + d)p$$

teljesülnek az I *intervallumon, vagy léteznek* P *és* Q *legfeljebb másodfokú polinomok, hogy* P*, illetve* Q *pozitívak* $f(I)$*-n, illetve* $g(I)$*-n, és léteznek* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *konstansok, hogy*

$$g = G^{-1} \circ (\alpha F \circ f + \beta), \qquad p = P^{-\frac{1}{2}} \circ f, \qquad \textit{és} \qquad q = Q^{-\frac{1}{2}} \circ g$$

fennállnak az I *intervallumon, ahol* F*, illetve* G *az* $1/P$*, illetve* $1/Q$ *egy-egy primitív függvényét jelölik.*

3. Fejezet – Összehasonlítási probléma

Ennek a fejezetnek az a fő célja, hogy vizsgáljuk két n-változós általánosított Bajraktarević-közép lokális és globális összehasonlítási problémáját, azaz, hogy szükséges, illetve elégséges feltételeket adjunk az alább felsorolt ismeretlen függvényekre nézve ahhoz, hogy az

$$\begin{aligned} &f^{(-1)}\left(\frac{p_1(x_1)f(x_1)+\cdots+p_n(x_n)f(x_n)}{p_1(x_1)+\cdots+p_n(x_n)}\right)\\ &\qquad\leq g^{(-1)}\left(\frac{q_1(x_1)g(x_1)+\cdots+q_n(x_n)g(x_n)}{q_1(x_1)+\cdots+q_n(x_n)}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

függvényegyenlőtlenség érvényes legyen lokálisan vagy globálisan, ahol $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ rögzített, I egy nemüres, nyílt, valós intervallum, amely az egész fejezetben így lesz, ha csak mást nem mondunk, az $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ ismeretlen függvények szigorúan monotonak, illetve $p = (p_1, \ldots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ és $q = (q_1, \ldots, q_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ is ismeretlen függvények. Ezen szekció eredményeit a [5] dolgozatunkban bizonyítottuk. Megjegyezzük, hogy, ahogyan a 2. Fejezetben is láttuk, ezen közepek egyenlőségének lokális és globális fennállása ekvivalens. Viszont, ahogyan ebben a fejezetben olvasható, az összehasonlítási probléma esetében nem ez a helyzet.

A globális összehasonlítási problémát illetően a fejezet fő eredménye azt mondja ki, hogy ha az f, g függvények differenciálhatók és nemnulla első deriválttal rendelkeznek, és minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\frac{p_i}{p_0} = \frac{q_i}{q_0} \qquad \text{és} \qquad \frac{p_0(x)(f(x)-f(y))}{p_0(y)f'(y)} \leq \frac{q_0(x)(g(x)-g(y))}{q_0(y)g'(y)} \qquad (x, y \in I)$$

teljesülnek (ahol $p_0 := p_1 + \cdots + p_n$ és $q_0 := q_1 + \cdots + q_n$), akkor a fenti összehasonlíthatósági egyenlőtlenség fennáll minden $x_1, \ldots, x_n \in I$ esetén.

3.1. Lokális összehasonlíthatóság.

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ és $U \in \mathbb{R}^n$ egy nemüres, nyílt halmaz. Az $f\colon U \to \mathbb{R}$ függvényt *az $a \in U$ pontban az i-edik változójára nézve parciálisan* *differenciálhatónak* hívjuk, ha a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+he_i)-f(a)}{h}$$

határérték létezik és véges. Azt mondjuk, hogy f *az* $a \in U$ *pontban parciálisan differenciálható*, ha minden változójára nézve parciálisan differenciálható. Végezetül, azzal a szóhasználattal élünk, hogy f *parciálisan differenciálható az* U *halmazon*, ha U minden pontjában parciálisan differenciálható.

A (10) összehasonlíthatósági egyenlőtlenség lokális vizsgálatához felelevenítjük [13] alábbi eredményét.

Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *és legyenek* $M, N\colon I^n \to I$ *olyan* n*-változós közepek, hogy* M *lokálisan kisebb, mint* N*. Tegyük fel, hogy* M *és* N *parciálisan differenciálhatók a* $\operatorname{diag}(I^n)$ *diagonálison. Ekkor minden* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *esetén*

$$\partial_i M^\Delta = \partial_i N^\Delta. \tag{11}$$

Ha ráadásul M *és* N *kétszer differenciálhatók a* $\operatorname{diag}(I^n)$ *diagonálison, akkor a*

$$\big(\partial_i\partial_j N^\Delta - \partial_i\partial_j M^\Delta\big)_{i,j=1}^{n-1} \tag{12}$$

szimmetrikus $((n-1)\times(n-1))$*-típusú mátrix pozitív szemidefinit.*

Másfelől, ha a (11) *egyenlet érvényes minden* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *esetén, továbbá* M *és* N *kétszer folytonosan differenciálhatók a* $\operatorname{diag}(I^n)$ *diagonálison és a* (12) *által adott szimmetrikus* $((n-1)\times(n-1))$*-típusú mátrix pozitív definit, akkor* M *lokálisan kisebb, mint* N*.*

E fejezet első fő eredménye szükséges, illetve elégséges feltételeket ad az általánosított Bajraktarević-közepek lokális összehasonlíthatóságára.

Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$*,* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvények, továbbá legyenek* $p, q\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ *folytonos függvények. Tegyük fel, hogy* $A_{f,p}^{[n]}$ *lokálisan kisebb, mint* $A_{g,q}^{[n]}$*. Ekkor*

$$\frac{p_i}{p_0} = \frac{q_i}{q_0} \qquad (i \in \{1, \ldots, n\}). \tag{13}$$

Ha ráadásul f, g kétszer differenciálhatók és p, q folytonosan differenciálhatók, akkor a

$$\frac{q_0^2|g'|}{p_0^2|f'|} \tag{14}$$

függvény monoton növekedő.

Másfelől, ha f, g és p, q kétszer folytonosan differenciálhatók, (13) *teljesül és a* (14)*-ben látott függvény deriváltja pozitív, akkor $A_{f,p}^{[n]}$ lokálisan kisebb, mint $A_{g,q}^{[n]}$.*

A következőkben az általánosított Bajraktarević-közepek lokális összehasonlíthatósági problémájának azt az esetét tekintjük, amikor I egy nemüres, nyílt részintervalluma $\mathbb{R}_+$-nak, és a $p_1, \dots, p_n$, illetve $q_1, \dots, q_n$ súlyfüggvények hatványfüggvények pozitív számszorosai.

Következmény. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}_+$ egy nemüres, nyílt intervallum, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvények. Legyen $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, és a súlyfüggvényeket a*

$$p_i(x) := \lambda_i x^{\alpha_i} \qquad \textit{és} \qquad q_i(x) := \mu_i x^{\beta_i} \qquad (i \in \{1, \dots, n\},\, x \in I) \tag{15}$$

formulákkal definiáljuk. Tegyük fel, hogy $A_{f,p}^{[n]}$ lokálisan kisebb, mint $A_{g,q}^{[n]}$. Ekkor léteznek $\gamma > 0$ és $\delta \in \mathbb{R}$ konstansok úgy, hogy

$$\mu_i = \gamma \lambda_i \qquad \textit{és} \qquad \beta_i = \alpha_i + \delta \qquad (i \in \{1, \dots, n\}). \tag{16}$$

Ha ráadásul f és g kétszer differenciálhatók, akkor az

$$x \mapsto x^{2\delta} \frac{|g'(x)|}{|f'(x)|} \tag{17}$$

leképezés monoton növekedő az I intervallumon.

Másfelől, ha f, g kétszer folytonosan differenciálhatók, (16) *teljesül és a* (17)*-ban látott függvény deriváltja pozitív, akkor $A_{f,p}^{[n]}$ lokálisan kisebb, mint $A_{g,q}^{[n]}$.*

A fenti eredmény egy azonnali következményeként karakterizálni tudjuk az általánosított hatványközepek lokális összehasonlíthatóságát.

Következmény. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}_+$ egy nemüres, nyílt intervallum, $a, b \in \mathbb{R}$ pedig konstansok. Definiáljuk az $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ függvényeket az alábbi képletekkel:*

$$f(x) := \begin{cases} x^a & \text{ha } a \neq 0 \\ \log(x) & \text{ha } a = 0 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad g(x) := \begin{cases} x^b & \text{ha } b \neq 0 \\ \log(x) & \text{ha } b = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Legyen $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, és definiáljuk a $p, q\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ függvényeket (15) *szerint. Ha $A_{f,p}^{[n]}$ lokálisan kisebb, mint $A_{f,p}^{[n]}$, akkor léteznek $\gamma > 0$ és $\delta \in \mathbb{R}$ konstansok, hogy* (16) *teljesül és $a \leq b + 2\delta$.*

Másfelől, ha (16) *fennáll és $a < b + 2\delta$, akkor $A_{f,p}^{[n]}$ lokálisan kisebb, mint $A_{g,q}^{[n]}$.*

3.2. Globális összehasonlíthatóság. Ha $A_{f,p}^{[n]}$ globálisan kisebb, mint $A_{g,q}^{[n]}$, akkor $A_{f,p}^{[n]}$ lokálisan is kisebb, mint $A_{g,q}^{[n]}$, és ezért (13) szükségessége azonnal adódik, és a (14)-ben látott függvény monoton növekedő kell legyen. Viszont ezek a feltételek nem elég erősek ahhoz, hogy maguk után vonják az előbb említett közepek globális összehasonlíthatóságát. Az alfejezet első tétele azzal foglalkozik, hogy az (13) feltételt mivel kell kiegészíteni ahhoz, hogy adódjon a globális összehasonlíthatóság.

Tétel. *Legyenek $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvények, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, és legyenek $p, q\colon I \to \mathbb{R}_+^n$. Tegyük fel, hogy* (13) *teljesül, és*

$$\frac{p_0(x)(f(x) - f(y))}{p_0(y)f'(y)} \leq \frac{q_0(x)(g(x) - g(y))}{q_0(y)g'(y)} \qquad (x, y \in I). \tag{19}$$

Ekkor $A_{f,p}^{[n]}$ globálisan kisebb, mint $A_{g,q}^{[n]}$.

A második eredményünk pedig azzal, hogy az (14) függvény monoton növekedésére vonatkozó feltételt hogyan kell szigorítani ahhoz, hogy az maga után vonja a globális összehasonlíthatóságot. Az derül ki, hogy ha az (14) függvényt alkotó szorzótényezők mindegyike monoton növekedő, akkor az már elegendő.

Tétel. *Legyenek $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvények, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, és $p, q\colon I \to \mathbb{R}_+^n$. Tegyük fel, hogy* (13) *teljesül, illetve*

$$\frac{q_0}{p_0} \qquad \textit{és} \qquad \frac{|g'|}{|f'|}$$

monoton növekedők. Ekkor $A_{f,p}^{[n]}$ globálisan kisebb, mint $A_{g,q}^{[n]}$.

Megjegyezzük, hogy az (19) elégséges feltétel maga után vonja az (14) függvény monoton növekedését. Általánosságban a megfordítás nem igaz, azonban az alábbiakban bemutatunk két speciális esetet, amikor az. Az első esetben p és q azonosak.

Tétel. *Legyenek $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, kétszer differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvények, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, és legyen $p\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ egy folytonos függvény. Ekkor az alábbi állítások páronként ekvivalensek.*

(i) $A_{f,p}^{[n]}$ *globálisan kisebb, mint* $A_{g,p}^{[n]}$.

(ii) $A_{f,p}^{[n]}$ *lokálisan kisebb, mint* $A_{g,p}^{[n]}$.

(iii) A $|g'/f'|$ függvény monoton növekedő.

(iv) Az alábbi egyenlőtlenség teljesül az I intervallumon:

$$\frac{f''}{f'} \leq \frac{g''}{g'}.$$

(v) Feltéve, hogy g monoton növekedő (csökkenő), a $g \circ f^{-1}$ függvény konvex (konkáv) $f(I)$-n;

(vi)

$$\frac{f(x) - f(y)}{f'(y)} \leq \frac{g(x) - g(y)}{g'(y)} \qquad (x, y \in I).$$

A második esetben az f és g függvények egyeznek meg.

Tétel. *Legyen* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *egy szigorúan monoton, kétszer folytonosan differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvény,* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, *és legyenek* $p, q\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ *folytonos függvények. Ekkor az alábbi állítások páronként ekvivalensek.*

(i) $A_{f,p}^{[n]}$ *globálisan kisebb, mint* $A_{f,q}^{[n]}$.

(ii) $A_{f,p}^{[n]}$ *lokálisan kisebb, mint* $A_{f,q}^{[n]}$.

(iii) A (13) *feltétel teljesül és a* q_0/p_0 *függvény monoton növekedő.*

Következmény. *Legyen* $I \subseteq \mathbb{R}_+$ *egy nemüres, nyílt intervallum,* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvények. Legyen továbbá* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ *és definiáljuk a* $p, q\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ *függvényeket* (15) *szerint. Tegyük fel, hogy léteznek* $\gamma > 0$ *és* $\delta \in \mathbb{R}$ *konstansok, hogy* (16) *fennáll, és*

$$\frac{f(x) - f(y)}{f'(y)} \leq \frac{x^\delta (g(x) - g(y))}{y^\delta g'(y)} \qquad (x, y \in I).$$

Ekkor $A_{f,p}^{[n]}$ *globálisan kisebb, mint* $A_{g,q}^{[n]}$.

Következmény. *Legyen* $I \subseteq \mathbb{R}_+$ *egy nemüres, nyílt intervallum,* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, *és legyenek* $a, b \in \mathbb{R}$ *konstansok. Definiáljuk a* $p, q\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ *függvényeket* (15), *a* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *függvényeket pedig* (18) *szerint. Tegyük fel, hogy léteznek* $\gamma > 0$ *és* $\delta \in \mathbb{R}$ *konstansok, hogy* (16), *illetve a*

$$\min(a, 0) \leq \delta + \min(b, 0) \qquad \textit{és} \qquad \max(a, 0) \leq \delta + \max(b, 0)$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Ekkor $A_{f,p}^{[n]}$ *globálisan kisebb, mint* $A_{g,q}^{[n]}$.

4. Fejezet – Lokális és globális Hölder- és Minkowski-típusú egyenlőtlenségek

A Hölder, illetve Minkowski által felfedezett híres egyenlőtlenségek számos formában felírhatók, például hatványközepekre vonatkozóan is. Ahhoz, hogy felidézzük a Rogers által 1888-ban és Hölder által 1889-ben kitalált klasszikus Hölder(–Rogers) egyenlőtlenséget, legyen $p, q > 1$ olyanok, hogy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ esetén az

$$\frac{x_1y_1 + \cdots + x_ny_n}{n} \le \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{y_1^q + \cdots + y_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

egyenlőtlenség teljesül. A $p = q = 2$ speciális esetben ez az egyenlőtlenség az úgynevezett Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz egyenlőtlenségre redukálódik, amelyet a fenti formában Cauchy fedezett fel 1821-ben. Egy adott $p \ge 1$ valós paraméter esetén az 1910-ben publikált klasszikus Minkowski-egyenlőtlenség azt állítja, hogy a p-edik hatványközép szubadditív, azaz minden $n \in \mathbb{N}$ és $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ esetén az

$$\left(\frac{(x_1 + y_1)^p + \cdots + (x_n + y_n)^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{y_1^p + \cdots + y_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

egyenlőtlenség fennáll.

