

Doktori (PhD) értekezés tézisei

**Optimalitási feltételek
lineáris programozási feladatokhoz**

TÓTH NORBERT

Témavezető: Dr. Bessenyei Mihály



DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2025

A lineáris programozási feladatok olyan feltételes optimalizálási feladatok, amelyekben a célfüggvény és a feltételi rendszer is lineáris kifejezésekkel adott. A szisztematikus tanulmányozásuk a 20. század első felében kezdődött amerikai oldalról Dantzig [9], míg orosz (szovjet) oldalról Kantorovich [16] által. Klee és Minty [19] megmutatta, hogy a Dantzig által kifejlesztett szimplex módszer [10] a Bland-szabállyal kiegészítve exponenciális idejű lehet. Továbbá, azóta az is kiderült, hogy a szimplex módszernek eddig valamennyi ismert variációja ugyanezzel a tulajdonsággal bír, de továbbra is nyitott kérdés maradt, hogy esetleg létezik-e olyan változat, amely polinomiális idejű. A szimplex módszer mellett azonban más algoritmusokat is kifejlesztettek, mint például Khachiyan ellipszoid módszere [18] vagy Karmarkar belső pontos módszere [17].

A motivációnk egy másik algoritmuscsalád adja, nevezetesen a belsőpontos-módszerek közé tartozó logaritmikus sorompó probléma újratárgyalása. A belső pontos módszerekről igazolták, hogy van köztük polinomiális időben futó algoritmus, vagyis a lineáris programozási feladatok polinomiális komplexitásúak. A lineáris programozási problémák speciális geometriai tulajdonságai továbbá lehetővé teszik geometriai feltételek és új típusú módszerek kifejlesztését. Az értekezés célja a lineáris programozási feladatoknak a konvex analízis és a konvex geometria eszközeivel való megközelítése úgy, hogy elkerüljük a szimplex módszer használatát. Megemlítjük, hogy az értekezés egyes fejezetei rendre az [5], [6] cikkekben közölt eredményekre támaszkodnak.

Az értekezés első fejezetében összegyűjtjük a konvex analízis és a konvex geometria mindazon eszközeit, amelyeket vagy a legtöbb fejezet során vagy az egész értekezésben általánosan használunk, mint például a konvex és konkáv függvények definícióját; a Bernstein–Doetch tételt [4]; illetve a halmazok konvex és kúp burkának definícióját. Ebben a bevezető

fejezetben alapvetően Barvinok [1], Borwein és Lewis [7] és Rockafellar [24] könyveire támaszkodunk.

Az elválasztási tételről általánosan elmondható, hogy jelentős szerepet játszik az optimalizálási problémakörben. Az euklideszi változata az alábbi módon fogalmazható meg.

LEMMA. *Euklideszi terekben bármely nem üres, zárt és konvex halmaz hipersíkkal szigorúan elválasztható bármely, a halmazhoz nem tartozó ponttól.*

Erre a változatra számos bizonyítás is ismert, Barvinok azonban egy alternatív megközelítést javasol kitézőtt feladatként, amelyre megoldást adunk ebben a fejezetben.

Jelölje $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ az összes \mathbb{R}^n -ből \mathbb{R}^m -be ható lineáris leképezések terét. Az ilyen lineáris transzformációk még a legegyszerűbb esetekben is elronthatják a (konvex) halmazok zártóságát. Azonban, ha a halmaz egy poliéder, akkor a lineáris transzformáltja is poliéder marad. Ennek a ténynek a bizonyítása meglehetősen bonyolult, de szerencsére elkerülhetjük ezt a kellemetlenséget a következő egyszerű megfigyeléssel.

LEMMA. *Vektorterekben bármely végesen generált kúp a függetlenül generált részkúpok egyesítése. Speciálisan, egy véges dimenziós tér bármely végesen generált kúpja zárt.*

Ennek az állításnak a bizonyítása a Carathéodory-tétel kúpokról szóló változatára [8] támaszkodik.

A feltételes optimalizálási feladatokat és a hozzájuk kapcsolódó alapfogalmakat általánosan az alábbi módon írhatjuk fel.

DEFINÍCIÓ. *Legyenek X és Y nemüres halmazok, továbbá $D \subseteq X$ és $b \in Y$. Tekintsük az*

$$\begin{aligned} f(x) &\longmapsto \max \\ g(x) &= b \end{aligned}$$

feltételes optimalizálási feladatot, ahol az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ célfüggvény és a $g: X \rightarrow Y$ feltétel adottak. Azt mondjuk, hogy $x \in X$

egy megengedett megoldás, ha $x \in D$ és $g(x) = b$ teljesül. Továbbá, az összes megengedett megoldások halmazát a probléma megengedett halmazának nevezzük. Az $x^* \in X$ elemet megengedett optimális megoldásnak hívjuk, ha megengedett halmazbeli és $f(x) \leq f(x^*)$ teljesül minden $x \in X$ megengedett megoldás esetén.

A lineáris programozási feladatokat az előbbi általános feladatok speciális eseteként vezetjük be: a problémának mind a célfüggvényét, mind a feltételi rendszerét lineáris kifejezésekkel adjuk meg. Az előző definícióban legyen $X = \mathbb{R}^n$ és $Y = \mathbb{R}^m$. Ekkor a

$$\langle c, x \rangle \mapsto \max_{x \in P}$$

feltételes szélsőérték számítási feladatot *lineáris programozási feladatnak* hívjuk, ahol $c \in \mathbb{R}^n$ egy adott vektor, $P \subseteq \mathbb{R}^n$ pedig egy *poliéder*, azaz véges sok féltér metszete. A többi kapcsolódó fogalom analóg módon vezethető be az előző definíció alapján.

A konvex halmazok recessziós irányai döntő szerepet játszanak az értekezésben kitűzött céljaink megvalósításában.

DEFINÍCIÓ. Legyen X vektortér, D egy nemüres részhalmaza X -nek, és legyen $x \in D$ rögzített. Azt mondjuk, hogy $r \in X$ a D halmaz x pontbeli recessziós iránya, ha minden $\alpha \geq 0$ esetén $x + \alpha r \in D$ teljesül.

