Kétlépcsős Riemann-nilsokaságok geodetikusairól és izometriáiról

Doktori (PhD) értekezés

Homolya Szilvia

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar

Debrecen, 2006.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika- és számítástudományi Doktori Iskola Matematika doktori program Differenciálgeometria és alkalmazásai alprogramja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2006. július 7.

. . . .
Homolya Szilvia
jelölt

Tanúsítom, hogy Homolya Szilvia doktorjelölt 1999-2002. között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2006. július 7.

. . . .
Dr. Nagy Péter Tibor
témavezető

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik a disszertáció elkészítése során segítséget nyújtottak.

Elsősorban témavezetőmnek, Dr. Nagy Péter Tibornak, akinek szakmai tanácsai és biztatása nélkül ez a disszertáció soha nem készülhetett volna el.

A Miskolci Egyetem Matematikai Intézetének, hogy támogattak a PhD tanulmányaim során és lehetővé tették dolgozatom megírását. A Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének és Geometriai Tanszékének a tudományos segítséget.

Végül, de nem utolsósorban, köszönettel tartozom családomnak, azért, hogy mindenben támogattak, lelkesen biztattak és nyugodt hátteret biztosítottak munkámhoz.

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés

A homogén terek elmélete a differenciálgeometria egyik fontos fejezete, mivel ezen terek a ”jól kezelhetőségük” miatt alkalmas példákat, illetve ellenpéldákat szolgáltatnak egyes problémák vizsgálatánál, továbbá szoros összefüggésben állnak a Lie-csoportok elméletével is.

A disszertációban a topologikus csoportok egy nagyon speciális csoportjával, a *Lie-csoportokkal*, ezen belül az úgynevezett kétlépcsős nilpotens Lie-csoportokkal foglalkozunk. A bevezetőben a szükséges alapfogalmakat definiáljuk, illetve az irodalomból ismert olyan eredményeket idézünk, melyekre a későbbi számolások, bizonyítások során támaszkodni fogunk. A bevezető után a disszertáció 3 részre tagolódik. Az első részben speciális 6- illetve 7-dimenziós kétlépcsős nilsokaságok *geodetikus gráfját* adjuk meg explicit módon. A következő fejezetben a balinvariáns $\langle .,. \rangle$ Riemann-metrikával ellátott kétlépcsős nilpotens N Lie-csoport geodetikusait jellemezzük, felhasználva a $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ fibrumnyaláb Riemann-szubmerzió struktúráját (ahol $\mathcal{Z}$ jelöli az N Lie-csoport centrumát). Továbbá megadjuk annak feltételét, mikor lesz egy kétlépcsős nilsokaság geodetikusainak összes projektált görbéje az $N/\mathcal{Z}$ alapsokaságon (amely egyben euklideszi tér is) síkgörbe. Az utolsó részben az 5-dimenziós, egyszeresen összefüggő kétlépcsős nilsokaságokat osztályozzuk izometria erejéig, miközben megadjuk a teljes izometria-csoportjaikat.

Az itt közölt eredmények jelentős része publikálásra került. A 2.2 alfejezet alapjául a szerző [11] dolgozata szolgált, s ezt egészíti ki a 2.3 alfejezetben tárgyalt 7-dimenziós eset. A következő fejezet a [13] munkánk alapján íródott. A 4. fejezet a [12] cikkünkön alapul.

Lássunk először néhány, a későbbiekben is szükséges alapfogalmat. Emlékeztetőül megemlítjük, hogy egy M Riemann-sokaságot *homogén*nek nevezünk, ha az M izometria-csoportja tranzitív M-n.

Legyen a G egy topologikus csoport. Tegyük fel, hogy adott a csoporton egy, a topológiájának megfelelő analitikus struktúra, amely G-t egyben analitikus sokasággá teszi. Ekkor, ha az

$$\begin{aligned} (x,y) &\mapsto xy,\ G\times G \to G; \\ x &\mapsto x^{-1},\ G \to G \end{aligned}$$

leképezések analitikusak, akkor azt mondjuk, hogy G (a fenti analitikus struktúrával együtt) *Lie-csoport.*

A definícióból következik, hogy az $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ leképezés is analitikus $G\times G$-ből G-be. Rögzített $g \in G$ esetén definiáljuk az L_g (illetve R_g) baleltolást (illetve jobbeltolást) a következő módon:

$$L_g x = gx,\ R_g x = xg,$$

ahol $x \in G$. Ekkor a bal- illetve jobbeltolások a G analatikus sokaság analitikus diffeomorfizmusai.

Egy G-beli X vektormezőt *balinvariáns (jobbinvariáns) vektormezőnek* nevezünk, ha invariáns minden L_g $(g \in G)$ baleltolásra (illetve R_g jobbeltolásra), azaz $L_{g*}X = X$. (Hasonló módon értelmezhető bal- illetve jobbinvariáns *Riemann-metrika* is a G csoporton.) A bal- illetve jobbinvariáns vektormezők differenciálhatóak.

Tetszőleges $g \in G$ esetén az

$$Ad(g)x = gxg^{-1}$$

(bármilyen $x \in G$-re) összefüggés által definiált $Ad(g)$ leképezés a G Lie-csoport belső automorfizmusa. Az

$$Ad : g \to Ad(g)$$

leképezést a G *adjungált reprezentációjának* nevezzük.

A G Lie-csoport $\mathfrak{g}$-vel jelölt *Lie-algebrá*ja alatt a G-beli balinvariáns vektormezők összességét értjük, ellátva a szokásos összeadással, skaláris szorzással, valamint a $[.,.]$ zárójel művelettel. (Azaz $[X,Y]\,f = (XY - YX)\,f$ tetszőleges X, Y balinvariáns vektormezők és f differenciálható függvény esetén.) Könnyen látható, hogy ha a $\mathfrak{g}$ Lie-algebrát vektortérként tekintjük, akkor $\mathfrak{g}$ izomorf T_eG-vel, azaz az egységelembeli érintőtérrel, ugyanis az

$$X \in \mathfrak{g} \mapsto X_e \in T_eG$$

leképezés vektortér-izomorfizmus. Így a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra a vektormezők $\mathfrak{X}(G)$ Lie-algebrájának n-dimenziós Lie részalgebrája (ahol $\dim G = n$). Lie-algebrát definiálhatunk általánosan, a Lie-csoport fogalma nélkül is.

Lie-algebra alatt egy véges dimenziós V vektorteret értünk ellátva a $[.,.]$ bilineáris művelettel, amelyre teljesülnek a következők:

$$\begin{aligned} [X,X] &= 0 \text{ és} \\ [[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] &= 0 \text{ (”Jacobi azonosság”)} \end{aligned}$$

tetszőleges $X, Y, Z \in V$ esetén. A definícióból látszik, hogy a $[.,.]$ Lie-zárójel ferdén szimmetrikus, így a Lie-algebra csak akkor kommutatív, ha $[X,Y] = 0$ teljesül minden $X, Y \in V$ esetén.

A következőkben feltesszük, hogy a $\mathfrak{g}$ valós, véges dimenziós Lie-algebra. Tetszőleges $X \in \mathfrak{g}$ esetén jelölje $ad(X)$ a Lie-algebra

$$ad(X) : Y \mapsto [X,Y] \qquad (Y \in \mathfrak{g})$$

endomorfizmusát. A Lie-algebra definíciójából következik, hogy az $ad(X)$ a $\mathfrak{g}$ derivácója, így az $X \mapsto ad(X)$ leképezés a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra reprezentációja önmagán, melyet a Lie-algebra *adjungált reprezentációjának* nevezünk. A Lie-algebra pontosan akkor kommutatív, ha $ad(X) = 0$ tetszőleges $X \in \mathfrak{g}$ esetén. Az adjungált reprezentáció magját, azaz mindazon $X \in \mathfrak{g}$ elemek halmazát, melyre $[X, Y] = 0$ teljesül tetszőleges $Y \in \mathfrak{g}$ esetén, a Lie-algebra *centrumának* nevezzük.

Azt láttuk, hogyan adható meg egy Lie-csoport Lie-algebrája. A Lie-elmélet másik fontos kérdése, hogyan rekonstruálható egy G Lie-csoport a $\mathfrak{g}$ Lie-algebrájából, melyre a *Lie-tétel* ad választ. E tétel szerint minden Lie-algebra valamely lokális Lie-csoport Lie-algebrája. Egy lokális Lie-csoportot lokális izomorfizmus erejéig meghatároz a Lie-algebrája. Minden $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ Lie-algebra homomorfizmus két lokális Lie-csoport Lie-algebrája között $\varphi = (df)_e$ alakú, ahol $f : G_1 \to G_2$ differenciálható homomorfizmus lokális Lie-csoportok között, melyet ez a feltétel egyértelműen meghatároz.

Cartan bebizonyította, hogy a fenti állítás kiterjeszthető lokális Lie-csoportokról egyszeresen összefüggő Lie-csoportokra.

Tetszőleges G Lie-csoport esetén definiáljuk az

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

exponenciális leképezést a következő módon. Adott $X \in \mathfrak{g}$ esetén legyen $\phi : \mathbb{R} \to G$ az az egyértelmű C^∞ homomorfizmus, melyre $\frac{d\phi}{dt}(0) = X$. Ekkor

$$\exp(X) = \phi(1).$$

Nyilvánvalóan

$$\begin{aligned} \exp(t_1 + t_2)X &= (\exp t_1 X)(\exp t_2 X) \\ \exp(-tX) &= (\exp tX)^{-1}. \end{aligned}$$

Ekkor az $\exp : T_e G \to G$ leképezés analitikus, valamint a $0 \in T_e G$ tetszőleges környezetét diffeomorf módon képezi le az $e \in G$ valamely környezetére.

Legyen a $\mathfrak{g}$ egy Lie-algebra. A $\mathfrak{g}$ *derivált sorozata* alatt a Lie-algebra $D^0\mathfrak{g}, D^1\mathfrak{g}, \ldots$ ideáljainak csökkenő láncát értjük, melyeket induktív módon a

$$\begin{aligned} D^0\mathfrak{g} &= \mathfrak{g}, \\ D^{p+1}\mathfrak{g} &= [D^p\mathfrak{g}, D^p\mathfrak{g}] \end{aligned}$$

összefüggésekkel definiálunk. A $\mathfrak{g}$ *csökkenő centrális sorozata* pedig a Lie-algebra $C^0\mathfrak{g}, C^1\mathfrak{g}, \ldots$ ideáljainak csökkenő lánca, melyeket a

$$\begin{aligned} C^0\mathfrak{g} &= \mathfrak{g}, \\ C^{p+1}\mathfrak{g} &= [\mathfrak{g}, C^p\mathfrak{g}] \end{aligned}$$

összefüggések definiálnak. Nyilvánvalóan $D^p\mathfrak{g} \subset C^p\mathfrak{g}$. Azt mondjuk, hogy a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra *Abel*, ha $D^1\mathfrak{g} = 0$; *nilpotens*, ha $C^p\mathfrak{g} = 0$ valamely p esetén (a legkisebb ilyen p-re p-lépcsős nilpotensnek nevezzük); továbbá feloldható, ha $D^p\mathfrak{g} = 0$ valamely p esetén. Ismert az is, hogy a $\mathfrak{g}$ Lie-algebra pontosan akkor nilpotens, ha $ad(X)$ nilpotens operátor $\mathfrak{g}$-n minden $X \in \mathfrak{g}$ esetén.

A G Lie-csoportot (p-lépcsős) nilpotensnek hívjuk, ha a G csoport $\mathfrak{g}$ Lie-algebrája (p-lépcsős) nilpotens.

Ha a G egy egyszeresen összefüggő nilpotens Lie-csoport, melynek Lie-algebrája $\mathfrak{g}$, akkor az $\exp : \mathfrak{g} \to G$ leképezés diffeomorfizmus, melynek inverze $\log : G \to \mathfrak{g}$.

Ekkor tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{g}$ esetén a Campbell-Baker-Hausdorff formula szerint

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp\left(X + Y + P(X,Y)(X) + Q(X,Y)(Y)\right),$$

ahol $P(X,Y)$ és $Q(X,Y)$ véges polinomok $ad(X)$-ben, illetve $ad(Y)$-ban. Kétlépcsős nilpotens Lie-algebra esetén a következő azonosságokat kapjuk:

$$\begin{aligned} \exp(X)\exp(Y) &= \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X,Y]\right), \\ \log(gg^*) &= \log(g) + \log(g^*) + \frac{1}{2}[\log(g), \log(g^*)], \end{aligned}$$

tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{g}$, $g, g^* \in G$ esetén. Ha a $g, g^* \in G$ elemek kommutátorát a $[g, g^*] = gg^*g^{-1}g^{*-1}$ azonossággal definiáljuk, akkor az előzőekből következik, hogy

$$[\exp(X), \exp(Y)] = \exp([X, Y])$$

tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{g}$ esetén.

Mivel vizsgálataink középpontjában a *homogén nilsokaságok* állnak, a következőkben definiáljuk mit értünk e fogalom alatt. Jelölje az összefüggő M Riemann-sokaság izometria-csoportját $G = I(M)$, amely Lie-csoport a megfelelő topológiára vonatkozóan. Az M sokaságot *homogén nilsokaság*nak nevezzük, ha a G tartalmaz olyan H nilpotens Lie részcsoportot, amely tranzitív az M-n, azaz tetszőleges $x, y \in M$ esetén van olyan $p \in H$, hogy $y = px$.

E. Wilson a [33] cikkében bebizonyította, hogy ennél erősebb tulajdonság is teljesül homogén nilsokaságok esetén, mégpedig:

1. TÉTEL. *Legyen M homogén nilsokaság és H a $G = I(M)$ izometria-csoportnak egy nilpotens Lie részcsoportja, mely tranzitív módon hat a sokaságon. Jelölje N a H-ban az egység összefüggő komponensét.*

1. *Ekkor N egyszeresen tranzitív M-n, valamint normális részcsoportja G-nek.*

2. *Tetszőleges $p_0 \in M$ esetén a G izometria-csoport az N és a*

   $$K_{p_0} = \{k \in G : kp_0 = p_0\}$$

   izotrópia-csoport szemidirekt szorzata.

3. *Az N a G-nek az egyetlen olyan nilpotens részcsoportja, amely egyszeresen tranzitív a G-n.*

Azt mondjuk, hogy egy $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ *pár egy egyszeresen összefüggő homogén nilsokaság adatpárja*, ha az $\mathfrak{n}$ egy véges dimenziós valós nilpotens Lie-algebra, $\langle , \rangle$ pedig egy skaláris szorzat $\mathfrak{n}$-en.
Az $(\mathfrak{n}_1, \langle , \rangle_1)$ és az $(\mathfrak{n}_2, \langle , \rangle_2)$ adatpárokat *ekvivalens*nek nevezzük, ha létezik olyan $\varphi : \mathfrak{n}_1 \to \mathfrak{n}_2$ Lie-algebra izomorfizmus, melyre teljesül, hogy

$$\langle \varphi(X), \varphi(Y) \rangle_2 = \langle X, Y \rangle_1 \ \text{ tetszőleges } X, Y \in \mathfrak{n}_1 \text{ esetén.}$$

Az utolsó fejezetben az egyszeresen összefüggő 5-dimenziós kétlépcsős nilsokaságokat osztályozzuk izometria erejéig és egyben megadjuk a teljes izometria-csoportokat. Ezen osztályozás során felhasználjuk majd a következő, E. Wilsontól (lásd [33]) származó eredményt.

2 . Tétel. *Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható meg az egyszeresen összefüggő homogén nilsokaságok izometria ekvivalenciaosztályai és az adatpárok ekvivalenciaosztályai között.*

A nilpotens Lie-csoportok közül a disszertációban a kétlépcsős nilsokaságok bizonyos tulajdonságait vizsgáljuk. Tekintsünk először néhány alapfogalmat a kétlépcsős Lie-algebrákkal illetve nilsokaságokkal kapcsolatban.

Egy $\mathfrak{n}$ Lie-algebra *kétlépcsős nilpotens*, ha

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \neq \{0\} \ \text{ és } \ [[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}] = \{0\}.$$

A $\mathfrak{z}$ jelöli a továbbiakban az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra centrumát és $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}^\perp$ pedig a $\mathfrak{z}$ centrum ortogonális komplementumát. Így az $\mathfrak{n}$ Lie-algebrára az $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{z}$ ortogonális direkt összeg felbontást kapjuk. Jelölje $so(\mathfrak{a})$ az $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ metrikus Lie-algebra $(\mathfrak{a}, \langle , \rangle_{\mathfrak{a}})$ euklideszi alterében a ferdén szimmetrikus endomorfizmusok Lie-algebráját.

3. DEFINÍCIÓ. *Legyen* $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ *egy kétlépcsős nilpotens metrikus Lie-algebra és* $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{z}$. *Minden centrumbeli* $Z \in \mathfrak{z}$ *elemre definiálja a* $j(Z) \in so(\mathfrak{a})$ *endomorfizmust a*

$$\langle j(Z)X, Y\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle \tag{1}$$

összefüggés $X, Y \in \mathfrak{a}$ *esetén.*

Ekkor a $j : \mathfrak{z} \to so(\mathfrak{a})$ lineáris leképezés.

Megfordítva minden kétlépcsős nilsokaságot megadhatunk az alábbi módon. Legyenek $(\mathfrak{a}, \langle , \rangle_{\mathfrak{a}})$ és $(\mathfrak{z}, \langle , \rangle_{\mathfrak{z}})$ metrikus Lie-algebrák, továbbá rögzítsünk egy $j : \mathfrak{z} \longrightarrow so(\mathfrak{a})$ lineáris leképezést. Jelölje az $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ az $(\mathfrak{a}, \langle , \rangle_{\mathfrak{a}})$ és $(\mathfrak{z}, \langle , \rangle_{\mathfrak{z}})$ metrikus Lie-algebrák direkt összegét.

A ferdén szimmetrikus $[.,.] : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathfrak{z}$ bilineáris leképezést (Lie-zárójelet) a következő módon kapjuk meg. Először definiáljunk az $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{z}$ feltétel és az (1) összefüggés segítségével egy Lie-zárójelet az $\mathfrak{a}$ Lie-algebrán. Ezután az $[\mathfrak{n}, \mathfrak{z}] = \{0\}$ feltétel segítségével kiterjesztjük a Lie-zárójelet az egész $\mathfrak{n}$ Lie-algebrára. Mivel $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{z}$ és $[\mathfrak{n}, \mathfrak{z}] = \{0\}$, így az $\mathfrak{n}$ algebra kétlépcsős nilpotens.

Jelölje N a megfelelő egyszeresen összefüggő Lie-csoportot ellátva a $\langle , \rangle$ belső szorzat által indukált $\langle ., . \rangle$ balinvariáns Riemann-metrikával. Az előzőek alapján a $(N, \langle ., . \rangle)$ homogén nilsokaság is kétlépcsős nilpotens. Az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{z}, j)$-t az egyszeresen összefüggő N Riemann-nilsokaság *adathármas*ának nevezzük. Továbbá, ha a $\mathfrak{z}$ az $\mathfrak{n}$ kommutátora (azaz $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{z}$), a $j : \mathfrak{z} \longrightarrow so(\mathfrak{a})$ lineáris leképezés injektív is.

Az $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ algebrai tulajdonságai kifejezhetőek a $j(Z)$ leképezések segítségével. Legyen adott két metrikus Lie-algebra $(\mathfrak{a}, \langle , \rangle_{\mathfrak{a}})$ és $(\mathfrak{z}, \langle , \rangle_{\mathfrak{z}})$, valamint $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle_{\mathfrak{n}})$ a direkt összegük. Rögzítsünk egy $j : \mathfrak{z} \to so(\mathfrak{a})$ lineáris leképezést. A $\{j(Z) : Z \in \mathfrak{z}\}$ leképezések tartalmazzák az "$(N, \langle , \rangle)$ geometriáját" abban az értelemben, hogy a kovariáns deriválás, a görbületi és a Ricci-tenzor kifejezhető a $j, \mathfrak{a}$ és $\mathfrak{z}$ segítségével (lásd [6]). Továbbá az izotrópia-csoport, valamint annak feltétele, hogy az $(N, \langle .,. \rangle)$ természetesen reduktív vagy Riemann-geodetikus pályatér, szintén leírható a $\{j(Z) : Z \in \mathfrak{z}\}$ leképezések segítségével. Az $(N, \langle .,. \rangle)$ nilsokaság

$$\gamma(0) = e \text{ és } \gamma'(0) = X + Z,$$

$(X \in \mathfrak{a}, Z \in \mathfrak{z})$ kezdetiértékkel adott γ geodetikusa a $[j(Z)]^2$ különböző, nemzérus sajátértékeinek függvényében adható meg.

A balinvariáns metrikával ellátott kétlépcsős nilpotens Lie-csoportok között a Heisenberg-típusú Lie-csoportok különös jelentőséggel bírnak. A balinvariáns $\langle .,. \rangle$ metrikával ellátott N Lie-csoport *Heisenberg-típusú* (H-típusú) *Lie-csoport,* ha

$$[j(Z)]^2 = -\langle Z, Z \rangle id_{\mathfrak{a}}$$

teljesül tetszőleges $Z \in \mathfrak{z}$ esetén. Ezen csoportok tulajdonságait többek között a geometriában, a harmonikus analízisben és a spektrálgeometriában is vizsgálják, mivel a H-típusú Lie-csoportok számos kérdésben példákat szolgáltatnak.

4. PÉLDA. Izomorfia erejéig a *Heisenberg-csoport* az egyetlen 1-dimenziós centrumú kétlépcsős nilpotens Lie-csoport. A $(2n+1)$-dimenziós H_{2n+1} Heisenberg-csoport az összes $(n+2) \times (n+2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & y_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & y_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alakú mátrix csoportja, ahol $x_i, y_i, z \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$.
A H_{2n+1} Lie-csoport $\mathfrak{h}_{2n+1}$ Lie-algebrája egy $(2n+1)$-dimenziós vektortér

$$\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z\}$$

bázissal, ahol a nemzérus Lie-zárójelek

$$[X_i, Y_i] = -[Y_i, X_i] = Z$$

alakúak, $1 \leq i \leq n$ esetén.
A $\mathfrak{h}_{2n+1}$ Lie-algebra $\mathfrak{z}$ centruma $\mathfrak{z} = span_{\mathbb{R}}\{Z\}$ alakú. A $\mathfrak{h}_{2n+1}$ algebrán egy $\langle , \rangle$ belső szorzat rögzítése egy balinvariáns metrikát határoz meg a H_{2n+1} Lie-csoporton. A következőkben azt a természetes belső szorzatot választjuk, amely a fent említett bázist ortonormálttá teszi.
Az (1) egyenletet és az $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z\}$ bázist használva azt kapjuk, hogy

$$j(Z)X_i = Y_i \quad \text{és} \quad j(Z)Y_i = -X_i$$

$1 \leq i \leq n$ esetén.
Ebből következik, hogy

$$[j(Z)]^2 = -id_{\mathfrak{a}},$$

ami azt jelenti, hogy a Heisenberg-csoport ellátva a megfelelő természetes balinvariáns metrikával H-típusú Lie-csoport.

