

Stankov Gordana

**KONKRÉT ÉS KÉPI REPREZENTÁCIÓK
HASZNÁLATA A HETEDIK OSZTÁLYOS
ALGEBRATANÍTÁSBAN**

**THE USE OF CONCRETE AND VISUAL
REPRESENTATIONS IN TEACHING ALGEBRA
TO SEVENTH GRADE STUDENTS**

PhD értekezés tézisei

Témavezető: Dr. Ambrus András



Debreceni Egyetem
Debrecen, 2008.



Bevezető

Tanulóim tanulási gondjai és speciális nyelvi igényei ösztönöztek arra, hogy egy olyan módszert próbáljak kifejleszteni az algebra alapjainak tanítására az általános iskola hetedik osztályában, amely lehetővé teszi a tanulók számára, hogy az algebrai fogalmakat képességeik, tapasztalataik és a már elsajátított ismereteik felhasználásával építsék fel.

Tézisek:

A tanítási kísérleteim tervezésében és kivitelezésében alkalmaztam a dolgozatom első fejezetében bemutatott elméleti hátteret (tanuláspszichológiai alapok; matematika-didaktikai alapok; a nyelv és a kétnyelvűség a matematikaoktatásban), melyekből most a következőket emelném ki.

– **A fejlesztő kísérletem során nagy hangsúlyt helyeztem a tanulók relációs megértésének fejlesztésére, melyet Skemp definiált.**

A változó fogalmának relációs megértését segítette a hajlítható ceruza alkalmazása. Az algebrai kifejezésekben megjelenő zárójelek szerepének relációs megértését előresegítették a gyakorlatok melyben használtuk az algebrai kifejezések sémáit. Az összeg (illetve különbség) hozzáadásának (illetve kivonásának) relációs megértéséhez hozzájárultak a megfelelő „mesék” és a „szalag aritmetika” is. Az algebrai kifejezések összevonásának relációs megértésében kulcsfontosságúak voltak a kifejezések képi reprezentációi. A kéttagú kifejezés szorzását egytagúval és a kiemelés relációs megértését segítette a kifejezések reprezentációi téglalapokkal. A mérlegelv relációs megértéséhez nagymértékben hozzájárult a valódi mérlegek alkalmazása.

– **Az algebra tanítása rendszerint a szimbolikus szinten zajlik.**

– **Követve Erich Wittmann, Dienes Zoltán, Varga Tamás, Pólya György és Szendrei Julianna gondolatait és útmutatásait, igyekeztem a kísérleti tanításom során az enaktív és az ikonikus reprezentációkat a Magyarországon megszokottnál hosszabb ideig alkalmazni, természetesen nem elhanyagolva a szimbolikus síkot.**

A konkrét és képi reprezentációk (*gépmodell, mérleg, lépcsős modell, balyu modell, séma*) segítenek a tanulóknak, abban hogy egy-egy fogalom absztrakt matematikai tartalmát minél inkább megragadhassák (*Dienes*). A

tanulók előbb tapasztalatokat szereztek a konkrét reprezentációkkal (szakaszos és téglalapos reprezentációk) való tevékenységekből és ennek alapján tudtak általánosítani (megfogalmazták, hogyan vonjuk össze az egymű algebrai kifejezéseket).

– **Az általunk használt modelleknél a Filloy által meghatározott matematikai modellezés fő komponenseire (lefordítás és elkülönítés) külön is odafigyeltünk.**

A modellekkel való munkával párhuzamosan az algebrai szimbolizációt is használtuk (például: az egyenletek megoldásánál lapocskák felhasználásával), és *a modellek használatának elhagyását mindig követte a munka, kizárólagosan szimbólikus síkon.*

– **A kísérleti tanítás során igyekeztem lehetőséget biztosítani a tanulók számára minden algebrai fogalom minél gazdagabb fogalomképzetének megalkotására.**

Az algebrai kifejezés fogalmánál erre külön felfigyeltem. A tanulók az algebrai kifejezéseknek *numerikus és szituációs jelentéseket* adtak. Ezzel az algebrai kifejezés fogalma kapcsolatba került más fogalmakkal a tanulók kognitív sémáján belül ami később megkönnyítette az algebrai kifejezések alkalmazását, például a szöveges feladatok megoldásánál. A vonatkoztató jelentések segítettek a tanulóknak az azonosságok értelmezésében is.

– **A modern agykutatás alapján az oktatás számára Josef Kraus által megfogalmazott követelményeket a kísérleti tanítások során megpróbáltam teljesíteni.**

A konkrét és vizuális reprezentációkkal való manipulálás a tanulókat aktivizálta. A manipulációkat a tanulók játéknak élték meg és *nagy érdeklődést mutattak* irántuk.

A tanítás-tanulási folyamat többcsatornás volt. A tanulók az információk nagy részét a saját maguk által végzett tevékenységekből szereztek meg (az ilyen információk 90%-a marad meg az emlékezetünkben).

Az algebrai technikákat nem hanyagoltuk el. A modelleket elhagyva a tanulók a gyakorlást folytatták szimbólumokkal. Ez különösen fontos volt az algebrai kifejezések összevonásánál és az egyenletek megoldásánál.