Rockafellar azt az esetet vizsgálta, amikor D egy zárt, konvex halmaz. Kiderült, hogy D recessziós irányai számos fontos tulajdonsággal rendelkeznek. A recessziós irányok függetlenek az $x \in D$ megválasztásától és a recessziós irányok létezése jellemzi D nemkorlátosságát. Következésképpen D recessziós irányainak halmazát jelölhetjük egyszerűen $\text{rec}(D)$ módon. Továbbá, a recessziós irányok kúpot alkotnak: zártak az összeadásra és a nemnegatív számmal való szorzásra nézve. Ezért a $\text{rec}(D)$ halmazt D *recessziós kúpjának* nevezzük.

A logaritmius sorompó probléma célfüggvényének értelmezési tartománya azonban megköveteli, hogy *nyílt*, konvex halmazokat használjunk. Szerencsére az előbb említett tulajdonságok ebben az esetben is igazak maradnak, amit az alábbi lemmában fogalalunk össze. Az alapponttól való függetlenség miatt a D halmaz recessziós kúpját továbbra is $\text{rec}(D)$ módon jelölhetjük.

LEMMA. *Ha D egy nemüres, nyílt, konvex részhalmaza egy X Euklideszi térnek, továbbá $r \in X$, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

- (i) *Létezik $x \in D$ úgy, hogy minden $\alpha \geq 0$ esetén $x + \alpha r \in D$ teljesül;*
- (ii) *Minden $x \in D$ és minden $\alpha \geq 0$ esetén $x + \alpha r \in D$ teljesül.*

Továbbá, D pontosan akkor korlátos, ha $\text{rec}(D)$ triviális.

A hasonló tulajdonságok ellenére azonban a bizonyítás során alternatív megközelítést kell követnünk.

Megemlíjtük végül a recessziós kúpok következő kalkulus tulajdonságát is, amely mind a nyílt, mind a zárt esetben is érvényes, valamint a bizonyításukban lévő érvelés is nagyon hasonló.

LEMMA. *Legyen X Euklideszi tér. Ha $A, B \subseteq X$ olyan nyílt/zárt, konvex halmazok, amelyek metszete nemüres, akkor*

$$\text{rec}(A \cap B) = \text{rec}(A) \cap \text{rec}(B).$$

A második fejezet célja a klasszikus logaritmius sorompó probléma kiterjesztése úgy, hogy az érvelések során kerüljünk a szimplex módszer használatát, emellett korrigáljuk Vanderbei [29] hibás érvelését: A Heine–Borel tételt \mathbb{R}^n egy nyílt részhalmaza által indukált relatív topológiában alkalmazta. A bizonyítás során a konvex analízis módszereit ötvözzük Wright [32] ötleteivel. Ehhez tekintsük az alábbi lineáris programozási feladatpárt:

$$\begin{array}{rcl}
 & c^T x & \mapsto \max \\
 \text{Primál:} & Ax + \omega & = b \\
 & x, \omega & \geq 0; \\
 & y^T b & \mapsto \min \\
 \text{Duál:} & A^T y - z & = c \\
 & y, z & \geq 0,
 \end{array}$$

ahol $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $c \in \mathbb{R}^n$ és $b \in \mathbb{R}^m$ adottak, valamint a feltételrendszerbe már bevezettük az ω és z nemnegatív segédváltozókat annak érdekében, hogy egyenlőségi feltételeket kapjunk. Ezt a problémapárt *standard alakban adott primál-duál feladatpárnak* nevezzük. Ha a primál célfüggvényt perturbáljuk a változók logaritmusával, melyet egy $t > 0$ paraméterrel is kiegészítünk, akkor a kapcsolódó *logaritmikus sorompó probléma* az alábbi egyparaméteres problémacsalád:

$$\begin{array}{rcl}
 c^T x + t \sum_{j=1}^n \log x_j + t \sum_{i=1}^m \log \omega_i & \mapsto \max \\
 Ax + \omega & = b \\
 x, \omega & > 0.
 \end{array}$$

Ha az új célfüggvénynek minden t paraméter esetén egyértelmű optimuma van, akkor az optimális megoldások egy paraméteres görbét alkotnak, amelyet *centrális útnak* nevezünk. Ahogy a t paraméter értéke tart nullához, a sorompó probléma célfüggvénye megközelíti az eredetit, így a centrális út várhatóan az eredeti lineáris programozási feladat optimális megoldásához tart.

Annak érdekében, hogy a centrális utat geometriai szempontból vizsgálhassuk, bevezetjük azt egy absztrakt környezetben annak generátorfüggvényével együtt.

DEFINÍCIÓ. *Legyenek T és B nemüres halmazok. Azt mondjuk, hogy az $F: T \times B \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés teljesíti a*

paraméteres globális maximum tulajdonságot, ha minden $t \in T$ esetén egyértelműen létezik egy $h(t) \in B$ úgy, hogy

$$F(t, h(t)) > F(t, x)$$

teljesül minden $x \neq h(t)$ mellett. Ekkor, $h: T \rightarrow B$ valóban függvény. A h függvényt ekkor centrális útnak, az F leképezést pedig a centrális út generátorának nevezzük.

Ha T metrikus tér és B egy E euklideszi tér nemüres részhalma, akkor az $F: T \times B \rightarrow \mathbb{R}$ generátor esetén tekintsük az alábbi határérték feltételeket: Minden $t_0 \in T$ és minden $x_0 \in \bar{B} \setminus B$ esetén

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ x \rightarrow x_0}} F(t, x) = -\infty.$$

Valamint minden $t_0 \in T$ esetén

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ \|x\| \rightarrow +\infty}} F(t, x) = -\infty.$$

Ezek a feltételek garantálják a sorompó probléma centrális útjának folytonosságát.

LEMMA. Legyen T egy metrikus tér, B nemüres részhalma egy E euklideszi térnek. Ha $F: T \times B \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos út generátor, amely teljesíti a fenti határérték feltételeket, akkor a $h: T \rightarrow B$ út folytonos.