A H-típusú feltétel gyengítésével kapta meg Lauret a kétlépcsős nilsokaságok egy újabb osztályát (lásd [21]).

5 . Definíció. *Az $(N, \langle ., . \rangle)$-t módosított H-típusú csoportnak nevezzük, ha*

$$[j(Z)]^2 = -h(Z)id_{\mathfrak{a}} \tag{2}$$

teljesül minden $Z \in \mathfrak{z}$ esetén, ahol $h(Z)$ egy pozitív definit kvadratikus forma a $\mathfrak{z}$ Lie-algebrán.

Ezen sokaságok fogalmának bevezetését az a tény is motiválta, hogy ahhoz, hogy megértsük a kétlépcsős nilsokaságok geometriáját, természetes először azt az esetet vizsgálni, ahol a $[j(Z)]^2$ csak egy sajátértékkel rendelkezik tetszőleges $Z \in \mathfrak{z}$ esetén. Hiszen a geodetikusok kifejezése annál egyszerűbb, minél kevesebb különböző sajátértéke van a $[j(Z)]^2$-nek.

A [20] dolgozatában J. Lauret osztályozta a balinvariáns metrikával ellátott módosított H-típusú Lie-csoportokat izometria erejéig, bizonyítva azt, hogy a módosított H-sokaságok megadhatóak $(N, \langle .,. \rangle_S)$ alakban, ahol $(N, \langle .,. \rangle)$ H-típusú sokaság és az $\langle .,. \rangle_S$ skaláris szorzatra teljesül az

$$\langle X + A, Y + B \rangle_S = \langle X, Y \rangle + \langle SA, B \rangle$$

összefüggés tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{a}$ és A, B centrumbeli elemek esetén, ahol az S a $(\mathfrak{z}, \langle .,. \rangle)$ egy szimmetrikus pozitív definit transzformációja. Továbbá az $(N, \langle .,. \rangle_S)$ akkor és csak akkor izometrikus az $(N, \langle .,. \rangle_{S'})$ módosított H-típusú csoporthoz, ha S és S' konjugáltak $\mathfrak{z}$-ben, azaz ha létezik olyan $\phi \in O(\mathfrak{z}, \langle .,. \rangle)$, hogy

$$S_1 = \phi S_0 \phi^{-1}.$$

Másrészt az $(N, \langle .,. \rangle_S)$ izometria-csoportjának izotrópia-csoportja

$$K_S = \{\varphi \in K : \varphi|_{\mathfrak{z}} S = S \varphi|_{\mathfrak{z}}\}$$

alakban adható meg, ahol K az $(N, \langle .,. \rangle)$ Heisenberg-típusú nilsokaság izometria-csoportjának izotrópia-csoportját jelöli.

Mivel a disszertációban a geodetikus pályatereket is vizsgáljuk, megjegyezzük, hogy a legfeljebb 6-dimenziós balinvariáns metrikával ellátott kétlépcsős nilpotens Lie-csoportok közül azok, amelyek Riemann-geodetikus pályaterek, egyben módosított Heisenberg-típusú csoportok is.

Szenthe János [31] dolgozatában többek között a természetes torziómentes konnexiók geometriai jellemzésével is foglalkozik, mely kiindulópontja a második fejezetünknek. Azonban míg ő affin esetben végezte vizsgálatait, mi csak a Riemann esetre szorítkozunk.

A homogén sokaságok invariáns affin konnexióinak korszerű elmélete K. Nomizu [27] dolgozatával indult. E cikkben definiálta a reduktív struktúra fogalmát is, amely fontos szerepet játszik az elméletben. Ugyanis nem minden homogén sokaságon lehet invariáns affin konnexiót értelmezni, miközben vannak olyan homogén sokaságok is, melyek több affin konnexióval is rendelkeznek. De ha a homogén sokaság reduktív struktúrával rendelkezik, akkor e struktúrához mindig tartozik egy természetes torziómentes konnexió, amely nagyon fontos geometriai szerkezettel rendelkezik.

A következőkben definiáljuk mit értünk egy homogén sokaság reduktív struktúrája alatt.

Legyen G egy összefüggő Lie-csoport, H a G zárt összefüggő részcsoportja, valamint jelölje $M = G/H$ a H baloldali mellékosztályai által alkotott homogén sokaságot. Legyen $\mathfrak{g}$ a G csoport Lie-algebrája és $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ a H részcsoportnak megfelelő részalgebra. Ha adott egy olyan $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ altér, melyre egyrészt fennáll a következő direkt összeg dekompozíció:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h},$$

másrészt

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m},$$

akkor azt mondjuk, hogy $\mathfrak{m}$ az M homogén sokaság egy *reduktív struktúrá*ja.

Ha a $\pi : G \longrightarrow M$ a természetes projekciót, az $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ pedig az exponenciális leképezést jelöli, akkor tetszőleges $X \in \mathfrak{g}$ esetén a

$$\tau \longmapsto \pi \circ \exp(\tau X), \quad \tau \in \mathbb{R}$$

leképezés az X definiálta 1-paraméteres részcsoport $o = \pi(H)$ kezdőpontú pályája.

Ha $\mathfrak{m}$ a homogén sokaság egy reduktív struktúrája, akkor a sokaságnak mindig létezik pontosan egy olyan invariáns affin konnexiója (ez a fent említett természetes torziómentes konnexió), melynek az o-kezdőpontú geodetikusai az $X \in \mathfrak{m}$ elemekhez az előző módon hozzárendelt pályákkal azonosak. Könnyen belátható az is, hogy egy természetes torziómentes konnexió bármely geodetikusa a G valamely 1-paraméteres csoportjának pályája. Viszont e tulajdonság nem jellemzi általában a konnexiókat, azaz vannak olyan homogén sokaságok, amelyek ugyan rendelkeznek olyan torziómentes invariáns konnexióval, melynek minden geodetikusa pálya, viszont semmilyen reduktív struktúra nem definiálható rajtuk. Szenthe János [30] dolgozatával elindított vizsgálatok nyomán bizonyítást nyert, hogy a Riemann-sokaságok szempontjából érdekes bizonyos esetekben ez utóbbi jelenség nem következhet be. Ugyanakkor A. Kaplan [15] dolgozatában olyan homogén Riemann-tereket írt le, amelyeknél az előbb említett jelenség fennáll. Szenthe János és A. Kaplan fenti munkái egy máig intenzíven vizsgált kérdéskör kutatását indították el.

Adott $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ direkt összeg felbontás esetén jelölje a továbbiakban tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{m}$ elemekre $[X,Y]_{\mathfrak{m}}$ az $[X,Y]$ Lie-zárójelnek az $\mathfrak{m}$ altérre való projekcióját. Ekkor a $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ reduktív felbontásra vonatkozó $\overline{\nabla}$ *természetes torziómentes konnexió* a következő módon definiálható:

$$\left(\overline{\nabla}_{X^*} Y^*\right)_o = -\frac{1}{2}\,[X,Y]_{\mathfrak{m}},$$

ahol $X, Y \in \mathfrak{m}$. Az M sokaságon adott *homogén struktúra* egy $(1,2)$ típusú T tenzormező úgy, hogy

$$\widetilde{\nabla} g = \widetilde{\nabla} R = \widetilde{\nabla} T = 0,$$

$\widetilde{\nabla} := \nabla - T$ esetén, ahol ∇ az (M, g) sokaság Levi-Civita konnexiója és R a megfelelő Riemann görbületi tenzor.

A reduktív homogén terek egy speciális osztályát, a természetesen reduktív homogén Riemann tereket többen is tanulmányozták. Így S. Kobayashi és K. Nomizu ([16]), W. Ambrose és I. M. Singer ([1]), illetve F. Tricerri és L. Vanhecke ([32]) dolgozataiból származik ezen terek következő jellemzése (azaz ekvivalens definíciói).

Az (M, g) homogén Riemann-sokaság akkor és csak akkor *természetesen reduktív*, ha az $I(M)$ izometria-csoportnak van olyan G összefüggő Lie részcsoportja, mely tranzitív és effektív M-n, valamint egy $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ reduktív dekompozíció (ahol $\mathfrak{h}$ valamely M-beli pont H izotrópia-csoportjának Lie-algebrája úgy, hogy a következő feltételek egyike teljesül:

1. $g([X, Z]_{\mathfrak{m}}, Y) + g(X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}) = 0$, tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ esetén;

2. az (M, g) Levi-Civita konnexiója és a dekompozícióra vonatkozó természetes, torziómentes konnexió megegyezik;

3. minden M-beli geodetikus egy $X \in \mathfrak{m}$ elem által generált $I(M)$-beli 1-paraméteres részcsoportnak a pályája.

Fontos megjegyezni, hogy egy $M = G/H$ Riemann homogén tér akkor is lehet természetesen reduktív, ha valamely $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ reduktív felbontása az előbbi feltételeket nem teljesíti. Mégpedig akkor, ha létezik az $I(M)$-nek egy másik, megfelelő $\widetilde{G}$ részcsoportja úgy, hogy $M = \widetilde{G}/\widetilde{H}$ és melyre vonatkozó reduktív felbontás teljesíti a megkívánt feltételeket. A természetesen reduktív terek egyik fontos osztálya a Riemann szimmetrikus tereké. Mivel a Riemann szimmetrikus terek osztályozását már E. Cartan elkészítette, az újabb kutatások (lásd pl. [2]) a nemszimmetrikus természetesen reduktív terek felé irányultak. Így a 3-, 4- és 5-dimenziós nemszimmetrikus természetesen reduktív Riemann homogén terek explicit megadása megtalálható például F. Tricerri és L. Vanhecke [32], illetve O. Kowalski [17] cikkében. J. E. D'Atri és W. Ziller [4] dolgozatukban osztályozták az összes természetesen reduktív kompakt Lie-csoportokat, C. Gordon pedig a nem-kompakt esetet vizsgálta (lásd [9]).

2 Geodetikus vektorok

Legyen (M, g) összefüggő, homogén Riemann-sokaság, melyen adott egy g Riemann-metrika. Ha G az M sokaság izometriáinak tetszőleges összefüggő, tranzitív csoportja és H pedig egy $p \in M$ rögzített pontbeli izotrópia-részcsoport, akkor M természetes módon azonosítható a G/H balinvariáns Riemann-metrikával ellátott faktortérrel. Jelölje a továbbiakban $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ a G izometria-csoport, illetve a H izotrópia-csoport megfelelő Lie-algebráit.

6 . Definíció. *A $(G/H, g)$ homogén Riemann-sokaságot geodetikus pályatérnek vagy geodetikus orbit térnek (röviden g.o. térnek) nevezzük, ha minden M sokaságbeli geodetikus G egyparaméteres részcsoportjának pályája. Azaz minden M-beli geodetikus* $\exp(tX) \cdot p$ *alakban áll elő, ahol $X \in \mathfrak{g}$, $p \in M$.*

Az előző definíciót most úgy módosítjuk, hogy nem rögzítjük előre az (M, g) sokaság G/H homogén térként való előállítását.

7. Definíció. *Az (M, g) Riemann-sokaságot geodetikus pályatérnek vagy geodetikus orbit térnek (röviden g.o. térnek) nevezzük, ha a maximálisan összefüggő G izometria-csoport esetén $(G = I_0(M))$ a G/H faktortér g.o. tér az előző definíció értelmében.*

A G-invariáns g Riemann-metrika olyan belső szorzatot indukál T_pM-en, melyre vonatkozóan az $ad(X)$ leképezés ferdén szimmetrikus minden $X \in \mathfrak{h}$ esetén.
A $\mathfrak{g}$ Lie-algebra egy $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ ortogonális dekompozícióját *reduktív dekompozíció*nak nevezzük, ha $ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a G/H tér *reduktív tér.* Összefüggő H izotrópia-csoport esetén a $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ ortogonális dekompozíció pontosan akkor reduktív, ha $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.

8. DEFINÍCIÓ. *Az (M, g) Riemann-sokaság természetesen reduktív, ha valamely G tranzitív, összefüggő izometria-csoport, és $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ reduktív felbontás esetén az $ad(X)$ leképezés ferdén szimmetrikus minden $X \in \mathfrak{m}$ esetén, azaz teljesül a*

$$\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z \rangle = -\langle Y, [X, Z]_{\mathfrak{m}} \rangle$$

egyenlőség tetszőleges $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$ esetén.

Ismeretes, hogy a $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ $ad(H)$-invariáns dekompozícióval ellátott $(G/H, g)$ homogén Riemann tér akkor és csak akkor *természetesen reduktív* (e felbontást tekintve), ha tetszőleges $X \in \mathfrak{m}$ esetén a

$$\gamma(t) = \exp(tX) \cdot p$$

görbe geodetikus a megfelelő Riemann konnexióra vonatkozóan. A természetesen reduktív (M, g) tér fent említett definíciója ekvivalens a következő feltétellel: az $M = G/H$ természetesen reduktív valamely $G \subset I_0M$ izometria-csoport esetén.

A természetesen reduktív homogén terek a g.o. sokaságok részhalmazát képezik, mivel a g.o. feltétel nyilvánvalóan gyengébb, mint a természesen reduktív terekre vonatkozó. Néhány évtizeddel ezelőtt a Riemann-geodetikus pályatereket még azonosították a természetesen reduktív terekkel. Az első példát olyan geodetikus pályatérre, amely semmilyen módon sem természetesen reduktív, A. Kaplan adta (lásd [15]), s kiemelte a geodetikusok furcsa "spirális" viselkedését. A legegyszerűbb ilyen típusú példa egy speciális balinvariáns metrikával ellátott 6-dimenziós kétlépcsős Riemann-nilsokaság, melynek centruma 2-dimenziós. (Ez egyébként egyike az úgynevezett "általánosított" Heisenberg-csoportoknak.) A geodetikus pályaterek részletes tanulmányozása A. Kaplan előbb említett cikkével kezdődött.

Számos szerző a természetesen reduktív tereket a Riemann szimmetrikus terek természetes általánosítasaiként vizsgálta. A szakirodalomból ismert a természetesen reduktív terek teljes osztályozása 5-dimenzióig. O. Kowalski és L. Vanhecke a [18] cikkükben bizonyították, hogy a 6-nál alacsonyabb dimenziójú Riemann-geodetikus pályaterek mindegyike természetesen reduktív, vagy azzá tehető. Pontosabban szólva, a 4- vagy annál alacsonyabb dimenziós terek természetesen reduktívak, az 5-dimenziós példák természetesen reduktívak vagy azzá tehetőek. Továbbá osztályozták az összes olyan 6-dimenziós Riemann-geodetikus pályateret, amely semmilyen kiterjesztés esetén sem természetesen reduktív.

A g.o. terek tanulmányozásának egyik alapvető technikája Szenthe Jánostól származik (lásd [30]). Ez utóbbi szerző fedezte fel a nem természetesen reduktív g.o. terek érdekes geometriai hátterét, anélkül, hogy ekkor konkrét példa ismert lett volna. A geodetikus pályatereket ő nemcsak Riemann, hanem affin esetben is vizsgálta. Muzsnay Zoltán és Nagy Péter Tibor [25] cikkükben a geodetikus gráf fogalmának Finsler-konnexióelméleti analógját vizsgálták.

A következő állítás Szenthe János fő eredményének Riemann esetre vonatkozó átfogalmazása.

Legyen $(M, g) = G/H$ geodetikus pályatér és $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ egy $ad(H)$-invariáns felbontás. Ekkor

1. Létezik legalább egy olyan *kanonikus* $ad(H)$-ekvivariáns $\xi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{h}$ leképezés (az úgynevezett "geodetikus gráf") úgy, hogy minden $X \in \mathfrak{m} \backslash \{0\}$ esetén az

$$\exp t(X + \xi(X))(p)$$

görbe geodetikus.

2. A geodetikus gráf vagy lineáris (amely ekvivalens valamely $ad(H)$-invariáns $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{h}$ reduktív felbontáshoz tartozó

természetes reduktív struktúrával) vagy nem differenciálható az $\mathfrak{m}$ origójában.

Az előzőekben elmondottakból következik, hogy az A. Kaplan által bevezetett 6-dimenziós tér esetén a geodetikus gráf nem lineáris. A következőekben expliciten megadjuk ez utóbbi $ad(H)$-ekvivariáns, nem lineáris $\xi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{h}$ leképezést. C. Gordon geodetikus pályaterekről alkotott elméletét felhasználva ([9]) a geodetikus gráfok vizsgálatát kiterjesztjük tetszőleges 2-dimenziós centrumú, 6-dimenziós, valamint 3-dimenziós centrumú, 7-dimenziós kétlépcsős g.o. térre is

Először definiáljuk mit értünk geodetikus vektor alatt, majd felsoroljuk néhány tulajdonságát, amelyekre a későbbiekben támaszkodni fogunk.

Legyen $M = (G/H, g)$ homogén Riemann-sokaság és rögzítsük a $p \in M$ bázispontot. Felhasználva a geodetikus vektorokat, a G/H geodetikus pályatérre vonatkozó számolásokat algebrai számításokra redukálhatjuk.

9. Definíció. *A $\mathfrak{g}$ Lie-algebra nemzérus X elemét geodetikus vektornak nevezzük, ha az $\exp(tX) \cdot p$ geodetikus.*

A geodetikus vektorok következő jellemzése nagyon fontos a további vizsgálatok során (lásd [18]).

10. Lemma. *Legyen M egy összefüggő homogén Riemann-sokaság és G az izometriák egy tranzitív csoportja. Az $X \neq 0 \in \mathfrak{g}$ elem pontosan akkor geodetikus vektor, ha az*

$$\langle [X, Y]_{\mathfrak{m}}, X_{\mathfrak{m}} \rangle = 0$$

egyenlőség teljesül minden $Y \in \mathfrak{m}$ esetén.

Az előző lemma és definíció következménye az alábbi eredmény.

11. Állítás.

1. *Az M akkor és csak akkor természetesen reduktív a G tranzitív izometria-csoportra és a $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ felbontásra vonatkozóan, ha az $\mathfrak{m}$ minden zérustól különböző eleme geodetikus vektor.*

2. *Az M sokaság minden geodetikusa akkor és csak akkor a G egyparaméteres izometria-csoportjának pályája, ha minden $X \in \mathfrak{m}$ esetén létezik egy $A \in \mathfrak{h}$ elem úgy, hogy*

$$\langle [X + A, Y]_{\mathfrak{m}}, X \rangle = 0$$

teljesül minden $Y \in \mathfrak{m}$ esetén. (Azaz az $X+A$ geodetikus vektor.) Az M pontosan akkor g.o. sokaság, ha az előző feltétel teljesül a $G = I_0(M)$-re, ahol az $I_0(M)$ az M teljes izometria-csoportjának egységet tartalmazó komponense.

A bevezetőben említett 1. Tétel alapján, ha M egy homogén nilsokaság, akkor egyértelműen létezik az $I(M)$ izometria-csoportnak olyan nilpotens N Lie-részcsoportja, mely egyszeresen tranzitív M-en és normális részcsoportja $I(M)$-nek. Ebből következik, hogy az M sokaság azonosítható a balinvariáns metrikával ellátott N Lie-csoporttal. Ha az N egyszeresen összefüggő sokaság (és $\mathfrak{n}$ jelöli az N Lie-algebráját), akkor az $\exp : \mathfrak{n} \to N$ exponenciális leképezés diffeomorfizmus.

C. Gordon [9] cikkéből ismert, hogy minden g.o. nilsokaság legfeljebb kétlépcsős nilpotens sokaság, így mi csak a kétlépcsős nilsokaságokra korlátozzuk vizsgálatainkat.

A továbbiakban feltesszük tehát, hogy $\mathfrak{n}$ kétlépcsős nilpotens Lie-algebra, melynek centrumát $\mathfrak{z}$-vel jelöljük, továbbá $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}^{\perp}$ a centrum ortogonális komplementuma, így az $\mathfrak{n}$ Lie-algbra felírható

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{z}$$

ortogonális direkt összeg alakban. Emlékeztetünk rá, hogy minden centrumbeli Z elemre definiálhatunk egy $j(Z) \in so(\mathfrak{a})$ endomorfizmust az (1) egyenlőség segítségével.

E. Wilson a [33] cikkében bebizonyította, hogy az egyszeresen összefüggő N Riemann-nilsokaság teljes $\mathfrak{g}$ izometria algebrája $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ szemidirekt összeg alakban áll elő, ahol a $\mathfrak{h}$ izotrópia-algebra az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra összes olyan deriválását tartalmazza, amely ferdén szimmetrikus a Riemann belső szorzatra vonatkozóan. Azaz

$$\mathfrak{h} = Der(\mathfrak{n}) \cap so\,(\mathfrak{n}).$$

Továbbá két Riemann-nilsokaság (N és N') csak akkor izometrikus, ha létezik köztük olyan Lie-csoport izomorfizmus, amely egyben izometria is. Ekvivalens módon létezik olyan $\tau : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}'$ lineáris leképezés, amely Lie-algebra izomorfizmus és egyben belsőszorzat-tér izometria is (az $\mathfrak{n}$-n illetve $\mathfrak{n}'$-n adott belső szorzatra vonatkozóan). Ha az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{z}, j)$, illetve $(\mathfrak{a}', \mathfrak{z}', j')$ jelöli az N és N' egyszeresen összefüggő nilsokaságok adathármasait, akkor ezen nilsokaságok pontosan akkor izometrikusak, ha léteznek olyan

$$\Phi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}' \text{ és } \Psi : \mathfrak{z} \to \mathfrak{z}'$$

ortogonális lineáris leképezések, melyre tetszőleges $Z \in \mathfrak{z}$ esetén teljesül, hogy

$$j'(\Psi(Z)) = \Phi \circ j(Z) \circ \Phi^{-1}.$$

Az előzőekben elmondottak szerint ahhoz, hogy leírjuk az N teljes izometria-csoportját, elegendő megtalálni az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra ferdén szimmetrikus derivációit. Ezen derivációkat megkaphatjuk a következő lemma alkalmazásával.

