Összetett függvényegyenletek és hasznossági függvények

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Tóth Péter
Témavezető: Dr. Boros Zoltán

Debreceni Egyetem
Természettudományi és Műszaki Tudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2026.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Műszaki Tudományi Doktori Tanács, *Matematika- és Számítástudományok* Doktori Iskola *Matematikai analízis, függvényegyenletek és -egyenlőtlenségek* programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.
Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.
Debrecen, 2026. április 22.

…………………………
a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy *Tóth Péter* doktorjelölt 2022 és 2026 között a fent megnevezett Doktori Iskola *Matematikai analízis, függvényegyenletek és -egyenlőtlenségek* programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2026. április 22. …………………………….
a témavezető aláírása

Összetett függvényegyenletek és hasznossági függvények

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a *matematika- és számítástudományok* tudományágban

Írta: *Tóth Péter* okleveles *alkalmazott matematikus*

Készült a Debreceni Egyetem *Matematika- és Számítástudományok* doktori iskolája
(*Matematikai analízis, függvényegyenletek és -egyenlőtlenségek* programja) keretében

Témavezető: Dr. Boros Zoltán

Az értekezés bírálói:

Dr. ....
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....
tagok: Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 2026. ……………… … .

Köszönetnyilvánítás

Elsőként szeretném hálás köszönetemet kifejezni témavezetőmnek, Boros Zoltánnak az elmúlt nyolc év közös munkájáért. A számtalan izgalmas témafelvetés, az ötleteimre való nyitottság és a maximális segítőkészség biztosította kutatásaim hátterét. Témavezetését szakmailag és emberileg is példaértékűnek gondolom.

Kiemelten szeretném megköszönni szüleim feltétel nélküli támogatását és szeretetét, mely nélkül nem juthattam volna eddig.

Szintén hálásan köszönöm páromnak a rengeteg érzelmi támogatást és megértést doktori éveim nehéz időszakaiban. Továbbá barátaimnak, akik társaságában mindig lehetőségem volt feltöltődni. Nélkülük az értekezés bizonyára hamarabb, ám sokkal rosszabb hangulatban készült volna el.

Emellett köszönetet mondok jelenlegi és volt kollégáimnak, elsősorban a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetében, különös tekintettel az Analízis Tanszékre. Öröm és megtiszteltetés velük együtt dolgozni. Továbbá ezúton is köszönöm a Gróf Tisza István Debreceni Egyetemért Alapítvány támogatását PhD képzésem alatt.

Végezetül szeretném megköszönni az értekezés bírálóinak, hogy az előzetes vitára bocsátott változatra vonatkozó hasznos észrevételeikkel, javaslataikkal jelentősen emelték az értekezés színvonalát.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Motiváció, eltolásinvariáns függvények

Boros Zoltán 2004-ben megjelent [9] dolgozatában bizonyította a következő állítást: ha $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, összefüggő tartomány, valamint $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, legalább egyik változójában szigorúan monoton, úgy az F függvény pontosan akkor megoldása az

$$F(x+t,y) = \Phi_1(F(x,y),t) \qquad \text{és} \qquad F(x,y+s) = \Phi_2(F(x,y),s)$$

függvényegyenletek alkotta rendszernek valamilyen ismeretlen Φ_1, Φ_2 függvényekkel, ha F felírható egy folytonos, szigorúan monoton valós függvény és egy lineáris funkcionál kompozíciójaként. Ezen eredmény szolgált motivációként ahhoz, hogy tekintsük a fenti kéttagú összetett függvényegyenletrendszer általánosítását $n \geq 2$ változó esetén is. A disszertáció 3. Fejezetében az

$$\begin{aligned}
F(x_1+t_1, x_2, \ldots, x_n) &= \Phi_1(F(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_1) \qquad (1)\\
F(x_1, x_2+t_2, \ldots, x_n) &= \Phi_2(F(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_2) \qquad (2)\\
&\vdots\\
F(x_1, x_2, \ldots, x_n+t_n) &= \Phi_n(F(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_n) \qquad (n)
\end{aligned}$$

összetett függvényegyenlet-rendszer vizsgálata az egyik központi probléma. Ennek eredményeként a fenti felbontási tétel [9, Theorem 1] analóg változatát igazoljuk az $(1)-(n)$ egyenletrendszer folytonos megoldásaira.

A [9] cikk gondolatmenetétől eltérően az értekezésben az egyenletrendszer geometriai tartalmát helyezzük előtérbe. Ugyanis az $(1)-(n)$ egyenletrendszer struktúrája garantálja, hogy amennyiben F megoldás, akkor az $F(x)=F(y)$ egyenlőség maga után vonja, hogy $F(x+t)=F(y+t)$ szintén teljesül minden olyan $t\in\mathbb{R}^n$ vektorra, mely párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel (feltéve, hogy $x, y, x+t, y+t$ elemei az értelmezési tartománynak).

Ha F nem csak a koordinátatengelyekkel párhuzamos eltolóvektorok, hanem minden $t\in\mathbb{R}^n$ esetén rendelkezik a fenti tulajdonsággal, akkor *eltolásinvariáns függvény*nek nevezzük. Ezt a fogalmat, illetve annak lokális változatát a 2. Fejezetben vezetjük be. A 2. Fejezet fő eredménye, hogy bármely, $\mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő halmazán értelmezett folytonos, (lokálisan) eltolásinvariáns függvény előáll egy homeomorfizmus és egy lineáris funkcionál kompozíciójaként.

Az eltolásinvariáns függvényekhez hasonló koncepció több területen is felbukkan a matematikában. Példaként említhetjük Blackwell és Girschik [8] játékelmélet témájú monográfiáját, valamint Trockel [49] cikkét. Ezekben az eltolásinvariancia $\mathbb{R}^n$-en értelmezett preferencia-relációkra vonatkozóan kerül bevezetésre. A [8] és [49] dolgozatokban szereplő eredményeket több szempontból is jelentősen általánosítjuk illetve kiterjesztjük.

Összetett függvényegyenlet-rendszerek

A folytonos, eltolásinvariáns függvényekre nyert eredménynek birtokában karakterizálhatjuk az $(1)-(n)$ függvényegyenlet-rendszer folytonos megoldásait is. Speciális esetként a már említett [9, Theorem 1] tétel egy erősebb változata is adódik, a monotonitási feltétel kiküszöbölése által. Mindezen eredmények a 2. és 3. Fejezetben kerültek összefoglalásra, a [46] dolgozat tartalmára támaszkodva.

Ezután az egyenletrendszer egy általánosítását tekintjük, ahol az egyes változókban az összeadást más kétváltozós műveletekkel helyettesítjük. Tehát az

$$u\left(F_1\left(x_1, t_1\right), x_2, \ldots, x_n\right)=\Psi_1\left(u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), t_1\right) \quad \text{(G-1)}$$
$$u\left(x_1, F_2\left(x_2, t_2\right), \ldots, x_n\right)=\Psi_2\left(u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), t_2\right) \quad \text{(G-2)}$$
$$\vdots$$
$$u\left(x_1, x_2, \ldots, F_n\left(x_n, t_n\right)\right)=\Psi_n\left(u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), t_n\right) \quad \text{(G-n)}$$

függvényegyenlet-rendszert vizsgáljuk, ahol $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ ismeretlen függvények, továbbá $F_1, \ldots, F_n$ adott folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses műveletek nyílt intervallumokon.

A változóbeli műveletekre vonatkozó feltételeket Aczél János [1], [3] folytonos csoportműveletekre vonatkozó reprezentációs tétele motiválja, melyet később Robert Craigen és Páles Zsolt [12] általánosítottak. A 3. Fejezet legáltalánosabb eredménye, hogy a (G-1) – (G-n) összetett függvényegyenlet-rendszer folytonos megoldásai előállnak

$$u\left(x_1, \ldots, x_n\right)=g\big(a_1 f_1^{-1}(x_1)+\cdots+a_n f_n^{-1}(x_n)\big)$$

alakban, ahol $a_1, \ldots, a_n$ valós konstansok, $g, f_1, \ldots, f_n$ pedig homeomorfizmusok, melyek (g kivételével) éppen a változókban megjelenő műveleteket generálják a [12] cikkben szereplő reprezentáció értelmében.

Kváziösszegek, regularitás-elmélet

A (G-1) – (G-n) megoldásainak struktúrája szolgált motivációként az értekezés 4. Fejezetében összefoglalt kutatásokhoz. A fenti alakú összetett függvény ugyanis egy ún. *kváziösszeg*. A kétváltozós kváziösszegek fogalmát Maksa Gyula vezette be [32] dolgozatában, majd a fogalmat kettőnél több változó esetére is kiterjesztették (ld. [34]). Egy $n \geq 2$ változós kváziösszeg alatt

$$F\left(x_1, \ldots, x_n\right)=g\big(f_1(x_1)+\cdots+f_n(x_n)\big) \tag{1.1}$$

alakú függvényt értünk, ahol $g, f_1, \ldots, f_n$ nyílt intervallumokon értelmezett valós homeomorfizmusok. Ezeket a függvényeket az F kváziösszeg *generátorfüggvényei*nek (vagy röviden *generátor*ainak) hívjuk.

A kváziösszegek osztálya számos nevezetes többváltozós függvénycsaládot magában foglal, többek között a folytonos csoportműveleteket (ld. [3]), általánosított és súlyozott kvázi-aritmetikai közepeket (ld. [36]), illetve az általánosított biszimmetria-egyenlet folytonos megoldásait (ld. [5, 32, 34]). Utóbbi egyenlet a konzisztens aggregáció [13] közgazdaságtani problémájával ekvivalens.

A disszertációban a kváziösszegeket elsősorban regularitási szempontból kívánjuk vizsgálni: elsődleges célkitűzésünk annak körüljárása, hogy egy kváziösszeg regularitása miként öröklődik a generátorfüggvényeire. Vizsgálatainkat az is indokolja, hogy az (1.1)-hez hasonló összetett függvényegyenletek regularitásának elmélete jóval kevésbé kidolgozott, mint az ismeretlen függvények összetételét nem tartalmazó egyenleteké.

A nem összetett függvényegyenletek regularitás-elméletének legjelentősebb eredményeit Járai Antal [27] monográfiája tartalmazza. Ebben, továbbá a [26, 28] dolgozatokban számos, igen általános eredmény található, melyekre azonban az értekezésben nem támaszkodunk, ugyanis nem tűnik kivitelezhetőnek ezeknek az (1.1) egyenletre való közvetlen alkalmazása.

A 4. Fejezetben belátjuk, hogy ha a kváziösszeg (mint vektorváltozós függvény) p-szer folytonosan differenciálható Fréchet értelemben, akkor generátorfüggvényei is p-szer folytonosan differenciálhatók. Ezt a tulajdonságot fogjuk a későbbiekben *regularitás-megőrzés*ként emlegetni. Kitérünk a generátorfüggvények szigorú monotonitására és folytonosságára vonatkozó feltételek szükségességére, valamint egy alkalmazást is bemutatunk, mely a korábban hivatkozott Craigen–Páles-tétel [12] kibővítése a generátorok differenciálhatóságára vonatkozó állítással. A fejezet eredményei a [48] dolgozatban is megtalálhatóak.

Hasznossági függvények

Az 5. Fejezetben a korábbi szakaszok eredményeit a hasznossági függvények elméletében alkalmazzuk. A hasznossági függvények az egyéni fogyasztói magatartás jellemzésének egyik fő matematikai eszközei. A szakirodalomban a legtöbb esetben hasznossági függvény alatt egy $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt értenek, mely rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$f(x) \leq f(y) \Longleftrightarrow x \preceq y \qquad (x, y \in X),$$

ahol X a fogyasztó számára elérhető alternatívák halmaza, $\preceq$ pedig egy ún. *preferencia-reláció* X-en (azaz tranzitív és dichotóm). Ugyanakkor megjegyezzük, hogy többek között Wold [53] illetve Debreu [14] klasszikus eredménye, hogy nem lehetséges minden preferencia-relációt ilyen módon hasznossági függvénnyel reprezentálni. Emiatt a reprezentálhatóság kérdésköre máig aktívan kutatott terület, aminek kapcsán az olvasó figyelmébe ajánljuk a [10, 18, 20, 25, 37] dolgozatokat.

A disszertációban a preferenciákat és hasznossági függvényeket $\mathbb{R}^n$ részhalmazain értelmezzük. A vektorok ekkor természetes módon megfeleltethetőek fogyasztói kosaraknak (avagy *jószágkosarak*nak): a koordináták az egyes termékekből vásárolt mennyiségnek felelnek meg. Talán a legelterjedtebb hasznossági függvények a Cobb–Douglas típusú függvények (ld. [11]), valamint a CES típusú függvények (ld. [6]). Utóbbiak összetettebb struktúrájuk révén alternatívát kínálnak a Cobb–Douglas függvények helyett, amikor azok nem használhatók jól a modellezésre (ld. [35, 50]).

Meglepő módon a szakirodalomban nem találunk egyértelmű választ a következő egyszerű kérdésre: ha adott egy fogyasztó preferencia-relációja, akkor hogyan döntsük el, hogy Cobb–Douglas vagy CES típusú hasznossági függvénnyel célszerűbb azt reprezentálni? Emiatt a disszertációban a két függvénycsaládot a háttérben lévő preferencia-relációkon keresztül jellemezzük ahelyett, hogy konkrétan a definiáló formulákból kiindulva vizsgálódnánk. Utóbbi megközelítésre példa Wang és Fu [52] dolgozata, míg a preferenciák tulajdonságaival (a Cobb–Douglas függvények esetén) többek között Trockel [49] és Faro [19] foglalkozik.

Az értekezés 5. Fejezetében szereplő jellemzési tételekhez a (G-1)$-$(G-n) függvényegyenlet-rendszerben szereplő $F_1, \ldots, F_n$ műveleteket választjuk meg oly módon, hogy a folytonos megoldások halmaza éppen valamelyik hasznossági függvény osztály legyen. Ezután a karakterizáló egyenletrendszereket értelmezve olyan kvalitatív jellemzését adhatjuk meg ezen osztályoknak, melyekben a függvény pontos alakja nem számít, csupán a generált preferencia-reláció releváns. Az értekezésben ezt a Cobb–Douglas és a CES típusú függvények mellett hasznossági függvényeknek egy olyan családjára is kidolgozzuk, melyet Mádi-Nagy és Prékopa javasolt a [31] cikkben. Emellett a kétváltozós esetben kiemelt figyelmet fordítunk a preferenciák *közömbösségi görbéi*re is: meghatározzuk azokat a síkbeli transzformációkat, melyek közömbösségi görbét közömbösségi görbébe visznek át.

Mindezeken túl az 5.2. szakaszban a kváziösszegek regularitása kapcsán bizonyított eredmények egy alkalmazását mutatjuk be *szeparábilis hasznossági függvények*re (ld. [15, 23, 48]). Belátjuk, hogy ha egy folytonosan differenciálható hasznossági függvény felírható kváziösszeg-alakban, akkor ekvivalens egy szeparábilis hasznossági függvénnyel, melynek parciális hasznossági függvényei p-szer folytonosan differenciálhatók.

2. fejezet

Eltolásinvariáns függvények

Ebben a fejezetben bevezetjük az eltolásinvariáns illetve lokálisan eltolásinvariáns függvények fogalmát, majd rátérünk ezen függvényosztályok vizsgálatára folytonosság mellett.

2.1. Jelölések, szükséges előismeretek

A következőkben összefoglalunk néhány alapvető fogalmat, jelölést és összefüggést a konvex geometria illetve metrikus terek nevezetes részhalmazainak témakörében. $\mathbb{R}^n$ jelöli az n dimenziós euklideszi teret a standard belsőszorzattal. Amennyiben mást nem állítunk, mindig feltételezzük, hogy a dimenzió $n \geq 2$. A számegyenes nyílt intervallumaira az alábbi jelölést használjuk:

$$]\, a, b\, [= \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; a < x < b \,\} .$$

Ez nem kifejezetten standard jelölés, használhatnánk kerek zárójeleket is. Viszont ez utóbbit azért mellőzzük, mert igyekszünk elkerülni, hogy ugyanúgy jelöljük $\mathbb{R}$ nyílt intervallumait illetve a rendezett párokat. Értelemszerűen a csak egyik oldalról nyílt intervallumokat például

$$]\, a, b\,] = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; a < x \leq b \,\}$$

módon jelöljük. Továbbá $\mathbb{R}_+ := \,]\, 0, +\infty\, [$ a pozitív valós számok halmaza.

Az *affin/konvex halmazok*, *affin/konvex kombináció* valamint *affin/konvex burok* fogalmát a szokásos értelemben használjuk. Speciális affin/konvex halmazok, mint például *egyenesek*, *szakaszok* illetve *hipersíkok* szintén a jól ismert és megszokott értelemben szerepelnek. Ezek a fogalmak megjelennek például Lay [30] monográfiájában, de az áttekintés céljából szintén ajánljuk Vincze Csaba [51] tankönyvét.

2.1. *Jelölés.* Az $x, y \in \mathbb{R}^n$ pontokon átmenő egyenest $\ell(x, y)$ módon jelöljük, míg az x és y pontokat összekötő szakaszt $\mathrm{s}(x, y)$ jelöli. Azaz

$$\begin{aligned} \ell(x, y) &= \{\, (1-\lambda)x + \lambda y \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\} \\ \mathrm{s}(x, y) &= \{\, (1-\lambda)x + \lambda y \ : \ \lambda \in \ [0\,, 1]\,\}. \end{aligned}$$

Legyen emellett

$$\operatorname{int} \mathrm{s}(x, y) = \{\, (1-\lambda)x + \lambda y \ : \ \lambda \in]0\,, 1[\,\}$$

a *szakasz belseje.* Továbbá, bármely rögzített $x \in \mathbb{R}^n$ és $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén az x-en átmenő, a normálvektorú hipersíkot $H(x, a)$ módon jelöljük, azaz

$$H(x, a) = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle y - x, a\rangle = 0\}.$$

Megjegyezzük, hogy ha $x = y$, akkor a fenti fogalmakban az egyenes, szakasz valamint szakasz belseje egyetlen pontból áll: $\ell(x, x) = \mathrm{s}(x, x) = \operatorname{int} \mathrm{s}(x, x) = \{x\}$.

2.2. *Megjegyzés.* Ha adott véges sok pont, $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$, akkor ezek affin/konvex burkát rendre $\operatorname{aff}(x_1, \ldots, x_k)$ illetve $\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k)$ módon jelöljük. Jól ismert tény, hogy az $S \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz affin/konvex burka éppen az S-beli pontokból képzett összes affin/konvex kombináció halmaza (ld. [30, Theorem 2.22]). Következésképpen véges sok pont affin/konvex burka az alábbi módon is felírható:

$$\begin{aligned} \operatorname{aff}(x_1, \ldots, x_k) &= \Big\{\, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \ : \ \lambda_j \in \mathbb{R}, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \,\Big\}, \\ \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k) &= \Big\{\, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \ : \ \lambda_j \in [0, 1], \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \,\Big\}. \end{aligned}$$

Szintén közismert, hogy $\mathbb{R}^n$ affin részhalmazai éppen a lineáris sokaságok, vagyis $\mathbb{R}^n$ lineáris altereinek eltoltjai. Nevezetesen, ha $A \subseteq \mathbb{R}^n$ affin, akkor egyértelműen létezik egy $L \subseteq \mathbb{R}^n$ lineáris altér, amelyre $A = p+L$ teljesül tetszőleges $p \in A$ esetén (ld. [30, Theorem 2.13]). Ennek fényében $\mathbb{R}^n$ lineáris sokaságaira használni fogjuk az *affin altér* megnevezést is, ahogyan ez a téma szakirodalmában jellemző.

Egy A *affin altér dimenziója* alatt annak az (egyértelmű) lineáris altérnek a dimenzióját értjük, melynek eltolásával az A halmaz előáll. Speciálisan, az $\mathbb{R}^n$ vektortér $n-1$ dimenziós affin alterei éppen a hipersíkok. Tekintettel arra, hogy egy $S \subseteq \mathbb{R}^n$ részhalmaz affin burka garantáltan egy affin altér, így erre az affin burokra az *S által generált affin altér*ként is hivatkozunk.

Végezetül felidézzük az affin függetlenség fogalmát, valamint felsorolunk ezzel ekvivalens feltételeket, melyek számos érvelésben fel fognak bukkanni a későbbiekben.

2.3. Definíció. Legyen $k \in \mathbb{N}$, és legyenek adottak az $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok. Azt mondjuk, hogy ezek *affin függetlenek*, amennyiben tetszőleges olyan $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ skalárokra, melyekre a

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 0$$

összefüggések egyidejűleg fennállnak, szükségképpen $\lambda_j = 0$ teljesül minden $j = 1, \dots, k$ index esetén.

2.4. Állítás. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ és legyenek $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ adott vektorok. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:*

i) *$x_1, \dots, x_k$ affin függetlenek;*

ii) *minden $i \in \{1, \dots, k\}$ esetén az*

$$\{x_j - x_i \;:\; j = 1, \dots, k \text{ és } j \neq i\}$$

vektorrendszer lineárisan független;

iii) *az* $x_1, \ldots, x_k$ *vektorok által generált affin altér dimenziója* $k-1$.

Az iménti állítás megtalálható a [30], monográfiában, különböző feladatok (például [30, Exercise 2.27]) és megjegyzések formájában. Nyilvánvaló, hogy az állításban a $k \leq n+1$ feltétel is szerepelhetne, hiszen $\mathbb{R}^n$-ben legfeljebb $n+1$ darab affin független vektor van. Megfogalmazunk egy következményt is, melyet a későbbiekben fontos eszközként fogunk használni bizonyításainkban.

2.5. Lemma. *Legyen* $k \in \mathbb{N}$*, tegyük fel, hogy az* $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ *pontok affin függetlenek, valamint legyen adott egy*

$$y \notin \operatorname{aff}(x_1, \ldots, x_k)$$

pont. Továbbá tekintsünk tetszőleges $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *skalárokat, és definiáljuk az*

$$y_j := y + \lambda_j(x_j - y) \qquad (j = 1, \ldots, k)$$

pontrendszert. Ekkor $y, y_1, \ldots, y_k$ *affin függetlenek.*

Bizonyítás. Mivel $x_1, \ldots, x_k$ affin függetlenek és $y \notin \operatorname{aff}(x_1, \ldots, x_k)$, így következik, hogy az $x_1, \ldots, x_k$ pontrendszer y-nal kiegészítve szintén affin független. Következésképpen

$$x_1 - y, \ldots, x_k - y$$

lineárisan független pontrendszer. Ennek vektorait nem nulla skalárokkal szorozva továbbra is megőrződik a rendszer lineáris függetlensége. Ez azt jelenti, hogy

$$y_j - y = \lambda_j(x_j - y) \qquad (j = 1, \ldots, k)$$

lineárisan függetlenek, azaz $y, y_1, \ldots, y_k$ affin független pontrendszer. □

A folytatásban összefoglalunk néhány fontos topológiai fogalmat és eredményt. A következő állításokban metrikus terekre szorítkozunk ahelyett, hogy a lehető legáltalánosabb formájukban említenénk az eredményeket. A *nyílt halmaz, zárt halmaz* illetve *kompakt halmaz* és *összefüggő* halmaz fogalmát a szokásos értelemben használjuk, ahogyan például Rudin [43] vagy Sutherland [44] népszerű monográfiájában is bevezetésre kerülnek.

Az x középpontú, $r > 0$ sugarú nyílt gömböt $B(x, r)$ jelöli, azaz

$$B(x, r) = \{ y \in \mathbb{R}^n \ : \ \|y - x\| < r \}.$$

Gyakran kihasználjuk majd azt a tényt, hogy összefüggő halmaz folytonos függvény általi képe összefüggő, valamint kompakt halmaz folytonos függvény általi képe kompakt. Utóbbi állítás jól ismert következménye, hogy ha X metrikus tér, $\emptyset \neq K \subseteq X$ kompakt halmaz, valamint $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f felveszi szélsőértékeit a K halmazon. Ezen összefüggéseket bizonyítás nélkül alkalmazzuk, azok megtalálhatóak szinte bármely, topológiát tárgyaló tankönyvben vagy monográfiában, például [44, Proposition 13.15, 12.13 és Corollary 13.18].

Végezetül felsorolunk két állítást, melyek kulcsfontosságúak a fejezet fő eredményeinek igazolása során. Az eredmények ismerősek lehetnek klasszikus komplex függvénytani tételek bizonyításából.

2.6. Állítás. *Legyen (X, d) metrikus tér, továbbá legyen $K \subseteq X$ kompakt halmaz, valamint $\emptyset \neq C \subseteq X$ zárt halmaz úgy, hogy $K \cap C = \emptyset$ teljesüljön. Ekkor létezik $r > 0$ sugár úgy, hogy bármely $x \in K$ esetén fennáll, hogy $B(x, r) \subseteq X \setminus C$.*

Az állítás tehát arról szól, hogy egymástól diszjunkt kompakt illetve zárt halmaz távolsága pozitív.

2.7. Állítás. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő halmaz, valamint legyenek adottak az $x, y \in D$ pontok. Ekkor létezik véges töröttvonal, mely a D halmazban halad és összeköti az x és y pontokat.*

2.8. *Megjegyzés.* Egy D-ben haladó, x-et és y-t összekötő véges töröttvonal alatt véges sok ($m \in \mathbb{N}$ darab) olyan

$$\mathrm{s}(z_{k-1}, z_k) \subset D \qquad\qquad (k = 1, \ldots, m)$$

szakasz egyesítését értjük, melyekre $z_0, z_1, \ldots z_m \in D$ oly módon, hogy $z_0 = x$ és $z_m = y$ teljesül.

Megjegyezzük továbbá, hogy a 2.7 Állításhoz hasonló, annál valamivel gyengébb tétel ([44, Proposition 12.25]) szerepel Sutherland monográfiájában. Nevezetesen, hogy $\mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő tartományai ívszerűen összefüggőek, vagyis bármely két pont között létezik őket összekötő egyszerű, zárt görbe, mely teljes egészében a tartományban halad. A szerző azonban megemlíti, hogy az ott szereplő bizonyítás érdemi módosítás nélkül átvihető arra az esetre is, amikor az összekötő görbéről megköveteljük, hogy véges töröttvonal legyen.

2.2. Eltolásinvariáns függvények affin halmazokon

A fejezet hátralévő részében bevezetjük a (lokális) eltolásinvariancia fogalmát, majd karakterizáljuk a folytonos, (lokálisan) eltolásinvariáns függvényeket. Az eredmények megtalálhatóak a [46] és [45] dolgozatokban.

2.9. Definíció. Legyen $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz. Azt mondjuk, hogy az $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény *eltolásinvariáns*, ha az $F(x) = F(y)$ egyenlőségből $F(x+t) = F(y+t)$ következik, bármely olyan $x, y, t \in \mathbb{R}^n$ vektorokra, melyekre $x, y, x+t, y+t \in S$ teljesül.

Számos esetben hasznos, ha egy ennél gyengébb feltételt szabunk a definícióban. Ezért bevezetjük a lokálisan eltolásinvariáns függvények fogalmát is.

2.10. Definíció. Legyen $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Tegyük fel, hogy bármely $x, y \in S$ pontpárra és bármely olyan $0 < r \in \mathbb{R}$ sugárra, mellyel igazak a $B(x,r) \subset S$ és $B(y,r) \subset S$ tartalmazások, a következő feltétel teljesül: ha $F(x) = F(y)$, akkor $F(x+t) = F(y+t)$ is fennáll minden $t \in B(0,r)$ esetén.

Ekkor az F függvényt *lokálisan eltolásinvariáns*nak nevezzük.

Felidézünk egy standard jelölést az alsó- és felső egészrészekre, melyek több későbbi bizonyításban is előkerülnek majd.

2.11. *Jelölés.* Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. Ekkor

$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \leq x\}$ az x alsó egészrésze, továbbá

$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \ : \ x \leq k\}$ az x felső egészrésze.

A következő egyszerű észrevétel megmutatja, hogy nyílt, konvex tartományon értelmezett függvények esetén az eltolásinvariancia illetve a lokális eltolásinvariancia egymással ekvivalens fogalmak.

2.12. Állítás. *Legyen $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, konvex halmaz, továbbá $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$ lokálisan eltolásinvariáns függvény. Ekkor F eltolásinvariáns.*

Bizonyítás. Legyenek $x, y \in K$ és $0 \neq t \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges vektorok úgy, hogy $x+t, y+t \in K$ illetve $F(x) = F(y)$ teljesüljön. Ekkor K konvexitása garantálja, hogy $\mathrm{s}(x, x+t) \subset K$ és $\mathrm{s}(y, y+t) \subset K$. Ezek a szakaszok kompakt halmazok, míg $\mathbb{R}^n \setminus K$ zárt halmaz. Ezért, a 2.6 Állítás értelmében létezik $r > 0$ szám oly módon, hogy

$$T_x := \bigcup_{z \in s(x,x+t)} B(z,r) \subset K \qquad \text{és} \qquad T_y := \bigcup_{z \in s(y,y+t)} B(z,r) \subset K$$

egyaránt fennáll. Vezessük be most az N pozitív egész számot, valamint a $h \in \mathbb{R}^n$ vektort az alábbiak szerint:

$$N := \left\lceil \frac{2\|t\|}{r} \right\rceil \qquad \text{és} \qquad h := \frac{1}{N}\, t.$$

A konstrukcióból adódik, hogy

$$\|h\| = \left\| \frac{1}{N} t \right\| = \frac{1}{N} \|t\| \leq \frac{1}{\frac{2\|t\|}{r}} \|t\| = \frac{r}{2} < r.$$

Ekkor a lokális eltolásinvariancia miatt $F(x+h) = F(y+h)$. Sőt, az r pozitív szám megválasztása miatt, a lokális eltolásinvarianciát véges sokszor használva megismételhetjük a h vektorral való eltolást N alkalommal, mindig a megfelelő $x + kh$, $y + kh$ pontpárt véve alapul (ahol $k = 1, \ldots, N-1$). Következésképpen az

$$F(x+t) = F(x+Nh) = F(y+Nh) = F(y+t)$$

összefüggést kapjuk. Ezáltal éppen F eltolásinvarianciáját láttuk be. $\square$

A soron következő lemma kulcsfontosságú lesz a későbbiekben. Az állítás kimondja, hogy ha F folytonos, eltolásinvariáns, akkor F konstans bármely két, azonos függvényértékű pontot összekötő szakaszon, feltéve, hogy a szakasz teljes egészében az értelmezési tartományba esik.

