Egyetemi doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

On the equality and invariance problem of two variable means and perturbation of monotonic functions

Makó Zita

Témavezető: Dr. Páles Zsolt

DEBRECENI EGYETEM

Matematikai és Számítástudományi Doktori Iskola

Debrecen, 2009

Preliminaries and aims of the dissertation

1. A. On the equality problem for two variable means

Let I be an open real interval, and let $\mathcal{CM}(I)$ denote the class of real valued continuous strictly monotone functions defined on I.

DEFINITION. Given $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$, the *two variable quasi-arithmetic mean* generated by φ is the function $M_\varphi : I^2 \to I$ defined by

$$M_\varphi(x,y) = \mathcal{M}_\varphi(x,y) := \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) \qquad (x,y \in I),$$

where φ^{-1} denotes the inverse if the function φ.

The systematic treatment of quasi-arithmetic means was first given by Hardy, Littlewood and Pólya [**13**]. The most basic problem, the characterization of the equality of these means, is solved by the following theorem.

THEOREM A. *(Hardy–Littlewood–Pólya) Let $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$. Then the means M_φ and M_ψ are equal to each other if and only if there exist two real constants $a \neq 0$ and b such that $\psi = a\varphi + b$.*

Another class of means whose definition is related to the Lagrange mean value theorem were introduced by Berrone and Moro [**6**], [**5**].

DEFINITION. A two-variable function $M : I^2 \to I$ is called a *Lagrangian mean* on I if there exists a continuous strictly monotone function $\varphi : I \to \mathbb{R}$ such that

$$M(x,y) = \mathcal{L}_\varphi(x,y) := \begin{cases} \varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y \varphi(t)dt\right) & \text{if } x \neq y \\ x & \text{if } x = y \end{cases} \qquad (x,y \in I).$$

The equality of Lagrangian means is characterized by the following result of the paper.

THEOREM B. *(Berrone–Moro) Let $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$. Then the means L_φ and L_ψ are equal to each other if and only if there exist two real constants $a \neq 0$ and b such that $\psi = a\varphi + b$.*

1. B. Invariance equation for two variable means

The *invariance equation* involving three two-variable means $M, N, K : I^2 \to I$ is the following identity

$$K\big(M(x,y), N(x,y)\big) = K(x,y) \qquad (x,y \in I).$$

If this equation holds then we say that K *is invariant with respect to the means* M, N. The particular case, when K is the arithmetic mean and M, N are quasi-arithmetic mean, i.e., when

$$M(x,y) + N(x,y) = x + y \qquad (x, y \in I)$$

holds, was investigated by Sutô [**30**], [**31**] and Matkowski in several papers [**22**], [**23**], therefore the above equation will be called the Matkowski–Sutô equation in the sequel.

The simplest example when the invariance equation holds is the well-known identity

$$\mathcal{G}(x,y) = \mathcal{G}\big(\mathcal{A}(x,y), \mathcal{H}(x,y)\big) \qquad (x, y > 0),$$

where $\mathcal{A}, \mathcal{G}$, and $\mathcal{H}$ stand for the two-variable arithmetic, geometric, and harmonic means, respectively. Another less trivial invariance equation is the identity

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{G}(x,y) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{G}\big(\mathcal{A}(x,y), \mathcal{G}(x,y)\big) \qquad (x, y > 0),$$

where $\mathcal{A} \otimes \mathcal{G}$ denotes Gauss' *arithmetic-geometric mean* defined by

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{G}(x,y) = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2\cos^2 t + y^2 \sin^2 t}}\right)^{-1} \qquad (x, y > 0).$$

The invariance of the arithmetic mean $\mathcal{A}$ with respect to two quasi-arithmetic means was first investigated by Matkowski [**22**] under twice continuous differentiability assumptions concerning the generating functions of the quasi-arithmetic means. These regularity assumptions were weakened step-by-step by Daróczy, Maksa, and Páles in the papers [**8**], [**9**], and finally in 2002 Daróczy and Páles proved ([**10**]) that the solutions are equivalent either to linear or to exponential functions.

We consider the common generalization of quasi-arithmetic and Lagrangian means. The one of the aims of the dissertation is to investigate the equality and invariance problem of generalized quasi-arithmetic means. These results can be found in the papers [**20**], [**21**].

2. Lipschitz perturbation

The stability theory of functional inequalities started with the paper of Hyers and Ulam [**14**] (cf. also [**12**]). They discovered that the so-called δ-convex functions can be decomposed as the sum of a convex and a bounded function if the underlying space is of finite dimension. A more general form of this stability theorem has recently been obtained in [**29**], where the stability of convex functions was investigated under Lipschitz perturbations. A useful auxiliary concept introduced in [**29**] was the notion of

ϵ-monotonicity which leaded to the stability properties of monotonic functions. A function $p : I \to \mathbb{R}$ is called ϵ-increasing if

$$p(x) \leq p(y) + \epsilon$$

holds for all $x \leq y$. It turned out in [**29**] that ϵ-increasing functions are closely related to increasing functions, more precisely, p is ϵ-increasing if and only if $p = q + h$, where q is an increasing function and h is a bounded function with $||h|| \leq \epsilon/2$.

Motivated by the above theorem, we investigate when a function p can be written in the form $p = q + \ell$, where q is increasing and ℓ is d-Lipschitz (i.e., it satisfies

$$|\ell(x) - \ell(y)| \leq d(x, y)$$

for $x, y \in I$.) Here $d : I^2 \to \mathbb{R}$ is assumed to be a semimetric on I. Our main results offer necessary and sufficient conditions for the above decomposability in the cases of general semimetrics and concave semimetrics. The results can be found in the paper [**19**].

New results of the dissertation

1. On the equality and invariance problem of generalized quasi-arithmetic means

One of the aims of the dissertation is to investigate the equality and invariance problem of generalized quasi-arithmetic means. We define the generalized quasi-arithmetic means as follows.

DEFINITION. Given a continuous strictly monotone function $\varphi : I \to \mathbb{R}$ and a probability measure μ on the Borel subsets of $[0,1]$, the two variable mean $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} : I^2 \to I$ is defined by

$$\mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x,y) := \varphi^{-1}\Big(\int_0^1 \varphi\big(tx+(1-t)y\big)d\mu(t)\Big) \qquad (x,y \in I).$$

If $\mu = \dfrac{\delta_0+\delta_1}{2}$, then $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_\varphi$.

If $\mu =$ Lebesgue measure on $[0,1]$, then $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{L}_\varphi$.

The first part of the first chapter contains the most important notations and basic results, which we need to present our results.

Given a Borel probability measure μ on the interval $[0,1]$, we define the *kth moment* and the *kth centralized moment* of μ by

$$\widehat{\mu}_k := \int_0^1 t^k d\mu(t), \quad \mu_k := \int_0^1 (t-\widehat{\mu}_1)^k d\mu(t) \quad (k \in \mathbb{N}\cup\{0\}).$$

The reflection of the measure μ with respect to the point $1/2$ is defined by

$$\widetilde{\mu}(A) = \mu(\widetilde{A}),$$

where A is an arbitrary Borel subset of $[0,1]$ and $\widetilde{A} := 1 - A := \{1-x \mid x \in A\}$.

To formulate the main results of this chapter, we consider the cases when the first n moments of the measures μ and ν in the equality problem are identical. For $n \in \mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$, we say that the *nth-order moment condition* $\mathcal{M}_n$ *holds* if μ,ν are Borel probability measures on $[0,1]$, furthermore,

$$\widehat{\mu}_k = \widehat{\nu}_k \quad \text{for all} \quad 1 \le k \le n.$$

Thus the $\mathcal{M}_\infty$ condition means that all the moments of μ and ν are equal, whence, by well-known results of measure and approximation theory, the equality of the two measure μ and ν follows. On the other hand, the condition $\mathcal{M}_0$ simply means that μ,ν are probability measures on the Borel subsets of $[0,1]$. For $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, we say that the *exact nth-order moment condition* $\mathcal{M}_n^*$ *holds* if $\mathcal{M}_n$ is valid but $\mathcal{M}_{n+1}$ fails, i.e.,

$$\widehat{\mu}_k = \widehat{\nu}_k \quad \text{for all} \quad 1 \leq k \leq n \qquad \text{and} \qquad \widehat{\mu}_{n+1} \neq \widehat{\nu}_{n+1}.$$

In order to describe the various regularity conditions on the two unknown functions φ and ψ, for $\in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, we say that the *$n$th-order regularity condition* $\mathcal{C}_n$ *holds* if $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ are n-times continuously differentiable functions with non-vanishing first-order derivatives. For convenience, we also say that $\mathcal{C}_0$ holds if $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ are just continuous strictly monotone functions.

In our first result, we compute the first partial derivatives of the mean $\mathcal{M}_{\varphi,\mu}$ at a point of the diagonal of $I \times I$ under a weak regularity assumption.

LEMMA. Let μ be a Borel probability measure, let $\varphi : I \to \mathbb{R}$ be a continuous strictly monotone function and assume that φ is differentiable at a point $p \in I$ and $\varphi'(p) \neq 0$. Then $\partial_1 \mathcal{M}_{\varphi,\mu}(p,p) = \widehat{\mu}_1$.

In the second part of the first chapter we characterize those pairs (φ, μ) and (ψ, ν) such that

$$\mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x,y) = \mathcal{M}_{\psi,\nu}(x,y) \quad (x, y \in I)$$

holds.

In the following result we obtain the first necessary condition for the equality of the generalized quasi-arithmetic means. This shows that, under weak regularity assumptions, there is no solution of the equality problem if the exact moment condition $\mathcal{M}_0^*$ holds.