12. Lemma. *Legyen N egy egyszeresen összefüggő kétlépcsős nilsokaság és jelölje $(\mathfrak{a}, \mathfrak{z}, j)$ a megfelelő adathármast. Ekkor a ferdén szimmetrikus $D : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ lineáris leképezés akkor és csakis akkor deriváció, ha a következő feltételek teljesülnek:*

(i) *D invariánsan hagyja az $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{z}$ Lie-algebrákat, továbbá*

(ii)

$$j(D(Z)) = [D_{|\mathfrak{a}}, j(Z)]$$

teljesül minden $Z \in \mathfrak{z}$ esetén, ahol a Lie-zárójel az $so(\mathfrak{a})$-n definiált Lie-zárójel. Ebből következik, hogy a $\mathfrak{h}$ izotrópia-algebra izomorf a

$$\{\delta \in so\,(\mathfrak{a}) : [\delta, j(\mathfrak{z})] \subset j(\mathfrak{z}) \text{ és } j^{-1} \circ ad(\delta) \circ j \in so\,(\mathfrak{z})\}.$$

feltételekkel adott részalgebrával.

13. TÉTEL. *Az N egyszeresen összefüggő kétlépcsős nilsokaság pontosan akkor g.o. sokaság, ha minden $X \in \mathfrak{a}$ és $Z \in \mathfrak{z}$ esetén létezik egy olyan D ferdén szimmetrikus deriváció, amelyre*

$$D(Z) = 0 \text{ és } D(X) = j(Z)X.$$

Bizonyítás. Legyen $D \in \mathfrak{h}$ és $U \in \mathfrak{n}$. Attól függően, hogy a D-t a $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ Lie-algebra elemének vagy $\mathfrak{n}$-beli derivációnak tekintjük, a D hatását az U-ra $[D, U]$, illetve $D(U)$ alakban fogjuk jelölni. Az $X \in \mathfrak{a}$ és $Z \in \mathfrak{z}$ esetén a 10. Lemma alapján az $X + Z + D$ pontosan akkor geodetikus vektor, ha

$$\langle [X + Z + D, Y]_{\mathfrak{n}}, (X + Z) \rangle = 0$$

tetszőleges $Y \in \mathfrak{n}$ esetén.

1. Az előzőekben elmondottakból következik, hogy bármilyen $U \in \mathfrak{a}$ elemre

$$\begin{aligned} 0 &= \langle [X + Z + D, U], X + Z \rangle = \\ \langle [X, U], Z \rangle + \langle D(U), X \rangle &= \langle j(Z)X - D(X), U \rangle . \end{aligned}$$

   Azaz $D(X) = j(Z)X$.

2. Továbbá tetszőleges $W \in \mathfrak{z}$ esetén teljesül a következő egyenlőség:

$$0 = \langle [X + Z + D, W], X + Z\rangle = \langle [D, W], Z\rangle = -\langle D(Z), W\rangle .$$

Ami azt jelenti, hogy $D(Z) = 0$.

$\square$

Szenthe János eredményeit felhasználva O. Kowalski és L. Vanhecke [18] dolgozatában osztályozta a g.o. nilsokaságokat. A következőkben a g.o. nilsokaságok egy analóg jellemzését adjuk meg.

Legyen $N = G/H$ reduktív homogén tér ellátva egy $ad(H)$- invariáns $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} + \mathfrak{h}$ felbontással. Tetszőleges nemzérus $X \in \mathfrak{n}$ esetén jelölje q_X a $\mathfrak{h}$ következő alterét:

$$q_X = \{A \in \mathfrak{h} : [A, X] = \lambda X \text{ valamely } \lambda \in \mathbb{R} \text{ esetén}\} . \tag{3}$$

Könnyen belátható, hogy a q_X részalgebrája a $\mathfrak{h}$ Lie-algebrának. Legyen N_X a q_X részalgebra normalizátora $\mathfrak{h}$-ban, azaz

$$N_X = \{B \in \mathfrak{h} : [B, A] \in q_x \text{ minden } A \in q_X \text{ esetén}\} . \tag{4}$$

Továbbá jelölje c'_X a q_X részalgebra $\mathfrak{h}$-beli centralizátorát, azaz

$$c'_X = \{B \in \mathfrak{h} : [B, A] = 0 \text{ tetszőleges } A \in q_x \text{ esetén}\} . \tag{5}$$

Nyilvánvalóan teljesülnek a $q_X \subset N_x$ és $c'_X \subset N_X$ tartalmazások. Riemann esetben tetszőleges $X \in \mathfrak{n} \setminus \{0\}$ esetén

$$q_X = \{A \in \mathfrak{h} : [A, X] = 0\}. \tag{6}$$

Ha N Riemann g.o. nilsokaság, akkor tetszőleges $X \in \mathfrak{n} \setminus \{0\}$ esetén létezik olyan $A \in \mathfrak{h}$ elem, amelyre az $X + A$ geodetikus vektor. Megjegyezzük, hogy ekkor $A \in N_X$ teljesül (lásd [31]). Az alábbi következmény a [19] cikkből származik.

14. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen* $X \in \mathfrak{g} \backslash \{0\}$ *geodetikus vektor és* $A \in \mathfrak{h}$. *Ekkor az* $X + A$ *vektor pontosan akkor geodetikus vektor, ha* $[A, X_{\mathfrak{n}}] = 0$.

Az előző eredményeket felhasználva kapjuk a következő állítást (lásd [31]).

15 . ÁLLÍTÁS. *Ha a* G/H *Riemann-geodetikus pályatér, akkor tetszőleges* $X \in \mathfrak{n} \backslash \{0\}$ *esetén létezik olyan* $B \in c'_X$ *elem, melyre az* $X + B$ *geodetikus vektor.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $ad(H)$-invariáns $\langle , \rangle$ skaláris szorzatot a $\mathfrak{h}$ algebrán és legyen $N_X = q_X + c_X$ a $\langle , \rangle$-re vonatkozó ortogonális dekompozíció. Először megmutatjuk, hogy $c_X \subset c'_X$.

Legyen $A \in q_X$ és $B \in c_X$. Mivel B normalizátorbeli elem, $[B, A] \in q_X$. Felhasználva, hogy $\langle , \rangle$ $ad(H)$-invariáns skaláris szorzat, könnyen belátható, hogy

$$\langle [B, A], [B, A] \rangle = \langle B, [A, [B, A]] \rangle .$$

Az előző kifejezés zérus, hiszen $B \in c_X$ és $[A, [B, A]] \in q_X$, azaz $[B, A] = 0$. Ez utóbbi a centralizátor definíciója alapján éppen azt jelenti, hogy $B \in c'_X$, azaz $c_X \subset c'_X$.

A korábban elmondottak szerint tetszőleges $X \in \mathfrak{n} \backslash \{0\}$ esetén létezik olyan $A \in N_X$ elem, melyre az $X + A$ geodetikus vektor. Legyen az $A = A_1 + A_2$, ahol $A_1 \in q_X$ és $A_2 \in c_X$. A 14. Következmény alapján az $X + A_2$ is geodetikus vektor. Mivel $c_X \subset c'_X$, ezért $A \in c'_X$. $\square$

Megjegyezzük, hogy az A ortogonális projekciója a c_X-re (melyet A_2-vel jelöltük) független az A megválasztásától. Definiáljuk a $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ leképezést (geodetikus gráfot) a következő módon:

$$\xi(X) = \begin{cases} A_2, & \text{ha } X \neq 0 \in \mathfrak{n} \\ 0, & \text{ha } X = 0. \end{cases}$$

16. ÁLLÍTÁS. *Létezik olyan* $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ $ad(H)$*-invariáns leképezés, amelyre tetszőleges* $X \in \mathfrak{n} \setminus \{0\}$ *esetén az* $X + \xi(X)$ *vektor geodetikus vektor.*

Fontos megjegyezni, hogy több olyan $ad(H)$-invariáns leképezés is létezhet, amely eleget tesz az előbbi állításban leírtaknak, de közülük csak egy kanonikus, azaz speciális algoritmus szerint konstruált. A $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ geodetikus gráf vagy lineáris vagy nem differenciálható a $0 \in \mathfrak{n}$ helyen. A geodetikus gráf linearitási tulajdonsága ekvivalens azzal, hogy a G/H természetesen reduktív tér valamely $ad(H)$-invariáns $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$ dekompozícióra nézve.

2.1 A tranzitív normalizátori feltétel

A bevezetőben említett $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ leképezés leírásakor hasznáni fogjuk C. Gordon úgynevezett tranzitív normalizátori feltételét (lásd [9]). A következő definíciók és állítások tőle származnak.

17. DEFINÍCIÓ. *Legyen a* $\mathfrak{w}$ *az* $so(n)$ *részalgebrája. Azt mondjuk, hogy a* $\langle , \rangle$ *belső szorzat invariáns* $\mathfrak{w}$*-n, ha minden* $X \in \mathfrak{w}$ *esetén az* $ad_{\mathfrak{w}}X$ *ferdén szimmetrikus a* $\langle , \rangle$*-ra vonatkozóan.*

Az előző feltétel ekvivalens azzal, hogy a $\mathfrak{w}$ algebra belső automorfizmusainak csoportja invariánsan hagyja $\langle , \rangle$-t.

18. DEFINÍCIÓ. *Azt mondjuk, hogy az* $so(n)$ *részalgebráiból álló, invariáns belsőszorzatokkal ellátott* $(\mathfrak{w}, \langle , \rangle)$ *és* $\left(\mathfrak{w}', \langle , \rangle'\right)$ *párok konjugáltak, ha a részalgebrák konjugáltak egy* $\mathbb{R}^n$*-beli ortogonális transzformációra vonatkozóan, továbbá a konjugáció által definiált izomorfizmus egyben egy belsőszorzat-tér izometria is* $\mathfrak{w}$ *és* $\mathfrak{w}'$ *között. Jelölje* $C(n)$ *a konjugált osztályok halmazát és legyen* $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C(n)$*.*

19 . TÉTEL. *Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható meg a C halmaz, valamint az egyszeresen összefüggő természetesen reduktív kétlépcsős nilsokaságok izometria osztályai között, mégpedig a következő módon:*
A $(\mathfrak{w}, \langle,\rangle) \in C(n)$-hez hozzárendelhetjük az $\mathfrak{a} = \mathbb{R}^n$ (ellátva a standard belső szorzattal), $\mathfrak{z} = (\mathfrak{w}, \langle,\rangle)$ és $j = Id$ adathármasnak megfelelő egyszeresen összefüggő nilsokaságot.

Hasonló módon megadunk egy osztályozási tételt az egyszeresen összefüggő kétlépcsős g.o. nilsokaságok esetén is.

20. DEFINÍCIÓ.

1. *Legyen $V \subset so(n,\mathbb{R})$ és $N(V)$ jelölje a V normalizátorát $so(n,\mathbb{R})$-ben. Azt mondjuk, hogy V teljesíti a tranzitív normalizátori feltételt, ha tetszőleges $\alpha \in V$ és $x \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik olyan $\beta_{\alpha,x} \in N(V)$, melyre*
$$[\beta, \alpha] = 0 \quad \textit{és} \quad \beta(x) = \alpha(x).$$
2. *Tegyük fel, hogy V teljesíti a tranzitív normalizátori feltételt. Azt mondjuk, hogy a $\langle,\rangle$ belső szorzat megengedett V-n, ha az $\alpha \in V, x \in \mathbb{R}^n$-re az előzőekben megadott $\beta_{\alpha,x}$ esetén az $ad\,(\beta_{\alpha,x})_{|V}$ ferdén szimmetrikus $\langle,\rangle$-ra vonatkozóan.*
3. *Legyenek V és V' olyan $so(n,\mathbb{R})$-beli alterek, melyek teljesítik a tranzitív normalizátori feltételt, ellátva a $\langle,\rangle$, illetve $\langle,\rangle'$ megengedett belső szorzatokkal. Azt mondjuk, hogy $(V, \langle,\rangle)$ ekvivalens $\big(V', \langle,\rangle'\big)$-vel, ha V konjugált V'-vel egy $O(n,\mathbb{R})$-beli elemre vonatkozóan, továbbá a konjugáció által definiált izomorfizmus egyben egy belsőszorzat-tér izomorfizmus is V és V' között. Jelölje $E(n)$ az ekvivalencia osztályok halmazát és legyen $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(n)$.*

Ha a V az $so(n, \mathbb{R})$ részalgebrája, akkor V nyilvánvalóan teljesíti a tranzitív normalizátori feltételt. (Ekkor $\beta_{\alpha,x} = \alpha$ tetszőleges $\alpha \in V$ és $x \in \mathbb{R}^n$ esetén.) Továbbá a V invariáns belső szorzata szükségképpen megengedett is. (Az állítás megfordítása azonban nem igaz.) Fennáll a $N(V) \subset E$ tartalmazás is, mivel a g.o. nilsokaságok osztálya bővebb, mint a természetesen reduktívaké.

A 12. Lemmából és a 13. Tételből következik a g.o. nilsokaságokra vonatkozó osztályozási tétel.

Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható meg az E halmaz, valamint a kétlépcsős g.o. nilsokaságok izometria osztályai között, mégpedig a következő módon: A $(V, \langle , \rangle)$ -hez tartozó ekvivalencia osztályhoz hozzárendelhetjük az $\mathfrak{a} = \mathbb{R}^n, \mathfrak{z} = (V, \langle , \rangle)$ és $j = Id$ adathármasnak megfelelő nilsokaságot.

A 6-dimenziós esetre koncentrálva, $\dim \mathfrak{a} = 4$ és

$$so(4) \simeq so(3) \oplus so(3).$$

A két ideál egymás konjugáltja az $\mathbb{R}^4$ egy T ortogonális transzformációjára vonatkozóan. Ha a V 1-dimenziós, akkor a megfelelő nilsokaság természetesen reduktív, ezért a számunkra érdekes esetben a V legalább 2-dimenziós. Két típusa van az $so(4)$ 2-dimenziós alterei közül azoknak, melyek teljesítik a tranzitív normalizátori feltételt. Az egyik esetben az $so(4)$ mindkét ideálját egy-egy 1-dimenziós altérben metszik a kommutatív részalgebrák. Ekkor a megfelelő nilsokaságok természetesen reduktívak. A másik esetben az egyik $so(3)$ ideálban fekvő 2-dimenziós alterek teljesítik a tranzitív normalizátori feltételt, hiszen az összes $\beta_{\alpha,x}$-t megválaszthatjuk úgy, hogy azok a V centralizátorának (azaz a másik ideálnak) az elemei legyenek. Mivel minden ilyen altér konjugált egymással egy 4-dimenziós ortogonális transzformációra nézve, elegendő csak egy ilyen V alteret vizsgálni. A $\beta_{\alpha,x}$ elemek kommutálnak V-vel, így minden V-n adott belső szorzat megengedett. A megfelelő nilsokaságok geodetikus pályaterek, de nem természetesen reduktívak.

2.2 A 6-dimenziós eset

A következő fejezetben a 6-dimenziós kétlépcsős nilsokaságok esetén megadjuk az előzőekben leírt $ad(H)$-invariáns, nemlineáris $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ leképezést, követve a szerző [11] cikkében leírtakat. A vizsgálatot először ezen sokaságok egy speciális osztályánál kezdjük, majd az eredményeket általánosítjuk.

Az első konkrét példa olyan geodetikus pályatérre, amely semmilyen kiterjesztésében sem természetesen reduktív A. Kaplantól származik. Ez egyike az úgynevezett H-típusú csoportoknak, egy 6-dimenziós Riemann-nilsokaság 2-dimenziós centrummal.

Legyen a továbbiakban

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R}^4 = H, \mathfrak{z} = V^2 \subset so\,(4) = so^{(1)}(3) + so^{(2)}(3)$$

és $j : \mathfrak{z} \longrightarrow so(\mathfrak{a})$. Az előzőekben elmondottak szerint az $so\,(4)$ olyan kétdimenziós altereit, melyeknél a megfelelő nilsokaság geodetikus pályatér, de nem természetesen reduktív, csak az $so(3)$ ideálok egyike tartalmazhatja.

Valójában az $\mathbb{R}^4$-t tekinthetjük úgy, mint a kvaterniók számteste, melyen a két $so(3)$ faktor bal- illetve jobbszorzásként hat. A két ideál felírható a következő alakban:

$$\begin{aligned} so^{(1)}(3) &= \lambda_i\mathbb{R} + \lambda_j\mathbb{R} + \lambda_k\mathbb{R}, \text{ és} \\ so^{(2)}(3) &= \rho_i\mathbb{R} + \rho_j\mathbb{R} + \rho_k\mathbb{R}, \end{aligned}$$

ahol

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Legyen

$$V^2 = \lambda_i \mathbb{R} + \lambda_j \mathbb{R} \subset so^{(1)}(3)$$

egy 2-dimenziós altér, továbbá

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{z} = \mathbb{R}^4 + V^2.$$

Mivel $\mathfrak{h} = Der(\mathfrak{n}) \cap so\,(\mathfrak{n})$, így

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & \lambda & \mu \\ -\beta & -\lambda & 0 & \nu \\ -\gamma & -\mu & -\nu & 0 \end{pmatrix}$$

21. TÉTEL. *Tetszőleges $(N, \langle .,. \rangle)$ balinvariáns Riemann-metrikával ellátott 2-dimenziós centrumú, kétlépcsős 6-dimenziós homogén nilsokaság esetén létezik olyan $ad(H)$-invariáns $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ leképezés, melynél tetszőleges $Y = X + Z \in \mathfrak{n} \backslash \{0\}$ elem esetén (ahol $X \in \mathfrak{a}, Z \in \mathfrak{z}$) az $Y + \xi(Y)$ geodetikus vektor, azaz az $\exp(t(Y + \xi(Y))) \cdot p$ görbe geodetikus.*

Bizonyítás. (a) Legyen X az $\mathfrak{a}$ algebra zérustól különböző eleme, Z pedig a $\mathfrak{z}$ centrum eleme. A 12. Lemmának megfelelően a $\mathfrak{h}$ izotrópia-algebra az $so(4)$ következő módon adott részalgebrájával izomorf:

$$\{\delta \in so\,(\mathfrak{a}) : [\delta, j(\mathfrak{z})] \subset j(\mathfrak{z}) \ \text{ és } j^{-1} \circ ad(\delta) \circ j \in so(\mathfrak{z})\}.$$

Ebből következik, hogy

$$[\delta, \lambda_i] \in \lambda_i\mathbb{R} + \lambda_j\mathbb{R} \quad \text{és} \quad [\delta, \lambda_j] \in \lambda_i\mathbb{R} + \lambda_j\mathbb{R}.$$

Ezen feltételek alapján egyszerű számításokkal igazolható, hogy

$$\mu = \beta \ \text{ és } \nu = -\alpha,$$

azaz

$$\widetilde{\mathfrak{h}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & \lambda & \beta \\ -\beta & -\lambda & 0 & -\alpha \\ -\gamma & -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

ahol $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^4$.

i) Mivel a 6-dimenziós "Kaplan-tér" esetén

$$[\delta, \lambda_i] = -(\lambda + \gamma)\lambda_j \ \text{ és } [\delta, \lambda_j] = (\lambda + \gamma)\lambda_i,$$

a $\mathfrak{h}$ izotrópia-algebra a következő alakban áll elő:

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \lambda & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & -\lambda & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\gamma & -\beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma + \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\gamma + \lambda) & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

ahol $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^4$.

ii) Az általános 6-dimenziós tér esetén:

C. Gordon (ld. [9]) geodetikus pályaterekről alkotott általános elméletének megfelelően minden skaláris szorzat megengedett. Tegyük fel, hogy λ_i és λ_j nem alkotnak ortonormált bázist a $\langle , \rangle$ skaláris szorzatra vonatkozóan. Legyen

$$E = \langle \lambda_i, \lambda_i \rangle, F = \langle \lambda_i, \lambda_j \rangle, G = \langle \lambda_j, \lambda_j \rangle,$$

továbbá

$$e_1 = x\lambda_i + y\lambda_j \text{ és } e_2 = u\lambda_i + v\lambda_j$$

alkosson ortonormált bázist. Ekkor

$$\langle e_1, e_2 \rangle = Exu + F(yu + xv) + Gyv.$$

Mivel $ad(\delta)_{|V}$ ferdén szimmetrikus a $\langle , \rangle$ skaláris szorzásra vonatkozóan, ezért

1. $(\lambda + \gamma)E = (\lambda + \gamma)G$, továbbá
2. $(\lambda + \gamma)F = 0$.

Azaz $\lambda + \gamma = 0$, ami azt jelenti, hogy

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & -\gamma & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \gamma & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\gamma & -\beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

ahol $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Ez vagy a Kaplan-tér izotrópia-algebrájának a részalgebrája, vagy $E = G$ és $F = 0$, azaz λ_i és λ_j ortogonális bázist alkot, amelyből következik, hogy $\langle , \rangle = c \cdot \langle , \rangle^*$, ahol a c egy konstans és a $\langle , \rangle^*$

pedig a Kaplan-téren adott skaláris szorzat. A 6-dimenziós geodetikus pályaterek izotrópia-algebrája a következő alakban áll elő

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \lambda & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & -\lambda & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\gamma & -\beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\gamma+\lambda) & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

ahol $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^4$.