2.13. Lemma. *Legyen $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig egy folytonos, eltolásinvariáns függvény. Továbbá legyenek adottak az $x, y \in S$ pontok úgy, hogy $F(x) = F(y) = \alpha$ teljesüljön valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ számra. Tegyük fel továbbá, hogy $\mathrm{s}(x, y) \subseteq S$. Ekkor $F(p) = \alpha$ minden $p \in \mathrm{s}(x, y)$ pontra.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $x \neq y$, különben a lemma állítása triviális. A legelső lépésben megmutatjuk, hogy bármely $0 < r \in \mathbb{R}$ számhoz található olyan $u, v \in \mathrm{s}(x, y)$ pontpár, melyre $F(u) = F(v)$, $u \in \mathrm{s}(x, v)$, valamint $0 < \|v - u\| < r$. Vezessünk be két jelölést, legyen

$$T := s(x, y) \qquad \text{és} \qquad e := \frac{y - x}{\|y - x\|}.$$

Mivel a T szakasz kompakt, így a folytonos F függvény felveszi szélsőértékeit a T halmazon. Továbbá, mivel $F(x) = F(y)$, létezik $m \in \operatorname{int} \mathrm{s}(x, y)$ úgy, hogy

$$F(m) = \max\{F(z) \ : \ z \in T\} \quad \text{vagy} \quad F(m) = \min\{F(z) \ : \ z \in T\}$$

teljesül. Csupán az első esetet vizsgáljuk, a másik eshetőség analóg módon tárgyalható. Válasszunk tehát $\varepsilon \in \,]0, r[$ pozitív számot úgy, hogy

$$S_- := \mathrm{s}\left(m - \frac{\varepsilon}{2}e, m\right) \subseteq T \quad \text{és} \quad S_+ := \mathrm{s}\left(m, m + \frac{\varepsilon}{2}e\right) \subseteq T$$

teljesüljön. Ekkor $I_- := F(S_-)$ és $I_+ := F(S_+)$ zárt részintervallumai a valós számok halmazának, mivel az F folytonos függvény általi képei kompakt, összefüggő $\mathbb{R}^n$-beli szakaszoknak. Vegyük észre, hogy ha $I_- = \{F(m)\}$, akkor $u = m - \frac{\varepsilon}{2}e$ és $v = m$ megfelelő megválasztása a kívánt tulajdonságú pontpárnak. Hasonlóképpen, ha $I_+ = \{F(m)\}$ akkor pedig élhetünk az $u = m$ és $v = m + \frac{\varepsilon}{2}e$ választással. Végezetül, amennyiben

$I_- = [a_-, F(m)]$ és $I_+ = [a_+, F(m)]$ teljesül valamilyen $a_- < F(m)$ és $a_+ < F(m)$ valós számokra, akkor léteznek $u \in S_-$ és $v \in S_+$ pontok, amelyekre igaz, hogy

$$F(u) = \max\{a_-, a_+\} = F(v).$$

Nyilvánvalóan $0 < \|u - v\| \le \varepsilon < r$ illetve $u \in \mathrm{s}(x, v)$, tehát ebben az esetben is találtunk egy kívánt tulajdonságú pontpárt.

A bizonyítás második részében megmutatjuk, hogy megadhatjuk a T szakasz egy felosztását véges sok olyan rész-szakaszra, melyek mindegyikének hossza legfeljebb r, valamint ezen rész-szakaszok végpontjaiban az F függvény α értéket vesz fel.

Ezzel kapcsolatban első észrevételünk, hogy ha kihasználjuk az eltolásinvarianciát az imént kapott u és v alkotta pontpárra az $x - u$ eltolóvektorral, akkor az

$$F(x + v - u) = F(v + x - u) = F(u + x - u) = F(x) = \alpha \tag{2.1}$$

összefüggéshez jutunk. Legyen most $N := \left\lfloor \dfrac{\|y - x\|}{\|v - u\|} \right\rfloor$ és vezessük be az alábbi pontrendszert:

$$z_k := x + k(v - u) \qquad (k = 0, 1, \ldots, N) \qquad \text{illetve} \qquad z_{N+1} := y.$$

Mivel $\|v - u\| < r$, így nyilvánvaló, hogy $\|z_{k-1} - z_k\| < r$ teljesül minden $k = 1, \ldots, N$ esetén. Továbbá, N definíciója alapján könnyen látható, hogy $\|z_N - y\| < r$ szintén fennáll. Másfelől a (2.1) egyenlőségből már láttuk, hogy $F(z_0) = F(z_1) = \alpha$. Az eltolásinvariancia miatt minden $k \in \{1, \ldots, N - 1\}$ esetén $F(z_{k-1}) = F(z_k) = \alpha$ maga után vonja, hogy

$$F(z_{k+1}) = F(z_k + v - u) = F(z_{k-1} + v - u) = F(z_k) = \alpha.$$

Következésképpen indukcióval adódik, hogy minden $k = 0, 1, \ldots, N + 1$ index esetén $F(z_k) = \alpha$ teljesül. Azaz, a $z_0, z_1, \ldots, z_{N+1}$ osztópontokkal éppen a T szakasz egy kívánt felosztását kapjuk. Vegyük észre, hogy tetszőleges $p \in T$ pont benne van valamely rész-szakaszban, vagyis létezik $j \in \{0, 1, \ldots, N\}$ index, amire $\|z_j - p\| < r$ teljesül. Valóban ha $j = \left\lfloor \dfrac{\|p - x\|}{\|v - u\|} \right\rfloor$, akkor elemi számolással látható, hogy $p \in \mathrm{s}\,(z_j, z_{j+1})$.

A bizonyítás utolsó lépéséhez rögzítsünk egy tetszőleges $p \in T$ pontot. Hajtsuk végre az eddigi konstrukciót az $r = \frac{1}{n}$ választással minden $n \in \mathbb{N}$ esetére. Ezáltal kapunk egy $(x_n) : \mathbb{N} \longrightarrow T$ pontsorozatot, melynek minden elemére $F(x_n) = \alpha$ és $\|x_n - p\| < \frac{1}{n}$ teljesül. Ekkor persze $x_n \to p$, tehát az F folytonosságát kihasználva azt kapjuk, hogy

$$F(p) = F(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \alpha = \alpha.$$

Mivel p tetszőleges pontja volt az $\mathrm{s}(x, y)$ szakasznak, ezennel a lemma állítását igazoltuk. □

Az iménti lemmát az alábbi következményben általánosítjuk.

2.14. Következmény. *Legyen $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ egy halmaz, $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig egy folytonos, eltolásinvariáns függvény. Legyenek továbbá $x, y \in S$ olyan pontok, melyekre fennáll az $\mathrm{s}(x, y) \subseteq S$ tartalmazás. Ezen feltételek mellett, ha léteznek egymástól különböző $u, v \in \mathrm{s}(x, y)$ pontok, melyekre $F(u) = F(v) = \alpha$ teljesül valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ számmal, akkor minden $p \in \mathrm{s}(x, y)$ esetén $F(p) = \alpha$.*

Bizonyítás. Mivel $u \neq v$, így a p pont felírható u és v affin kombinációjaként egy alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárral:

$$p = (1 - \lambda)u + \lambda v.$$

Az általánosság sérelme nélkül feltehetjük, hogy $\lambda \geq 0$ (szükség esetén felcserélve u és v szerepét). Legyen most

$$k := \lfloor \lambda \rfloor \quad \text{és} \quad \mu := \lambda - k.$$

Nyilvánvalóan ekkor $\mu \in [0, 1[$. A következő lépésben definiáljuk az $\mathrm{s}(x, y)$ szakasz néhány kitüntetett pontját:

$$z_j := u + j(v - u) \qquad (j = 0, 1, \ldots, k) \quad \text{és} \quad w := (1 - \mu)u + \mu v.$$

Ez a konstrukció garantálja, hogy az imént bevezetett pontok valóban az $\mathrm{s}(x, y)$ szakaszon találhatók. Valójában az is könnyen látható, hogy a pontok az $\mathrm{s}(u, p)$ szakasz elemei, speciálisan $p = w + k(v - u)$ is fennáll.

Az állításban szereplő feltételek értelmében $F(z_0) = F(z_1) = \alpha$, így indukcióval belátjuk, hogy $F(z_j) = \alpha$ teljesül minden $j = 0, 1, \ldots, k$ esetén. Valóban, F eltolásinvarianciája azt jelenti, hogy amennyiben $F(z_{j-1}) = F(z_j) = \alpha$, úgy

$$F(z_{j+1}) = F(z_j + (v - u)) = F(z_{j-1} + (v - u)) = F(z_j) = \alpha$$

is teljesül minden $j = 1, \ldots, k - 1$ indexre. Mindemellett $w \in \mathrm{s}(u, v)$, tehát a 2.13 Lemmát használva $F(w) = \alpha$ adódik. Így az eltolásinvarianciát még egyszer használva

$$F(p) = F(w + k(v - u)) = F(u + k(v - u)) = F(z_k) = \alpha,$$

adódik, amit bizonyítanunk kellett. □

2.15. *Megjegyzés.* Amennyiben az F függvény értelmezési tartománya konvex, akkor az előbbi két állítás az alábbi módon foglalható össze.

Legyen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, eltolásinvariáns függvény. Tegyük fel, hogy $x, y \in K$ olyan pontok, melyekhez létezik $u, v \in \mathrm{s}(x, y)$ úgy hogy $u \neq v$ valamint $F(u) = F(v) = \alpha$ valamilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ számra. Ekkor $F(p) = \alpha$ teljesül minden $p \in \mathrm{s}(x, y)$ pontban.

A szakaszt egy olyan tétellel zárjuk, mely tovább általánosítja az előző eredményeinket. Az előbb megfogalmazott állításokban ugyanis olyan szakaszokat illetve egyeneseket tekintünk, melyeken létezik két különböző pont, amelyekben a függvényértékek megegyeznek. Ezen ötletet továbbgondolva, két pont helyett immáron véges sok, azonos függvényértékű pontot, illetve azok affin burkát tekintjük. Ezúttal ráadásul lokális eltolásinvarianciát feltételezünk, mely sokkal kézenfekvőbb lesz a későbbi alkalmazások szempontjából.

2.16. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nyílt, konvex halmaz, valamint $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvény. Továbbá* *legyen adott $k \in \mathbb{N}$ illetve egy k elemű pontrendszer: $x_1, x_2, \ldots, x_k \in K$. Amennyiben valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ számra*

$$F(x_1) = F(x_2) = \cdots = F(x_k) = \alpha,$$

akkor $F(p) = \alpha$ teljesül minden $p \in \operatorname{aff}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \cap K$ pontban.

Bizonyítás. Feltételeztük, hogy K nyílt, konvex halmaz, így a 2.12 Állítás következtében az F függvény eltolásinvariáns.

A $k = 1$ elemű „pontrendszer” esetén nincs mit bizonyítanunk, ezért a továbbiakban feltételezzük, hogy $k \geq 2$. Vegyük észre, hogy $K_0 := \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k) \subseteq K$, hiszen K konvex. Elsőként megmutatjuk, hogy F konstans α értéket vesz fel a konvex burok egészén. Ezt k szerinti teljes indukcióval végezzük. Ha $k = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy $k \geq 2$ és az F függvény α értékkel konstans a $C := \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_{k-1})$ halmazon. Világos, hogy $K_0 = \operatorname{conv}(C, \{x_k\})$, így a csepp-tétel miatt

$$K_0 = \operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k) = \bigcup_{c \in C} \mathrm{s}(c, x_k).$$

De $F(x_k) = \alpha$, így az indukciós feltevés illetve a 2.13 Lemma szerint F konstans α értékkel az $\mathrm{s}(c, x_k)$ szakaszokon minden $c \in C$ esetén. Emiatt F valóban α értékkel konstans a $\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k)$ konvex burkon.

Végezetül tekintsünk tetszőleges $q \in \operatorname{aff}(x_1, \ldots, x_k) \cap K$ pontot. Ha $q \in K_0$, akkor $F(q) = \alpha$. Ha viszont $q \notin K_0$, akkor létezik $\lambda \in \mathbb{R}$, amellyel előáll

$$q = (1 - \lambda)c + \lambda y$$

affin kombináció alakban, ahol a c pont a K_0 relatív belső pontja (például K_0 súlypontja jó választás), y pedig a K_0 relatív határpontja (az $\operatorname{aff}(x_1, \ldots, x_k)$ altér topológiájában). Alkalmazzuk a 2.14 Következményt az $\mathrm{s}(c, q)$ szakaszra illetve annak α függvényértékű c és y pontjaira. Eszerint $F(q) = \alpha$ is teljesül. Mivel $q \in (\operatorname{aff}(x_1, \ldots, x_k) \cap K) \setminus K_0$ tetszőleges volt, ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

2.3. Eltolásinvariáns függvények dekompozíciója

Az előző fejezetben megmutattuk, hogy ha egy nyílt, konvex halmazon értelmezett folytonos, (lokálisan) eltolásinvariáns F függvény ugyanazt a függvényértéket veszi fel az értelmezési tartományának néhány pontjában, akkor F konstans az ezen pontok által generált affin altérnek az értelmezési tartományba eső részén. Ennek az affin altérnek a dimenziója kulcsfontosságú lesz majd a későbbiekben. Az ezzel kapcsolatos eredmények igazolása előtt azonban egy egzisztenciatételt bizonyítunk többváltozós, valós értékű, folytonos függvényekre. Kiemeljük, hogy a soron következő állításban nem használunk semmilyen eltolásinvariancia-tulajdonságot.

2.17. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig egy folytonos függvény. Ekkor léteznek $x_1, \dots, x_n \in D$ pontok oly módon, hogy $x_1, \dots, x_n$ affin független pontrendszer, valamint*

$$F(x_1) = \cdots = F(x_n).$$

Bizonyítás. Az állítást az értelmezési tartomány dimenziója szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az egydimenziós eset triviális, ezért a továbbiakban tegyük fel, hogy $n+1 \geq 2$ és a tétel teljesül $\mathbb{R}^n$-ben.

Ennek megfelelően rögzítsünk egy tetszőleges $p = (p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pontot és $\varepsilon > 0$ sugarat úgy, hogy $B(p, \varepsilon) \subseteq D$ teljesüljön. Vezessük be továbbá az alábbi jelöléseket:

$$B := B(p, \varepsilon) \quad \text{és} \quad \widetilde{B} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ (x_1, \dots, x_n, p_{n+1}) \in B\}.$$

Mindenezek mellett definiáljunk egy $\widetilde{F} : \widetilde{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt is az alábbi módon:

$$\widetilde{F}(x_1, \dots, x_n) := F(x_1, \dots, x_n, p_{n+1}).$$

Egyszerűen ellenőrizhetjük, hogy valójában

$$\widetilde{B} = B(\tilde{p}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{ahol} \quad \tilde{p} = (p_1, \dots, p_n),$$

is fennáll. Eközben F folytonossága garantálja, hogy $\widetilde{F}$ szintén folytonos függvény. Következésképp használhatjuk az indukciós feltevést a $\widetilde{B}$ körlapon, az $\widetilde{F} : \widetilde{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényre. Egész pontosan, eszerint léteznek affin független $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n \in \widetilde{B} \subset \mathbb{R}^n$ pontok, melyekre

$$\widetilde{F}\,(\tilde{y}_1) = \cdots = \widetilde{F}\,(\tilde{y}_n)\,.$$

Jelölje $\widetilde{A}$ az $\mathbb{R}^n$-beli ($n-1$ dimenziós) hipersíkot, mely éppen ezeket a pontokon halad át. Vezessük be az

$$y_j := (\tilde{y}_j, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \qquad\qquad (j = 1, \ldots, n)$$

pontokat, valamint az

$$U := \{(x, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x \in \widetilde{B}\} \ \text{ és } \ A := \{(x, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x \in \widetilde{A}\}$$

halmazokat. Nyilvánvaló, hogy az $y_1\,, \ldots, y_n \in U$ pontok affin függetlenek $\mathbb{R}^{n+1}$-ben, illetve hogy az általuk generált affin altér éppen A. Továbbá az $\widetilde{F}$ függvény definíciójából

$$F(y_1) = \cdots = F(y_n)$$

következik. Jelölje ezt a közös függvényértéket $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ha most létezik $z \in B \setminus A$ vektor, amire $F(z) = \alpha$, akkor kész a bizonyítás. Valóban, a 2.5 Lemma állítása szerint a $z\,, y_1\,, \ldots, y_n$ pontrendszer affin független, és természetesen $n+1$ olyan pontot tartalmaz, melyekben F értéke azonos.

Emiatt a következő lépésben tekinthetjük azt az esetet, amikor nincs α függvényértékű pont a $B \setminus A$ halmazban. Ekkor feltehetjük, hogy létezik $z \in U \setminus A$ úgy. hogy $F(z) > \alpha$ teljesüljön. (Gondoljuk meg, hogy ellenkező esetben, vagyis ha minden $U \setminus A$ halmazbeli pontban az F függvény értéke α-nál kisebb volna, akkor folytathatnánk a bizonyítást a $-F$ függvénnyel, míg α szerepébe $-\alpha$ lépne.)

A bizonyítás hátralévő részéhez rögzítsünk tehát egy $z \in U \setminus A$-beli pontot, amire $F(z) > \alpha$. Ha most létezik $w \in B \setminus U$ oly módon, hogy $F(w) < \alpha$ teljesül, akkor a következő gondolatmenet szerint érvelhetünk. Mivel B konvex, fennáll a $\mathrm{s}(w, z) \subset B$ tartalmazás. Továbbá, mivel a $\mathrm{s}(w, z)$ szakasz összefüggő, F pedig folytonos, így az $F\,(\mathrm{s}(w, z))$ halmaz

$\mathbb{R}$ egy intervalluma. Emiatt szükségképpen létezik $v \in \operatorname{int} \mathrm{s}(w,z)$, melyre $F(v) = \alpha$.

Ekkor viszont $z \in U$ és $w \notin U$ maga után vonja, hogy $v \notin U$. Erről könnyű meggyőződni, hiszen $v \in U$ azt jelentetné, hogy $w \in \operatorname{aff} U$, amely viszont – figyelembe véve, hogy $\operatorname{aff} U \cap B = U \cap B$ – ellentmond a $w \in B \setminus U$ feltevésnek. Emiatt a v vektorra egyrészt annak választása miatt, $F(v) = \alpha$ teljesül, másrészt az imént látottak miatt $v \notin U$ is igaz. Ez utóbbi miatt nyilván $v \notin A$ is fennáll, ami viszont ellentmondás. Idézzük fel ugyanis, hogy a bizonyítás korábbi pontján már arra az esetre szorítkozunk, amikor a $B \setminus A$ halmazban nincsen α függvényértékű pont.

Azt kaptuk tehát, hogy ha létezik $w \in B \setminus U$ melyre $F(w) < \alpha$, akkor az az iménti ellentmondásra vezet. Az egyetlen eshetőség így az marad, ha $F(w) > \alpha$ teljesül minden $w \in B \setminus U$ pontra. F folytonosságát az előzőekhez hasonló módon felhasználva adódik, hogy ekkor létezik $v \in B \setminus U$ pont, melyre igazak az $\alpha < F(v) < F(z)$ egyenlőtlenségek. Szintén egyszerű folytonossági érveléssel adódik az alábbi tulajdonságú pontok létezése:

$$x_j \in \operatorname{int} \mathrm{s}(z, y_j) \quad \text{amelyekre} \quad F(x_j) = F(v) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy minden $j = 1, \ldots, n$ index esetén léteznek $\lambda_j \in]0,1[$ valós számok úgy, hogy

$$x_j = z + \lambda_j (y_j - z).$$

A bizonyítás utolsó lépésében ismét a 2.5 Lemmát használjuk. Egyrészt az $x_1, \ldots, x_n$ pontrendszer affin független, ugyanis z az A halmaz komplementerében (így $\operatorname{aff} A$ komplementerében) szerepelt. Hasonló okból kifolyólag (nevezetesen, $v \in B \setminus U$ miatt) a $v, x_1, \ldots, x_n$ pontrendszer is affin független. A konstrukcióból következik azonban, hogy ezen $n+1$ pont mindegyikében az F függvény értéke $F(v)$-vel egyezik meg. Ezzel a tétel állítását igazoltuk. □

Ezt a tételt a 2.2. szakasz eredményeivel kombinálva igazolhatjuk a folytonos lokálisan eltolásinvariáns függvények alábbi fontos tulajdonságát.

2.18. *Jelölés.* Legyen $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ tetszőleges halmaz, $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig egy konstans függvény. Azaz tegyük fel, hogy létezik $\alpha \in \mathbb{R}$, amelyre $F(x) = \alpha$ teljesül minden $x \in S$ esetén. Ekkor ezt a tulajdonságot röviden $F \equiv \alpha$ módon írjuk le.

2.19. Következmény. *Legyenek $p \in \mathbb{R}^n$ és $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek, valamint legyen $F : B(p, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvény. Ekkor létezik $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ vektor, amellyel teljesül, hogy*

$$F|_{H(p,a) \cap B(p,\varepsilon)} \quad \textit{konstans.}$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy mivel a $B(p, \varepsilon)$ nyílt gömb konvex halmaz, így az F függvény valójában eltolásinvariáns. Az előző 2.17 Tétel értelmében létezik

$$x_1, \ldots, x_n \in B\left(p, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

affin független pontrendszer, amire $F(x_1) = \cdots = F(x_n)$ teljesül. Jelölje H az $\operatorname{aff}(x_1, \ldots, x_n)$ hipersíkot, továbbá legyen az a vektor a H hipersík egy normálvektora. Most a 2.16 Tétel állítása szerint

$$F|_{H \cap B(p,\varepsilon)} \equiv F(x_1).$$

Ha most $p \in H$, akkor $H = H(p, a)$ és így kész a bizonyítás: az F függvény $F(p) = F(x_1)$ értékkel konstans a $H(p, a) \cap B(p, \varepsilon)$ halmazon. Ellenkező esetben, amikor $p \notin H$, akkor tekintsük a következő pontokat:

$$y_j := x_j + (p - x_1) \qquad\qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Először is vegyük észre, hogy

$$\|y_j - p\| = \|x_j + p - x_1 - p\| \leq \|x_j - p\| + \|x_1 - p\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

vagyis $y_j \in B(p, \varepsilon)$. Másrészről $y_1 = p$ világos. Következésképpen, az eltolásinvarianciát felhasználva, a $j = 1, \ldots, n$ indexek mindegyikére $F(y_j) = F(p)$ teljesül. Szintén nyilvánvaló, hogy $y_1, \ldots, y_n$ is affin független rendszer, miközben ennek a pontrendszernek az affin burka éppen $H + (p - x_1) =$

$H(p,a)$. Emiatt még egyszer alkalmazhatjuk a 2.16 Tételt, és így azt kapjuk, hogy

$$F|_{H(p,a)\,\cap\, B(p,\varepsilon)} \equiv F(p),$$

mely összefüggést bizonyítanunk kellett. □

Az iménti tétel azt garantálja, hogy ha adott egy folytonos, lokálisan eltolásinvariáns F függvény, mely $\mathbb{R}^n$ valamilyen részhalmazán van értelmezve, akkor az értelmezési tartomány bármely p belső pontja körül van olyan $n-1$ dimenziós nyílt körlap, melyen F konstans. Azonnal megjegyezzük, hogy ezek a „nyílt körlapok" persze nem valódi nyílt halmazok $\mathbb{R}^n$ standard normatopológiájában. Ténylegesen ugyanis $\mathbb{R}^n$ -beli valódi nyílt gömbök és $n-1$ dimenziós hipersíkok metszetéről beszélünk. Az egyszerűség és szemléletesség kedvéért viszont továbbra is használni fogjuk az $n-1$ dimenziós nyílt körlap megnevezést, amennyiben ez nem kelt zavart.

A következőkben azt szeretnénk belátni, hogy bizonyos körülmények között ennél a lokális tulajdonságnál többet is garantálhatunk. Nevezetesen, hogy folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvények globálisan is konstansak párhuzamos hipersíkok mentén, feltéve, hogy az értelmezési tartomány összefüggő, nyílt halmaz. A bizonyításhoz azonban szükségünk lesz a lenti, technikai jellegű lemmára.

2.20. Lemma. *Legyen n egy pozitív egész szám, és tekintsük az*

$$\emptyset \neq I_1 = [a_1, b_1] \subseteq \mathbb{R}\,,\ \ldots\ ,\emptyset \neq I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$$

kompakt intervallumokat úgy, hogy bármely két szomszédos indexű I_i és I_{i+1} intervallum rendelkezzen közös végponttal, vagyis

$$\{a_i\,, b_i\} \cap \{a_{i+1}\,, b_{i+1}\} \neq \emptyset \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

teljesüljön. Tegyük fel még, hogy I_1 és I_n szintén rendelkezik közös végponttal, azaz $\{a_1\,, b_1\} \cap \{a_n\,, b_n\} \neq \emptyset$.

Legyen továbbá X tetszőleges halmaz, valamint minden $k = 1, \ldots, n$ index esetén tekintsünk olyan $f_k : I_k \longrightarrow X$ függvényeket, melyekre bármely

$i = 1, \ldots, n-1$ esetén az f_i és f_{i+1} függvények értéke megegyezik az I_i és I_{i+1} intervallumok legalább egy közös végpontjában, vagyis

$$\exists v \in \{a_i\,,\, b_i\} \cap \{a_{i+1}\,,\, b_{i+1}\} \,:\, f_i(v) = f_{i+1}(v) \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Végül tegyük még fel, hogy bármely két különböző $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ indexre a következő igaz: ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ és $f_i(x) = f_j(x)$ teljesül valamely $x \in I_i \cap I_j$ elemre, akkor

$$f_i|_{I_i \cap I_j} = f_j|_{I_i \cap I_j}\,.$$

Mindezen feltételek mellett azt állítjuk, hogy ha w közös végpontja I_1-nek és I_n-nek, akkor $f_1(w) = f_n(w)$.

Még a bizonyítás előtt megjegyezzük, hogy a lemmában nem zártuk ki, hogy az intervallumok között szerepeljenek egyelemű halmazok is. Ez a tény fontos szerepet kap majd későbbi érvelésekben.

Bizonyítás. Elsőként egy segédállítást igazolunk.

Segédállítás. Bármely két különböző i és j indexre fennáll, hogy ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset$, akkor létezik $p \in I_i \cap I_j$, melyre $f_i(p) = f_j(p)$.

A segédállítás bizonyítása. Két tetszőleges $i \neq j$ index esetén vezessük be az $m = |i - j|$ jelölést. A bizonyítást m szerinti teljes indukcióval végezzük.

Az $m = 1$ eset közvetlenül a lemma feltételeiből adódik: I_i és I_{i+1} garantáltan rendelkezik olyan közös végponttal, melyben a megfelelő függvényértékek azonosak ($i = 1, \ldots, n-1$).

Legyen tehát $m \geq 2$, és tegyük fel, hogy a segédállítás az összes, m-nél kisebb pozitív egész számra teljesül. Tekintsünk tetszőleges olyan I_i és I_j intervallumokat, melyekre egyrészt $j = i + m$, másrészt $M := I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Meg fogjuk mutatni, hogy létezik olyan k index, amire fennáll, hogy $i < k < j$ illetve $M \cap I_k \neq \emptyset$.

Négy esetet különböztetünk meg, az I_i és I_j intervallumok végpontjainak rendezettségi viszonyától függően. Előrebocsátjuk, hogy ez a négy eset nem teljesen diszjunkt egymástól, viszont együttesen minden eshetőséget lefednek.

1. $a_i \le a_j \le b_j \le b_i$. Ebben az esetben $M = [a_j, b_j]$, így $I_{j-1} \cap M \neq \emptyset$ adódik a lemma feltételeiből, hiszen I_{j-1}-nek legalább az egyik végpontját tartalmazza I_j, így tartalmazza azt M is.

2. $a_j \le a_i \le b_i \le b_j$. Ekkor $M = [a_i, b_i]$ és így az előbbivel analóg indoklás útján kapjuk, hogy $I_{i+1} \cap M \neq \emptyset$.

3. $a_i < a_j \le b_i < b_j$. Ez esetben $M = [a_j, b_i]$. Ha b_i közös végpontja I_{i+1}-nek és I_i-nek, akkor $k = i+1$ megfelelő választás. Hasonlóképpen, ha a_j közös végpontja I_{j-1}-nek és I_j-nek, akkor $k = j-1$ megfelelő választás. Amennyiben ezek egyike sem teljesül, az azt jelenti, hogy $a_i \in I_{i+1}$ és $b_j \in I_{j-1}$ biztosan igaz. Nyilvánvalóan ez azt is maga után vonja, hogy
$$a_i, b_j \in \bigcup_{l=i+1}^{j-1} I_l .$$
Vegyük észre, hogy ha két nemüres, zárt intervallumnak van közös pontja, akkor egyesítésük szintén egy zárt intervallum lesz. Világos, hogy ennek következtében az $\bigcup_{l=i+1}^{j-1} I_l$ halmaz is egy zárt intervallum. Emiatt viszont $a_j \in \bigcup_{l=i+1}^{j-1} I_l$ is fennáll, hiszen ebben az esetben $a_i < a_j < b_j$ van feltéve. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy létezik a keresett $i < k < j$ index, amire $I_k \cap M \neq \emptyset$. Sőt, bármely olyan $i < k < j$ index megfelel, amire $a_j \in I_k$, hiszen $a_j \in M$ is igaz.