COROLLARY. *Assume $\mathcal{C}_0$ and $\mathcal{M}_0$. Suppose that there exists a point $p \in I$ such that φ and ψ are differentiable at p and $\varphi'(p)\psi'(p) \neq 0$. Then, in order that $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ be valid, it is necessary that*

$$\widehat{\mu}_1 = \widehat{\nu}_1,$$

i.e., $\mathcal{M}_1$ be satisfied.

In our next result, assuming $\mathcal{C}_1$, we obtain a characterization of the equality problem that does not involve the inverses of the unknown functions φ and ψ.

THEOREM. *Assume $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{M}_1$. Then $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ holds for all $x, y \in I$ if and only if*

$$\int_0^1 \int_0^1 (t-s)\varphi'\big(tx + (1-t)y\big)\psi'\big(sx + (1-s)y\big)d\mu(t)d\nu(s) = 0.$$

Assuming $\mathcal{C}_{n+1}$, we now deduce further conditions that are necessary for the equality problem.

THEOREM. *Assume $\mathcal{C}_{n+1}$ for some $n \in \mathbb{N}$ and $\mathcal{M}_1$. Then, in order that $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ be valid, it is necessary that*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \big(\mu_{i+1}\nu_{n-i} - \mu_i \nu_{n+1-i}\big) \frac{\varphi^{(i+1)}}{\varphi'} \cdot \frac{\psi^{(n+1-i)}}{\psi'} = 0. \tag{1}$$

Conversely, if φ, ψ are analytic functions and (1) *holds for all $n \in \mathbb{N}$, then $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ is satisfied.*

In this section we solve the equality problem, if the two measures μ and ν coincide.

THEOREM. *Assume $\mathcal{C}_0$ and $\mathcal{M}_\infty$. Then $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ holds if and only if*

(i) either $\mu = \nu = \delta_\tau$ for some $\tau \in [0, 1]$ and φ, ψ are arbitrary,

(ii) or $\mu = \nu$ is not a Dirac measure and there exist constants $a \neq 0$ and b such that

$$\psi = a\varphi + b.$$

If at least the first two moments of the measures μ and ν are the same but the measures are not identical. The investigation of this case requires twice continuous differentiability of the unknown functions φ and ψ.

THEOREM. *Assume $\mathcal{C}_2$ and $\mathcal{M}_n^*$ for some $2 \leq n < \infty$. Then $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ holds if and only if there exist constants $a \neq 0$ and b such that*

$$\psi = a\varphi + b$$

and φ is a polynomial with $\deg \varphi \leq n$.

In the investigation of this case we consider two subcases according as $\mu_2\nu_2 = 0$, respectively $\mu_2\nu_2 \neq 0$.

THEOREM. *Assume $\mathcal{C}_2$ and $\mathcal{M}_1^*$ with $\mu_2\nu_2 = 0$. Then $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ holds if and only if*

(i) either μ and ψ are arbitrary, $\nu = \delta_{\widehat{\mu}_1}$, and there exist constants $a \neq 0$ and b such that

$$\varphi(x) = ax + b \qquad (x \in I),$$

(ii) or ν and φ are arbitrary, $\mu = \delta_{\widehat{\nu}_1}$, and there exist constants $c \neq 0$ and d such that

$$\psi(x) = cx + d \qquad (x \in I).$$

In the following result we derive further necessary conditions for the equality problem.

THEOREM. *Assume* $\mathcal{C}_2$ *and* $\mathcal{M}_1$ *with* $\mu_2\nu_2 \neq 0$ *and assume that* $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ *holds. Then*

$$\nu_2 \frac{\psi''}{\psi'} = \mu_2 \frac{\varphi''}{\varphi'} =: \Phi.$$

If $\mathcal{C}_3$ *is valid then the function* $\Phi : I \to \mathbb{R}$ *introduced above satisfies the differential equation*

$$\left(\frac{\mu_3}{\mu_2} - \frac{\nu_3}{\nu_2}\right)\Phi' + \left(\frac{\mu_3}{\mu_2^2} - \frac{\nu_3}{\nu_2^2}\right)\Phi^2 = 0.$$

If $\mathcal{C}_4$ *is also valid, then* φ *and* ψ *are analytic functions and* Φ *satisfies the differential equations*

$$\left(\frac{\mu_4}{\mu_2} - \frac{\nu_4}{\nu_2}\right)\Phi'' + \left(\frac{3\mu_4}{\mu_2^2} - \frac{3\nu_4}{\nu_2^2}\right)\Phi\Phi' + \left(\frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_2^3} - \frac{\nu_4 - 3\nu_2^2}{\nu_2^3}\right)\Phi^3 = 0.$$

If $\mathcal{M}_1$ *holds then the three coefficients in this equation do not vanish simultaneously.*

In the main result of this part, we obtain a necessary and sufficient condition for the equality problem under the additional assumption that Φ satisfies a first-order polynomial differential equation.

THEOREM. *Assume* $\mathcal{C}_3$ *and* $\mathcal{M}_1$ *with* $\mu_2\nu_2 \neq 0$*. Suppose that* $\nu_2\frac{\psi''}{\psi'} = \mu_2\frac{\varphi''}{\varphi'} =: \Phi$ *holds and that there exists integer numbers* $0 \leq 2n \leq k$ *and a constant vector* $(c_0, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ *such that the function* $\Phi : I \to \mathbb{R}$ *satisfies the following first-order polynomial differential equation*

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \Phi^{k-2i} \left(\Phi'\right)^i = 0.$$

Then $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ *holds if and only if*

(i) either there exist real constants a, b, c, d *with* $ac \neq 0$ *such that*

$$\varphi(x) = ax + b \qquad \text{and} \qquad \psi(x) = cx + d \qquad (x \in I);$$

(ii) or there exist real constants a, b, c, d, p, q *with* $ac(p - q) \neq 0$*,* $pq > 0$ *such that*

$$\varphi(x) = ae^{px} + b \qquad \text{and} \qquad \psi(x) = ce^{qx} + d \qquad (x \in I)$$

and, for $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \big(\mu_{i+1}\nu_{n-i} - \mu_i \nu_{n+1-i}\big) = 0;$$

(iii) or there exist real constants a, b, c, d, p, q with $ac(p-q) \neq 0$, $(p-1)(q-1) > 0$, and $x_0 \notin I$ such that, for $x \in I$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} a|x-x_0|^p + b, & \textit{if } p \neq 0 \\ a \ln|x-x_0| + b, & \textit{if } p = 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} c|x-x_0|^q + d, & \textit{if } q \neq 0 \\ c \ln|x-x_0| + d, & \textit{if } q = 0 \end{cases}$$

and for $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{p-1}{i} \binom{q-1}{n-i} \big(\mu_{i+1}\nu_{n-i} - \mu_i \nu_{n+1-i}\big) = 0.$$

By solving of the following examples we apply our main result.

EXAMPLE. Consider the functional equation

$$\varphi^{-1}\left(\frac{2\varphi(x)+\varphi(y)}{3}\right) = \psi^{-1}\left(\int_0^1 2t\psi(tx+(1-t)y)dt\right),$$

where $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ are continuous strictly monotone functions.

If $\mathcal{C}_3$ is assumed, the generating functions $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ satisfy this functional equation if and only if there exist real constants a, b, c, d with $ac \neq 0$ such that

(i) either $\varphi(x) = ax+b$ and $\psi(x) = cx+d$, i.e., they are affine functions,
(ii) or $\varphi(x) = a\ln x + b$ and $\psi(x) = cx^{-3} + d$.

EXAMPLE. Consider the functional equation

$$\varphi^{-1}\left(\frac{2\varphi(x)+\varphi(y)}{3}\right) = \psi^{-1}\left(\frac{4\psi(x)+4\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi(y)}{9}\right),$$

where $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ are continuous strictly monotone functions.

If $\mathcal{C}_3$ is assumed, the generating functions $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ satisfy this functional equation if and only if

(i) either there exist real constants a, b, c, d with $ac \neq 0$ such that $\varphi(x) = ax+b$ and $\psi(x) = cx+d$, i.e., they are affine functions,
(ii) or there exist real constants a, b, c, d, p with $acp \neq 0$ such that $\varphi(x) = ae^{px} + b$ and $\psi(x) = ce^{2px} + d$.

In the third part of the first chapter of the dissertation we characterize the continuous strictly monotone functions φ, ψ and Borel probability measures μ, ν such that

$$\mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x,y) + \mathcal{M}_{\psi,\nu}(x,y) = x + y \quad (x, y \in I)$$

holds.

The first result present a necessary condition of first-order.

COROLLARY. *Let μ and ν be a Borel probability measures. Assume $\mathcal{C}_0$. Suppose that there exists a point $p \in I$ such that φ and ψ are differentiable at p and $\varphi'(p)\psi'(p) \neq 0$. Then, in order that the invariance equation be valid, it is necessary that*

$$\widehat{\mu}_1 + \widehat{\nu}_1 = 1.$$

To obtain necessary conditions of higher-order, we need the following result.

LEMMA. Let μ be a Borel probability measure. For $k \geq 1$, $\mathcal{M}_{\varphi,\mu}$ is k-times continuously differentiable if $\mathcal{C}_k$ holds. If $\mathcal{C}_2$ is valid then, with the notation $\Phi(x) := \partial_1^2 \mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x,x)$, we have

$$\Phi(x) = (\widehat{\mu}_2 - \widehat{\mu}_1^2)\frac{\varphi''}{\varphi'}(x) = \mu_2 \frac{\varphi''}{\varphi'}(x) \qquad (x \in I).$$

If $\mathcal{C}_3$ and $\mu_2 \neq 0$ hold, then

$$\partial_1^3 \mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x,x) = \frac{3\widehat{\mu}_1\mu_2 + \mu_3}{\mu_2}\Phi'(x) + \frac{\mu_3}{\mu_2^2}\Phi^2(x) \qquad (x \in I).$$

Finally, if $\mathcal{C}_4$ and $\mu_2 \neq 0$ hold, then for all $x \in I$

$$\begin{aligned}\partial_1^4 \mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x,x) = &\frac{6\widehat{\mu}_1^2\mu_2 + 4\widehat{\mu}_1\mu_3 + \mu_4}{\mu_2}\Phi''(x) \\ &+ \frac{8\widehat{\mu}_1\mu_3 + 3\mu_4}{\mu_2^2}\Phi(x)\Phi'(x) + \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_2^3}\Phi^3(x).\end{aligned}$$

In the solution of the invariance equation, we consider two subcases according as $\mu_2\nu_2 = 0$, respectively $\mu_2\nu_2 \neq 0$.