A 13. Tételnek megfelelően N akkor és csakis akkor g.o. nilsokaság, ha tetszőleges $X \in \mathfrak{a}$ és $Z \in \mathfrak{z}$ elemek esetén létezik az $\mathfrak{n}$ algebrának olyan D ferdén szimmetrikus derivációja, hogy

$$D(Z) = 0 \text{ és } D(X) = j(Z)X$$

egyenlőségek teljesülnek. A $D(Z) = 0$ feltételből $Z \neq 0$ elem esetén következik, hogy $\lambda = -\gamma$. A második feltételből pedig a következő lineáris inhomogén egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 &= -z_1 x_1 - z_2 x_2 \\ -\alpha x_0 - \gamma x_2 + \beta x_3 &= z_1 x_0 + z_2 x_3 \\ -\beta x_0 + \gamma x_1 - \alpha x_3 &= z_2 x_0 - z_1 x_3 \\ -\gamma x_0 - \beta x_1 + \alpha x_2 &= -z_2 x_1 + z_1 x_2. \end{aligned}$$

Mivel feltételeztük, hogy $X \neq 0 \in \mathfrak{a}$, az előző egyenletrendszer egyértelműen oldható meg, mégpedig

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-z_1(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) - 2z_2(x_1x_2 + x_0x_3)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ \beta &= \frac{z_2(x_3^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_0^2) - 2z_1(x_1x_2 - x_0x_3)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ \gamma &= \frac{2z_2(x_0x_1 - x_2x_3) - 2z_1(x_0x_2 + x_1x_3)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \end{aligned}$$

a fenti inhomogén egyenletrendszer megoldása.

(b) Abban az esetben, ha $X = 0$ és $Z \in \mathfrak{z}$ Szenthe János, O. Kowalski és L. Vanhecke bevezetőben említett koncepcióját felhasználva

$$c'_z = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in \ \mathbb{R} \right\}.$$

A 15. Állításnak megfelelően létezik olyan $C \in c'_Z$ elem, hogy a $Z + C$ vektor geodetikus vektor.

Amennyiben $\delta = 0$ a

$$Z + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + q_z$$

invariánsan hagyja az $\exp(Z+\delta)$-t, ebből következően ebben az esetben a geodetikus egy egyparaméteres csoport pályája. □

2.3 A 7-dimenziós eset

C. Gordon a [9] cikkében a 6-dimenziós esethez hasonlóan olyan 7-dimenziós g.o. nilsokaságot konstruált, amely nem természetesen reduktív. Ebben az esetben is megadjuk a geodetikus gráfot.

A [9] alapján belátható, ahhoz, hogy a megfelelő nilsokaságok nem természetesen reduktív g.o. terek legyenek (azaz egyetlen megengedett skaláris szorzat se legyen invariáns) az $so(4)$ szóbajöhető 3-dimenziós altere csak valamelyik $so(3)$ ideál lehet. Így az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy

$$V^3 = so^{(1)}(3) = \lambda_i \mathbb{R} + \lambda_j \mathbb{R} + \lambda_k \mathbb{R}.$$

Ebben az esetben V^3 részalgebra és $N(V) = so(4)$. A tranzitív normalizátori feltételnek megfelelően tetszőleges $\alpha \in V, x \in \mathbb{R}^n$ esetén a $\beta_{\alpha,x}$ a másik $so(3)$ ideálban, azaz a V centralizátorában fekszik.

Mint már említettük $\mathfrak{h} = Der(\mathfrak{n}) \cap so(\mathfrak{n})$, így

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & \lambda & \mu \\ -\beta & -\lambda & 0 & \nu \\ -\gamma & -\mu & -\nu & 0 \end{pmatrix}.$$

A $\mathfrak{h}$ algebra az $so(4)$

$$\delta \in so(4) : [\delta, j(\mathfrak{z})] \subset j(\mathfrak{z}) \text{ és } j^{-1} \circ ad(\delta) \circ j \in so(\mathfrak{z})$$

alakban adott részalgebrájához izomorf, így

$$[\delta, \lambda_s] \in \lambda_i\mathbb{R} + \lambda_j\mathbb{R} + \lambda_k\mathbb{R}$$

teljesül $s = i; j; k$ esetén. Továbbá

$$\begin{aligned} [\delta, \lambda_i] &= -(\gamma + \lambda)\lambda_j + (\beta - \mu)\lambda_k, \\ [\delta, \lambda_j] &= (\gamma + \lambda)\lambda_i - (\alpha + \nu)\lambda_k, \\ [\delta, \lambda_k] &= (\mu - \beta)\lambda_i + (\alpha + \nu)\lambda_j. \end{aligned}$$

Ezek alapján az izotrópia-algebra

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & -\lambda & 0 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma & -\mu & -\nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\gamma + \lambda) & -(\beta - \mu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\gamma + \lambda) & 0 & (\alpha + \nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta - \mu & -(\alpha + \nu) & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

alakban áll elő, ahol $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^6$.
A 13. Tétel $D(Z) = 0$ feltételéből (ahol $Z \in \mathfrak{z}$) adódik, hogy

$$\lambda = -\gamma, \beta = \mu, \nu = -\alpha,$$

így

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ -\alpha & 0 & -\gamma & \beta \\ -\beta & \gamma & 0 & -\alpha \\ -\gamma & -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Ha

$$X \in \mathfrak{a} \quad \text{és } Z = \begin{pmatrix} 0 & -z_1 & -z_2 & -z_3 \\ z_1 & 0 & -z_3 & z_2 \\ z_2 & z_3 & 0 & -z_1 \\ z_3 & -z_2 & z_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}$$

akkor a $D(X) = Z(X)$ feltételből egy inhomogén egyenletrendszert kapunk. Mégpedig

1. Ha $X \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned} \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 &= -z_1 x_1 - z_2 x_2 - z_3 x_3 \\ -\alpha x_0 - \gamma x_2 + \beta x_3 &= z_1 x_0 - z_3 x_2 + z_2 x_3 \\ -\beta x_0 + \gamma x_1 - \alpha x_3 &= z_2 x_0 + z_3 x_1 - z_1 x_3 \\ -\gamma x_0 - \beta x_1 + \alpha x_2 &= z_3 x_0 - z_2 x_1 + z_1 x_2. \end{aligned}$$

   Mivel feltettük, hogy $X \neq 0 \in \mathfrak{a}$, az előző egyenletrendszer egyértelmű megoldása:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-z_1(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) - 2z_2(x_1 x_2 + x_0 x_3) - 2z_3(x_1 x_3 - x_0 x_2)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ \beta &= \frac{z_2(x_3^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_0^2) - 2z_1(x_1 x_2 - x_0 x_3) - 2z_3(x_0 x_1 + x_2 x_3)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ \gamma &= \frac{z_3(-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) + 2z_2(x_0 x_1 - x_2 x_3) - 2z_1(x_0 x_2 + x_1 x_3)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Így tetszőleges $X+Z$ esetén az $X+Z+\xi(X+Z)$ geodetikus vektor egyértelműen meghatározott és az α, β, γ-ra előbb megadott formulák definiálják a megfelelő nemlineáris ξ leképezést.

2. Ha $X = 0$ és $Z \in \mathfrak{z}$, akkor a $Z+\delta$ pontosan akkor geodetikus vektor, ha
$$\langle [Z+\delta, Y]_n, Z\rangle = 0$$
teljesül tetszőleges $Y \in \mathfrak{n}\backslash\{0\}$ esetén. Így
$$\langle [\delta, Y]_n, Z\rangle = 0,$$
amely alapján
$$\langle [\delta, U]_n, Z\rangle = 0$$
áll fenn bármely $U \in \mathfrak{z}\backslash\{0\}$ esetén, azaz
$$\begin{aligned}
\delta_{|\mathfrak{z}} &= \begin{pmatrix} 0 & \gamma+\lambda & -(\beta-\mu) \\ -(\gamma+\lambda) & 0 & \alpha+\nu \\ \beta-\mu & -(\alpha+\nu) & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix} \\
\delta_{|\mathfrak{z}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_1 z_2 - \varepsilon_2 z_3 \\ -\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_3 z_3 \\ \varepsilon_2 z_1 - \varepsilon_3 z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$
Az előző homogén egyenletrendszernek létezik triviálistól különböző megoldása, mégpedig:
$$\varepsilon_3 \in \mathbb{R}, \varepsilon_2 = \frac{z_2}{z_1}\varepsilon_3, \varepsilon_1 = \frac{z_3}{z_1}\varepsilon_3.$$

A fenti számolások alapján kapjuk az alábbi eredményt.

22. Tétel. *Tetszőleges* $(N, \langle .,. \rangle)$ *balinvariáns Riemann-metrikával ellátott* 3*-dimenziós centrumú, kétlépcsős* 7*-dimenziós homogén nilsokaság esetén létezik egy olyan* $ad(H)$*-invariáns* $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ *leképezés úgy, hogy tetszőleges* $Y \in \mathfrak{n} \backslash \{0\}$ *elem esetén az* $Y + \xi(Y)$ *geodetikus vektor, azaz az* $\exp(t(Y + \xi(Y))) \cdot p$ *görbe geodetikus.*

Z. Dusek, O. Kowalski és S. Nikcevic [3] cikkükben bebizonyították, hogy a C. Gordon által bevezetett, az előbbiekben jellemzett 7-dimenziós g.o. nilsokaságok mellett, csak a $G/H = (SO(5) \times SO(2))\,/U(2)$, illetve a $G/H = (SO(4,1) \times SO(2))\,/U(2)$ alakú, $g_{p,q}$ (p, q paraméterek) invariáns metrikával ellátott homogén g.o. Riemann-sokaságok azok, amelyek nem természetesen reduktívak.

3 Szubmerzió

A balinvariáns Riemann-metrikával ellátott kétlépcsős nilpotens Lie-csoportok geodetikusait számos szerző vizsgálta az utóbbi 20 évben.

A nilsokaságok különböző osztályai esetén megadták a geodetikusok egyenletét (lásd [2], [6], [14], [15], [20]), majd alkalmazták a Riemann-sokaságok spektrálgeometriájában (lásd [5], [8], [22], [24]). A balinvariáns Riemann-metrikával ellátott kétlépcsős nilpotens Lie-csoporton bevezetünk egy természetes Riemann-szubmeriót és megvizsgáljuk e szubmerzió alapegyenleteit (lásd [28]). B. O'Neill Riemann-szubmerziók geodetikusaira adott differenciálegyenletei (lásd [26], [29]) a kétlépcsős geodetikusok egyenleteit adják meg olyan formában, melyet A. Kaplan megkapott a Heisenberg-típusú csoportok esetén ([14]) és P. Eberlein pedig az általános esetre adott meg ([6]). Ennek a résznek a fő célja a módosított Heisenberg-típusú Riemann-sokaságok jellemzése (mely fogalmat J. Lauret vezetett be a [20] cikkében). A vizsgálat közben felhasználjuk a Riemann-szubmerziós reprezentáció geodetikusainak tulajdonságait. A fejezet eredményei a szerző Nagy Péter Tiborral közös cikkén ([13]) alapulnak.

Mint már a Bevezetőben említettük egy balinvariáns Riemann-metrikával ellátott $(N, \langle.,.\rangle)$ kétlépcsős nilpotens Lie-csoportot *Heisenberg-típusú Lie-csoport*nak nevezzük, ha $[j(Z)]^2 = -\langle Z, Z\rangle id_{\mathfrak{a}}$ teljesül tetszőleges $Z \in \mathfrak{z}$ esetén. J. Lauret a [20] cikkében a H-típusú feltétel gyengítésével a Heisenberg-típusú Lie-csoportok fogalmának a következő általánosítását vezette be.

23 . Definíció. *Egy balinvariáns Riemann-metrikával ellátott $(N, \langle.,.\rangle)$ kétlépcsős nilpotens Lie-csoportot módosított Heisenberg-típusú Lie-csoportnak nevezünk, ha $[j(Z)]^2 = \lambda(Z) id_{\mathfrak{a}}$ tetszőleges $Z \in \mathfrak{z}$ elem esetén valamely $\lambda(Z) < 0$ függvénnyel.*

A balinvariáns metrikával ellátott módosított H-típusú Lie-csoportokat izometria erejéig J. Lauret osztályozta a [20]-ban, bizonyítva azt, hogy a módosított H-sokaságok megadhatóak $(N, \langle .,. \rangle_S)$ alakban, ahol $(N, \langle .,. \rangle)$ H-típusú sokaság és az $\langle .,. \rangle_S$ skaláris szorzatra az

$$\langle X + A, Y + B \rangle_S = \langle X, Y \rangle + \langle SA, B \rangle$$

összefüggés teljesül tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{a}$ és $A, B \in \mathfrak{z}$ esetén, ahol az S a $(\mathfrak{z}, \langle .,. \rangle)$ egy szimmetrikus pozitív definit transzformációja.

3.1 Riemann-szubmerzió

A Riemann-szubmerzó fogalmát (ellentétben a párhuzamos fogalommal, a Riemann-immerzóéval, amelyet már a Riemann-geometria kezdeteitől tanulmányoznak) csak B. O'Neill 1967-es cikke ([29]) óta vizsgálják alaposabban. Először definiáljuk mit értünk Riemann-szubmerzió alatt, majd bevezetjük B. O'Neill szubmerzóra vonatkozó invariánsait, az A és T tenzorokat.

24. DEFINÍCIÓ. *Legyenek M és B Riemann-sokaságok. Riemann-szubmerzió alatt olyan az M sokaságról a B-re képező sima $\pi : M \to B$ leképezést értünk, amely eleget tesz a következő axiómáknak:*

(i) a π leképezés maximális rangú,

(ii) a π_* megőrzi az M horizontális érintővektorainak hosszát.

A $\pi^{-1}(b)$ sokaságokat *fibrumok*nak nevezzük. Egy M-beli vektormező (illetve az M sokaság egy érintővektora) *vertikális*, ha minden esetben érintője a fibrumoknak; *horizontális*, ha minden esetben merőleges a fibrumokra.

A $\pi : M \to B$ szubmerzió esetén jelölje $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{V}$ a horizontális és vertikális vektoroknak az M érintőtereire vonatkozó projekcióit. Megjegyezzük, hogy a

$$\pi_* : T_x M \to T_b B$$

érintőleképezés (ahol $x \in M$ és $b = \pi(x)$) magja $\mathfrak{V}_x$, a T_xM-beli $\pi^{-1}(b) = F_b = F_x$ fibrum érintő altere és egy lineáris izomorfizmust indukál a $\mathfrak{H}_x$-ről (amely a $\mathfrak{V}_x$ mag T_xM érintőtérbeli ortogonális komplementuma) a T_bB érintőtérre.

A szubmerzió tulajdonságai megadhatóak az úgynevezett *fundamentális tenzor*ainak a segítségével. Két ilyen alaptenzor létezik. Az egyiket, amelyet a továbbiakban T-vel jelölünk a $\pi^{-1}(b)$ fibrumok m*ásodik alapformá*ja határoz meg. A másik tenzor, az A pedig az M-beli $\mathfrak{H}$ horizontális disztribúció integrálhatóságát jellemzi. Jelölje ∇ az M sokaság g Riemann-metrikájára vonatkozó Levi-Civita konnexióját, $\widehat{\nabla}$ pedig az összes $b \in B$ esetén az F_b fibrumok $\widehat{g}_b$ Riemann-metrikáira vonatkozó Levi-Civita konnexióinak összességét. Az U, V vertikális vektormezők esetén a $\widehat{\nabla}_U V$ "jóldefiniált" M-beli vertikális vektormező, azaz:

$$\widehat{\nabla}_U V = \mathfrak{V} \nabla_U V.$$

Továbbá minden F_b fibrum az M sokaság egy zárt részsokasága, ezért mindegyik fibrum egy második alapformát indukál. Egy M-beli E vektormezőt *levetíthető*nek nevezünk, ha létezik olyan B-beli $\widetilde{E}$ vektormező, hogy $\pi_*(E_x) = \widetilde{E}_b$ teljesül minden $x \in M$ esetén. Ekkor azt is mondjuk, hogy az E és $\widetilde{E}$ vektormezők π-viszonyúak.

Az M-beli E vektormezőt akkor nevezzük *alapvektormező*nek, ha levetíthető és horizontális. Megjegyezzük, hogy minden B-beli $\widetilde{X}$ vektormező esetén pontosan egy M-beli X alapvektormező létezik, amely π-viszonyban áll $\widetilde{X}$ -szel. Továbbá, ha X és Y alapvektormezők, akkor a $\mathfrak{H}\,[X, Y]$ az az alapvektormező, amely π-viszonyban áll $\left[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\right]$-mal és $\mathfrak{H} D_X Y$ pedig a $\widetilde{D}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$-mal π-viszonyban álló alapvektormező. Bebizonyítható az is, hogy ha X és Y alapvektormezők, akkor $g(X, Y) = \widetilde{g}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ konstans a fibrumokon, ha pedig U vertikális vektormező, akkor $[X, U]$ vertikális. Az A és T tenzorok tetszőleges E és F vektormezők esetén az alábbi módon fejezhetőek ki:

$$\begin{aligned} T_E F &= \mathfrak{H}\nabla_{\mathfrak{V}E}(\mathfrak{V}F) + \mathfrak{V}\nabla_{\mathfrak{V}E}(\mathfrak{H}F), \\ A_E F &= \mathfrak{V}\nabla_{\mathfrak{H}E}(\mathfrak{H}F) + \mathfrak{H}\nabla_{\mathfrak{H}E}(\mathfrak{V}F). \end{aligned}$$

A fenti tenzorok a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

T_E és A_E *ferdén szimmetrikus* lineáris operátorok, továbbá *felcserélik* az M sokaság érintőtereinek *horizontális* és *vertikális* altereit,

T *vertikális* (azaz $T_E = T_{\mathfrak{V}E}$), az A tenzor pedig *horizontális* (azaz $A_E = A_{\mathfrak{H}E}$),

T *szimmetrikus* tenzor *vertikális* V és W vektormezők esetén, azaz $T_V W = T_W V$,

A *ferdén szimmetrikus* tenzor *horizontális* X és Y vektormezők esetén, azaz $A_X Y = -A_Y X$,

$A_X Y = \frac{1}{2}\mathfrak{V}[X, Y]$ egyenlőség teljesül *horizontális* X és Y vektormezők esetén.

A vertikális disztribúció integrálható, hiszen $\mathfrak{V}$ a fibrumoknál definiált érintő disztribúció. De a $\mathfrak{H}$ horizontális disztribúció nem feltétlenül integrálható. Az előbb felsoroltak közül az utolsó tulajdonság jelenti azt, hogy az $A_X Y$ a $\mathfrak{H}$ disztribúció integrálhatóságának "természetes" akadályát méri.

A T és A alaptenzorok és a ∇ kovariáns deriválás közötti kapcsolat a

$$\nabla_V W = T_V W + \mathfrak{V}\nabla_V W, \qquad \nabla_V X = \mathfrak{H}\nabla_V X + T_V X, \tag{7}$$

$$\nabla_X V = A_X V + \mathfrak{V}\nabla_X V, \qquad \nabla_X Y = \mathfrak{H}\nabla_X Y + A_X Y, \tag{8}$$

egyenletekkel fejezhető ki X és Y horizontális, illetve V és W vertikális vektormezők esetén.

Mivel a T tenzor a második alapformával áll kapcsolatban, a T pontosan akkor azonosan nulla, ha az összes fibrum totálgeodetikus. A vizsgált szubmerziónk esetén ez az eset áll fenn, ezt láthatjuk majd a következő alfejezetben.

Az A tenzor pedig akkor és csak akkor tűnik el azonosan, ha $\mathfrak{H}$ integrálható.

3.2 A $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ szubmerzió

Legyen N egy egyszeresen összefüggő kétlépcsős nilpotens Lie-csoport és jelölje $\mathfrak{n}$ a megfelelő Lie-algebrát. Az $\exp : \mathfrak{n} \to N$ diffeomorfizmus segítségével az $\mathfrak{n}$ vektorteret az N Lie-csoporttal, az $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$ szorzatteret pedig a TN érintőnyalábbal azonosíthatjuk. Legyen a $\langle , \rangle$ egy belső szorzat az $\mathfrak{n} \cong T_eN$-n, mely a

$$g_p(X, Y) = \langle (\lambda_p^{-1})_* X, (\lambda_p^{-1})_* Y \rangle$$

összefüggés segítségével egy balinvariáns Riemann-metrikát definiál az N sokaságon (a λ a baleltolás). Jelölje $\mathcal{Z}$ az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra $\mathfrak{z}$ centrumának megfelelő Lie-csoportot. A $T_x^{(h)}N$ horizontális disztribúció balinvariáns és merőleges a $(\lambda_x)_* T_e\mathcal{Z}$-re. Felhasználva az $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{z}$ ortogonális direktösszeg felbontást, tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{a}$ és $U, V \in \mathfrak{z}$ elemek esetén a következő azonosságok érvényesek:

$$\begin{aligned} [X \oplus U, Y \oplus V] &= 0 \oplus [X, Y], \\ (X \oplus U) \circ (Y \oplus V) &= (X + Y) \oplus \left(U + V + \frac{1}{2} [X, Y] \right). \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a $\lambda_{X \oplus U}$ baleltolásra teljesül a

$$(\lambda_{X \oplus U})_* |_{0 \oplus 0} (Y \oplus V) = Y \oplus \left(V + \frac{1}{2} [X, Y] \right) \tag{9}$$

egyenlőség. Így a $(\lambda_{X\oplus U})_*|_{0\oplus 0}(Y \oplus V)$ balinvariáns vektormezőt úgy is tekinthetjük, mint az

$$X \oplus U \mapsto Y \oplus \left(V + \frac{1}{2}[X, Y]\right)$$

leképezést.
A $T_{X\oplus U}N$ érintőtér direkt összege a

$$T^{(h)}_{X\oplus U}N = \left\{Y \oplus \frac{1}{2}[X, Y]\,; Y \in \mathfrak{a}\right\}$$

horizontális és a

$$T^{(v)}_{X\oplus U}N = \{0 \oplus Z; Z \in \mathfrak{z}\}$$

vertikális altereknek, azaz

$$T_{X\oplus U}N = \left\{Y \oplus \frac{1}{2}[X, Y]\,; Y \in \mathfrak{a}\right\} \oplus \{0 \oplus Z; Z \in \mathfrak{z}\}\,.$$

Mivel a $T^{(h)}_{X\oplus U}N$ horizontális altér független az N Lie-csoport $\mathcal{Z}$ centrumától, a horizontális disztribúció a $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ fibrumnyalábban egy τ konnexiót határoz meg. A következőkben a fibrumok megfelelő párhuzamos eltolásait írjuk le az $N/\mathcal{Z}$ alapsokaság görbéi mentén. Felhasználva az $\exp : \mathfrak{n} \to N$ leképezés segítségével történő azonosítást, belátható, hogy az $N/\mathcal{Z}$ faktortér mellékosztályai megegyeznek az $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ faktortér mellékosztályaival az $\mathfrak{n}$ additív struktúrájára vonatkozóan. Azaz az $N/\mathcal{Z}$ alapsokaság pontjai azonosíthatóak az $\mathfrak{a}$ vektortér vektoraival.