A tanulás folyamán a tanulók számára ismert szavakat használtunk (gép, mese, batyu), mindenki azon a nyelven beszélhetett és írhatott, amelyiket választotta. Ez biztonságérzetet nyújtott a tanulóknak és megkönnyítette a tanulást.

Igyekeztem *a tanulók figyelmét provokálni* meglepő, váratlan szituációk használatával (a vakutca példája vagy a megadott hibás megoldás javítása a szakaszos reprezentációknál).

Nagyra becsültünk minden megfogalmazott választ. Megbeszéltük a tanulókkal, hogy éppen a saját és mások hibáinak tisztázásakor lehet legtöbbet tanulni. *A játékos szituációk nagyban hozzájárultak a jókedvvel végzett szorongás nélküli tanuláshoz.*

– **Tanítási kísérleteim alatt a realiztikus matematikaoktatás alapelveit használtam.**

A tanulás a kezdeti szakaszában egy konkrét kontextusban történik (például: „mesék” és a szalag aritmetika; szakaszok és téglalapok használata a kifejezések összevonásánál). Ez a konkrét szituáció alapját képezi az absztrahálásnak és az áttérésnek az informális, kontextus függő szintről a formális szintre (*a szabályok megfogalmazása*).

A tanulók lehetőséget kaptak saját megoldási stratégiáik alkalmazására.

Példaként említhetem, hogy a tanulók önállóan fogalmazták meg, hogy hogyan kell összevonni az egynemű algebrai kifejezéseket. Legtöbbször kombinálva használták a kétfajta reprezentációt: a számokat és az elsőfokú kifejezéseket szakaszokkal reprezentálták; a másodfokú kifejezéseket téglalapokkal (például a $4ab$ -t négy egyforma téglalappal). Voltak tanulók, akik a számokat és az elsőfokú kifejezéseket is téglalapokkal reprezentálták. A két csoportból csak egy tanuló nem reprezentálta a kifejezéseket szakaszokkal vagy téglalapokkal. Ő a változóknak numerikus jelentést adott és ily módon könnyebbé tette az összevonást.

– **Az egyén tanulását az osztály többi tagja segítette.**

A tanulók helyes és a helytelen megoldásokat is bemutatták a többieknek (például az aritmetikai kifejezések lejegyzésénél), összehasonlították és megvitatták megoldásaikat (például a zárójelek szerepének vizsgálatánál) és segítettek egymásnak a megoldás helyesbítésében (\mathbb{T} a kifejezések összeadásánál segített társainak).

– **Az új fogalmak beépültek a tanulók kognitív sémáiba és kapcsolatba kerültek más fogalmakkal.**

Ezt főleg az algebrai kifejezések vonatkoztató jelentések meghatározása és a relációs megértés segítette.

– **Mindhárom, Kieran által megfogalmazott, iskolai algebra tevékenység megjelent a tanítási kísérletekben.**

A tanulók a geometriai minták és a számok közötti összefüggések alapján *általánosítottak*. A szöveges feladatoknál egyenleteket állítottak fel melyek a mennyiségek viszonyát fejezték ki.

A tanulók *transzformációs tevékenységeket* végeztek a kiemelésnél, az algebrai kifejezések összevonásakor, és az egyenletek megoldásánál, amikor ekvivalens átalakításokat végeztek.

A tanulók *globális, meta szintű tevékenységeket* végeztek, amikor a szöveges feladatoknál az azonos struktúrát vették észre, amikor magyarázatokat és indoklások fogalmaztak meg (például az algebrai kifejezések összevonásánál) és a fordított okoskodás alkalmazásánál is (a kifejezések lehetséges jelentésének meghatározása; kiemelés).

– **Az iskolai algebra mind a négy domináns megközelítést (általánosításokon keresztül, probléma megoldásokon keresztül; modellezéseken keresztül kifejezve a mennyiségek közti viszonyokat és a függvényyszerű megközelítést, táblázatokat használva) alkalmaztuk a kísérleti tanítások során.**

– **Malle az alsóbb osztályokra vonatkozó algebra tanításával kapcsolatos követelményeinek próbáltam eleget tenni.**

A változó két aspektusát használták a tanulók a kísérleti tanítás alatt: a behelyettesítési aspektust a gépmodellnél és a tárgyi aspektust az egyenletek megoldásánál, ahol a változó egy ismeretlen szám. A tanulók sokféle tevékenységet végeztek a változókkal (átalakításokat, szituációk leírását, jelentéseket adtak). A gépmodellnél az algebrai kifejezések függvényyszerű aspektusa került előtérbe. Az algoritmusok és a szabályok relációs megértése volt a cél.

– **A procept fogalmának megértése és alkalmazása kulcsfontosságú volt a kísérleti tanításban.**

Az eljárások elsajátítása mellett hangsúlyt helyeztem a folyamatok eredményeire is (fogalmak).

– **A szöveges feladatok megoldásánál a Pólya féle kérdéseket kicsit átfogalmazva sikeresen használtuk és kiegészítettük őket konkrétabb, az azonos struktúrájú feladatok megoldását segítő kérdésekkel:**

Általános kérdések:

Mit kell meghatározni?

Hogyan jelöljük?

Hogyan viszonyulnak a meghatározandó számok egymáshoz és a feladatban megjelenő számokhoz?