THEOREM. *Let μ and ν be a Borel probability measures with $\mu_2\nu_2 = 0$. Assume $\mathcal{C}_2$. Then the invariance equation holds if and only if*

(i) either $\mu = \delta_\tau$, $\nu = \delta_{1-\tau}$ for some $\tau \in [0,1]$ and φ, ψ are arbitrary,

(ii) or $\mu = \delta_\tau$ for some $\tau \in [0,1]$, $\nu_2 \neq 0$, $\widehat{\nu}_1 = 1 - \tau$, φ is arbitrary and there exist constants $a \neq 0$ and b such that

$$\psi(x) = ax + b \qquad (x \in I),$$

(iii) *or* $\nu = \delta_{1-\tau}$ *for some* $\tau \in [0,1]$, $\mu_2 \neq 0$, $\widehat{\mu}_1 = \tau$, ψ *is arbitrary and there exist constants* $a \neq 0$ *and* b *such that*

$$\varphi(x) = ax + b \qquad (x \in I).$$

Our first main result in this part offers a necessary condition for the validity of the invariance equation in terms of two differential equations for the second-order partial derivative $\partial_1^2 \mathcal{M}_{\varphi,\mu}$ of the mean $\mathcal{M}_{\varphi,\mu}$.

THEOREM. *Let* μ *and* ν *be a Borel probability measures with* $\mu_2\nu_2 \neq 0$ *and assume that the invariance equation is satisfied. If* $\mathcal{C}_3$ *holds then the function* $\Phi : I \to \mathbb{R}$ *defined by*

$$\Phi(x) := \partial_1^2 \mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x,x)$$

satisfies the differential equation

$$\left(\frac{3\widehat{\mu}_1\mu_2 + \mu_3}{\mu_2} - \frac{3\widehat{\nu}_1\nu_2 + \nu_3}{\nu_2}\right)\Phi' + \left(\frac{\mu_3}{\mu_2^2} + \frac{\nu_3}{\nu_2^2}\right)\Phi^2 = 0$$

and if

$$(\mu_3, \nu_3) \neq \frac{3(\widehat{\mu}_1 - \widehat{\nu}_1)}{\mu_2 + \nu_2}(-\mu_2^2, \nu_2^2),$$

then the coefficients in this equation do not vanish simultaneously.
If, in addition, $\mathcal{C}_4$ *holds then* Φ *also satisfies the differential equation*

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{6\widehat{\mu}_1^2\mu_2 + 4\widehat{\mu}_1\mu_3 + \mu_4}{\mu_2} - \frac{6\widehat{\nu}_1^2\nu_2 + 4\widehat{\nu}_1\nu_3 + \nu_4}{\nu_2}\Big)\Phi'' \\ &+\Big(\frac{8\widehat{\mu}_1\mu_3 + 3\mu_4}{\mu_2^2} + \frac{8\widehat{\nu}_1\nu_3 + 3\nu_4}{\nu_2^2}\Big)\Phi\Phi' + \Big(\frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_2^3} - \frac{\nu_4 - 3\nu_2^2}{\nu_2^3}\Big)\Phi^3 = 0.\end{aligned}$$

By our second main result, under three times continuous differentiability assumptions and certain non-degeneracy conditions on the second and third centralized moments of the two measures, the solutions of the invariance equation fall into three different classes. The unknown generator functions φ and ψ are either linear, or exponential or power functions.

THEOREM. *Let* μ *and* ν *be a Borel probability measures with* $\mu_2\nu_2 \neq 0$ *and* $(\mu_3, \nu_3) \neq \frac{3(\widehat{\mu}_1 - \widehat{\nu}_1)}{\mu_2 + \nu_2}(-\mu_2^2, \nu_2^2)$. *Assume also* $\mathcal{C}_3$. *Then the invariance equation holds if and only if* $\widehat{\mu}_1 + \widehat{\nu}_1 = 1$ *and*

(i) *either there exist real constants* a, b, c, d *with* $ac \neq 0$ *such that*

$$\varphi(x) = ax + b \qquad \text{and} \qquad \psi(x) = cx + d \qquad (x \in I);$$

(ii) or there exist real constants a, b, c, d, p, q with $ac \neq 0$, $pq < 0$ such that

$$\varphi(x) = ae^{px} + b \qquad \textit{and} \qquad \psi(x) = ce^{qx} + d \qquad (x \in I)$$

and, for $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \big(\mu_{i+1}\nu_{n-i} + \mu_i \nu_{n+1-i}\big) = 0;$$

(iii) or there exist real constants a, b, c, d, p, q with $ac \neq 0$, $(p-1)(q-1) < 0$, and $x_0 \notin I$ such that, for $x \in I$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} a|x - x_0|^p + b, & \textit{if } p \neq 0 \\ a \ln|x - x_0| + b, & \textit{if } p = 0, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} c|x - x_0|^q + d, & \textit{if } q \neq 0 \\ c \ln|x - x_0| + d, & \textit{if } q = 0 \end{cases}$$

and, with the notation

$$F_{p,\mu}(z) := \begin{cases} \Big(\int_0^1 (1 + tz)^p d\mu(t) \Big)^{\frac{1}{p}}, & \textit{if } p \neq 0 \\ \exp\Big(\int_0^1 \ln(1 + tz) d\mu(t) \Big), & \textit{if } p = 0 \end{cases} \qquad (z > -1),$$

the identity

$$F_{p,\mu}(z) + F_{q,\nu}(z) = 2 + z \qquad (z > -1)$$

holds.

THEOREM. *Let μ, ν be a Borel probability measures with $\widehat{\mu}_1 + \widehat{\nu}_1 = 1$, $\mu_2 = \nu_2 \neq 0$, $\mu_3 = -\nu_3$, such that*

$$\mu_3 \neq 3\Big(\frac{1}{2} - \widehat{\mu}_1\Big)\mu_2.$$

Assume also $\mathcal{C}_3$. Then the invariance equation is satisfied if and only if

(i) either there exist real constants a, b, c, d with $ac \neq 0$ such that

$$\varphi(x) = ax + b \qquad \textit{and} \qquad \psi(x) = cx + d \qquad (x \in I);$$

(ii) or there exist real constants a, b, c, d, p with $acp \neq 0$, such that

$$\varphi(x) = ae^{px} + b \qquad \textit{and} \qquad \psi(x) = ce^{-px} + d \qquad (x \in I)$$

and ν is the reflection of μ with respect to the point $1/2$.

THEOREM. *Let μ, ν be a Borel probability measures with $\widehat{\mu}_1 = \widehat{\nu}_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_2 = \nu_2 \neq 0$, $\mu_3 = -\nu_3$, $\mu_4 = \nu_4$. Assume also $\mathcal{C}_4$. Then the invariance equation is satisfied if and only if one of the alternatives of previous theorem holds.*

In the next result we consider the particular case of the previous theorem when $\mu = \nu$ is a symmetric measure.

COROLLARY. *Let μ be a Borel probability measure with $\mu_2 \neq 0$ which is symmetric with respect to the point $1/2$. Assume also $\mathcal{C}_4$. Then the invariance equation*

$$\mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x,y) + \mathcal{M}_{\psi,\mu}(x,y) = x + y \qquad (x, y \in I)$$

is satisfied if and only if

(i) either there exist real constants a, b, c, d with $ac \neq 0$ such that

$$\varphi(x) = ax + b \qquad \text{and} \qquad \psi(x) = cx + d \qquad (x \in I);$$

(ii) or there exist real constants a, b, c, d, p with $acp \neq 0$, such that

$$\varphi(x) = ae^{px} + b \qquad \text{and} \qquad \psi(x) = ce^{-px} + d \qquad (x \in I).$$

In the subsequent examples we demonstrate how some known results of the literature follow from ours.

EXAMPLE. Consider the functional equation

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) + \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x) + \psi(y)}{2}\right) = x + y,$$

where $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ are continuous strictly monotone functions and $x, y \in I$.

If $\mathcal{C}_4$ is assumed, the generating functions φ and ψ satisfy this functional equation if and only if

(i) either there exist real constants a, b, c, d with $ac \neq 0$ such that $\varphi(x) = ax + b$ and $\psi(x) = cx + d$ $(x \in I)$;
(ii) or there exist real constants a, b, c, d, p with $acp \neq 0$, such that $\varphi(x) = ae^{px} + b$ and $\psi(x) = ce^{-px} + d$ $(x \in I)$.

This statement was first proved by Sutô [**30**], [**31**] assuming analyticity and by Matkowski [**23**] who supposed twice continuous differentiability. After some preliminary regularity improving steps [**8**], [**9**], the main goal of the paper [**10**] was to show that the same conclusion can be obtained without any superflouos differentiability assumptions.

The result so obtained has been discovered by Jarczyk and Matkowski [**16**] and has recently been proved without any continuous differentiability assumptions by Jarczyk [**15**].