25 . Lemma. *Legyen $X(t)$ az $N/\mathcal{Z}$ faktortér egy differenciálható görbéje. Jelölje*

$$\tau_{t_0,\,t} : \pi^{-1}(X(t_0) \oplus 0) \to \pi^{-1}(X(t) \oplus 0)$$

az $X(t)$ alapgörbe N-beli horizontális liftjei által meghatározott leképezést. Ekkor tetszőleges $Z \in \mathfrak{z}$ esetén

$$\tau_{t_0,t}(X(t_0) \oplus Z) = X(t) \oplus (Z + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}[X(u), X'(u)]du).$$

Bizonyítás. A horizontális disztribúció alakja azt jelenti, hogy az $X(t) \oplus Z(t)$ görbe akkor és csak akkor horizontális liftje egy $X(t)$ görbének, ha az érintővektorára érvényes az

$$X'(t) \oplus Z'(t) = X'(t) \oplus \frac{1}{2}[X(t), X'(t)]$$

összefüggés. Ez ekvivalens a

$$Z'(t) = \frac{1}{2}[X(t), X'(t)]$$

egyenlőséggel, amiből az állításunk következik. □

Most megmutatjuk, hogy az $N/\mathcal{Z}$ faktortéren bevezethető egy egyértelmű $\bar{g}$ euklideszi metrika úgy, hogy a $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ principális fibrumnyaláb Riemann-szubmerzió a g és $\bar{g}$ Riemann-metrikákra vonatkozóan. Mivel a horizontális disztribúció független az $U \in \mathfrak{z}$ elemtől, a

$$g_p(X, Y) = \langle(\lambda_p^{-1})_* X, (\lambda_p^{-1})_* Y\rangle$$

balinvariáns Riemann-skaláris szorzat $T^{(h)}_{X\oplus U}N$ horizontális disztribúcióra történő leszűkítése levetíthető a $T(N/\mathcal{Z})$ érintőnyalábra. Ez azt jelenti, hogy a $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ leképezés Riemann-szubmerzió.

Mivel tetszőleges $X \in \mathfrak{a}$ elem esetén a

$$\{t(X \oplus 0);\ t \in \mathbb{R}\}$$

egy 1-paraméteres részcsoport $\exp(\mathfrak{a})$-ban, így

$$\exp(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}.$$

Az $N/\mathcal{Z}$ faktorteret az

$$(X \oplus 0) \circ \mathcal{Z} = \{(X \oplus 0) \circ (0 \oplus V) = X \oplus V;\ V \in \mathfrak{z}\} \mapsto X$$

alakban definiált $N/\mathcal{Z} \to \mathfrak{a}$ leképezés segítségével azonosíthatjuk az $\mathfrak{a}$ vektortérrel.

Jelölje az $X \in \mathfrak{a}$ elem esetén a $\bar{g}_X$ azt az $\mathfrak{a}$-beli Riemann-metrikát, amely megfelel az $N/\mathcal{Z}$-beli faktortérnek. Legyen $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{a}$. Az Y_i elemek $(i = 1, 2)$ horizontális liftjei a $T^{(h)}_{X \oplus 0} N$-ra

$$\{Y_i \oplus \frac{1}{2}[X, Y_i]\}$$

alakúak, amelyből a

$$(\lambda^{-1}_{X \oplus 0})_*(Y_i \oplus \frac{1}{2}[X, Y_i]) = Y_i \oplus 0$$

összefüggés adódik. Így

$$\begin{aligned}\bar{g}_X(Y_1, Y_2) &= \left\langle (\lambda^{-1}_{X \oplus 0})_*(Y_1 \oplus \frac{1}{2}[X, Y_1]), (\lambda^{-1}_{X \oplus 0})_*(Y_2 \oplus \frac{1}{2}[X, Y_2]) \right\rangle \\ &= \langle Y_1 \oplus 0, Y_2 \oplus 0 \rangle = \langle Y_1, Y_2 \rangle_{\mathfrak{a}}.\end{aligned}$$

Az előzőekből következik, hogy a Riemann-skaláris szorzat konstans az $N/\mathcal{Z}$ faktortéren, így az $N/\mathcal{Z}$ euklideszi tér.

Az $(N, \langle ., . \rangle)$ balinvariáns metrikával ellátott Lie-csoport $\nabla_X Y$ kovariáns deriváltjára a következő összefüggések teljesülnek:

$$(10) \quad \nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \quad \nabla_X Z = \nabla_Z X = -\frac{1}{2} j(Z) X, \quad \nabla_Z Z^* = 0,$$

ahol az $X, Y \in \mathfrak{a}$ és a $Z, Z^* \in \mathfrak{z}$ elemeket, mint N-beli balinvariáns vektormezőket tekintjük (lásd [6]).

26 . LEMMA. *A $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ Riemann-szubmerzió $e \in N$ egységelembeli $T|_e$ és $A|_e$ alaptenzoraira a*

$$\begin{aligned} T|_e &= 0 \quad \textit{és} \\ (A|_e)_{X+U}(Y+V) &= -\frac{1}{2}j(V)X \oplus \frac{1}{2}[X,Y] \end{aligned}$$

összefüggések teljesülnek, ahol $X, Y \in T_e^{(h)}N \cong \mathfrak{a}$ és $U, V \in T_e^{(v)}N \cong \mathfrak{z}$.

Bizonyítás. Legyen $X, Y \in T_e^{(h)}N \cong \mathfrak{a}$ és $U, V \in T_e^{(v)}N \cong \mathfrak{z}$ tetszőleges. Ezen vektorokat N-beli balinvariáns vektormezőkké terjesztjük ki és a továbbiakban ugyanezt a jelölést alkalmazzuk rájuk. Az A és T alaptenzorok illetve az $(N, \langle ., . \rangle)$-n adott ∇ kovariáns deriválás közötti összefüggésből (lásd (8)), valamint a (10) egyenletekből adódik, hogy

$$T_V U = -\mathfrak{H}\nabla_V U = 0, \quad T_V Y = -\mathfrak{V}\nabla_V Y = \frac{1}{2}\mathfrak{V}j(V)Y = 0.$$

Mivel a T tenzor vertikális,

$$T_{X+V}(Y+U) = T_V(Y+U) = T_V(Y) + T_V(U) = 0.$$

Így ezzel állításunk első részét igazoltuk.

Az A tenzor horizontális tulajdonságából következik, hogy az

$$A_{X+U}(Y+V) = A_X(Y+V).$$

Hasonlóan az előző esethez a (7) és (10) egyenletekből kapjuk az

$$\begin{aligned} A_X V &= -\frac{1}{2}j(V)X, \\ A_X Y &= \frac{1}{2}[X,Y] \end{aligned}$$

összefüggéseket, ami éppen az állításunk második része. $\square$

Mivel a T tenzormező balinvariáns, az előző lemmából következik, hogy T identikusan eltűnik.
Az A tenzormező szintén balinvariáns, így felhasználva a (9) összefüggést az

$$(A|_{X\oplus U})_{Y_1\oplus Z_1}(Y_2\oplus Z_2)$$

tetszőleges $X\oplus U$ pontban kifejezhető, mégpedig a következő módon:

$$\begin{aligned}&(A|_{X\oplus U})_{Y_1\oplus Z_1}(Y_2\oplus Z_2)\\ &\quad= \ (\lambda_{X\oplus U})_*(A|_{0\oplus 0})_{(\lambda_{X\oplus U})_*^{-1}(Y_1\oplus Z_1)}(\lambda_{X\oplus U})_*^{-1}(Y_2\oplus Z_2).\end{aligned}$$

Egyszerű meggondolás alapján adódik:

27. LEMMA. *A $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ Riemann-szubmerzió totálgeodetikus fibrumokkal rendelkezik, azaz a T tenzormező identikusan eltűnik. Az A tenzormező tetszőleges $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{a}$ és $U, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$ elemek esetén*

$$\begin{aligned}&(A|_{X\oplus U})_{Y_1\oplus Z_1}(Y_2\oplus Z_2)\\ &= \left(-\frac{1}{2}j(Z_2)Y_1 + \frac{1}{4}j([X,Y_2])Y_1\right)\\ &\oplus \left(\frac{1}{2}[Y_1,Y_2] - \frac{1}{4}[X, j(Z_2)Y_1] + \frac{1}{8}[X, j([X,Y_2])Y_1]\right)\end{aligned}$$

alakban áll elő.

3.3 A geodetikusok jellemzése

A következőekben B. O'Neill eredményeit (lásd [29]) használjuk.

28. TÉTEL. *Legyen $\pi : M \to B$ szubmerzió és az $E = H + V$ egy α görbementi M-beli vektormező, ahol $H = \mathfrak{H}E$ és $V = \mathfrak{V}E$. Ekkor*

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}(E') &= E'_* + A_H(\mathfrak{V}\alpha') + A_{\mathfrak{H}\alpha'}(V) + A_{\mathfrak{V}\alpha'}(V)\,,\\ \mathfrak{V}(E') &= A_{\mathfrak{H}\alpha'}(H) + T_{\mathfrak{V}\alpha'}(H) + \mathfrak{V}(V')\,.\end{aligned}$$

Az N totális tér geodetikusainak differenciálegyenleteire az előző tételt felhasználva és rendezve a kétlépcsős nilsokaságok geodetikusainak egyenleteit (lásd [8], [14]) bebizonyítható, hogy a $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ leképezés Riemann-szubmerzió. Mivel a T tenzormező identikusan eltűnik, az N sokaság $\alpha(s)$ differenciálható görbéje pontosan akkor geodetikus, ha kielégíti az

$$\alpha''_* = -2A_{\mathfrak{H}\alpha'}\mathfrak{V}\alpha' \quad \text{és} \quad \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\alpha')' = 0, \tag{11}$$

differenciálegyenleteket, ahol α''_* jelöli az $N/\mathcal{Z}$ euklideszi térbeli $\pi \circ \alpha$ projektált görbe $(\pi \circ \alpha)''$ gyorsulásvektorának horizontális liftjét. Hasonlóan a korábbiakhoz az N sokaságot az $\mathfrak{n}$ Lie-algebrájával azonosítjuk, míg a TN érintőnyalábot az $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$ szorzattérrel. Az $\alpha(s)$ geodetikust

$$\alpha(s) = X(s) \oplus U(s)$$

alakban írjuk, ahol tetszőleges $s \in \mathbb{R}$ esetén $X(s) \in \mathfrak{a}, U(s) \in \mathfrak{z}$. Ekkor

$$\alpha'(s) = X'(s) \oplus U'(s)$$

és a sebességvektor horizontális, illetve vertikális részére a következő összefüggések adódnak:

$$\mathfrak{H}\alpha'(s) = X'(s) \oplus \frac{1}{2}[X(s), X'(s)],$$
$$\mathfrak{V}\alpha'(s) = 0 \oplus U'(s) - \frac{1}{2}[X(s), X'(s)].$$

Továbbá a $(\pi \circ \alpha)''$ horizontális liftjére az

$$\alpha''_* = X''(s) \oplus \frac{1}{2}[X(s), X''(s)]$$

egyenlet teljesül.

Felhasználva az A tenzor 27. Lemmában megadott alakját, valamint a (11) egyenleteket a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} X''(s) &\oplus \frac{1}{2}[X(s), X''(s)] = \left(j(U'(s) - \frac{1}{2}[X(s), X'(s)]\right) X'(s) \\ &\oplus \frac{1}{2}\left[X, j(U'(s) - \frac{1}{2}[X(s), X'(s)])X'(s)\right], \\ U''(s) &- \frac{1}{2}[X(s), X''(s)] = 0. \end{aligned}$$

A második egyenlet azt jelenti, hogy az $U'(s) - \frac{1}{2}[X(s), X'(s)]$ konstans. Jelölje ezt a konstans vektort W_0.
Az első egyenletet ekvivalens módon

$$(X''(s) - (j(W_0)X'(s)) \oplus \frac{1}{2}[X(s), (X''(s) - j(W_0)X'(s))] = 0 \oplus 0$$

formában írhatjuk. Így a geodetikusok egyenleteire az

$$X''(s) = j(W_0)X'(s), \tag{12}$$

$$U'(s) - \frac{1}{2}[X(s), X'(s)] = W_0 \tag{13}$$

egyenletrendszert kapjuk, ahol a $W_0 \in \mathfrak{z}$ a fent bevezetett konstans vektor. Az előző egyenleteket A. Kaplan bizonyította a H-típusú nilsokaságokra ([14]) és P. Eberlein általánosította tetszőleges kétlépcsős nilsokaságokra ([6]). A (13) egyenlet azt jelenti, hogy az N-beli $\alpha(s)$ görbementi érintővektormező

$$\mathfrak{V}\alpha'(s) = 0 \oplus \left(U'(s) - \frac{1}{2}[X(s), X'(s)]\right)$$

vertikális komponensét a $0 \oplus W_0$ konstans vektorral reprezentálhatjuk. A W_0 konstans vektor tetszőleges $\mathfrak{z}$ centrumbeli elem lehet, melyet a

geodetikus érintővektorára vonatkozó kezdetiérték feltétel vertikális része határoz meg.
Mivel a $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ szubmerzió fibrumai az N totálgeodetikus részsokaságai, a

$$\tau_{s_0, s} : \pi^{-1}(\pi(\alpha(s_0))) \to \pi^{-1}(\pi(\alpha(s)))$$

leképezések a $\pi^{-1}(\pi(\alpha(s_0)))$-ből a $\pi^{-1}(\pi(\alpha(s)))$-re izometriák, ahol $s \in \mathbb{R}$. Ebből következik, hogy a

$$\psi : \mathbb{R} \times \pi^{-1}(\pi(\alpha(s_0))) \to \bigcup_{s\in\mathbb{R}} \pi^{-1}(\pi(\alpha(s)))$$

leképezés, melyet a

$$\psi(s, z) = \tau_{s_0, s} z$$

segítségével definiálunk (ahol $s \in \mathbb{R},\ z \in \pi^{-1}(\pi(\alpha(s_0))))$, izometria az $\mathbb{R} \times \pi^{-1}(\pi(\alpha(s_0)))$ euklideszi szorzattérről az $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} \pi^{-1}(\pi(\alpha(s))) \subset N$ Riemann-részsokaságra.

A következő lemma a (13) egyenlet értelmezését adja meg.

29. Lemma. *Ha az $X(s) \oplus U(s)$ görbe az N kétlépcsős Riemann-nilsokaság geodetikusa, akkor ez nem más, mint a*

$$\{\psi(s, sW_0);\ s \in \mathbb{R}\} = \{\tau_{s_0, s} sW_0;\ s \in \mathbb{R}\}$$

képgörbe az $\mathbb{R} \times \pi^{-1}(\pi^{-1}(X(s_0) \oplus 0))$ euklideszi tér $\{(s, sW_0);\ s \in \mathbb{R}\}$ egyenesének $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} \pi^{-1}(X(s) \oplus 0) \subset N$ részsokaságában.

Bizonyítás. Az $\exp : \mathfrak{n} \to N$ leképezéssel történő azonosítás segítségével a 25. Lemmából azt kapjuk, hogy az $\{(s, sW_0);\ s \in \mathbb{R}\}$ egyenes képének

$$\psi(s, sW_0) = \tau_{s_0, s} sW_0 \in \pi^{-1}(X(s) \oplus 0)$$

pontja

$$X(s) \oplus U(s) = X(s) \oplus \left(sW_0 + \frac{1}{2} \int_{s_0}^{s} [X(u), X'(u)] du \right)$$

alakú. Ezen görbe érintővektora

$$X'(s) \oplus U'(s) = X'(s) \oplus \left(W_0 + \frac{1}{2} [X(s), X'(s)] \right)$$

formában fejezhető ki, amely ekvivalens a (13) egyenlettel. $\square$

A következőkben a (12) egyenletet elemezzük. Amint korábban láttuk, a W_0 konstans vektor a $\mathfrak{z}$ centrum egy tetszőleges eleme, melyet az $\alpha(s)$ geodetikus érintővektorára vonatkozó kezdetiérték feltétel vertikális része határoz meg. Az $\alpha(s)$ geodetikus $\pi \circ \alpha(s)$ projekcióját a (12) egyenletet kielégítő $X(s)$ vektormező írja le, ahol tetszőleges $s \in \mathbb{R}$ esetén $X(s) \in \mathfrak{a}$.

30. Állítás. *Tetszőleges $\alpha(s)$ geodetikus $\pi \circ \alpha(s)$ projekciója konstans görbületű az $N/\mathcal{Z}$ euklideszi térben.*

Bizonyítás. Legyen $X(s) \in \mathfrak{a}$, amely az $\alpha(s)$ geodetikus $\pi \circ \alpha(s)$ projekciójának felel meg. Jelölje az

$$X^{(n)}(s) = j(W_0)^{n-1} X'^{(s)}$$

az $X(s)$ n-dik deriváltját ($n \geq 1$), de az első és második deriváltak esetén a szokásos X' és X'' jelöléseket alkalmazzuk. A (12) egyenletnek megfelelelően

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle X^{(n)}(s), X^{(n)}(s) \rangle' &= \langle X^{(n+1)}(s), X^{(n)}(s) \rangle \\ &= \langle j(W_0) X^{(n)}(s), X^{(n)}(s) \rangle = 0, \end{aligned}$$

mivel a $j(W_0)$ ferdén szimmetrikus operátor. Így az α geodetikust a $\pi \circ \alpha$ görbe t ívhosszával paraméterezhetjük. Legyen $\mathbf{e}_1(t) = X'(t)$. Ekkor a $\pi \circ \alpha(t)$ görbe κ_1 görbülete az

$$\langle X''(t), X''(t)\rangle^{\frac{1}{2}} = \langle \mathbf{e}_1'(t), \mathbf{e}_1'(t)\rangle^{\frac{1}{2}}$$

konstans. Ha $\kappa_1 \neq 0$, definiáljuk $\mathbf{e}_2(t)$-t az

$$\mathbf{e}_1'(t) = \kappa_1 \mathbf{e}_2(t)$$

egyenlettel. Hasonlóan rekurzív módon definiálja a $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ Frenet-formulákat az

$$\mathbf{e}_i'(t) = -\kappa_{i-1}\mathbf{e}_{i-1}(t) + \kappa_i \mathbf{e}_{i+1}(t)$$

egyenlet, ha $i = 2, \ldots, n-1$, és

$$\mathbf{e}_n'(t) = -\kappa_{n-1}\mathbf{e}_{n-1}(t).$$

Induktív módon feltehetjük, hogy κ_{i-1} konstans és $\mathbf{e}_i(t)$ az $X'(t), \ldots, X^{(i)}(t)$ vektorok lineáris kombinációja konstans együtthatókkal, így az $\mathbf{e}_i'(t) = j(W_0)\mathbf{e}_i(t)$ hossza konstans. Mivel

$$\mathbf{e}_i'(t) = -\kappa_{i-1}\mathbf{e}_{i-1}(t) + \kappa_i \mathbf{e}_{i+1}(t),$$

azt kapjuk eredményül, hogy κ_i konstans és $\mathbf{e}_{i+1}(t)$ az

$$X'(t), \ldots, X^{(i+1)}(t)$$

vektorok lineáris kombinációja. □

31. Következmény. *Az $\alpha(s) = X(s) \oplus U(s)$ geodetikus $\pi \circ \alpha(s)$ projektált görbéje az $N/\mathcal{Z}$ euklideszi térben akkor és csak akkor egyenes, ha*

$$j(U(s_0))X(s_0) = 0$$

teljesül valamely s_0 pontban.

3.4 A módosított Heisenberg-sokaságok geodetikusai

Ebben a részben azon kétlépcsős nilsokaságokat jellemezzük, melyek esetén a geodetikusok projekciói pontok, egyenesek vagy körök.

32. Állítás. *Legyen $(N, \langle .,. \rangle)$ egy kétlépcsős nilpotens Lie-csoport. Ekkor a geodetikusok $N/\mathcal{Z}$-beli projektált görbéi akkor és csak akkor pontok, egyenesek, körök, ha*

$$j(U)^2 = -q(U) id_{\mathfrak{a}},$$

ahol a $q(U)$ egy pozitív szemidefinit kvadratikus forma a $\mathfrak{z}$ centrumon.

Bizonyítás. Jelölje az $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{z}$ az $(N, \langle .,. \rangle)$ Lie-csoportnak megfelelő Lie-algebrát. A projektált görbéket akkor és csakis akkor tartalmazza az $N/\mathcal{Z}$ alapsokaság egy kétdimenziós altere, ha $\kappa_2 = 0$ minden ilyen görbe esetén. Ez pontosan akkor áll fenn, ha

$$X''(t) = \mathbf{e}_1'(t) = j(W_0)\mathbf{e}_i(t) = \kappa_1 \mathbf{e}_2(t)$$

és

$$X'''(t) = \mathbf{e}_1''(t) = j(W_0)^2 \mathbf{e}_1(t) = \kappa_1 \mathbf{e}_2'(t) = -\kappa_1^2 \mathbf{e}_1(t).$$

Tetszőleges $U \in \mathfrak{z}$ és $X \in \mathfrak{a}$ esetén

$$j(U)^2 X = \lambda X$$

egy megfelelő λ konstanssal. Mivel a j lineáris operátor ferdén szimmetrikus, ezért így a

$$\langle j^2(U)X, X \rangle = -\langle j(U)X, j(U)X \rangle$$

azonosság teljesül, amely ekvivalens azzal, hogy

$$\lambda = -\frac{|j(U)X|^2}{|X|^2}.$$

Könnyen belátható, hogy minden $X \in \mathfrak{a}$ vektor a $j(U)^2$ operátor sajátvektora, így a $j^2(U)$ operátornak minden $U \in \mathfrak{z}$ esetén csak egyetlen sajátértéke van. Ennélfogva a λ független az X vektortól. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\lambda = -\frac{|j(U)X|^2}{|X|^2} = -q(U),$$

ahol a $q(U)$ egy pozitív szemidefinit kvadratikus forma a $\mathfrak{z}$ centrumon. □

A következőkben felhasználjuk azt a P. Eberlein [8] cikkéből származó állítást, mely szerint minden kétlépcsős nilpotens Lie-algebrából leválasztható egy Abel-faktor.