4. $a_j < a_i \le b_j < b_i$. Ez azt jelenti, hogy $M = [a_i, b_j]$. Az előző esetben látottal analóg érvelést használhatunk itt is. Ha a_i közös végpontja I_{i+1}-nek és I_i-nek, akkor $k = i+1$ jó választás. Hasonlóképpen, ha b_j közös végpontja I_{j-1}-nek és I_j-nek, akkor $k = j-1$ jó választás. Máskülönben biztosan $a_j \in I_{j-1}$ és $b_i \in I_{i+1}$ teljesül, aminek következtében
$$a_j, b_i \in \bigcup_{l=i+1}^{j-1} I_l ,$$
ahol a zárt intervallumok egyesítése szintén egy zárt intervallum. Emiatt $a_i \in \bigcup_{l=i+1}^{j-1} I_l$ tehát létezik $i < k < j$ amire $a_i \in I_k$. Erre az

indexre $a_i \in M$ miatt $I_k \cap M \neq \emptyset$ is fennáll.

Ezáltal minden lehetőséget megvizsgáltunk és arra jutottunk, hogy valóban létezik a keresett tulajdonságú I_k intervallum. Legyen most $p \in I_k \cap M$. Alkalmazzuk az indukciós feltételt, először az I_i és I_k intervallumokra, majd az I_k és I_j intervallumokra. Eszerint léteznek $x \in I_i \cap I_k$ illetve $y \in I_k \cap I_j$ számok, amelyekre $f_i(x) = f_k(x)$ illetve $f_k(y) = f_j(y)$ teljesül. Így alkalmazhatjuk a lemma feltételeit, miszerint

$$f_i|_{I_i \cap I_k} = f_k|_{I_i \cap I_k} \qquad \text{illetve} \qquad f_k|_{I_k \cap I_j} = f_j|_{I_k \cap I_j}\,,$$

speciálisan $f_i(p) = f_k(p) = f_j(p)$. ⊠.

Ezáltal beláttuk a bizonyítás legelején megfogalmazott segédállítást. A lemma állítása ennek közvetlen következménye. Hiszen, mivel feltettük, hogy $I_1 \cap I_n \neq \emptyset$, a segédállítás miatt létezik olyan $p \in I_1 \cap I_n$ pont, amire $f_1(p) = f_n(p)$. A lemma feltételei szerint az f_1 és f_n függvények $I_1 \cap I_n$ metszetre vett megszorításai megegyeznek,

$$f_1|_{I_1 \cap I_n} = f_n|_{I_1 \cap I_n}\,,$$

speciálisan $f_1(w) = f_n(w)$ is teljesül I_1 és I_n bármely közös végpontjára. □

A bizonyításból látszik, hogy az iménti lemmában kimondott állításnál egy erősebb tulajdonságot igazoltunk. A későbbiekben viszont specifikusan a lemmában jelenleg megfogalmazott állítást fogjuk alkalmazni (vagyis a végpontokban vett függvényértékek egyenlőségét), emiatt nem törekedtünk arra, hogy a lemma a lehető legerősebb formájában szerepeljen az értekezésben.

A továbbiakban bármely $a \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén $p_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fogja jelölni az a-val való belsőszorzást (mint lineáris funkcionált):

$$p_a(x) = \langle x\,,\, a\rangle \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

A soron következő állítás a disszertáció technikailag legnehezebben igazolható eredménye, mely kimondja, hogy egy folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvény párhuzamos hipersíkok mentén globálisan konstans. A fő nehézséget az okozza, hogy konvexitás helyett csupán összefüggőséget teszünk fel az értelmezési tartományról.

2.21. Állítás. *Legyen* $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ *nyílt, összefüggő halmaz,* $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *pedig folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvény. Ekkor létezik* $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ *vektor, melyre* $p_a(x) = p_a(y)$ *esetén* $F(x) = F(y)$ *teljesül, bármely* $x, y \in D$ *pontokra.*

Bizonyítás. Először is, legyen $x, y \in D$ két tetszőleges, egymástól különböző pont. Mivel D nyílt, összefüggő halmaz, így létezik az x-et és y-t összekötő, D-ben haladó véges töröttvonal (a 2.7 Állítás értelmében). Azaz léteznek $z_0, z_1, \ldots, z_m \in D$ pontok, melyekre

$$z_0 = x,\ z_m = y \ \text{ és } \ S_k := \mathrm{s}(z_{k-1}, z_k) \subset D \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Az $S = S_1 \cup \cdots \cup S_m$ töröttvonal kompakt, míg az $\mathbb{R}^n \setminus D$ halmaz zárt. Következésképpen, a 2.6 Állításból kapjuk, hogy létezik $r > 0$ szám, melyre

$$T := \bigcup_{s \in S} B(s, r) \subset D$$

teljesül. Vegyük észre, hogy a

$$T_k := \bigcup_{s \in S_k} B(s, r) \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

nyílt halmazok konvexek, ezért az F-nek ezekre vett $F|_{T_k}$ megszorításai a 2.12 Állítás szerint eltolásinvariánsak. Ezután a 2.19 Következményt használva adódik, hogy létezik olyan $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre igaz, hogy F konstans az $n-1$ dimenziós $H(z_0, a) \cap B(z_0, r)$ körlapon.

Meg fogjuk mutatni, hogy ez egy olyan a vektor, amellyel az állítás teljesül. Elsőként az eltolásinvariancia a T_1 halmazon azt vonja maga után, hogy minden $s \in S_1$ esetén az F függvény konstans az imént bevezetett körlap $H(s, a) \cap B(s, r)$ eltoltján. Speciálisan,

$$F|_{H(z_1, a) \cap B(z_1, r)} \ \text{konstans.}$$

Analóg érveléssel a $T_2, T_3, \ldots T_m$ halmazokon, azt kapjuk, hogy

$$F|_{H(z_m, a) \cap B(z_m, r)} \text{ konstans.}$$

vagyis $F|_{H(y,a) \cap B(y,r)}$ konstans. Mivel x rögzítése után $y \in D$ tetszőlegesen választható, így azt kaptuk, hogy minden $z \in D$ ponthoz létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $F|_{H(z,a) \cap B(z,\varepsilon)}$ konstans. Megjegyezzük, hogy itt az a vektor csak x-től függ, az ε sugár viszont függ a z pont választásától.

Ebből a 2.16 Tétel azonnali következménye, hogy minden olyan $z \in D$ pont és $r > 0$ sugár esetén, amire $B(z, r) \subseteq D$ teljesül, igaz, hogy

$$F|_{H(z,a) \cap B(z,r)} \text{ konstans.}$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy $p_a(x) = p_a(y)$, és tekintsük az S töröttvonal valamint ennek T nyílt környezetének a bizonyítás korábbi részében ismertetett konstrukcióját. Minden $k = 1, \ldots, m$ esetén az $I_k := p_a(S_k) \subset \mathbb{R}$ halmaz a kompakt, összefüggő S_k szakasz képe a folytonos p_a függvény által. Következésképpen I_k maga is kompakt, összefüggő, vagyis egy korlátos, zárt intervallum.

A belsőszorzat bilinearitásából

$$\begin{aligned} p_a((1-\lambda)z_{k-1} + \lambda z_k) &= (1-\lambda)p_a(z_{k-1}) + \lambda p_a(z_k) \\ &= p_a(z_{k-1}) + \lambda\left(p_a(z_k) - p_a(z_{k-1})\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

adódik bármilyen $\lambda \in [0, 1]$ konstans mellett. Ezért ha $p_a(z_{k-1}) < p_a(z_k)$ áll fenn valamely $k \in \{1, \ldots, m\}$ indexre, akkor világos, hogy

$$p_a(z_{k-1}) \leq p_a(z) \leq p_a(z_k) \text{ teljesül minden } z \in S_k \text{ pontban.}$$

Hasonló okokból, ha $p_a(z_{k-1}) > p_a(z_k)$ áll fenn egy $k \in \{1, \ldots, m\}$ indexre, akkor

$$p_a(z_k) \leq p_a(z) \leq p_a(z_{k-1}) \text{ teljesül minden } z \in S_k \text{ pontban.}$$

Ha pedig $p_a(z_{k-1}) = p_a(z_k)$, akkor nyilván

$$p_a(z_k) = p_a(z) = p_a(z_{k-1}) \text{ teljesül minden } z \in S_k \text{ pontban.}$$

Ezt a három esetet úgy foglalhatjuk össze, hogy minden $k = 1, \ldots, m$ index esetén igaz, hogy

$$I_k = [\ \min\{p_a(z_{k-1}), p_a(z_k)\}\ ,\ \max\{p_a(z_{k-1}), p_a(z_k)\}\ ]\,. \tag{2.3}$$

A bizonyítást ezen I_k intervallumok három típusának további vizsgálatával folytatjuk.

1. Ha $p_a(z_{k-1}) < p_a(z_k)$ akkor $I_k = [\,p_a\,(z_{k-1})\,, p_a\,(z_k)\,]$. Ezekre az intervallumokra a (2.2) egyenletből azonnal adódik, hogy a $p_a|_{S_k} : S_k \longrightarrow I_k$ függvény bijektív. Következésképpen az

   $$f_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_k(c) := F(p_a^{-1}(c))$$

   függvény definíciója értelmes. Jegyezzük meg, hogy az I_k intervallum végpontjaiban az alábbi egyenletek teljesülnek:

   $$f_k\big(p_a\,(z_{k-1})\big) = F\,(z_{k-1}) \quad \text{és} \quad f_k\big(p_a\,(z_k)\big) = F\,(z_k)\ .$$

2. Ha $p_a\,(z_{k-1}) > p_a\,(z_k)$ akkor $I_k = [p_a\,(z_k)\,, p_a\,(z_{k-1})]$. Az előző esettel analóg módon $p_a|_{S_k} : S_k \longrightarrow I_k$ bijekció, tehát ugyanazzal a képlettel definiálhatjuk az

   $$f_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_k(c) := F(p_a^{-1}(c))\,.$$

   függvényt. Speciálisan, I_k végpontjaiban fennáll, hogy

   $$f_k\big(p_a\,(z_k)\big) = F\,(z_k) \quad \text{és} \quad f_k\big(p_a\,(z_{k-1})\big) = F\,(z_{k-1})\,.$$

3. Ha $p_a(z_{k-1}) = p_a(z_k)$, akkor

   $$I_k = [\,p_a(z_{k-1}), p_a(z_{k-1})\,] = [\,p_a(z_k), p_a(z_k)\,] = \{p_a(z_{k-1})\}.$$

   Ezek az egyelemű intervallumok csak abban az esetben léphetnek fel, amikor az S_k szakaszt teljes egészében tartalmazza egy a normálvektorú hipersík. Ilyenkor viszont alkalmazható a 2.16 Tétel a

$T_k = \bigcup_{s\in S_k} B(s,r)$ konvex halmazra: mivel F konstans az $n-1$ dimenziós $H(z_k\,,a) \cap B(z_k\,,r)$ halmazon $F(z_k)$ értékkel, így a 2.16 Tétel szerint $F|_{S_k} \equiv F(z_k)$. Tehát ebben a speciális esetben is érvényben maradhat f_k korábban látott megadási módja,

$$f_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_k\left(p_a(z_k)\right) := F(z_k).$$

Összegzésül tehát azt mondhatjuk, hogy minden $k = 1,\ldots,m$ index esetén a fent definiált I_k intervallum (nem feltétlenül különböző) végpontjai éppen az S_k szakasz végpontjaiban felvett értékei a p_a lineáris funkcionálnak, a megfelelő sorrendben. Továbbá, az f_k függvény értéke I_k bármelyik végpontjában ugyanaz, mint F értéke az S_k szakasz ennek megfelelő végpontjában.

A bizonyítás soron következő részében azt fogjuk megmutatni, hogy az I_k intervallumok és f_k függvények teljesítik a 2.20 Lemma feltételeit.

Először is, a (2.3) összefüggés értelmében az I_i és I_{i+1} intervallumok rendelkeznek közös végponttal, nevezetesen $p_a(z_i)$ egy ilyen végpont (minden $i = 1,\ldots,m-1$ esetén). Továbbá, mivel $z_0 = x$ és $z_m = y$, az is fennáll, hogy $p_a(z_0) = p_a(z_m)$, vagyis hogy I_1 és I_m rendelkezik közös végponttal. Az is világos, hogy szomszédos indexű intervallumok egy alkalmas közös végpontjában a megfelelő függvényértékek megegyeznek, hiszen a fenti konstrukcióból

$$f_i\left(p_a(z_i)\right) = F(z_i) = f_{i+1}\left(p_a(z_i)\right) \qquad (i = 1,\ldots,m-1)$$

adódik. A 2.20 Lemma utolsó feltételének ellenőrzéséhez tekintsük bármely két különböző intervallumot. Azaz legyen

$$I_i = p_a\big(\,\mathrm{s}(z_{i-1}\,,z_i)\,\big) \;\; \text{és} \;\; I_j = p_a\big(\,\mathrm{s}(z_{j-1}\,,z_j)\,\big),$$

ahol $i,j \in \{1,\ldots,m\}$ úgy, hogy $i \neq j$ valamint $f_i(c) = f_j(c)$ teljesül valamilyen $c \in I_i \cap I_j$ valós számra.

Igazolnunk kell, hogy $f_i|_{I_i\cap I_j} = f_j|_{I_i\cap I_j}$. Ha akár I_i, akár I_j egyelemű halmaz, akkor ez automatikusan igaz. Az egyetlen nemtriviális eset, amikor mindkét intervallum valódi (legalább 2 elemű), és metszetük szintén valódi.

Legyen $d \in I_i \cap I_j$, amelyre $d \neq c$. Ekkor (egyértelműen) léteznek

$$v,\, \tilde{v} \in S_i \qquad \text{és} \qquad w,\, \tilde{w} \in S_j$$

pontok, amelyekre $v \neq \tilde{v}$ és $w \neq \tilde{w}$, illetve $p_a(v) = p_a(w) = c$ és $p_a(\tilde{v}) = p_a(\tilde{w}) = d$. Emellett vezessük még be az alábbi két egységvektort:

$$b_1 = \frac{1}{\|\tilde{v} - v\|}(\tilde{v} - v) \qquad \text{és} \qquad b_2 = \frac{1}{\|\tilde{w} - w\|}(\tilde{w} - w).$$

Egyszerűen látható, hogy $\langle b_1\,, a\rangle \neq 0$ illetve $\langle b_2\,, a\rangle \neq 0$. Máskülönben S_i vagy S_j részhalmaza lenne egy a normálvektorú hipersíknak, következésképpen a megfelelő szakasz p_a általi képe egy egyelemű halmazzá zsugorodna, amit viszont ebben az esetben már kizártunk. Tekintsük az alábbi számolásokat:

$$\begin{aligned}
\langle b_1, a\rangle &= \frac{1}{\|\tilde{v} - v\|}\langle \tilde{v} - v, a\rangle = \frac{\langle \tilde{v}, a\rangle - \langle v, a\rangle}{\|\tilde{v} - v\|} = \frac{d - c}{\|\tilde{v} - v\|} \quad \text{és} \\
\langle b_2, a\rangle &= \frac{1}{\|\tilde{w} - w\|}\langle \tilde{w} - w, a\rangle = \frac{\langle \tilde{w}, a\rangle - \langle w, a\rangle}{\|\tilde{w} - w\|} = \frac{d - c}{\|\tilde{w} - w\|}\,.
\end{aligned}$$

Ebből az adódik, hogy $\langle b_1\,, a\rangle$ és $\langle b_2\,, a\rangle$ előjele azonos. Az általánosság sérelme nélkül feltehető, hogy $|\langle b_1\,, a\rangle| \leq |\langle b_2\,, a\rangle|$ (ha szükséges, definiáljuk a két egységvektort fordított sorrendben, vagyis a b_1 vektort konstruáljuk az S_j-beli pontokkal, b_2-t pedig az S_i-beli pontokkal. Ezáltal bevezethetjük a

$$\lambda := \frac{\langle b_1\,, a\rangle}{\langle b_2\,, a\rangle} \in \,]0, 1]$$

mennyiséget. Vegyük észre, hogy ez minden $s \in S$ vektorra azt eredményezi, hogy

$$s + \frac{r}{2}b_1 \in B\,(s, r) \subset T \qquad \text{és} \qquad s + \lambda\frac{r}{2}b_2 \in B\,(s, r) \subset T.$$

Továbbá az is teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
\left\langle w + \lambda\frac{r}{2}b_2 - \left(w + \frac{r}{2}b_1\right)\,,\, a\right\rangle &= \frac{r}{2}\,\langle \lambda b_2 - b_1\,, a\rangle \\
&= \frac{r}{2}\left(\frac{\langle b_1, a\rangle}{\langle b_2, a\rangle}\langle b_2, a\rangle - \langle b_1, a\rangle\right) = 0,
\end{aligned}$$

mely éppen azt jelenti, hogy $w + \lambda\frac{r}{2}b_2 \in H\left(w + \frac{r}{2}b_1\,, a\right)$. F lokális eltolás-invarianciáját alkalmazva kapjuk, hogy

$$F\left(v + \frac{r}{2}b_1\right) = F\left(w + \frac{r}{2}b_1\right).$$

Tartsuk észben, hogy a bizonyítás korábbi részében már megállapítottuk, hogy F konstans az $n-1$ dimenziós $B\left(w + \frac{r}{2}b_1\,, r\right) \cap H\left(w + \frac{r}{2}b_1\,, a\right)$ körlapon. Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}\left\|w + \lambda\frac{r}{2}b_2 - \left(w + \frac{r}{2}b_1\right)\right\| &= \frac{r}{2}\|b_1 - \lambda b_2\| \\ &\leq \frac{r}{2}\left(\|b_1\| + \|\lambda b_2\|\right) = \frac{r}{2}(1+\lambda) \leq r.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy itt az első egyenlőtlenség szigorú, hiszen egyenlőség csak akkor állhatna fenn, ha $b_1 = \gamma(-\lambda b_2)$ teljesülne valamilyen $\gamma \geq 0$ skalárral. Viszont ez azt eredményezné, hogy

$$0 < \lambda = \frac{\langle b_1, a\rangle}{\langle b_2, a\rangle} = \frac{\langle \gamma(-\lambda b_2), a\rangle}{\langle b_2, a\rangle} = \gamma(-\lambda) \leq 0,$$

ami ellentmondás. Tehát valójában $w + \lambda\frac{r}{2}b_2 \in B\left(w + \frac{r}{2}b_1\,, r\right)$ is fennáll, ami a korábban levezetett $w + \lambda\frac{r}{2}b_2 \in H\left(w + \frac{r}{2}b_1\,, a\right)$ összefüggéssel együtt implikálja, hogy

$$w + \lambda\frac{r}{2}b_2 \in B\left(w + \frac{r}{2}b_1\,, r\right) \cap H\left(w + \frac{r}{2}b_1\,, a\right),$$

következésképpen

$$F\left(w + \lambda\frac{r}{2}b_2\right) = F\left(w + \frac{r}{2}b_1\right) = F\left(v + \frac{r}{2}b_1\right).$$

Nyilvánvalóan a most tárgyalt eljárás nem csak $\frac{r}{2}$ esetén működik, hanem bármilyen $0 < \varrho \leq \frac{r}{2}$ valós számra megkapjuk, hogy

$$F(w + \lambda\varrho b_2) = F(w + \varrho b_1) = F(v + \varrho b_1).$$

Az előbbiekkel analóg, elemi számolások útján meggyőződhetünk róla, hogy $F(w + \lambda\varrho b_2) = F(v + \varrho b_1)$ mellett $p_a(w + \lambda\varrho b_2) = p_a(v + \varrho b_1)$ is teljesül minden $\varrho \in \left]0, \frac{r}{2}\right]$ számra.

Vezessük most be az

$$N := \left\lfloor \frac{2\|\tilde{v} - v\|}{r} \right\rfloor$$

jelölést. Az előbb tárgyalt eltolást hajtsuk végre N alkalommal, mindig az $\frac{r}{2}$ választással, minden egyes lépésben a legutoljára kapott $v + \frac{lr}{2}b_1$ és $w + \lambda\frac{lr}{2}b_1$ vektorok alkotta pontpárra (itt $l = 0, 1, \ldots, N-1$). Ezáltal

$$F\left(v + \frac{Nr}{2}b_1\right) = F\left(w + \lambda\frac{Nr}{2}b_2\right)$$

adódik. Ha szükséges, akkor hajtsunk végre még egy utolsó lépést, de ezúttal $\frac{r}{2}$ helyett valamilyen megfelelő $0 < \delta < \frac{r}{2}$ skalárt használva azért, hogy ennek az eltolásnak eredményeként $F(\tilde{v}) = F(\tilde{w})$ adódjon.

Végezetül használjuk ki, hogy I_i és I_j valódi (nem egy pontból álló) intervallumok. Eszerint az f_i és f_j függvények a p_a lineáris funkcionál $p_a|_{S_i}$ illetve $p_a|_{S_j}$ bijektív megszorításai által kerültek definiálásra. Tehát az általunk tekintett $d \in I_i \cap I_j$ számra

$$f_i(d) = F\left(\left(p_a|_{S_i}\right)^{-1}(d)\right) = F(\tilde{v}) = F(\tilde{w}) = F\left(\left(p_a|_{S_j}\right)^{-1}(d)\right) = f_j(d)$$

teljesül. Mivel d tetszőleges elem volt az $I_i \cap I_j$ intervallumból, így $f_i(d) = f_j(d)$ azt jelenti, hogy a 2.20 Lemma összes feltételéről ellenőriztük, hogy azok teljesülnek. A Lemma állítását ekkor az I_1 és I_m intervallumok közös $p_a(z_0) = p_a(z_m)$ végpontjára alkalmazva kapjuk, hogy $f_1(p_a(z_0)) = f_m(p_a(z_m))$. Idézzük fel, hogy $z_0 = x$ és $z_m = y$, tehát ez éppen az

$$F(x) = f_1(p_a(x)) = f_1(p_a(z_0)) = f_m(p_a(z_m)) = f_m(p_a(y)) = F(y)$$

összefüggéssel ekvivalens. Mivel x és y tetszőleges olyan pontok voltak, melyekre $p_a(x) = p_a(y)$ teljesül, így állításunkat igazoltuk. □

A bizonyításból számos részlet kiderül folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvények viselkedéséről. Ezek közül egyet érdemesnek tartunk külön is kiemelni.

2.22. Következmény. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő halmaz, valamint $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvény. Ha létezik $x \in D$ és $\varepsilon > 0$ úgy, hogy $B(x,\varepsilon) \subseteq D$ és $F|_{B(x,\varepsilon)}$ konstans, akkor F konstans a teljes D halmazon.*

Bizonyítás. Legyen $y \in D \setminus \{x\}$ tetszőleges pont, és válasszunk egy $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$ vektort úgy, hogy $\langle b, y-x \rangle = 0$ teljesüljön. Így persze fennáll a $p_b(x) = p_b(y)$ egyenlőség is.

A 2.21 Állítás bizonyításában láttuk, hogy bármely $x \in D$, $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ és $r > 0$ esetén, amennyiben $B(x,r) \subseteq D$ és F konstans az $n-1$ dimenziós

$$H(x,a) \cap B(x,r)$$

körlapon, akkor F globálisan konstans az a normálvektorú hipersíkok mentén. Most a feltétel szerint $F|_{B(x,\varepsilon)}$ konstans, tehát speciálisan a b vektort tekintve azt kapjuk, hogy $p_b(x) = p_b(y)$-ból $F(x) = F(y)$ következik. Mivel y tetszőleges $D \setminus \{x\}$-beli pont volt, így az adódik, hogy F konstans a teljes értelmezési tartományán. □

Mielőtt rátérünk a fejezet fő eredményére, felidézünk egy közismert tényt valós függvényekről.

2.23. Tétel. *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig injektív, folytonos függvény. Ekkor f szigorúan monoton.*

Az állítás szerepel a [42] monográfiában, folytonos valós függvények további alapvető tulajdonságai mellett (ld. [42, Theorem 8.1]). A bizonyítás fő eszköze a folytonos valós függvények közbeesőérték-tulajdonsága.

2.24. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő halmaz, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvény. Ekkor létezik $a =$*

$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor és egy szigorúan monoton, folytonos $f : p_a(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, amivel

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)$$

teljesül minden $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ esetén.

Bizonyítás. A 2.21 Állítás értelmében létezik $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ vektor, amelyre minden $x, y \in D$ esetén a $p_a(x) = p_a(y)$ egyenlőségből $F(x) = F(y)$ adódik. A $p_a(D) \subseteq \mathbb{R}$ halmaz összefüggő, hiszen p_a folytonos és D összefüggő. Vagyis $p_a(D)$ egy nemüres intervallum. Nyilván ez az intervallum valódi. Máskülönben, ha $p_a(D)$ egyelemű, az azt jelentené, hogy D részhalmaza egy $n-1$ dimenziós hipersíknak, ami viszont ellentmond D nyíltságának.

Minden $c \in p_a(D)$ esetén tekintsünk egy $x_c \in D$ elemet, amire $p_a(x_c) = c$. Definiáljuk az $f : p_a(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt az alábbi módon:

$$f(c) := F(x_c) \qquad \big(c \in p_a(D)\big).$$

Vegyük észre, hogy az a vektor imént említett tulajdonsága biztosítja, hogy f jóldefiniált, vagyis független az x_c reprezentáns választásától. Valóban, ha egy másik $\tilde{x_c}$ vektort használnánk az f definíciójában x_c helyett, akkor $p_a(\tilde{x_c}) = p_a(x_c)$ miatt $F(\tilde{x_c}) = F(x_c) = f(c)$, tehát f változatlan.

Megmutatjuk, hogy f folytonos is. Ebből a célból rögzítsünk egy tetszőleges $c_0 \in p_a(D)$ számot és válasszunk $y_0 \in D$ vektort úgy, hogy $p_a(y_0) = c_0$ teljesüljön. Mivel D nyílt, így létezik $r_0 > 0$ úgy, hogy $B(y_0, r_0) \subset D$ legyen. Következésképpen, ha $r < \frac{r_0}{\|a\|}$, akkor $y_0 + \lambda a \in D$ teljesül minden $\lambda \in [-r, r]$ esetén. Ez azt jelenti, hogy az

$$S := \mathrm{s}(y_0 - ra, y_0 + ra)$$

szakaszra $S \subset D$ teljesül, így c_0 belső pontja $p_a(S)$ intervallumnak. Továbbá, mivel S kompakt, összefüggő halmaz, így $p_a(S)$ egy zárt intervallum. Sőt, az intervallum valódi, hiszen S párhuzamos az a normálvektorral, vagyis nem tartalmazhatja egy a normálvektorú hipersík. Ezen felül könnyen látható, hogy $p_a|_S : S \longrightarrow p_a(S)$ bijekció. Emiatt

$$f(c) = F\left(p_a^{-1}(c)\right)$$

teljesül minden $c \in p_a(S)$ számra. Nyilván $p_a|_S$ egy lineáris függvény megszorítása, így folytonos. Értelmezési tartománya a kompakt S szakasz, így $p_a|_S$ inverze szintén folytonos. Mivel f két folytonos függvény összetétele, így maga is folytonos a $p_a(S)$ zárt intervallumon. Mint megállapítottuk, c_0 belső pontja $p_a(S)$-nek, tehát f folytonos a c_0 egy nyílt környezetében. Viszont $c_0 \in p_a(D)$ tetszőleges volt, vagyis azt kaptuk, hogy f folytonos a teljes $p_a(D)$ értelmezési tartományon.

A következő lépésben azt igazoljuk, hogy ha f nem injektív, akkor F konstans. Ha tehát létezik $s, t \in p_a(D)$ úgy, hogy $s < t$ és $f(s) = f(t)$, akkor ez azt jelenti, hogy léteznek $x_s, x_t \in D$ vektorok, melyekre

$$p_a(x_s) \neq p_a(x_t) \quad \text{viszont} \quad F(x_s) = F(x_t).$$

Ha most $f|_{[s,t]}$ konstans, akkor persze F is konstans egy nyílt gömbön, ami a 2.22 Következmény szerint azt implikálja, hogy F konstans ez egész D halmazon. Ekkor $a = 0$ választással adódik a tétel állítása. Ha nem ez a helyzet, akkor f valamelyik szélsőértékét az $[s, t]$ intervallum belsejében veszi fel. Elegendő azzal foglalkozni, amikor ez a szélsőérték a maximum (a minimum esete analóg módon kezelhető).