Írd le az összefüggéseket matematikai jelekkel!

Speciális azonos struktúrájú feladatok kérdései:

1. *Milyen tevékenységről van szó a feladatban, és ki végzi a tevékenységet?*

2. *Milyen mértékegységben mérjük a tevékenység időtartamát? vagy
Milyen egységben történik a tevékenység?*

3. *Mennyi a tevékenység időtartama? vagy
A tevékenység mennyi egységből áll?*

4. *Mennyi a tevékenység produktuma (eredménye) egy időegység alatt? vagy
Mennyi a tevékenység egységének produktuma (eredménye)?*

5. *Mennyi az össztevékenység produktuma (eredménye)?
Hogyan számoljuk ki az össztevékenység produktumát (eredményét)?*

A tanulók a feladatok megoldásánál használták a kérdéseket (Oliver ilyen fajta megoldását bemutattam a dolgozatban).

– **A mérlegelv hatékony elsajátításában a tanulóknak segítettek a kék és zöld kartonlapocskákra leírt célok, illetve megengedett tevékenységek az egyenleten.**

A lapokat a tanulók az asztalon tartották és a lapokon leírtak segítségével tudták felidézni a megfelelő gondolatsort és megoldani az egyenletet.

– **Wittman problémamegoldás képességek fejlesztésének alapfelteit próbáltam nagymértékben biztosítani tanulóim számára.**

A változó fogalmának elsajátítása, a kifejezések összevonása, a kiemelés, az egyenletek megoldása mérlegelvel, a konkrét (gépmodell, mérleg) és képi reprezentációk (szakaszok; téglalapok) használata révén kijelenthetjük, hogy a tanulás *felfedezettető tanulás* volt.

A tanulókat ösztönöztem a *divergens gondolkodásra*. Több irányból közelítettük meg ugyanazt a problémát. Például az összeg (illetve különbség) hozzáadásánál (illetve kivonásánál) a „mesék” mellett használtuk a szalag-

aritmetikát is. A kéttagú algebrai kifejezés szorzásának előkészítésénél az aritmetikai kifejezések numerikus és szituációs jelentésait is tárgyaltuk.

Igyekeztem ösztönözni a tanulókat, hogy maguk is *vessenek föl problémákat*. Például a tanulók alkottak új szöveges feladatokat melyeknek struktúrája azonos volt az előbbi feladatok struktúrájával, vagy olyan feladatokat alkottak melyeknél általánosítani kellett és meghatározni a szabályt (eközben a színes rúdkészletet használták).

Az órákon a tanulóknak *argumentálni, indokolni kellett* (például a feladatnál mely a zárójelek szerepére vonatkozik).

A tanulóknak igyekeztem kialakítani az igényt arra, hogy *ellenőrizzék a megkapott eredményeket és helytelen megoldás esetén próbálják ezt korrigálni*.

A diszkussziók kialakulása és a vélemények szabadon nyilvánítása szerkesztés részeit képezték a tanítási óráknak.

– **Göncz eredményeinek tudatában fokozott törekvésünkké vált tanulóim kiegyensúlyozott kétnyelvűségének megközelítése.**

A szerb helyes beszéd és a szerb szakkifejezéseken kívül a mondatokba foglalt magyar szakkifejezéseket is tanulták a tanulók az órákon.

A következő részben a kísérleteim eredményeit összegzem röviden.

– **Az általam kreált előteszt eredményeinek alapján megállapítható milyen előismeretekkel rendelkeznek a tanulók néhány alapvető algebrai fogalommal kapcsolatban.**

Az első két feladatban a „=” jelet kellett helyesen értelmezni. A 2. feladatnál az egyenlőségjel két oldalán levő kifejezések összeadandóit kellett összehasonlítani és észrevenni, hogy van köztük két egyenlő értékű. A 3. feladatban a zárójel felbontására kérdeztem rá. A 4. és 5. feladatban általánosítani kellett és leírni a megfelelő algebrai kifejezéseket. A 6., a 7., és a 8. feladatban a tanulónak össze kellett kapcsolni a geometriai és az algebrai ismereteit. A szimbolikus reprezentáció alapján meg kellett határozni a kifejezések szakaszos reprezentációit és fordítva. A 9. feladatban a szöveget kellett értelmezni, leírni a megfelelő algebrai kifejezéseket és ezeket összeadni. A 10. feladatban jelentést kellett adni az algebrai kifejezéseknek. A 11. feladatban értelmezni kellett az egyenlőségeket és a 12. feladatban a számeqyenesen kellett a kifejezések helyét meghatározni.

– Az utóteszt feladatai analóg feladatok voltak az előteszt feladataival, az eltérés csak annyi volt, hogy az utótesztet bővítettem még egy szöveges feladattal.

– Az általános iskola hetedik osztályos kétnyelvű tanulók körében a konkrét és képi reprezentációk használata hozzájárul az algebra alapjainak hatékony elsajátításához, különösen a változó fogalmának kialakulásához, az algebrai kifejezések lehetséges jelentésének meghatározásához, az algebrai kifejezésekkel való műveletek elvégzésének és az azonos struktúrájú szöveges feladatok megoldásának elsajátításához.