33. Állítás. *Legyen $\mathfrak{n}$ egy kétlépcsős nilpotens Lie-algebra, melynek centrumát $\mathfrak{z}$-vel jelöljük. Ekkor az $\mathfrak{n}$ Lie-algebrának léteznek olyan $\mathfrak{n}^*$ és ξ ideáljai, ahol $\xi \subseteq \mathfrak{z}$ és melyekre teljesülnek a következők:*

1. $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^* \oplus \xi$ *és* $\mathfrak{z} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \oplus \xi$.
2. $\mathfrak{n}^*$ *kétlépcsős nilpotens Lie-algebra, mégpedig úgy, hogy* $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = [\mathfrak{n}^*, \mathfrak{n}^*] = \mathfrak{z}^*$ *kommutátor algebra az* $\mathfrak{n}^*$ *centruma.*
3. *Az* $\mathfrak{n}^*$ *és* ξ *ideálok izomorfizmus erejéig egyértelműen határozhatóak meg az 1. pontban leírt módon.*

Bizonyítás. A bizonyítást az utolsó résszel kezdjük. Tegyük fel, hogy

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1^* \oplus \xi_1 = \mathfrak{n}_2^* \oplus \xi_2,$$

ahol $\{\mathfrak{n}_1^*, \xi_1\}$ és $\{\mathfrak{n}_2^*, \xi_2\}$ is teljesíti az állítás 1. és 2. pontjában leírt feltételeket. Ha a $\mathfrak{v}$ az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra egy olyan altere, melyre $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$, akkor

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \oplus \xi_i,$$

ahol $i = 1, 2$. Legyen a

$$T : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$$

lineáris izomorfizmus úgy, hogy a T leképezés identikus a $\mathfrak{v} \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$-n és

$$T(\xi_1) = \xi_2.$$

Könnyen belátható, hogy T Lie-algebra izomorfizmus. Ebből következik, hogy T egy

$$\overline{T} : \mathfrak{n}/\xi_1 \to \mathfrak{n}/\xi_2$$

Lie-algebra izomorfizmust indukál. Emellett az is igaz, hogy

$$\mathfrak{n}/\xi_1 \simeq \mathfrak{n}_1^* \quad \text{és} \quad \mathfrak{n}/\xi_2 \simeq \mathfrak{n}_2^*.$$

Így $\mathfrak{n}_1^* \simeq \mathfrak{n}_2^*$ és mivel ξ_1 és ξ_2 megegyező dimenziójú kommutatív Lie-algebrák, ezért $\xi_1 \simeq \xi_2$.
Ahhoz, hogy belássuk az $\mathfrak{n}^*$ és ξ ideálok létezését, válasszuk meg ξ-t a $\mathfrak{z}$ centrum tetszőleges altereként úgy, hogy $\mathfrak{z} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \oplus \xi$. Legyen $\mathfrak{v}$ az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra egy olyan altere, melyre $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$. Ha $\mathfrak{n}^* = \mathfrak{v} \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$, akkor könnyen bebizonyítható, hogy $\mathfrak{n}^*$ és ξ teljesítik az állítás 1. és 2. feltételeit. □

Az előző állítások következménye az alábbi eredmény.

34. TÉTEL. *Legyen $\mathfrak{n}$ egy kétlépcsős nilpotens Lie-algebra, valamint N a megfelelő egyszeresen összefüggő nilpotens Lie-csoport. Jelölje $\mathcal{Z}$ az N centrumát. Az N geodetikusainak az $N/\mathcal{Z}$ euklideszi térbeli összes projekciója pontosan akkor síkgörbe, ha az N egy módosított Heisenberg-típusú csoport direkt összege az N euklideszi de Rahm-faktorával. Ebben az esetben a geodetikusok projekciói pontok, egyenesek vagy körök.*

Bizonyítás. Legyen az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra centruma $\mathfrak{z}$. Ekkor $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^* \oplus \xi$ és $\mathfrak{z} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \oplus \xi$, ahol az $\mathfrak{n}$ algebra $\mathfrak{n}^*$ (nem Abel-faktor) és ξ (Abel-faktor) ideáljai egyértelműek és $\mathfrak{n}^*$ szintén egy kétlépcsős nilpotens Lie-algebra, mégpedig úgy, hogy az $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = [\mathfrak{n}^*, \mathfrak{n}^*]$ kommutátor algebra az $\mathfrak{n}^*$centruma.

Jelölje $\langle ., . \rangle$ az $\mathfrak{n}$-en adott belső szorzatot, valamint a megfelelő balinvariáns metrikát N-en. Ha a ξ dimenziója $p \geq 0$, akkor az (1) egyenlettel definiált j lineáris leképezés magjának dimenziója p. Így az $(N, \langle ., . \rangle)$ euklideszi de Rahm-faktorának dimenziója megegyezik az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra $\mathfrak{n}^*$ Abel-faktorának a dimenziójával (lásd [8]).

Az előző állításban igazoltuk, hogy a geodetikusok $N/\mathcal{Z}$-beli projektált görbéi akkor és csak akkor síkgörbék, ha

$$j(U)^2 = -q(U) id_{\mathfrak{a}},$$

ahol a $q(U)$ egy pozitív szemidefinit kvadratikus forma a $\mathfrak{z}$ centrumon. Ha a $q(U)$ egy pozitív definit kvadratikus forma a $\mathfrak{z}$-n akkor a módosított Heisenberg-típusú csoportok osztályát kapjuk. Ha pedig van olyan $U \neq 0 \in \mathfrak{z}$, amelyre $q(U) = 0$, akkor a j leképezés nem injektív és ebben az esetben U merőleges az $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$-re. Ebből a tényből az következik, hogy N egy módosított Heisenberg-típusú csoport direkt összege az N euklideszi de Rahm-faktorával.

Megfordítva az állítást, ha feltesszük, hogy N egy módosított Heisenberg-típusú csoport direkt összege az N euklideszi de Rahm-faktorával, akkor a módosított H-típusú csoport definíciójából az következik, hogy $[j(U)]^2 = -q(U) id_{\mathfrak{a}}$, ahol $q(U)$ egy $\mathfrak{z}$-beli pozitív szemidefinit kvadratikus forma. Ebből azt kapjuk, hogy az $N/\mathcal{Z}$ hányadostérre történő kanonikus projekció minden N-beli geodetikust egy $N/\mathcal{Z}$-beli síkgörbére vetít. □

4 Izometria-csoportok

A balinvariáns metrikával ellátott kétlépcsős nilpotens Lie-csoportokat, amelyeket gyakran kétlépcsős nilsokaságoknak is neveznek, az utóbbi évtizedekben több kutató is intenzíven tanulmányozta. A kétlépcsős homogén nilsokaságok egy speciális osztálya a Heisenberg-típusú csoportok osztálya, amelyet A. Kaplan vezetett be és tulajdonságait mások mellett ő is tanulmányozta (pl. [14], [15]). A Heisenberg-típusú csoportok a geometriai analízisben, a Lie-csoportok elméletében és a matematikai fizikában is fontos szerepet játszanak. J. Lauret (lásd [21]) lényegében ezt a fogalmat általánosította, amikor bevezette az úgynevezett *módosított H-típusú csoportok* definícióját.

A [20] cikkben J. Lauret izometria erejéig az összes 3 és 4 dimenziós homogén nilsokaságot osztályozta (nemcsak a kétlépcsős nilpotenseket) és kiszámította a megfelelő izometria-csoportokat is. Példaként tanulmányozta a speciális 2-dimenziós centrumú 5-dimenziós kétlépcsős nilsokaságok szerkezetét. E fejezet célja az összes egyszeresen összefüggő 5-dimenziós kétlépcsős Riemann-nilsokaság osztályozása és a teljes izometria-csoportjainak meghatározása, melyre vonatkozó eredmények a szerző O. Kowalskival közös cikkéből származnak ([12]).

4.1 Kétlépcsős nilpotens Lie-csoportok

Nilsokaság alatt olyan összefüggő Riemann-sokaságot értünk, amely az izometriák egy tranzitív nilpotens Lie-csoportját indukálja. E. Wilson [33] cikkében bebizonyította, hogy ha adott egy M homogén nilsokaság, akkor létezik az $I(M)$ izometria-csoportnak olyan N nilpotens Lie részcsoportja, amely egyszeresen tranzitívan hat M-en és normális részcsoportja az $I(M)$-nek. Így az M Riemann-sokaság azonosítható a balinvariáns $\langle .,. \rangle$ metrikával ellátott N csoporttal. Az N-beli balinvariáns $\langle .,. \rangle$ metrika egy $\langle , \rangle$ belső szorzatot határoz meg a megfelelő

$\mathfrak{n} = T_e N$ Lie-algebrán és ez fordítva is teljesül. A [33] cikknek megfelelően az $(N, \langle ., . \rangle)$ teljes izometria-csoport kifejezhető az

$$I\left(N, \langle ., . \rangle\right) = K \ltimes N \tag{14}$$

szemidirekt szorzat alakban, ahol a $K = Aut\left(\mathfrak{n}\right) \cap O\left(\mathfrak{n}, \langle , \rangle\right)$ az e egységelembeli izotrópia részcsoport és N baleltolásként hat. K az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra összes olyan automorfizmusait tartalmazza, amely megőrzi a $\langle , \rangle$ belső szorzatot. Így a K izotrópia-részcsoport meghatározza a teljes izometria-csoport szerkezetét. Továbbá, ha N egyszeresen összefüggő, akkor az $\exp : \mathfrak{n} \to N$ exponenciális leképezés diffeomorfizmus. Így nem kell megkülönböztetnünk az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra automorfizmusait az N Lie-csoport automorfizmusaitól.

Emlékeztetünk az $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ kétlépcsős nilpotens Lie-algebráknak a bevezetőben elmondott jellemzésére, ahol az $(\mathfrak{a}, \mathfrak{z}, j)$-vel jelöltük a Lie-algebra adathármasát, a $j : \mathfrak{z} \to so(\mathfrak{a})$ lineáris leképezést pedig az (1) összefüggés segítségével definiáltuk.

4.2 5-dimenziós kétlépcsős nilsokaságok

Ebben a fejezetben az 5-dimenziós egyszeresen összefüggő nilsokaságok osztályozását adjuk meg izometria erejéig. Ez ekvivalens a megfelelő metrikus Lie-algebrák osztályozásával. Világos, hogy az 5-dimenziós kétlépcsős nilpotens Lie-algebrák centruma maximálisan 3-dimenziós. Így külön vizsgálunk három esetet aszerint, hogy a centrum 1-,2- vagy 3-dimenziós.

4.2.1 1-dimenziós centrumú metrikus Lie-algebrák

Jelöljön $\mathfrak{h}_5$ egy olyan 5-dimenziós Lie-algebrát, melynek $\mathfrak{z}$ centruma 1-dimenziós. Feltételezzük, hogy a $\mathfrak{h}_5$ algebra el van látva egy $\langle , \rangle$ belső szorzattal. (Az 1-dimenziós centrumú kétlépcsős nilsokaságokat rendszerint Heisenberg-sokaságoknak nevezzük.) Legyen e_5 a $\mathfrak{z}$ centrum egy egységvektora. Tekintsünk egy olyan 2-dimenziós vektorteret (és jelöljük $\mathfrak{a}_2$-vel), amelyre $[\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2] = \mathfrak{z}$. Mivel a $\mathfrak{h}_5$ centruma 1-dimenziós, egyértelműen létezik egy $\mathfrak{b}_2$ vektortér az $\mathfrak{a}$ algebrában, amely kiegészíti $\mathfrak{a}_2$-t az $\mathfrak{a}$-ban és kommutál $\mathfrak{a}_2$-vel, azaz $\mathfrak{b}_2 = Ker(ad(u)) \cap Ker(ad(v)) \cap \mathfrak{a}$, ahol az $\{u, v\}$ az $\mathfrak{a}_2$ egy bázisa. Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{a}_2$ és $\mathfrak{b}_2$ kiegészítő algebrák nem merőlegesek. Könnyen látható, hogy egy $\mathfrak{a}_2$-beli vektornak, valamint e vektor $\mathfrak{b}_2$-beli merőleges vetületének a szöge a maximális és minimális értéket két egymásra merőleges irányban veszi fel $\mathfrak{a}_2$-ben. Ez a szög lehet konstans is, ekkor a merőleges irányok tetszőleges módon megválaszthatóak. Ebben az esetben az $\mathfrak{a}_2$ és $\mathfrak{b}_2$ vektortereket izoklín síkoknak nevezzük.

Tehát mindig megadhatunk olyan $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormált bázist $\mathfrak{a}$-ban, hogy $\{e_1, e_2\}$ az $\mathfrak{a}_2$ egy ortonormált bázisa és $\{f_1 = \cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, e_3,\ \ f_2 = \cos\beta\, e_2 + \sin\beta\, e_4\}$ a $\mathfrak{b}_2$-nek egy ortonormált bázisa, ahol a nemzérus α, β jelöli a 2-dimenziós $\mathfrak{a}_2$ és $\mathfrak{b}_2$ vektorterek bezárt szögének szélsőértékeit. Ekkor

$$[e_1, e_2] = \bar{\lambda}\, e_5 \quad \text{és} \quad [e_3, e_4] = \bar{\mu}\, e_5,$$

ahol $\bar{\lambda} \neq 0$ és e_5 a centrum egy egységvektora. Ekkor kiszámítható a bázisvektorok többi Lie-zárójele is, mégpedig

$$\begin{aligned} [e_1, e_3] &= 0, \qquad & [e_1, e_4] &= -\bar{\lambda}\, \mathrm{ctg}\beta\, e_5 \\ [e_2, e_4] &= 0, \qquad & [e_2, e_3] &= \bar{\lambda}\, \mathrm{ctg}\alpha\, e_5. \end{aligned}$$

Továbbá található egy

$$e_1' = \cos t\, e_1 + \sin t\, e_3, \quad e_3' = -\sin t\, e_1 + \cos t\, e_3,$$

$$e_2' = \cos s\, e_2 + \sin s\, e_4, \quad e_4' = -\sin s\, e_2 + \cos s\, e_4$$

vektorokból álló új ortonormált bázis úgy, hogy

$$[e_2', e_3'] = 0 \text{ és } [e_1', e_4'] = 0.$$

Ilyen bázist határoznak meg a

$$\begin{aligned}\left(\bar\lambda+\bar\mu\right)\sin(t-s) &= \bar\lambda\,(ctg\beta-ctg\alpha)\cos(t-s)\,,\\ \left(\bar\lambda-\bar\mu\right)\sin(t+s) &= -\bar\lambda\,(ctg\beta+ctg\alpha)\cos(t+s)\end{aligned}$$

egyenletek $\{t,s\in\mathbb{R}\}$ megoldásai. Így tehát az $\mathfrak{a}$ Lie-algebrának létezik olyan $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ bázisa, hogy

$$[e_1,e_2]=-[e_2,e_1]=\lambda\,e_5,\quad [e_3,e_4]=-[e_4,e_3]=\mu\,e_5, \tag{15}$$

$$[e_1,e_3]=[e_1,e_4]=[e_2,e_3]=[e_2,e_4]=0. \tag{16}$$

Továbbá feltehetjük az általánosság megsértése nélkül azt is, hogy $\lambda\geq\mu>0$.
Egy *metrikus* (λ,μ)*-típusú Heisenberg-algebra* alatt olyan 5-dimenziós metrikus Lie-algebrát értünk, melynek egy $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ ortonormált bázisára teljesülnek a (15) és (16) összefüggések, ahol $\lambda\geq\mu>0$. Az előző módon definiált algebrát $\mathfrak{h}_5(\lambda,\mu)$-vel jelöljük.

35. ÁLLÍTÁS. *Tetszőleges* 5*-dimenziós kétlépcsős nilpotens* $\mathfrak{n}$ *metrikus Lie-algebra esetén, melynek centruma* 1*-dimenziós, léteznek olyan* $\lambda\geq\mu>0$ *valós számok úgy, hogy az* $\mathfrak{n}$ *izomorf a* $\mathfrak{h}_5(\lambda,\mu)$ *metrikus Heisenberg-algebrával.*
A $\mathfrak{h}_5(\lambda,\mu)$ *és* $\mathfrak{h}_5(\lambda',\mu')$ *metrikus Heisenberg-algebrák akkor és csakis akkor izometrikusan izomorfak, ha* $\lambda=\lambda'$ *és* $\mu=\mu'$*.*

Bizonyítás. Az állítás első fele az előbb említett gondolatmenetből következik.
Az állításunk második felének bizonyításához tekintsük a $\mathfrak{h}_5(\lambda,\mu)$ és $\mathfrak{h}_5(\lambda',\mu')$ metrikus Heisenberg-algebrákat, melyek ortonormált bázisai $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$, illetve $\{e'_1,e'_2,e'_3,e'_4,e'_5\}$. Az (1) összefüggés által definiáljuk a megfelelelő $j(e_5)\,:\,\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}$, illetve a $j(e'_5)\,:\,\mathfrak{a}'\to\mathfrak{a}'$

ferdén szimmetrikus lineáris leképezéseket. Tetszőleges $u, v \in \mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ és $u', v' \in \mathfrak{h}_5(\lambda', \mu')$ esetén

$$[u, v] = \langle j(e_5)u, v\rangle\, e_5 \quad \text{és} \quad [u', v'] = \langle j(e_5')u', v'\rangle\, e_5'.$$

Egy $\varphi : \mathfrak{h}_5(\lambda, \mu) \to \mathfrak{h}_5(\lambda', \mu')$ lineáris izomorfizmus csak akkor izometrikus Lie-algebra izomorfizmus, ha a $span(e_5)$ centrumot a $span(e_5')$ centrumra, továbbá az $\mathfrak{a}$ ortogonális komplementumot pedig az $\mathfrak{a}'$ ortogonális komplementumra vetíti. Ekkor

$$\varphi(e_5) = \varepsilon e_5'$$

és

$$\varphi \circ j(e_5) \circ \varphi^{-1} = \varepsilon j(e_5'),$$

ahol $\varepsilon = \pm 1$. A (15) és (16) egyenletek ekvivalensek a

$$\begin{aligned} j(e_5)e_1 &= \lambda e_2,\; & j(e_5)e_2 &= -\lambda e_1,\; & j(e_5)e_3 &= \mu e_4,\; & j(e_5)e_4 &= -\mu e_3,\\ j(e_5')e_1' &= \lambda' e_2',\; & j(e_5')e_2' &= -\lambda' e_1',\; & j(e_5')e_3' &= \mu' e_4',\; & j(e_5')e_4' &= -\mu' e_3' \end{aligned}$$

összefüggésekkel. Így a $j(e_5)^2 : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ és $j(e_5')^2 : \mathfrak{a}' \to \mathfrak{a}'$ leképezések önadjungált endomorfizmusok, melyek sajátértékei $-\lambda^2, \; -\mu^2$, illetve $-\lambda'^2, \; -\mu'^2$. A megfelelő sajátalterek 2-dimenziósak és az $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$, illetve az $\{e_1', e_2'\}, \{e_3', e_4'\}$ vektorok feszítik ki őket. Ekkor teljesül a

$$\varphi \circ j(e_5)^2 \circ \varphi^{-1} = j(e_5')^2$$

összefüggés. Így tetszőleges $\varphi : \mathfrak{h}_5(\lambda, \mu) \to \mathfrak{h}_5(\lambda', \mu')$ izometrikus izomorfizmus a $j(e_5)^2$ sajátaltereit a $j(e_5')^2$ megfelelő sajátértékéhez tartozó sajátaltereibe vetíti. Így $\lambda = \lambda'$ és $\mu = \mu'$. □

A fent említett számításokból és a [18] cikk segítségével kapjuk a következő eredményt.

36. KÖVETKEZMÉNY. *Minden 5-dimenziós N Heisenberg-csoport, amely egy $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ metrikus algebrának felel meg, módosított H-típusú csoport és természetesen reduktív is. Továbbá akkor és csakis akkor H-típusú csoport, ha $\lambda = \mu$.*

Ahhoz, hogy leírjuk a $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ metrikus Lie-algebrának megfelelő egyszeresen összefüggő nilsokaság teljes izometria-csoportját, először meghatározzuk a $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ ortogonális automorfizmusait. Az előző állítás bizonyításából adódik, hogy a $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ algebra φ ortogonális automorfizmusának meg kell őriznie a $j(e_5)^2$ lineáris leképezés sajátaltereit.

Így ha $\lambda \neq \mu$, akkor a φ leképezés

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= \delta_1 \cos(t)\, e_1 + \delta_1 \sin(t)\, e_2,\ \varphi(e_2) = -\sin(t)\, e_1 + \cos(t)\, e_2, \\
\varphi(e_3) &= \delta_2 \cos(s)\, e_3 + \delta_2 \sin(s)\, e_4,\ \varphi(e_4) = -\sin(s)\, e_3 + \cos(s)\, e_4, \\
\varphi(e_5) &= \varepsilon e_5
\end{aligned}$$

alakú, ahol $\delta_1 = \pm 1, \delta_2 = \pm 1, \varepsilon = \pm 1$. Könnyen látható, hogy ez a leképezés akkor és csakis akkor őrzi meg a Lie-zárójelre vonatkozó (15) és (16) összefüggéseket, ha $\delta_1 = \delta_2 = \varepsilon$. Így a $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ algebra izometrikus automorfizmusainak csoportját az

$$\left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon\cos t & -\sin t & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon\sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\cos s & -\sin s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\sin s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

alakú mátrixok csoportja reprezentálja.

Abban az esetben, ha $\lambda = \mu$, a φ ortogonális transzformáció pontosan akkor ortogonális automorfizmus, ha az $\mathfrak{a}$-ra történő leszűkítése felcserélhető a $J : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ komplex struktúrával, melyet a

$$J(e_1) = \varepsilon e_2, \quad J(e_2) = -\varepsilon e_1, \quad J(e_3) = \varepsilon e_4, \quad J(e_4) = -\varepsilon e_3$$

összefüggések határoznak meg, továbbá

$$\varphi(e_5) = \varepsilon e_5, \text{ ahol } \varepsilon = \pm 1.$$

Ebből kapjuk az alábbi állítást.