Tegyük fel tehát, hogy létezik $u \in \,]s, t[$ úgy, hogy

$$f(u) = \max\{f(c) \ : \ c \in [s, t]\}.$$

Legyen $x_u \in D$ olyan vektor, amire $p_a(x_u) = u$. Ekkor létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy

$$B := B(x_u, \varepsilon \cdot \|a\|) \subset D$$

teljesüljön. Ekkor $T := \mathrm{s}(x_u - \varepsilon a, x_u + \varepsilon a) \subset B$. Továbbá u lokális maximuma f-nek, így a folytonos $f|_{p_a(T)}$ függvény Darboux-tulajdonsága miatt léteznek $x_1, x_2 \in T$ pontok és $c \in p_a(D)$ szám, amelyekre fennáll, hogy $p_a(x_1) < u < p_a(x_2)$ valamint

$$F(x_1) = f(p_a(x_1)) = c = f(p_a(x_2)) = F(x_2).$$

Ebből az következik, hogy

$$F|_{H(x_1, a) \cap B} \equiv c \equiv F|_{H(x_2, a) \cap B}.$$

Vagyis F ugyanazt a konstans c értéket veszi fel két, egymással párhuzamos $n-1$ dimenziós körlapon. Emiatt létezik $n+1$ darab affin független pont a B halmazban, amelyek mindegyikében F értéke c. A 2.16 Tétel szerint emiatt F konstans a B nyílt gömbön (ugyanis az konvex halmaz), emiatt pedig az egész D halmazon konstans.

Ezáltal beláttuk, hogy ha F nem konstans, akkor f szükségképpen injektív. De f folytonos is, következésképpen szigorúan monoton kell, hogy legyen a 2.23 Tétel miatt. Végül vegyük észre, hogy ha F konstans (azaz létezik $\beta \in \mathbb{R}$, amire $F \equiv \beta$), akkor választhatjuk az $a = 0 \in \mathbb{R}^n$ vektort. Ekkor a $p_a(D) = \{0\}$ egyelemű halmazon $f(0) := \beta$ módon értelmezett függvényre teljesül a tételben szereplő előállítás. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

$\square$

2.25. *Megjegyzés.* Triviális számolás, hogy a 2.24 Tétel megfordítása is igaz. Tegyük fel, hogy valamely $x, y \in D$ esetén

$$F(x) = f\left(p_a(x)\right) = f\left(p_a(y)\right) = F(y).$$

Ekkor f szigorú monotonitása miatt $p_a(x) = p_a(y)$ is teljesül. Amennyiben valamely $t \in \mathbb{R}^n$ vektorra $x+t, y+t \in D$, akkor

$$\begin{aligned} F(x+t) &= f\left(p_a(x+t)\right) = f\left(p_a(x) + p_a(t)\right) \\ &= f\left(p_a(y) + p_a(t)\right) = f\left(p_a(y+t)\right) = F(y+t), \end{aligned}$$

azaz F (lokálisan) eltolásinvariáns.

Kapcsolat szakirodalmi előzményekkel

Ahogyan a Bevezetésben említettük, az eltolásinvariancia megjelenik például a [8] monográfiában és a [49] dolgozatban. Előbbiben az eltolásinvariancia $\mathbb{R}^n$-en értelmezett preferencia-relációkra vonatkozik: egy $\preceq$ reláció eltolásinvariáns, ha

$$x \preceq y \Longleftrightarrow x + z \preceq y + z \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}^n).$$

A [8, Theorem 4.3.1] tétel azt állítja, hogy ha $\preceq$ az eltolásinvariancia mellett gyengén monoton növekvő is (vagyis ha $x \leq y$ koordinátánként teljesül, akkor $x \preceq y$), abban az esetben létezik egy $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ nemnegatív koordinátájú egységvektor, amivel fennáll

$$a_1x_1 + \ldots a_nx_n < a_1y_1 + \cdots + a_ny_n \Longrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n),$$

minden $x = (x_1, \ldots, x_n)$ és $y = (y_1, \ldots, y_n)$ vektorra. Természetesen, ha az eltolásinvariáns $\preceq$ preferencia-relációt egy $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ hasznossági függvény reprezentálja

$$x \preceq y \Longleftrightarrow F(x) \leq F(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

módon, akkor F-re igaz az

$$F(x) \leq F(y) \Longleftrightarrow F(x+z) \leq F(y+z) \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}^n) \tag{2.4}$$

összefüggés, mely az általunk definiált eltolásinvarianciához hasonló, de annál megszorítóbb követelmény. Lényeges viszont, hogy még ez a formálisan erősebb eltolásinvariancia és a gyenge monotonitás együttesen sem garantálja, hogy a preferencia-reláció (illetve az azt reprezentáló valós értékű függvény) szinthalmazai hipersíkok legyenek. Ehhez valamilyen folytonossági feltételre is szükség van, mint ahogyan ez az eredményeinkben is megjelent.

Ugyanebben a (2.4) értelemben, preferencia-relációkon keresztül bukkannak fel eltolásinvariáns függvények Trockel [49] dolgozatában is, folytonossági feltételekkel kiegészítve. Ezekről már kiderül, hogy szinthalmazaik párhuzamos hipersíkok.

Hangsúlyozzuk azonban, hogy mind [8]-ban, mind [49]-ben az értelmezési tartomány a teljes $\mathbb{R}^n$ tér. Másrészt, ennek megfelelően, a (2.4) eltolásinvariancia követelmény minden $t \in \mathbb{R}^n$ eltoló vektorra vonatkozik. Harmadrészt, az általunk a 2.9 definícióban tekintett eltolásinvariancia feltétele gyengébb, mint a (2.4)-ben szereplő, hiszen mi azt csak egyenlőség esetére követeljük meg. A 2.24 Tétel és 2.25 Megjegyzés értelmében folytonos F esetén egyenértékű a két feltétel, de ennek közvetlen igazolása bonyolultabb értelmezési tartományok esetén technikailag kifejezetten nehézkes lett volna.

3. fejezet

Összetett függvényegyenlet-rendszerek folytonos megoldásai

Ebben a fejezetben a lokálisan eltolásinvariáns függvényekre kapott eredményeket alkalmazva karakterizáljuk a Bevezetésben említett [9] cikkben szereplő egyenletrendszer magasabb dimenziós megfelelőjének folytonos megoldásait. Ezután az egyenletrendszert általánosítjuk, majd ebben az esetben is jellemezzük a folytonos megoldásokat. A bemutatott eredmények előzetes változatai megtalálhatóak a [47] OTDK-dolgozatban illetve a [46] cikkben.

3.1. Egy összetett függvényegyenlet-rendszer

Legyen $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ adott halmaz, $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Minden $k = 1, \ldots, n$ esetén definiáljuk az $E_k(S, F) \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazokat a következő módon:

$$E_k(S,F) = \{\,(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \text{létezik } (x_1, \ldots, x_n) \in S \text{ úgy, hogy } F(x_1, \ldots, x_n) = u \text{ és } (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + v, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in S\,\}.$$

Tegyük fel továbbá, hogy minden $k = 1, \dots, n$ indexre léteznek olyan

$$\Phi_k : E_k\,(S, F) \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvények, melyekre fennállnak az

$$\begin{aligned} F\,(x_1 + t_1\,, x_2\,, \dots, x_n) &= \Phi_1\,(F\,(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)\,, t_1) && (1) \\ F\,(x_1\,, x_2 + t_2\,, \dots, x_n) &= \Phi_2\,(F\,(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)\,, t_2) && (2) \\ &\vdots \\ F\,(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n + t_n) &= \Phi_n\,(F\,(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)\,, t_n) && (n) \end{aligned}$$

egyenletek minden olyan $(x_1\,, \dots, x_n) \in S$ és $t_k \in \mathbb{R}$ esetén, amire

$$(x_1\,, \dots, x_{k-1}\,, x_k + t_k\,, x_{k+1}\,, \dots, x_n) \in S.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy F megoldása az $(1) - (n)$ függvényegyenlet-rendszernek. A következő lemmában megmutatjuk, hogy a fenti egyenletrendszer megoldásai lokálisan eltolásinvariánsak. A továbbiakban többször előfordul, hogy adott $v \in \mathbb{R}^n$ vektort az $\mathbb{R}^n$ standard bázisára vonatkozó koordinátáinak $(v_1\,, \dots\,, v_n)$ vektorával reprezentálunk.

3.1. Lemma. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig megoldása az $(1) - (n)$ függvényegyenlet-rendszernek. Ekkor F lokálisan eltolásinvariáns.*

Bizonyítás. Legyen $x, y \in D$ két tetszőleges pont, amire $F(x) = F(y)$ teljesül. Legyen továbbá $0 < r \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan sugár, amivel a

$$B(x, r) \subset D \quad \text{és} \quad B(y, r) \subset D$$

tartalmazások fennállnak. Ezen felül legyen $h \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges olyan vektor, amire $\|h\| < r$ teljesül. Az r és h választása miatt az

$$\begin{aligned} &(x_1\,, \dots, x_{k-1}\,, x_k + h_k\,, \dots, x_n + h_n) \in D \;\text{ és} \\ &(y_1\,, \dots, y_{k-1}\,, y_k + h_k\,, \dots, y_n + h_n) \in D \end{aligned}$$

tartalmazások is igazak, bármely $k = 1, \dots, n$ indexre. Mivel F megoldása az $(1) - (n)$ rendszernek és $F(x) = F(y)$, az alábbi módon számolhatunk:

$$\begin{aligned}
F(x+h) &= F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \\
&= \Phi_1\big(F(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n), h_1\big) \\
&= \Phi_1\big(\Phi_2\big(F(x_1, x_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n), h_2\big), h_1\big) = \dots \\
&= \Phi_1\big(\Phi_2\big(\dots\big(\Phi_n\big(F(x_1, x_2, \dots, x_n), h_n\big)\dots\big), h_2\big), h_1\big) \\
&= \Phi_1\big(\Phi_2\big(\dots\big(\Phi_n\big(F(y_1, y_2, \dots, y_n), h_n\big)\dots\big), h_2\big), h_1\big) = \dots \\
&= \Phi_1\big(\Phi_2\big(F(y_1, y_2, y_3 + h_3, \dots, y_n + h_n), h_2\big), h_1\big) \\
&= \Phi_1\big(F(y_1, y_2 + h_2, \dots, y_n + h_n), h_1\big) \\
&= F(y_1 + h_1, y_2 + h_2, \dots, y_n + h_n) = F(y+h) .
\end{aligned}$$

Ez viszont definíció szerint azt jelenti, hogy F lokálisan eltolásinvariáns.

$\square$

3.2. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő halmaz. Az $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény pontosan akkor megoldása az $(1) - (n)$ függvényegyenlet-rendszernek, ha létezik $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor és egy szigorúan monoton, folytonos $f : p_a(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, amivel*

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n)$$

teljesül minden $(x_1, \dots, x_n) \in D$ esetén.

Bizonyítás. A 3.1 Lemma szerint F lokálisan eltolásinvariáns. Így a 2.24 Tétel alkalmazható, mely szerint vagy F konstans, vagy

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) \tag{3.1}$$

valamely $a = (a_1, \dots, a_n)$ nemnulla vektorra. Viszont vegyük észre, hogy ha F konstans, akkor a (3.1) alakú felbontás szintén fennáll, csak ekkor az $a = 0 \in \mathbb{R}^n$ választás mellett (ilyenkor f a $\{0\}$ halmazon értelmezett, értéke pedig a F által felvett konstans). A szükségességet ezzel beláttuk.

Az elegendőség egyszerű számolás. Tegyük fel, hogy F a (3.1) képlettel definiált. Legyen ekkor bármely $k = 1, \ldots, n$ esetén

$$\Phi_k(s,t) := f\big(f^{-1}(s) + a_k t\big) \qquad \big((s,t) \in E_k(D,F)\big).$$

Ekkor láthatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&F\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\right) \\
&\quad = f\big(a_1 x_1 + \cdots + a_{k-1} x_{k-1} + a_k\left(x_k + t_k\right) + a_{k+1} x_{k+1} + \cdots + a_n x_n\big) \\
&\quad = f\big(\left(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\right) + a_k t_k\big) \\
&\quad = f\big(f^{-1}\big(F\left(x_1, \ldots, x_n\right)\big) + a_k t_k\big) \\
&\quad = \Phi_k\left(F\left(x_1, \ldots, x_n\right), t_k\right)
\end{aligned}$$

miatt F valóban megoldása az $(1) - (n)$ függvényegyenlet-rendszernek. □

3.3. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy az F megoldásról a folytonosságon kívül mást nem tettünk fel. Így tehát speciális esetként a Boros [9] cikk eredményének javítása is adódik, hiszen ott az F legalább egy változóban való szigorú monotonitása is szerepelt a feltételek között.

3.2. A függvényegyenlet-rendszer általánosítása

A következőkben az $(1) - (n)$ egyenletrendszert általánosítjuk oly módon, hogy a változókban az összeadás helyett általánosabb műveleteket engedünk meg. A következő szakaszban összefoglaljuk a szükséges algebrai előzményeket.

3.2.1. Egyszerűsítéses félcsoportműveletek reprezentációi

A számegyenes egy intervallumán értelmezett folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses műveletek reprezentációs tételét Craigen és Páles igazolták 1989-ben megjelent [12] dolgozatukban. Mielőtt ismertetnénk a tétel állítását, felidézzük az egyszerűsítéses félcsoportművelet fogalmát.

3.4. Definíció. Legyen X nemüres halmaz, $H : X \times X \longrightarrow X$ pedig egy kétváltozós művelet. Ekkor az (X, H) párt *egyszerűsítéses félcsoport*nak nevezzük, ha

- H *asszociatív*, vagyis minden $x, y, z \in X$ esetén $H(H(x,y), z) = H(x, H(y,z))$, illetve
- H *egyszerűsítéses*, vagyis minden $x, y, z \in X$ esetén teljesülnek a

  $$H(x,y) = H(x,z) \Longrightarrow y = z \quad \text{és} \quad H(y,x) = H(z,x) \Longrightarrow y = z$$

  implikációk.

3.5. Tétel (Craigen–Páles, 1989). *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ valódi intervallum, valamint legyen $H : I \times I \longrightarrow I$ egy folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses művelet. Ekkor létezik egy összeadásra nézve zárt, nem korlátos $J \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, valamint egy $h : J \longrightarrow I$ folytonos bijekció, amellyel*

$$H(x,y) = h\left(h^{-1}(x) + h^{-1}(y)\right) \tag{3.2}$$

teljesül minden $x, y \in I$ esetén.

3.6. *Megjegyzés.* Valódi intervallum alatt továbbra is azt értjük, hogy az intervallum tartalmaz legalább két különböző pontot. Idézzük fel, hogy a 2.23 Tétel szerint a bijektív, folytonos $h : J \longrightarrow I$ függvény szigorúan monoton. Nyilván inverze is ugyanilyen tulajdonságú, tehát topológiai értelemben h valójában homeomorfizmus a J és I között. A továbbiakban ennek megfelelően azokat a folytonos, szigorúan monoton, szürjektív függvényeket, melyek nyílt intervallumot nyílt intervallumra képeznek, homeomorfizmusoknak hívjuk.

A 3.5 Tétel azonnali következménye, hogy a H művelet kommutatív. Továbbá az is triviális számolással adódik, hogy a tétel megfordítása is igaz. Nevezetesen, a (3.2) formulával értelmezett H művelet folytonos, asszociatív és egyszerűsítéses.

Hasonló állítást találunk Aczél János [1, 4] munkáiban. Továbbá érdemes megjegyezni, hogy egy valamelyest gyengébb karakterizációs tétel, mely folytonos csoportműveletekre vonatkozik, szintén Aczél nevéhez fűződik. A [3] monográfiában találjuk annak bizonyítását, hogy ha $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, úgy az $F : I \times I \longrightarrow I$ függvény akkor és csak akkor folytonos csoportművelet az I halmazon, ha létezik egy folytonos, szigorúan monoton, szürjektív $f : \mathbb{R} \longrightarrow I$ függvény, amelyre

$$F(x,y) = f\left(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)\right)$$

teljesül minden $x, y \in I$ szám esetén.

3.2.2. Az általánosított egyenletrendszer

Legyen minden $k = 1, \dots, n$ esetén $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint legyen $F_k : I_k \times I_k \longrightarrow I_k$ folytonos, asszociatív egyszerűsítéses művelet. Legyen továbbá $S \subseteq I_1 \times \cdots \times I_n$ egy nemüres halmaz, $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Értelmezzük a $G_k\,(F_k\,, S, u) \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazt minden $k = 1, \dots, n$ esetén a következőképpen:

$$\begin{aligned} G_k\,(F_k\,, S, u) = \{\, (a,b) \in \mathbb{R} \times I_k \ :\ &\text{létezik}\ \ (x_1\,, \dots, x_n) \in S \text{ úgy, hogy} \\ u\,(x_1\,, \dots, x_n) = a \ \ \text{és} \ \ &(x_1\,, \dots, x_{k-1}\,, F_k\,(x_k\,, b)\,, x_{k+1}\,, \dots, x_n) \in S \,\}\,. \end{aligned}$$

Tegyük fel továbbá, hogy léteznek $\Psi_k : G_k\,(F_k\,, S, u) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények (minden $k = 1, \dots, n$ indexre) úgy, hogy teljesülnek az

$$u\big(F_1\,(x_1\,, t_1)\,, x_2\,, \dots, x_n\big) = \Psi_1\big(u\,(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)\,, t_1\big) \tag{G-1}$$

$$u\big(x_1\,, F_2\,(x_2\,, t_2)\,, \dots, x_n\big) = \Psi_2\big(u\,(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)\,, t_2\big) \tag{G-2}$$

$$\vdots$$

$$u\big(x_1\,, x_2\,, \dots, F_n\,(x_n\,, t_n)\big) = \Psi_n\big(u\,(x_1\,, x_2\,, \dots, x_n)\,, t_n\big) \tag{G-n}$$

egyenletek. Ekkor azt mondjuk, hogy u megoldása a (G-1) – (G-n) függvényegyenlet-rendszernek.

3.7. *Megjegyzés.* Amennyiben $I_1 = \cdots = I_n = \mathbb{R}$ és az $F_1\,, \dots, F_n$ műveletek mindegyike az összeadás, akkor $G_k\,(F_k\,, S, u) = E_k\,(S, u)$, és így az $(1) - (n)$ függvényegyenlet-rendszert kapjuk vissza. Az ismeretlen függvényt azért nem F jelöli, mivel ezt az általánosabb függvényegyenlet-rendszert fogjuk hasznossági függvények osztályainak karakterizációjára alkalmazni. Így érdemesnek látszik a megoldásokat már most u-val jelölni, mely a hasznossági függvényeket illetően egy standard jelölés.

3.8. *Jelölés.* Legyenek $H \subseteq \mathbb{R}^n$ és $H_1, \ldots, H_n \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges halmazok, $f_k : H_k \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig tetszőleges függvények $(k = 1, \ldots, n)$. Ekkor $P(H, f_1, \ldots, f_n)$ jelöli a H halmaz $(f_1, \ldots, f_n)$ általi ősképét, vagyis

$$\begin{aligned} P(H, f_1, \ldots, f_n) := \{\ (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n\ :\ & \text{létezik } (x_1, \ldots, x_n) \in H \\ & \text{amelyre } f_1(y_1) = x_1, \ \ldots, f_n(y_n) = x_n \}\,. \end{aligned}$$

Ekkor a 3.2 Tétel és a 3.5 Tétel alapján jellemezhetjük a (G-1) – (G-n) rendszer folytonos megoldásait nyílt, összefüggő halmazokon.

3.9. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $F_k : I_k \times I_k \longrightarrow I_k$ pedig folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses művelet minden $k = 1, \ldots, n$ esetén. Legyen továbbá $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő halmaz, melyre $D \subseteq I_1 \times \cdots \times I_n$.*

Az $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos megoldása a (G-1) – (G-n) függvényegyenlet-rendszernek, amennyiben létezik olyan $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor, összeadásra nézve zárt $J_k \subseteq \mathbb{R}$ intervallumok, továbbá $f_k : J_k \longrightarrow I_k$ homeomorfizmusok és egy szigorúan monoton, folytonos $g : p_a(P(D, f_1, \ldots, f_n)) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyekre egyrészt

$$F_k(x, y) = f_k\left(f_k^{-1}(x) + f_k^{-1}(y)\right) \qquad (x, y \in I_k)\,,$$

másrészt

$$u(x_1, \ldots, x_n) = g\big(a_1 f_1^{-1}(x_1) + \cdots + a_n f_n^{-1}(x_n)\big)$$

teljesül minden $k = 1, \ldots, n$ és $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ esetén.

Bizonyítás. Először is, a 3.5 Tétel értelmében léteznek az összeadásra nézve zárt, nem korlátos $\emptyset \neq J_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, illetve $f_k : J_k \longrightarrow I_k$ homeomorfizmusok, amelyekkel

$$F_k(x, y) = f_k\left(f_k^{-1}(x) + f_k^{-1}(y)\right) \qquad (x, y \in I_k)$$

teljesül minden $k = 1, \ldots, n$ esetén. Továbbá $P(D, f_1, \ldots, f_n)$ nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, mivel éppen a D nyílt halmaznak az

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \big(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)\big)$$

folytonos függvény általi ősképe.

Ugyanakkor $P(D, f_1, \ldots, f_n)$ egyben a D összefüggő halmaznak az

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \big(f_1^{-1}(x_1), \ldots, f_n^{-1}(x_n)\big)$$

folytonos függvény általi képe, tehát összefüggő. Értelmezzük most a

$$v : P(D, f_1, \ldots, f_n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvényt a

$$v(y_1, \ldots, y_n) := u\big(f_1(y_1), \ldots, f_n(y_n)\big)$$

képlettel. Továbbá, minden $k = 1, \ldots, n$ esetén a korábban bevezetett speciális E_k és G_k halmazok definícióból közvetlenül látható, hogy

$$\begin{aligned}&(a, b) \in E_k\left(P(D, f_1, \ldots, f_n), v\right) \text{ pontosan akkor, ha}\\ &(a, f_k(b)) \in G_k\left(F_k, D, u\right).\end{aligned}$$

Ezért a $\Phi_k : E_k\left(P(D, f_1, \ldots, f_n), v\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényeket értelmezhetjük a

$$\Phi_k(a, b) := \Psi_k\left(a, f_k(b)\right)$$

formulával, és a definíció minden $k = 1, \ldots, n$ esetén értelmes. Ezek után a következőképpen számolhatunk:

$$\begin{aligned}
&v(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k + t_k, y_{k+1}, \ldots, y_n)\\
&\quad = u\big(f_1(y_1), \ldots, f_{k-1}(y_{k-1}), f_k(y_k + t_k), f_{k+1}(y_{k+1}), \ldots, f_n(y_n)\big)\\
&\quad = u\big(f_1(y_1), \ldots, f_{k-1}(y_{k-1}), F_k\big(f_k(y_k), f_k(t_k)\big), f_{k+1}(y_{k+1}), \ldots, f_n(y_n)\big)\\
&\quad = \Psi_k\big(u\left(f_1(y_1), \ldots, f_n(y_n)\right), f_k(t_k)\big)\\
&\quad = \Phi_k\big(v(y_1, \ldots, y_n), t_k\big).
\end{aligned}$$

Mivel ezen összefüggések minden $k = 1, \dots, n$ index, továbbá minden

$$(y_1, \dots, y_n) \in P(D, f_1, \dots, f_n)$$

vektor és alkalmas $t_k \in \mathbb{R}$ esetén igazak, ez pontosan azt jelenti, hogy v folytonos megoldása az $(1) - (n)$ függvényegyenlet-rendszernek.

A 2.24 Tétel szerint létezik $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor és folytonos, szigorúan monoton $g : p_a(P(D, f_1, \dots, f_n)) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, amikre

$$v(y_1, \dots, y_n) = g(a_1 y_1 + \dots + a_n y_n)$$

teljesül minden $(y_1, \dots, y_n) \in P(D, f_1, \dots, f_n)$ esetén. Végezetül vegyük észre, hogy emiatt bármely $(x_1, \dots, x_n) \in D$ vektorra igaz, hogy

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n) &= v\big(f_1^{-1}(x_1), \dots, f_n^{-1}(x_n)\big) \\ &= g\big(a_1 f_1^{-1}(x_1) + \dots + a_n f_n^{-1}(x_n)\big). \end{aligned}$$

Az elegendőség igazolásához definiáljuk a $\Psi_k : G_k(F_k, D, u) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényeket

$$\Psi_k(a, b) := g\left(g^{-1}(a) + a_k f_k^{-1}(b)\right)$$

módon, minden $k = 1, \dots, n$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned} & u\big(x_1, \dots, x_{k-1}, F_k(x_k, t_k), x_{k+1}, \dots, x_n\big) \\ & = g\big(a_1 f_1^{-1}(x_1) + \dots + a_{k-1} f_{k-1}^{-1}(x_{k-1}) + a_k f_k^{-1}(F_k(x_k, t_k)) \\ & + a_{k+1} f_{k+1}^{-1}(x_{k+1}) + \dots + a_n f_n^{-1}(x_n)\big) \\ & = g\big(a_1 f_1^{-1}(x_1) + \dots + a_{k-1} f_{k-1}^{-1}(x_{k-1}) + a_k \left(f_k^{-1}(x_k) + f_k^{-1}(t_k)\right) \\ & + a_{k+1} f_{k+1}^{-1}(x_{k+1}) + \dots + a_n f_n^{-1}(x_n)\big) \\ & = g\left(g^{-1}\left(g\left(a_1 f_1^{-1}(x_1) + \dots + a_n f_n^{-1}(x_n)\right)\right) + a_k f_k^{-1}(t_k)\right) \\ & = g\left(g^{-1}\big(u(x_1, \dots, x_n)\big) + a_k f_k^{-1}(t_k)\right) \\ & = \Psi_k\big(u(x_1, \dots, x_n), t_k\big). \end{aligned}$$

Ami viszont pont azt jelenti, hogy ha u a tételben szereplő alakú, akkor valóban megoldása a (G-1) – (G-n) függvényegyenlet-rendszernek. Továbbá nyilvánvaló, hogy u folytonos függvény. $\square$

3.10. *Megjegyzés.* A bizonyításból kiderül, hogy a (G-1) – (G-n) egyenletrendszer bármely u megoldására az

$$u\,(x_1\,,\ldots,x_n) = g\left(a_1 f_1^{-1}(x_1) + \cdots + a_n f_n^{-1}(x_n)\right)$$

reprezentáció bármely olyan $f_k : J_k \longrightarrow I_k$ homeomorfizmusok esetén fennáll (alkalmas g homeomorfizmust választva), amelyre

$$F_k\,(x,y) = f_k\left(f_k^{-1}(x) + f_k^{-1}(y)\right) \qquad (x,y \in I_k)$$

teljesül minden $k = 1,\ldots,n$ esetén.

4. fejezet

Kváziösszegek regularitás-megőrzési tulajdonságai

A fejezetben ismertetjük a kváziösszegek fogalmát, majd igazoljuk, hogy a kváziösszeg (magasabb rendű) differenciálhatósági tulajdonságai öröklődnek annak generátorfüggvényeire. Végül bemutatjuk az eredmények egy alkalmazását.

4.1. Előzmények

A Bevezetésben említettük, hogy a fogalom bevezetése Maksa Gyula nevéhez köthető, de megjegyezzük, hogy bizonyos kétváltozós kváziösszegek Aczél János korai munkáiban [1, 2] is megjelentek. Maksa [33] cikke szerint magát a terminológiát is Aczél vetette fel elsőként.

4.1. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ valamint legyen $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum minden $k = 1, \dots, n$ esetén. Tegyük fel továbbá, hogy $f_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény minden $k = 1, \dots, n$ esetén, $g : f_1(I_1) + \dots + f_n(I_n) \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig szintén folytonos, szigorúan monoton. Ekkor az

$$F(x_1, \dots, x_n) = g\big(f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)\big) \qquad (x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n) \tag{4.1}$$

módon értelmezett $F : I_1 \times \dots \times I_n \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt *kváziösszeg*nek nevezzük. A $g, f_1, \dots, f_n$ függvényeket az F kváziösszeg *generátorfüggvényei*nek (vagy röviden *generátor*ainak) hívjuk.

A következőkben többváltozós, valós értékű függvények (magasabb rendű) parciális deriváltjaival fogunk számolni, a differenciálhatósági fogalmakat a szokásos értelemben használjuk. Ha m, p pozitív egészek, valamint $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^m$ nyílt halmaz, akkor azt mondjuk, hogy az $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény *p-szer folytonosan differenciálható*, ha a p-ed rendű parciális deriváltak, vagyis az

$$u \mapsto \partial_{i_1}\partial_{i_2} \dots \partial_{i_p} F(u) \qquad \big(u \in U \text{ és } i_1, i_2, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, m\}\big)$$

függvények mindegyike létezik és folytonos a teljes U tartományon. Amikor azt mondjuk, hogy egy függvény *parciálisan differenciálható*, akkor ez alatt azt értjük, hogy az elsőrendű parciális deriváltak mindegyike létezik, de nem szükségképpen folytonos.

Az alábbiakban két elemi észrevételt idézünk fel valós függvényekről. A fejezet fő tételeinek igazolásakor ezek fontos segédállítások lesznek, ezért kimondjuk őket és közöljük a bizonyításokat is. Megjegyezzük viszont, hogy mindkét soron következő állítást számtalan módon lehetne általánosítani.

4.2. Lemma. *Legyen $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ egy nyílt intervallum, $D \subseteq I$ pedig egy I-ben sűrű halmaz. Tegyük fel, hogy az $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos és szigorúan monoton. Ekkor $f(I)$ szintén nyílt intervallum, valamint $f(D)$ sűrű halmaz $f(I)$-ben.*

Bizonyítás. Mivel f homeomorfizmus I és J között, így megőrzi a topológiai tulajdonságokat. Speciálisan $f(I) = J$ nyílt és összefüggő, tehát egy nyílt intervallum. Másrészről $f(D)$ sűrűsége $f(I)$-ben szintén a folytonosságból következik.