EXAMPLE. Consider the functional equation

$$\varphi^{-1}\left(\frac{1}{y-x}\int_x^y \varphi(t)dt\right)+\psi^{-1}\left(\frac{1}{y-x}\int_x^y \psi(t)dt\right)=x+y,$$

where $\varphi,\psi : I \to \mathbb{R}$ are continuous strictly monotone functions and $x, y \in I$, $x \neq y$.

If $\mathcal{C}_4$ is assumed, the generating functions φ and ψ satisfy this functional equation if and only if

(i) either there exist real constants a, b, c, d with $ac \neq 0$ such that $\varphi(x) = ax + b$ and $\psi(x) = cx + d$ $(x \in I)$;
(ii) or there exist real constants a, b, c, d, p with $acp \neq 0$, such that $\varphi(x) = ae^{px} + b$ and $\psi(x) = ce^{-px} + d$ $(x \in I)$.

This result has been discovered with stronger regularity assumptions by Matkowski [**24**].

2. On the Lipschitz perturbation of monotonic functions

In the second part of the dissertation we investigate when a function $p : I \to \mathbb{R}$ can be decomposed as a sum of an increasing and a d-Lipschitz function.

Let $d : I^2 \to I$ be a semimetric,i.e., d is a nonnegative symmetric two variable function satisfying also the triangle inequality. A function $\ell : I \to \mathbb{R}$ is said to be *d-Lipschitz* if $|\ell(x) - \ell(y)| \leq d(x, y)$ for $x, y \in I$. The notation x^+ will stand for the positive part of $x \in \mathbb{R}$, i.e., $x^+ := \max(0, x)$.

The next theorem contains our main result that gives the first characterization for Lipschitz perturbations of increasing functions. The proof of the sufficiency will directly utilize the theorem of Kindler [**17**].

THEOREM. *A function $p : I \to \mathbb{R}$ can be written in the form $p = q + \ell$, where q is increasing and ℓ is d-Lipschitz if and only if*

$$\sum_{i=1}^{n}\big(p(s_i)-p(t_i)-d(t_i,s_i)\big)^+ \leq \sum_{j=1}^{m}\big(p(v_j)-p(u_j)+d(u_j,v_j)\big)$$

is fulfilled for all real numbers $t_1 < s_1, \ldots, t_n < s_n$ and $u_1 < v_1, \ldots, u_m < v_m$ in I satisfying $\sum_{i=1}^{n} 1_{]t_i,s_i]} = \sum_{i=1}^{m} 1_{]u_i,v_i]}$.

Using this lemma, we obtain another characterization of the decomposability $p = q + \ell$.

LEMMA. Let $t_1 < s_1, \dots, t_n < s_n$ and $u_1 < v_1, \dots, u_m < v_m$ in I satisfying $\sum_{i=1}^n 1_{]t_i,s_i]} = \sum_{i=1}^m 1_{]u_i,v_i]}$. Then

$$\sum_{i=1}^n \big(p(s_i) - p(t_i) - d(t_i, s_i)\big)^+ \le \sum_{j=1}^m \big(p(v_j) - p(u_j) + d(u_j, v_j)\big)$$

holds for a function $p : I \to \mathbb{R}$ if and only if

$$0 \le \sum_{i=1}^n \min\big(d(t_i, s_i), p(s_i) - p(t_i)\big) + \sum_{j=1}^m d(u_j, v_j).$$

THEOREM. *A function $p : I \to \mathbb{R}$ can be written in the form $p = q + \ell$, where q is increasing and ℓ is d-Lipschitz if and only if*

$$0 \le \sum_{i=1}^n d(t_i, s_i) + \sum_{j=1}^m d(u_j, v_j) + \mathcal{I}_p\Big(\sum_{j=1}^m 1_{]u_j,v_j]} - \sum_{i=1}^n 1_{]t_i,s_i]}\Big)$$

for all real numbers $t_1 < s_1, \dots, t_n < s_n$ and $u_1 < v_1, \dots, u_m, < v_m$ in I satisfying

$$\sum_{i=1}^n 1_{]t_i,s_i]} \le \sum_{j=1}^m 1_{]u_j,v_j]}.$$

In this section, provided that the semimetric d possesses further properties, we are going to obtain simpler necessary and sufficient conditions in order that a function p could be decomposed as $q + \ell$ where q is monotone increasing and ℓ is d-Lipschitz.

DEFINITION. A semimetric $d : I \times I \to \mathbb{R}$ is called *concave* if, for all $x \le y \le z \le w$ in I, it satisfies

$$d(x, w) + d(y, z) \le d(x, z) + d(y, w).$$

The main result of this section is contained in the following theorem which characterizes the decomposability $p = q + \ell$ in case of concave semimetrics. In the case of when the semimetric coincides with the ordinary distance function, our condition simplifies to a two variable inequality only.

THEOREM. *A function $p : I \to \mathbb{R}$ can be written in the form $p = q + \ell$, where q is increasing and ℓ is d-Lipschitz if and only if*

$$0 \le \sum_{k=1}^n d(x_{2k-1}, x_{2k}) + d(x_0, x_{2n+1}) + \sum_{k=0}^n \big(p(x_{2k+1}) - p(x_{2k})\big)$$

holds for all $x_0 \le x_1 < \dots < x_{2n} \le x_{2n+1} \in I$.

THEOREM. *If the metric* d *is given by* $d(x,y) = |y-x|$ $(x, y \in I)$*, then*

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} d(x_{2k-1}, x_{2k}) + d(x_0, x_{2n+1}) + \sum_{k=0}^{n} \big(p(x_{2k+1}) - p(x_{2k})\big)$$

holds for all $x_0 \leq x_1 < \cdots < x_{2n} \leq x_{2n+1} \in I$ *if and only if*

$$p(x) \leq p(y) + d(x,y)$$

for all $x < y \in I$.

Az értekezés előzményei és célkitűzései

1. A. Kétváltozós közepek egyenlőségi problémájáról

Legyen I valós nyílt intervallum. Az $M : I^2 \to I$ kétváltozós függvényt középnek nevezzük I-n, ha

$$\min(x, y) \le M(x, y) \le \max(x, y) \qquad (x, y \in I)$$

teljesül.

A legismertebb közép az

$$A(x, y) := \frac{x + y}{2} \qquad (x, y \in I)$$

számtani közép, melynek általánosítása a kvázi-aritmetikai közepek osztálya.

A továbbiakban jelölje $\mathcal{CM}(I)$ az I-n definiált, valós értékű, folytonos, szigorúan monoton függvények halmazát.

DEFINÍCIÓ. Legyen $\varphi \in \mathcal{CM}(I)$, az általa generált $M_\varphi : I^2 \to I$ függvényt, melyre

$$M_\varphi(x, y) = \mathcal{M}_\varphi(x, y) := \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) \qquad (x, y \in I),$$

kétváltozós kvázi-aritmetikai középnek nevezzük, ahol φ^{-1} a φ függvény inverz függvényét jelöli.

A kvázi-aritmetikai közepek rendszerezését először Hardy, Littlewood és Pólya adta meg 1934-ben megjelent könyvükben [**13**]. A legalapvetőbb probléma megoldását az alábbi tétel adja, mely a kvázi-aritmetikai közepek egyenlőségét jellemzi.

TÉTEL. *(Hardy–Littlewood–Pólya) Legyen $\varphi, \psi \in \mathcal{CM}(I)$. A M_φ és M_ψ közepek akkor és csak akkor egyenlőek egymással, ha léteznek $a \neq 0$ és b valós konstansok úgy, hogy $\psi = a\varphi + b$.*

Kvázi-aritmetikai közepek jellemzését egymástól függetlenül több matematikus is megadta: Kolmogorov [**18**], Nagumo [**27**], de Finetti [**11**]. Kétváltozós esetben Aczél [**1**], [**2**], [**3**], [**4**] adta meg a jellemezési tételt a biszimmetria fogalmát felhasználva.

A közepek egy másik osztályát a Lagrange közepek alkotják, melyek fogalmát Berrone és Moro [**6**], [**5**] vezették be.

DEFINÍCIÓ. Az $M : I^2 \to I$ kétváltozós függvényt *Lagrange középnek* nevezzük I-n, ha létezik $\varphi : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény, hogy

$$M(x,y)=\mathcal{L}_\varphi(x,y):=\begin{cases}\varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{y-x}\displaystyle\int_x^y\varphi(t)dt\right) & \text{if } x\neq y\\ x & \text{if } x=y\end{cases}\qquad(x,y\in I).$$

A kvázi-aritmetikai és a Lagrange közepek osztálya is gazdag irodalommal rendelkezik: Borwein–Borwein [**7**], Mitrinović–Pečarić–Fink [**25**], [**26**], Niculescu–Persson [**28**].

A Lagrange közepek egyenlőségére vonatkozó eredményt a következő tétel tartalmazza.

TÉTEL. *(Berrone–Moro) Legyen $\varphi,\psi\in\mathcal{CM}(I)$. A L_φ és L_ψ közepek akkor és csak akkor egyenlőek, ha léteznek $a\neq 0$ és b valós konstansok úgy, hogy $\psi=a\varphi+b$.*

1.B. Az invariancia egyenlet kétváltozós közepekre

A

$$K\big(M(x,y),N(x,y)\big)=K(x,y)\qquad(x,y\in I)$$

azonosságot *invariancia egyenletnek* nevezzük, ahol $M,N,K:I^2\to I$ kétváltozós közepek. Azt az esetet, amikor K a számtani közép, M és N kvázi-aritmetikai közepek, azaz

$$M(x,y)+N(x,y)=x+y\qquad(x,y\in I),$$

Sutô [**30, 31**] és Matkowski [**22, 23**] vizsgálták, ezért az egyenletet Matkowski–Sutô egyenletnek nevezzük.