37. ÁLLÍTÁS. *A $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ metrikus Lie-algebra ortogonális automorfizmusainak a csoportja ha $\lambda \neq \mu$ az $O(2) \times SO(2)$ csoporttal, ha $\lambda = \mu$, akkor az $U(2) \times \mathbb{Z}_2$ csoporttal izomorf.*

4.2.2 2-dimenziós centrumú metrikus Lie-algebrák

Jelöljön $\mathfrak{n}_5$ egy 5-dimenziós Lie-algebrát, melynek $\mathfrak{z}$ centruma 2-dimenziós és legyen N_5 a megfelelő egyszeresen összefüggő Lie-csoport. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{n}_5$ el van látva egy $\langle , \rangle$ belső szorzattal. Jelöljük $\mathfrak{a}$-val a $\mathfrak{z}$ centrum $\mathfrak{n}_5$-beli ortogonális komplementumát. Mivel a 3-dimenziós $\mathfrak{a}$ vektortér izomorf az $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a}$ külső szorzathoz, az $[.,.] : \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{a} \to \mathfrak{z}$ lineáris leképezés magja 1-dimenziós, melyet egy $u \wedge v$ bivektor feszít ki. A kétdimenziós $\mathfrak{a}_2 = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ részalgebra egy egyértelműen meghatározott kommutatív részalgebrája az $\mathfrak{a}$-nak. Legyen $e_1 \in \mathfrak{a}$ egység hosszúságú vektor, amely merőleges az $\mathfrak{a}_2$-re és legyen az $\{e_2', e_3'\}$ az $\mathfrak{a}_2$ egy ortonormált bázisa. Ha az $\mathfrak{a}_2$-ben egy olyan új $\{e_2, e_3\}$ bázist tekintünk, amely

$$e_2 = \cos t\, e_2' + \sin t\, e_3', \quad e_3 = -\sin t\, e_2' + \cos t\, e_3', \quad t \in \mathbb{R},$$

alakú, akkor

$$\begin{aligned} &\langle [e_1, e_2], [e_1, e_3] \rangle \\ &= \frac{1}{2}(\|[e_1, e_3']\|^2 - \|[e_1, e_2']\|^2) \sin 2t + \langle [e_1, e_2'], [e_1, e_3'] \rangle \cos 2t. \end{aligned} \tag{17}$$

Nyilvánvaló, hogy található olyan $t \in \mathbb{R}$, amelyre

$$\langle [e_1, e_2], [e_1, e_3] \rangle = 0 \tag{18}$$

és így az $[e_1, e_2], [e_1, e_3] \in \mathfrak{z}$ vektorok merőlegesek (miközben $[e_2, e_3] = 0$ összefüggés továbbra is teljesül). Ebből következik, hogy a $\mathfrak{z}$ centrumnak létezik olyan $\{e_4, e_5\}$ bázisa, melyre

$$[e_1, e_2] = \lambda\, e_4, \quad [e_1, e_3] = \mu\, e_5, \text{ ahol } \lambda \geq \mu > 0. \tag{19}$$

Jelöljük a fent leírt 5-dimenziós metrikus Lie-algebrát $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$-vel. Az előző számolások alapján bizonyíthatjuk a következőket.

38. ÁLLÍTÁS. *Tetszőleges* 5*-dimenziós kétlépcsős nilpotens* $\mathfrak{n}$ *metrikus Lie-algebra esetén, melynek centruma* 2*-dimenziós, léteznek olyan* $\lambda \geq \mu > 0$ *valós számok, hogy az* $\mathfrak{n}$ *izomorf az* $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ *metrikus algebrával. Az* $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ *és* $\mathfrak{n}_5(\lambda', \mu')$ *metrikus algebrák akkor és csakis akkor izometrikusan izomorfak, ha* $\lambda = \lambda'$ *és* $\mu = \mu'$*.*

A következőekben az $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ Lie-algebra ortogonális automorfizmusait határozzuk meg. Tetszőleges φ ortogonális automorfizmus megőrzi a $\mathfrak{z}$ centrumot, az $\mathfrak{a}$ ortogonális komplementumot, a 2-dimenziós kommutatív $\mathfrak{a}_2$ részalgebrát és ennek $\mathbb{R}e_1$ ortogonális komplementumát $\mathfrak{a}$-ban.

Ha $\lambda > \mu > 0$, akkor mivel a φ ortogonális automorfizmus megőrzi a (18) és (19) összefüggésket, invariánsan kell hagynia az $\mathbb{R}e_2, \mathbb{R}e_3, \mathbb{R}e_4$ és $\mathbb{R}e_5$ 1-dimenziós altereket. Ebből következik, hogy $\varphi(\mathbf{e}_i) = \varepsilon_i\, \mathbf{e}_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$, ahol $\varepsilon_i = \pm 1$. Mivel a φ felcserélhető a Lie-algebrán adott operátorral, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_4$ és $\varepsilon_1 \varepsilon_3 = \varepsilon_5$ egyenlőségek teljesülnek. Így az $\mathfrak{n}_5$ algebra ortogonális automorfizmusai

$$\left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3 = \pm 1 \right\}$$

mátrix alakban fejezhetőek ki.

Abban az esetben, ha $\lambda = \mu > 0$, a φ ortogonális leképezés, amely kielégíti a

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{e}_1) &= \varepsilon_1\mathbf{e}_1,\\ \varphi(\mathbf{e}_2) &= \varepsilon_2\cos t\,\mathbf{e}_2 + \varepsilon_2\sin t\,\mathbf{e}_3,\\ \varphi(\mathbf{e}_3) &= -\varepsilon_3\sin t\,\mathbf{e}_2 + \varepsilon_3\cos t\,\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

egyenleteket, ahol $(\varepsilon_1)^2 = (\varepsilon_2)^2 = (\varepsilon_3)^2 = 1$, csak akkor automorfizmus, ha a (19) összefüggéseket megőrzi φ, azaz

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{e}_4) &= \varepsilon_1\varepsilon_2\cos t\,\mathbf{e}_4 + \varepsilon_1\varepsilon_2\sin t\,\mathbf{e}_5,\\ \varphi(\mathbf{e}_5) &= -\varepsilon_1\varepsilon_3\sin t\,\mathbf{e}_4 + \varepsilon_1\varepsilon_3\cos t\,\mathbf{e}_5.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy az $\mathfrak{n}_5$ algebra ortogonális automorfizmusai a következő mátrix formájában adhatóak meg:

$$\left\{\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\cos t & -\varepsilon_3\sin t & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\sin t & \varepsilon_3\cos t & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2\cos t & -\varepsilon_1\varepsilon_3\sin t\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2\sin t & \varepsilon_1\varepsilon_3\cos t\end{pmatrix}\right\},$$

ahol $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1, t \in \mathbb{R}$.

39. Állítás. *Az $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ metrikus Lie-algebra ortogonális automorfizmusainak a csoportja a $\lambda \neq \mu$ esetben a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ csoporttal, $\lambda = \mu$ esetén az $O(2) \times \mathbb{Z}_2$ csoporttal izomorf.*

Felhasználva az (1) és (19) összefüggéseket láthatjuk, hogy tetszőleges $Z = \alpha e_4 + \beta e_5 \in \mathfrak{z}$ esetén a $j(Z)$, illetve a $j^2(Z)$ leképezések

$$\begin{aligned}j(Z) &= \begin{pmatrix}0 & -\alpha\lambda & -\beta\mu\\ \alpha\lambda & 0 & 0\\ \beta\mu & 0 & 0\end{pmatrix},\\ j^2(Z) &= \begin{pmatrix}-\alpha^2\lambda^2 - \beta^2\mu^2 & 0 & 0\\ 0 & -\alpha^2\lambda^2 & -\alpha\beta\lambda\mu\\ 0 & -\alpha\beta\lambda\mu & -\beta^2\mu^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

alakban fejezhetőek ki.

Könnyen belátható, hogy az $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ metrikus Lie-algebráknak megfelelő 5-dimenziós csoportok nem módosított H-típusú csoportok. Továbbá a [18] cikk eredményei alapján az is következik, hogy ezek a terek semmilyen esetben sem természetesen reduktívak.

4.2.3 3-dimenziós centrumú metrikus Lie-algebrák

Legyen az 5-dimenziós $\mathfrak{n}$ metrikus Lie-algebra centruma 3-dimenziós. Világos, hogy az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ kommutátorának dimenziójára a $\dim\{[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]\} = 1$ összefüggés teljesül. Jelölje $\mathfrak{b}$ az $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ kommutátorra vonatkozó ortogonális komplementumot a $\mathfrak{z}$ centrumban. Ekkor $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ és a $\mathfrak{h}_3 = \mathfrak{a} \oplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ részalgebra egy 3-dimenziós metrikus Heisenberg-algebra. Az $\mathfrak{n}$ metrikus Lie-algebra felbomlik a $\mathfrak{h}_3$ metrikus Heisenberg-algebra és a $\mathfrak{b}$ kommutatív metrikus algebra direkt összegére, azaz $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{b}$.

Egy $\varphi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{n}$ lineáris leképezés akkor és csak akkor ortogonális automorfizmusa az $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{b}$ metrikus Lie-algebrának, ha φ a $\mathfrak{h}_3$ metrikus Heisenberg-részalgebrán ortogonális automorfizmust indukál, a 2-dimenziós $\mathfrak{b}$ euklideszi téren pedig ortogonális operátor. Legyen $\{e_1, e_2\}$ az $\mathfrak{a}$ egy ortonormált bázisa és $e_3 \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ egységvektor úgy, hogy

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = \lambda\, e_3 \tag{20}$$

teljesül valamely $\lambda > 0$ esetén. Továbbá jelöljük $\{e_4, e_5\}$-tel a $\mathfrak{b}$ egy ortonormált bázisát, az előzőekben leírt Lie-algebrát pedig jelölje $(\mathfrak{h}_3)(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$.

Felhasználva a [20] cikkben szereplő eredményeket, illetve egyszerű számolások alapján kapjuk:

40. Állítás. *Tetszőleges* 5*-dimenziós kétlépcsős nilpotens* $\mathfrak{n}$ *metrikus Lie-algebra esetén, melynek centruma* 3*-dimenziós, létezik olyan* $\lambda > 0$

valós szám, amelyekre az $\mathfrak{n}$ *izomorf a* $\mathfrak{h}_3(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$ *metrikus algebrával. A* $\mathfrak{h}_3(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$ *és* $\mathfrak{h}_3(\lambda') \oplus \mathbb{R}^2$ *metrikus Heisenberg-algebrák akkor és csakis akkor izometrikusan izomorfak, ha* $\lambda = \lambda'$.

Bizonyítás. Az állítás első része az előző gondolatmenet alapján adódik.

A második rész bizonyításához tekintsük a $(\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}^2)(\lambda)$ és $(\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}^2)(\lambda')$ metrikus Lie-algebrákat, melyek ortonormált bázisai $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$, illetve $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4, \mathbf{e}'_5\}$. Feltehetjük az általánosság megsértése nélkül, hogy $\lambda, \lambda' > 0$. A

$$\varphi : \left(\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}^2\right)(\lambda) \to \left(\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}^2\right)(\lambda')$$

lineáris leképezés akkor és csak akkor izometrikus izomorfizmus, ha

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{e}_3) &= \varepsilon \mathbf{e}'_3, \quad \text{ahol } \varepsilon^2 = 1,\\
\varphi(\mathbf{e}_1) &= \cos\alpha \mathbf{e}'_1 + \sin\alpha \mathbf{e}'_2,\ \varphi(\mathbf{e}_2) = -\sin\alpha \mathbf{e}'_1 + \cos\alpha \mathbf{e}'_2 \text{ és}\\
\varphi([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]) &= [\varphi(\mathbf{e}_1), \varphi(\mathbf{e}_2)]\,.
\end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy $\lambda = \lambda'$. □

A Lie-algebra ortogonális automorfizmusa megőrzi a (20) összefüggést, így a φ a következő alakban áll elő:

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{e}_1) &= \varepsilon_1 \cos t\, \mathbf{e}_1 + \varepsilon_1 \sin t\, \mathbf{e}_2, \quad \varphi(\mathbf{e}_2) = -\varepsilon_2 \sin t\, \mathbf{e}_1 + \varepsilon_2 \cos t\, \mathbf{e}_2,\\
\varphi(\mathbf{e}_3) &= \varepsilon_1 \varepsilon_2\, \mathbf{e}_3,\\
\varphi(\mathbf{e}_4) &= \varepsilon_3 \cos s\, \mathbf{e}_4 + \varepsilon_3 \sin s\, \mathbf{e}_5, \quad \varphi(\mathbf{e}_5) = -\varepsilon_4 \sin s \mathbf{e}_4 + \varepsilon_4 \cos s\ \mathbf{e}_5,
\end{aligned}$$

ahol $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$, $\varepsilon_3 = \pm 1$, $\varepsilon_4 = \pm 1$.

41. Állítás. *A* $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2$ *metrikus Lie-algebra ortogonális automorfizmusainak csoportja izomorf az* $O(2) \times O(2)$ *csoporttal.*

A következőkben azt fogjuk bebizonyítani, hogy azon 5-dimenziós csoportok, melyek a $\mathfrak{h}_3(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$ metrikus algebrának felelnek meg, nem módosított Heisenberg-típusú csoportok. Felhasználva az (1) és (20) formulákat, a $j(e_3), j(e_4)$ és $j(e_5)$ leképezésekre a következő mátrix-reprezentációs alakokat kapjuk:

$$j(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad j(e_4) = j(e_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Láthatjuk, hogy tetszőleges $Z = \alpha e_3 + \beta e_4 + \gamma e_5 \in \mathfrak{z}$ esetén a $j^2(Z)$ leképezés

$$j^2(Z) = \begin{pmatrix} -\alpha^2\lambda^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2\lambda^2 \end{pmatrix}$$

alakban áll elő. Így a $-j^2(Z)$ leképezés pozitív szemidefinit. Másrészt ismeretes, hogy az összes ilyen tér természetesen reduktív.

4.2.4 Osztályozás izometria erejéig

Az előző alfejezetekben elmondott eredményeket a következő tételben összegezzük, mely az utolsó fejezet fő eredménye.

42. TÉTEL. *Az 5-dimenziós egyszeresen összefüggő kétlépcsős homogén nilsokaságok izometria erejéig az alábbiak lehetnek:*

$$\begin{aligned} (H_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &: \lambda \geq \mu > 0, \\ (N_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &: \lambda \geq \mu > 0, \\ \left(H_3 \times \mathbb{R}^2, \langle .,. \rangle_\lambda\right) &: \lambda > 0. \end{aligned}$$

Továbbá a megfelelő nilsokaságok teljes izometria-csoportjai

$$\begin{aligned} I(H_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &= \begin{cases} (U(2) \times \mathbb{Z}_2) \ltimes H_5, & \text{ha } \lambda = \mu, \\ (O(2) \times SO(2)) \ltimes H_5, & \text{ha } \lambda \neq \mu, \end{cases} \\ I(N_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &= \begin{cases} (O(2) \times \mathbb{Z}_2) \ltimes N_5, & \text{ha } \lambda = \mu, \\ (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \ltimes N_5, & \text{ha } \lambda \neq \mu, \end{cases} \\ I\left(H_3 \times \mathbb{R}^2, \langle .,. \rangle_\lambda\right) &= (O(2) \times O(2)) \ltimes \left(H_3 \times \mathbb{R}^2\right) \end{aligned}$$

alakban fejezhetőek ki.

Bizonyítás. A tétel az egyszeresen összefüggő kétlépcsős nilsokaságok és metrikus Lie-algebráik közötti egyértelmű kapcsolatból következik. Így a bizonyítás során elegendő a 35-41. Állításokat használni. □

5 Összefoglalás

A disszertáció 3 részből áll. Az irodalmi előzmények bemutatása után az első részben az A. Kaplan által bevezetett 6-dimenziós kétlépcsős nilsokaság, e tér általánosítása, illetve a C. Gordon által bevezetett 7-dimenziós kétlépcsős nilsokaság esetén megadtuk a

$$\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$$

$ad(H)$-invariáns leképezést, amelyre tetszőleges $X \in \mathfrak{n} \setminus \{0\}$ esetén az

$$X + \xi(X)$$

vektor geodetikus vektor (21. Tétel és 22. Tétel).

Az értekezés második részében a [13] cikk irányvonalát követve a balinvariáns $\langle .,. \rangle$ Riemann-metrikával ellátott kétlépcsős nilpotens N Lie-csoportok geodetikusait írtuk le, felhasználva a

$$\pi : N \to N/\mathcal{Z}$$

Riemann-szubmerziót, ahol $\mathcal{Z}$ jelöli az N centrumát. Elsőként megmutattuk, hogy az $N/\mathcal{Z}$ alapsokaság euklideszi tér.

Mivel a szubmerziókat a két alaptenzor T és A jellemzi, megadtuk a vizsgált esetben a kérdéses tenzorokat (26. Lemma):

A $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ Riemann-szubmerzió $e \in N$ egységelembeli $T|_e$ és $A|_e$ alaptenzoraira teljesülnek a

$$\begin{aligned} T|_e &= 0 \quad \text{és} \\ (A|_e)_{X+U}(Y+V) &= -\frac{1}{2}j(V)X \oplus \frac{1}{2}[X,Y] \end{aligned}$$

összefüggések, ahol $X, Y \in T_e^{(h)}N \cong \mathfrak{a}$ és $U, V \in T_e^{(v)}N \cong \mathfrak{z}$.

A T tenzormező balinvariáns tulajdonsága miatt az előző eredményből az is következik, hogy a T identikusan eltűnik. Az A

tenzormező balinvariáns tulajdonságát felhasználva, tetszőleges $X \oplus U$ pontban kifejeztük az $(A|_{X\oplus U})_{Y_1 \oplus Z_1}(Y_2 \oplus Z_2)$-t is (27. Lemma).

Az N kétlépcsős Riemann-nilsokaság tetszőleges $\alpha(s)$ geodetikusa esetén a $\pi \circ \alpha(s)$ projektált görbe $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ görbületeit kifejezve megmutattuk, hogy $\pi \circ \alpha(s)$ konstans görbületű az $N/\mathcal{Z}$ euklideszi téren (30. Állítás).

Az előbbi állításból adódott a 31. Következmény:

Az $\alpha(s) = X(s) \oplus U(s)$ geodetikus $\pi \circ \alpha(s)$ projektált görbéje az N/Z euklideszi téren akkor és csak akkor egyenes, ha

$$j(U(s_0))X(s_0) = 0$$

teljesül valamely s_0 pontban.

Végül bizonyítottuk e fejezet fő eredményt (34. Tétel), mely a 32. Állításból, valamint abból a tényből következik, hogy minden kétlépcsős nilpotens Lie-algebrából leválasztható egy Abel-faktor:

Legyen $\mathfrak{n}$ kétlépcsős nilpotens Lie-algebra, valamint N a megfelelő egyszeresen összefüggő nilpotens Lie-csoport. Jelölje $\mathcal{Z}$ az N centrumát. Az N geodetikusainak a $N/\mathcal{Z}$ euklideszi térbeli összes projekciója pontosan akkor síkgörbe, ha az N egy módosított Heisenberg-típusú csoport direkt összege az N euklideszi de Rahm-faktorával. Ebben az esetben a geodetikusok projekciói pontok, egyenesek vagy körök.

Az utolsó fejezetben izometria erejéig osztályoztuk az összes, balinvariáns metrikával ellátott, egyszeresen összefüggő, 5-dimenziós, kétlépcsős nilpotens Lie-csoportot. E. Wilson tétele alapján (lásd 2. Tétel) ez ekvivalens a megfelelő kétlépcsős nilpotens Lie-algebrák osztályozásával. Mivel egy 5-dimenziós kétlépcsős nilpotens Lie-algebra centruma legfeljebb 3-dimenziós lehet, így külön vizsgáltuk ezt a három esetet.

Az első esetben bebizonyítottuk a 35. Állítást:

Tetszőleges 5-dimenziós kétlépcsős nilpotens $\mathfrak{n}$ metrikus Lie-algebra esetén, melynek centruma 1-dimenziós, léteznek olyan $\lambda \geq \mu > 0$

valós számok úgy, hogy az $\mathfrak{n}$ izomorf a $\mathfrak{h}_5(\lambda,\mu)$ metrikus Heisenberg-algebrával.
A $\mathfrak{h}_5(\lambda,\mu)$ és $\mathfrak{h}_5(\lambda',\mu')$ metrikus Heisenberg -algebrák akkor és csakis akkor izometrikusan izomorfak, ha $\lambda=\lambda'$ és $\mu=\mu'$.

Továbbá megmutattuk azt is, hogy minden 5-dimenziós N Heisenberg-csoport, amely egy $\mathfrak{h}_5(\lambda,\mu)$ metrikus algebrának felel meg, módosított H-típusú csoport és természetesen reduktív is. Továbbá akkor és csakis akkor H-típusú csoport, ha $\lambda=\mu$ (36. Következmény). A $j^2(Z)$ lineáris operátor explicit megadását felhasználva bebizonyítottuk, hogy a $\mathfrak{h}_5(\lambda,\mu)$ metrikus Lie-algebra ortogonális automorfizmusainak a csoportja a $\lambda\neq\mu$ esetben az $O(2)\times SO(2)$ csoporttal, $\lambda=\mu$ esetén az $U(2)\times\mathbb{Z}_2$ csoporttal izomorf (37. Állítás).

Hasonlóan az előzőekhez, a 2-dimenziós centrumú Lie-algebrák esetén a következő eredményt kaptuk (38. Állítás):

Tetszőleges 5-dimenziós kétlépcsős nilpotens $\mathfrak{n}$ metrikus Lie-algebra esetén, melynek centruma 2-dimenziós, léteznek olyan $\lambda\geq\mu>0$ valós számok, hogy az $\mathfrak{n}$ izomorf az $\mathfrak{n}_5(\lambda,\mu)$ metrikus algebrával.
Az $\mathfrak{n}_5(\lambda,\mu)$ és $\mathfrak{n}_5(\lambda',\mu')$ metrikus algebrák akkor és csakis akkor izometrikusan izomorfak, ha $\lambda=\lambda'$ és $\mu=\mu'$.
Az $\mathfrak{n}_5(\lambda,\mu)$ metrikus Lie-algebráknak megfelelő 5-dimenziós csoportok nem módosított H-típusú csoportok, továbbá beláttuk, hogy az $\mathfrak{n}_5(\lambda,\mu)$ metrikus Lie-algebra ortogonális automorfizmusainak a csoportja a $\lambda\neq\mu$ esetben a $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ csoporttal izomorf, ha pedig $\lambda=\mu$, akkor az $O(2)\times\mathbb{Z}_2$ csoporttal (39. Állítás).