Legyen ugyanis $y_0 \in f(I)$ tetszőleges. Ekkor létezik $x_0 \in I$ úgy, hogy $f(x_0) = y_0$ teljesüljön. Mivel D sűrű I-ben, így létezik $(x_n) : \mathbb{N} \longrightarrow D$ sorozat, melyre $x_n \to x_0$. Ekkor $f(x_n) \to f(x_0) = y_0$ is igaz, hiszen f folytonos. Következésképpen $f(D)$ lezártja (az $f(I)$ altértopológiájában) éppen $f(I)$. Azt kaptuk tehát, hogy $f(D)$ sűrű $f(I)$-ben. □

4.3. Lemma. *Legyenek $\emptyset \neq I_1 \subseteq \mathbb{R}$ és $\emptyset \neq I_2 \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumok. Tegyük fel, hogy $D_1 \subseteq I_1$ nyílt halmaz, mely sűrű I_1-ben, továbbá $D_2 \subseteq I_2$ sűrű I_2-ben. Ekkor $D_1 + D_2 = I_1 + I_2$.*

Bizonyítás. Először is, $D_1 + D_2 \subseteq I_1 + I_2$ nyilvánvaló. A fordított irányú tartalmazáshoz legyen $z \in I_1 + I_2$ tetszőleges. Ekkor léteznek $x_1 \in I_1$ és $x_2 \in I_2$ számok úgy, hogy $z = x_1 + x_2$ legyen. Mivel I_j nyílt, így létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy

$$]\,x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon\,[\, \subseteq I_j$$

teljesül $j = 1, 2$ esetén. Mivel D_1 egy I_1-ben sűrű nyílt halmaz, létezik olyan $d_1 \in D_1$ és $\delta > 0$ úgy, hogy

$$]\,d_1 - \delta, d_1 + \delta\,[\, \subseteq \,]\,x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon\,[\, \cap D_1 .$$

Így tehát $|x_1 - d_1| < \varepsilon$, következésképpen $x_2 + x_1 - d_1 \in \,]\,x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon\,[\, \subseteq I_2$. Tehát, mivel D_2 sűrű az I_2 nyílt halmazban, létezik

$$d_2 \in \,]\,x_2 + x_1 - d_1 - \delta\,,\, x_2 + x_1 - d_1 + \delta\,[\, \cap D_2 .$$

Végezetül $|\,(x_1 + x_2 - d_2) - d_1| = |\,(x_2 + x_1 - d_1) - d_2| < \delta$ adódik a d_2 megválasztása miatt. Tehát $x_1 + x_2 - d_2 \in D_1$ ami azt jelenti, hogy

$$x_1 + x_2 = (x_1 + x_2 - d_2) + d_2 \in D_1 + D_2 ,$$

amit bizonyítanunk kellett. □

4.2. Elsőrendű (folytonos) differenciálhatóság megőrzése

4.4. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ és tegyük fel, hogy a* (4.1) *egyenlettel definiált n változós F kváziösszeg parciálisan differenciálható. Ekkor generátorfüggvényei differenciálhatóak. Továbbá, ha F folytonosan differenciálható, akkor generátorfüggvényei folytonosan differenciálhatóak.*

Bizonyítás. A bizonyításban a 4.1 Definíció jelöléseivel élünk mind a függvényekre, mind az értelmezési tartományokra vonatkozóan. Először is vegyük észre, hogy elegendő a kétváltozós esetre bizonyítani. Valóban, ha rögzítünk egy tetszőleges $k \in \{2, \ldots, n\}$ indexet és egy tetszőleges $y_j \in I_j$ elemet minden $j \in \{2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ esetén, akkor tekintsük az

$$\tilde{F}_{y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n}(x_1, x_k) = g\left(f_1(x_1) + f_k(x_k) + \sum_{j \in \{2, \ldots, n\} \setminus \{k\}} f_j(y_j)\right)$$

kétváltozós függvényt az $I_1 \times I_k$ halmazon. Ez a függvény megörökli F regularitási tulajdonságait, így (feltéve, hogy a tétel igaz $n = 2$ változó esetén) az f_1 és f_k generátorfüggvények (folytonosan) differenciálhatóak. Továbbá, szintén az $n = 2$ esetre vonatkozó állítás értelmében, ekkor g is folytonosan differenciálható az

$$f_1(I_1) + f_k(I_k) + \sum_{j \in \{2, \ldots, n\} \setminus \{k\}} f_j(y_j)$$

nyílt intervallumon. Ahogyan y_j befutja az I_j intervallumot, azt kapjuk, hogy ez a nyílt intervallum lefedi g teljes értelmezési tartományát, azaz g (folytonosan) differenciálható. Továbbá, ahogy a k index végigfut a $\{2, \ldots n\}$ halmaz elemein, adódik, hogy mindegyik f_k függvény (folytonosan) differenciálható.

Ezért a továbbiakban a kétváltozós esetre koncentrálunk, illetve kezdetben csak annyit teszünk fel, hogy F parciálisan differenciálható. Nyilván az $s \mapsto F(s, x_2)$ és $t \mapsto F(x_1, t)$ függvények szigorúan monotonak bármely rögzített $x_1 \in I_1$ és $x_2 \in I_2$ esetén, a generátorok szigorú monotonitásából következően.

Következésképpen, rendre az

$$s \mapsto \partial_1 F(s, x_2) \quad \text{illetve} \quad t \mapsto \partial_2 F(x_1, t)$$

függvény nem lehet azonosan nulla az I_1 illetve I_2 intervallum egyetlen nemüres nyílt részintervallumán sem.

Lebesgue differenciálhatósági tétele értelmében az f_1, f_2 és g szigorúan monoton függvények az értelmezési tartományaik majdnem minden pontjában differenciálhatók. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy f_1 szigorúan monoton növekvő. A szigorúan monoton csökkenő eset analóg módon tárgyalható.

Segédállítás. $g : f_1(I_1) + f_2(I_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható.

A segédállítás bizonyítása. Bármely rögzített $y \in I_2$ esetén tekintsük az alábbi differenciahányadosokat:

$$\begin{aligned} &\frac{F(x, y) - F(x_0, y)}{x - x_0} \\ &= \frac{g(f_1(x) + f_2(y)) - g(f_1(x_0) + f_2(y))}{(f_1(x) + f_2(y)) - (f_1(x_0) + f_2(y))} \cdot \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a generátorfüggvények szigorú monotonitása garantálja, hogy $x \neq x_0$ esetén sehol sincs 0 a nevezőben. Vegyük az $x \to x_0$ határátmenetet. Ekkor a bal oldali hányadosok $\partial_1 F(x_0, y)$-hoz tartanak. Eközben a jobb oldalon az első tényező $g'(f_1(x_0) + f_2(y))$-hoz, a második tényező pedig $f_1'(x_0)$-hoz, feltéve, hogy ezek a deriváltak léteznek.

Vegyük észre, hogy amennyiben az

$$f_1'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0}$$

derivált értéke egy pozitív szám, vagy pedig $+\infty$, akkor g differenciálható az $f_1(x_0) + f_2(y)$ pontban. Ez definíció szerint adódik, kihasználva, hogy

f_1 folytonos. Sőt, az is látható, hogy

$$g'\big(f_1(x_0)+f_2(y)\big)=\frac{\partial_1 F(x_0,y)}{f_1'(x_0)} \quad \text{vagy} \quad g'\big(f_1(x_0)+f_2(y)\big)=0,$$

rendre azokban az esetekben, amikor $f_1'(x_0)\in\mathbb{R}_+$ illetve $f_1'(x_0)=+\infty$. Mivel az $y\in I_2$ tetszőleges volt, így azt kaptuk, hogy g differenciálható az $f_1(x_0)+f_2(I_2)$ nyílt intervallumon, valahányszor $f_1'(x_0)$ pozitív vagy $+\infty$. Vezessük be a

$$K:=\{x\in I_1 : f_1'(x)>0 \text{ vagy } f_1'(x)=+\infty\}$$

halmazt. Világos, hogy $f_1(K)$ nem más, mint azon pontok halmaza $f_1(I_1)$-ben, melyekben az f_1^{-1} függvény differenciálható (azaz deriváltja véges). Lebesgue tétele szerint viszont f_1^{-1} az értelmezési tartományának (tehát az $f_1(I_1)$ nyílt intervallumnak) majdnem minden pontjában differenciálható. Vagyis $f_1(K)$ sűrű részhalmaza $f_1(I_1)$-nek. Következésképpen $f_1(K)+f_2(I_2)=f_1(I_1)+f_2(I_2)$ teljesül, használva a 4.3 Lemmát. Mint már megállapítottuk, a g függvény differenciálható ezen halmaz pontjaiban. $\boxtimes$

Segédállítás. Az $f_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak ($k=1,2$ esetén).

A segédállítás bizonyítása. Mivel g differenciálható és szigorúan monoton, az

$$L:=\{z\in f_1(I_1)+f_2(I_2) \,:\, g'(z)\neq 0\}$$

halmaz sűrű az $f_1(I_1)+f_2(I_2)$ intervallumban. Legyen most $x\in I_1$ tetszőleges. Kihasználva, hogy f_2 folytonos, valamint L sűrű az $f_1(I_1)+f_2(I_2)$ intervallumban, garantáltan létezik $y_0\in I_2$ úgy, hogy $f_1(x)+f_2(y_0)\in L$ teljesüljön. De ez azt vonja maga után, hogy f_1 differenciálható x-ben. Mi több, valójában

$$f_1'(x)=\frac{\partial_1 F\,(x,y_0)}{g'\,(f_1(x)+f_2(y_0))}$$

következik. Mivel $x\in I_1$ tetszőleges volt, beláttuk, hogy $f_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ differenciálható. Analóg érveléssel az f_2 differenciálhatósága az $\partial_2 F$ parciális derivált létezéséből adódik. $\boxtimes$

Eddig azt mutattuk meg, hogy ha F parciálisan differenciálható, akkor a generátorfüggvényei differenciálhatóak. Az utolsó lépésben igazoljuk, hogy ha az $F : I_1 \times I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ kváziösszeg folytonosan differenciálható, akkor a generátorok deriváltjai szintén folytonosak. Az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$\partial_k F\,(x_1\,, x_2) = g'\,(f_1(x_1) + f_2(x_2)) \cdot f_k'(x_k)$$

teljesül $k = 1, 2$ és tetszőleges $x_1 \in I_1\,, x_2 \in I_2$ számok mellett. Ha most $f_1'(x_0) \neq 0$, akkor

$$g'\,(f_1(x_0) + f_2(x_2)) = \frac{\partial_1 F\,(x_0\,, x_2)}{f_1'(x_0)}\,.$$

A jobb oldal folytonos az x_2 változóban, emiatt g' folytonos az $f_1(x_0) + f_2(I_2)$ nyílt intervallumon, bármely olyan rögzített $x_0 \in I_1$ pontra, amelyben $f_1'(x_0) \neq 0$. Ismételten használjuk ki, hogy azon pontok halmaza, ahol f_1' nem tűnik el, sűrű I_1-ben. Így a 4.2 és 4.3 Lemmák értelmében azt kapjuk, hogy g' folytonos az egész $f_1(I_1) + f_2(I_2)$ intervallumon, azaz g folytonosan differenciálható.

Végezetül legyen $x_0 \in I_1$ tetszőleges, és válasszuk az $y_0 \in I_2$ pontot úgy, hogy

$$g'\,(f_1(x_0) + f_2(y_0)) \neq 0$$

teljesüljön. Az előbbi érveléssel, f_2 folytonosságát használva könnyen ellenőrizhető, hogy ilyen y_0 valóban létezik. Ekkor

$$f_1'(x) = \frac{\partial_1 F\,(x\,, y_0)}{g'\,(f_1(x) + f_2(y_0))} \tag{4.2}$$

teljesül az x_0 egy környezetében. Nevezetesen, azon $x \in I_1$ számokra, melyekre az $f_1(x) + f_2(y_0)$ pontban a folytonos g' függvény különbözik 0-tól. Ezen x-ek halmaza viszont egy nyílt halmaznak (ahol g' nem nulla) a folytonos

$$s \mapsto f_1(s) + f_2(y_0)$$

függvény általi ősképeként áll elő, így nyílt. Mivel (4.2) jobb oldala folytonos az x változóban, speciálisan az is következik, hogy f_1' folytonos az $x_0 \in I_1$

pontban. Azonban x_0 tetszőleges volt, ezáltal f_1' folytonosságát beláttuk. Analóg érveléssel győződhetünk meg arról, hogy f_2' szintén folytonos.

Ezennel tehát beláttuk a tételt a kétváltozós esetre. A bizonyítás első észrevételeinek megfelelően ebből már adódik az állítás bármilyen $n \geq 2$ változós kváziösszegre. $\square$

4.3. Magasabb rendű folytonos differenciálhatóság megőrzése

Ebben a szakaszban az iménti 4.4 Tételt terjesztjük ki, az elsőrendű folytonos differenciálhatóságot bármilyen magasabb rendű folytonos differenciálhatóságra cserélve.

Tetszőleges $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén mindazon pontok halmazát, ahol h nem tűnik el, $\operatorname{supp} h$ módon jelöljük. Vagyis bevezetjük a

$$\operatorname{supp} h = \{\, x \in I : h(x) \neq 0 \,\}$$

halmazt, melyet a *h függvény tartójá*nak nevezünk. Felhívjuk rá a figyelmet, hogy ebben az értelemben a tartó definíciójában nem követeljük meg ennek a halmaznak a lezárását (utóbbi megközelítés inkább általánosabb körülmények között, például a funkcionálanalízisben szokványos).

4.5. Tétel. *Legyenek $p, n \in \mathbb{N}$ pozitív egészek úgy, hogy $n \geq 2$ és tegyük fel, hogy a* (4.1) *egyenlettel definiált n változós F kváziösszeg p-szer folytonosan differenciálható. Ekkor generátorfüggvényei is p-szer folytonosan differenciálhatóak.*

Bizonyítás. A bizonyításban a 4.1 Definíció jelöléseivel élünk mind a függvényekre, mind az értelmezési tartományokra vonatkozóan. Ahogyan a 4.4 Tétel bizonyításában megállapítottuk, bármely többváltozós eset az $n = 2$ változós esetre vezethető vissza, ezért a bizonyítást csak ez utóbbira végezzük el.

A $p = 1$ eset pontosan a 4.4 Tétel második állítása. Ezért p szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Tegyük tehát fel, hogy az állítás teljesül valamilyen rögzített $p \in \mathbb{N}$ egészre. A feltétel most az, hogy F egy $(p+1)$-szer folytonosan differenciálható függvény. Az indukciós feltételből következően az f_1, f_2, g generátorfüggvények p-szer folytonosan differenciálhatók. A Faà di Bruno formulát használva az összetett függvény magasabb rendű deriváltjainak kiszámolására

$$\begin{aligned}\partial_1^{(p)} F(x_1, x_2) &= g^{(p)}\big(f_1(x_1) + f_2(x_2)\big) \cdot \big(f_1'(x_1)\big)^p \\ &+ \sum_{k=1}^{p-1} g^{(k)}\big(f_1(x_1) + f_2(x_2)\big) \cdot P_k\big(f_1'(x_1), f_1''(x_1), \ldots, f_1^{(p)}(x_1)\big)\end{aligned} \tag{4.3}$$

adódik, ahol minden $k = 1, \ldots, p-1$ esetén P_k egy p változós, egész együtthatós polinom, melynek fokszáma legfeljebb $p-1$.

Speciálisan $P_1(z_1, \ldots, z_n) = z_n$ minden $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén. Természetesen, ha $p = 1$, akkor (4.3) jobb oldalán csupán $g'(f_1(x_1) + f_2(x_2)) \cdot f_1'(x_1)$ az egyetlen tag. Ebben az esetben a további számolásokban egy üres összegzés is meg fog jelenni.

Mivel f_1 szigorúan monoton, $\mathrm{supp} f_1'$ egy sűrű, nyílt halmaza az I_1 intervallumnak. Rögzítsünk most egy tetszőleges $x_0 \in \mathrm{supp} f_1'$ pontot. A (4.3) egyenletből $(f_1'(x_0))^p$-nel való osztás, majd átrendezés után a

$$\begin{aligned}g^{(p)}\big(f_1(x_0) + f_2(y)\big) &= \frac{1}{\big(f_1'(x_0)\big)^p} \cdot \partial_1^{(p)} F(x_0, y) \\ &- \sum_{k=1}^{p-1} \frac{P_k\big(f_1'(x_0), \ldots, f_1^{(p)}(x_0)\big)}{(f_1'(x_0))^p} \cdot g^{(k)}\big(f_1(x_0) + f_2(y)\big)\end{aligned} \tag{4.4}$$

kifejezés adódik, minden $y \in I_2$ esetén. A jobb oldal folytonosan differenciálható az $y \in I_2$ változóban, ugyanis az F függvény $(p+1)$-szer folytonosan differenciálható, az f_2, g függvények pedig p-szer folytonosan differenciálhatóak az indukciós feltevés miatt. Ez pontosan azt jelenti, hogy ha a $\psi : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt a

$$\psi(y) := g^{(p)}\big(f_1(x_0) + f_2(y)\big) \qquad (y \in I_2)$$

képlettel definiáljuk, akkor ψ folytonosan differenciálható.

Másfelől f_2 szigorúan monoton, így létezik a $\varphi := f_2^{-1}$ inverzfüggvénye. Továbbá, ha $y_0 \in \operatorname{supp} f_2'$, akkor az Inverzfüggvény-tétel garantálja, hogy $\varphi = f_2^{-1}$ folytonosan differenciálható az $f_2(y_0)$ pont egy környezetében.

Következésképpen, ha $x_0 \in \operatorname{supp} f_1'$ és $y_0 \in \operatorname{supp} f_2'$ rögzített számok, akkor a $\psi \circ \varphi : f_2(I_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható az $f_2(y_0)$ pont egy környezetében. A ψ és φ értelmezése szerint bármely $z \in f_2(I_2)$ esetén

$$(\psi \circ \varphi)(z) = g^{(p)}\big(f_1(x_0) + f_2(\varphi(z))\big) = g^{(p)}\big(f_1(x_0) + z\big).$$

A ψ és φ differenciálhatóságával kapcsolatos iménti észrevételeket összegezve : azt vezettük le hogy ha $x_0 \in \operatorname{supp} f_1'$ és $y_0 \in \operatorname{supp} f_2'$ akkor $g^{(p)}$ folytonosan differenciálható az $f_1(x_0) + f_2(y_0)$ pont egy környezetében. Másképpen fogalmazva, $g^{(p)}$ folytonosan differenciálható az $f_1(\operatorname{supp} f_1') + f_2(\operatorname{supp} f_2')$ halmazon.

A 4.2 Lemmát használva a $\operatorname{supp} f_k'$ nyílt halmazra, mely sűrű az I_k intervallumban, azt kapjuk, hogy $f_k(\operatorname{supp} f_k')$ szintén sűrű $f_k(I_k)$-ban (mindkét $k = 1, 2$ index esetén). Továbbá $f_k(\operatorname{supp} f_k')$ nyílt halmaz az $f_k(I_k)$ nyílt intervallumban, hiszen f_k homeomorfizmus ($k = 1, 2$). Emiatt alkalmazható a 4.3 Lemma ezekre a sűrű nyílt halmazokra, és ezáltal

$$f_1\big(\operatorname{supp} f_1'\big) + f_2\big(\operatorname{supp} f_2'\big) = f_1(I_1) + f_2(I_2)$$

adódik. Azt kaptuk tehát, hogy $g^{(p)}$ a teljes értelmezési tartományán folytonosan differenciálható.

Végezetül meg kell mutatnunk, hogy f_1, f_2 egyaránt $(p+1)$-szer folytonosan differenciálhatóak. Szimmetriai okokból elegendő csak f_1-re bizonyítani. Hajtsunk végre egy csoportosítást a (4.3) egyenletben, hozzuk azt

$$\begin{aligned}
&\partial_1^{(p)} F(x_1, x_2) \\
&\quad = \sum_{k=2}^{p} g^{(k)}\big(f_1(x_1) + f_2(x_2)\big) \cdot P_k\big(f_1'(x_1), f_1''(x_1), \ldots, f_1^{(p-1)}(x_1)\big) \\
&\quad + g'\big(f_1(x_1) + f_2(x_2)\big) \cdot f_1^{(p)}(x_1)
\end{aligned}$$

alakra, ahol minden $k = 2, \dots, p$ esetén P_k egy $p-1$ változós, egész együtthatós polinom, melynek fokszáma legfeljebb p. Legyen $x_0 \in I_1$ egy tetszőlegesen rögzített szám. Mivel g szigorúan monoton, a $\operatorname{supp} g'$ halmaz nyílt és sűrű g értelmezési tartományában. Emiatt, kihasználva, hogy $f_2(I_2)$ nyílt intervallum, választhatunk $y_0 \in I_2$ elemet úgy, hogy $f_1(x_0) + f_2(y_0) \in \operatorname{supp} g'$ teljesüljön. Ekkor létezik x_0-at tartalmazó $K \subseteq I_1$ nyílt részintervallum, amire

$$g'\left(f_1(x) + f_2(y_0)\right) \neq 0$$

áll fenn minden $x \in K$ pontban. Ilyen K létezését az garantálja, hogy g' és f_1 folytonos függvények. Ha ilyen nemnulla számmal végigosztjuk a (4.5) egyenletet, akkor az

$$\begin{aligned} f_1^{(p)}(x) = {} & \frac{\partial_1^{(p)} F\,(x\,, y_0)}{g'\left(f_1(x) + f_2(y_0)\right)} \\ & - \sum_{k=2}^{p} \frac{g^{(k)}\big(f_1(x) + f_2(y_0)\big)}{g'\left(f_1(x) + f_2(y_0)\right)} \cdot P_k\big(f_1'(x)\,, f_1''(x)\,, \dots\,, f_1^{(p-1)}(x)\big) \end{aligned} \tag{4.5}$$

összefüggéshez jutunk, minden $x \in K$ esetén. A jobb oldal folytonosan differenciálható az $x \in K$ változóban, hiszen az f_1 , f_2 függvények p-szer folytonosan differenciálhatóak, míg F és g a bizonyítás első fele szerint $(p+1)$-szer folytonosan differenciálhatóak. Emiatt $f_1^{(p)}$ folytonosan differenciálható a K részintervallumon. Mivel $x_0 \in I_1$ tetszőleges volt, egy ilyen tulajdonságú K intervallum minden $x \in I_1$ pont körül választható, és azon $(p+1)$-szer folytonosan differenciálható lesz az f_1 függvény.

Ez pontosan azt jelenti, hogy az $f_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény $(p+1)$-szer folytonosan differenciálható. Analóg érveléssel ugyanezt vezethetjük le f_2-ről, hiszen a kváziösszeg belsejében lévő összeget alkotó függvények szerepei felcserélhetők. □

4.4. Alkalmazás, példák

Az előbbiekben igazolt két tétel alkalmazásaként elsőként a 3. Fejezetben bemutatott 3.5 Craigen–Páles-tétel egy kiegészített verzióját közöljük folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses műveletek kváziösszeg-reprezentációjával kapcsolatban. A 4.4 és 4.5 tételeket alkalmazva erősebb regularitást állíthatunk a h generátorfüggvényről, amennyiben maga a művelet kellően sima.

4.6. Következmény. *Legyen $p \in \mathbb{N}$ és legyen $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $H : I \times I \longrightarrow I$ egy p-szer folytonosan differenciálható, asszociatív, egyszerűsítéses művelet. Ekkor létezik egy összeadásra nézve zárt, nem korlátos $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint egy $h : J \longrightarrow I$ folytonos bijekció, melyre a h^{-1} függvény p-szer folytonosan differenciálható, $h|_{J+J}$ szintén p-szer folytonosan differenciálható, továbbá*

$$H(x,y) = h\left(h^{-1}(x) + h^{-1}(y)\right) \qquad (x,y \in I)\,. \tag{4.6}$$

Bizonyítás. A (4.6) egyenletben szereplő reprezentációt biztosító $h : J \longrightarrow I$ folytonos bijekció létezését a 3.5 Tétel garantálja. $J = h^{-1}(I)$ nyilván nyílt intervallum. A h folytonossága és injektivitása együttesen azt vonja maga után, hogy h szigorúan monoton, így emiatt h^{-1} is folytonos, szigorúan monoton. Ez azt jelenti, hogy a 4.5 Tétel feltételei teljesülnek: a 4.5 Tétel jelöléseit átvéve most $n = 2$, válasszuk f_1-et és f_2-t egyaránt h^{-1}-nek, valamint g-t $h|_{J+J}$-nek.

Ekkor tehát a 4.5 Tétel értelmében h^{-1} és $h|_{J+J}$ egyaránt p-szer folytonosan differenciálhatóak. □

4.7. *Példa.* Az előbbi Következményben nem állíthatjuk, hogy $h : J \longrightarrow I$ folytonosan differenciálható lenne. Példát adunk arra, amikor h még csak nem is differenciálható, miközben a generált művelet folytonosan differenciálható.

Legyen $J := \,]\,2, +\infty\,[$ és $h(x) = \sqrt[3]{x-3}$ minden $x \in J$ esetén. Ekkor $I = h(J) = \,]-1, +\infty\,[$ valamint $h^{-1}(y) = y^3 + 3$ minden $y \in I$ esetén. Ekkor h nem differenciálható az $x_0 = 3$ pontban, viszont

$$H(x,y) = h\left(h^{-1}(x) + h^{-1}(y)\right) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 3} \qquad (\,x, y \in \,]-1, +\infty\,[\,)$$

folytonosan differenciálható függvény.

4.8. *Megjegyzés.* A Bevezetésben megemlített szakirodalmi előzményekkel való kapcsolat bemutatása jegyében kiemeljük, hogy h^{-1} és $h|_{J+J}$ regularitási tulajdonságai más eszközökkel is levezethetők. Ugyanis a (4.6) egyenlet struktúrája olyan szempontból speciális, hogy csupán h és h^{-1} jelenik meg a kváziösszeg generátorfüggvényeként. Ez garantálja, hogy ebben az esetben Járai [26, 27] eredményeire is támaszkodhatunk. Például, ha a h^{-1} függvényt alkalmazzuk a (4.6) egyenlet mindkét oldalára, majd átrendezzük a kapott egyenletet, akkor a

$$h^{-1}(x) = h^{-1}\left(H(x,y)\right) - h^{-1}(y)$$

kifejezéshez jutunk. Erre viszont teljesülnek a [26, Theorem 5.3] tétel feltételei. Eszerint h^{-1}-ről belátható, hogy lokálisan Lipschitz, amiből aztán [26, Theorem 6.1]-ra hivatkozva azt kapjuk, hogy h^{-1} folytonosan differenciálható. Lépésről lépésre, h^{-1} magasabb rendű folytonos differenciálhatósága is levezethető [26, Theorem 7.1] használatával. Kiemeljük azonban, hogy általánosságban több változóval és/vagy több generátorfüggvénnyel rendelkező kváziösszegekre nem tűnik alkalmazhatónak ilyen jellegű megközelítés. Szintén nem találtunk kváziösszegekre jól hasznosítható eredményeket összetett függvényegyenletek regularitását tárgyaló dolgozatokban és összefoglaló cikkekben (például [22, 38]) sem.

4.5. A generátorokra vonatkozó feltételek

Az alábbi példában alátámasztjuk, hogy a generátorfüggvényekről okkal tételezünk fel valamilyen jellegű regularitást. Prezentálunk egy konstrukciót, mely rávilágít arra, hogy ha csupán annyit teszünk fel, hogy F *kváziösszeg alakú*, azaz

$$F(x_1, \dots, x_n) = g\big(f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n)\big)$$

de a generátorokról semmilyen előzetes regularitást nem követelünk meg, akkor F regularitása egyáltalán nem öröklődik. Magát a példát Laczkovich Miklós javasolta az *Aczél 100* konferencián [41] tartott előadásom utáni diszkussziónk, illetve azt követő üzenetváltásaink során.

4.9. *Példa* (Laczkovich, 2025). Legyen $n \in \mathbb{N}$ valamint legyen $\mathcal{B}$ az $\mathbb{R}$ egy Hamel-bázisa. Válasszuk meg a $B_1, \ldots, B_n \subset \mathcal{B}$ részhalmazokat oly módon, hogy mindegyik kontinuum számosságú legyen, valamint együttesen a $\mathcal{B}$ egy partícióját adják. Legyen továbbá minden $j = 1, \ldots, n$ esetén A_j a B_j halmaz $\mathbb{Q}$ fölötti lineáris burka. Ekkor nyilván minden $y \in \mathbb{R}$ valós számnak van egy egyértelmű báziselőállítása:

$$y = a_1 + \cdots + a_n, \qquad \text{ahol } a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n.$$

Mivel A_j számossága kontinuum, létezik $f_j : \mathbb{R} \longrightarrow A_j$ bijekció, minden $j = 1, \ldots, n$ esetén. Következésképpen, ha a $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) := f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)$$

módon definiáljuk, akkor ez egy $\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}$ közötti bijektív leképezés. Végezetül, bármely adott $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényhez definiáljuk a $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt az alábbi módon:

$$g(y) = F\left(\varphi^{-1}(y)\right) \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Ekkor speciálisan

$$F(x_1, \ldots, x_n) = g\big(\varphi(x_1, \ldots, x_n)\big) = g\big(f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)\big)$$

is teljesül. Vegyük észre, hogy itt $f_1, \ldots, f_n$ független az F választásától, viszont ezen függvények egyike sem folytonos (például amiatt, mert $f_j(\mathbb{R}) = A_j$ nem összefüggő), még akkor sem, ha F akár végtelen sokszor differenciálható.