A gépmodell és a hajlítható ceruza alkalmazása hasznosnak bizonyult a változó fogalmának bevezetésénél. A lépcsős modell, a batyu modell, és a séma használata kulcsfontosságú volt az algebrai kifejezések struktúrájának megértésében. A képi reprezentálást megelőzte a konkrét (tárgyakkal való) reprezentálás (a táblázat reprezentálásánál a számokat először konkrét tárgyakkal, majd képekkel és végül szimbólumokkal reprezentáltuk; előbb a lépcsős modellt használtuk és csak ezt követően a sémát). A konkrét reprezentáció fontos a tanulók számára, mint a „játék” eszköze. Ebből adódóan a megfelelő képi, illetve szimbolikus reprezentációt is természetesnek tekintik, mint a tárgyi reprezentációk rajzait vagy jeleit. A séma esetében a tárgyi reprezentációnak köszönhetően a tanulók könnyebben megértették magát a sémát.

A tanulók először a számokat, később a változók szorzatát racionális számmal és végül az említett kifejezések összegeit is reprezentálták megfelelő szakaszokkal. Az azonos struktúrájú egyenletek megoldására vezethető szöveges feladatok megoldásánál a szakaszos reprezentációkat használták a tanulók. Az ilyen feladatok megoldásánál hasznosnak bizonyult a segédkérdések megfogalmazása és alkalmazása. Először az azonos struktúrájú szöveges feladatokkal foglalkoztunk, melyeknél észre kellett venni, hogy ugyanazzal az algebrai kifejezéssel lehet őket modellezni. Ezt követően fokozatosan nehezebbé váltak a feladatok: a kifejezés helyett, egyenletet kellett felállítani, ezt megoldani, és az adott kontextusban interpretálni a megoldást. A tanulók elsajátították a racionális számok, az első és másodfokú egytagú algebrai egész kifejezések reprezentálását téglalapokkal. Az egytagú kifejezések szakaszokkal és téglalapokkal való reprezentálása lehetővé tette a tanulók számára, hogy könnyebben absztraháljanak. A mérlegelv megértését és elsajátítását elősegítette a valódi mérleg használata, begyakorlása során az

egyenletek papírlapokkal való reprezentálása bizonyult hasznosnak. A kéttagú algebrai kifejezések egytagúval szorzásánál, és a kiemelésnél a téglalapos reprezentációkat használták a tanulók. Fontos kihangsúlyozni, hogy végül a tanulók elhagyták a konkrét és képi reprezentációk használatát és a szimbolikus síkon folytatták az algebrai feladatok megoldását.

A tárgyi és a képi reprezentációk használatának hatékonyságáról értesülhetünk az alábbi táblázatból mely az előteszt és az utóteszt helyes megoldásainak számát mutatja:

FELADAT SORSZÁMA	1. KISÉRLETI CSOPORT		2. KISÉRLETI CSOPORT	
	<i>ELŐTESZT</i>	<i>UTÓTESZT</i>	<i>EJŐTESZT</i>	<i>UTÓTESZT</i>
1.	7	8	6	7
2.	2+2számolással	8	1+1 számolással	7
3.	2+2számolással	7+1 magyarázat nélkül	4 számolással	6
4. első táblázat	1	4+4 magyarázat nélkül	0	5+2 magyarázat nélkül
4. második táblázat	1	3+4 magyarázat nélkül	0	5+2 magyarázat nélkül
5. első képsor	2	8	2	7
5. második képsor	2	6	1	6
6.	3	8	2	6
7.	3+3 méréssel	8	3+4 méréssel	7
8.	5	8	5	7
9.	1	7	0	6
10.	25	29	17	22
11. 1.egyenlőség	4	6; 8 magyarul	5	6; 6 magyarul
11. 2.egyenlőség	2	8;8 magyarul	3	7; 6 magyarul
11. 3.egyenlőség	2	7; 8 magyarul	3	6; 6 magyarul
11. 4.egyenlőség	5	8; 8 magyarul	5	7; 6 magyarul
12.	2	6	1	5
13.		4+2 leírt ellenőrzés nélkül		5

A következtetéseket a tanulók algebrai tudásának gyarapodásáról a következőképpen vontam le: egyenként hasonlítottam össze a tanulók elő- és utóteszt analóg feladatainak megoldásait, elemeztem az utóteszt 13. feladatának megoldásait és a tanulók munkáját a tanórákon. Ezekből levonható egyértelműen, hogy a tanulók algebratudása nagymértékben fejlődött.

Megjegyzés:

Mind a két tanítási kísérlet kismintás volt, ezért a tesztek kiértékelésében a szokásos statisztikai eljárásokat nem használtam. Ehhez jóval nagyobb elemszámú kísérletek szükségesek.

– **A szerb kisebbségi iskola tizenkettedikes tanulók nyelvhasználatában léteznek szakkifejezések, melyek használatánál megfigyelhetők a nyelvi interferenciák.**

A tizenkettedikes tanulók számára, több éves megfigyelés alapján elkészített kérdőív azokat a kifejezéseket tartalmazta, amelyek használatánál gyakoriak a nyelvi interferenciák. Ezt bizonyítják a tanulói válaszok is, hiszen mindegyik kifejezésnél a tizenkettedikes tanulók körében is jelentkeztek az interferenciák.