Az utolsó esetet vizsgálva megadtuk a 40-41. Állítások bizonyítását: Tetszőleges 5-dimenziós kétlépcsős nilpotens $\mathfrak{n}$ metrikus Lie-algebra esetén, melynek centruma 3-dimenziós, létezik olyan $\lambda>0$ valós szám, hogy az $\mathfrak{n}$ izomorf a $\mathfrak{h}_3(\lambda)\oplus\mathbb{R}^2$ metrikus algebrával. A $h_3(\lambda)\oplus\mathbb{R}^2$ és $\mathfrak{h}_3(\lambda')\oplus\mathbb{R}^2$metrikus Heisenberg-algebrák akkor és csakis akkor izometrikusan izomorfak, ha $\lambda=\lambda'$. A $\mathfrak{h}_3\oplus\mathbb{R}^2$ metrikus Lie-algebra ortogonális automorfizmusainak csoportja izomorf az $O(2)\times O(2)$ csoporttal.

Végül felhasználva az egyszeresen összefüggő kétlépcsős nilsokaságok és metrikus Lie-algebráik közötti egyértelmű megfeleltetést a fejezetben bizonyított eredményeket a 42. Tételben összegeztük:

Az 5-dimenziós egyszeresen összefüggő kétlépécsős homogén nilsokaságok izometria erejéig az alábbiak lehetnek:

$$\begin{aligned}
(H_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &: \lambda \geq \mu > 0, \\
(N_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &: \lambda \geq \mu > 0, \\
\left(H_3 \times \mathbb{R}^2, \langle .,. \rangle_{\lambda}\right) &: \lambda > 0.
\end{aligned}$$

Továbbá a megfelelő nilsokaságok teljes izometria-csoportjai

$$\begin{aligned}
I(H_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &= \begin{cases} (U(2) \times \mathbb{Z}_2) \ltimes H_5, & \text{ha } \lambda = \mu, \\ (O(2) \times SO(2)) \ltimes H_5, & \text{ha } \lambda \neq \mu, \end{cases} \\
I(N_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &= \begin{cases} (O(2) \times \mathbb{Z}_2) \ltimes N_5, & \text{ha } \lambda = \mu, \\ (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \ltimes N_5, & \text{ha } \lambda \neq \mu, \end{cases} \\
I\left(H_3 \times \mathbb{R}^2, \langle .,. \rangle_{\lambda}\right) &= (O(2) \times O(2)) \ltimes \left(H_3 \times \mathbb{R}^2\right)
\end{aligned}$$

alakban fejezhetőek ki.

6 Summary

The aim of this PhD dissertation is to investigate geodesics and isometries of some two-step Riemannian nilmanifolds.

It is known that naturally reductive spaces form a proper subclass of the class of geodesic orbit (g.o.) spaces, the difference can be described in terms of "geodesic vectors" and "geodesic graphs". If $(G/H, g)$ is a Riemannian g.o. space, then a vector $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ is called a *geodesic vector* if the curve $\exp(tX)(p)$ is a geodesic, where p is a fixed point. A *geodesic graph* is an $ad(H)$-equivariant map

$$\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$$

such that for any $X \in \mathfrak{n} \setminus \{0\}$

$$X + \xi(X)$$

is a geodesic vector. This map is either linear (and the space is naturally reductive with respect to some reductive decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}' + \mathfrak{h}$) or it is non-differentiable at the origin.

In the first part we describe the geodesic graphs of some two-step Riemannian nilmanifolds, namely in the case of a 6-dimensional two-step nilmanifold with 2-dimensional center (which was introduced by A. Kaplan, c.f. [15]), in the case of its generalization in dimension 6 and in the case of a 7-dimensional two-step nilmanifold, which was constructed by C. Gordon (c.f. [9]) in the framework of the general theory of g.o. spaces. These manifolds are examples for Riemannian geodesic orbit spaces which are in no way naturally reductive, hence the geodesic graphs are non-linear, more precisely (21. Tétel):

If $(N, \langle ., . \rangle)$ is a 6-dimensional Riemannian two-step nilmanifold with a 2-dimensional center, then there exists an $ad(H)$-equivariant $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ map such that for any $X + Z \in n \setminus \{0\}$ the curve

$$\exp(t((X + Z) + \xi(X + Z))) \cdot p$$

is geodesic, i. e.

$$(X+Z)+\xi(X+Z)$$

is a geodesic vector. Namely

1. If $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq 0 \in \mathfrak{a}$ *and* $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}$ *then*

$$\xi(X+Z) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & -\gamma & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \gamma & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\gamma & -\beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

where

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-z_1(x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2)-2z_2(x_1x_2+x_0x_3)}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \\ \beta &= \frac{z_2(x_3^2+x_1^2-x_2^2-x_0^2)-2z_1(x_1x_2-x_0x_3)}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}, \\ \gamma &= \frac{2z_2(x_0x_1-x_2x_3)-2z_1(x_0x_2+x_1x_3)}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}. \end{aligned}$$

2. If $X = 0 \in \mathfrak{a}$ *and* $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}$ *then*

$$\xi(Z) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Similar to the above-mentioned case we can give the explicit expression of the *ad*(H)*-equivariant* $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ *map* of the 7-dimensional two-step nilmanifold with 3-dimensional center which was introduced in [9] (22. Tétel).

In the second part of the dissertation we describe (according to the paper [13]) the geodesics of two-step nilpotent Lie groups N with respect to left invariant Riemannian metrics $\langle .,. \rangle$ using the Riemannian submersion structure of the fiber bundle

$$\pi : N \to N/\mathcal{Z},$$

where $\mathcal{Z}$ denotes the center of N. We can see that the points of the base space $N/\mathcal{Z}$ can be identified with the vectors of the space $\mathfrak{a}$. Moreover we show that the Riemannian scalar product on the factor space $N/\mathcal{Z}$ is constant, hence $N/\mathcal{Z}$ is an Euclidean space. In the proof of this fact we use our following result (25. Lemma):

Let $X(t)$ *be a differentiable curve in the factor space* $N/\mathcal{Z}$*. We denote by*

$$\tau_{t_0,t} : \pi^{-1}(X(t_0) \oplus 0) \to \pi^{-1}(X(t) \oplus 0)$$

the map which is determined by the horizontal lifts to N *of the base curve* $X(t)$*. Then we have for arbitrary* $Z \in \mathfrak{z}$

$$\tau_{t_0,t}(X(t_0) \oplus Z) = X(t) \oplus \left(Z + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} [X(u), X'(u)] du \right).$$

The character of a submersion can be described by its fundamental tensors T and A. The tensor T is determined by the *second fundamental form* of the fibers $\pi^{-1}(b)$ and A is the *integrability tensor* of the horizontal distribution $\mathfrak{H}$ on M. Using the properties of T and A one can express these tensors in our case. More precisely we have the following proposition (26. Lemma):

The fundamental tensors $T|_e$ *and* $A|_e$ *of the Riemannian submersion* $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ *at the identity element* $e \in N$ *satisfy*

$$T|_e = 0 \quad \text{and} \quad (A|_e)_{X+U}(Y+V) = -\frac{1}{2}j(V)X \oplus \frac{1}{2}[X,Y]$$

for all $X, Y \in T_e^{(h)}N \cong \mathfrak{a}$ *and* $U, V \in T_e^{(v)}N \cong \mathfrak{z}$.

Since the tensorfield T is left invariant, it follows from the abovementioned result that T vanishes identically. The tensorfield A is also left invariant, hence one can express $(A|_{X\oplus U})_{Y_1\oplus Z_1}(Y_2 \oplus Z_2)$ at an arbitrary point $X \oplus U$ using the shape of the left multiplication map (cf. 27. Lemma). This map satisfies the following relation:

$$(\lambda_{X\oplus U})_*|_{0\oplus 0}(Y \oplus V) = Y \oplus (V + \frac{1}{2}[X,Y]).$$

Using the shape of the tensors T respectively A and the results of B. O'Neill on the differential equations of geodesics of the total space N of $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ (cf. [28]), we obtain (29. Lemma):

If the curve $X(s) \oplus U(s)$ *is a geodesic of the Riemannian two-step nilmanifold* N *then it is the image*

$$\{\psi(s, sW_0);\ s \in \mathbb{R}\} = \{\tau_{s_0,s} sW_0;\ s \in \mathbb{R}\}$$

in the submanifold

$$\bigcup_{s\in\mathbb{R}} \pi^{-1}(X(s) \oplus 0) \subset N$$

of a line

$$\{(s, sW_0);\ s \in \mathbb{R}\}$$

of the Euclidean space

$$\mathbb{R} \times \pi^{-1}(\pi^{-1}(X(s_0) \oplus 0)).$$

Then we define the curvatures $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ of the curve $\pi \circ \alpha(s)$ recursively and we can show the following result (30. Állítás).

The projection $\pi\circ\alpha(s)$ of any geodesic $\alpha(s)$ has constant curvatures in the Euclidean space $N/\mathcal{Z}$.

Moreover we obtain (31. Következmény):

The projection $\pi \circ \alpha(s)$ of a geodesic $\alpha = X(s) \oplus U(s)$ into the Euclidean space $N/\mathcal{Z}$ is an Euclidean line if and only if

$$j(U(s_0))X(s_0) = 0$$

is satisfied in a point t_0.

To characterize two-step nilmanifolds $(N, \langle .,. \rangle)$ which have the property that the projections of geodesics of N onto the factor space $N/\mathcal{Z}$ are points, Euclidean lines or circles, we prove (32. Állítás):

The projections of geodesics are points, lines or circles in the Euclidean space $N/\mathcal{Z}$ if and only if

$$j(U)^2 = -q(U)id_{\mathfrak{a}},$$

where $q(U)$ is a positive semidefinite quadratic form on $\mathfrak{z}$.

We apply the previous proposition and the fact that one may always split off an Abelian factor from a two-step nilpotent Lie-algebra and we are able to prove one of our main result (34. Tétel:

All projections of the geodesics of N onto the Euclidean space $N/\mathcal{Z}$ are planar curves if and only if N is a direct sum of a modified H-type group with the Euclidean de Rahm factor of N. In this case the projections of geodesics are points, lines or circles.

In the third part of our dissertation we have classified all simply connected two-step nilpotent Lie groups of dimension 5 equipped with left-invariant metrics ("two-step nilmanifolds") up to isometry. According to Wilson's Theorem (cf. 2. Tétel) this is equivalent to the classification of the corresponding metric Lie-algebras. Clearly, the dimension of the center of a 5-dimensional two-step nilpotent Lie-algebra is not greater than 3, we consider separately the cases where the dimension of the center is $1, 2$ or 3.

In the first case we denote by $\mathfrak{h}_5$ a 5-dimensional Lie-algebra the center $\mathfrak{z}$ of which is one-dimensional. We assume that $\mathfrak{h}_5$ is equipped with an inner product $\langle , \rangle$. Let e_5 be a unit vector in $\mathfrak{z}$ and let $\mathfrak{a}$ be the orthogonal complement of $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{h}_5$. We show there exists an orthonormal basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ of $\mathfrak{a}$ such that

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = \lambda\, e_5, \quad [e_3, e_4] = -[e_4, e_3] = \mu\, e_5,$$

$$[e_1, e_3] = [e_1, e_4] = [e_2, e_3] = [e_2, e_4] = 0.$$

Moreover we can assume that $\lambda \geq \mu > 0$. A *metric Heisenberg algebra of type* (λ, μ) is defined as a 5-dimensional metric Lie-algebra having an orthonormal basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ satisfying the commutation relations (15) and (16), where $\lambda \geq \mu > 0$. We will denote it by $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$. Then we get the following proposition (35. Állítás):

For any 5-dimensional 2-step nilpotent metric Lie-algebra $\mathfrak{n}$ with 1-dimensional center there exist real numbers $\lambda \geq \mu > 0$ such that $\mathfrak{n}$ is isomorphic to the metric Heisenberg algebra $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$.
The metric Heisenberg algebras $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ and $\mathfrak{h}_5(\lambda', \mu')$ are isometrically isomorphic if and only if $\lambda = \lambda'$ and $\mu = \mu'$.

Moreover from the computations of the proof and also from [18] we get the following (36. Következmény):

Each 5-dimensional Heisenberg group space N corresponding to a metric algebra $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ is a modified H-type group and it is naturally reductive. It is an H-type group if and only if $\lambda = \mu$.

Using the shape of the linear operator $j^2(Z)$ we obtain (37. Állítás):

The group of orthogonal automorphisms of the metric Lie-algebra $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ is isomorphic to the group $O(2) \times SO(2)$ for $\lambda \neq \mu$, and it is isomorphic to the group $U(2) \times \mathbb{Z}_2$ for $\lambda = \mu$.

Let $\mathfrak{n}_5$ denote a 5-dimensional Lie-algebra the center $\mathfrak{z}$ of which is two-dimensional. We assume that $\mathfrak{n}_5$ is equipped with an inner product $\langle , \rangle$. One can show there is an orthonormal basis $\{e_4, e_5\}$ of $\mathfrak{z}$

such that

$$[e_1, e_2] = \lambda\, e_4, \quad [e_1, e_3] = \mu\, e_5, \quad \lambda \geq \mu > 0.$$

We denote a 5-dimensional metric Lie-algebra described above by $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$. Similar to the first case we obtain at once (38. Állítás):

For any 5-dimensional 2-step nilpotent metric Lie-algebra $\mathfrak{n}$ having a 2-dimensional center there exist real numbers $\lambda \geq \mu > 0$ such that $\mathfrak{n}$ is isomorphic to the metric algebra $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$. Moreover the metric Heisenberg Lie-algebras $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ and $\mathfrak{n}_5(\lambda', \mu')$ are isometrically isomorphic if and only if $\lambda = \lambda'$ and $\mu = \mu'$.

We see that the 5-dimensional group spaces corresponding to the metric algebras $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ are not modified H-type groups. From [18] we also see easily that these spaces are never naturally reductive. Moreover we prove (39. Állítás):

The group of orthogonal automorphisms of the metric Lie-algebra $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ is isomorphic to the group $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ for $\lambda \neq \mu$, and it is isomorphic to the group $O(2) \times \mathbb{Z}_2$ for $\lambda = \mu$.

Finally we deal with 5-dimensional metric Lie-algebras with 3-dimensional center. In this case the metric Lie-algebra $\mathfrak{n}$ decomposes into the orthogonal direct sum $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{b}$ of the metric Heisenberg subalgebra $\mathfrak{h}_3$ and of the abelian metric algebra $\mathfrak{b}$, where $\mathfrak{b}$ denotes the orthogonal component of $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ in the center $\mathfrak{z}$.
Let $\{e_1, e_2\}$ be an orthonormal basis for $\mathfrak{a}$ and $e_3 \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ a unit vector such that

$$[e_1, e_2] = -\,[e_2, e_1] = \lambda\, e_3 \tag{21}$$

with $\lambda > 0$. Moreover we denote by $\{e_4, e_5\}$ an orthonormal basis for $\mathfrak{b}$. The corresponding Lie-algebra will be denoted by $(\mathfrak{h}_3)\,(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$. Then we get (40. Állítás and 41. Állítás):

For any 5-dimensional 2-step nilpotent metric Lie-algebra $\mathfrak{n}$ having a 3-dimensional center there exist a real number $\lambda > 0$ such that $\mathfrak{n}$ is

isomorphic to the metric algebra $\mathfrak{h}_3(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$. *The metric Heisenberg Lie-algebras* $\mathfrak{h}_3(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$ *and* $\mathfrak{h}_3(\lambda') \oplus \mathbb{R}^2$ *are isometrically isomorphic if and only if* $\lambda = \lambda'$.
The group of orthogonal automorphisms of the metric Lie-algebra $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2$ *is isomorphic to the group* $O(2) \times O(2)$.

Using the one-to-one correspondence between simply connected two-step nilmanifolds and metric Lie-algebras we can summarize our results in the main theorem of the last section (42. Tétel):

The simply connected two-step homogeneous nilmanifolds of dimension 5 *are, up to isometry,*

$$\begin{aligned} (H_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &\ :\ \lambda \geq \mu > 0, \\ (N_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &\ :\ \lambda \geq \mu > 0, \\ \left(H_3 \times \mathbb{R}^2, \langle .,. \rangle_{\lambda}\right) &\ :\ \lambda > 0. \end{aligned}$$

Furthermore the full isometry groups of the corresponding nilmanifolds are expressed by:

$$\begin{aligned} I(H_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &= \begin{cases} (U(2) \times \mathbb{Z}_2) \ltimes H_5, & \text{if } \lambda = \mu, \\ (O(2) \times SO(2)) \ltimes H_5, & \text{if } \lambda \neq \mu, \end{cases} \\ I(N_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &= \begin{cases} (O(2) \times \mathbb{Z}_2) \ltimes N_5, & \text{if } \lambda = \mu, \\ (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \ltimes N_5, & \text{if } \lambda \neq \mu, \end{cases} \\ I\left(H_3 \times \mathbb{R}^2, \langle .,. \rangle_{\lambda}\right) &= (O(2) \times O(2)) \ltimes \left(H_3 \times \mathbb{R}^2\right). \end{aligned}$$

Irodalomjegyzék

[1] W. AMBROSE, I. M. SINGER, *On homogeneous Riemannian manifolds*, Duke Math. J. **25** (1958), 647-669.

[2] J. BERNDT, F. TRICERRI and L. VANHECKE, *Generalized Heisenberg Groups and Damek-Ricci Harmonic Spaces*, Lecture Notes in Mathematics 1598, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1995).

[3] Z. DUSEK, O. KOWALSKI and S. Z. NIKCEVIC, *New examples of Riemannian g.o. nilmanifolds in dimension* 7, Diff. Geom. Appl. **21** (2004), 65-78.

[4] J. E. D'ATRI, W. ZILLER, *Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups.* Mem. Amer. Math. Soc. 18, 215 (1979).

[5] L. DeMEYER *Closed geodesics in compact nilmanifolds*, manuscripta math. **105** (2001), 283-310.

[6] P. EBERLEIN, *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.,4^e série, t. **27** (1994), 611-660.

[7] P. EBERLEIN, *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric II*, Trans. Amer. Math. Soc. **343** (1994), 805-828.

[8] P. EBERLEIN, *Riemannian submersions and lattices in 2-step nilpotent Lie groups*, Comm. Analysis and Geom. **11** (2003), 441-488.

[9] C. S. GORDON, *Homogeneous Riemannian manifolds whose geodesics are orbits*, Topics in Geometry, in Memory of Joseph D'Atri, Birkhauser (1996), 155-174.

[10] R. GORNET, M. B. MAST, *The length spectrum of Riemannian two-step nilmanifolds*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4^e série, t. **33** (2000), 181-209.

[11] S. HOMOLYA, *Geodesic vectors of the six-dimensional spaces*, Steps in Differential Geometry, Proc. of the Coll. on Diff. Geom. Debrecen (2001), 139-146.

[12] S. HOMOLYA, O. KOWALSKI, *Simply connected two-step homogeneous nilmanifolds of dimension 5*, Note di Matematica, **26(1)** (2006), 66-77.

[13] S. HOMOLYA, P. T. NAGY, *Submersions on nilmanifolds and their geodesics*, Publ. Math. Debrecen, **62/3-4** (2003), 415-428.

[14] A. KAPLAN, *Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules*, Geometriae Dedicata **11** (1981), 127-136.

[15] A. KAPLAN, *On the geometry of groups of Heisenberg type*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 35-42.

[16] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry II.* Interscience Publishers, New York, 1980.

[17] O. KOWALSKI , *Spaces with volume-preserving symmetries and related classes of Riemannian manifolds*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Fascicolo Speciale Settembre (1983), 131-158.

[18] O. KOWALSKI and L. VANHECKE, *Classification of five-dimensional naturally reductive spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **97** (1985), 445-463.

[19] O. KOWALSKI and L. VANHECKE, *Riemannian manifolds with homogeneous geodesics*, Boll. Un. Math. Ital. B(7) **5** (1991), 189-224.

[20] J. LAURET, *Homogeneous nilmanifolds of dimension 3 and 4*, Geometriae Dedicata **68** (1997), 145-155.

[21] J. LAURET, *Modified H-type groups and symmetric-like Riemannian spaces*, Diff. Geom. Appl. **10** (1999), 121-143.

[22] K. LEE and K. PARK *Smoothly closed geodesics in 2-step nilmanifolds*, Indiana Univ. Math. J. **45** (1996), 1-14.

[23] L. MAGNIN, *Sur les algébres de Lie nilpotents de dimension* ≤ 7, J. Geom. Phys. **3/1** (1986), 119-144.

[24] M. MAST *Closed geodesics in 2-step nilmanifolds*, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 885-911.

[25] Z. MUZSNAY and P. T. NAGY, *Invariant Shen connections and geodesic orbit spaces*, Periodica Math. Hung. **51(1)** (2005), 37-51.

[26] P. T. NAGY, *Non-horizontal geodesics of a Riemannian submersion*, Acta Sci. Math. **45** (1983), 347-355.

[27] K. NOMIZU, *Invariant affine connections on homogeneous spaces,* Amer. J. Math. **76** (1954), 33-65.

[28] B. O'NEILL, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. **13** (1966), 459-469.

[29] B. O'NEILL, *Submersions and geodesics*, Duke Math. J. **34** (1967), 363-373.

[30] J. SZENTHE, *A homogén terek elméletének egyes kérdéseiről*, Budapest (1976).

[31] J. SZENTHE, *Sur la connection naturelle a torsion nulle*, Acta Sci. Math. (Szeged) **38** (1976), 383-398.

[32] F. TRICERRI, L. VANHECKE, *Homogeneous structures on Riemannian manifolds*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. **83** (1983), Cambridge University Press, Cambridge.

[33] E. WILSON, *Isometry groups on homogeneous nilmanifolds*, Geometriae Dedicata **12** (1982), 337-346

Kétlépcsős Riemann-nilsokaságok geodetikusairól és izometriáiról.

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban.

Írta: Homolya Szilvia okleveles matematika-német szakos középiskolai tanár.

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és számítástudományi Doktori Iskola
Matematika doktori programja Differenciálgeometria és alkalmazásai alprogramja
keretében.

Témavezető: Dr. Nagy Péter Tibor

A doktori szigorlati bizottság:
elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

A doktori szigorlat időpontja: 200. . . ..
Az értekezés bírálói:
Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

A bírálóbizottság:
elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 200. . . ..