Emellett, speciális alakú generátor függvények esetén a centrális út mentén monotonitás is biztosítható.

LEMMA. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallum, B nemüres részhalma egy E euklideszi térnek, $c \in E$, és $g: E \rightarrow \mathbb{R}$. Ha az

$$F(t, x) := c^T x + tg(x)$$

módon definiált $F: I \times B \rightarrow \mathbb{R}$ függvény teljesíti a paraméteres globális maximum tulajdonságot, akkor $g \circ h$ egy monoton növekvő függvény.

A második fejezet fő eredményeit két tételben foglaljuk össze. Az első elegendő feltételt ad ahhoz, hogy egy konkáv célfüggvénnyel rendelkező problémának létezzen megengedett optimális megoldása.

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy X és Y Euklideszi terek, $D \subseteq X$ egy nemüres, nyílt, konvex halmaz, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, és $b \in Y$. Ha egy $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ konkáv függvény teljesíti a*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f(x + \alpha r) = -\infty$$

határérték feltételeket minden $x_0 \in \partial D$ és minden $r \in \text{rec}(D)$ esetén, valamint az

$$f(x) \mapsto \max \\ Ax = b$$

konkáv programozási problémának van megengedett megoldása, akkor létezik megengedett optimális megoldása is.

A feltételek között szereplő határérték tulajdonságok garantálják, hogy a célfüggvény „nagy” értékei az értelmezési tartomány egy kompakt részhalmazában csoportosulnak. Az állítás bizonyítása a célfüggvény *nyílt* színhalmazain alapul, és bizonyos ponton azok recessziós kúpjai is kulcsszerepet kapnak.

A második fő eredmény a logaritmikus sorompó probléma általánosítása. Ennek megfogalmazása előtt még bevezetjük a standard projekció fogalmát is, amely szerepet kap a tétel feltételei között.

DEFINÍCIÓ. *Legyen X egy euklideszi tér és tekintsük a standard bázisát. Ha $1 \leq k \leq \dim(X)$, akkor a k -adik standard projekció az a $\pi_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amely az x_k standard koordinátát rendeli hozzá az összes $x \in X$ elemhez.*

TÉTEL. *Legyen $D \subseteq \mathbb{R}_+^{n+m}$ egy nemüres, nyílt, konvex halmaz, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, és $b \in \mathbb{R}^m$, továbbá $c \in \mathbb{R}^n$. Tegyük fel,*

hogy $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan folytonosan differenciálható, szigorúan konkáv függvény, hogy $\partial_k g$ nemnegatívak, $\pi_k \partial_k g$ korlátosak, és az

$$(x, \omega) \mapsto c^T x + tg(x, \omega)$$

leképezés teljesíti az előző tételbeli határérték feltételeket minden $t > 0$ esetén. Ha az eredeti primál–duál párnak létezik D -beli megengedett megoldása, akkor a

$$\begin{aligned} c^T x + tg(x, \omega) &\mapsto \max \\ Ax + \omega &= b \end{aligned}$$

konkáv programozási feladatcsaládhoz tartozó centrális útja létezik és folytonos. Továbbá, a centrális út gráffjának minden $t = 0$ paraméterhez tartozó torlódási pontja a kapcsolódó primál–duál feladatpár egy optimális megoldása.

Megfigyelhető, hogy az egyparaméteres problémacsalád a $t = 0$ választás mellett az eredeti standard formában adott lineáris programozási feladatra redukálódik. Az előző eredmények biztosítják a centrális út létezését és annak folytonosságát, továbbá, a centrális út gráffjának minden torlódási pontja az eredeti primál–duál feladatpár egy optimális megoldása.

Az általánosításunk egyik jelentős előnye, hogy nincs szükségünk másodrendű tesztre az optimalitás ellenőrzéséhez. A célfüggvényre ezért elegendő az egyszerű *folytonos* differenciálhatósági feltétel a *kétszeres* differenciálhatóság helyett. Így a bizonyításhoz elegendő csupán a Lagrange-féle multiplikátor-elvet és a lineáris programozásban jól ismert Komplementaritási tételt alkalmaznunk.

A fő eredmények közvetlen alkalmazásaként megfogalmazhatjuk a klasszikus logaritmikus sorompó probléma centrális útjáról és optimalitásáról szóló állítást.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha az eredeti primál–duál feladatpár mindegyikének van pozitív megengedett megoldása, akkor a kapcsolódó sorompó probléma centrális útja létezik és folytonos. Továbbá, a centrális út gráffjának bármely nullabeli torlódási pontja az eredeti problémapár megengedett optimális megoldása.*

Az állítás bizonyításához mindössze annyit kell ellenőrizni, hogy a logaritmikus sorompó probléma célfüggvénye teljesíti a második fő eredményünkben szabott feltételeket. Ez néhány egyszerű számolással megtehető.

A fejezet végén még kitérünk arra, hogy a $\pi_k \partial_k g$ függvények korlátosságából kiindulva magyarázható a logaritmus, mint perturbáló függvény, használata a klasszikus sorompó probléma célfüggvényében.

Tekintsük most a lineáris programozási feladatok korábban már említett általános alakját:

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle \mapsto \max \\ x \in P. \end{aligned}$$

Ez a fajta felírás lehetővé teszi a lineáris programozási feladatok geometriai megközelítését. A harmadik fejezet fő eredménye egy geometriai optimalitási feltételt ad lineáris programozási feladatokhoz a jól ismert *grafikus módszer* alapján. (A lineáris programozási feladatok geometriai tulajdonságainak részletesebb tárgyalását Schrijver [26] végezte.) A dimenziófüggetlen karakterisztikus tulajdonság, amire koncentrálnunk nem más, mint hogy a célfüggvény együtthatóvektorának tompszöget kell bezárnia azokkal a félegyenesekkel, amelyek teljes egészében a megengedett halmazon belül helyezkednek el. Ezt a tulajdonságot $\text{rec}(P)$ *normálkúpja* segítségével írhatjuk le pontosan.