A legegyszerűbb példa az invariancia egyenlet teljesülésére a következő azonosság:

$$\mathcal{G}(x,y)=\mathcal{G}\big(\mathcal{A}(x,y),\mathcal{H}(x,y)\big)\qquad(x,y>0),$$

ahol $\mathcal{A}$, $\mathcal{G}$, és $\mathcal{H}$ a kétváltozós számtani, mértani és harmonikus közép.

A számtani közép két kvázi-aritmetikai középre vonatkozó invarianciáját először Matkowski [**22**] vizsgálta kétszeri folytonosan differenciálhatósági feltételek mellett. Ezeket a regularitási feltételeket Daróczy, Maksa, és Páles [**8**], [**9**] gyengítették, és végül 2002-ben Daróczy és Páles [**10**] bebizonyították, hogy a megoldások lineáris vagy exponenciális alakú függvények.

A kvázi-aritmetikai és a Lagrange közepek közös általánosításaként kapjuk az általánosított kvázi- aritmetikai közepek osztályát. A disszertáció egyik célja általánosított kvázi-aritmetikai közepek egyenlőségi és invariancia problémájának vizsgálata. Az ezzel kapcsolatos eredmények megtalálhatók a [**20**] és a [**21**] publikációkban.

2. Monoton függvények Lipschitz perturbációjáról

A függvényegyenlőtlenségek stabilitás elméletének vizsgálata 1952-ben indult Hyers és Ulam cikkével [**14**]. Hyers és Ulam felfedezték, hogy az ún. δ-konvex függvények felbonthatók egy konvex és egy korlátos függvény összegére véges dimenziós terek fölött. E stabilitási tétel még általánosabb formáját Páles adta meg 2003-ban [**29**]. Bevezette az ϵ-monotonitás fogalmát, amely elvezetett a monoton függvények stabilitási tulajdonságaihoz. A $p : I \to \mathbb{R}$ függvényt ϵ-növekvőnek nevezzük, ha

$$p(x) \leq p(y) + \epsilon$$

minden $x \leq y$ esetén. Páles ebben a cikkében megmutatta, hogy egy függvény akkor és csak akkor ϵ-növekvő, ha felbontható egy növekvő és egy korlátos függvény összegére.

A disszertáció másik célja annak vizsgálata, hogy egy függvény mikor bontható fel egy növekvő és egy d-Lipschitz függvény összegére. A fő eredményeket a [**19**] publikáció tartalmazza.

Az értekezés új eredményei

1. Általánosított kvázi-aritmetikai közepek egyenlőségi és invariancia problémájáról

A klasszikus kvázi-aritmetikai közepek fogalmát súlyfüggvények és paraméterek hozzáadása révén többféleképpen is általánosíthatjuk. A disszertáció egyik célja általánosított kvázi-aritmetikai közepek egyenlőségi és invariancia problémájának vizsgálata. A disszertációban vizsgált általánosított kvázi-aritmetikai közepeket a következőképpen definiáljuk.

DEFINÍCIÓ. Legyen $\varphi : I \to \mathbb{R}$ egy folytonos, szigorúan monoton függvény, μ egy, a $[0,1]$ intervallum Borel halmazain értelmezett valószínűségi mérték. Ekkor az $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} : I^2 \to I$ függvényt általánosított kvázi-aritmetikai középnek nevezzük, ha

$$\mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x,y) := \varphi^{-1}\Big(\int_0^1 \varphi\big(tx+(1-t)y\big)d\mu(t)\Big) \qquad (x,y\in I).$$

Ha $\mu = \dfrac{\delta_0+\delta_1}{2}$, akkor $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_\varphi$. Ha μ Lebesgue mérték a $[0,1]$ intervallumon, akkor $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{L}_\varphi$.

Az első fejezet első részében összefoglaljuk az eredmények bemutatásához szükséges jelöléseket és alapvető eredményeket. Definiáljuk egy μ Borel valószínűségi mérték *k-adik momentumát* és *k-adik centrális momentumát*,

$$\widehat{\mu}_k := \int_0^1 t^k d\mu(t), \qquad \mu_k := \int_0^1 (t-\widehat{\mu}_1)^k d\mu(t) \qquad (k\in\mathbb{N}\cup\{0\}),$$

és az $\frac{1}{2}$ pontra vonatkozó tükörképét,

$$\widetilde{\mu}(A) = \mu(\widetilde{A}),$$

ahol A a $[0,1]$ intervallum Borel részhalmaza és $\widetilde{A} := 1 - A := \{1-x \mid x\in A\}$. Az általánosított kvázi-aritmetikai közepek egyenlőségi problémájára vonatkozó eredményeket a különböző rendű momentum feltételek teljesülése szerint mutatjuk be, ehhez szükségünk van a következő definíciókra:

Azt mondjuk, hogy az *n-ed rendű momentum feltétel* $\mathcal{M}_n$ valamely $n\in\mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$ esetén teljesül, ha μ,ν a $[0,1]$ intervallumon definiált Borel valószínűségi mértékek, és

$$\widehat{\mu}_k = \widehat{\nu}_k \quad \text{minden} \quad 1\le k\le n,$$

illetve, hogy az *egzakt n-ed rendű momentum feltétel* $\mathcal{M}_n^*$ teljesül, ha $\mathcal{M}_n$ teljesül, de $\mathcal{M}_{n+1}$ nem teljesül, azaz

$$\widehat{\mu}_k = \widehat{\nu}_k \quad \text{minden} \quad 1 \leq k \leq n \qquad \text{és} \qquad \widehat{\mu}_{n+1} \neq \widehat{\nu}_{n+1}.$$

A kvázi-aritmetikai közepek generátor függvényeire vonatkozó különböző regularitási feltételek megadásához bevezetjük az *n-ed rendű regularitási feltétel* $\mathcal{C}_n$ definícióját. A $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ függvények teljesítik az n-ed rendű regularitási feltételt, ha n-szer folytonosan differenciálhatóak, és az első-rendű deriváltjuk seholsem tűnik el.

Az alábbi lemma megadja az első szükséges feltételt az általánosított kvázi-arimetikai közepek egyenlőségi és invariancia problémájára:

LEMMA. Legyen μ Borel valószínűségi mérték, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvény, és tegyük fel, hogy φ differenciálható a $p \in I$ pontban és $\varphi'(p) \neq 0$. Ekkor $\partial_1 M_{\varphi,\mu}(p,p) = \widehat{\mu}_1$.

A fejezet további részeiben megadjuk azoknak a (φ, μ) és (ψ, ν) pároknak a jellemzését, amelyek megoldásai az általánosított kvázi-aritmetikai közepek egyenlőségi, illetve invariancia problémájának. Az első fejezet második részében az egyenlőségi problémát, azaz a következő egyenletet vizsgáljuk:

$$\mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x,y) = \mathcal{M}_{\psi,\nu}(x,y)$$

Az első szükséges feltétel azt mutatja, hogy gyenge regularitási feltételek mellett, ha az n-ed rendű egzakt momentum feltétel $\mathcal{M}_0^*$ teljesül, akkor az egyenlőségi problémának nincsen megoldása.

KÖVETKEZMÉNY. Tegyük fel, hogy $\mathcal{C}_0$ és $\mathcal{M}_0$ teljesül, és hogy létezik egy $p \in I$ pont úgy, hogy φ és ψ differenciálható a p pontban és $\varphi'(p)\psi'(p) \neq 0$. Ekkor az $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ egyenlet teljesülésének szükséges feltétele

$$\widehat{\mu}_1 = \widehat{\nu}_1,$$

azaz, $\mathcal{M}_1$ teljesül.

A következő eredményben az egyenlőségi probléma egy újabb jellemzését kapjuk.

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy* $\mathcal{C}_1$ *és* $\mathcal{M}_1$ *teljesül. Ekkor az* $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ *egyenlet akkor és csak akkor teljesül bármely* $x, y \in I$ *esetén, ha*

$$\int_0^1 \int_0^1 (t-s)\varphi'\big(tx + (1-t)y\big)\psi'\big(sx + (1-s)y\big)d\mu(t)d\nu(s) = 0.$$

Feltételezve, hogy az $n+1$-ed rendű regularitási feltétel teljesül, egy újabb szükséges feltételt kapunk az egyenlőségi probléma teljesülésére.

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy* $\mathcal{C}_{n+1}$ *(*$n \in \mathbb{N}$*) és* $\mathcal{M}_1$ *teljesül. Ekkor az* $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ *egyenlet teljesülésének szükséges feltétele, hogy*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \big(\mu_{i+1}\nu_{n-i} - \mu_i\nu_{n+1-i}\big) \frac{\varphi^{(i+1)}}{\varphi'} \cdot \frac{\psi^{(n+1-i)}}{\psi'} = 0. \tag{1}$$

Megfordítva, ha φ, ψ *analitikus függvények, és* (1) *teljesül minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén, akkor* $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ *teljesül.*

Ha a két mérték egyenlő, az egyenlőségi problémára a következő megoldást kapjuk.

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy* $\mathcal{C}_0$ *és* $\mathcal{M}_\infty$ *teljesül. Ekkor* $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ *akkor és csak akkor igaz, ha*

(i) vagy $\mu = \nu = \delta_\tau$ *valamely* $\tau \in [0,1]$ *esetén és* φ, ψ *tetszőleges függvények,*

(ii) vagy $\mu = \nu$ *nem Dirac mérték és léteznek* $a \neq 0$ *és* b *konstansok úgy, hogy*

$$\psi = a\varphi + b.$$

Ha a két mérték nem egyenlő, de legalább az első két momentumuk megegyezik, akkor az egyenlőségi problémára az alábbi jellemzést kapjuk.