– **A tanítási mód melyet a kutatásom előtt használtam a Szerb Tanítási Nyelvű Általános Iskolában és Gimnáziumban nem volt eléggé hatékony a nyelvi interferenciáktól mentes szaknyelv és a helyes beszéd elsajátításában. Ez különösen a magyar szaknyelvre vonatkozik, melynél a tanulói teljesítmények sokkal gyengébbek voltak, miközben a tanulók magyar nyelvtudása jobb volt a szerb nyelvtudásánál.**

Ezt az állítást a kérdőív eredményei támasztják alá: a legtöbb interferencia a magyar nyelvben jelentkezett. A 23 tanulóból, akikkel magyar nyelven beszélgettem 21-en *reális számok halmazának* nevezte a R-t; 21-en a *háromszor annyi* helyet a *háromszor több-et* használták. Fontos kiemelni, hogy az első három példánál 10 most is dominánsan magyar nyelvű tanuló (kik magyar általános iskolába jártak és a gimnázium előtt biztosan használták a helyes magyar kifejezéseket), „átvette” a szerb kifejezéseket.

A kísérleti tanításom alatt a következő új módszereket használtam:

– **Azon kívül, hogy leírtuk a kifejezéseket mindkét nyelven, kihangsúlyoztuk, hogy a kifejezések egymás tükörfordításai, vagy sem.**

Ha nem, felhívtam a tanulók figyelmét, hogy melyek a különbségek, s elmondtam, hogy általában milyen hibákat vétének a megnevezéskor a tanulók.

– **Nemcsak a kifejezéseket neveztem meg magyar nyelven, hanem egész mondatokat magyarul mondtam el; azoktól a tanulóktól, kik tudtak magyarul, vissza is kértem magyarul.**

Az új tanítási mód **hatékonyabbnak** bizonyult a korábbinál. Ezt dolgozatomban bemutattam például a *kitölteni a táblázatot és a kifejezések számértéke* szakkifejezések elsajátítása kapcsán.

Tervezem a kutatás folytatását a következő problémák körében:

– **A tananyag „kipótlása” (kidolgozása és az egész kipróbálása egy új csoporttal) a *lineáris függvény bevezetése* témakörből.**

– **A kísérletben szereplő tanulók további algebra tanulásának és az algebrai tudásuk összehasonlítása más iskola hasonló korú tanulókéval.**

– **Tesztelni a dolgozatomban tárgyalt tanítási módszer jóságát más iskolákban (nagyobb kísérleti csoportokkal). Tökéletesíteni ezt, hogy alkalmazható legyen széles körökben az algebra alapjainak tanításában.**

– **E módszer alkalmazása a felzárkóztató foglalkozásokon a hetediknél magasabb osztályokban, melyeken részt vesznek a matematikától idegenkedő és az algebra alapfogalmait nem értő tanulók.**

– **A nyelvi konstrukció hatása az algebra tudására az egynyelvű tanulóknál. Könnyebb-e egy feladat az egyik, mint a másik nyelven, azért mert az egyik nyelvi szerkezet esetleg megkönnyíti a megoldást. Például a *valahányszor annyi (magyar kifejezés)* és a *valahányszor több (szerb kifejezés: broj puta vise)*.**

Introduction

I was motivated by my students' learning difficulties and special needs to make an effort to develop a method for teaching the fundamentals of algebra which enables students to build up the concepts of algebra on the basis of their ability, experience and previously acquired knowledge.

The abstract of the thesis:

The planning and execution of my teaching experiments were carried out on the basis of the theoretical background, the fundamentals of the psychology of learning introduced in the first chapter of my thesis, the fundamentals of the didactics of mathematics and language and bilingualism in mathematics teaching, from which I would highlight the following ones:

– **During my developmental experiments I put great emphasis on developing the students' relational understanding, concept that was defined by Skemp.**

The relational understanding of the concept of the variable was helped by the application of the flexible pencil. The relational understanding of the parentheses appearing in algebraic expressions was helped by the exercises where we used the schemes of the algebraic expressions. The relational understanding of adding (or subtracting) the sum (or the difference) was helped by some appropriate stories (tales) and the stripes-arithmetics. In the relational understanding of the simplification of algebraic expressions the visual representations of the expressions were of key importance.

The relational understanding of the multiplication of binomial expressions with monomial ones and factorizing was helped by the representation of the expressions with rectangles. The relational understanding of the principle of scales was significantly helped by the use of real scales.

– **The teaching of algebra usually takes place on a symbolic level.**

– **During my teaching experiment, following the ideas and guidelines of Erich Wittmann, Zoltán Dienes, Tamás Varga, György Pólya and Julianna Szendrei, I made every effort to apply the enactive and iconic representations longer than it had been usual in Hungary, without ignoring the symbolic level in the meantime.**

The concrete and visual representations (*the model of a machine, the scales, the staircase-model, the bundle-model, the scheme*) can help students grip the abstract mathematical content of a concept (*Dienes*). The students first gained experience in activities with concrete representations (representations with segments and rectangles) and on the basis of this, they learned how to make generalizations (they formulated how to simplify homogenous algebraic expressions).