Tömören, ennek a fejezetnek az a célja, hogy az összeadást, illetve a szorzást egy általánosabb műveletre és a hatványközepeket pedig általánosított Bajraktarević-közepekre, speciálisan súlyozott Gini-közepekre cserélve, a Hölder- és Minkowski-egyenlőtlenségekkel analóg egyenlőtlenségeket vizsgáljunk. Ezenfelül az is célkitűzésünk, hogy karakterizáljuk ezeket az egyenlőtlenségeket lokális és globális értelemben is. Szükséges, illetve elégséges feltételeket fogunk levezetni az

$$M_0(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n)) \le \Phi(M_1(x^1), \ldots, M_k(x^k)), \tag{20}$$

függvényegyenlőtlenség lokális, illetve globális teljesülésére, ahol $n \in \mathbb{N}, n \ge 2, k \in \mathbb{N}$, minden $\alpha \in \{0, \ldots, k\}$ esetén $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ egy nemüres, nyílt intervallum, $I := I_1 \times \cdots \times I_k$, $M_\alpha \colon I_\alpha^n \to I_\alpha$ egy n-változós közép, és $\Phi \colon I \to I_0$ adott leképezés. Összhangban a korábbi fejezetekben használt terminológiával, ha létezik olyan $U \subseteq I^n$ nyílt halmaz, amely tartalmazza a $\operatorname{diag}(I^n)$ diagonálist, és a (20) egyenlőtlenség teljesül minden $x \in U^T \subseteq \prod_{\alpha=1}^k I_\alpha^n$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy (20) *lokálisan érvényes*. Ha (20) fennáll minden $x \in (I^n)^T = \prod_{\alpha=1}^k I_\alpha^n$ esetén, akkor azt mondjuk, hogy (20) *globálisan érvényes*. Világos, hogy (20) globális érvényessége maga után vonja annak lokális érvényességét.

Ezt követően azt a speciális esetét tekintjük a (20) egyenlőtlenségnek, amikor az összes közép n-változós általánosított Bajraktarević-közép, azaz az

$$A_{f_0,p^0}^{[n]}(\Phi(x_1),\dots,\Phi(x_n)) \le \Phi(A_{f_1,p^1}^{[n]}(x^1),\dots,A_{f_k,p^k}^{[n]}(x^k)), \tag{21}$$

függvényegyenlőtlenséggel foglalkozunk, ahol minden $\alpha \in \{0,\dots,k\}$ esetén az ismeretlen $f_\alpha\colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton, és $p^\alpha\colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+^n$ is ismeretlen függvény. Szükséges, illetve elégséges feltételeket kapunk a lokális, illetve a globális érvényességére.

Megemlítjük (21) néhány fontos speciális esetét.

1. Ha $k = 1$, $I_0 = I_1 =: J$ és $\Phi(x) = x$, akkor (21) az általánosított Bajraktarević-középek J intervallumon való lokális és globális összehasonlíthatóságára egyszerűsödik.

2. Ha $k \in \mathbb{N}, k \ge 2$, $I_0 = I_1 = \dots = I_k =: J$, $\Phi(x_1,\dots,x_k) = \frac{1}{k}(x_1 + \dots + x_k)$, és $f_0 = f_1 = \dots = f_k =: f$, $p^0 = p^1 = \dots = p^k =: p$, akkor (21) az $A_{f,p}^{[n]}$ közép J-n való Jensen-konvexitását jelenti. Ebben az esetben (21)-mat Jensen-típusú egyenlőtlenségnek mondjuk.

3. Ha $k \in \mathbb{N}, k \ge 2$, $I_0 = I_1 = \dots = I_k = \mathbb{R}_+$, $\Phi(x_1,\dots,x_k) = x_1 + \dots + x_k$, és $f_0 = f_1 = \dots = f_k =: f$, $p^0 = p^1 = \dots = p^k =: p$, akkor (21) az $A_{f,p}^{[n]}$ közép $\mathbb{R}_+$ halmazon való szubadditivitását fejezi ki, amelyet gyakran Minkowski-típusú egyenlőtlenségnek is mondunk.

4. Ha $k \in \mathbb{N}, k \ge 2$, $I_0 = I_1 = \dots = I_k = \mathbb{R}_+$, $\Phi(x_1,\dots,x_k) = x_1 \cdots x_k$, akkor (21) egy az $A_{f_0,p^0}^{[n]}, A_{f_1,p^1}^{[n]},\dots,A_{f_k,p^k}^{[n]}$ középekre vonatkozó Hölder-típusú egyenlőtlenségre redukálódik.

Három tétel kivételével a fejezet összes eredményét a [6] dolgozatunkban bizonyítottuk először. A három tétel közül kettő a Gini-középekre vonatkozó

Minkowski-típusú egyenlőtlenség globális fennállását karakterizálja a 2-változós esetben, illetve rögzítetlen változószám mellett. A harmadik a Gini-közepekre vonatkozó Hölder-típusú egyenlőtlenség globális teljesülésére ad szükséges és elégséges feltételrendszert rögzítetlen változószám mellett. Mindhárom említett tétel előtt kihangsúlyozzuk, hogy az adott eredmény mely szerző(k)nek köszönhető, és melyik publikációban található meg.

4.1. Lokális Hölder- és Minkowski-típusú egyenlőtlenségek. Ebben és a következő alfejezetben minden $k \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ esetén $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ egy nemüres, nyílt intervallumot fog jelölni, és az $I := I_1 \times \cdots \times I_k$ jelölést is rögzítjük. A (20) egyenlőtlenség vizsgálatához vezessük be az $F\colon I_1^n \times \cdots \times I_k^n \to \mathbb{R}$ függvényt, amely az alábbi képlettel definiált:

$$F(x) = F(x^1, \dots, x^k) := \Phi(M_1(x^1), \dots, M_k(x^k)) - M_0(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)). \tag{22}$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy minden $y \in I$ esetén $F(\Delta_n^k(y)) = 0$. Valóban, felhasználva az $M_0, M_1, \dots, M_k$ függvények középérték tulajdonságát, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F(\Delta_n^k(y)) &= F(\Delta_n(y_1), \dots, \Delta_n(y_k)) \\ &= \Phi(M_1(\Delta_n(y_1)), \dots, M_k(\Delta_n(y_k))) - M_0(\Delta_n(\Phi(y))) \\ &= \Phi(M_1^\Delta(y_1), \dots, M_k^\Delta(y_k)) - M_0^\Delta(\Phi(y)) \\ &= \Phi(y_1, \dots, y_k) - \Phi(y) = 0. \end{aligned}$$

Megfogalmazzuk a következő lemmát az F függvény parciális deriváltjainak kiszámításához a $\Delta_n^k(y)$ alakú pontokban.

Lemma. *Legyenek $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és minden $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ esetén $M_\alpha\colon I_\alpha^n \to I_\alpha$ egy n-változós közép, definiáljuk az $F\colon I_1^n \times \cdots \times I_k^n \to \mathbb{R}$ függvényt* (22) *szerint, és legyen $\Phi\colon I \to I_0$.*

(i) Minden $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ esetén tegyük fel, hogy M_α parciálisan differenciálható a $\operatorname{diag}(I_\alpha^n)$ diagonálison, és hogy Φ differenciálható. Ekkor minden $i \in \{1, \dots, k\}$, $\ell \in \{1, \dots, n\}$ és $y \in I$ esetén

$$\partial_{\ell+n(i-1)} F(\Delta_n^k(y)) = \partial_i \Phi(y)\big(\partial_\ell M_i^\Delta(y_i) - \partial_\ell M_0^\Delta(\Phi(y))\big).$$

(ii) *Minden $\alpha \in \{0,\dots,k\}$ esetén tegyük fel, hogy M_α kétszer parciálisan differenciálható a $\operatorname{diag}(I_\alpha^n)$ diagonálison, és hogy Φ kétszer differenciálható. Ekkor minden $i,j \in \{1,\dots,k\}$, $\ell,m \in \{1,\dots,n\}$ és $y \in I$ esetén*

$$\begin{aligned}\partial_{\ell+n(i-1)}&\partial_{m+n(j-1)}F(\Delta_n^k(y))\\ &= \partial_i\partial_j\Phi(y)\big(\partial_m M_j^\Delta(y_j)\partial_\ell M_i^\Delta(y_i) - \delta_{\ell,m}\partial_m M_0^\Delta(\Phi(y))\big)\\ &\quad - \partial_j\Phi(y)\big(\partial_i\Phi(y)\partial_\ell\partial_m M_0^\Delta(\Phi(y)) - \delta_{i,j}\partial_\ell\partial_m M_j^\Delta(y_j)\big).\end{aligned}$$

Az alábbi két eredmény az első- és másodrendű szükséges feltételeket írja le (20) lokális teljesüléséhez.

Tétel. *Legyenek $n,k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és minden $\alpha \in \{0,\dots,k\}$ esetén $M_\alpha\colon I_\alpha^n \to I_\alpha$ egy n-változós közép, amely parciálisan differenciálható a $\operatorname{diag}(I_\alpha^n)$ diagonálison, és legyen továbbá $\Phi\colon I \to I_0$ szürjektív és differenciálható, nemnulla elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkező függvény. Tegyül fel, hogy a* (20) *egyenlőtlenség lokálisan érvényes. Ekkor léteznek $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ konstansok, hogy minden $(y_0,y) \in I_0 \times I$ és $\ell \in \{1,\dots,n\}$ esetén*

$$\lambda_\ell = \partial_\ell M_0^\Delta(y_0) = \partial_\ell M_1^\Delta(y_1) = \dots = \partial_\ell M_k^\Delta(y_k). \tag{23}$$

Ha ráadásul néhány $\alpha \in \{0,\dots,k\}$ és $y_\alpha \in I_\alpha$ esetén az M_α közép differenciálható $\Delta_n(y_\alpha)$-ban, akkor $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ is fennáll.

Tétel. *Legyenek $n,k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és minden $\alpha \in \{0,\dots,k\}$ esetén $M_\alpha\colon I_\alpha^n \to I$ egy n-változós közép, amely kétszer parciálisan differenciálható a $\operatorname{diag}(I_\alpha^n)$ diagonálison, és legyen $\Phi\colon I \to I_0$ egy szürjektív, kétszer differenciálható, nemnulla elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkező függvény. Tegyük fel, hogy az* (20) *egyenlőtlenség lokálisan érvényes. Ekkor léteznek $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ konstansok, hogy $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, és minden $(y_0,y) \in I_0 \times I$ és $\ell \in \{1,\dots,n\}$ esetén a* (23)*-beli egyenlőségek fennállnak. Ha ráadásul minden $y \in I$ esetén az $((nk)\times(nk))$-típusú mátrix, amelynek $(\ell+n(i-1), m+n(j-1))$-edik eleme, ahol $i,j \in \{1,\dots,k\}$ és $\ell,m \in \{1,\dots,n\}$, a*

$$\begin{aligned}\partial_i\partial_j\Phi(y)(\lambda_m\lambda_\ell - \delta_{\ell,m}\lambda_m) - \partial_i\Phi(y)\partial_j\Phi(y)\partial_\ell\partial_m M_0^\Delta(\Phi(y))&\\ + \delta_{i,j}\partial_j\Phi(y)\partial_\ell\partial_m M_j^\Delta(y_j)&\end{aligned}$$

módon adott, pozitív szemidefinit.

4.2. Általánosított Bajraktarević-közepekre vonatkozó Hölder- és Minkowski típusú egyenlőtlenségek. Az alábbi tétel azt írja le, első, illetve másodrendű differenciálhatósági feltétel mellett, hogy (21) lokális érvényessége esetén mi teljesül szükségszerűen.

Tétel. *Legyenek $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és minden $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ esetén $f_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ egy differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvény, legyen továbbá $p^\alpha = (p_1^\alpha, \dots, p_n^\alpha) \colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+^n$ folytonos és $p_0^\alpha := p_1^\alpha + \cdots + p_n^\alpha$. Legyen $\Phi \colon I \to I_0$ szürjektív, differenciálható, nemnulla elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkező függvény. Tegyük fel, hogy a* (21) *egyenlőtlenség lokálisan érvényes. Ekkor léteznek $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ konstansok, hogy $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ és minden $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, illetve $\ell \in \{1, \dots, n\}$ esetén*

$$p_\ell^\alpha = \lambda_\ell p_0^\alpha \tag{24}$$

fennáll az I_α intervallumon. Ha ráadásul minden $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ esetén f_α kétszer differenciálható, p^α folytonosan differenciálható és Φ kétszer differenciálható, akkor a

$$\begin{aligned}\Gamma(y) := \Bigg(&- \partial_i \partial_j \Phi(y) - \partial_j \Phi(y) \partial_i \Phi(y) \left(2 \frac{(p_0^0)'}{p_0^0} + \frac{f_0''}{f_0'} \right) (\Phi(y)) \\ &+ \delta_{i,j} \partial_j \Phi(y) \left(2 \frac{(p_0^j)'}{p_0^j} + \frac{f_j''}{f_j'} \right) (y_j) \Bigg)_{i,j=1}^k\end{aligned} \tag{25}$$

képlettel adott $(k \times k)$ típusú $\Gamma(y)$ mátrix pozitív szemidefinit minden $y \in I$ esetén.

Az alábbi eredmény egy konvexitási tulajdonság formájában újrafogalmazza a fenti tétel pozitív szemidefinitségi feltételét.

Tétel. *Legyenek $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és minden $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ esetén $f_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ egy kétszer differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvény, legyen továbbá $p^\alpha = (p_1^\alpha, \dots, p_n^\alpha) \colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+^n$ folytonosan differenciálható és $p_0^\alpha := p_1^\alpha + \cdots + p_n^\alpha$. Legyenk $\Phi \colon I \to I_0$ egy szürjektív, kétszer differenciálható, nemnulla elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkező függvény. Tegyük fel, hogy a* (21) *egyenlőtlenség lokálisan érvényes. Végül, minden $\alpha \in \{0, \dots, k\}$*

esetén definálják a $\varphi_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ és aztán a $\varphi \colon I \to \mathbb{R}^k$ függvényeket az alábbiak szerint:

$$\varphi_\alpha := \int (p_0^\alpha)^2 f'_\alpha \qquad \text{és} \qquad \varphi(y) := (\varphi_1(y_1), \ldots, \varphi_k(y_k)).$$

Ekkor $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ és φ kétszer differenciálható, invertálható függvények, és a

$$\Psi(u) := \varphi_0(\Phi(\varphi^{-1}(u)))$$

formulával definiált $\Psi \colon \varphi(I) \to \mathbb{R}$ leképezés konkáv, ha $f'_0 > 0$, és konvex, ha $f'_0 < 0$.

Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy a Ψ segédfüggvény konkávitása nem csupán egy következménye a Γ mátrixértékű függvény pozitív szemidefinitségének, hanem igazából ekvivalens azzal. Másfelől, ha minden súlyfüggvény a konstans 1 függvény, akkor $\varphi_\alpha = f_\alpha$, és a kváziaritmetikai közepek elmélete szerint (ld. [7]) ebben az esetben Ψ konkávitása elégséges is az (21) egyenlőtlenség globális teljesüléséhez.

Az alábbi két tétel elégséges feltételeket ad az (21) egyenlőtlenség lokális, illetve globális fennállására.

Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és minden $\alpha \in \{0, \ldots, k\}$ esetén $f_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ egy differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvény, $p_0^\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+$, és legyen továbbá $\Phi \colon I \to I_0$ parciálisan differenciálható. Tegyük fel, hogy az alábbi egyenlőtlenség lokálisan teljesül az I^2 halmazon, azaz létezik egy $V \subseteq I^2$ nemüres, nyílt halmaz, amely tartalmazza a $\operatorname{diag}(I^2)$ diagonálist, és minden $(u, y) \in V$ esetén*

$$\frac{p_0^0(\Phi(y))(f_0(\Phi(y)) - f_0(\Phi(u)))}{p_0^0(\Phi(u))f'_0(\Phi(u))} \le \sum_{j=1}^{k} \partial_j \Phi(u) \frac{p_0^j(y_j)(f_j(y_j) - f_j(u_j))}{p_0^j(u_j)f'_j(u_j)} \tag{26}$$

fennáll. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és olyan $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ konstansok esetén, amelyekre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ érvényes, az

$$A^{[n]}_{f_0, p_0^0 \lambda}(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n)) \le \Phi(A^{[n]}_{f_1, p_0^1 \lambda}(x^1), \ldots, A^{[n]}_{f_k, p_0^k \lambda}(x^k)) \tag{27}$$

egyenlőtlenség lokálisan teljesül.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az (21)-ben előforduló általánosított Bajraktarević-közepek súlyfüggvényei szükségszerűen olyan alakúak, mint (24)-ben. Ezért a (21) egyenlőtlenség lokális, illetve globális teljesülése azonnal következik a (27) egyenlőtlenség lokális, illetve globális érvényességéből.

Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és minden $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ esetén $f_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ egy differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvény, $p_0^\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+$, és legyen $\Phi \colon I \to I_0$ parciálisan differenciálható. Tegyük fel, hogy* (26) *globálisan, azaz minden $u, y \in I$ esetén teljesül az I^2 halmazon. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és olyan $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ konstansok esetén, amelyekre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ érvényes, a* (27) *egyenlőtlenség globálisan teljesül.*

Az alábbi eredmény egy szükséges feltételt ad a (26) egyenlőtlenség lokális fennállására.

Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és minden $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ esetén $f_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ egy kétszer differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvény, $p_0^\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+$ pedig egy kétszer differenciálható függvény. Legyen továbbá $\Phi \colon I \to I_0$ kétszer differenciálható. Tegyük fel, hogy a* (26) *egyenlőtlenség lokálisan teljesül, azaz létezik olyan $V \subseteq I^2$ nemüres, nyílt halmaz, amely tartalmazza a $\operatorname{diag}(I^2) \subseteq V$ diagonálist, és* (26) *fennáll minden $(u, y) \in V$ esetén. Ekkor a* (25) *által definiált $\Gamma \colon I \to \mathbb{R}^{k \times k}$ mátrixértékű függvény értékei pozitív szemidefinit mátrixok.*

A fenti állítása megfordítása általánosságban nem igaz. A feltételeken szigorítani kell, nevezeten pozitív definitséget kell feltételezni pozitív szemidefinitség helyett.

Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és minden $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ esetén $f_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ egy kétszer folytonosan differenciálható, nemnulla első deriválttal rendelkező függvény, $p_0^\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+$ pedig egy kétszer folytonosan differenciálható függvény. Legyen továbbá $\Phi \colon I \to I_0$ kétszer folytonosan differenciálható. Tegyük fel, hogy minden $y \in I$ esetén a* (25) *szerint adott $(k \times k)$-típusú $\Gamma(y)$ mátrix pozitív definit. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és olyan $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ esetén, amelyekre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ érvényes, a* (27) *egyenlőtlenség lokálisan teljesül.*

4.3. Súlyozott Gini-közepekre vonatkozó Hölder- és Minkowski-típusú egyenlőtlenségek. Ebben a fejezetben $k \in \mathbb{N}, \alpha \in \{1, \dots, k\}$ esetén I_α az $\mathbb{R}_+$

halmaz egy nemüres, nyílt részintervallumát jelöli, legyen $I := I_1 \times \cdots \times I_k$, és a fenti eredményeket alkalmazzuk a (20) egyenlőtlenség néhány fontos speciális esetére. Először olyan egyenlőtlenségekkel foglalkozunk, amelyeket úgy kapunk (20)-ből, hogy, minden $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ esetén, az M_α közepeket konkretizáljuk, aztán pedig az olyan esetekben vonunk le következtetéseket, amikor (20)-ben a Φ függvényt a k-változós összeadásnak, illetve szorzásnak választjuk.

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és elevenítsük fel adott $r \in \mathbb{R}$ esetén az *n-változós $\lambda \in \mathbb{R}_+^n, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ súlyvektorral súlyozott r-edig hatvány vagy r-edik Hölder közép*, adott $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ esetén pedig az *n-változós $\lambda \in \mathbb{R}_+^n, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ súlyvektorral súlyozott, $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ paraméterű Gini-közép* fogalmát:

$$H_{r;\lambda}^{[n]}(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} \big(\lambda_1 x_1^r + \cdots + \lambda_n x_n^r\big)^{\frac{1}{r}} & \text{ha } r \neq 0 \\ x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} & \text{ha } r = 0, \end{cases}$$

$$G_{r,s;\lambda}^{[n]}(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda_1 x_1^r + \cdots + \lambda_n x_n^r}{\lambda_1 x_1^s + \cdots + \lambda_n x_n^s}\right)^{\frac{1}{r-s}} & \text{ha } r \neq s \\ \exp\left(\dfrac{\lambda_1 x_1^r \ln(x_1) + \cdots + \lambda_n x_n^r \ln(x_n)}{\lambda_1 x_1^r + \cdots + \lambda_n x_n^r}\right) & \text{ha } r = s. \end{cases}$$

Megjegyzés. Világos, hogy a $s = 0$ speciális esetben $G_{r,s;\lambda}^{[n]}$ a $H_{r;\lambda}^{[n]}$ közepet adja vissza. Azt is megjegyezzük, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $\ell \in \{1, \dots, n\}$ esetén a $p_\ell(t) := \lambda_\ell t^s$ és $f(t) := t^{r-s}$, ha $r \neq s$ vagy $f(t) := \ln(t)$, ha $r = s$ választásokkal $A_{f,p}^{[n]} = G_{r,s;\lambda}^{[n]}$ adódik.

Az alábbi állítás egy, a súlyozott Gini-közepekre vonatkozó általános egyenlőtlenség lokális fennállására ad szükséges, illetve elégséges feltételt.

Tétel. *Legyenek $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ és minden $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ esetén legyen $(r_\alpha, s_\alpha) \in \mathbb{R}^2$. Legyen továbbá $\Phi\colon I \to \mathbb{R}_+$ kétszer differenciálható, nemnulla elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkező függvény. Ekkor a*

$$G_{r_0,s_0;\lambda}^{[n]}(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) \leq \Phi\big(G_{r_1,s_1;\lambda}^{[n]}(x^1), \dots, G_{r_k,s_k;\lambda}^{[n]}(x^k)\big) \tag{28}$$

egyenlőtlenség lokális teljesüléséhez szükséges, hogy a

$$\Gamma(y) := \left(-\partial_i\partial_j\Phi(y) - \partial_j\Phi(y)\partial_i\Phi(y)\frac{r_0+s_0-1}{\Phi(y)} + \delta_{i,j}\partial_j\Phi(y)\frac{r_j+s_j-1}{y_j} \right)_{i,j=1}^{k}$$

formulával definiált $(k\times k)$*-típusú* $\Gamma(y)$ *mátrix pozitív szemidefinit legyen minden* $y \in I$ *esetén. Megfordítva, ha ez a mátrix pozitív definit minden* $y \in I$ *esetén, akkor* (28) *lokálisan fennáll* I*-n.*

Az alábbi tétel egy elégséges feltételt ad a (28) egyenlőtlenség globális érvényességére.

Tétel. *Legyen* $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ *és minden* $\alpha \in \{0,\dots,k\}$ *esetén legyen* $(r_\alpha, s_\alpha) \in \mathbb{R}^2$*. Legyen továbbá* $\Phi\colon I \to \mathbb{R}_+$ *egy parciálisan differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy*

$$\Phi(u)\chi_{r_0,s_0}\left(\frac{\Phi(y)}{\Phi(u)}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \partial_j\Phi(u)u_j\chi_{r_j,s_j}\left(\frac{y_j}{u_j}\right)$$

globálisan, azaz minden $(u,y) \in I^2$*-re teljesül. Ekkor minden* $n \in \mathbb{N}$ *és olyan* $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ *esetén, amelyre* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ *fennáll, a* (28) *egyenlőtlenség globálisan érvényes* I*-n.*

Azon speciális esetek vizsgálatához, amikor Φ az összeg-, illetve a szorzatfüggvény, szükségünk lesz az alábbi segédállításra.

Lemma. *Legyen* $k \in \mathbb{N}$ *és minden* $i \in \{0,\dots,k\}$ *esetén* $c_i \in \mathbb{R}$*. Ekkor a*

$$C := \big(\delta_{i,j}c_i + c_0\big)_{i,j=1}^{k}$$

mátrix pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha vagy $c_i \geq 0$ *minden* $i \in \{0,\dots,k\}$ *esetén, vagy létezik* $i \in \{0,\dots,k\}$*, hogy* $c_i < 0$ *és* $c_j > 0$ *minden* $j \in \{0,\dots,k\}\setminus\{i\}$ *indexre, és*

$$\frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1} + \cdots + \frac{1}{c_k} \leq 0. \tag{29}$$

Továbbá C *pontosan akkor pozitív definit, ha vagy* $c_i \geq 0$ *minden* $i \in \{0,\dots,k\}$ *esetén, és* $c_i = 0$ *legfeljebb egy* $i \in \{0,\dots,k\}$ *indexre teljesül, vagy létezik* $i \in \{0,\dots,k\}$*, hogy* $c_i < 0$ *és* $c_j > 0$ *minden* $j \in \{0,\dots,k\}\setminus\{i\}$ *esetén és* (29) *szigorú egyenlőtlenséggel áll fenn.*

Az alábbi eredmény karakterizálja a súlyozott Gini-közepekre vonatkozó Minkowski-típusú egyenlőtlenséget a lokális esetben.

Tétel. *Legyenek $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$. Minden $i \in \{0, \dots, k\}$ esetén legyen továbbá $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$ és $\gamma_i := r_i + s_i - 1$. A*

$$G^{[n]}_{r_0,s_0;\lambda}(x_1^1 + \cdots + x_1^k, \dots, x_n^1 + \cdots + x_n^k) \leq G^{[n]}_{r_1,s_1;\lambda}(x^1) + \cdots + G^{[n]}_{r_k,s_k;\lambda}(x^k) \tag{30}$$

egyenlőtlenség I-n való lokális fennállásához szükséges, hogy az alábbi esetek közül pontosan egy teljesüljön:

(i)

$$\gamma_0 \leq 0 \leq \min(\gamma_1, \dots, \gamma_k); \tag{31}$$

(ii) $\gamma_i > 0$ *minden* $i \in \{0, \dots, k\}$ *indexre, és*

$$\sum_{i \in J_+} \left(\frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\gamma_0}\right) \sup I_i \leq \sum_{i \in J_-} \left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_i}\right) \inf I_i; \tag{32}$$

(iii) $\gamma_0 < 0$ *és létezik* $i \in \{1, \dots, k\}$, *hogy* $\gamma_i < 0$, *minden* $j \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i\}$ *esetén* $\gamma_j > 0$, *és a* (32) *egyenlőtlenség fennáll,*

ahol, az utolsó két esethez definiáljuk az alábbi halmazokat:

$$J_+ := \left\{ i \in \{1, \dots, k\} \colon \frac{1}{\gamma_i} > \frac{1}{\gamma_0} \right\} \quad \text{és} \quad J_- := \left\{ i \in \{1, \dots, k\} \colon \frac{1}{\gamma_0} > \frac{1}{\gamma_i} \right\}.$$

Megfordítva, ha vagy (31) *teljesül és emellett* $\gamma_i = 0$ *legfeljebb egy* $i \in \{0, \dots, k\}$ *index esetén teljesül, vagy* $\gamma_0 \neq \gamma_\ell$ *valamilyen* $\ell \in \{1, \dots, k\}$ *indexre és (ii) vagy (iii) közül az egyik feltétel teljesül, akkor* (30) *lokálisan érvényes I-n.*

Következmény. *Legyenek $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$. Minden $i \in \{0, \dots, k\}$ esetén legyen továbbá $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. Minden $\alpha \in \{1, \dots, k\}$ index esetén tegyük fel, hogy az $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_+$ nemüres, nyílt intervallum kielégíti az $\inf I_\alpha = 0$ megszorítást. Ekkor ahhoz, hogy a* (30) *egyenlőtlenség lokálisan fennálljon az I intervallumon, szükséges az, hogy*

$$\max(1, r_0 + s_0) \leq \min(r_1 + s_1, \dots, r_k + s_k).$$

Megfordítva, ha ez az egyenlőtlenség szigorú, akkor (30) *lokálisan teljesül I-n.*

Az következő állítás a Minkowski-típusú egyenlőtlenség globális érvényességére ad egy szükséges feltételt.

Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és minden $i \in \{0, \dots, k\}$ esetén legyen $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. Tegyük fel, hogy minden $(u, y) \in I^2$ esetén a*

$$\chi_{r_0,s_0}\left(\frac{y_1 + \cdots + y_k}{u_1 + \cdots + u_k}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{u_j}{u_1 + \cdots + u_k} \chi_{r_j,s_j}\left(\frac{y_j}{u_j}\right)$$

egyenlőtlenség igaz. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és olyan $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ esetén, amelyre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ teljesül, a (30) *egyenlőtlenség globálisan fennáll az I intervallumon.*

A mögöttes intervallumot specializálva egy konkrétabb állítást is meg tudunk fogalmazni.

Következmény. *Legyen $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és minden $i \in \{0, \dots, k\}$ index esetén legyen $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. Tegyük fel, hogy minden $z \in \mathbb{R}_+^k$ és olyan $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ esetén, amelyre $t_1 + \cdots + t_k = 1$ teljesül, az alábbi egyenlőtlenség fennáll:*

$$\chi_{r_0,s_0}(t_1 z_1 + \cdots + t_k z_k) \leq \sum_{j=1}^{k} t_j \chi_{r_j,s_j}(z_j). \tag{33}$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és olyan $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ esetén, amelyre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ teljesül, a (30) *egyenlőtlenség globálisan érvényes az $\mathbb{R}_+^k$ halmazon.*

Ahhoz, hogy az eredményeinket összehasonlítsuk a már meglévőekkel, felelevenítünk két, a Minkowski-típusú egyenlőtlenség globális fennállására vonatkozó tételt. A 2-változós Gini-közepek esetében a Minkowski-típusú egyenlőtlenséget Czinder és Páles karakterizálta (ld. [3, Theorem 5] és egy speciális esetért [9]).

Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és minden $i \in \{0, \dots, k\}$ esetén legyen $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor a*

$$G_{r_0,s_0}^{[n]}(x_1 + \cdots + x_k, y_1 + \cdots + y_k) \leq G_{r_1,s_1}^{[n]}(x_1, y_1) + \cdots + G_{r_k,s_k}^{[n]}(x_k, y_k) \tag{34}$$

egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül minden $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}_+$ esetén, ha *(i)* $0 \leq \min(r_1, s_1, \dots .r_k, s_k)$,

(ii) $\min(r_0, s_0) \leq \min(1, r_1, s_1, \dots .r_k, s_k)$,

(iii) $\max(1, r_0 + s_0) \leq \min(r_1 + s_1, \dots, r_k + s_k)$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a fenti tétel harmadik feltétele nem más, mint a (34) egyenlőtlenség $\mathbb{R}_+$-on való lokális fennállásának szükséges feltétele. Az (i) és (ii) feltételek azonban nem szükséges feltételei (34) $\mathbb{R}_+$-on való lokális érvényességének.