DEFINÍCIÓ. Ha D egy X vektortér konvex részhalmaza és $p \in D$, akkor az

$$\mathcal{N}_D(p) := \{y \in X \mid \langle y, x - p \rangle \leq 0, x \in D\}$$

halmazt a D halmaz p pontbeli normál kúpjának nevezzük.

TÉTEL. A fenti lineáris programozási feladatnak pontosan akkor létezik optimális megoldása, ha megengedett és

$$c \in \mathcal{N}_{\text{rec}(P)}(0).$$

Ez az állítás jól ismert lehet a szakirodalomban, azonban a bizonyítás a konvex analízis és a konvex geometria eszközeire épül, amit teljes indukciós lépésekkel kombinálunk. Fontos megjegyezni, hogy emiatt a bizonyítás egy algoritmust is javasol, amely eltérhet a szimplex módszertől, hiszen oldalak mentén mozog, nem pedig csúcok között, ahogyan a szimplex módszer teszi.

Figyelembe véve azt a tényt, hogy a P poliédert lineáris egyenlőségek és egyenlőtlenségek vegyes rendszereként is felírhatjuk, a fő eredmény alkalmazásaihoz a primál problémát tekintsük *kanonikus*, míg a duális problémát *standard* alakban:

$$\begin{array}{ll} \langle c, x \rangle \longmapsto \max & \langle y, b \rangle \longmapsto \min \\ \text{Primál: } \quad Ax = b & \text{Duál: } \quad A^T y \geq c, \\ \quad \quad x \geq 0; & \end{array}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ egy $m \times n$ -es mátrix, továbbá $c \in \mathbb{R}^n$ és $b \in \mathbb{R}^m$ adott vektorok. Az ilyen módon adott feladatok optimalitási feltételét azonnal megadhatjuk a fő eredményünk segítségével az alábbi módon.

KÖVETKEZMÉNY. Egy kanonikus formában adott maximum feladatnak pontosan akkor létezik optimális megoldása, ha megengedett és $\langle c, r \rangle \leq 0$ teljesül minden $r \in \text{Ker}(A) \cap \mathbb{R}_+^n$ esetén.

KÖVETKEZMÉNY. *Egy standard formában adott minimum feladatnak pontosan akkor létezik optimális megoldása, ha megengedett és $\langle b, q \rangle \geq 0$ teljesül, valahányszor $A^T q \geq 0$.*

Mindkét állítás egy egyszerű számolás eredménye, azonban ezek a következmények jól alkalmazhatók annak gyors ellenőrzésére, hogy egy lineáris programozási feladatnak van-e optimális megoldása vagy sem.

Az erős dualitási tételt a lineáris programozás egyik alapkövének tekinthetők.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha egy primál feladatnak létezik optimális megoldása, akkor a duál feladatnak is van optimális megoldása.*

Az elválasztási tétel és fő eredményünk segítségével alternatív bizonyítást adhatunk a szimplex módszertől függetlenül. Továbbá, ha a primál-duális problémák a fenti alakúak, akkor levezethetjük Farkas-lemmát [11] is, amelyről köztudott, hogy ekvivalens az erős dualitás tételével.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $b \in \mathbb{R}^m$, akkor*

- (i) *vagy az $Ax = b$ és $x \geq 0$ rendszernek van megoldása;*
- (ii) *vagy az $A^T y \geq 0$ és $b^T y < 0$ rendszernek van megoldása.*

Megjegyezzük továbbá, hogy ezek bizonyítása lehetővé teszi a dualitáselmélet geometriai megközelítését is az algoritmikusak mellett.

A Farkas-lemmának számos ekvivalens változata ismert, mint például Gordan [14], Motzkin [23], Stiemke [27], Tucker [28] és Ville [30] eredményei. A Farkas-lemma bizonyításának más variációjára Borwein és Lewis [7] vagy Gale [13] könyvét ajánljuk. Illetve egy elegáns megközelítés Komornik [20] nevéhez köthető.

A negyedik fejezet célja egy olyan algoritmus bemutatása, amely eldönti a síkbeli lineáris programozási feladatok megoldhatóságát. Ezt a módszert a harmadik fejezet fő eredménye motiválja, valamint az a tény, hogy a hétköznapi életben felmerülő problémák során néha csupán az adott lineáris programozási feladat megoldhatósági kérdése számít, és maga az optimális megoldás (ha létezik) nem. Hangsúlyozzuk, hogy ez az algoritmus különbözik attól, amelyet az előző fejezet fő tételének bizonyítása javasolt.

A módszer implementálásához a síkbeli lineáris programozási problémákat a következő formában kell megadnunk:

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 &\longmapsto \max \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 &\leq b_i, \end{aligned}$$

ahol $c_j, a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ adott minden $j \in \{1, 2\}$ és $i \in \{1, \dots, m\}$ indexre. Az ilyen alakban adott megengedett lineáris programozási feladatok megoldhatóságának tesztelésére szolgáló módszerünk alap gondolata a következő.

Először is, a megengedett halmazt meghatározó (a_{i1}, a_{i2}) normálvektorokon osztályozást végzünk úgy, hogy ezeket a vektorokat \mathbb{R}^2 egységkörére normáljuk, majd minden osztályból egy reprezentatív elemet tartunk meg az R -rel jelölt redukált pontlistában. Ezután R -ből összegyűjtjük az ellenlakó pontpárokat (ha vannak) egy új N listába. Az algoritmus fő része az E lista meghatározása, amely a megengedett halmaz normál kúpját generáló extrémálisokat tartalmazza. Az algoritmus itt már több ponton megállhat az R és az N listáktól függően. Végezetül, a fejezet fő tétele dönti el az adott síkbeli lineáris programozási probléma megoldhatóságát.

TÉTEL. Az előbb bemutatott módszer matematikailag korrekt és véges lépésben megáll. Továbbá, ha a probléma megengedett és az algoritmus végén

(i) *E üres, akkor létezik optimális megoldás;*

(ii) E nemüres és $c \in \text{cone}(E)$, akkor létezik optimális megoldás, egyébként nem.