– **We paid extra attention to the two main components of mathematical modeling (transition and separation) - defined by Filloy - at the models we used.**

Parallel with our work with the models, we introduced the algebraic symbolization (for example: when solving equations we used small pieces of cardboard paper) *the use of models was always followed by work - exclusively on the symbolic level.*

– **During the experimental teaching I was eager to make sure that students have enough opportunity to create an as-rich-as-possible concept-formation in case of each algebraic expression.**

At the concept of the “algebraic expression” I paid extra attention to this. Students gave *numeric* and *situational meaning* to the algebraic expressions. With this, the concept of the “algebraic expressions” became connected to other concepts within the cognitive schemes of the students, which, according to our expectations, later facilitates the application of algebraic expressions, for example when solving word problems. The referential meanings might help students to interpret identities.

– **During the experimental teachings I tried to meet the requirements for education, formulated by Josef Kraus on the basis of modern brain research.**

Manipulating with concrete and visual representations was quite activating for students. The students experienced these manipulations as games and they showed great interest in them. *The teaching-learning process was a multi-channel one.* Students received most of the information from activities that they carried out themselves (90% of such information remains in their memories).

We did not neglect the algebraic techniques. Leaving the models behind students continued to practice using symbols. This was especially important

when simplifying algebraic expressions and solving equations.

During the process of learning we used words and expressions that the students were acquainted with (such as: machine, tale, bundle ...) and everybody was allowed to use the language they had chosen. This provided the students with the sense of security and as such facilitated the learning itself.

I tried to provoke students' attention with using surprising, unexpected situations (the example of the dead-end-street or the correction of the given wrong solution of a task at segmental representation).

We appreciated every answer given. We discussed with the students what we could learn from classifying the mistakes of our own or of other people. *These playful situations highly contributed to the cheerful, anxiety-free learning.*

– **During my teaching experiments I applied the principles of realistic mathematics teaching.**

In its initial phase learning takes place in a particular (concrete) context (for example: “*tales*”, and *stripes-arithmetics; the use of segments and rectangles when simplifying expressions*). This particular (concrete) situation serves as a basis for abstraction and moving further from an informal, context-dependent level to a formal one (*formulating rules*).

Students were provided the opportunity of applying their own solution-strategies.

Let me mention the example of a student of mine individually expressing how to simplify homogenous algebraic expressions. Most students combined the two kinds of representations: they represented numbers and linear expressions with rectangles (for example they represented $4ab$ with four similar rectangles). Some students represented both numbers and expressions with rectangles. From the two groups there was only one student who did not use segments or rectangles for representing the expressions. He gave numeric meaning to the variable and in this way facilitated the simplification.

– **The learning of the individual was helped by other members of the class.**

The students presented both their correct and wrong solutions to the others (for example when taking notes of arithmetic expressions), then compared and discussed each other's solutions (for example when examining the role of

parentheses) and finally helped each other in correcting the wrong solutions (T helped his classmates when we were practicing adding up expressions).

– **The new concepts worked their way into students' cognitive schemes and correlated with other concepts.**

This process was mostly helped by the definition of the referential meanings and the relational understanding.

– **All the three school-algebra activities - formulated by Kieran - appeared in the teaching experiments.**

On the basis of geometric patterns and the relationship between numbers, students carried out *generalizations*. In case of word problems they set up equations, which represented the relationship between the quantities. Students carried out *transformational activities* when factorizing, simplifying algebraic expressions, and doing equivalent transformations for solving equations.

Students performed *global, meta-level* activities when noticing the similar structure of word problems, when formulating explanations and justifications (for example at the simplification of algebraic expressions) and when performing reverse-reasoning (defining the possible meaning of expressions, factorizing).

– **During the experimental teachings we applied all four dominant approaches to algebra (through generalizations, through problem-solving, expressing the relations between quantities through modeling and the function-like approach using tables).**

– **I attempted to meet Malle's requirements concerning algebra teaching in lower primary classes.**

During the experimental teaching students used two aspects of the variable: the substitutional aspect at the model of a machine and the material aspect at solving equations where the variable was an unknown number. The students carried out all sorts of activities with the variables (transformations, describing situations, giving meanings). At the model of a machine the function-like aspect of the algebraic expressions was emphasized. The aim was to develop the skill of relational understanding of algorithms and rules.

– **Understanding the concept of the procept as well as putting it into practice was of pivotal importance.**

Besides the acquisition of the procedures I also put emphasis on the results of the process (concepts).

– **When solving word-problems we successfully employed Pólya’s questions in a slightly re-formulated way. In order to help solving similar structured tasks, we also supplemented them with more concrete questions:**

General questions:

- *What is to be determined?*
- *How shall we indicate it?*
- *How do the numbers to be determined relate to each other and to the other numbers appearing in the task?*
- *Describe the relationships using mathematical symbols.*

Questions for special similar-structured tasks:

1. *What kind of activity is described in the task and who performs it?*
2. *What unit is to be used for measuring the duration of the activity? or
In what unit does the activity happen?*
3. *What is the duration of the activity? or
How many units does the activity consist of?*
4. *What is the product of the activity during one unit of time? or
What is the product of the unit of the activity?*
5. *What is the product of the total activity?
How can we calculate the product of the total activity?*

Students used these questions when solving the tasks (such a solution of Oliver’s is presented in the thesis).