Rögzítetlen változószám mellett a Gini-közepekkel kapcsolatos Minkowski-típusú egyenlőtlenség globális teljesülésére vonatkozó szükséges és elegendő feltételeket Páles határozta meg (ld. [10, Theorem 3.1]).

Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és minden $i \in \{0, \dots, k\}$ esetén legyen $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor a*

$$G^{[n]}_{r_0,s_0}(x^1_1 + \cdots + x^k_1, \dots, x^1_n + \cdots + x^k_n) \leq G^{[n]}_{r_1,s_1}(x^1) + \cdots + G^{[n]}_{r_k,s_k}(x^k) \tag{35}$$

egyenlőtlenség pontosan akkor áll fenn minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}^{n\times k}_+$ esetén, ha

(i) $0 \leq \min(r_1, s_1, \dots, r_k, s_k)$,

(ii) $\min(r_0, s_0) \leq \min(1, r_1, s_1, \dots, r_k, s_k)$,

(iii) $\max(1, r_0, s_0) \leq \min(\max(r_1, s_1), \dots, \max(r_k, s_k))$.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az előző két tétel (i) és (ii) feltételezi megegyeznek, ezért ezek szükséges feltételei lehetnek (35) globális teljesüléséhez minden rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén. A harmadik feltétel alakja nem ismert rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén. Azt is megjegyezzük, hogy a fenti tétel (i)-(iii) feltételrendszere szükséges és elégséges ahhoz, hogy a (33) egyenlőtlenség fennálljon minden $z \in \mathbb{R}^k_+$ és olyan $t_1, \dots, t_k \in [0, 1]$ esetén, amelyre $t_1 + \cdots + t_k = 1$ teljesül.

Az alábbiakban Gini-közepekre vonatkozó Hölder-típusú egyenlőtlenségeket karakterizálunk mind a lokális, mind pedig a globális esetben.

Tétel. *Legyenek $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$. Legyenek $(r_0, s_0), \ldots, (r_k, s_k) \in \mathbb{R}^2$ és $\gamma_i := r_i + s_i$ minden $i \in \{0, \ldots, k\}$ esetén. Ekkor ahhoz, hogy a*

$$G^{[n]}_{-r_0,-s_0;\lambda}(x_1^1 \cdots x_1^k, \ldots, x_n^1 \cdots x_n^k) \leq G^{[n]}_{r_1,s_1;\lambda}(x^1) \cdots G^{[n]}_{r_k,s_k;\lambda}(x^k) \tag{36}$$

egyenlőtlenség lokálisan fennálljon $\mathbb{R}_+^k$-n, szükséges az, hogy vagy $\gamma_i \geq 0$ minden $i \in \{0, \ldots, k\}$-ra, vagy létezik $i \in \{0, \ldots, k\}$, hogy $\gamma_i < 0$, minden $j \in \{0, \ldots, k\} \setminus \{i\}$ esetén $\gamma_j > 0$ és

$$\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \cdots + \frac{1}{\gamma_k} \leq 0 \tag{37}$$

teljesül. Megfordítva, ha vagy $\gamma_i \geq 0$ minden $i \in \{0, \ldots, k\}$ esetén és emellett $\gamma_i = 0$ legfeljebb egy $i \in \{0, \ldots, k\}$ index esetén áll fenn, vagy létezik $i \in \{0, \ldots, k\}$ hogy $\gamma_i < 0$, minden $j \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i\}$ esetén $\gamma_j > 0$ és (37) *szigorú egyenlőtlenséggel teljesül, akkor* (36) *érvényes lokálisan az $\mathbb{R}_+^k$ halmazon.*

Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és minden $i \in \{0, \ldots, k\}$ esetén legyen $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. Tegyük fel, hogy minden $z_1 \in (I_1/I_1), \ldots, z_k \in (I_k/I_k)$ esetén a*

$$\chi_{-r_0,-s_0}(z_1 \cdots z_k) \leq \sum_{j=1}^{k} \chi_{r_j,s_j}(z_j) \tag{38}$$

fennáll. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és olyan $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ esetén, amelyre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ teljesül, a (36) *egyenlőtlenség globálisan érvényes I-n.*

Rögzítetlen változószám mellett a globális esetben a (36) egyenlőtlenséget Páles karakterizálta a [11, 12] dolgozatokban.

Tétel. *Legyen $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ és minden $i \in \{0, \ldots, k\}$ esetén legyen $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor a*

$$G^{[n]}_{-r_0,-s_0}(x_1^1 \cdots x_1^k, \ldots, x_n^1 \cdots x_n^k) \leq G^{[n]}_{r_1,s_1}(x^1) \cdots G^{[n]}_{r_k,s_k}(x^k)$$

egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}_+^{n \times k}$ esetén, ha

(i) minden $i \in \{0, \ldots, k\}$ esetén $\max(s_i, r_i) \geq 0$, és

(ii) minden olyan $i \in \{0, \ldots, k\}$ *esetén, amelyre* $\min(s_i, r_i) < 0$ *teljesül,* $\max(s_j, r_j) > 0$ *érvényes minden* $j \in (\{0, \ldots, k\}) \setminus \{i\}$ *esetén és*

$$\frac{1}{\min(s_i, r_i)} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} \frac{1}{\max(s_j, r_j)} \leq 0.$$

Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy az (i) és (ii) feltételek szükségesek és elégségesek ahhoz, hogy a (38) egyenlőtlenség fennálljon minden $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{R}_+$ esetén (ld. [12]).

DEBRECENI EGYETEM
DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/79/2024.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Grünwald Richárd
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10076957

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

1. **Grünwald, R.**, Páles, Z.: Local and global Hölder- and Minkowski-type inequalities for nonsymmetric generalized Bajraktarević means.
   J. Math. Anal. Appl. 535 (2), 1-22, 2024. ISSN: 0022-247X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128214
   IF: 1.3 (2022)

2. **Grünwald, R.**, Páles, Z.: Local and global comparison of nonsymmetric generalized Bajraktarević means.
   J. Math. Anal. Appl. 512 (2), 1-12, 2022. ISSN: 0022-247X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126172
   IF: 1.3

3. **Grünwald, R.**, Páles, Z.: On the equality problem of generalized Bajraktarević means.
   Aequ. Math. 94 (4), 651-677, 2020. ISSN: 0001-9054.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00010-019-00670-9
   IF: 0.832

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (3)

4. **Grünwald, R.**, Páles, Z.: On the invariance of the arithmetic mean with respect to generalized Bajraktarević means.
   Acta Math. Hung. 166 (2), 594-613, 2022. ISSN: 0236-5294.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10474-022-01230-5
   IF: 0.9

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

5. **Grünwald, R.**, Páles, Z.: On additive functions with additional derivation properties.
Publ. Math. Debr. 99 (1-2), 201-221, 2021. ISSN: 0033-3883.
DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2021.8997
IF: 0.698

6. **Grünwald, R.**, Páles, Z.: On derivations with respect to finite sets of smooth functions.
Acta math. Hung. 154 (2), 530-544, 2018. ISSN: 0236-5294.
DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10474-018-0790-2
IF: 0.538

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 5,568
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 3,432

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2024.03.19.

Short thesis for the degree of Doctor of Philosophy (PhD)

Generalized Bajraktarević means

written by Richárd Grünwald

supervised by Prof. Dr. Zsolt Páles

University of Debrecen

Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

Debrecen, 2024.

Chapter 1 – Basic notions and results

In this chapter, I stands for a nonempty open real interval and we introduce the definition of the generalized Bajraktarević mean and compute its partial derivatives up to third-order. The results are contained in our paper [4].

1.1. Definition of generalized Bajraktarević means. To extend the notion of Bajraktarević means, we shall need the following lemma about the existence and properties of the left inverse of strictly monotone (but not necessarily continuous) functions.

Proposition. *Let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be a strictly monotone function. Then there exists a uniquely determined monotone function $g\colon \operatorname{conv}(f(I)) \to I$ such that g is the left inverse of f, i.e.,*

$$(g \circ f)(x) = x \qquad (x \in I). \tag{1}$$

Furthermore, g is monotone in the same sense as f, continuous,

$$(f \circ g)(y) = y \qquad (y \in f(I)), \tag{2}$$

and

$$\liminf_{x \to g(y)} f(x) \leq y \leq \limsup_{x \to g(y)} f(x) \qquad (y \in \operatorname{conv}(f(I))).$$

Thus, if f is lower (resp. upper) semicontinuous at $g(y)$, then $f \circ g(y) \leq y$ (resp. $y \leq f \circ g(y)$).

Definition. The function g described in the above lemma is called the *generalized left inverse of the strictly monotone function $f\colon I \to \mathbb{R}$* and is denoted by $f^{(-1)}$.

Remark. From (1) and (2), we get that the restriction of $f^{(-1)}$ to $f(I)$ is the inverse of f in the standard sense. Therefore, $f^{(-1)}$ is the continuous and monotone extension of the inverse of f to the smallest interval containing the range of f.

A fairly general mean, which includes numerous important means as particular cases, is the quasi-arithmetic mean, which is defined as follows.

Definition. Let $n \in \mathbb{N}$. Given a strictly monotone, continuous function $f\colon I \to \mathbb{R}$, let us introduce the *n-variable quasi-arithmetic mean* $A_f^{[n]}\colon I^n \to I$ by the following formula

$$A_f^{[n]}(x) := f^{-1}\left(\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}\right) \qquad (x \in I^n).$$

We say that the function f is the *generator of* $A_f^{[n]}$.

The following weighted extension of the quasi-arithmetic mean was introduced and investigated by Bajraktarević in [1] and [2].

Definition. Let $n \in \mathbb{N}$. Given a strictly monotone, continuous function $f\colon I \to \mathbb{R}$ and a positive valued function $p\colon I \to \mathbb{R}_+$, let us define the *$n$-variable Bajraktarević mean* $B_{f,p}^{[n]}\colon\ I^n \to I$ by

$$B_{f,p}^{[n]}(x) := f^{-1}\left(\frac{p(x_1)f(x_1) + \cdots + p(x_n)f(x_n)}{p(x_1) + \cdots + p(x_n)}\right) \qquad (x \in I^n). \tag{3}$$

We say that the function f is the *generator*, while p *is the weight function of* $B_{f,p}^{[n]}$.

Let us consider a possibly nonsymmetric generalization of the Bajraktarević mean.

Definition. Let $n \in \mathbb{N}$. Given a strictly monotone function $f\colon I \to \mathbb{R}$ and an n-tuple of positive valued functions $p = (p_1, \dots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$, we introduce the *$n$-variable generalized Bajraktarević mean* $A_{f,p}^{[n]}\colon I^n \to I$ by the following formula

$$A_{f,p}^{[n]}(x) := f^{(-1)}\left(\frac{p_1(x_1)f(x_1) + \cdots + p_n(x_n)f(x_n)}{p_1(x_1) + \cdots + p_n(x_n)}\right) \qquad (x \in I^n), \tag{4}$$

and, to simplify the notations, we will use the following definitions

$$R_{f,p}^{[n]}(x) := \frac{p_1(x_1)f(x_1) + \cdots + p_n(x_n)f(x_n)}{p_1(x_1) + \cdots + p_n(x_n)} \quad \text{and} \quad p_0 := p_1 + \cdots + p_n.$$

Similarly to the previous definitions, we say that the function f is the *generator*, while p *is the weight function of* $A_{f,p}^{[n]}$

Remark. We emphasize that $A_{f,p}^{[n]}$ is indeed a not necessarily symmetric generalization of the symmetric mean $B_{f,p}^{[n]}$, since, in the case when f is continuous, choosing all the weight functions to be the same, i.e., $p := p_1 = \cdots = p_n$ in (4), we get back (3).

Proposition. *Let $n \in \mathbb{N}, f\colon I \to \mathbb{R}$ be a strictly monotone function and $p = (p_1, \dots, p_n)\colon\ I \to \mathbb{R}_+^n$. Then the function $A_{f,p}^{[n]}\colon I^n \to I$ given by* (4) *is well-defined and it is a mean, i.e.,*

$$\min(x) \le A_{f,p}^{[n]}(x) \le \max(x) \qquad (x \in I^n).$$

1.2. Partial derivatives of generalized Bajraktarević means. In the next result we determine the partial derivatives of the generalized Bajraktarević means, up to third-order at the diagonal points of the domain under tight regularity assumptions. For instance, as stated below in assertions (1), (2b), (3c), for $m \in \mathbb{N}$, we prove the existence of partial derivatives of the form ∂_i^m only assuming $(m-1)$ times continuous differentiability of p_i. The partial derivatives play an essential role in the subsequent chapters as one of the tools that we use to prove the main theorems is solving the differential equations obtained by differentiating the functional equation on the diagonal of the domain in question.

Theorem. *Let $n \in \mathbb{N}, \ell \in \{1,2,3\}$, let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be an ℓ times differentiable function with a nonvanishing first derivative, and let $p = (p_1, \dots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$. Then we have the following assertions.*

(1) If $\ell = 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$, and p_i is continuous, then the first-order partial derivative $\partial_i A_{f,p}^{[n]}$ exists on $\operatorname{diag}(I^n)$ and

$$\left(\partial_i A_{f,p}^{[n]}\right)^{\Delta} = \frac{p_i}{p_0}.$$

(2a) If $\ell = 2$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ with $i \ne j$, furthermore, p_i and p_j are differentiable, then the second-order partial derivative $\partial_i \partial_j A_{f,p}^{[n]}$ exists on $\operatorname{diag}(I^n)$ and

$$\left(\partial_i \partial_j A_{f,p}^{[n]}\right)^{\Delta} = -\frac{(p_i p_j)'}{p_0^2} - \frac{p_i p_j}{p_0^2} \cdot \frac{f''}{f'}.$$

(2b) If $\ell = 2$, $i \in \{1,\dots,n\}$, *and* p_i *is continuously differentiable, then the second-order partial derivative* $\partial_i^2 A_{f,p}^{[n]}$ *exists on* $\operatorname{diag}(I^n)$ *and*

$$\left(\partial_i^2 A_{f,p}^{[n]}\right)^\Delta = 2\frac{p_i'(p_0-p_i)}{p_0^2} + \frac{p_i(p_0-p_i)}{p_0^2}\cdot\frac{f''}{f'}.$$

(3a) If $\ell = 3$, $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$ *with* $i \neq j \neq k \neq i$, *furthermore,* p_i, p_j, *and* p_k *are differentiable, then the third-order partial derivative* $\partial_i\partial_j\partial_k A_{f,p}^{[n]}$ *exists on* $\operatorname{diag}(I^n)$ *and*

$$\begin{aligned}\left(\partial_i\partial_j\partial_k A_{f,p}^{[n]}\right)^\Delta &= 2\frac{p_ip_j'p_k' + p_i'p_jp_k' + p_i'p_j'p_k}{p_0^3} + 2\frac{(p_ip_jp_k)'}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'}\\ &\quad + \frac{p_ip_jp_k}{p_0^3}\left(3\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - \frac{f'''}{f'}\right).\end{aligned}$$

(3b) If $\ell = 3$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$ *with* $i \neq j$, *furthermore,* p_i *is twice differentiable and* p_j *is differentiable, then the third-order partial derivative* $\partial_i^2\partial_j A_{f,p}^{[n]}$ *exists on* $\operatorname{diag}(I^n)$ *and*

$$\begin{aligned}\left(\partial_i^2\partial_j A_{f,p}^{[n]}\right)^\Delta &= \frac{2p_i'p_j'(2p_i-p_0) + p_j(2(p_i')^2 - p_i''p_0)}{p_0^3}\\ &\quad + \frac{(2p_i'p_j + p_ip_j')(2p_i-p_0)}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'}\\ &\quad + \frac{p_ip_j}{p_0^3}\left((3p_i-p_0)\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - p_i\frac{f'''}{f'}\right).\end{aligned}$$

(3c) If $\ell = 3$, $i \in \{1,\dots,n\}$ *and* p_i *is twice continuously differentiable, then the third-order partial derivative* $\partial_i^3 A_{f,p}^{[n]}$ *exists on* $\operatorname{diag}(I^n)$ *and*

$$\begin{aligned}\left(\partial_i^3 A_{f,p}^{[n]}\right)^\Delta &= 3\frac{(p_0-p_i)\big(p_0p_i'' - 2(p_i')^2\big)}{p_0^3} + 3\frac{p_i'(p_0-2p_i)(p_0-p_i)}{p_0^3}\cdot\frac{f''}{f'}\\ &\quad - \frac{p_i(p_0-p_i)}{p_0^3}\left(3p_i\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 - (p_0+p_i)\frac{f'''}{f'}\right).\end{aligned}$$

Chapter 2 – Equality problem

The paper [4] contains the results of this chapter, in which we deal with the equality problem of n-variable generalized Bajraktarević means, i.e., we give necessary as well as sufficient conditions in terms of the unknown functions listed below for the functional equation

$$f^{(-1)}\left(\frac{p_1(x_1)f(x_1)+\cdots+p_n(x_n)f(x_n)}{p_1(x_1)+\cdots+p_n(x_n)}\right)$$
$$=g^{(-1)}\left(\frac{q_1(x_1)g(x_1)+\cdots+q_n(x_n)g(x_n)}{q_1(x_1)+\cdots+q_n(x_n)}\right)$$

to be valid locally or globally, where $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ is fixed, I is a nonempty open real interval, which will be the case in this entire chapter, the unknown functions $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ are strictly monotone, furthermore, $p=(p_1,\dots,p_n)\colon I\to\mathbb{R}_+^n$ and $q=(q_1,\dots,q_n)\colon I\to\mathbb{R}_+^n$ are also unknown functions.