5. fejezet

Hasznossági függvények karakterizációi

A fejezetben a korábbi szakaszok alkalmazásait mutatjuk be. Ezen a ponton megjegyezzük, hogy függvényegyenletek gyakran megjelennek a gazdasági matematikában. Egy már említett példa a konzisztens aggregáció problémája, mely az általánosított biszimmetria-egyenlettel ekvivalens (ld. [5]). Az olvasó figyelmébe ajánljuk Eichhorn [17] monográfiáját, mely áttekintést ad a témakör számos alapvető eredményéről.

5.1. Hasznossági függvények

A bevezetésben utaltunk rá, hogy az általunk vizsgált hasznossági függvények értelmezési tartománya minden esetben $\mathbb{R}^n$ valamilyen részhalmaza. Jelölje $\mathbb{R}^n_+$ a pozitív valós számok önmagával vett n-szeres Descartes szorzatát:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, : \, x_1 > 0, \ldots, x_n > 0 \} .$$

A következőkben felelevenítünk néhány közismert fogalmat a gazdasági matematika témaköréből, melyeket megtalálunk a mikroökonómia alapjait feldolgozó tankönyvek bármelyikében (ld. például [50]).

5.1. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n_+$ nemüres halmaz és $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Ekkor a D halmaz elemeit (n jószágból álló) *jószágkosarak*nak, az u függvényt pedig *hasznossági függvény*nek nevezzük. Továbbá az

$$x \preceq_u y \Longleftrightarrow u(x) \leq u(y) \qquad (x, y \in D)$$

módon definiált $\preceq_u \subseteq D \times D$ relációt az u függvény által generált *preferencia reláció*nak hívjuk.

5.2. *Megjegyzés.* A mikroökonómiában a 20. század elején, például Pareto [39, 40] munkái nyomán dominánssá váló ordinális hasznosságszemlélet keretében a hasznossági függvények kézenfekvő eszköznek bizonyultak a fogyasztói viselkedés, választási szokások számszerűsítésére. Hasznossági függvények szerepében ezért igen sokféle valós értékű függvény előfordul a szakirodalomban. Speciálisan, a függvényekre megkövetelt regularitás mértéke is széles spektrumon mozog.

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy a hasznossági függvények szigorúan monoton növekvőek minden változójukban. Ez azt a – számos esetben természetes – feltételt rögzíti, hogy nagyobb mennyiség fogyasztása nagyobb hasznosságot eredményez. Szintén feltételezzük a hasznossági függvények folytonosságát, mely gyakran felbukkan preferenciák hasznossági függvénnyel való reprezentációival kapcsolatos eredményekben. Például, az alábbi klasszikus tételt Debreu igazolta 1954-ben [14].

Tétel. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n_+$ összefüggő halmaz, $\preceq \subseteq D \times D$ pedig egy reláció. A $\preceq$ reláció pontosan akkor reflexív, tranzitív, teljes és folytonos ha létezik egy $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény úgy, hogy

$$x \preceq_u y \Longleftrightarrow u(x) \leq u(y) \qquad (x, y \in D).$$

A bizonyítás megtalálható Gáll József és Pap Gyula [21] tankönyvében is. A hasznossági függvények és a preferencia relációk kapcsolatát a gazdasági matematika szakirodalma többféle megközelítésben is tárgyalja (pl. [23]). Világos azonban, hogy amennyiben u hasznossági függvény és $\varphi : u(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő, akkor $\preceq_{\varphi \circ u} = \preceq_u$. Valóban, bármely $x, y \in D$ esetén

$$x \preceq_u y \Longleftrightarrow u(x) \leq u(y) \Longleftrightarrow \varphi(u(x)) \leq \varphi(u(y)) \Longleftrightarrow x \preceq_{\varphi \circ u} y.$$

Ezen összefüggés megfordítása is igaz.

5.3. Állítás. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n_+$ *egy halmaz, valamint* $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *és* $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *két hasznossági függvény úgy, hogy* $\preceq_u = \preceq_v$. *Ekkor létezik* $\varphi : u(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ *szigorúan monoton növekvő függvény úgy, hogy* $v = \varphi \circ u$.

Bizonyítás. A preferencia-relációk definíciója alapján $\preceq_u = \preceq_v$ azt jelenti, hogy

$$u(x) \leq u(y) \Longleftrightarrow v(x) \leq v(y)$$

minden $x, y \in D$ esetén. Ebből közvetlenül adódik, hogy $u(x) = u(y)$ akkor, és csak akkor teljesül, ha $v(x) = v(y)$. Következésképpen az $u(x) < u(y)$ egyenlőtlenség is ekvivalens a $v(x) < v(y)$ egyenlőtlenséggel, minden $x, y \in D$ vektorra.

A következő lépésben definiáljunk egy $\psi : u(D) \longrightarrow D$ függvényt a következőképpen: minden $c \in u(D)$ számhoz válasszuk a $\psi(c) \in \mathbb{R}^n$ vektort olyannak, hogy $\psi(c) \in u^{-1}(\{c\})$ teljesüljön. Ezután értelmezzük a $\varphi : u(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt az alábbi képlettel:

$$\varphi(c) := v(\psi(c)) \qquad\qquad \big(c \in u(D)\big).$$

A ψ definíciója miatt $u(z) = u(\psi(u(z)))$ teljesül minden $z \in D$ esetén, ami azt jelenti, hogy $v(z) = v(\psi(u(z))) = \varphi(u(z))$, azaz $v = \varphi \circ u$. Végezetül tetszőleges olyan $c, d \in u(D)$ számokra, melyekre $c < d$ teljesül, az igaz, hogy $u(\psi(c)) < u(\psi(d))$. Viszont ez ekvivalens a $v(\psi(c)) < v(\psi(d))$ egyenlőtlenséggel, ami éppen azt jelenti, hogy $\varphi(c) < \varphi(d)$. Ezáltal beláttuk, hogy φ valóban szigorúan monoton növekvő. □

5.4. *Megjegyzés.* **Ugyanazon osztályba tartozó hasznossági függvények.**
Az iménti észrevételek után tehát azt állapítjuk meg, hogy az u és v hasznossági függvények pontosan akkor generálják ugyanazt a preferencia-relációt, ha $v = \varphi \circ u$ áll fenn valamilyen szigorúan monoton növekvő φ valós függvénnyel.

Következésképpen, amikor a generált preferencia-reláció által meghatározott jelenségeket – például a racionális fogyasztó viselkedését (ld. [35]) –

vizsgáljuk, akkor nincs értelme különbséget tenni az u és $\varphi \circ u$ hasznossági függvények között, amennyiben φ szigorúan monoton növekvő. A következő szakaszokban néhány jól ismert hasznossági függvény osztályt vezetünk be, és vizsgáljuk különböző tulajdonságaikat. Ezeket az osztályokat adott formulákkal definiáljuk majd, viszont ezeknek a speciális alakú függvényeknek bármilyen, szigorúan monoton növekvő valós függvénnyel vett kompozícióját úgy tekintjük, hogy ugyanabba a függvényosztályba tartozik.

Ezen a ponton kiemelünk egy alapvető különbséget hasznossági függvények és az ún. *termelési függvények* között. Egy termelési függvény értékei önmagukban is jelentéssel bíró számadatok: adott termelési tényezők felhasználása mellett megadják a termelés volumenét. Ez a viselkedés jelentősen eltér a hasznossági függvényekre megfigyelt monoton transzformációkra való invarianciától. Az értekezésben szereplő, hasznossági függvényekre vonatkozó eredményeink kihasználják ezt az invariancia-tulajdonságot, emiatt vizsgálatainkat hasznossági függvényekre korlátozzuk.

5.2. Szeparálható jószágok

5.5. Definíció. Egy $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ hasznossági függvényt *szeparábilis*nek nevezünk (avagy azt mondjuk, hogy *u szeparálja a jószágokat*), ha minden $k = 1, \ldots, n$ index esetén léteznek $I_k \subseteq \mathbb{R}_+$ nyílt intervallumok, valamint $u_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növekvő ún. *parciális hasznossági függvények* oly módon, hogy $D \subseteq I_1 \times \cdots \times I_n$ illetve

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1) + \cdots + u_n(x_n)$$

teljesül bármely $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ vektorra.

5.6. *Megjegyzés.* A szeparábilis hasznossági függvények kiemelt jelentőséggel bírnak a hasznossági függvények között, a gazdasági matematikában előszeretettel alkalmazzák ezt a típust. Ez részben annak is köszönhető, hogy speciális alakjuk miatt kényelmesen lehet velük számolni.

Sokkal lényegesebb viszont az, amit egy szeparábilis hasznossági függvény a háttérben lévő preferencia-reláció kapcsán rögzít. A pontos állítás

Debreu [15] nevéhez fűződik. Amennyiben a fogyasztói kosarakat legalább három jószág alkotja, egy folytonos, teljes preferencia-reláció akkor és csak akkor reprezentálható szeparábilis hasznossági függvénnyel, ha az alábbi feltétel teljesül: bármely $I \subset \{1, \ldots, n\}$ indexhalmaz esetén a preferencia-relációnak azon kosarakra való megszorítása, melyek csak I-beli indexű jószágokat tartalmaznak, független a kimaradó (azaz $j \notin I$ indexű) jószágokhoz tartozó x_j mennyiségektől. A szeparabilitást további szempontok alapján részletesen tárgyalja Gorman [23].

Az 5.4 Megjegyzés alapján a szeparábilis hasznossági függvények valójában éppen a kváziösszeg alakú hasznossági függvényekkel esnek egybe. Sőt, a 4. Fejezet fő eredményei segítségével azt is kapjuk, hogy ha egy preferencia-reláció reprezentálható olyan, kváziösszeg alakú hasznossági függvénnyel, mely (magasabb rendű) folytonos differenciálhatósági feltételeket teljesít, akkor reprezentálható olyan szeparábilis hasznossági függvénnyel is, melynek parciális hasznossági függvényei ugyanilyen fokú regularitással rendelkeznek. Mindezt a következő állításban fogalmazzuk meg.

5.7. Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, és tegyük fel, hogy minden $k = 1, \ldots, n$ esetén $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint $u_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növekvő függvény. Legyen továbbá $\varphi : u_1(I_1) + \cdots + u_n(I_n) \longrightarrow \mathbb{R}$ szintén folytonos, szigorúan monoton növekvő, valamint $p \in \mathbb{N}$ jelöljön egy rögzített pozitív egész számot. Legyen a $v : I_1 \times \cdots \times I_n \longrightarrow \mathbb{R}$ hasznossági függvény az alábbi kváziösszeg alakban adott:*

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \varphi\big(u_1(x_1) + \cdots + u_n(x_n)\big) \qquad (x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n) .$$

Ekkor ha v p-szer folytonosan differenciálható, úgy az $u_1, \ldots, u_n$ függvények szintén p-szer folytonosan differenciálhatóak. Továbbá az

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1) + \cdots + u_n(x_n) \qquad (x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n)$$

módon értelmezett $u : I_1 \times \cdots \times I_n \longrightarrow \mathbb{R}$ szeparábilis hasznossági függvényre $\preceq_u = \preceq_v$ teljesül.

Bizonyítás. A 4.5 Tételt alkalmazva a v kváziösszegre, azonnal adódik, hogy a $\varphi, u_1, \ldots, u_n$ homeomorfizmusok p-szer folytonosan differenciálhatóak. Másrészről φ szigorúan monoton növekvő. Kihasználva, hogy $v =$

$\varphi \circ u$, az 5.3 Állítást használva azt konstatáljuk, hogy $\preceq_v = \preceq_{\varphi \circ u} = \preceq_u$ áll fenn. $\square$

Megjegyezzük, hogy bár az előző Tétel állítása magától értetődőnek látszik, valójában közel sem triviális. Csábító lehetőségnek tűnik egyszerűen csak a φ^{-1} függvénybe írni v-t, ezáltal az u szeparábilis hasznossági függvényhez jutva, ennek az összegnek a tagjairól pedig közvetlenül bizonyítani $u_1, \ldots, u_n$ regularitási tulajdonságait. Vegyük azonban észre, hogy ez nem működhet általában, mivel nem várható el a $\varphi^{-1} \circ v$ összetett függvénytől, hogy ez sima legyen. Valójában az is lehet, hogy ez az összetétel még csak nem is parciálisan differenciálható, amennyiben például φ' nem létezik, vagy 0-val egyenlő valamilyen pontban. Tehát a bizonyítás alapvetően támaszkodik a 4.5 Tételre.

5.3. Hasznossági függvények karakterizációi függvényegyenlet-rendszerek folytonos megoldásaiként

A következő szakaszban három nevezetes hasznossági függvény típust karakterizálunk függvényegyenlet-rendszerekkel.

5.3.1. Cobb–Douglas típusú hasznossági függvények

5.8. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nemüres halmaz és legyenek adottak az $A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ konstansok. Ha az $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ hasznossági függvény az

$$u(x_1, \ldots, x_n) = A \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \qquad \big((x_1, \ldots, x_n) \in D \big)$$

képlettel értelmezett, akkor azt mondjuk, hogy u *Cobb–Douglas típusú hasznossági függvény.*

A Cobb és Douglas 1928-as [11] dolgozatában való megjelenése után a 20. század során népszerűvé váló függvényeket különféle kontextusban alkalmazta többek között Samuelson, Solow, Nerlove és sok további neves közgazdász (az érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk Douglas [16] áttekintő dolgozatát a témáról). Népszerűségük egyik oka az egyszerű struktúrájuk, melyek nagyban megkönnyítik egyrészt a velük való számolást, másrészt megfigyelt adatokra illesztésük esetén a paraméterek becslését. A függvényosztály ezen jó tulajdonságaira világít rá Kojić [29] dolgozata, melyben a hasznosság maximalizálásának problémáját lényegében elemi algebrai egyenlőtlenségek segítségével oldja meg, a függvény egyszerű szerkezetére támaszkodva.

Az 5.4 Megjegyzés alapján Cobb–Douglas típusú hasznossági függvénynek tekintjük egy fenti alakú függvény bármely, szigorúan monoton növekvő függvénnyel vett kompozícióját is.

5.9. *Példa (A Cobb–Douglas hasznossági függvények szeparálják a jószágokat).* Könnyű látni, hogy a Cobb–Douglas hasznossági függvények ekvivalensek bizonyos szeparábilis hasznossági függvényekkel. Valóban, ha $I_1, \ldots, I_n$ nemüres nyílt intervallumai $\mathbb{R}_+$-nek, akkor

$$u(x_1, \ldots, x_n) = A \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} = A \cdot \exp\big(\alpha_1 \cdot \ln(x_1) + \ldots + \alpha_n \cdot \ln(x_n)\big)$$

teljesül minden $x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n$ esetén. Azaz u egy kváziösszeg, így ekvivalens a szeparábilis

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1 \cdot \ln(x_1) + \cdots + \alpha_n \cdot \ln(x_n)$$

hasznossági függvénnyel.

A folytatásban megadunk egy függvényegyenlet-rendszert, melynek folytonos megoldásai éppen a Cobb–Douglas típusú hasznossági függvények. Mielőtt erre sor kerülne, megjegyezzük, hogy a szokásos szorzás művelete, melyet $\cdot$ módon jelölünk, egy folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses művelet $\mathbb{R}_+$-on. Ezért ha $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}_+^n$ adott halmaz, $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig adott függvény, akkor a 3.2.2. szakaszban bevezetett jelöléssel $G_k(\,\cdot\,, S, u)$ jóldefiniált halmaz, minden $k = 1, \ldots, n$ index esetén.

5.10. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nyílt, összefüggő halmaz, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig folytonos, minden változójában szigorúan monoton növekvő. Az u*

hasznossági függvény pontosan akkor Cobb–Douglas típusú, ha minden $k = 1, \ldots, n$ esetén létezik

$$\Psi_k : G_k\left(\,\cdot\,, D, u\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvény a következő tulajdonsággal:
minden olyan $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ pontra és $t_k \in \mathbb{R}_+$ számra, amelyre

$$(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k \cdot t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in D$$

teljesül, fennáll az

$$u\,(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k \cdot t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \Psi_k\left(u\,(x_1, \ldots, x_n), t_k\right)$$

egyenlet.

Bizonyítás. Először is, ha u Cobb–Douglas típusú hasznossági függvény, akkor bármilyen szigorúan monoton növekvő valós függvénnyel vett kompozíciója is az. Ezért feltehető, hogy u alakja éppen

$$u\,(x_1, \ldots, x_n) = \varphi\,(x_1^{\alpha_1} \cdot \ \ldots \ \cdot x_n^{\alpha_n}),$$

valamilyen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pozitív kitevőkkel és egy φ szigorúan monoton növekvő homeomorfizmussal. A 3.9 Tétel jelöléseivel élve, ha feltesszük, hogy $I_1 = \cdots = I_n = \mathbb{R}_+$, valamint az $F_1 = \cdots = F_n$ műveletek mindegyike a szokásos szorzás, továbbá az $f_1 = \cdots = f_n$ homeomorfizmusok mindegyike az exponenciális függvény, végül pedig $g = \varphi \circ \exp$, akkor

$$\begin{aligned} u\,(x_1, \ldots, x_n) &= \varphi\,(x_1^{\alpha_1} \cdot \ \ldots \ \cdot x_n^{\alpha_n}) = \varphi \circ \exp\bigl(\ln\,(x_1^{\alpha_1} \cdot \ \ldots \ \cdot x_n^{\alpha_n})\bigr) \\ &= \varphi \circ \exp\bigl(\alpha_1 \ln(x_1) + \ \ldots \ + \alpha_n \ln(x_n)\bigr) \\ &= g\bigl(\alpha_1 f_1^{-1}(x_1) + \cdots + \alpha_n f_n^{-1}(x_n)\bigr) \end{aligned}$$

teljesül minden $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ vektorra. Következésképpen, a 3.9 Tétel szerint u megoldása az

$$u\,(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k \cdot t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \Psi_k\left(u\,(x_1, \ldots, x_n), t_k\right)$$

függvényegyenletnek minden $k = 1, \ldots, n$ esetén.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy az u folytonos függvény megoldása ennek az egyenletrendszernek. Felhasználva, hogy $x \cdot y = \exp(\ln(x) + \ln(y))$, a 3.9 Tétel és az azt követő 3.10 Megjegyzés garantálja, hogy létezik $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor, valamint egy szigorúan monoton, folytonos $g : p_a(P(D, f_1, \ldots, f_n)) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény (ahol $f_1 = \cdots = f_n = \exp$), amellyel

$$u(x_1, \ldots, x_n) = g\big(\alpha_1 \ln(x_1) + \cdots + \alpha_n \ln(x_n)\big) = g \circ \ln(x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n})$$

teljesül minden $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ vektorra. Mivel g szigorúan monoton, ln szigorúan monoton növekvő, u pedig minden változójában szigorúan monoton növekvő, nyilvánvalóan azt kapjuk, hogy az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ konstansok mindegyike 0 -tól különböző valós szám, melyek előjelei megegyeznek. Amennyiben negatívak volnának, akkor mindegyiket (-1)-gyel szorozva, g helyett pedig a $t \mapsto g(-t)$ függvényt választva a generált u függvény változatlan marad. Tehát feltehetjük, hogy $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$, és ebben az esetben nyilván $g \circ \ln$ szigorúan monoton növekvő. Tehát azt kaptuk, hogy u valóban egy Cobb–Douglas típusú hasznossági függvény. $\square$

5.11. *Megjegyzés.* **A Cobb–Douglas típusú hasznossági függvények jellemzése**

Mint ahogyan a Bevezetésben utaltunk rá, a fenti függvényegyenlet-rendszer, illetve a továbbiakban bemutatásra kerülő analóg változatai a szóban forgó nevezetes hasznossági függvény osztályok kvalitatív jellemzését is megadják. Azaz olyan kritériumokat rögzítenek, melyek konkrét fogyasztói piacok esetén a megfigyelt preferenciák alapján ellenőrizhetők, és ezáltal segítenek annak eldöntésében, hogy a piacot észszerű-e az adott típusú hasznossági függvénnyel leírni.

Az 5.10 Tétel szemléletesen azt fejezi ki, hogy egy hasznossági függvény pontosan akkor Cobb-Douglas típusú, ha a következő teljesül: tetszőleges, rögzített jószágkosár esetén, ha valamely jószág mennyiségét adott arányban megváltoztatjuk, akkor az így kapott új jószágkosár hasznossága csupán az eredeti kosár hasznosságától és a változtatás ezen arányától függ, a kosár tényleges tartalmától nem.

Két jószágból álló kosarak esetén a fenti észrevétel a közömbösségi görbék (vagyis a hasznossági függvény szintvonalai, ld. [50]) segítségével is megfogalmazható: egy hasznossági függvény pontosan akkor Cobb–Douglas típusú, ha az

$$(x_1\,, x_2) \mapsto (t_1 x_1\,, t_2 x_2)$$

transzformáció bármilyen $t_1\,, t_2 > 0$ esetén közömbösségi görbét közömbösségi görbébe visz át. Természetesen magasabb dimenzióban is igaz az, hogy az

$$(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n) \mapsto (t_1 x_1\,, t_2 x_2\,, \ldots, t_n x_n) \tag{5.1}$$

transzformáció tetszőleges $t_1\,, t_2\,, \ldots, t_n > 0$ esetén a hasznossági függvény bármely szinthalmazát egy másikba viszi át. Viszont ebben az esetben nyilván nem közömbösségi görbékről, hanem „közömbösségi felületekről" kellene beszélnünk, ami nem egy standard fogalom a gazdasági matematikában.

5.12. *Megjegyzés.* Külön kiemeljük, hogy a Cobb–Douglas hasznossági függvények most leírt jellemzéséhez nagyon hasonló állítás szerepel Trockel [49] cikkében. Ebben *költségvetés-invarianciá*nak nevezi a szerző azt a tulajdonságot, hogy egy preferencia-reláció invariáns az (5.1) alakú transzformációkra, minden $t_1\,, \ldots, t_n > 0$ esetén. Ezt a terminológiát használva belátja, hogy bármely $\mathbb{R}^n_+$-en értelmezett, költségvetés-invariáns, felülről félig folytonos preferencia-reláció reprezentálható egy Cobb–Douglas típusú hasznossági függvénnyel.

Összehasonlítva ezt az 5.10 Tétellel és az 5.11 Megjegyzéssel, Trockel eredményében a költségvetés-invariancia formálisan erősebb követelmény, mint az általunk tekintett függvényegyenlet-rendszer teljesítése, másrészről a felülről félig folytonosság nyilván gyengébb feltétel, mint a folytonosság. A fő különbséget mégis az értelmezési tartományok okozzák: az 5.10 tételben az egész $\mathbb{R}^n_+$ helyett annak csupán egy D résztartományán értelmezett hasznossági függvényekre is tudunk jellemzést adni.

5.3.2. CES típusú hasznossági függvények

Az előző szakasz mintájára most az úgynevezett CES (Constant Elasticity of Substitution) típusú hasznossági függvényeket tekintjük. A CES típusú függvényeket (először termelési függvényekként alkalmazva) Arrow, Chenery, Minhas és Solow mutatták be [6] munkájukban.

5.13. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nemüres halmaz, és legyenek $A > 0$, $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $\alpha_i > 0$ adott konstansok. Ha az $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ hasznossági függvény az

$$u(x_1, \ldots, x_n) = A \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\varrho} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \qquad \big((x_1, \ldots, x_n) \in D \big)$$

képlettel értelmezett, akkor azt mondjuk, hogy *u CES típusú hasznossági függvény.*

5.14. *Megjegyzés.* Az ilyen típusú függvények speciális alakja miatt számos lényeges tulajdonságukat az $x \mapsto x^{\varrho}$ hatványfüggvény viselkedése határozza meg, mely természetesen a ϱ paramétertől függ. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ha $\varrho < 1$, akkor egy ϱ paraméterű CES típusú hasznossági függvény szigorúan kvázi-konkáv. A kvázi-konkávitást Sydsæter, Hammond, Strøm és Berck is mikroökonómiai vizsgálatok hasznos matematikai eszközeként említik [7, 24] monográfiáikban. Ennek oka, hogy egy hasznossági függvény kvázi-konkávitása azt jelenti, hogy azon jószágkosarak, melyek elérnek egy adott hasznossági szintet, konvex halmazt alkotnak. Ez pedig annak a jelenségnek felel meg, hogy két, azonos hasznosságú kosár konvex kombinációját véve a kombinált kosár hasznossága nem csökkenhet. Egy diverzifikálásra törekvő fogyasztó esetén ez a feltétel teljesen természetes.

Következésképpen előfordul, hogy a CES típusú hasznossági függvények paraméterére a $\varrho < 1$ feltételt is megkövetelik. A szakasz fő eredményének megfogalmazásában és bizonyításában viszont ez semmilyen jelentőséggel nem bír: amennyiben a szigorúan kvázi-konkáv CES hasznossági függvényeket kívánjuk karakterizálni, akkor a következő állításokban a $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ feltételt a $\varrho \in \,]-\infty, 0\,[\, \cup \,]\,0, 1\,[$ feltételre cseréljük.

A CES típusú hasznossági függvények függvényegyenlet-rendszerrel való jellemzésére szintén a 3.9 Tételt használjuk. Ehhez rögzített $\varrho \neq 0$ paraméter esetén értelmezzük az $R_{\varrho} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt a következő módon:

$$R_\varrho(u,v) = (u^\varrho + v^\varrho)^{\frac{1}{\varrho}} \qquad (u,v \in \mathbb{R}_+)\,. \tag{5.2}$$

5.15. Állítás. *Az* (5.2) *egyenlettel értelmezett* $R_\varrho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *függvény egy folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses művelet, minden* $\varrho \neq 0$ *paraméter esetén.*

Bizonyítás. Az $r_\varrho(x) = x^{\frac{1}{\varrho}}$ módon értelmezett $r_\varrho : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ függvény folytonos, sőt differenciálható. Deriváltfüggvénye

$$r'_\varrho(x) = \frac{1}{\varrho} x^{\frac{1}{\varrho}-1}\,,$$

ami $\varrho > 0$ esetén pozitív, $\varrho < 0$ esetén pedig negatív. Bármelyik is teljesüljön, r_ϱ garantáltan szigorúan monoton, így invertálható, és inverze a szintén folytonos $x \mapsto x^\varrho$ függvény. Ezért $r_\varrho : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ homeomorfizmus. Továbbá minden $u, v \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$R_\varrho(u,v) = (u^\varrho + v^\varrho)^{\frac{1}{\varrho}} = r_\varrho(r_\varrho^{-1}(u) + r_\varrho^{-1}(v)),$$

tehát a 3.6 Megjegyzés szerint R_ϱ folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses művelet. □

Ezen a ponton válik világossá, hogy a 3.9 Tétel előkészítése során miért volt szükség a Craigen–Páles-tételre ahelyett, hogy Aczél valamelyik, folytonos csoportműveletekre vonatkozó reprezentációs tételére hivatkoztunk volna. Vegyük ugyanis észre, hogy az $(\mathbb{R}_+\,, R_\varrho)$ félcsoportnak nincs egységeleme.

5.16. Tétel. *Legyen* $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n_+$ *nyílt, összefüggő halmaz,* $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *pedig folytonos, minden változójában szigorúan monoton növekvő. Az* u *hasznossági függvény pontosan akkor CES típusú, ha valamilyen alkalmas* $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *paraméter mellett minden* $k = 1, \ldots, n$ *esetén létezik*

$$\Psi_k : G_k\,(R_\varrho\,, D, u) \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvény a következő tulajdonsággal:

minden olyan $(x_1, \dots, x_n) \in D$ *pontra és* $t_k \in \mathbb{R}_+$ *számra, amelyre*

$$\big(x_1, \dots, x_{k-1}, R_\varrho(x_k, t_k), x_{k+1}, \dots, x_n\big) \in D$$

teljesül, fennáll az

$$u\big(x_1, \dots, x_{k-1}, R_\varrho(x_k, t_k), x_{k+1}, \dots, x_n\big) = \Psi_k\left(u(x_1, \dots, x_n), t_k\right)$$

egyenlet.

Bizonyítás. A korábbihoz hasonlóan, ha u CES típusú hasznossági függvény, akkor bármilyen szigorúan monoton növekvő valós függvénnyel vett kompozíciója is ilyen. Ezért feltehető, hogy u éppen

$$u(x_1, \dots, x_n) = \varphi\left(\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^\varrho\right)^{\frac{1}{\varrho}}\right) \qquad \big((x_1, \dots, x_n) \in D\big)$$

alakú, valamilyen $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ konstansokkal, illetve φ homeomorfizmussal.

A 3.9 Tétel jelöléseivel élve, ha $I_j = \mathbb{R}_+$, $F_j = R_\varrho$, továbbá $f_j(x) = x^{\frac{1}{\varrho}}$ valamint $g(x) = \varphi\left(x^{\frac{1}{\varrho}}\right)$ (ahol $j = 1, \dots, n$ és $x \in \mathbb{R}_+$), akkor

$$u(x_1, \dots, x_n) = \varphi\left(\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^\varrho\right)^{\frac{1}{\varrho}}\right) = g\left(\alpha_1 f_1^{-1}(x_1) + \dots + \alpha_n f_n^{-1}(x_n)\right)$$

teljesül minden $(x_1, \dots, x_n) \in D$ vektorra. Így tehát a 3.9 Tétel szerint u valóban megoldása az

$$u\big(x_1, \dots, x_{k-1}, R_\varrho(x_k, t_k), x_{k+1}, \dots, x_n\big) = \Psi_k\left(u(x_1, \dots, x_n), t_k\right)$$

függvényegyenletnek, minden $k = 1, \dots, n$ esetén.