Speciálisan, ha $c \notin \text{cone}(E)$, akkor a feladatnak nincs optimális megoldása.

Ez az állítás geometriailag bizonyítható, amely egyben a módszerünk validálása is, és az N lista elemszáma szerinti eset-szétválasztáson, valamint speciálisan választott egyenesek általi szeparáláson alapul. Azonban minden esetben a megoldhatóságot a harmadik fejezet fő eredménye biztosítja.

Ennek az algoritmusnak az egyik hátránya, hogy nem biztosítja az adott lineáris programozási feladat megengedtségét. Így általánosabban ez a módszer inkább a lineáris programozási feladatok nemmegoldatóságának ellenőrzésére alkalmasabb!

A módszer magasabb dimenziókba való átültetése elképzelhető lehet hasonló alapokra támaszkodva, azonban ezzel egyidejűleg több probléma is felmerülhet. Nem alkalmazhatjuk két pont „maximális szögének” koncepcióját úgy, ahogyan azt a két-dimenziós esetben tettük. Továbbá, ez a módszer nagymértékben függ attól a tényről, hogy a síkban minden konvex kúpot (ha az nem egy félsík) legfeljebb 2 extrémális vektor egyértelműen generál, ami csökkentheti az algoritmus számolási igényét. Viszont, az extrémálisok száma tetszőlegesen nagy lehet, már a 3-dimenziós esetben is, így a számolási igény sem csökkenthető!



Nyilvántartási szám: DEENK/513/2025.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Tóth Norbert

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

MTMT azonosító: 10088767

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

1. Bessenyei, M., **Tóth, N.**: An optimality condition for linear programs.

Publ. Math. Debr. 108, 2026. ISSN: 0033-3883.

DOI: <http://dx.doi.org/10.5486/PMD2026.10145>

IF: 0.5 (2024)

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (1)

2. Bessenyei, M., **Tóth, N.**: A Convex Analysis View of the Barrier Problem.

J. Convex Anal. 29 (3), 827-836, 2022. ISSN: 0944-6532.

IF: 0.6

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (1)

3. Bessenyei, M., **Tóth, N.**: The Coincidence Set of Generalized Lines and Generalized Monotone Functions.

Results Math. 80 (3), 1-9, 2025. ISSN: 1422-6383.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00025-025-02379-5>

IF: 1.2 (2024)

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 2,3

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):

1,1

A DEENK a Jelölt által a Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2025.09.08.



Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

Optimality conditions for linear programs

by NORBERT TÓTH

Supervisor: Dr. Mihály Bessenyei



UNIVERSITY OF DEBRECEN

Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

Debrecen, 2025

Linear programs are constrained optimization problems in which the objectives and the feasible sets are given in terms of linear expressions. Their systematic study has begun in the first half of the 20th century by Dantzig [9] on the American side, and by Kantorovich [16] on behalf of the Russians (Soviets). Klee and Minty [19] illustrated that the simplex method developed by [10] supplemented with Bland's Rule may terminate exponentially. Moreover, it turned out since then, that almost every known variant of the simplex method has the same feature. An unsolved problem is, whether there exists a version of the simplex method that runs in polynomial time. However, other methods were also developed like the ellipsoid method developed by Khachiyan [18] or interior point methods by Karmarkar [17].

Our motivation is to revisit one of the interior point methods, namely the log-barrier problem, which has been proved to have polynomial complexity. Moreover, the geometrical properties of linear programs allow us to develop geometrical conditions and new type of methods for these problems, as well. Our aim is to approach linear programs via the tools of Convex Analysis and Convex Geometry while we avoid the usage of the simplex method. The chapters, in turn, are based on the materials of the papers [5], [6].

In CHAPTER 1 we collect the basic tools of Convex Analysis and Convex Geometry that we use generally or in most of the other chapters such as the basic definition of convex and concave functions; the Bernstein–Doetch Theorem [4]; the definition of convex and conic hulls of sets. Further, we derive linear programs as a special case of general constrained optimization problems. Our basic references for this introductory chapter are the books by Barvinok [1], by Borwein and Lewis [7], and by Rockafellar [24].

The basic separation theorem plays a crucial role in optimization and several proofs are known for its Euclidean version.

In this chapter we prove this statement following the alternative approach suggested by Barvinok.

LEMMA. *In Euclidean spaces, any nonempty, closed and convex set can be strictly separated by a hyperplane from any point not belonging to the set.*

Let $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ stands for the vector space of all linear maps from \mathbb{R}^n to \mathbb{R}^m . Linear transformations $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ may destroy the closedness of (convex) sets even in very simple cases. However, if the set is a polyhedron, then its linear transform still remains a polyhedron. The proof of this fact is surprisingly complicated but fortunately, we can avoid inconvenience with the next observation.

LEMMA. *Any finitely generated cone of a vector space is the union of the independently generated subcones. In particular, any finitely generated cone of a finite dimensional space is closed.*

The proof of this statement relies on the conical Carathéodory theorem [8].

The recession directions of a convex subset D of a vector space play crucial roles in the success of developing our goals. Rockafellar investigated the case when D is a *closed*, convex set, and it turns out that the recession directions of D have many important properties. They are independent on the choice of $x \in D$ and the existence of recession directions characterize the unboundedness of D . Furthermore, the recession directions form a cone: they are closed on addition and multiplication with nonnegative real numbers. Thus, the set of all recession directions denoted by $\text{rec}(D)$ is called the *recession cone* of D . However, the objective's domain of the log-barrier problem requires us to use *open*, convex sets. But it turns out that the same statements remain true in this case too.

LEMMA. *If D is a nonempty, open, convex subset of a Euclidean space X , and $r \in X$, then the next statements are equivalent:*

- (i) *There exists $x \in D$, such that $x + \alpha r \in D$ for all $\alpha \geq 0$;*
- (ii) *For all $x \in D$ and for all $\alpha \geq 0$, we have that $x + \alpha r \in D$.*

Moreover, D is bounded if and only if $\text{rec}(D)$ is trivial.

Despite the similar properties of the two cases, we need to follow an alternative approach in the proof.