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy* $\mathcal{C}_2$ *és* $\mathcal{M}_n^*$ *teljesül valamely* $2 \leq n < \infty$ *esetén. Ekkor* $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ *akkor és csak akkor áll fenn, ha léteznek* $a \neq 0$ *és* b *konstansok úgy, hogy*

$$\psi = a\varphi + b$$

és φ n*-től nem nagyobb fokszámú polinom.*

Ha $\mathcal{M}_1^*$ teljesül, akkor két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $\mu_2\nu_2 = 0$, illetve $\mu_2\nu_2 \neq 0$.

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy* $\mathcal{C}_2$*,* $\mathcal{M}_1^*$ *és* $\mu_2\nu_2 = 0$ *teljesül. Ekkor* $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ *akkor és csak akkor igaz, ha*

(i) vagy μ *és* ψ *tetszőleges,* $\nu = \delta_{\widehat{\mu}_1}$*, és léteznek* $a \neq 0$ *és* b *konstansok úgy, hogy*

$$\varphi(x) = ax + b \qquad (x \in I),$$

(ii) vagy ν *és* φ *tetszőleges,* $\mu = \delta_{\widehat{\nu}_1}$*, és léteznek* $c \neq 0$ *és* d *konstansok úgy, hogy*

$$\psi(x) = cx + d \qquad (x \in I).$$

Abban az esetben, amikor $\mu_2\nu_2 \neq 0$, további szükséges feltételeket kapunk az egyenlőségi probléma teljesülésére.

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy* $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{M}_1$, $\mu_2\nu_2 \neq 0$ *teljesül, és tegyük fel, hogy fennáll az* $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ *egyenlet. Ekkor*

$$\nu_2\frac{\psi''}{\psi'} = \mu_2\frac{\varphi''}{\varphi'} =: \Phi.$$

Ha teljesül a 3-ad rendű regularitási feltétel is, akkor a fenti $\Phi : I \to \mathbb{R}$ *függvény kielégíti a következő differenciálegyenletet:*

$$\left(\frac{\mu_3}{\mu_2} - \frac{\nu_3}{\nu_2}\right)\Phi' + \left(\frac{\mu_3}{\mu_2^2} - \frac{\nu_3}{\nu_2^2}\right)\Phi^2 = 0.$$

Ha még a 4-ed rendű regularitási feltétel is teljesül, akkor φ *és* ψ *analitikus függvények és* Φ *kielégíti az alábbi differenciálegyenletet.*

$$\left(\frac{\mu_4}{\mu_2} - \frac{\nu_4}{\nu_2}\right)\Phi'' + \left(\frac{3\mu_4}{\mu_2^2} - \frac{3\nu_4}{\nu_2^2}\right)\Phi\Phi' + \left(\frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_2^3} - \frac{\nu_4 - 3\nu_2^2}{\nu_2^3}\right)\Phi^3 = 0.$$

Ha teljesül az első rendű momentum feltétel, akkor az utóbbi differenciálegyenlet együtthatói egyszerre nem tűnnek el.

A következő eredmény szükséges és elégséges feltételt ad az egyenlőségi problémára, azzal a feltétellel, hogy a Φ függvény kielégít egy elsőrendű differenciálegyenletet.

TÉTEL. *Tegyük fel, hogy* $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{M}_1$ *és* $\mu_2\nu_2 \neq 0$, *továbbá*

$$\nu_2\frac{\psi''}{\psi'} = \mu_2\frac{\varphi''}{\varphi'} =: \Phi$$

teljesül, léteznek $0 \leq 2n \leq k$ *egész számok és egy* $(c_0, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ *konstans vektor úgy, hogy a* $\Phi : I \to \mathbb{R}$ *függvény teljesíti a következő polinomiális differenciálegyenletet:*

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\Phi^{k-2i}\big(\Phi'\big)^i = 0.$$

Ekkor $\mathcal{M}_{\varphi,\mu} = \mathcal{M}_{\psi,\nu}$ *akkor és csak akkor teljesül, ha*

(i) vagy léteznek valós konstansok a, b, c, d, $ac \neq 0$ *úgy, hogy*

$$\varphi(x) = ax + b \qquad \textit{és} \qquad \psi(x) = cx + d \qquad (x \in I),$$

(ii) vagy léteznek valós konstansok a, b, c, d, p, q, $ac(p - q) \neq 0$, $pq > 0$ *úgy, hogy*

$$\varphi(x) = ae^{px} + b \qquad \textit{és} \qquad \psi(x) = ce^{qx} + d \qquad (x \in I), \tag{2}$$

és $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \big(\mu_{i+1}\nu_{n-i} - \mu_i \nu_{n+1-i}\big) = 0;$$

(iii) vagy léteznek valós konstansok $a, b, c, d, p, q,$ $ac(p-q) \neq 0$*,* $(p-1)(q-1) > 0$*, és* $x_0 \notin I$ *úgy, hogy* $x \in I$ *esetén*

$$\varphi(x) = \begin{cases} a|x-x_0|^p + b, & \textit{ha } p \neq 0 \\ a \ln |x-x_0| + b, & \textit{ha } p = 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} c|x-x_0|^q + d, & \textit{ha } q \neq 0 \\ c \ln |x-x_0| + d, & \textit{ha } q = 0 \end{cases}$$

és $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{p-1}{i} \binom{q-1}{n-i} \big(\mu_{i+1}\nu_{n-i} - \mu_i \nu_{n+1-i}\big) = 0.$$

Ha $\mu_2\nu_2 \neq 0$ és $(\mu_3, \nu_3) \neq (0,0)$, vagy $\mu_2\nu_2 \neq 0$, $(\mu_3, \nu_3) = (0,0)$ és $\mu_2\nu_4 = \nu_2\mu_4$ vagy $\mu_2\nu_2 \neq 0$, $(\mu_3, \nu_3) = (0,0)$ és $\mu_2\nu_4 \neq \nu_2\mu_4$ és $(\mu_5, \nu_5) \neq (0,0)$, akkor a megfelelő regularitási és momentum feltételek teljesülése mellett azt kapjuk, hogy az $M_{\varphi,\mu} = M_{\psi,\nu}$ egyenlet akkor és csak akkor igaz, ha az előző tétel állításai közül valamelyik teljesül, azaz a (φ, ψ) megoldás pár vagy lineáris, vagy exponenciális, vagy hatványfüggvény. Ezen esetek mindegyikében megmutatható, hogy Φ kielégít egy polinomiális differenciálegyenletet.

Az utolsó alfejezetben példákat mutatunk be arra vonatkozóan, hogy eredményeink segítségével hogyan kaphatjuk meg különböző függvényegyenletek megoldásait.

PÉLDA. Tekintsük a

$$\varphi^{-1}\left(\frac{2\varphi(x) + \varphi(y)}{3}\right) = \psi^{-1}\left(\int_0^1 2t\psi(tx + (1-t)y)dt\right)$$

függvényegyenletet, ahol $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvények.

Ha $\mathcal{C}_3$ teljesül, a φ és ψ generátorfüggvények akkor és csak akkor megoldásai a fenti függvényegyenletnek, ha léteznek olyan a, b, c, d valós számok, melyekre $ac \neq 0$ úgy, hogy

(i) $\varphi(x) = ax + b$ és $\psi(x) = cx + d$, azaz φ és ψ affin függvények,

(ii) vagy $\varphi(x) = a \ln x + b$ és $\psi(x) = cx^{-3} + d$.

PÉLDA. Tekintsük a

$$\varphi^{-1}\left(\frac{2\varphi(x)+\varphi(y)}{3}\right)=\psi^{-1}\left(\frac{4\psi(x)+4\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)+\psi(y)}{9}\right)$$

függvényegyenletet, ahol $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvények.

Ha $\mathcal{C}_3$ teljesül, a φ és ψ generátorfüggvények akkor és csak akkor megoldásai a fenti függvényegyenletnek, ha

(i) léteznek olyan a, b, c, d valós számok, melyekre $ac \neq 0$ úgy, hogy $\varphi(x) = ax + b$ és $\psi(x) = cx + d$,

(ii) vagy léteznek a, b, c, d, p, olyan valós számok, melyekre $acp \neq 0$ úgy, hogy $\varphi(x) = ae^{px} + b$ és $\psi(x) = ce^{2px} + d$.

Az első fejezet harmadik részében a Matkowski-Sutô problémát, azaz a következő egyenletet vizsgáljuk:

$$\mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x, y) + \mathcal{M}_{\psi,\nu}(x, y) = x + y \qquad (x, y \in I).$$

Első eredményünk az első szükséges feltétel az invariancia egyenlet teljesülésére.

KÖVETKEZMÉNY. Legyen μ és ν Borel valószínűségi mérték. Tegyük fel, hogy $\mathcal{C}_0$ teljesül, és létezik egy $p \in I$ pont úgy, hogy a φ és ψ függvények differenciálhatók p-ben és $\varphi'(p)\psi'(p) \neq 0$. Ekkor az $\mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x, y)+\mathcal{M}_{\psi,\nu}(x, y) = x+y$ egyenlet teljesülésének szükséges feltétele, hogy

$$\widehat{\mu}_1 + \widehat{\nu}_1 = 1.$$

Az $\mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x, y)+\mathcal{M}_{\psi,\nu}(x, y) = x+y$ egyenlet megoldásánál szintén két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $\mu_2\nu_2 = 0$, illetve $\mu_2\nu_2 \neq 0$.