A megfordítás igazolásához tegyük most fel, hogy u megoldása ennek a függvényegyenlet-rendszernek. Ekkor a 3.9 Tétel és a 3.10 Megjegyzés szerint

$$u(x_1, \dots, x_n) = g\left(a_1 x_1^\varrho + \dots + a_n x_n^\varrho\right)$$

teljesül egy $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorral és $g : p_a(P(D, f_1, \ldots, f_n)) \longrightarrow \mathbb{R}$ homeomorfizmussal a D halmazon (itt $f_1 = \cdots = f_n$ éppen az $\frac{1}{\varrho}$ kitevős hatványfüggvény). Világos, hogy az $x \mapsto x^\varrho$ hatványfüggvény illetve g is szigorúan monotonak, míg u a feltétel szerint szigorúan monoton növekvő minden változójában. Egyszerűen végiggondolható, hogy emiatt $a_1, \ldots, a_n$ nullától különböző, azonos előjelű valós számok. Ezért feltehető, hogy $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ (szükség esetén mindegyiket (-1)-gyel végigszorozva, a g függvényt pedig $t \mapsto g(-t)$-re cserélve). Ezáltal az u függvény

$$u(x_1, \ldots, x_n) = g\left(\left((a_1 x_1^\varrho + \cdots + a_n x_n^\varrho)^{\frac{1}{\varrho}}\right)^\varrho\right)$$

alakba írható. Itt $(a_1 x_1^\varrho + \cdots + a_n x_n^\varrho)^{\frac{1}{\varrho}}$ biztosan növekvő minden változójában (a ϱ előjelétől függetlenül), hiszen az $a_1, \ldots, a_n$ együtthatók pozitívak. Viszont mivel u minden változójában növekvő, így a külső függvény, vagyis g és az $x \mapsto x^\varrho$ hatványfüggvény kompozíciója szigorúan monoton növekvő kell, hogy legyen. Ez éppen azt jelenti, hogy u valóban CES típusú hasznossági függvény.

□

5.17. *Megjegyzés.* **CES típusú hasznossági függvények karakterizációja**

Az 5.16 Tétel az alábbi módon értelmezhető. Egy u hasznossági függvény pontosan akkor CES típusú (ϱ paraméterrel), ha bármely két azonos hasznosságú $(x_1, \ldots, x_n)$ és $(y_1, \ldots, y_n)$ jószágkosár esetén a következő teljesül: bármely $t > 0$ esetén, ha egy adott termék x_k illetve y_k mennyiségét rendre $\left(x_k^\varrho + t^\varrho\right)^{\frac{1}{\varrho}}$-ra illetve $\left(y_k^\varrho + t^\varrho\right)^{\frac{1}{\varrho}}$-ra változtatjuk, akkor az újonnan kapott két jószágkosár hasznossága is meg fog egyezni egymással (bármely $k = 1, \ldots, n$ esetén).

Két jószágból álló kosarak esetén átfogalmazhatjuk előbbi észrevételünket a közömbösségi görbékre támaszkodva. Egy u hasznossági függvény pontosan akkor CES típusú (ϱ paraméterrel), ha az

$$(x_1, x_2) \mapsto \left((x_1^\varrho + t_1^\varrho)^{\frac{1}{\varrho}}, (x_2^\varrho + t_2^\varrho)^{\frac{1}{\varrho}}\right)$$

transzformáció bármilyen $t_1, t_2 > 0$ esetén közömbösségi görbét közömbösségi görbébe visz át.

5.3.3. Standardizált Mádi-Nagy–Prékopa típusú hasznossági függvények

Mádi-Nagy Gergely és Prékopa András [31] cikkükben javasolták a következő hasznossági függvényt. Legyenek $k \geq 1$, $\alpha_i > 0$, $a_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ adott konstansok és definiáljuk az

$$S = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ e^{\alpha_i x_i + a_i} > 2, i = 1, \ldots, n \}.$$

halmazt. Ekkor tekintsük a $U : S \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt az alábbi módon:

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \ln \left(k \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(e^{\alpha_i x_i + a_i} - 1 \right) - 1 \right) \qquad \big((x_1, \ldots, x_n) \in S \big).$$

Megjegyezzük, hogy szigorúan monoton transzformációkkal az U függvény

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \left(e^{\alpha_i x_i + a_i} - 1 \right)$$

alakra hozható. Amennyiben ebben a függvényben az a_i konstansokat az exponenciális függvényből eltávolítjuk és azokat az összeg tagjainak szorzóiként szerepeltetjük, akkor egy olyan függvényosztályt kapunk, aminek tagjai az egész $\mathbb{R}^n_+$-en értelmezve vannak, és speciális esetként tartalmazzák a

$$\sum_{i=1}^{n} \ln (e^{\alpha_i x_i} - 1)$$

alakú Mádi-Nagy–Prékopa típusú hasznossági függvényeket. Ez motivál bennünket a standardizált Mádi-Nagy–Prékopa típusú hasznossági függvények bevezetésére.

5.18. Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}^n_+$ nemüres halmaz és legyenek $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ valamint $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ rögzített konstansok. Ekkor az $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$

hasznossági függvényt *standardizált Mádi-Nagy–Prékopa típusú hasznossági függvény*nek nevezzük, ha

$$u\,(x_1\,,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_i\ln\left(e^{\alpha_i x_i}-1\right)$$

alakban áll elő, minden $(x_1\,,\ldots,x_n)\in D$ esetén.

Nyilvánvaló, hogy a függvény folytonos. Világos továbbá, hogy szeparábilis is. Az ugyanis triviális, hogy egyváltozós függvények összege, ráadásul a parciális hasznossági függvények deriváltjait kiszámolva minden $i=1,\ldots,n$ esetén

$$\big(a_i\ln\left(e^{\alpha_i x_i}-1\right)\big)'=\frac{a_i}{e^{\alpha_i x_i}-1}\cdot\alpha_i e^{\alpha_i x_i}>0$$

adódik, ugyanis $x_i>0$, így $e^{\alpha_i x_i}>1$. Vagyis u minden változójában szigorúan monoton növekvő.

A továbbiakban erre a hasznossági függvényre is szeretnénk a korábbiakhoz hasonló jellemzést adni. A 3.9 Tételen alapuló, összetett függvényegyenlet-rendszerrel történő karakterizáció során a változókban szereplő transzformációk így egy-egy paramétert fognak tartalmazni. Ezen transzformációkra bevezetünk egy külön jelölést.

5.19. *Jelölés.* Tetszőleges $b\in\mathbb{R}_+$ esetén értelmezzük az $M_b:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ függvényt az

$$M_b(u,v)=\frac{1}{b}\ln\Big((e^{bu}-1)(e^{bv}-1)+1\Big)\qquad(\,u,v\in\mathbb{R}_+\,)$$

képlettel.

5.20. Állítás. *Minden $b\in\mathbb{R}_+$ esetén $M_b:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses művelet.*

Bizonyítás. Tekintsük az $m_b:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ függvényt az alábbi módon:

$$m_b(x):=\frac{1}{b}\ln(e^x+1)$$

Ez nyilván folytonos, sőt differenciálható is, továbbá

$$m_b'(x) = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{e^x + 1} \cdot e^x > 0.$$

Tehát m_b szigorúan monoton növekvő. Emellett vegyük észre, hogy bármely $y \in \mathbb{R}_+$ esetén $e^{by} > 1$, tehát értelmezhető az $m_b^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ inverzfüggvény:

$$m_b^{-1}(y) = \ln(e^{by} - 1).$$

Nyilván az m_b^{-1} szintén folytonos, szigorúan monoton növekvő. Vagyis $m_b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ valójában egy homeomorfizmus, amivel ráadásul

$$\begin{aligned} m_b\left(m_b^{-1}(u) + m_b^{-1}(v)\right) &= \frac{1}{b} \ln\Big(\exp\Big(\ln\Big(e^{bu} - 1\Big) + \ln\Big(e^{bv} - 1\Big)\Big) + 1\Big) \\ &= \frac{1}{b} \ln\Big(\Big(e^{bu} - 1\Big)\Big(e^{bv} - 1\Big) + 1\Big) = M_b\left(u, v\right), \end{aligned}$$

így a 3.6 Megjegyzés értelmében M_b folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses művelet. □

5.21. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nyílt, összefüggő halmaz, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig folytonos, minden változójában szigorúan monoton növekvő. Az u hasznossági függvény pontosan akkor standardizált Mádi-Nagy–Prékopa típusú, ha minden $k = 1, \ldots, n$ létezik olyan $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$ konstans és*

$$\Psi_k : G_k(M_{\alpha_k}, D, u) \longrightarrow \mathbb{R}$$

függvény, mely rendelkezik a következő tulajdonsággal:

minden olyan $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ pontra és $t_k \in \mathbb{R}_+$ számra, amelyre

$$\big(x_1, \ldots, x_{k-1}, M_{\alpha_k}(x_k, t_k), x_{k+1}, \ldots, x_n\big) \in D$$

fennáll, teljesül az

$$u\big(x_1, \ldots, x_{k-1}, M_{\alpha_k}(x_k, t_k), x_{k+1}, \ldots, x_n\big) = \Psi_k\left(u\left(x_1, \ldots, x_n\right), t_k\right)$$

egyenlet.

Bizonyítás. A szükségességhez először idézzük fel, hogy az 5.20 Állítás bizonyításában látottak szerint minden $k = 1, \ldots, n$ és bármely $u, v \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$M_{\alpha_k}(u, v) = m_{\alpha_k}\left(m_{\alpha_k}^{-1}(u) + m_{\alpha_k}^{-1}(v)\right),$$

ahol $m_{\alpha_k}(x) = \frac{1}{\alpha_k}\ln(e^x + 1)$. Továbbá, ha u standardizált Mádi-Nagy–Prékopa típusú, akkor felírható

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \ln\left(e^{\alpha_k x_k} - 1\right)\right) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} a_k m_{\alpha_k}^{-1}(x_k)\right)$$

alakban is, ahol φ szigorúan monoton növekvő homeomorfizmus. Ezért a 3.9 Tétel szerint u minden $k = 1, \ldots, n$ esetén megoldása az

$$u\left(x_1, \ldots, x_{k-1}, M_{\alpha_k}(x_k, t_k), x_{k+1}, \ldots, x_n\right) = \Psi_k\left(u\left(x_1, \ldots, x_n\right), t_k\right)$$

függvényegyenletnek, alkalmas Ψ_k függvénnyel.

Megfordítva, legyenek $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ adott konstansok és tegyük fel, hogy u egy megoldása a fenti függvényegyenlet-rendszernek. Ekkor használjuk a 3.9 Tételt és a 3.10 Megjegyzést. Mivel teljesül az $M_{\alpha_k}(u, v) = m_{\alpha_k}\left(m_{\alpha_k}^{-1}(u) + m_{\alpha_k}^{-1}(v)\right)$ felírás az $m_{\alpha_k} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ homeomorfizmussal, így u előáll

$$u\left(x_1, \ldots, x_n\right) = g\left(a_1 m_{\alpha_1}^{-1}(x_1) + \cdots + a_n m_{\alpha_n}^{-1}(x_n)\right)$$

alakban, ahol $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ és a $g : p_a\left(P\left(D, m_{\alpha_1}, \ldots, m_{\alpha_n}\right)\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton, folytonos. Az 5.20 Állítás igazolása során láttuk, hogy az m_{α_k} függvény szigorúan monoton növekvő. Azonban u a feltevés szerint minden változójában szigorúan monoton növekvő, ezért g monotonitása miatt $a_1, \ldots, a_n$ mindegyike azonos előjelű kell, hogy legyen. Feltehető, hogy mind pozitívak és g növekvő, különben tekintsük ellentettjüket és a $t \mapsto g(-t)$ függvényt. Ekkor u a definíció és az 5.4 Megjegyzés alapján standardizált Mádi-Nagy–Prékopa típusú. □

5.22. *Megjegyzés.* **Standardizált Mádi-Nagy–Prékopa típusú hasznossági függvények jellemzése**
A korábbiakhoz hasonlóan ezen állítás azt fejezi ki, hogy ha $(x_1, \ldots, x_n)$ és

$(y_1, \ldots, y_n)$ azonos hasznosságú jószágkosarak, akkor bármely $k = 1, \ldots, n$ és $t_k > 0$ esetén a k-adik jószág x_k illetve y_k mennyiségét $M_{\alpha_k}(x_k, t_k)$-ra valamint $M_{\alpha_k}(y_k, t_k)$-ra változtatva a kapott kosarak ismét azonos hasznosságúak lesznek.

Két jószág esetén közömbösségi görbékkel leírva mindez azt jelenti, hogy egy u hasznossági függvény pontosan akkor standardizált Mádi-Nagy–Prékopa típusú α_1, α_2 együtthatókkal, ha az

$$(x_1, x_2) \mapsto \big(M_{\alpha_k}(x_1, t_1), M_{\alpha_k}(x_2, t_2)\big)$$

transzformáció bármilyen $t_1, t_2 > 0$ esetén közömbösségi görbét közömbösségi görbébe visz át.

Összefoglaló

A disszertációban a Bevezetés után az eredményeket négy fejezetre tagolva mutatjuk be. A 2. Fejezetben folytonos, eltolásinvariáns függvények, a 3. Fejezetben összetett függvényegyenlet-rendszerek folytonos megoldásai, a 4. Fejezetben kváziösszegek regularitás-megőrzése; végül pedig az 5. Fejezetben hasznossági függvények karakterizációi kerülnek a középpontba. A közölt eredmények alapjául a [46, 48] dolgozatok szolgálnak.

Motiváció, eltolásinvariáns függvények

A disszertációban bemutatott kutatásokat elsődlegesen hasznossági függvények vizsgálata motiválta, tekintve, hogy ezek jelentik a gazdasági matematikában a fogyasztói magatartás modellezésének fő eszközét. Alapvető célkitűzés, hogy a leggyakrabban alkalmazott hasznossági függvények (pl.: Cobb–Douglas [11], CES típusú [6] hasznossági függvények) esetén olyan, könnyen ellenőrizhető kritériumokat adjunk, melyek segítségével egyszerűen eldönthető, hogy egy adott fogyasztó magatartását érdemes-e az adott típusú hasznossági függvénnyel reprezentálni. Ehhez a fő matematikai eszköz összetett függvényegyenletek folytonos megoldásainak meghatározása.

Az értekezésben tekintett összetett függvényegyenlet-rendszereket a Boros Zoltán [9] cikkében szereplő

$$F\left(x+t,y\right)=\Phi_1\left(F(x,y),t\right)$$
$$F\left(x,y+s\right)=\Phi_2\left(F(x,y),s\right)$$

egyenletrendszer motiválta. Itt F,Φ_1,Φ_2 egyaránt ismeretlen, valós értékű függvények. A [9] dolgozat fő eredménye szerint a nyílt, összefüggő tartományon értelmezett folytonos F megoldások előállnak egy folytonos, szigorúan monoton valós függvény és egy lineáris funkcionál kompozíciójaként. Ennek magasabb dimenziós analóg változatát, az

$$F(x_1, \ldots, x_j + t_j, \ldots, x_n) = \Phi_j(F(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n), t_j) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

egyenletrendszert vizsgáljuk és oldjuk meg az értekezés 3. Fejezetében. Belátható, hogy ennek F megoldásai rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal: bármely $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén, ha $F(x) = F(y)$, akkor $F(x+t) = F(y+t)$ is igaz minden olyan $t \in \mathbb{R}^n$ vektorra, ami párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel. Ez a tulajdonság motiválja a következő fogalmak bevezetését.

Definíció. Legyen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz. Azt mondjuk, hogy az $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény *eltolásinvariáns*, ha az $F(x) = F(y)$ egyenlőségből $F(x+t) = F(y+t)$ következik, bármely olyan $x, y, t \in \mathbb{R}^n$ vektorokra, melyekre $x, y, x+t, y+t \in S$ teljesül.

Definíció. Legyen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nemüres halmaz, $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Tegyük fel, hogy bármely $x, y \in S$ pontpárra és bármely olyan $0 < r \in \mathbb{R}$ sugárra, mellyel igazak a $B(x,r) \subseteq S$ és $B(y,r) \subseteq S$ tartalmazások, a következő feltétel teljesül: ha $F(x) = F(y)$, akkor $F(x+t) = F(y+t)$ is fennáll minden $t \in B(0,r)$ esetén. Ekkor az F függvényt *lokálisan eltolásinvariáns*nak nevezzük.

Egyszerűen belátható, hogy nyílt, konvex tartományon értelmezett függvények esetén az eltolásinvariancia ekvivalens a lokális eltolásinvarianciával.

Állítás. *Legyen $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, konvex halmaz, továbbá $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$ lokálisan eltolásinvariáns függvény. Ekkor F eltolásinvariáns.*

Folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvények struktúrájának megértéséhez kulcsfontosságú az alábbi észrevétel.

Tétel. *Legyen $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nyílt, konvex halmaz, valamint $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvény. Továbbá legyen adott*

$k \in \mathbb{N}$ illetve egy k elemű pontrendszer: $x_1, x_2, \ldots, x_k \in K$. Amennyiben valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ számra

$$F(x_1) = F(x_2) = \cdots = F(x_k) = \alpha,$$

akkor $F(p) = \alpha$ teljesül minden olyan $p \in K$ pontban, mely benne van az $x_1, \ldots, x_k$ pontok affin burkában.

Ez a tétel akkor alkalmazható hatékonyan, ha garantálni tudjuk olyan, kellően sok pontot tartalmazó affin független pontrendszer létezését, melynek tagjaiban F ugyanazt az értéket veszi fel. A következő, folytonos (nem feltétlenül eltolásinvariáns) függvényekre vonatkozó általános egzisztenciatételünk értelmében ilyen pontrendszerek léteznek.

Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig egy folytonos függvény. Ekkor léteznek $x_1, \ldots, x_n \in D$ pontok oly módon, hogy $x_1, \ldots, x_n$ affin független pontrendszer, valamint*

$$F(x_1) = \cdots = F(x_n).$$

Ezen állításokat összekapcsolva adódik, hogy egy folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvény globálisan konstans egymással párhuzamos hipersíkok mentén. Az értekezésben mindezt nyílt, összefüggő értelmezési tartomány esetére igazoljuk, melyből levezetjük a 2. Fejezet fő eredményének számító dekompozíciós tételt. A továbbiakban $p_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ jelöli egy rögzített $a \in \mathbb{R}^n$ vektorral való belsőszorzást, mint lineáris funkcionált.

Tétel. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő halmaz, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig folytonos, lokálisan eltolásinvariáns függvény. Ekkor létezik olyan $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor és szigorúan monoton, folytonos $f : p_a(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, amivel*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)$$

teljesül minden $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ esetén.

Összetett függvényegyenlet-rendszerek folytonos megoldásai

A 3. Fejezet elején az említett

$$F(x_1+t_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_1(F(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_1) \qquad (1)$$
$$F(x_1, x_2+t_2, \ldots, x_n) = \Phi_2(F(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_2) \qquad (2)$$
$$\vdots$$
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n+t_n) = \Phi_n(F(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_n) \qquad (n)$$

függvényegyenlet-rendszer nyílt, összefüggő tartományon értelmezett folytonos megoldásait karakterizáljuk. Elsőként fontosnak tartjuk tisztázni, hogy a megoldásokat milyen értelemben keressük. Azt mondjuk, hogy F megoldása ennek az egyenletrendszernek, ha léteznek alkalmas kétváltozós, valós értékű $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ függvények, melyekkel az $(1)-(n)$ egyenletek mindegyike fennáll.

Megmutatható, hogy az $(1)-(n)$ egyenletrendszer megoldásai lokálisan eltolásinvariánsak, így a folytonos megoldások jellemzési tétele a 2. Fejezet eredményeinek következménye.

Tétel. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő halmaz. Az $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény pontosan akkor megoldása az $(1)-(n)$ függvényegyenlet-rendszernek, ha létezik $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor és egy szigorúan monoton, folytonos $f : p_a(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény, amivel*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$$

teljesül minden $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ esetén.

Ezután az $(1)-(n)$ egyenletrendszert általánosítjuk oly módon, hogy a változókban az összeadás helyett általánosabb műveleteket engedünk meg. Legyen minden $k = 1, \ldots, n$ esetén $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint legyen $F_k : I_k \times I_k \longrightarrow I_k$ folytonos, asszociatív egyszerűsítéses művelet. Legyen továbbá $S \subseteq I_1 \times \cdots \times I_n$ egy nemüres halmaz, $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Azt mondjuk, hogy u megoldása az

$$
\begin{aligned}
u\big(F_1(x_1, t_1), x_2, \ldots, x_n\big) &= \Psi_1\big(u(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_1\big) &\text{(G-1)}\\
u\big(x_1, F_2(x_2, t_2), \ldots, x_n\big) &= \Psi_2\big(u(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_2\big) &\text{(G-2)}\\
&\vdots\\
u\big(x_1, x_2, \ldots, F_n(x_n, t_n)\big) &= \Psi_n\big(u(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_n\big) &\text{(G-n)}
\end{aligned}
$$

függvényegyenlet-rendszernek, ha mindegyik fenti egyenlet teljesül alkalmas $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ kétváltozós, valós értékű függvényekkel.

Az előbbi jellemzési tételünket a folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses műveletek reprezentációjáról szóló Craigen–Páles-tétellel [12] ötvözve karakterizálhatjuk a (G-1) – (G-n) egyenletrendszer folytonos megoldásait is.

Tétel. *Legyenek $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $F_k : I_k \times I_k \longrightarrow I_k$ pedig folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses műveletek minden $k = 1, \ldots, n$ esetén. Legyen továbbá $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt, összefüggő halmaz, melyre $D \subseteq I_1 \times \cdots \times I_n$.*

Az $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor folytonos megoldása a (G-1) – (G-n) függvényegyenlet-rendszernek, amennyiben létezik olyan $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor, összeadásra nézve zárt $J_k \subseteq \mathbb{R}$ intervallumok, továbbá $f_k : J_k \longrightarrow I_k$ homeomorfizmusok és egy szigorúan monoton, folytonos g valós függvény, amelyekre egyrészt

$$F_k(x, y) = f_k\left(f_k^{-1}(x) + f_k^{-1}(y)\right) \qquad (x, y \in I_k),$$

másrészt

$$u(x_1, \ldots, x_n) = g\big(a_1 f_1^{-1}(x_1) + \cdots + a_n f_n^{-1}(x_n)\big)$$

teljesül minden $k = 1, \ldots, n$ és $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ esetén.

Kváziösszegek regularitás-megőrzési tulajdonságai

Az előző Tétel értelmében a (G-1) – (G-n) egyenletrendszer folytonos megoldásai speciális kváziösszegek (ld. [32, 34]). Az értekezés 4. Fejezetében ilyen típusú függvények regularitási kérdéseivel foglalkozunk.

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ valamint legyen $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum minden $k = 1, \ldots, n$ esetén. Tegyük fel továbbá, hogy $f_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény minden $k = 1, \ldots, n$ esetén, $g : f_1(I_1) + \cdots + f_n(I_n) \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig szintén folytonos, szigorúan monoton. Ekkor az

$$F(x_1, \ldots, x_n) = g\big(f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)\big) \qquad (x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n) \tag{i}$$

módon értelmezett $F : I_1 \times \cdots \times I_n \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt *kváziösszeg*nek nevezzük. A $g, f_1, \ldots, f_n$ függvényeket az F kváziösszeg *generátorfüggvényei*nek hívjuk.

Kváziösszegek gyakran felbukkannak közgazdaságtani alkalmazások során, például Maksa Gyula [5, 33] munkáiban. A disszertációban valós függvénytani érvelésekkel bebizonyítjuk, hogy a kváziösszeg parciális deriváltjainak létezése (illetve folytonossága) maga után vonja a generátorfüggvények differenciálhatóságát (illetve a deriváltak folytonosságát).

Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ és tegyük fel, hogy az* (i) *egyenlettel definiált n változós F kváziösszeg parciálisan differenciálható. Ekkor generátorfüggvényei differenciálhatóak. Továbbá, ha F folytonosan differenciálható, akkor generátorfüggvényei folytonosan differenciálhatóak.*

Az állítás analóg verziója magasabb rendű folytonos differenciálhatóság esetén is érvényben marad.

Tétel. *Legyenek $p, n \in \mathbb{N}$ pozitív egészek úgy, hogy $n \geq 2$ és tegyük fel, hogy az* (i) *egyenlettel definiált n változós F kváziösszeg p-szer folytonosan differenciálható. Ekkor generátorfüggvényei is p-szer folytonosan differenciálhatóak.*

Az előbbi Tételek alkalmazásaként a Craigen–Páles-tétel egy kiterjesztését kapjuk.

Következmény. *Legyen $p \in \mathbb{N}$ és legyen $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel, hogy $H : I \times I \longrightarrow I$ egy p-szer folytonosan differenciálható, asszociatív, egyszerűsítéses művelet. Ekkor létezik egy összeadásra nézve* *zárt, nem korlátos $J \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint egy $h : J \longrightarrow I$ folytonos bijekció, melyre a h^{-1} függvény p-szer folytonosan differenciálható, $h|_{J+J}$ szintén p-szer folytonosan differenciálható, továbbá*

$$H(x,y) = h\left(h^{-1}(x) + h^{-1}(y)\right) \qquad (x, y \in I).$$

Hasznossági függvények karakterizációi

A disszertáció 5. Fejezetében a korábbi szakaszok eredményeinek alkalmazásaként hasznossági függvények nevezetes osztályaira kapunk jellemzési tételeket. $\mathbb{R}_+^n$ jelöli azon n dimenziós vektorok halmazát, melyek minden koordinátája pozitív.

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nemüres halmaz és $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Ekkor a D halmaz elemeit (n jószágból álló) *jószágkosarak*nak, az u függvényt pedig *hasznossági függvény*nek nevezzük. Továbbá az

$$x \preceq_u y \Longleftrightarrow u(x) \leq u(y) \qquad (x, y \in D)$$

módon definiált $\preceq_u \subseteq D \times D$ relációt az u függvény által generált *preferencia reláció*nak hívjuk. Egy $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ hasznossági függvényt *szeparábilis*nek nevezünk, ha minden $k = 1, \ldots, n$ index esetén léteznek $I_k \subseteq \mathbb{R}_+$ nyílt intervallumok, valamint $u_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növekvő ún. *parciális hasznossági függvények* oly módon, hogy $D \subseteq I_1 \times \cdots \times I_n$ illetve

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1) + \cdots + u_n(x_n)$$

teljesül bármely $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ vektorra.

A definícióban szereplő fogalmakat a legtöbb gazdasági matematika témájú tankönyvben (például [7, 24, 50]) megtalálhatjuk. Az általunk tekintett hasznossági függvényekről feltesszük, hogy folytonosak és minden változójukban szigorúan monoton növekvőek. Ezek a feltételek számos, hasznossági függvényekkel és reprezentációkkal foglalkozó klasszikus dolgozatban megjelennek (ld. Debreu [14, 15] munkáit). Könnyen látható, hogy ha φ szigorúan monoton növekvő, akkor u és $\varphi \circ u$ ugyanazt a preferencia-relációt generálja. A disszertációban belátjuk ennek megfordítását is.

Állítás. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ egy halmaz, valamint $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ és $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ két hasznossági függvény úgy, hogy $\preceq_u = \preceq_v$. Ekkor létezik $\varphi : u(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő függvény úgy, hogy $v = \varphi \circ u$.*

Ezen észrevételek után megmutatjuk, hogy a kváziösszeg alakú hasznossági függvények éppen a szeparábilis hasznossági függvényekkel ekvivalensek. Továbbá, a kváziösszeg differenciálhatósági tulajdonságai öröklődnek a parciális hasznossági függvényekre.

Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, és tegyük fel hogy minden $k = 1, \ldots, n$ esetén $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint $u_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton növekvő függvény. Legyen továbbá $\varphi : u_1(I_1) + \cdots + u_n(I_n) \longrightarrow \mathbb{R}$ szintén folytonos, szigorúan monoton növekvő, valamint $p \in \mathbb{N}$ jelöljön egy rögzített pozitív egész számot. Legyen a $v : I_1 \times \cdots \times I_n \longrightarrow \mathbb{R}$ hasznossági függvény az alábbi kváziösszeg alakban adott:*

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \varphi\big(u_1(x_1) + \cdots + u_n(x_n)\big) \qquad (x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n)\,.$$

Feltéve, hogy v p-szer folytonosan differenciálható, az $u_1, \ldots, u_n$ függvények szintén p-szer folytonosan differenciálhatóak.

Továbbá az

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1) + \cdots + u_n(x_n) \qquad (x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n)$$

módon értelmezett $u : I_1 \times \cdots \times I_n \longrightarrow \mathbb{R}$ szeparábilis hasznossági függvényre $\preceq_u = \preceq_v$ teljesül.

Végezetül a 3. Fejezetben az összetett függvényegyenlet-rendszerek folytonos megoldásaira kapott dekompozíciós tételeink felhasználásával karakterizáljuk a Cobb–Douglas [11] illetve a CES típusú [6] hasznossági függvényeket.

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nemüres halmaz és legyenek $A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ adott konstansok. Ha az $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ hasznossági függvény az

$$u(x_1, \ldots, x_n) = A \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \qquad \big((x_1, \ldots, x_n) \in D\big)$$

képlettel értelmezett, akkor azt mondjuk, hogy u *Cobb–Douglas típusú hasznossági függvény.*

Definíció. Legyen $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nemüres halmaz valamint legyenek $A > 0$, $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $\alpha_i > 0$ adott konstansok. Ha az $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ hasznossági függvény az

$$u(x_1, \ldots, x_n) = A \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\varrho} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \qquad \big((x_1, \ldots, x_n) \in D \big)$$

képlettel értelmezett, akkor azt mondjuk, hogy *u CES típusú hasznossági függvény.*

Természetes feltételezés, hogy mindkét nevezetes osztály tartalmazza a fenti definíciókban szereplő képletekkel adott függvények bármely szigorúan monoton valós függvénnyel vett kompozícióit is, hiszen a generált preferenciákat ilyen jellegű transzformáció nem befolyásolja. Ebben az értelemben teljesülnek a következő karakterizációs állítások.