Finally, we mention a calculus property of recession cones which holds in both the open and closed cases. In fact, the reasoning in their proof is also very similar.

LEMMA. *If A and B are intersecting open/closed, convex subsets of a Euclidean space X , then*

$$\text{rec}(A \cap B) = \text{rec}(A) \cap \text{rec}(B).$$

The aim of CHAPTER 2 is to achieve an extension of the classical log-barrier problem while avoiding the usage of the simplex method and also correcting Vanderbei's mistake (in [29]): He used the Heine–Borel Theorem in the relative topology induced by an open subset of \mathbb{R}^n . In the proof, we use the methods of Convex Analysis combined with some ideas of Wright [32]. For this, we work with the particular form of linear programs

$$\begin{array}{ll} & c^T x \quad \mapsto \max \\ \text{Primal:} & Ax + \omega = b \\ & x, \omega \geq 0; \\ & y^T b \quad \mapsto \min \\ \text{Dual:} & A^T y - z = c \\ & y, z \geq 0 \end{array}$$

where $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $c \in \mathbb{R}^n$ and $b \in \mathbb{R}^m$ are given and we have also introduced the nonnegative ω and z slack variables to achieve equality conditions in the constraint system. This pair

of problems is termed the *primal–dual pair in standard form*. If we perturb the objective function with the help of the logarithm function and a parameter $t > 0$, then the connected *log-barrier problem* is

$$\begin{aligned} c^T x + t \sum_{j=1}^n \log x_j + t \sum_{i=1}^m \log \omega_i \longmapsto \max \\ Ax + \omega = b \\ x, \omega > 0 \end{aligned}$$

which is a one-parameter family of problems.

If the perturbed objectives have a unique optimum for each parameter, then the optimal solutions form a parametrized curve called the *central path*. As the parameter shrinks to zero, the perturbed objective approaches to the original one. Thus the central path is expected to terminate in the optimal solution of the original linear program.

To be able to study the central path in a geometrical point of view, we introduce the *path* and its *generator* in an abstract setting.

DEFINITION. *Let T and B be nonempty sets. We say that $F: T \times B \rightarrow \mathbb{R}$ fulfills the parametrized global maximum property if, for all $t \in T$ there exists a unique element $h(t) \in B$ such that*

$$F(t, h(t)) > F(t, x)$$

holds for all $x \neq h(t)$. In this case, $h: T \rightarrow B$ is a function, indeed. The function h and the map F are called the path and its generator, respectively.

Now assume that T is a metric space and B is a nonempty subset of a Euclidean space E , and consider the next limit conditions for $F: T \times B \rightarrow \mathbb{R}$: For all $t_0 \in T$ and for all $x_0 \in \bar{B} \setminus B$,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ x \rightarrow x_0}} F(t, x) = -\infty.$$

For all $t_0 \in T$,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ \|x\| \rightarrow +\infty}} F(t, x) = -\infty.$$

These requirements on the path generator ensure that the induced central path is continuous:

LEMMA. *Let T be a metric space, and B be a nonempty subset of a Euclidean space E . If $F: T \times B \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous path generator which has the two limit conditions above, then the path $h: T \rightarrow B$ is continuous.*

For special generators, we have monotonicity along the central path:

LEMMA. *Let $I \subseteq \mathbb{R}$ be an interval, B be a nonempty subset of a Euclidean space E , $c \in E$, and $g: E \rightarrow \mathbb{R}$. If the function $F: I \times B \rightarrow \mathbb{R}$ defined by*

$$F(t, x) := c^T x + tg(x)$$

satisfies the parametrized global maximum property, then $g \circ h$ is monotone increasing.

The main results of CHAPTER 2 are presented in two theorems. The first one gives a sufficient condition for a concave program to have optimal feasible solution.

THEOREM. *Assume that X and Y are Euclidean spaces, $D \subseteq X$ is a nonempty, open, convex set, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, and $b \in Y$. If a concave function $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the limit conditions*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} f(x + \alpha r) = -\infty$$

for all $x_0 \in \partial D$ and for all $r \in \text{rec}(D)$, and the concave program

$$\begin{aligned} f(x) \mapsto \max \\ Ax = b \end{aligned}$$

has a feasible solution, then it has a feasible optimal solution, as well.

The limit properties involved guarantee that the “large” values of the objective are allocated in a compact subset of the domain. The proof of this statement is based on the *open* sublevel sets of the objective function, and their recession cones also play a key role.

Before the second main result of this chapter we need the concept of *standard projections*.

DEFINITION. *Let X be a Euclidean space and consider its standard base. If $1 \leq k \leq \dim(X)$, then the k th standard projection $\pi_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ is the function which assigns the standard coordinate x_k to all $x \in X$.*

The second main result of this chapter is the extension of the log-barrier problem.

THEOREM. *Let $D \subseteq \mathbb{R}_+^{n+m}$ be a nonempty, open, convex set, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, and $b \in \mathbb{R}^m$, furthermore $c \in \mathbb{R}^n$. Assume that $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuously differentiable strictly concave function such that $\partial_k g$ are nonnegative, $\pi_k \partial_k g$ are bounded, and the function*

$$(x, \omega) \mapsto c^T x + tg(x, \omega)$$

satisfies the limit conditions in the previous theorem for all $t > 0$. If the original primal–dual pair has a feasible solution in D , then the central path of the family of concave programs

$$\begin{aligned} c^T x + tg(x, \omega) &\mapsto \max \\ Ax + \omega &= b \end{aligned}$$

is well-defined and continuous. Moreover, each limit point at $t = 0$ of the central path’s graph is an optimal solution of the attached primal–dual pair.

The one-parameter family of the concave problems reduces to a linear program in standard form if we set $t = 0$. The previous results in this chapter ensure that its central path exists and it is continuous. Moreover, each limit point of its graph represents an optimal solution of the original primal–dual pair.

One advantage of our result is that we do not need second order tests to check optimality. Thus, simple *continuous* (instead of *twice*) differentiability assumption is enough on the objective. Therefore, Lagrange multipliers and the Complementary Slackness Theorem from linear programming are sufficient for the proof.