A $\mu_2\nu_2 = 0$ esetben a következő eredményt kapjuk:

TÉTEL. *Legyen μ és ν Borel valószínűségi mérték úgy, hogy $\mu_2\nu_2 = 0$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{C}_2$ teljesül. Ekkor az invariancia egyenlet akkor és csak akkor igaz, ha*

(i) vagy $\mu = \delta_\tau$, $\nu = \delta_{1-\tau}$ valamely $\tau \in [0, 1]$-ra, és φ, ψ tetszőleges függvények,

(ii) vagy $\mu = \delta_\tau$ valamely $\tau \in [0, 1]$-ra, $\nu_2 \neq 0$, $\widehat{\nu}_1 = 1 - \tau$, φ tetszőleges és létezik $a \neq 0$ és b konstans úgy, hogy

$$\psi(x) = ax + b \qquad (x \in I),$$

(iii) vagy $\nu = \delta_{1-\tau}$ *valamely* $\tau \in [0,1]$*-ra,* $\mu_2 \neq 0$, $\widehat{\mu}_1 = \tau$, ψ *tetszőleges, és létezik* $a \neq 0$ *és* b *konstans úgy, hogy*

$$\varphi(x) = ax + b \qquad (x \in I).$$

A $\mu_2\nu_2 \neq 0$ esetben a következő eredményünk szükséges feltételt ad az invariancia egyenlet teljesülésére az $\mathcal{M}_{\varphi,\mu}$ közép másodrendű parciális deriváltjaira vonatkozó differenciálegyenletek segítségével.

TÉTEL. *Legyen* μ *és* ν *Borel valószínűségi mérték úgy, hogy* $\mu_2\nu_2 \neq 0$ *és tegyük fel, hogy az invariancia egyenletünk teljesül. Ha* $\mathcal{C}_3$ *fennáll, akkor a*

$$\Phi(x) := \partial_1^2 \mathcal{M}_{\varphi,\mu}(x,x)$$

függvény kielégíti az alábbi differenciálegyenletet:

$$\left(\frac{3\widehat{\mu}_1\mu_2 + \mu_3}{\mu_2} - \frac{3\widehat{\nu}_1\nu_2 + \nu_3}{\nu_2}\right)\Phi' + \left(\frac{\mu_3}{\mu_2^2} + \frac{\nu_3}{\nu_2^2}\right)\Phi^2 = 0,$$

és ha

$$(\mu_3, \nu_3) \neq \frac{3(\widehat{\mu}_1 - \widehat{\nu}_1)}{\mu_2 + \nu_2}(-\mu_2^2, \nu_2^2),$$

akkor az előző differenciálegyenletben az együtthatók egyszerre nem tűnnek el.

Ha $\mathcal{C}_4$ *fennáll, akkor* Φ *az alábbi differenciálegyenletnek megoldása:*

$$\Big(\frac{6\widehat{\mu}_1^2\mu_2 + 4\widehat{\mu}_1\mu_3 + \mu_4}{\mu_2} - \frac{6\widehat{\nu}_1^2\nu_2 + 4\widehat{\nu}_1\nu_3 + \nu_4}{\nu_2}\Big)\Phi''$$
$$+\Big(\frac{8\widehat{\mu}_1\mu_3 + 3\mu_4}{\mu_2^2} + \frac{8\widehat{\nu}_1\nu_3 + 3\nu_4}{\nu_2^2}\Big)\Phi\Phi' + \Big(\frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\mu_2^3} - \frac{\nu_4 - 3\nu_2^2}{}$$

(ii) *vagy léteznek a, b, c, d, p, q konstansok, melyekre $ac \neq 0$, $pq < 0$ úgy, hogy*

$$\varphi(x) = ae^{px} + b \qquad \textit{és} \qquad \psi(x) = ce^{qx} + d \qquad (x \in I)$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \big(\mu_{i+1}\nu_{n-i} + \mu_i \nu_{n+1-i}\big) = 0;$$

(iii) *vagy léteznek a, b, c, d, p, q konstansok, melyekre $ac \neq 0$, $(p-1)(q-1) < 0$, és $x_0 \notin I$ úgy, hogy minden $x \in I$ esetén*

$$\varphi(x) = \begin{cases} a|x - x_0|^p + b, & \textit{ha } p \neq 0 \\ a \ln |x - x_0| + b, & \textit{ha } p = 0, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} c|x - x_0|^q + d, & \textit{ha } q \neq 0 \\ c \ln |x - x_0| + d, & \textit{ha } q = 0 \end{cases}$$

és az alábbi jelöléssel

$$F_{p,\mu}(z) := \begin{cases} \Big(\int_0^1 (1+tz)^p d\mu(t) \Big)^{\frac{1}{p}}, & \textit{ha } p \neq 0 \\ \exp \Big(\int_0^1 \ln(1+tz) d\mu(t) \Big), & \textit{ha } p = 0 \end{cases} \qquad (z > -1),$$

a következő azonosság teljesül:

$$F_{p,\mu}(z) + F_{q,\nu}(z) = 2 + z \qquad (z > -1).$$

Az alábbi két eredményben a μ és a ν mértékek első néhány momentumára különböző kikötéseket teszünk.

TÉTEL. *Legyen μ, ν Borel valószínűségi mérték úgy, hogy $\widehat{\mu}_1 + \widehat{\nu}_1 = 1$, $\mu_2 = \nu_2 \neq 0$, $\mu_3 = -\nu_3$, és*

$$\mu_3 \neq 3\Big(\frac{1}{2} - \widehat{\mu}_1\Big)\mu_2.$$

Tegyük fel, hogy $\mathcal{C}_3$ teljesül. Ekkor az invariancia egyenletünk akkor és csak akkor teljesül, ha

(i) *vagy léteznek a, b, c, d valós konstansok, melyekre $ac \neq 0$ úgy, hogy*

$$\varphi(x) = ax + b \qquad \textit{and} \qquad \psi(x) = cx + d \qquad (x \in I);$$

(ii) *vagy léteznek a, b, c, d, p valós konstansok, melyekre $acp \neq 0$ úgy, hogy*

$$\varphi(x) = ae^{px} + b \qquad \textit{and} \qquad \psi(x) = ce^{-px} + d \qquad (x \in I)$$

és a ν mérték a μ mérték tükörképe az $1/2$ pontra nézve.

TÉTEL. *Legyen* μ, ν *Borel valószínűségi mérték úgy, hogy* $\widehat{\mu}_1 = \widehat{\nu}_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_2 = \nu_2 \neq 0$, $\mu_3 = -\nu_3$, $\mu_4 = \nu_4$. *Tegyük fel, hogy* $\mathcal{C}_4$ *teljesül. Ekkor az invariancia egyenletünk akkor és csak akkor teljesül, ha az előző tétel valamelyik állítása teljesül.*

A következő eredményben az a speciális esetet tekintjük, amikor $\mu = \nu$ szimmetrikus mérték.

KÖVETKEZMÉNY. Legyen μ Borel valószínűségi mérték, $\mu_2 \neq 0$ és μ szimmetrikus az $1/2$ pontra nézve. Tegyük fel, $\mathcal{C}_4$ teljesül. Ekkor az invariancia egyenletünk akkor és csak akkor teljesül, ha

(i) vagy léteznek a, b, c, d valós konstansok, melyekre $ac \neq 0$ úgy, hogy
$$\varphi(x) = ax + b \qquad \text{and} \qquad \psi(x) = cx + d \qquad (x \in I);$$
(ii) vagy léteznek a, b, c, d, p valós konstansok, melyekre $acp \neq 0$ úgy, hogy
$$\varphi(x) = ae^{px} + b \qquad \text{and} \qquad \psi(x) = ce^{-px} + d \qquad (x \in I).$$

Az alábbi példákban bemutatjuk, hogy eredményeink hogyan alkalmazhatók függvényegyenletek megoldására.

PÉLDA. Tekintsük a
$$\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) + \psi^{-1}\left(\frac{\psi(x) + \psi(y)}{2}\right) = x + y \qquad (x, y \in I),$$
függvényegyenletet, ahol $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ folytonos, szigorúan monoton függvények.

Ha $\mathcal{C}_4$ teljesül, a fenti függvényegyenlet megoldásai lineáris vagy exponenciális alakú függvények, melyet először, 1914-ben Sutô [**30**],[**31**] bizonyított, aki megadta az analitikus megoldásokat. 1999-ben Matkowski [**23**] a kétszer folytonosan differenciálható megoldásait adta meg ennek a függvényegyenletnek. A generátor függvényekre vonatkozó regularitási feltételeket Daróczy, Maksa és Páles [**8**],[**9**] fokozatosan gyengítették, majd végül 2002-ben Daróczy és Páles [**10**] minden regularitási feltétel nélkül megoldották a problémát.

PÉLDA. Tekintsük a
$$\varphi^{-1}\left(\int_0^1 \varphi\big(tx + (1-t)y\big)dt\right) + \psi^{-1}\left(\int_0^1 \psi\big(tx + (1-t)y\big)dt\right) = x + y,$$
függvényegyenletet, ahol $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ folytonos szigorúan monoton függvények, és $x, y \in I$, $x \neq y$.

Ha $\mathcal{C}_4$ teljesül, a függvényegyenlet megoldásai lineáris vagy exponenciális alakú függvények, amelyet Matkowski, erősebb regularitási feltételek mellett, bizonyított 2005-ben [**24**].

2. Monoton függvények Lipschitz perturbációjáról

A fő eredményeink szükséges és elégséges feltételeket adnak a fenti felbontásra tetszőleges szemimetrika és konkáv szemimetrika esetén.

Az eredmények bizonyításához felhasználjuk a következő lemmát.

LEMMA. Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_1 < s_1, \dots, t_n < s_n$ és $u_1 < v_1, \dots, u_m < v_m$ olyan I-beli valós számok, melyekre

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{]t_i, s_i]} = \sum_{i=1}^{m} 1_{]u_i, v_i]}.$$

Ekkor az alábbi egyenlőség teljesül.

$$\sum_{i=1}^{n} \big(q(s_i) - q(t_i)\big) = \sum_{i=1}^{m} \big(q(v_i) - q(u_i)\big).$$

Ha d tetszőleges szemimetrika, a következő tétel megadja növekvő függvények Lipschitz perturbációjának egyik jellemzését. Jelölje x^+ az $x \in \mathbb{R}$ pozitív részét, azaz $x^+ := \max(0, x)$.