Tétel. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nyílt, összefüggő halmaz, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig folytonos, minden változójában szigorúan monoton növekvő. Az u hasznossági függvény pontosan akkor Cobb–Douglas típusú, ha minden $k = 1, \ldots, n$ esetén létezik alkalmas kétváltozós Ψ_k függvény a következő tulajdonsággal:*
minden olyan $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ pontra és $t_k \in \mathbb{R}_+$ számra, amelyre

$$(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k \cdot t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in D$$

teljesül, fennáll az

$$u(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k \cdot t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \Psi_k(u(x_1, \ldots, x_n), t_k)$$

egyenlet.

Megjegyzés. A Tétel szemléletesen azt fejezi ki, hogy egy hasznossági függvény pontosan akkor Cobb-Douglas típusú, ha bármely két azonos hasznosságú $(x_1, \ldots, x_n)$ és $(y_1, \ldots, y_n)$ jószágkosár esetén a következő teljesül: bármely $t > 0$ esetén, ha egy adott termék x_k illetve y_k mennyiségét rendre $t \cdot x_k$-ra illetve $t \cdot y_k$-ra változtatjuk, akkor az újonnan kapott két jószágkosár hasznossága is meg fog egyezni egymással (bármely $k = 1, \ldots, n$ esetén).

Két jószágból álló jószágkosarak esetén, azaz amikor a hasznossági függvény kétváltozós, a fenti észrevétel a közömbösségi görbék (vagyis a hasznossági függvény szintvonalai, ld. [50]) segítségével is megfogalmazható: egy hasznossági függvény pontosan akkor Cobb–Douglas típusú, ha az

$$(x_1\,, x_2) \mapsto (t_1 x_1\,, t_2 x_2)$$

transzformáció bármilyen $t_1\,, t_2 > 0$ esetén közömbösségi görbét közömbösségi görbébe visz át.

A CES-típusú hasznossági függvényekre vonatkozó analóg állítás megfogalmazásához be kell vezetnünk a $R_\varrho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ függvényt a következő módon:

$$R_\varrho(u, v) = (u^\varrho + v^\varrho)^{\frac{1}{\varrho}} \qquad (u, v \in \mathbb{R}_+)\,,$$

ahol $\varrho \neq 0$ adott paraméter. Egyszerűen belátható, hogy R_ϱ egy folytonos, asszociatív, egyszerűsítéses művelet.

Tétel. *Legyen $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ nyílt, összefüggő halmaz, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ pedig folytonos, minden változójában szigorúan monoton növekvő. Az u hasznossági függvény pontosan akkor CES típusú, ha valamilyen $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ paraméter mellett minden $k = 1, \ldots, n$ esetén létezik alkalmas kétváltozós Ψ_k függvény a következő tulajdonsággal:*

minden olyan $(x_1\,, \ldots, x_n) \in D$ pontra és $t_k \in \mathbb{R}_+$ számra, amelyre

$$\big(x_1\,, \ldots, x_{k-1}\,, R_\varrho\,(x_k\,, t_k)\,\,, x_{k+1}\,, \ldots, x_n\big) \in D$$

teljesül, fennáll az

$$u\big(x_1\,, \ldots, x_{k-1}\,, R_\varrho\,(x_k\,, t_k)\,\,, x_{k+1}\,, \ldots, x_n\big) = \Psi_k\,(u\,(x_1\,, \ldots, x_n)\,, t_k)$$

egyenlet.

Megjegyzés. A Tétel szemléletes jelentése, hogy egy u hasznossági függvény pontosan akkor CES típusú (ϱ paraméterrel), ha bármely két azonos hasznosságú $(x_1\,, \ldots, x_n)$ illetve $(y_1\,, \ldots, y_n)$ jószágkosár esetén a következő teljesül: bármely $t > 0$ esetén, ha egy adott termék x_k illetve y_k mennyiségét rendre $\left(x_k^\varrho + t^\varrho\right)^{\frac{1}{\varrho}}$-ra illetve $\left(y_k^\varrho + t^\varrho\right)^{\frac{1}{\varrho}}$-ra változtatjuk, akkor az újonnan kapott két jószágkosár hasznossága is meg fog egyezni egymással (bármely $k = 1, \ldots, n$ esetén).

Az 5. Fejezetben szerepeltetjük ennek közömbösségi görbékre vonatkozó következményeit, továbbá standardizált Mádi-Nagy–Prékopa típusú hasznossági függvényekre is közlünk az előbbiekhez hasonló jellemzési tételt.

Summary – Angol nyelvű összefoglaló

After an Introduction, our results are contained in four main chapters in the dissertation. Chapter 2 contains results concerning continuous, translation invariant functions. In Chapter 3 we determine the continuous solutions of particular systems of composite functional equations. Chapter 4 is about regularity preservation of quasisums. Finally, Chapter 5 concerns characterizations of important types of utility functions. The results presented in the dissertation are based on the papers [46, 48].

Motivation, translation invariant functions

The primary motivation for the research summarized in this dissertation was the investigation of utility functions. These are the prevalent tools in mathematical economics for the modelling of an individual consumer's behavior. Our fundamental objective is to provide certain criteria which are relatively easy to check in order to decide whether a given utility function of a well-known type (such as Cobb–Douglas [11] or CES type [6]) is appropriate for the representation of a given consumer's preferences. The main mathematical tool for this endeavor is the characterization of continuous solutions of particular systems of composite functional equations.

The systems of functional equations considered in the dissertation are

motivated by the following system consisting of two composite equations:

$$F(x+t,y) = \Phi_1(F(x,y),t)$$
$$F(x,y+s) = \Phi_2(F(x,y),s).$$

Here F, Φ_1, Φ_2 are all unknown, real valued functions. This system of equations was considered by Zoltán Boros [9] under the assumption that F is defined on a restricted domain, namely on an open, connected subset of $\mathbb{R}^2$. The main result of [9] is that any continuous solution F can be written as the composition of a strictly monotone, continuous real function and a linear functional. In Chapter 3 we investigate the higher dimensional analogue of this system:

$$F(x_1, \ldots, x_j + t_j, \ldots, x_n) = \Phi_j(F(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n), t_j) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Let us observe, that if F is a solution of this system of functional equations, then the following holds: for any $x, y \in \mathbb{R}^n$ such that $F(x) = F(y)$, the equation $F(x+t) = F(y+t)$ is also fulfilled, for any vector $t \in \mathbb{R}^n$ which is parallel to one of the coordinate axes. This property motivates the following notions.

Definition. Let $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ be a set and $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ be a function. We say that the function F is *translation invariant*, if $F(x) = F(y)$ implies $F(x+t) = F(y+t)$, for any vectors $x, y, t \in \mathbb{R}^n$ such that $x, y, x+t, y+t \in S$.

Definition. Let $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$ be a set and $F : S \longrightarrow \mathbb{R}$ be a function. Suppose that for any $x, y \in S$ and for any $0 < r \in \mathbb{R}$ such that $B(x,r) \subseteq S$ and $B(y,r) \subseteq S$, the following assertion holds: if $F(x) = F(y)$ then $F(x+t) = F(y+t)$ is fulfilled for any $t \in B(0,r)$. Then the function F is said to be *locally translation invariant.*

It is easy to check that for functions defined on an open, convex domain, translation invariance is equivalent to local translation invariance.

Proposition. *Let $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open, convex set, moreover let $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$ be a locally translation invariant function. Then F is translation invariant.*

In order to understand the structure of continuous, locally translation invariant functions, the following observation is crucial.

Theorem. *Let $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ be open, convex, and let $F : K \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous, locally translation invariant function. Moreover let $x_1, \ldots, x_k \in K$ be a given collection of points for some $k \in \mathbb{N}$. If*

$$F(x_1) = F(x_2) = \cdots = F(x_k) = \alpha$$

holds for some number $\alpha \in \mathbb{R}$, then $F(p) = \alpha$ is also fulfilled for such points $p \in K$ which are contained in the affine hull of $x_1, \ldots, x_k$.

The full potential of this theorem can be exploited in situations when there exist a "large" set of affinely independent points where the function attains the same value. Our following, general existence theorem for continuous (not necessarily translation invariant) functions ensures the existence of such systems of points.

Theorem. *Let $n \in \mathbb{N}$ and let $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open set. Suppose that $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function. Then there exist points $x_1, \ldots, x_n \in D$ such that $x_1, \ldots, x_n$ are affinely independent, moreover*

$$F(x_1) = \cdots = F(x_n).$$

Merging these preliminary results we obtain that a continuous, locally translation invariant function is globally constant on parallel hyperplanes. In the dissertation this statement is proved for the case of open, connected domains. Eventually, this proposition implies the following decomposition theorem, which is the main result of Chapter 2. In the sequel, $p_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ denotes the inner product with a fixed vector $a \in \mathbb{R}^n$ (as a linear functional).

Theorem. *Let $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open, connected set and let $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous, locally translation invariant function. Then there exist a vector $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ and a continuous, strictly monotone function $f : p_a(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ such that*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)$$

holds for all vectors $(x_1, \ldots, x_n) \in D$.

Continuous solutions of systems of composite functional equations

In Chapter 3 we characterize the continuous solutions of the already mentioned system of composite functional equations

$$\begin{aligned}
F(x_1+t_1, x_2, \dots, x_n) &= \Phi_1(F(x_1, x_2, \dots, x_n), t_1) \qquad (1)\\
F(x_1, x_2+t_2, \dots, x_n) &= \Phi_2(F(x_1, x_2, \dots, x_n), t_2) \qquad (2)\\
&\vdots\\
F(x_1, x_2, \dots, x_n+t_n) &= \Phi_n(F(x_1, x_2, \dots, x_n), t_n) \qquad (n).
\end{aligned}$$

We first need to clarify that in what sense are we looking for solutions. We say that F is a solution of the system $(1)-(n)$, if there exist some two-variable real valued functions $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ such that all of the equations above are fulfilled.

It turns out that the solutions of the system $(1)-(n)$ are locally translation invariant, so the characterization theorem of the continuous solutions is a consequence of our results from Chapter 2.

Theorem. *Let $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ be an open, connected set. The continuous function $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ is a solution of the system of functional equations $(1)-(n)$ if, and only if, there exist a vector $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ and a continuous, strictly monotone function $f : p_a(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ such that*

$$F(x_1, \dots, x_n) = f(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$$

holds for all $(x_1, \dots, x_n) \in D$.

In the next part we generalize the system of functional equations $(1)-(n)$. In each of the variables the addition is replaced by a more general binary operation. That is, for all $k = 1, \dots, n$, let $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ be an open interval, moreover let $F_k : I_k \times I_k \longrightarrow I_k$ be a continuous, associative, cancellative operation. Suppose that $S \subseteq I_1 \times \cdots \times I_n$ is a nonempty set and $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ is a function. We say that u is a solution of the system of functional equations

$$u\big(F_1(x_1, t_1), x_2, \ldots, x_n\big) = \Psi_1\big(u(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_1\big) \qquad \text{(G-1)}$$

$$u\big(x_1, F_2(x_2, t_2), \ldots, x_n\big) = \Psi_2\big(u(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_2\big) \qquad \text{(G-2)}$$

$$\vdots$$

$$u\big(x_1, x_2, \ldots, F_n(x_n, t_n)\big) = \Psi_n\big(u(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_n\big) \qquad \text{(G-n)}$$

if all of the equations above are fulfilled for some appropriate two-variable real valued functions $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$.

Combining our previous characterization theorem with the representation theorem of continuous, associative, cancellative operations by Craigen and Páles [12], we are able to describe the continuous solutions of (G-1) – (G-n).

Theorem. *Let $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ be an open interval and let $F_k : I_k \times I_k \longrightarrow I_k$ be a continuous, associative, cancellative operation, for all $k = 1, \ldots, n$. Moreover, suppose that $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ is an open, connected set such that $D \subseteq I_1 \times \cdots \times I_n$.*

Then the continuous function $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ is a solution of the system of functional equations (G-1) – (G-n) if, and only if, there exist a vector $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, some open intervals $J_k \subseteq \mathbb{R}$ closed under addition, moreover some homeomorphisms $f_k : J_k \longrightarrow I_k$ and a continuous, strictly monotone real function g such that

$$F_k(x, y) = f_k\left(f_k^{-1}(x) + f_k^{-1}(y)\right) \qquad (x, y \in I_k)$$

and also

$$u(x_1, \ldots, x_n) = g\big(a_1 f_1^{-1}(x_1) + \cdots + a_n f_n^{-1}(x_n)\big)$$

hold for all $k = 1, \ldots, n$ and for all $(x_1, \ldots, x_n) \in D$.

Regularity preservation for quasisums

According to the previous theorem, the continuous solutions of (G-1)–(G-n) are particular quasisums (see [32, 34]). In Chapter 4 of the dissertation we discuss regularity properties of such functions.

Definition. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ and suppose that $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ is an open interval for $k = 1, \dots, n$. Moreover, let $f_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous, strictly monotone function for $k = 1, \dots, n$ and let $g : f_1(I_1) + \cdots + f_n(I_n) \longrightarrow \mathbb{R}$ be also continuous, strictly monotone. Then the function $F : I_1 \times \cdots \times I_n \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$F(x_1, \dots, x_n) = g\big(f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n)\big) \qquad (x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n) \tag{i}$$

is called a *quasisum*. The functions $g, f_1, \dots, f_n$ are called the *generators* of F.

Quasisums often appear in mathematical economics, for example, in the works [5, 33] of Gyula Maksa. Applying some classical results from real functions theory we are able to prove that the existence (and, respectively, continuity) of the partial derivatives of a quasisum implies the existence (respectively, the continuity) of the derivatives of the generators.

Theorem. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ and suppose that the n-variable quasisum F defined by the formula* (i) *is partially differentiable. Then the generators of F are differentiable. Moreover, if F is continuously differentiable, then its generators are continuously differentiable.*

The statement remains valid in the case of higher order continuous differentiability.

Theorem. *Let $p, n \in \mathbb{N}$ be positive integers such that $n \geq 2$ and suppose that the n-variable quasisum F defined by the formula* (i) *is p-times continuously differentiable. Then the generators of F are p-times continuously differentiable as well.*

Applying the previous two Theorems, we obtain an augmented version of the Craigen–Páles theorem.

Corollary. *Let $p \in \mathbb{N}$ and let $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ be an open interval. Suppose that $H : I \times I \longrightarrow I$ is a p-times continuously differentiable, associative, cancellative operation. Then there exist an unbounded open interval $J \subseteq \mathbb{R}$ which is closed under addition, moreover a continuous bijection $h : J \longrightarrow I$*

such that h^{-1} is p-times continuously differentiable, $h|_{J+J}$ is also p-times continuously differentiable, moreover

$$H(x,y) = h\left(h^{-1}(x) + h^{-1}(y)\right) \qquad (x, y \in I)\,.$$

Characterization of utility functions

In Chapter 5 of the dissertation, applying the results of the preceding sections, we establish characterization theorems for notable classes of utility functions. $\mathbb{R}_+^n$ denotes the set of n dimensional vectors having positive coordinates.

Definition. Let $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ be a nonempty set and let $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ be a function. Then an element of D will be called a *bundle of goods* (consisting of n goods) and u will be called a *utility function*. Furthermore, the relation $\preceq_u \subseteq D \times D$ defined as

$$x \preceq_u y \Longleftrightarrow u(x) \leq u(y) \qquad (x, y \in D)$$

is the *preference relation* generated by the utility function u. The utility function $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ is called *additively separable*, if there exist nonempty open intervals $I_k \subseteq \mathbb{R}_+$ and so-called *subutility functions* $u_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$ which are continuous, strictly increasing for $k = 1, \ldots, n$ such that $D \subseteq I_1 \times \cdots \times I_n$ and

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1) + \cdots + u_n(x_n) \qquad \big((x_1, \ldots, x_n) \in D\big).$$

The previous concepts can be found in most of the textbooks concerning mathematical economics (for instance, in [7, 24, 50]). We always suppose that the considered utility functions are continuous, moreover they are strictly increasing in each variable. These regularity assumptions appear in many classical results concerning representations of preferences by utility functions (for instance, in the works [14, 15] of Debreu). It is easy to see that if φ is strictly increasing, then u and $\varphi \circ u$ generate the same preference relation. We prove the converse of this statement in the dissertation.

Proposition. *Let $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ be a nonempty set and let $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ and $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ be two utility functions with $\preceq_u = \preceq_v$. Then there exists a strictly increasing function $\varphi : u(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ such that $v = \varphi \circ u$.*

After these observations we deduce that utility functions of quasisum form are equivalent to additively separable utility functions. Moreover, the differentiability properties of the quasisum are inherited by the subutility functions.

Theorem. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ and suppose that $\emptyset \neq I_k \subseteq \mathbb{R}$ is an open interval for $k = 1, \ldots, n$. Moreover, let $u_k : I_k \longrightarrow \mathbb{R}$ be continuous, strictly increasing for $k = 1, \ldots, n$ and let $\varphi : u_1(I_1) + \cdots + u_n(I_n) \longrightarrow \mathbb{R}$ be also continuous, strictly increasing. Let $p \in \mathbb{N}$ be a fixed positive integer. Suppose that the utility function $v : I_1 \times \cdots \times I_n \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by*

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \varphi\big(u_1(x_1) + \cdots + u_n(x_n)\big) \qquad (x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n)$$

is p-times continuously differentiable. Then the functions $u_1, \ldots, u_n$ are p-times continuously differentiable.

Moreover, for the additively separable utility function $u : I_1 \times \cdots \times I_n \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1) + \cdots + u_n(x_n) \qquad (x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n)$$

we have $\preceq_u = \preceq_v$.

Finally, applying the decomposition theorems obtained in Chapter 3 for continuous solutions of systems of composite functional equations, we characterize the Cobb–Douglas type [11] and CES type [6] utility functions.

Definition. Let $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ be a nonempty set and let $A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ be given constants. If the utility function $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ has the form

$$u(x_1, \ldots, x_n) = A \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \qquad \big((x_1, \ldots, x_n) \in D\big)$$

then u is called a *Cobb–Douglas type* utility function.

Definition. Let $D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ be a nonempty set, moreover let $A > 0$, $\varrho \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ and $\alpha_i > 0$ be given constants, for every $i = 1, \ldots, n$. If the utility function $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ has the form

$$u(x_1, \ldots, x_n) = A \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^{\varrho} \right)^{\frac{1}{\varrho}} \qquad \big((x_1, \ldots, x_n) \in D\big)$$

then u is called a *CES type* utility function.

It is natural to assume that these classes contain not only the functions given by the particular formulas above, but any composition of those with some strictly increasing real function (since the generated preference relation is invariant under such transformations). In this sense, the following characterizations are valid.

Theorem. *Let $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}_+^n$ be an open, connected set and let $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function which is strictly increasing in each variable. Then u is a Cobb–Douglas type utility function if, and only if, for every index $k = 1, \ldots, n$, there exist a two-variable function Ψ_k with the following property: for all points $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ and positive number $t_k \in \mathbb{R}_+$ fulfilling*

$$(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k \cdot t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in D,$$

the functional equation

$$u(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k \cdot t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \Psi_k(u(x_1, \ldots, x_n), t_k)$$

holds.

Remark. In an illustrative sense, this Theorem expresses the fact that a utility function is of Cobb–Douglas type if, and only if, for an arbitrary pair of bundles $(x_1, \ldots, x_n)$ and $(y_1, \ldots, y_n)$, the following holds: for any $t > 0$, if we modify the quantities x_k and y_k of the same good to the new quantities $t \cdot x_k$ and $t \cdot y_k$, respectively, then the utility of the two newly obtained bundles will again coincide with each other (for every $k = 1, \ldots, n$).

In the case of bundles consisting of two goods, this property can be formulated via the level sets (or, in the context of utility, the indifference curves as it is mentioned in e.g. [50]) of the function. Namely, a utility function is of Cobb–Douglas type if, and only if, the mapping

$$(x_1\,,x_2)\mapsto(t_1x_1\,,t_2x_2)$$

transforms any indifference curve into another indifference curve whenever $t_1\,,\,t_2>0$.

Before formulating an analogous statement for CES type utility functions, we have to introduce the mapping $R_\varrho:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ defined as

$$R_\varrho(u,v)=(u^\varrho+v^\varrho)^{\frac{1}{\varrho}}\qquad\quad(u,v\in\mathbb{R}_+)\,,$$

where $\varrho\neq0$ is a given parameter. It is easy to see that R_ϱ is a continuous, associative, cancellative operation.

Theorem. *Let $\emptyset\neq D\subseteq\mathbb{R}^n_+$ be an open, connected set and let $u:D\longrightarrow\mathbb{R}$ be a continuous function which is strictly increasing in each variable. Then u is a CES type utility function if, and only if, there exists a parameter $\varrho\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ and, for every index $k=1,\dots,n$, there exist a two-variable function Ψ_k with the following property:*

for all points $(x_1\,,\dots,x_n)\in D$ and positive numbers $t_k\in\mathbb{R}_+$ fulfilling

$$\big(x_1\,,\dots,x_{k-1}\,,R_\varrho\,(x_k\,,t_k)\;,x_{k+1}\,,\dots,x_n\big)\in D\,,$$

the functional equation

$$u\big(x_1\,,\dots,x_{k-1}\,,R_\varrho\,(x_k\,,t_k)\;,x_{k+1}\,,\dots,x_n\big)=\Psi_k\,(u\,(x_1\,,\dots,x_n)\,,t_k)$$

holds.

Remark. This characterization theorem can be interpreted as follows. A utility function u is of CES type (with parameter ϱ) if, and only if, for any two bundles $(x_1,,\dots,x_n)$ and $(y_1\,,\dots,y_n)$ with the same utility, the following property holds: for any $t>0$, if we modify the quantities x_k

and y_k of the same good to the new quantities $\left(x_k^\varrho + t^\varrho\right)^{\frac{1}{\varrho}}$ and $\left(y_k^\varrho + t^\varrho\right)^{\frac{1}{\varrho}}$ respectively, then the utility of the two newly obtained bundles will again coincide with each other (for every $k = 1, \ldots, n$).

In Chapter 5 we present the corollary of the previous theorem for indifference curves. We also provide a similar characterization of the standardized Mádi-Nagy–Prékopa type utility functions.

Irodalomjegyzék

[1] J. Aczél, *Sur les opérations définies pour nombres réels*, Bulletin de la Societe Mathematique de France **76** (1949), 59–64.

[2] J. Aczél, *On quasi-linear functional operations*, Publicationes Mathematicae Debrecen **1** (1950), 248–250.

[3] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications.* Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1966.

[4] J. Aczél, *A Short Course on Functional Equations.* Reidel, Dordrecht, 1987.

[5] J. Aczél, G. Maksa, M. Taylor, *Equations of Generalized Bisymmetry and of Consistent Aggregation: Weakly Surjective Solutions Which May Be Discontinuous at Places*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **214**/1 (1997) 22–35.

[6] K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas, R. M. Solow, *Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency*, The Review of Economics and Statistics **43**/3 (1961), 225–250.

[7] P. Berck, A. Strøm, K. Sydsæter, *Economists' Mathematical Manual.* Springer, Berlin, 2005.

[8] D. Blackwell, M. A. Girshick, *Theory of Games and Statistical Decisions.* Wiley, New York, 1954.

[9] Z. Boros, *Systems of generalized translation equations on a restricted domain*, Aequationes Mathematicae **67** (2004), 106–116.

[10] A. Chateauneuf, *Continuous representation of a preference relation on a connected topological space*, Journal of Mathematical Economics **16**/2 (1983), 139–146.

[11] C. W. Cobb, P. H. Douglas, *A Theory of Production*, The American Economic Review **18**/1 (1928), 139–165.

[12] R. Craigen, Z. Páles, *The associativity equation revisited*, Aequationes Mathematicae **37** (1989), 306–312.

[13] J. van Daal, A. H. Q. M. Merkies, *The Problem of Aggregation of Individual Economic Relations; Consistency and Representativity in a Historical Perspective*, in W. Eichhorn: Measurement in Economics. Physica, Heidelberg (1987), 607–637.

[14] G. Debreu, *Representation of a preference ordering by a numerical function*, Edited by R. Thrall, R. L. Davis, and C. Coombs, *Decision processes.* John Wiley and Sons, New York (1954), 159–165.

[15] G. Debreu, *Topological Methods in Cardinal Utility Theory*, in K. J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes: Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959. Stanford University Press (1960), 16–26.

[16] P. H. Douglas, *The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing, and Some New Empirical Values*, Journal of Political Economy **84**/5 (1976), 903–916.

[17] W. Eichhorn, Functional Equations in Economics. Addison-Wesley, Reading, 1978.

[18] M. Estévez-Toranzo, C. Hervés-Beloso, *On the existence of continuous preference orderings without utility representations*, Journal of Mathematical Economics **24**/4 (1995), 305–309.

[19] J. H. Faro, *Cobb–Douglas preferences under uncertainty*, Economic Theory **54** (2013), 273–285.

[20] P. C. Fishburn, *Interval representations for interval orders and semiorders*, Journal of Mathematical Psychology **10**/1 (1973), 91–105.

[21] Gáll J., Pap Gy., *Bevezetés a pénzügyi matematikába*, Polygon, Szeged, 2010.

[22] A. Gilányi, Z. Páles, *A regularity theorem for composite functional equations*, Archiv der Mathematik **77** (2001), 317–322.

[23] W. Gorman, *The structure of utility functions*, The Review of Economic Studies **35** (1968), 367–390.

[24] P. J. Hammond, K. Sydsæter, *Mathematics for Economic Analysis.* Prentice Hall, Upper Saddle River, 1995.

[25] C. Hervés-Beloso, H. del Valle-Inclán Cruces, *Continuous preference orderings representable by utility functions*, Journal of Economic Surveys **33**/1 (2019), 179–194.

[26] A. Járai, *On regular solutions of functional equations*, Aequationes Mathematicae **30** (1986), 21–54.

[27] A. Járai, *Regularity Properties of Functional Equations in Several Variables.* Springer, New York, 2005.

[28] A. Járai, L. Székelyhidi, *Regularization and general methods in the theory of functional equations*, Aequationes Mathematicae **52** (1996), 10–29.

[29] V. Kojić, *Solving the consumer's utility-maximization problem with CES and Cobb-Douglas utility function via mathematical inequalities*, Optimization Letters **11** (2017), 875–884.

[30] S. R. Lay, *Convex sets and their applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1982.

[31] Mádi-Nagy G., Prékopa A., *Egy többváltozós hasznossági függvény*, Alkalmazott Matematikai Lapok **21** (2004), 23–34.

[32] G. Maksa, *Solution of generalized bisymmetry type equations without surjectivity assumptions*, Aequationes Mathematicae **57** (1999), 50–74.

[33] G. Maksa, *Quasisums and generalized associativity*, Aequationes Mathematicae **69** (2005), 6–27.

[34] G. Maksa, E. Nizsalóczki, *Quasi-sums in several variables*, Acta Mathematica Academiae Paedagogiace Nyiregyhaziensis **22**/2 (2006), 193–207.

[35] A. Mas-Colell, M. Winston, J. Green, *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.

[36] J. Matkowski, *Generalized weighted quasi-arithmetic means*, Aequationes Mathematicae **79** (2010), 203–212.

[37] E. A. Ok, *Utility Representation of an Incomplete Preference Relation*, Journal of Economic Theory **104**/2 (2002), 429–449.

[38] Z. Páles, *Problems in the regularity theory of functional equations*, Aequationes Mathematicae **63** (2002), 1–17.

[39] V. Pareto, *Sul principio economico*, Giornale degli Economisti **22** (1901), 131–138.

[40] V. Pareto, *Manuale di economia politica*. Societa Editrice Libraria, Milan, 1906.

[41] Report of Meeting: *Aczél100 Hotel Aurum, Hajdúszoboszló (Hungary), February 2–7, 2025*, Aequationes Mathematicae **99** (2025), 2967–2994.

[42] A. C. M. van Rooij, W. H. Schikhof, *A Second Course on Real Functions*, Cambridge University Press, 1982.

[43] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976.

[44] W. A. Sutherland, *Introduction to Metric and Topological Spaces*, Clarendon Press, Oxford, 1975.

[45] P. Tóth, *Egy összetett függvényegyenlet-rendszer folytonos megoldásai*, OTDK-dolgozat, 2021.

[46] P. Tóth, *Continuous solutions of a system of composite functional equations*, Aequationes Mathematicae **96** (2022), 1179–1205.

[47] P. Tóth, *Hasznossági függvények karakterizációi függvényegyenlet-rendszerek folytonos megoldásaiként*, OTDK-dolgozat, 2023.

[48] P. Tóth, *Regularity preservation for quasisums*, Aequationes Mathematicae **99** (2025), 2855–2870.

[49] W. Trockel, *Classification of budget-invariant monotonic preferences*, Economics Letters **30**/1 (1989), 7–10.

[50] H. R. Varian, *Intermediate Microeconomics*. 8th ed., W. W. Norton & Company, New York – London, 2010.

[51] Vincze Csaba, *Convex Geometry*, University of Debrecen, 2013.
math.unideb.hu/sites/default/files/upload_documents/convex_geom.pdf

[52] X. Wang, Y. Fu, Some Characterizations of the Cobb-Douglas and CES Production Functions in Microeconomics, Abstract and Applied Analysis (2013)
https://doi.org/10.1155/2013/761832

[53] H. Wold, *A synthesis of pure demand analysis; I, II and III.* Scandinavian Actuarial Journal **1–2** (1943), 85–118, 220–263, 69–120.