As a direct application of the main results we can formulate the statement about the central path and the optimality of the classical log-barrier problem.

COROLLARY. If the original primal–dual pair has a positive feasible solution, then the central path of the log-barrier problem exists and continuous. Moreover, its each limit point at zero is a feasible optimal solution of the original primal–dual pair.

The only thing that needs to be checked for this statement is that the log-barrier problem fulfills all the conditions of the previous theorem. This can be done with some simple calculations.

At the end of the chapter, we discuss that from the boundedness of the functions $\pi_k \partial_k g$ we can explain the usage of the logarithm as the perturbation function in the objective function of the classical barrier problem.

Consider now linear programs given in the general form

$$\langle c, x \rangle \mapsto \max_{x \in P}$$

where $P \subseteq \mathbb{R}^n$ is a polyhedron and $c \in \mathbb{R}^n$ is a given vector. This form allows us to focus on the geometric interpretation of

linear programs. The main result of CHAPTER 3 gives a geometrical optimality condition for linear programs based on the well-known *graphical method*. (For a more detailed discussion on the geometric properties of linear programming we recommend the book of Schrijver [26].) The dimension-free characteristic property which we focus on is that the coefficient vector of the objective has to make an obtuse angle with those half-lines that completely lie in the feasible set P . We can describe this property in a convenient way with the so called *normal cone* of $\text{rec}(P)$.

DEFINITION. *If D is a convex subset in a vector space X and $p \in D$, then the normal cone of D at the point p is the set*

$$\mathcal{N}_D(p) := \{y \in X \mid \langle y, x - p \rangle \leq 0, x \in D\}.$$

THEOREM. *The linear program in the general form has an optimal solution if and only if it is feasible and*

$$c \in \mathcal{N}_{\text{rec}(P)}(0).$$

This statement might be well-known in the literature, however, our proof is based on the tools of Convex Analysis and Convex Geometry combined with induction. Let us note that it also suggests an algorithm that may differ from the usual simplex method since it moves on facets (and not between vertices).

Considering the fact that we can describe the polyhedron P as a mixed system of linear equalities and inequalities, for applications of the main result, we shall use the primal problem in *canonical form* while the dual problem in *standard form*:

$$\begin{array}{ll} \langle c, x \rangle & \longmapsto \max \\ \text{Primal:} & Ax = b \\ & x \geq 0; \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \langle y, b \rangle & \longmapsto \min \\ \text{Dual:} & A^T y \geq c \end{array}$$

where $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ is a given matrix, furthermore, $c \in \mathbb{R}^n$ and $b \in \mathbb{R}^m$ are given vectors. With the help of our main result, we

can immediately give the optimality condition for these problems.

COROLLARY. A maximum problem in canonical form has an optimal solution if and only if it is feasible and $\langle c, r \rangle \leq 0$ for all $r \in \text{Ker}(A) \cap \mathbb{R}_+^n$.

COROLLARY. A minimum problem in standard form has an optimal solution if and only if it is feasible and $\langle b, q \rangle \geq 0$ whenever $A^T q \geq 0$.

Their proof is the result of a simple calculation, however, these corollaries may be applied to quickly check whether a linear program has an optimal solution or not.

The strong duality theorem is one of the most important cornerstone of linear programming. With the basic separation theorem and our main result we can give an alternative proof avoiding the simplex method. Furthermore, if the primal–dual problems have the above form, then we can also deduce Farkas’ lemma [11], which is well-known to be equivalent to the strong duality theorem.

COROLLARY. If $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ and $b \in \mathbb{R}^m$ then

- (i) either the system $Ax = b$ and $x \geq 0$ has a solution;*
- (ii) or the system $A^T y \geq 0$ and $b^T y < 0$ has a solution.*

Let us mention that their proof allow a geometric approach to duality theory in linear programming besides the algorithmic ones.

Farkas’ lemma, the iconic representation of the theorems of alternatives, has many equivalents, like the results of Gordan [14], Motzkin [23], Stiemke [27], Tucker [28] and Ville [30]. For further proofs of Farkas’ lemma, we recommend the books of Borwein and Lewis [7] or Gale [13]. An elegant exposition is due to Komornik [20].

The aim of CHAPTER 4 is to present an algorithm that decides the solvability of planar feasible linear programs. This

method is motivated by the main result in CHAPTER 3 and the fact that in everyday life problems sometimes only the solvability issue of a linear program counts in a practical application and the solution itself (if it exists) does not. Let us emphasize that this algorithm is different from the one that was suggested by the proof of the main result in CHAPTER 3.

For the implementation of the method we need to work with the planar linear programming problem in the form

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 &\longmapsto \max \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 &\leq b_i \end{aligned}$$

where $c_j, a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ are given for all $j \in \{1, 2\}$ and $i \in \{1, \dots, m\}$ indices. Our method for testing the solvability of feasible linear programs given in this form is the following.

Firstly, we reduce the list of normal vectors (a_{i1}, a_{i2}) with an equivalence classification such that we norm them to the unit circle of \mathbb{R}^2 and collect one representative of each class into the reduced point list R . Then, from R we collect all the opposing pair of points (if there is any) into a new list N . The main task is to determine the list E containing the extremal vectors that generate the normal cone of the feasible set. Depending on the lists R and N , this part of the algorithm has several stopping points when it can achieve its output value (the list E). Finally, the main theorem in this chapter decides the solvability of the given planar linear programming problem.

THEOREM. *The previously presented method is mathematically correct and it stops in finitely many steps. Moreover, if the problem is feasible and at the end of the algorithm*

- (i) *E is empty, then there exists an optimal solution;*
- (ii) *E is nonempty and $c \in \text{cone}(E)$, then there exists an optimal solution, otherwise not.*

In particular, if $c \notin \text{cone}(E)$, then there is no optimal solution.

The proof of this statement, which is also a validation of our method, can be done in a geometrical way. It is a separation of cases based on the number of elements in the list N and the separation property by lines chosen in a special way. However, in every case, the solvability is ensured by the main result in CHAPTER 3.