TÉTEL. *A $p : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor írható $p = q + \ell$ alakban, ahol q növekvő és ℓ d-Lipschitz, ha*

$$\sum_{i=1}^{n} \big(p(s_i) - p(t_i) - d(t_i, s_i)\big)^+ \le \sum_{j=1}^{m} \big(p(v_j) - p(u_j) + d(u_j, v_j)\big)$$

teljesül minden $t_1 < s_1, \dots, t_n < s_n$ és $u_1 < v_1, \dots, u_m < v_m$ I-beli valós számra, melyekre teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{]t_i, s_i]} = \sum_{i=1}^{m} 1_{]u_i, v_i]}.$$

A következő lemma felhasználásával a $p = q + \ell$ felbontás egy másik jellemzését kapjuk.

LEMMA. Legyenek $t_1 < s_1, \dots, t_n < s_n$ és $u_1 < v_1, \dots, u_m < v_m$ I-beli valós számok úgy, hogy $\sum_{i=1}^{n} 1_{]t_i, s_i]} = \sum_{i=1}^{m} 1_{]u_i, v_i]}$ teljesül. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{n} \big(p(s_i) - p(t_i) - d(t_i, s_i)\big)^+ \le \sum_{j=1}^{m} \big(p(v_j) - p(u_j) + d(u_j, v_j)\big)$$

akkor és csak akkor teljesül a $p : I \to \mathbb{R}$ függvényre, ha

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} \min\big(d(t_i, s_i), p(s_i) - p(t_i)\big) + \sum_{j=1}^{m} d(u_j, v_j).$$

TÉTEL. *A $p : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor írható fel $p = q + \ell$ alakban, ahol q növekvő, ℓ pedig d-Lipschitz, ha*

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} d(t_i, s_i) + \sum_{j=1}^{m} d(u_j, v_j) + \mathcal{I}_p\Big(\sum_{j=1}^{m} 1_{]u_j,v_j]} - \sum_{i=1}^{n} 1_{]t_i,s_i]}\Big)$$

minden $t_1 < s_1, \dots, t_n < s_n$ és $u_1 < v_1, \dots, u_m, < v_m$ I-beli valós számra, melyre

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{]t_i,s_i]} \le \sum_{j=1}^{m} 1_{]u_j,v_j]}.$$

Ha a d függvény konkáv szemimetrika, akkor egyszerűbb szükséges és elégséges feltételeket kapunk a keresett felbontásra. Ha a d metrika a szokásos távolság függvénnyel egyenlő, a feltételünk egy kétváltozós egyenlőtlenséggé egyszerűsödik.

TÉTEL. *A $p : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor írható fel $p = q + \ell$ alakban, ahol q növekvő, ℓ pedig d-Lipschitz, ha*

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} d(x_{2k-1}, x_{2k}) + d(x_0, x_{2n+1}) + \sum_{k=0}^{n} \big(p(x_{2k+1}) - p(x_{2k})\big)$$

teljesül minden $x_0 \le x_1 < \cdots < x_{2n} \le x_{2n+1}$ I-beli valós szám esetén.

TÉTEL. *Ha $d(x, y) = |y - x|$ $(x, y \in I)$, akkor*

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} d(x_{2k-1}, x_{2k}) + d(x_0, x_{2n+1}) + \sum_{k=0}^{n} \big(p(x_{2k+1}) - p(x_{2k})\big)$$

akkor és csak akkor teljesül minden $x_0 \le x_1 < \cdots < x_{2n} \le x_{2n+1}$ I-beli valós számra, ha

$$p(x) \le p(y) + d(x, y).$$

fennáll bármely $x < y$ I-beli valós számok esetén.

List of publications

[1] Z. Makó and Zs. Páles, *On Lipschitz perturbation of monotonic functions*, Acta Math. Hungar. **113** (2006), no. 1-2, 1–18. MR 2007f:26010

[2] Z. Makó and Zs. Páles, *On the equality of generalized quasi-arithmetic means*, Publ.Math. Debrecen **72** (2008), no. 3-4, 407–440.

[3] Z. Makó and Zs. Páles, *The invariance of the arithmetic mean with respect to generalized quasi-arithmetic means*, J. Math. Anal. Appl. **353** (2009), 8–23.

List of talks

[1] *On the Lipschitz perturbation of monotone functions*, The 5^{th} Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Debrecen (Hungary), 2004.

[2] *Monoton függvények Lipschitz perturbációjáról*, Síkfőkút (Magyarország), 2004. (in Hungarian)

[3] *On the Lipschitz perturbation of monotone functions*, The 5^{th} Katowice–Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities, Bedlewo (Poland), 2005.

[4] *On the Lipschitz perturbation of monotone functions*, The 1^{st} International Student's Conference on Analysis, Szczyrk (Poland), 2005.

[5] *On the equality of generalized quasi-arithmetic means*, Conference on Inequalities and Applications '07, Noszvaj (Hungary), 2007.

[6] *The invariance of the arithmetic mean with respect to generalized quasi-arithmetic means*, Numbers, Functions, Equations '08, Noszvaj (Hungary), 2008.

Bibliography

[1] J. Aczél, *The notion of mean values*, Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem **19** (1947), no. 23, 83–86. MR 8:504a

[2] ______, *On mean values*, Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 392–400. MR 9,501h

[3] ______, *On mean values and operations defined for two variables*, Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem **20** (1948), no. 10, 37–40. MR 9,572e

[4] ______, *On the theory of means*, Colloq. Math. **4** (1956), 33–55. MR 18,876h

[5] L. R. Berrone, *The mean value theorem: functional equations and Lagrangian means*, Epsilon **14** (1998), no. 1(40), 131–151. MR 99j:39018

[6] L. R. Berrone and J. Moro, *Lagrangian means*, Aequationes Math. **55** (1998), no. 3, 217–226. MR 99d:39022

[7] J. M. Borwein and P. B. Borwein, *Pi and the AGM*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1987, A study in analytic number theory and computational complexity. MR 89a:11134

[8] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles, *Extension theorems for the Matkowski-Sutô problem*, Demonstratio Math. **33** (2000), no. 3, 547–556. MR 2002a:39027

[9] Z. Daróczy and Zs. Páles, *On means that are both quasi-arithmetic and conjugate arithmetic*, Acta Math. Hungar. **90** (2001), no. 4, 271–282. MR 2003g:26034

[10] ______, *Gauss-composition of means and the solution of the Matkowski–Sutô problem*, Publ. Math. Debrecen **61** (2002), no. 1-2, 157–218. MR 2003j:39061

[11] B. De Finetti, *Sul concetto di media*, Giornale dell' Instituto, Italiano degli Attuarii **2** (1931), 369–396.

[12] J. W. Green, *Approximately convex functions*, Duke Math. J. **19** (1952), 499–504.

[13] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934, (first edition), 1952 (second edition). MR 13,727e

[14] D. H. Hyers and S. M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 821–828. MR 14,254b

[15] J. Jarczyk, *Invariance of weighted quasi-arithmetic means with continuous generators*, Publ. Math. Debrecen **71** (2007), no. 3-4, 279–294. MR 2008j:26056

[16] J. Jarczyk and J. Matkowski, *Invariance in the class of weighted quasi-arithmetic means*, Ann. Polon. Math. **88** (2006), no. 1, 39–51. MR 2007g:26044

[17] J. Kindler, *Sandwich theorems for set functions*, J. Math. Anal. Appl. **133** (1988), no. 2, 529–542. MR 90d:28006

[18] A. Kolmogorov, *Sur la notion de la moyenne*, Rend. Accad. dei Lincei (6) **12** (1930), 388–391.

[19] Z. Makó and Zs. Páles, *On Lipschitz perturbation of monotonic functions*, Acta Math. Hungar. **113** (2006), no. 1-2, 1–18. MR 2007f:26010

[20] ______, *On the equality of generalized quasiarithmetic means*, Publ. Math. Debrecen **72** (2008), no. 3-4, 407–440. MR 2009b:39029

[21] ______, *The invariance of the arithmetic mean with respect to generalized quasi-arithmetic means*, J. Math. Anal. Appl. **353** (2009), 8–23.

[22] J. Matkowski, *Invariant and complementary quasi-arithmetic means*, Aequationes Math. **57** (1999), no. 1, 87–107. MR 2000g:39025

[23] ———, *Iterations of mean-type mappings and invariant means*, Ann. Math. Sil. (1999), no. 13, 211–226, European Conference on Iteration Theory (Muszyna-Złockie, 1998). MR 2002d:39032

[24] ———, *Lagrangian mean-type mappings for which the arithmetic mean is invariant*, J. Math. Anal. Appl. **309** (2005), no. 1, 15–24. MR 2006c:26051

[25] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, and A. M. Fink, *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*, Mathematics and its Applications (East European Series), vol. 53, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. MR 93m:26036

[26] ———, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Mathematics and its Applications (East European Series), vol. 61, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993. MR 94c:00004

[27] M. Nagumo, *Über eine Klasse der Mittelwerte*, Jap. Jour. of Math. **7** (1930), 71–79.

[28] C. P. Niculescu and L.-E. Persson, *Convex Functions and Their Applications*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 23, Springer-Verlag, New York, 2006, A contemporary approach.

[29] Zs. Páles, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 1, 243–252. MR 2003h:26015

[30] O. Sutô, *Studies on some functional equations I*, Tôhoku Math. J. **6** (1914), 1–15.

[31] ———, *Studies on some functional equations II*, Tôhoku Math. J. **6** (1914), 82–101.