This problem in the symmetric 2-variable case, i.e., when $n=2$ and $p_1=p_2$, was already investigated and solved under sixth-order regularity assumptions by Losonczi in [8]. Later Páles and Zakaria reduced the severity of the differentiability assumptions and obtained the same result under first-order restrictions in their paper [14]. Apart from the aforementioned case, in this context, all other results in the chapter were newly discovered in our paper [4]. More precisely, in the nonsymmetric 2-variable case, assuming three times differentiability of f, g and the existence of $i\in\{1,2\}$ such that either p_i is twice continuously differentiable and p_{3-i} is continuous, or p_i is twice differentiable and p_{3-i} is once differentiable, we prove that the equality holds if and only if there exist four constants $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ with $ad\neq bc$ such that

$$cf+d>0,\qquad g=\frac{af+b}{cf+d},\qquad\text{and}\qquad q_\ell=(cf+d)p_\ell\quad(\ell\in\{1,\dots,n\}).$$

In the case $n\geq 3$, we obtain the same conclusion under weaker regularity assumptions. Namely, we suppose that f and g are three times differentiable, p is continuous and there exist $i,j,k\in\{1,\dots,n\}$ with $i\neq j\neq k\neq i$ such that p_i,p_j,p_k are differentiable.

2.1. Sufficient conditions.

Theorem. *Let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be a strictly increasing function, $n \in \mathbb{N}$, and let further $p = (p_1, \dots, p_n)\colon\ I \to \mathbb{R}^n_+$. Then, for all $x \in I^n$, the equality $y = A^{[n]}_{f,p}(x)$ holds if and only if, for $z \in I$,*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i)(f(z) - f(x_i)) \begin{cases} < 0 & \text{if } z < y \\ > 0 & \text{if } z > y. \end{cases} \tag{5}$$

If f is strictly decreasing, then the inequalities in (5) *hold with reversed inequality sign.*

Corollary. *Let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be continuous, strictly monotone, $n \in \mathbb{N}$, and let further $p = (p_1, \dots, p_n)\colon\ I \to \mathbb{R}^n_+$. Then, for all $x \in I^n$, the value $y = A^{[n]}_{f,p}(x)$ is the unique solution of the equation*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i)(f(y) - f(x_i)) = 0.$$

The next result establishes a sufficient condition for the equality of the n-variable generalized Bajraktarević means. We will call this situation the *canonical case of the equality*.

Theorem. *Let $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ be strictly monotone functions, $n \in \mathbb{N}$, and let further $p = (p_1, \dots, p_n)\colon\ I \to \mathbb{R}^n_+$, $q = (q_1, \dots, q_n)\colon I \to \mathbb{R}^n_+$. If there exist $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ with $ad \neq bc$ such that*

$$cf + d > 0, \qquad g = \frac{af + b}{cf + d}, \qquad \text{and} \qquad q_i = (cf + d)p_i \quad (i \in \{1, \dots, n\}) \tag{6}$$

hold on I, then $A^{[n]}_{f,p} = A^{[n]}_{g,q}$ is globally valid.

2.2. Necessary conditions. With the aid of the following lemma, we can reduce the regularity assumptions in our statements.

Let $n \in \mathbb{N}$. For all $i \in \{1, \dots, n\}$, let $e_i \in \mathbb{R}^n$ denote the ith vector of the standard base of $\mathbb{R}^n$, i.e., let $e_i := (\delta_{i,j})^n_{j=1}$. Given two weight functions

$p = (p_1, \dots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ and $q = (q_1, \dots, q_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$, we will also use the following notation:

$$r_0 := \frac{q_0}{p_0} = \frac{q_1 + \cdots + q_n}{p_1 + \cdots + p_n}.$$

Lemma. *Let $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ be continuous strictly monotone functions, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, and $p = (p_1, \dots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$, $q = (q_1, \dots, q_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$. Assume that $A_{f,p}^{[n]} = A_{g,q}^{[n]}$ is locally valid. Then the following two assertions hold.*

(i) For all $i \in \{1, \dots, n\}$, the function p_i is continuous if and only if the function q_i is continuous.

(ii) Let $k \in \mathbb{N}$. Assume that $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ are k times differentiable (resp. k times continuously differentiable) functions with nonvanishing first derivatives. Then, for all $i \in \{1, \dots, n\}$, the function p_i is k times differentiable (resp. k times continuously differentiable) if and only if q_i is k times differentiable (resp. k times continuously differentiable).

The following extension theorem is of basic importance since in the proofs of the main theorems, first we can state the validity of the canonical case of the equality only on a subinterval of the domain. Then the next main step of the proof is to extend the validity to the entire underlying interval.

Theorem. *Let $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ be continuous, strictly monotone, $n \in \mathbb{N}$, let further $p = (p_1, \dots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ be a continuous function and $q = (q_1, \dots, q_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$. Assume that $A_{f,p}^{[n]} = A_{g,q}^{[n]}$ is locally valid and that there exist $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ with $ad \neq bc$ and a nonempty open subinterval J of I such that* (6) *holds on J. Then q is continuous and* (6) *is also valid on I.*

The first- and second-order necessary conditions of the equality of two generalized Bajraktarević means are detailed in the following two lemmas, respectively.

Lemma. *Let $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ and $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ be differentiable functions with nonvanishing first derivatives and $i \in \{1, \dots, n\}$. Let further $p = (p_1, \dots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ and $q = (q_1, \dots, q_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ such that p_i and q_i are continuous. If $\partial_i A_{f,p}^{[n]} = \partial_i A_{g,q}^{[n]}$ holds on $\operatorname{diag}(I^n)$, then*

$$\frac{q_i}{q_0} = \frac{p_i}{p_0} \tag{7}$$

holds on I.

Lemma. *Let $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ and $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ be twice differentiable functions with nonvanishing first derivatives. Let $p = (p_1, \ldots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ and $q = (q_1, \ldots, q_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ be continuous functions and assume that, for all $i \in \{1, \ldots, n\}$,* (7) *holds on I. Let $j, k \in \{1, \ldots, n\}$. Then the following two assertions hold.*

(i) Provided that $j \neq k$ and p_j, p_k, q_j, q_k are differentiable functions, if $\partial_j \partial_k A_{f,p}^{[n]} = \partial_j \partial_k A_{g,q}^{[n]}$ holds on $\operatorname{diag}(I^n)$*, then there exists a nonzero constant γ such that, for all $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

$$q_i^2 g' = \gamma p_i^2 f' \tag{8}$$

is valid on I.

(ii) Provided that $j = k$ and p_j, q_j are continuously differentiable functions, if $\partial_j^2 A_{f,p}^{[n]} = \partial_j^2 A_{g,q}^{[n]}$ holds on $\operatorname{diag}(I^n)$*, then there exists a nonzero constant γ such that, for all $i \in \{1, \ldots, n\}$,* (8) *is valid on I.*

The following notion and a corresponding lemma play a basic role in the proofs of the subsequent results since, by solving the differential equations obtained by differentiating the functional equation at issue, one of the cases that we get is exactly the equality for which the next lemma gives a necessary condition under assuming only the regularity that is needed for the definition to be correct.

Definition. For a three times differentiable function $f\colon I \to \mathbb{R}$ with a nonvanishing first derivative, we introduce its *Schwarzian derivative* $S_f\colon I \to \mathbb{R}$ by the following formula:

$$S_f = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

Lemma. *Let $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ be three times differentiable functions with nonvanishing first derivatives. If $S_f = S_g$ is valid on I, then there exist $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ with $ad \neq bc$ such that $cf + d$ is positive on I and*

$$g = \frac{af + b}{cf + d}$$

holds on I.

Our first main result is contained in the following theorem. It completely characterizes the equality of two generalized Bajraktarević means with at least three variables.

Theorem. *Let $n \in \mathbb{N}, k \geq 3$ and $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ be three times differentiable functions with nonvanishing first derivatives. Let $p = (p_1, \dots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ be a continuous function and $q = (q_1, \dots, q_n) : I \to \mathbb{R}_+^n$. Assume that there exist $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ with $i \neq j \neq k \neq i$ such that p_i, p_j, p_k are differentiable functions. Then the following assertions are equivalent.*

(i) $A_{f,p}^{[n]} = A_{g,q}^{[n]}$ *holds globally.*

(ii) $A_{f,p}^{[n]} = A_{g,q}^{[n]}$ *holds locally.*

(iii) The function q is continuous, the functions q_i, q_j, q_k are differentiable, and the equalities

$$\begin{aligned} \partial_\ell A_{f,p}^{[n]} &= \partial_\ell A_{g,q}^{[n]} \qquad (\ell \in \{1, \dots, n-1\}), \\ \partial_i \partial_j A_{f,p}^{[n]} &= \partial_i \partial_j A_{g,q}^{[n]}, \\ \partial_i \partial_j \partial_k A_{f,p}^{[n]} &= \partial_i \partial_j \partial_k A_{g,q}^{[n]} \end{aligned}$$

hold on $\operatorname{diag}(I^n)$.

(iv) There exist $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ with $ad \neq bc$ such that

$$g = \frac{af + b}{cf + d} \qquad \text{and} \qquad q_\ell = (cf + d)p_\ell \qquad (\ell \in \{1, \dots, n\})$$

hold on I.

The second main theorem has two variants concerning the regularity assumptions and characterizes the equality of 2-variable generalized nonsymmetric Bajraktarević means.

Theorem. *Let $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ be three times differentiable functions with nonvanishing first derivatives. Let $p = (p_1, p_2)\colon I \to \mathbb{R}_+^2$ and $q = (q_1, q_2)\colon I \to \mathbb{R}_+^2$ such that $p_1 \neq p_2$. Assume that there exists $i \in \{1, 2\}$ such that one of the following regularity conditions is satisfied.*

(a) p_i *is twice continuously differentiable and* p_{3-i} *is continuous.*

(b) p_i *is twice differentiable and* p_{3-i} *is once differentiable.*

Then the following assertions are pairwise equivalent.

(i) $A^{[2]}_{f,p} = A^{[2]}_{g,q}$ *holds globally.*

(ii) $A^{[2]}_{f,p} = A^{[2]}_{g,q}$ *holds locally.*

(iv) *There exist* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *with* $ad \neq bc$ *such that*

$$g = \frac{af+b}{cf+d}, \qquad q_1 = (cf+d)p_1, \qquad \text{and} \qquad q_2 = (cf+d)p_2$$

hold on I.

In addition, if f *and* p *are* ℓ *times continuously differentiable, then* $A^{[2]}_{f,p}$ *is also* ℓ *times continuously differentiable.*

As we already mentioned, the symmetric 2-variable case was solved firstly under sixth- and then under first-order regularity assumptions in [8] and in [14], respectively.

Theorem. *Let* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *be continuously differentiable functions with nonvanishing first derivatives. Let* $p\colon I \to \mathbb{R}_+$ *be a continuously differentiable function and* $q\colon I \to \mathbb{R}_+$. *Then the following assertions are equivalent.*

(i) $A^{[2]}_{f,(p,p)} = A^{[2]}_{g,(q,q)}$ *holds globally.*

(ii) $A^{[2]}_{f,(p,p)} = A^{[2]}_{g,(q,q)}$ *holds locally.*

(iv) *Either there exist* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *with* $ad \neq bc$ *such that*

$$g = \frac{af+b}{cf+d} \qquad \text{and} \qquad q = (cf+d)p$$

are valid on I *or there exist two polynomials* P *and* Q *of at most second degree such that* P *and* Q *are positive on* $f(I)$ *and* $g(I)$, *respectively, and there exist two constants* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *such that*

$$g = G^{-1} \circ (\alpha F \circ f + \beta), \qquad p = P^{-\frac{1}{2}} \circ f, \qquad \text{and} \qquad q = Q^{-\frac{1}{2}} \circ g$$

hold on I, where F and G denote a primitive function of $1/P$ and $1/Q$, respectively.

Chapter 3 – Comparison problem

The main goal of this chapter is to investigate the local and global comparison problem of two n-variable generalized Bajraktarević means, i.e., to find necessary as well as sufficient conditions in terms of the unknown functions listed below for the functional inequality

$$\begin{aligned} f^{(-1)}&\left(\frac{p_1(x_1)f(x_1)+\cdots+p_n(x_n)f(x_n)}{p_1(x_1)+\cdots+p_n(x_n)}\right) \\ &\leq g^{(-1)}\left(\frac{q_1(x_1)g(x_1)+\cdots+q_n(x_n)g(x_n)}{q_1(x_1)+\cdots+q_n(x_n)}\right) \end{aligned} \tag{9}$$

to be valid locally or globally, where $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ is fixed, I is a nonempty open real interval, which will be the case in this entire chapter unless otherwise stated, the unknown functions $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ are strictly monotone, and $p = (p_1, \ldots, p_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ and $q = (q_1, \ldots, q_n)\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ are also unknown functions. The results of this section were first proved in our paper [5]. We note that, as we discussed in Chapter 2, the equality of these means in the local and in the global sense are equivalent properties. However, as we shall see, this is not the case for the comparison problem.

Concerning the global comparison problem, the main result of the chapter states that if f, g are differentiable functions with nonvanishing first derivatives and, for all $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{p_i}{p_0} = \frac{q_i}{q_0} \qquad \text{and} \qquad \frac{p_0(x)(f(x)-f(y))}{p_0(y)f'(y)} \leq \frac{q_0(x)(g(x)-g(y))}{q_0(y)g'(y)} \quad (x, y \in I)$$

are satisfied (where $p_0 := p_1 + \cdots + p_n$ and $q_0 := q_1 + \cdots + q_n$), then the above comparison inequality holds for all $x_1, \ldots, x_n \in I$.