One of the disadvantages of this algorithm is that it does not ensure the feasibility of the given linear program. Thus, this method might be more useful in general for determining the non-solvability of the linear program.

Considering this method in higher dimensions, it might be possible to formulate a similar one, however, some further problems might occur. We cannot apply the concept of “maximum angle” of two points as we did it in the planar case. Moreover, our method heavily depends on the fact that every convex cone in \mathbb{R}^2 (if it is not a half-plane) can be uniquely generated by at most 2 extremal vectors and this might reduce the required calculation steps. But this fact is not ensured even in the 3-dimensional case since the number of extremals can be very high.



Registry number: DEENK/513/2025.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Norbert Tóth
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10088767

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

1. Bessenyei, M., **Tóth, N.**: An optimality condition for linear programs.
Publ. Math. Debr. 108, 2026. ISSN: 0033-3883.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5486/PMD2026.10145>
IF: 0.5 (2024)

Foreign language scientific articles in international journals (1)

2. Bessenyei, M., **Tóth, N.**: A Convex Analysis View of the Barrier Problem.
J. Convex Anal. 29 (3), 827-836, 2022. ISSN: 0944-6532.
IF: 0.6

List of other publications

Foreign language scientific articles in international journals (1)

3. Bessenyei, M., **Tóth, N.**: The Coincidence Set of Generalized Lines and Generalized Monotone Functions.
Results Math. 80 (3), 1-9, 2025. ISSN: 1422-6383.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00025-025-02379-5>
IF: 1.2 (2024)

Total IF of journals (all publications): 2,3

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 1,1

The Candidate's publication data submitted to the Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

08 September, 2025



Bibliography

- [1] Barvinok, A., *A course in convexity*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2002.
- [2] Bayer, D., Lagarias, J., *The nonlinear geometry of linear programming: affine and projective scaling trajectories*, Transactions of the AMS **314** (1989), 499–525.
- [3] Bayer, D., Lagarias, J., *The nonlinear geometry of linear programming: Legendre transform coordinates and central trajectories*, Transactions of the AMS **314** (1989), 527–581.
- [4] Bernstein, F., Doetsch, G., *Zur Theorie der konvexen Funktionen*, Math. Ann. **76** (1915), no. 4, 514–526.
- [5] Bessenyei, M., Tóth, N., *A Convex Analysis View of the Barrier Problem*, Journal of Convex Analysis **29** (2022), no. 3, 827–836.
- [6] Bessenyei, M., Tóth, N., *An optimality condition for linear programs*, Publicationes Mathematicae Debrecen **108** (2026).
- [7] Borwein, J. M., Lewis, A. S., *Convex analysis and nonlinear optimization – Theory and examples*, CMS Books in Mathematics, vol. 3, 2nd ed., Springer, New York, 2006.
- [8] Carathéodory, C., *Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen*, Rend. Circ. Mat. Palermo **32** (1911), 193–217.
- [9] Dantzig, G. B., *Application of the simplex method to a transportation problem*, Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission Monograph No. 13 (1951), 359–373.
- [10] Dantzig, G. B., *Linear programming and extensions*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [11] Farkas, J., *Theorie der einfachen Ungleichungen*, J. für Math. **124** (1901), 1–27.
- [12] Fiacco, A. V., McCormick, G. P., *Nonlinear programming: Sequential unconstrained minimization techniques*, John Wiley and Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1968.

- [13] Gale, D., *The theory of linear economic models*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1960.
- [14] Gordan, P., *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Coefficienten*, Math. Ann. **6** (1873), 23–28.
- [15] Huard, P., *Resolution of mathematical programming with nonlinear constraints by the method of centers*, in J. Abadie, ed., *Nonlinear Programming*, North-Holland, Amsterdam, (1967), pp. 209–219.
- [16] Kantorovich, L., *Mathematical methods in the organization and planning of production*, Management Science **6** (1960), 550–559.
- [17] Karmarkar, N., *A new polynomial time algorithm for linear programming*, Combinatorica **4** (1984), 373–395.
- [18] Khachiyan, L. G., *A polynomial algorithm in linear programming*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 244, no. 5 (1979), 1093–1096.
- [19] Klee, V., Minty, G. J., *How good is the simplex algorithm?*, Inequalities, III (Proc. Third Sympos., Univ. California, Los Angeles, Calif., 1969, 159–175, 1972.
- [20] Komornik, V., *A simple proof of Farkas' lemma*, Amer. Math. Monthly **105** (1998), no. 10, 949–950.
- [21] Megiddo, N., *Pathways to the optimal set in linear programming*, in Progress in Mathematical Programming, pp. 131–158, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [22] Minkowski, H., *Geometrie der Zahlen*, Bibliotheca Mathematica Teubneriana, Band 40, Johnson Reprint Corp., New York-London, 1968.
- [23] Motzkin, Th. S., *Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen*, Ph.D. Diss., Basel, 1936.
- [24] Rockafellar, R., *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [25] Roos, C., Terlaky, T., Vial, J. P., *Interior point methods for linear optimization*, Springer, New York, 2006.
- [26] Schrijver, A., *Theory of linear and integer programming*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1986.
- [27] Stiemke, E., *Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen*, Math. Ann. **76** (1915), 340–342.
- [28] Tucker, A. W., *Dual systems of homogeneous linear relations*, Linear inequalities and related systems, Annals of Mathematics Studies, no. 38, 3–18, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1956.
- [29] Vanderbei, R. J., *Linear programming – Foundations and extensions*, International Series in Operations Research & Management Science, vol. 196, 4th ed., Springer, New York, 2014.

- [30] Ville, J., *Sur la théorie général des jeux ou intervient l'habileté des joueurs*, in E. Borel, ed., 'Traité du calcul des probabilités et de ses applications', Paris, Gauthier-Villars, 1938.
- [31] Weyl, H., *Elementare Theorie der konvexen Polyeder*, Comment. Math. Helv., **7** (1934), no. 1, 290–306.
- [32] Wright, S. J., *Primal-dual interior-point methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1997.