– **The students’ effective acquisition of the principle of scales was helped by the aims, written down on blue and green pieces of cardboard paper, as well as the permitted activities on the equation.**

Students kept these sheets on their desks, and with the help of the things written down on the sheets they could recall the appropriate chain of ideas and solve the equation.

– **I extensively tried to provide my students with Wittman’s primary conditions for the development of problem-solving skills.**

Through the acquisition of the concept of the variable, the simplification of expressions, the factorizing, the use of the principle of scales for solving equations, the use of concrete (the model of a machine, the scales) and visual representations (segments, rectangles) we can state that the learning was *exploration-learning*.

I encouraged students to use *divergent thinking*. We approached the same problem from a number of different directions. For example when adding (or subtracting) the sum (or the difference), besides using tales we applied stripes-arithmetics as well. When preparing for multiplications of binomial algebraic expressions we discussed both the numerical and the situational understandings of the arithmetical expressions.

I tried to encourage students to *come up with problems themselves*. For example they created new word-problems, where the structure was similar to the structure of the previous tasks or they created tasks where generalizations had to be carried out or the rule had to be formulated (they used sets of coloured plastic sticks for this).

In the lessons students had to *justify and give reasons* (for example in case of the task which was about the role of parentheses).

I tried to develop the students' need to *check their results and in case of a wrong solution try to correct it*.

The *development of discussions* and the *free expressions of opinions* were integral parts of the lessons.

– **Considering the results of Göncz, approaching my students' well-balanced bilingualism became my increased ambition.**

Not only did students learn appropriate Serbian speech and Serbian terminology in the lessons but they also learned Hungarian technical expressions within sentences.

In the following part I am going to try to give a brief summary of the results of my experiment.

– **On the basis of the results of the pre-test I prepared, we can determine what kind of preliminary knowledge do students possess about some basic algebraic concepts.**

In the first two tasks the symbol “=” had to be interpreted correctly. In the second task the addable sums of the expressions on the two sides of the equals sign had to be compared and it had to be observed that there were two

of equal value on either side. The 3rd task was about undoing parentheses. In the 4th and 5th tasks students had to make generalizations and write down the appropriate algebraic expressions. In the 6th, 7th and 8th tasks students had to link their geometric and algebraic knowledge. Based on the symbolic representation they had to define the segmental representation of certain concepts and the other way round. In the 9th task a text had to be interpreted, students had to write down the appropriate algebraic expressions, and add them up. In the 10th task meaning had to be given to the algebraic expressions. In the 11th task equalities had to be interpreted and in the 12th task places of the expressions had to be determined on the number-line.

– **The tasks of the post-test were analogous with the tasks of the pre-test. The only difference was that the post-test was extended with one more word problem.**

– **The use of concrete and visual representations for seventh-grade bilingual students contributes to the efficient acquisition of the fundamentals of algebra, especially to the development of the concept of variable, to the definition of the possible meanings of the algebraic expressions and acquiring the skills of carrying out operations with algebraic expressions and solving similar-structured word problems.**

Applying the model of a machine and the flexible pencil proved to be useful when introducing the concept of the variable.

For the understanding of the structure of the algebraic expressions the use of the staircase-model, the bundle-model and the scheme was of essential importance. The visual representation was preceded by the concrete representation using certain objects (when representing the table, we represented the numbers first with particular objects, then with images and finally with symbols; first we used the staircase-model and the scheme came only after that).

The concrete representation is important for the students, since it is the means of playing games. That is why they accept the appropriate visual or symbolic representation as the drawings or signs of material representation.

In case of the scheme, thanks to the material representation it was much easier for the students to understand the scheme itself.

Using appropriate segments students first represented numbers, then the product of the multiplication of variables and rational numbers and finally the sums of the listed expressions.

The students used segmental representations for solving word problems that could be reduced to solving similar structured equations. Formulating and applying questions-to-help proved helpful for solving such tasks. First we were engaged in solving similar-structured word problems, where it had to be observed that they could be modeled using the same algebraic expression. Following this, tasks gradually became more and more difficult: instead of an expression an equation had to be set up, solved, and its solution had to be interpreted in a certain context.

Students acquired the ability to represent rational numbers and linear and quadratic monomial algebraic expressions (integers as constants) using rectangles. Representing monomial expressions using segments and rectangles made abstraction easier for students.

Understanding and acquiring the principle of scales was helped by the use of real scales and during the practice, representing the equations with sheets of paper proved useful, too.

Students used rectangles as a means of representation while doing multiplications of binomial algebraic expressions with monomial ones and while factorizing. It is important to emphasize that the students abandoned the use of concrete, visual representations and continued solving algebraic tasks on a symbolic level.

We can get information about the efficiency of the use of material and visual representations from the table on the next page. This table presents the numbers of correct solutions in case of the pre-test and the post-test.

According the students' progress in their algebraic knowledge I drew the conclusions as follows:

I compared the students' solutions of the analogues tasks one-by-one both in the pre-test and the post-test; I analyzed the solutions of the 13th task of the post-test as well as the students' classroom activity. From all this it is clearly declarable that the students had made considerable progress in their knowledge of algebra.

Note:

Both of my teaching experiments were on small samples, therefore I did not employ usual statistical procedures for the evaluation of the tests. In order to do so, it would have been necessary to perform experiments on the basis of a much bigger sample.