3.1. Local comparison.

Definition. Let $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ and $U \in \mathbb{R}^n$ be a nonempty open set. A function $f\colon U \to \mathbb{R}$ is called *partially differentiable at $a \in U$ with respect to its ith variable* if the limit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$$

exists and finite. We say that f is *partially differentiable at* $a \in U$ if it is partially differentiable with respect to all its variables. Finally, f is called *partially differentiable on* U if it is partially differentiable at each point of U.

In order to investigate inequality (9) in the local sense, we recall the following result from [13].

Theorem. *Let* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *and let* $M, N \colon I^n \to I$ *be* n*-variable means such that* M *is locally smaller than* N*. Assume that* M *and* N *are partially differentiable on* $\operatorname{diag}(I^n)$*. Then, for all* $i \in \{1, \dots, n\}$*,*

$$\partial_i M^\Delta = \partial_i N^\Delta. \tag{10}$$

If, in addition, M *and* N *are twice differentiable on the diagonal* $\operatorname{diag}(I^n)$*, then the symmetric* $((n-1) \times (n-1))$*-type matrix*

$$\left(\partial_i \partial_j N^\Delta - \partial_i \partial_j M^\Delta\right)_{i,j=1}^{n-1} \tag{11}$$

is positive semidefinite.

On the other hand, if (10) *holds for all* $i \in \{1, \dots, n\}$*, furthermore,* M *and* N *are twice continuously differentiable on* $\operatorname{diag}(I^n)$ *and the symmetric* $((n-1) \times (n-1))$*-type matrix given by* (11) *is positive definite, then* M *is locally smaller than* N*.*

Our first main result of this chapter establishes necessary and sufficient conditions for the local comparability of generalized Bajraktarević means.

Theorem. *Let* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *and let* $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ *be differentiable functions with nonvanishing first derivatives and* $p, q \colon I \to \mathbb{R}_+^n$ *be continuous functions. Assume that* $A_{f,p}^{[n]}$ *is locally smaller than* $A_{g,q}^{[n]}$*. Then*

$$\frac{p_i}{p_0} = \frac{q_i}{q_0} \qquad (i \in \{1, \dots, n\}). \tag{12}$$

If, in addition, f, g *are twice differentiable and* p, q *are continuously differentiable, then the function*

$$\frac{q_0^2 |g'|}{p_0^2 |f'|} \tag{13}$$

is increasing.

On the other hand, if f, g and p, q are twice continuously differentiable, (12) *holds and the function* (13) *has a positive derivative, then $A^{[n]}_{f,p}$ is locally smaller than $A^{[n]}_{g,q}$.*

In what follows, we consider the local comparison problem of generalized Bajraktarević means when I is a nonempty open subinterval of $\mathbb{R}_+$ and the weight functions $p_1, \dots, p_n$ and $q_1, \dots, q_n$ are proportional to power functions.

Corollary. *Let $I \subseteq \mathbb{R}_+$ be a nonempty open interval and let $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ be differentiable functions with nonvanishing first derivatives. Let $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ and define*

$$p_i(x) := \lambda_i x^{\alpha_i} \qquad \textit{and} \qquad q_i(x) := \mu_i x^{\beta_i} \qquad (i \in \{1, \dots, n\},\, x \in I). \quad (14)$$

Assume that $A^{[n]}_{f,p}$ is locally smaller than $A^{[n]}_{g,q}$. Then there exist $\gamma > 0$ and $\delta \in \mathbb{R}$ such that

$$\mu_i = \gamma \lambda_i \qquad \textit{and} \qquad \beta_i = \alpha_i + \delta \qquad (i \in \{1, \dots, n\}). \quad (15)$$

If, in addition, f and g are twice differentiable, then the map

$$x \mapsto x^{2\delta} \frac{|g'(x)|}{|f'(x)|} \quad (16)$$

is increasing on I.

On the other hand, if f, g are twice continuously differentiable, (15) *holds and the function* (16) *has a positive derivative, then $A^{[n]}_{f,p}$ is locally smaller than $A^{[n]}_{g,q}$.*

As an immediate consequence of the above corollary, we can characterize the local comparison of generalized power means.

Corollary. *Let $I \subseteq \mathbb{R}_+$ be a nonempty open interval and $a, b \in \mathbb{R}$. Define $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ by*

$$f(x) := \begin{cases} x^a & \textit{if } a \neq 0 \\ \log(x) & \textit{if } a = 0 \end{cases} \qquad \textit{and} \qquad g(x) := \begin{cases} x^b & \textit{if } b \neq 0 \\ \log(x) & \textit{if } b = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Let $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ $\in \mathbb{R}^n$ *and define* $p, q \colon I \to \mathbb{R}_+^n$ *by* (14). *If* $A_{f,p}^{[n]}$ *is locally smaller than* $A_{f,p}^{[n]}$ *then there exist* $\gamma > 0$ *and* $\delta \in \mathbb{R}$ *such that* (15) *holds and* $a \leq b + 2\delta$.

On the other hand, if (15) *holds and* $a < b + 2\delta$, *then* $A_{f,p}^{[n]}$ *is locally smaller than* $A_{g,q}^{[n]}$.

3.2. Global comparison. If $A_{f,p}^{[n]}$ is globally smaller than $A_{g,q}^{[n]}$, then $A_{f,p}^{[n]}$ is locally smaller than $A_{g,q}^{[n]}$ and hence the necessity of (12) follows and the function (13) must be increasing. However, these conditions are not strong enough to imply the global comparability of the aforementioned means. The first theorem of this subsection deals with how the condition (12) needs to be augmented to yield global comparability.

Theorem. *Let* $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ *be strictly monotone, differentiable functions with nonvanishing first derivatives,* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, *and* $p, q \colon I \to \mathbb{R}_+^n$. *Assume that* (12) *holds and*

$$\frac{p_0(x)(f(x) - f(y))}{p_0(y) f'(y)} \leq \frac{q_0(x)(g(x) - g(y))}{q_0(y) g'(y)} \qquad (x, y \in I). \tag{18}$$

Then $A_{f,p}^{[n]}$ *is globally smaller than* $A_{g,q}^{[n]}$.

Our second result discusses how the condition on the increasingness of the function (13) needs to be tightened to imply global comparability. It turns out that it is sufficient if all the multiplicative factors of the function (13) are increasing.

Theorem. *Let* $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ *be strictly monotone differentiable functions with nonvanishing first derivatives,* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, *and* $p, q \colon I \to \mathbb{R}_+^n$. *Assume that* (12) *holds and the functions*

$$\frac{q_0}{p_0} \qquad \text{and} \qquad \frac{|g'|}{|f'|}$$

are increasing. Then $A_{f,p}^{[n]}$ *is globally smaller than* $A_{g,q}^{[n]}$.

We note that the sufficient condition (18) implies that the function (13) is increasing. In general, the converse is not valid, however, in what follows, we present two particular cases when it is. In the first setting, the weight functions p and q coincide.

Theorem. *Let $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ be strictly monotone twice continuously differentiable functions with nonvanishing first derivatives, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, and let further $p\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ be a continuous function. Then the following conditions are pairwise equivalent.*

(i) $A_{f,p}^{[n]}$ *is globally smaller than* $A_{g,p}^{[n]}$.

(ii) $A_{f,p}^{[n]}$ *is locally smaller than* $A_{g,p}^{[n]}$.

(iii) The function $|g'/f'|$ is increasing.

(iv) The following inequality is valid on I

$$\frac{f''}{f'} \leq \frac{g''}{g'}.$$

(v) Provided that g is increasing (decreasing), the function $g \circ f^{-1}$ is convex (concave) on $f(I)$;

(vi)

$$\frac{f(x) - f(y)}{f'(y)} \leq \frac{g(x) - g(y)}{g'(y)} \qquad (x, y \in I).$$

In the second setting, the functions f and g are the same.

Theorem. *Let $f\colon I \to \mathbb{R}$ be strictly monotone twice continuously differentiable function with a nonvanishing first derivative, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, and let further $p, q\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ be continuous functions. Then the following conditions are pairwise equivalent.*

(i) $A_{f,p}^{[n]}$ *is globally smaller than* $A_{f,q}^{[n]}$.

(ii) $A_{f,p}^{[n]}$ *is locally smaller than* $A_{f,q}^{[n]}$.

(iii) The condition (12) *holds and the function* q_0/p_0 *is increasing.*

Corollary. *Let* $I \subseteq \mathbb{R}_+$ *be a nonempty open interval and let* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *be differentiable functions with nonvanishing first derivatives. Let* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$*,* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$*,* $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$*,* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$*,* $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ *and define* $p, q\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ *by* (14)*. Assume that there exist* $\gamma > 0$ *and* $\delta \in \mathbb{R}$ *such that* (15) *is satisfied and*

$$\frac{f(x) - f(y)}{f'(y)} \leq \frac{x^\delta (g(x) - g(y))}{y^\delta g'(y)} \qquad (x, y \in I).$$

Then $A_{f,p}^{[n]}$ *is globally smaller than* $A_{g,q}^{[n]}$*.*

Corollary. *Let* $I \subseteq \mathbb{R}_+$ *be a nonempty open interval,* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$*,* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$*,* $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$*,* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$*,* $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$*, and let further* $a, b \in \mathbb{R}$*. Define* $p, q\colon I \to \mathbb{R}_+^n$ *by* (14) *and* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *by* (17)*. Assume that there exist* $\gamma > 0$ *and* $\delta \in \mathbb{R}$ *such that* (15) *and the inequalities*

$$\min(a, 0) \leq \delta + \min(b, 0) \qquad \textit{and} \qquad \max(a, 0) \leq \delta + \max(b, 0)$$

are satisfied. Then $A_{f,p}^{[n]}$ *is globally smaller than* $A_{g,q}^{[n]}$*.*

Chapter 4 – Local and global Hölder- and Minkowski-type inequalities

The celebrated inequalities discovered by Hölder and Minkowski can be formulated in various contexts, for instance, in the setting of power means.

To recall the standard Hölder(–Rogers) inequality, which was discovered by Rogers in 1888 and by Hölder in 1889, let $p, q > 1$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Then, for all $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}_+^n$, the inequality

$$\frac{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}{n} \leq \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{y_1^q + \cdots + y_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$$

is valid. In the particular case $p = q = 2$, this inequality reduces to the so-called Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz inequality, which in the above form was established by Cauchy in 1821. Given a real parameter $p \geq 1$, the standard Minkowski inequality, that was discovered in 1910, states that the pth power mean is subadditive, i.e., for all $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in \mathbb{R}_+^n$, the inequality

$$\left(\frac{(x_1 + y_1)^p + \cdots + (x_n + y_n)^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{y_1^p + \cdots + y_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

holds.

Briefly, the aim of this chapter is to investigate inequalities that are analogous to the Hölder and Minkowski inequalities by replacing the addition and the multiplication by a more general operation, and instead of using power means, generalized Bajraktarević means, and in particular, weighted Gini means, are considered. A further aim is to characterize such inequalities both in the local and in the global sense. We are going to derive necessary as well as sufficient conditions for the local as well as for the global validity of the functional inequality

$$M_0(\Phi(x_1), \ldots, \Phi(x_n)) \leq \Phi(M_1(x^1), \ldots, M_k(x^k)), \tag{19}$$

where, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, k \in \mathbb{N}$, for $\alpha \in \{0, \ldots, k\}$, $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ is a nonempty open interval, $I := I_1 \times \cdots \times I_k$, $M_\alpha \colon I_\alpha^n \to I_\alpha$ is an n-variable mean and $\Phi \colon I \to I_0$. In line with the terminology used in preceding chapters, if there exists an open set $U \subseteq I^n$ such that $\operatorname{diag}(I^n) \subseteq U$ and (19) holds for all $x \in U^T \subseteq \prod_{\alpha=1}^k I_\alpha^n$, then we say that (19) *holds in the local sense*. If (19) is valid for all $x \in (I^n)^T =$

$\prod_{\alpha=1}^{k} I_\alpha^n$, then we say that (19) *holds in the global sense*. Clearly, the global validity of (19) implies its local validity.

After that we consider the particular case of (19) when all the means are n-variable generalized Bajraktarević means, i.e., we consider the inequality

$$A_{f_0,p^0}^{[n]}(\Phi(x_1),\dots,\Phi(x_n)) \le \Phi(A_{f_1,p^1}^{[n]}(x^1),\dots,A_{f_k,p^k}^{[n]}(x^k)), \tag{20}$$

where, for $\alpha \in \{0,\dots,k\}$, $f_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ is a strictly monotone function, $p^\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+^n$. We obtain necessary as well as sufficient conditions for its validity in the local and also in the global sense.

We mention some important particular cases of (20).

1. If $k = 1$, $I_0 = I_1 =: J$ and $\Phi(x) = x$, then (20) reduces to the local and global comparison problem of generalized Bajraktarević means on J.
2. If $k \in \mathbb{N}, k \ge 2$, $I_0 = I_1 = \cdots = I_k =: J$, $\Phi(x_1,\dots,x_k) = \frac{1}{k}(x_1 + \cdots + x_k)$, and $f_0 = f_1 = \cdots = f_k =: f$, $p^0 = p^1 = \cdots = p^k =: p$, then (20) means the Jensen convexity of $A_{f,p}^{[n]}$ on J. In this case, (20) is said to be a Jensen-type inequality.
3. If $k \in \mathbb{N}, k \ge 2$, $I_0 = I_1 = \cdots = I_k = \mathbb{R}_+$, $\Phi(x_1,\dots,x_k) = x_1 + \cdots + x_k$, and $f_0 = f_1 = \cdots = f_k =: f$, $p^0 = p^1 = \cdots = p^k =: p$, then (20) expresses the subadditivity of $A_{f,p}^{[n]}$ on $\mathbb{R}_+$, which is often called a Minkowski-type inequality.
4. If $k \in \mathbb{N}, k \ge 2$, $I_0 = I_1 = \cdots = I_k = \mathbb{R}_+$, $\Phi(x_1,\dots,x_k) = x_1 \cdots x_k$, then (20) reduces to a Hölder-type inequality for the means $A_{f_0,p^0}^{[n]}$, $A_{f_1,p^1}^{[n]}$, $\dots$, $A_{f_k,p^k}^{[n]}$.

With the exception three theorems, all the results of this chapter were first proved in our paper [6]. Two of three theorems deals with the characterization of the global validity of the Minkowski-type inequality for Gini means in the 2-variable case and with unfixed number of variables. The third one gives a necessary and sufficient system of conditions for the global validity of the Hölder-type inequality for Gini means with unfixed number of variables. Each of these three theorems is preceded by an emphasis on the author(s) and publications in which the result is found.

4.1. Hölder- and Minkowski-type inequalities in the local sense. In the current and in the next subsection, for $k \in \mathbb{N}$ and $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, let $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ stand for a nonempty open interval and set $I := I_1 \times \cdots \times I_k$. For the investigation of inequality (19), let us introduce the function $F\colon I_1^n \times \cdots \times I_k^n \to \mathbb{R}$ by

$$F(x) = F(x^1, \dots, x^k) := \Phi(M_1(x^1), \dots, M_k(x^k)) - M_0(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)). \tag{21}$$

Remark. Observe that, for all $y \in I$, we have $F(\Delta_n^k(y)) = 0$. Indeed, by using the mean value property of $M_0, M_1, \dots, M_k$, it follows that

$$\begin{aligned} F(\Delta_n^k(y)) &= F(\Delta_n(y_1), \dots, \Delta_n(y_k)) \\ &= \Phi(M_1(\Delta_n(y_1)), \dots, M_k(\Delta_n(y_k))) - M_0(\Delta_n(\Phi(y))) \\ &= \Phi(M_1^\Delta(y_1), \dots, M_k^\Delta(y_k)) - M_0^\Delta(\Phi(y)) \\ &= \Phi(y_1, \dots, y_k) - \Phi(y) = 0. \end{aligned}$$

For the computation of the partial derivatives of F at points of the form $\Delta_n^k(y)$, we formulate the following lemma.

Lemma. *Let $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ and, for $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, $M_\alpha\colon I_\alpha^n \to I_\alpha$ be an n-variable mean, define $F\colon I_1^n \times \cdots \times I_k^n \to \mathbb{R}$ by* (21)*, and let $\Phi\colon I \to I_0$.*

(i) For $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, assume that M_α is partially differentiable on $\operatorname{diag}(I_\alpha^n)$ *and that Φ is differentiable. Then, for all $i \in \{1, \dots, k\}$, $\ell \in \{1, \dots, n\}$, and $y \in I$,*

$$\partial_{\ell+n(i-1)} F(\Delta_n^k(y)) = \partial_i \Phi(y)\big(\partial_\ell M_i^\Delta(y_i) - \partial_\ell M_0^\Delta(\Phi(y))\big).$$

(ii) For $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, assume that M_α is twice partially differentiable on $\operatorname{diag}(I_\alpha^n)$ *and that Φ is twice differentiable. Then, for all $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $\ell, m \in \{1, \dots, n\}$, and $y \in I$,*

$$\begin{aligned} &\partial_{\ell+n(i-1)} \partial_{m+n(j-1)} F(\Delta_n^k(y)) \\ &\qquad = \partial_i \partial_j \Phi(y)\big(\partial_m M_j^\Delta(y_j) \partial_\ell M_i^\Delta(y_i) - \delta_{\ell,m} \partial_m M_0^\Delta(\Phi(y))\big) \\ &\qquad\quad - \partial_j \Phi(y)\big(\partial_i \Phi(y) \partial_\ell \partial_m M_0^\Delta(\Phi(y)) - \delta_{i,j} \partial_\ell \partial_m M_j^\Delta(y_j)\big). \end{aligned}$$

The next two results describe the first- and second-order necessary conditions for the validity of (19) in the local sense, respectively.

Theorem. *Let $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ and, for $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, $M_\alpha \colon I_\alpha^n \to I_\alpha$ be an n-variable mean which is partially differentiable on $\operatorname{diag}(I_\alpha^n)$ and let further $\Phi \colon I \to I_0$ be a surjective and differentiable function with nonvanishing first-order partial derivatives. Assume that inequality* (19) *holds in the local sense. Then there exist constants $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ such that, for all $(y_0, y) \in I_0 \times I$ and $\ell \in \{1, \dots, n\}$,*

$$\lambda_\ell = \partial_\ell M_0^\Delta(y_0) = \partial_\ell M_1^\Delta(y_1) = \cdots = \partial_\ell M_k^\Delta(y_k). \tag{22}$$

If, additionally, for some $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ and $y_\alpha \in I_\alpha$, the mean M_α is differentiable at $\Delta_n(y_\alpha)$, then $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ also holds.

Theorem. *Let $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ and, for $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, $M_\alpha \colon I_\alpha^n \to I$ be an n-variable mean which is twice differentiable on $\operatorname{diag}(I_\alpha^n)$ and let $\Phi \colon I \to I_0$ be surjective and twice differentiable with nonvanishing first-order partial derivatives. Assume that inequality* (19) *holds in the local sense. Then there exist constants $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ with $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ such that, for all $(y_0, y) \in I_0 \times I$ and $\ell \in \{1, \dots, n\}$, the equalities in* (22) *hold. In addition, for all $y \in I$, the $((nk) \times (nk))$-type matrix whose $(\ell + n(i-1), m + n(j-1))$th entry, where $i, j \in \{1, \dots, k\}$ and $\ell, m \in \{1, \dots, n\}$, is given by*

$$\begin{aligned}\partial_i\partial_j\Phi(y)(\lambda_m\lambda_\ell - \delta_{\ell,m}\lambda_m) - \partial_i\Phi(y)\partial_j\Phi(y)\partial_\ell\partial_m M_0^\Delta(\Phi(y))&\\ + \delta_{i,j}\partial_j\Phi(y)\partial_\ell\partial_m M_j^\Delta(y_j)&\end{aligned}$$

is positive semidefinite.

4.2. Hölder- and Minkowski-type inequalities for generalized Bajraktarević means. Under first- as well as second-order differentiability condition, the following theorem describes what necessarily holds if (20) is satisfied in the local sense.

Theorem. *Let $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ and, for $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, $f_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ be a differentiable function with a nonvanishing first derivative and let $p^\alpha = (p_1^\alpha, \dots, p_n^\alpha)\colon$*

$I_\alpha \to \mathbb{R}_+^n$ be continuous, and set $p_0^\alpha := p_1^\alpha + \cdots + p_n^\alpha$. Let $\Phi\colon I \to I_0$ be surjective and differentiable with nonvanishing first-order partial derivatives. Assume that inequality (20) *holds in the local sense. Then there exist constants $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ with $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ such that, for all $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ and $\ell \in \{1, \dots, n\}$,*

$$p_\ell^\alpha = \lambda_\ell p_0^\alpha \tag{23}$$

holds on I_α. If, additionally, for $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, f_α is twice differentiable, p^α is continuously differentiable and Φ is twice differentiable, then the $(k \times k)$-type matrix $\Gamma(y)$ given by

$$\begin{aligned}\Gamma(y) := \bigg(- \partial_i\partial_j\Phi(y) - \partial_j\Phi(y)\partial_i\Phi(y)\bigg(2\frac{(p_0^0)'}{p_0^0} + \frac{f_0''}{f_0'}\bigg)(\Phi(y))\\ + \delta_{i,j}\partial_j\Phi(y)\bigg(2\frac{(p_0^j)'}{p_0^j} + \frac{f_j''}{f_j'}\bigg)(y_j)\bigg)_{i,j=1}^k\end{aligned} \tag{24}$$

is positive semidefinite for all $y \in I$.

In the next result, we reformulate the positive semidefiniteness condition from the above theorem in terms of a convexity property.

Theorem. *Let $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ and, for $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, $f_\alpha\colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ be a twice differentiable function with a nonvanishing first derivative and let $p^\alpha = (p_1^\alpha, \dots, p_n^\alpha)\colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+^n$ be continuously differentiable, set $p_0^\alpha := p_1^\alpha + \cdots + p_n^\alpha$. Let $\Phi\colon I \to I_0$ be surjective and twice differentiable with nonvanishing first-order partial derivatives. Assume that inequality* (20) *holds in the local sense. Finally, for $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, define the function $\varphi_\alpha\colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ and then $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^k$ by*

$$\varphi_\alpha := \int (p_0^\alpha)^2 f_\alpha' \qquad \text{and} \qquad \varphi(y) := (\varphi_1(y_1), \dots, \varphi_k(y_k)).$$

Then $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ and φ are twice differentiable and invertible functions and the map $\Psi\colon \varphi(I) \to \mathbb{R}$ defined by

$$\Psi(u) := \varphi_0(\Phi(\varphi^{-1}(u)))$$

is concave if $f_0' > 0$ and convex if $f_0' < 0$.

Remark. We note that the concavity of the auxiliary function Ψ is not merely a consequence of the positive semidefiniteness of the matrix-valued function Γ but, in fact, it is equivalent to it. On the other hand, if all the weight functions are equal to constant 1, then $\varphi_\alpha = f_\alpha$ and, in this case, according to the theory of quasiarithmetic means (see [7]), the concavity of the function Ψ is also sufficient for inequality (20) to be valid in the global sense.

The following two theorems establish sufficient conditions for inequality (20) to be valid in the local as well as in the global sense.

Theorem. *Let $k \in \mathbb{N}$ and, for $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, $f_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ be differentiable with a nonvanishing derivative, and $p_0^\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+$. Furthermore, let $\Phi \colon I \to I_0$ be partially differentiable. Assume that the following inequality is valid in the local sense on I^2, that is, there exists a nonempty open set $V \subseteq I^2$ containing $\operatorname{diag}(I^2)$ such that, for all $(u, y) \in V$,*

$$\frac{p_0^0(\Phi(y))(f_0(\Phi(y)) - f_0(\Phi(u)))}{p_0^0(\Phi(u)) f_0'(\Phi(u))} \le \sum_{j=1}^{k} \partial_j \Phi(u) \frac{p_0^j(y_j)(f_j(y_j) - f_j(u_j))}{p_0^j(u_j) f_j'(u_j)} \tag{25}$$

holds. Then, for all $n \in \mathbb{N}$ and $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ with $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, the inequality

$$A^{[n]}_{f_0, p_0^0 \lambda}(\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) \le \Phi(A^{[n]}_{f_1, p_0^1 \lambda}(x^1), \dots, A^{[n]}_{f_k, p_0^k \lambda}(x^k)) \tag{26}$$

is valid in the local sense.

Remark. We emphasize that the weight functions of the generalized Bajraktarević means appearing in (20) are necessarily of the form given by (23). Therefore, the local as well as the global validity of (20) immediately follows from the local as well as the global validity of (26), respectively.

Theorem. *Let $k \in \mathbb{N}$ and, for $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, $f_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ be differentiable with a nonvanishing derivative, $p_0^\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+$ and let $\Phi \colon I \to I_0$ be partially differentiable. Assume that* (25) *is satisfied in the global sense on I^2, that is, for all $u, y \in I$. Then, for all $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ with $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, inequality* (26) *holds in the global sense.*

The next result establishes a necessary condition for (25) to be satisfied in the local sense.

Theorem. *Let $k \in \mathbb{N}$ and, for $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, $f_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ be twice differentiable with a nonvanishing first derivative and $p_0^\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+$ be twice differentiable. In addition, let $\Phi \colon I \to I_0$ be twice differentiable. Assume that inequality* (25) *is satisfied in the local sense, that is, there exists an open set $V \subseteq I^2$ with $\operatorname{diag}(I^2) \subseteq V$ such that it holds true for all $(u, y) \in V$. Then the matrix-valued function $\Gamma \colon I \to \mathbb{R}^{k \times k}$ defined by* (24) *takes positive semidefinite values.*

The converse of the above statement is generally not valid. The conditions must be tightened, namely, positive definiteness must be assumed instead of positive semidefiniteness.

Theorem. *Let $k \in \mathbb{N}$ and, for $\alpha \in \{0, \dots, k\}$, $f_\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}$ be twice continuously differentiable with a nonvanishing first derivative, $p_0^\alpha \colon I_\alpha \to \mathbb{R}_+$ be twice continuously differentiable. Furthermore, let $\Phi \colon I \to I_0$ be twice continuously differentiable. Assume, for all $y \in I$, that the $(k \times k)$-type matrix $\Gamma(y)$ defined by* (24) *is positive definite. Then, for all $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ with $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, inequality* (26) *holds in the local sense.*

4.3. Hölder- and Minkowski-type inequalities for weighted Gini means. In this section, for $k \in \mathbb{N}, \alpha \in \{1, \dots, k\}$, let I_α denote a nonempty open subinterval of $\mathbb{R}_+$, let $I := I_1 \times \cdots \times I_k$, and we apply the above results to some important particular cases of the inequality (19). First, we deal with inequalities obtained by specializing the means M_α in (19) for all $\alpha \in \{0, \dots, k\}$ and then we draw some conclusions by choosing the function Φ in (19) to be the k-variable addition and multiplication.

Definition. Let $n \in \mathbb{N}$ and, for $r \in \mathbb{R}$, let us recall the definition of the *n-variable weighted rth power or rth Hölder mean with weight vector $\lambda \in \mathbb{R}_+^n, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$* and, for $(r, s) \in \mathbb{R}^2$, the *n-variable weighted Gini mean with pair of parameters $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ and weight vector $\lambda \in \mathbb{R}_+^n, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$:*

$$H_{r;\lambda}^{[n]}(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} \left(\lambda_1 x_1^r + \cdots + \lambda_n x_n^r\right)^{\frac{1}{r}} & \text{if } r \neq 0 \\ x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} & \text{if } r = 0, \end{cases}$$

$$G^{[n]}_{r,s;\lambda}(x_1,\dots,x_n) := \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda_1 x_1^r + \cdots + \lambda_n x_n^r}{\lambda_1 x_1^s + \cdots + \lambda_n x_n^s}\right)^{\frac{1}{r-s}} & \text{if } r \neq s \\ \exp\left(\dfrac{\lambda_1 x_1^r \ln(x_1) + \cdots + \lambda_n x_n^r \ln(x_n)}{\lambda_1 x_1^r + \cdots + \lambda_n x_n^r}\right) & \text{if } r = s. \end{cases}$$

Remark. It is clear that in the particular case $s = 0$, the mean $G^{[n]}_{r,s;\lambda}$ simplifies to $H^{[n]}_{r;\lambda}$. We also note that, for $n \in \mathbb{N}$ and $\ell \in \{1,\dots,n\}$, with $p_\ell(t) := \lambda_\ell t^s$ and $f(t) := t^{r-s}$ if $r \neq s$ or $f(t) := \ln(t)$ if $r = s$, we can see that $A^{[n]}_{f,p} = G^{[n]}_{r,s;\lambda}$.

The next result consists of a necessary as well as a sufficient condition for a general inequality corresponding to weighted Gini means to be valid in the local sense.

Theorem. *Let $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$, and, for $\alpha \in \{0,\dots,k\}$, $(r_\alpha, s_\alpha) \in \mathbb{R}^2$ and $\Phi\colon I \to \mathbb{R}_+$ be twice differentiable with nonvanishing first-order partial derivatives. Then, for the inequality*

$$G^{[n]}_{r_0,s_0;\lambda}(\Phi(x_1),\dots,\Phi(x_n)) \leq \Phi\big(G^{[n]}_{r_1,s_1;\lambda}(x^1),\dots,G^{[n]}_{r_k,s_k;\lambda}(x^k)\big) \tag{27}$$

to be valid in the local sense it is necessary that the $(k \times k)$-type matrix $\Gamma(y)$ given by

$$\Gamma(y) := \left(-\partial_i\partial_j\Phi(y) - \partial_j\Phi(y)\partial_i\Phi(y)\frac{r_0 + s_0 - 1}{\Phi(y)} + \delta_{i,j}\partial_j\Phi(y)\frac{r_j + s_j - 1}{y_j} \right)_{i,j=1}^{k}$$

be positive semidefinite for all $y \in I$. Conversely, if this matrix is positive definite for all $y \in I$, then (27) *holds in the local sense on I.*

The theorem below gives a sufficient condition for the inequality (27) to be valid in the global sense.

Theorem. *Let $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, for $\alpha \in \{0,\dots,k\}$, $(r_\alpha, s_\alpha) \in \mathbb{R}^2$ and let $\Phi\colon I \to \mathbb{R}_+$ be partially differentiable. Assume that the inequality*

$$\Phi(u)\chi_{r_0,s_0}\left(\frac{\Phi(y)}{\Phi(u)}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \partial_j\Phi(u) u_j \chi_{r_j,s_j}\left(\frac{y_j}{u_j}\right)$$

is valid in the global sense, that is, for all $(u, y) \in I^2$*. Then, for all* $n \in \mathbb{N}$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ *with* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$*, the inequality* (27) *holds in the global sense on* I*.*

For the investigation of the particular cases when Φ is the sum and the product function, we will need the following auxiliary result.