NUMBER OF THE TASK	1 st EXPERIMENTAL GROUP		2 nd EXPERIMENTAL GROUP	
	<i>PRE-TEST</i>	<i>POST-TEST</i>	<i>PRE-TEST</i>	<i>POST-TEST</i>
1.	7	8	6	7
2.	2+2 with counting	8	1+1 with counting	7
3.	2+2 with counting	7+1 without explanation	4 with counting	6
4. 1st table	1	4+4 without explanation	0	5+2 without explanation
4. 2nd table	1	3+4 without explanation	0	5+2 without explanation
5. 1st sequence of pictures	2	8	2	7
5. 2nd sequence of pictures	2	6	1	6
6.	3	8	2	6
7.	3+3 with measuring	8	3+4 with measuring	7
8.	5	8	5	7
9.	1	7	0	6
10.	25	29	17	22
11. 1st equality	4	6; 8 in Hungarian	5	6; 6 in Hungarian
11. 2nd equality	2	8;8 in Hungarian	3	7; 6 in Hungarian
11. 3rd equality	2	7; 8 in Hungarian	3	6; 6 in Hungarian
11. 4th equality	5	8; 8 in Hungarian	5	7; 6 in Hungarian
12.	2	6	1	5
13.		4+2 without written checking		5

– **In the language usage of the 12th-grade students of the Serbian minority school there are technical expressions where linguistic influences can be observed.**

The questionnaire, for 12th-grade students; compiled on the basis of many years of observation, contained expressions at the use of which linguistic interferences are quite frequent. This is also supported by the students'

answers, since the interferences appeared among the 12th-grade students in case of each expression.

– **The teaching methods I used to apply at the Serbian Language Primary and Secondary Grammar School prior to my research was not efficient enough for the acquisition of the technical language and the appropriate speech devoid of linguistic interferences. This is particularly true concerning the Hungarian technical language, in case of which students' performance proved to be much weaker, while the students' Hungarian language skills were better than their Serbian language skills.**

This argument is supported by the results of the questionnaire: most interference arose in the Hungarian language. Out of the 23 students whom I spoke Hungarian to, 21 called "R" the "*set of realistic numbers*" ("reális számok halamaza"). Instead of using the term "*three times as many/much*" ("háromszor annyi") they used "*three times more*" ("háromszor több"). It is important to point out that at the first three tasks 10 dominantly Hungarian-speaking students (who used to go to Hungarian primary schools, and must have used the proper expressions before the beginning of their secondary studies) adopted the Serbian expressions.

During my experimental teaching I applied the following new methods:

– **Besides writing down the concepts in both languages, I emphasized whether they were each other's loan translations or not. In case they weren't, I draw students' attention to their differences and explained other students' common mistakes in specifying them.**

– **Not only did I specify concepts in Hungarian, but I also pronounced entire sentences in Hungarian; and those students who spoke Hungarian were examined in them in Hungarian.**

The new method of teaching proved more effective than the one I had used before. This is presented in my thesis, for example in connection with the acquisition of the technical expressions: "*to fill in the table*" and the "*numerical value of the expressions*".

I intend to continue the research in the area of the following problems:

– **Supplementing the syllabus (designing and trying out the entire**

experiment on a new group of students) on the topic of the introduction of the linear function.

- Comparing and contrasting the further algebra studies and the algebraic knowledge of the students performing the experiment on the same-aged students from another school.

- To test the suitability of the teaching method discussed in my thesis in other schools (preferably with larger experimental groups). Bringing the method to perfection, so that it would be applicable for a more widespread teaching of the fundamentals of algebra.

- Applying the method above in the seventh grade in school-remedial courses on those students who do not understand the basic concept of algebra, or generally have aversions towards mathematics.

- The effect of the linguistic construction on the knowledge of algebra for monolingual students. Investigating whether the same task can be easier in one language than in the other due to the fact that one of the linguistic structures facilitates its solution. For example: “x-times as much/many” (“valahányszor annyi” - Hungarian expression) and “x-times more” (“broj puta vise” - Serbian expression).

A szerző publikációs jegyzéke

Referált folyóiratokban:

1. Using concrete and visual representations in algebra teaching. In: Beiträge zum Mathematikunterricht Bielefeld, 2005 DIV Verlag Franzbecker, Hildesheim, Berlin 85-88.
2. The use of concrete and visual representations in teaching early algebra in order to avoid basic difficulties. In: Parisot, K. J. – Vásárhelyi É. (2005) Positionen- Mathematikdidaktik in Entwicklung. Salzburg Abakus Verlag (15 oldal).
3. Some problems of solving linear equation with fractions. In: TMC 4/2 (2006) 339-351.

Nem referált folyóiratokban:

1. A törtes egyenletek tanításának néhány problémája– II. Felvidéki Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia konferenciakötete, 2004, Rév-Komárom, Pont Társadalomtudományi folyóirat 2005/1. – Matematikai Szakmódszertani Különszám, (Elektronikus kiadvány), ISSN 1336135X (6 oldal) Rév Komárom, 2005.
2. The use of concrete and visual representations in teaching early algebra in order to avoid basic difficulties. In: Handbook of Mathematics Teaching Improvement: Professional Practices that Address PISA, Edited by Stefan Turnau, Kraków, 2008, 271-282.