Lemma. *Let* $k \in \mathbb{N}$*, for* $i \in \{0, \dots, k\}$*,* $c_i \in \mathbb{R}$*. Then the matrix*

$$C := \big(\delta_{i,j} c_i + c_0\big)_{i,j=1}^{k}$$

is positive semidefinite if and only if either $c_i \geq 0$ *for all* $i \in \{0, \dots, k\}$*, or there exists* $i \in \{0, \dots, k\}$ *such that* $c_i < 0$ *and* $c_j > 0$ *for all* $j \in \{0, \dots, k\} \setminus \{i\}$ *and*

$$\frac{1}{c_0} + \frac{1}{c_1} + \cdots + \frac{1}{c_k} \leq 0. \tag{28}$$

Furthermore, C *is positive definite if and only if either* $c_i \geq 0$ *for all* $i \in \{0, \dots, k\}$ *and* $c_i = 0$ *can hold for at most one index* $i \in \{0, \dots, k\}$ *or there exists* $i \in \{0, \dots, k\}$ *such that* $c_i < 0$ *and* $c_j > 0$ *for all* $j \in \{0, \dots, k\} \setminus \{i\}$ *and* (28) *is valid with a strict inequality.*

Our next result characterizes the Minkowski-type inequality for weighted Gini means in the local sense.

Theorem. *Let* $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$*. For* $i \in \{0, \dots, k\}$*, let further* $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$ *and* $\gamma_i := r_i + s_i - 1$*. For the inequality*

$$G^{[n]}_{r_0,s_0;\lambda}(x_1^1 + \cdots + x_1^k, \dots, x_n^1 + \cdots + x_n^k) \leq G^{[n]}_{r_1,s_1;\lambda}(x^1) + \cdots + G^{[n]}_{r_k,s_k;\lambda}(x^k) \tag{29}$$

to hold in the local sense on I*, it is necessary that exactly one of the following cases be valid:*

(i)

$$\gamma_0 \leq 0 \leq \min(\gamma_1, \dots, \gamma_k); \tag{30}$$

(ii) $\gamma_i > 0$ *for all* $i \in \{0, \dots, k\}$ *and*

$$\sum_{i \in J_+} \left(\frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\gamma_0}\right) \sup I_i \leq \sum_{i \in J_-} \left(\frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_i}\right) \inf I_i; \tag{31}$$

(iii) $\gamma_0 < 0$ *and there exists* $i \in \{1,\dots,k\}$ *such that* $\gamma_i < 0$, *for all* $j \in \{1,\dots,k\} \setminus \{i\}$, $\gamma_j > 0$, *and inequality* (31) *is also valid,*

where, for the last two cases, we define

$$J_+ := \left\{ i \in \{1,\dots,k\} \colon \frac{1}{\gamma_i} > \frac{1}{\gamma_0} \right\} \quad \textit{and} \quad J_- := \left\{ i \in \{1,\dots,k\} \colon \frac{1}{\gamma_0} > \frac{1}{\gamma_i} \right\}.$$

Conversely, if either (30) *is valid and* $\gamma_i = 0$ *can hold for at most one* $i \in \{0,\dots,k\}$, *or* $\gamma_0 \neq \gamma_\ell$ *for some* $\ell \in \{1,\dots,k\}$ *and one of the conditions (ii) or (iii) hold, then* (29) *is valid in the local sense on* I.

Corollary. *Let* $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$. *For* $i \in \{0,\dots,k\}$, *let further* $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. *For* $\alpha \in \{1,\dots,k\}$, *assume that the nonempty open interval* $I_\alpha \subseteq \mathbb{R}_+$ *fulfills* $\inf I_\alpha = 0$. *Then, in order that the inequality* (29) *be valid in the local sense on* I, *it is necessary that*

$$\max(1, r_0 + s_0) \leq \min(r_1 + s_1, \dots, r_k + s_k).$$

Conversely, if this inequality is strict, then (29) *holds in the local sense on* I.

For the global validity of the Minkowski-type inequality the theorem below establishes the following sufficient condition.

Theorem. *Let* $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ *and, for* $i \in \{0,\dots,k\}$, $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. *Assume that, for all* $(u, y) \in I^2$, *the inequality*

$$\chi_{r_0,s_0}\left(\frac{y_1 + \cdots + y_k}{u_1 + \cdots + u_k}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \frac{u_j}{u_1 + \cdots + u_k} \chi_{r_j,s_j}\left(\frac{y_j}{u_j}\right)$$

holds. Then, for all $n \in \mathbb{N}$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ *with* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, *the inequality* (29) *holds in the global sense on* I.

By specializing the underlying intervals, we can formulate a more specific statement.

Corollary. *Let* $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ *and, for* $i \in \{0, \ldots, k\}$, $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. *Assume that, for all* $z \in \mathbb{R}_+^k$ *and* $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$ *with* $t_1 + \cdots + t_k = 1$, *the following inequality is valid*

$$\chi_{r_0,s_0}(t_1 z_1 + \cdots + t_k z_k) \leq \sum_{j=1}^{k} t_j \chi_{r_j,s_j}(z_j). \tag{32}$$

Then, for all $n \in \mathbb{N}$ *and* $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ *with* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, *the inequality* (29) *holds in the global sense on* $\mathbb{R}_+^k$.

In order to compare our results above to existing ones, we recall two theorems related to the global validity of the Minkowski-type inequalities. In the setting of two-variable Gini means the Minkowski inequality was characterized by Czinder and Páles in [3, Theorem 5] (see also [9] for a particular case).

Theorem. *Let* $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ *and, for* $i \in \{0, \ldots, k\}$, $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. *Then the inequality*

$$G^{[2]}_{r_0,s_0}(x_1 + \cdots + x_k, y_1 + \cdots + y_k) \leq G^{[2]}_{r_1,s_1}(x_1, y_1) + \cdots + G^{[2]}_{r_k,s_k}(x_k, y_k) \tag{33}$$

is valid for all $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{R}_+$ *if and only if*

(i) $0 \leq \min(r_1, s_1, \ldots .r_k, s_k)$,

(ii) $\min(r_0, s_0) \leq \min(1, r_1, s_1, \ldots .r_k, s_k)$,

(iii) $\max(1, r_0 + s_0) \leq \min(r_1 + s_1, \ldots, r_k + s_k)$.

Remark. Observe that the third condition in the above theorem is the necessary condition for the local validity of (33) on $\mathbb{R}_+$. The conditions (i) and (ii) are, however, not necessary for the local validity of (33) on $\mathbb{R}_+$.

Necessary and sufficient conditions for the global validity of the Minkowski-type inequality for Gini means with arbitrary number of variables was established by Páles in [10, Theorem 3.1].

Theorem. *Let $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ and, for $i \in \{0, \ldots, k\}$, $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. Then the inequality*

$$G^{[n]}_{r_0,s_0}(x^1_1 + \cdots + x^k_1, \ldots, x^1_n + \cdots + x^k_n) \leq G^{[n]}_{r_1,s_1}(x^1) + \cdots + G^{[n]}_{r_k,s_k}(x^k) \tag{34}$$

is valid for all $n \in \mathbb{N}$ and $x \in \mathbb{R}^{n\times k}_+$ if and only if

(i) $0 \leq \min(r_1, s_1, \ldots, r_k, s_k)$,

(ii) $\min(r_0, s_0) \leq \min(1, r_1, s_1, \ldots, r_k, s_k)$,

(iii) $\max(1, r_0, s_0) \leq \min(\max(r_1, s_1), \ldots, \max(r_k, s_k))$.

Remark. Observe that conditions (i) and (ii) of the above two theorems are identical, therefore they may be necessary for the global validity of (34) for any fixed $n \in \mathbb{N}$. The form of the third condition related to any fixed $n \in \mathbb{N}$ is not known. We also note that conditions (i)-(iii) of the above theorem are also necessary and sufficient for the validity of the inequality (32) for all $z \in \mathbb{R}^k_+$ and $t_1, \ldots, t_k \in [0, 1]$ with $t_1 + \cdots + t_k = 1$.

Our next results characterize Hölder-type inequalities for Gini means in the local and in the global sense.

Theorem. *Let $n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ and $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$. Let further $(r_0, s_0), \ldots, (r_k, s_k) \in \mathbb{R}^2$, $\gamma_i := r_i + s_i$ for $i \in \{0, \ldots, k\}$. Then, in order that the inequality*

$$G^{[n]}_{-r_0,-s_0;\lambda}(x^1_1 \cdots x^k_1, \ldots, x^1_n \cdots x^k_n) \leq G^{[n]}_{r_1,s_1;\lambda}(x^1) \cdots G^{[n]}_{r_k,s_k;\lambda}(x^k) \tag{35}$$

be valid in the local sense on $\mathbb{R}^k_+$ it is necessary that either $\gamma_i \geq 0$ for all $i \in \{0, \ldots, k\}$, or there exists $i \in \{0, \ldots, k\}$ such that $\gamma_i < 0$, for all $j \in (\{0, \ldots, k\}) \setminus \{i\}$, $\gamma_j > 0$ and

$$\frac{1}{\gamma_0} + \frac{1}{\gamma_1} + \cdots + \frac{1}{\gamma_k} \leq 0 \tag{36}$$

holds. Conversely, if either $\gamma_i \geq 0$ for all $i \in \{0, \ldots, k\}$ and $\gamma_i = 0$ can hold for at most one index $i \in \{0, \ldots, k\}$, or there exists $i \in \{0, \ldots, k\}$ such that $\gamma_i < 0$, for all $j \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i\}$, $\gamma_j > 0$ and (36) *is valid with a strict inequality, then* (35) *holds in the local sense on $\mathbb{R}^k_+$.*

Theorem. *Let $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ and, for $i \in \{0, \ldots, k\}$, $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. Assume that, for all $z_1 \in (I_1/I_1), \ldots, z_k \in (I_k/I_k)$, the inequality*

$$\chi_{-r_0,-s_0}(z_1 \cdots z_k) \leq \sum_{j=1}^{k} \chi_{r_j,s_j}(z_j) \tag{37}$$

holds. Then, for all $n \in \mathbb{N}$ and $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ with $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, the inequality (35) *holds in the global sense on I.*

The global validity of (35) with an unfixed number of variables was characterized by Páles in [11, 12].

Theorem. *Let $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ and, for $i \in \{0, \ldots, k\}$, $(r_i, s_i) \in \mathbb{R}^2$. Then the inequality*

$$G^{[n]}_{-r_0,-s_0}(x_1^1 \cdots x_1^k, \ldots, x_n^1 \cdots x_n^k) \leq G^{[n]}_{r_1,s_1}(x^1) \cdots G^{[n]}_{r_k,s_k}(x^k)$$

is valid for all $n \in \mathbb{N}$ and $x \in \mathbb{R}_+^{n \times k}$ if and only if

(i) for all $i \in \{0, \ldots, k\}$, $\max(s_i, r_i) \geq 0$, and

(ii) for all $i \in \{0, \ldots, k\}$ with $\min(s_i, r_i) < 0$, we have $\max(s_j, r_j) > 0$ for all $j \in (\{0, \ldots, k\}) \setminus \{i\}$, and

$$\frac{1}{\min(s_i, r_i)} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{k} \frac{1}{\max(s_j, r_j)} \leq 0.$$

Remark. We note that the conditions (i) and (ii) are necessary and sufficient for the validity of inequality (37) for all $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{R}_+$ (cf. [12]).

Selected references – Válogatott hivatkozások

[1] M. Bajraktarević. Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske Ser. II*, 13:243–248, 1958.

[2] M. Bajraktarević. Sur une généralisation des moyennes quasilinéaires. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, 3 (17):69–76, 1963.

[3] P. Czinder and Zs. Páles. A general Minkowski-type inequality for two variable Gini means. *Publ. Math. Debrecen*, 57:203–216, 2000.

[4] R. Grünwald and Zs. Páles. On the equality problem of generalized Bajraktarević means. *Aequationes Math.*, 94(4):651–677, 2020.

[5] R. Grünwald and Zs. Páles. Local and global comparison of nonsymmetric generalized Bajraktarević means. *J. Math. Anal. Appl.*, 512(2):Paper No. 126172, pp. 12, 2022.

[6] R. Grünwald and Zs. Páles. Local and global Hölder- and Minkowski-type inequalities for nonsymmetric generalized Bajraktarević means. *J. Math. Anal. Appl.*, 535(2):Paper No. 128214, pp. 22, 2024.

[7] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, 1934. (first edition), 1952 (second edition).

[8] L. Losonczi. Equality of two variable weighted means: reduction to differential equations. *Aequationes Math.*, 58(3):223–241, 1999.

[9] L. Losonczi and Zs. Páles. Minkowski's inequality for two variable Gini means. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 62:413–425, 1997.

[10] Zs. Páles. A generalization of the Minkowski inequality. *J. Math. Anal. Appl.*, 90(2):456–462, 1982.

[11] Zs. Páles. Inequalities for homogeneous means depending on two parameters. In E. F. Beckenbach and W. Walter, editors, *General Inequalities, 3 (Oberwolfach, 1981)*, volume 64 of *International Series of Numerical Mathematics*, page 107–122. Birkhäuser, Basel, 1983.

[12] Zs. Páles. On Hölder-type inequalities. *J. Math. Anal. Appl.*, 95(2):457–466, 1983.

[13] Zs. Páles and A. Zakaria. On the local and global comparison of generalized Bajraktarević means. *J. Math. Anal. Appl.*, 455(1):792–815, 2017.

[14] Zs. Páles and A. Zakaria. On the equality problem of two-variable Bajraktarević means under first-order differentiability assumptions. *Aequationes Math.*, 97(1), 2023.

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/79/2024.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Richárd Grünwald
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10076957

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (3)

1. **Grünwald, R.**, Páles, Z.: Local and global Hölder- and Minkowski-type inequalities for nonsymmetric generalized Bajraktarević means.
   J. Math. Anal. Appl. 535 (2), 1-22, 2024. ISSN: 0022-247X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128214
   IF: 1.3 (2022)
2. **Grünwald, R.**, Páles, Z.: Local and global comparison of nonsymmetric generalized Bajraktarević means.
   J. Math. Anal. Appl. 512 (2), 1-12, 2022. ISSN: 0022-247X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126172
   IF: 1.3
3. **Grünwald, R.**, Páles, Z.: On the equality problem of generalized Bajraktarević means.
   Aequ. Math. 94 (4), 651-677, 2020. ISSN: 0001-9054.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s00010-019-00670-9
   IF: 0.832

List of other publications

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (3)

4. **Grünwald, R.**, Páles, Z.: On the invariance of the arithmetic mean with respect to generalized Bajraktarević means.
   Acta Math. Hung. 166 (2), 594-613, 2022. ISSN: 0236-5294.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10474-022-01230-5
   IF: 0.9

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

5. **Grünwald, R.**, Páles, Z.: On additive functions with additional derivation properties.
   Publ. Math. Debr. 99 (1-2), 201-221, 2021. ISSN: 0033-3883.
   DOI: http://dx.doi.org/10.5486/PMD.2021.8997
   IF: 0.698

6. **Grünwald, R.**, Páles, Z.: On derivations with respect to finite sets of smooth functions.
   Acta math. Hung. 154 (2), 530-544, 2018. ISSN: 0236-5294.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s10474-018-0790-2
   IF: 0.538

Total IF of journals (all publications): 5,568
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 3,432

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

19 March, 2024