

Dr. Kézi Csaba Gábor
Közönséges elsőrendű
differenciálegyenletek
és alkalmazásaik
feladatgyűjtemény



Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM
MŰSZAKI KAR
MŰSZAKI ALAPTÁRGYI TANSZÉK

Dr. Kézi Csaba Gábor

KÖZÖNSÉGES ELSŐRENDŰ
DIFFERENCIÁLEGYENLETEK
ÉS ALKALMAZÁSAIK
FELADATGYŰJTEMÉNY



Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press

2019

Lektorok:

Nagy Gergő

adjunktus

Debreceni Egyetem, Természettudományi és Technológiai Kar,
Matematikai Intézet

DUPress e-könyv

© Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press,
beleértve az egyetemi hálózaton belüli elektronikus terjesztés jogát is

ISBN 978-963-318-817-0

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press

Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi

Nyomdai munkálatokat

a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2019-ben

dupress.unideb.hu

1. Alapfogalmak

1. **Feladat.** Tekintsük az

$$y''(x) = \sin^2 x - x^3 \cdot y'(x)$$

differenciálegyenletet!

- Adjuk meg az ismeretlen függvényt és a független változót!
- Határozzuk meg, hogy a differenciálegyenlet közönséges vagy parciális-e?
- Adjuk meg a differenciálegyenlet rendjét!
- Lineáris vagy nem-lineáris a differenciálegyenlet?
- Homogén vagy inhomogén a differenciálegyenlet?
- Függvényegyütthatós vagy konstans együtthatós?
- Explicit vagy implicit?

Megoldás:

- Az ismeretlen függvény y , a független változó x .
- A differenciálegyenlet közönséges, mert az ismeretlen függvény egy változós.
- Az egyenlet másodrendű, mert a legmagasabb rendű derivált ($y''(x)$) rendje 2.
- Lineáris, mert az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak lineáris kombinációja és az ismeretlen függvényt nem tartalmazó kifejezés szerepel az egyenletben.
- Inhomogén, mert van benne olyan tag ($\sin^2 x$), amelyik nem tartalmazza az ismeretlen függvényt.
- Függvényegyütthatós, mert az $y'(x)$ együtthatója függvény.
- Explicit, mert a legmagasabb rendű derivált ki van fejezve az egyenletből.

2. **Feladat.** Tekintsük az

$$y'''(x) = 5 \cdot y'(x)$$

differenciálegyenletet!

- Adjuk meg az ismeretlen függvényt és a független változót!
- Határozzuk meg, hogy a differenciálegyenlet közönséges vagy parciális-e?
- Adjuk meg a differenciálegyenlet rendjét!
- Lineáris vagy nem-lineáris a differenciálegyenlet?

- e) Homogén vagy inhomogén a differenciálegyenlet?
- f) Függvényegyütthatós vagy konstansegyütthatós?
- g) Explicit vagy implicit?

Megoldás:

- a) Az ismeretlen függvénye y , a független változó x .
- b) A differenciálegyenlet közönséges, mert az ismeretlen függvény egy változós.
- c) Az egyenlet harmadrendű, mert a legmagasabb rendű derivált ($y'''(x)$) rendje 3.
- d) Lineáris, mert az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak lineáris kombinációja és az ismeretlen függvényt nem tartalmazó kifejezés szerepel az egyenletben.
- e) Homogén, mert minden tag tartalmazza az ismeretlen függvényt.
- f) Konstansegyütthatós, mert a lineáris kombinációban minden együttható konstans.
- g) Explicit, mert a legmagasabb rendű derivált ki van fejezve.

3. **Feladat.** Tekintsük az

$$x'(t) = x(t)$$

differenciálegyenletet!

- a) Adjuk meg az ismeretlen függvényt és a független változót!
- b) Határozzuk meg, hogy a differenciálegyenlet közönséges vagy parciális-e?
- c) Adjuk meg a differenciálegyenlet rendjét!
- d) Lineáris vagy nem-lineáris a differenciálegyenlet?
- e) Homogén vagy inhomogén a differenciálegyenlet?
- f) Függvényegyütthatós vagy konstansegyütthatós?
- g) Explicit vagy implicit?

Megoldás:

- a) Az ismeretlen függvény x , a független változó t .
- b) A differenciálegyenlet közönséges, mert az ismeretlen függvény egy változós.
- c) Az egyenlet elsőrendű, mert a legmagasabb rendű derivált ($x'(t)$) rendje 1.

- d) Lineáris, mert az ismeretlen függvénynek és deriváltjainak lineáris kombinációja és az ismeretlen függvényt nem tartalmazó kifejezés szerepel az egyenletben.
- e) Homogén, mert minden tagban szerepel az ismeretlen függvény (vagy annak deriváltja).
- f) Konstansegyütthatós.
- g) Explicit, mert a legmagasabb rendű derivált ki van fejezve az egyenletből.

4. **Feladat.** Tekintsük az

$$\partial_x u(x; y) + \partial_y u(x; y) = 0$$

differenciálegyenletet!

- a) Adjuk meg az ismeretlen függvényt és a független változót!
- b) Határozzuk meg, hogy a differenciálegyenlet közönséges vagy parciális-e?
- c) Adjuk meg a differenciálegyenlet rendjét!
- d) Lineáris vagy nem-lineáris a differenciálegyenlet?
- e) Homogén vagy inhomogén a differenciálegyenlet?
- f) Függvényegyütthatós vagy konstansegyütthatós?

Megoldás:

- a) Az ismeretlen függvény $u(x; y)$, a független változók x és y .
- b) A differenciálegyenlet parciális, mert az ismeretlen függvény kétváltozós.
- c) Az egyenlet elsőrendű, mert a legmagasabb rendű derivált rendje 1.
- d) Lineáris, mert az ismeretlen függvény deriváltjainak összege szerepel.
- e) Homogén, mert minden tag tartalmazza az ismeretlen függvényt.
- f) Konstansegyütthatós, mert az ismeretlen függvénynek és a deriváltjainak az együtthatói konstansok.

5. **Feladat.** Írjuk fel az origó középpontú, egység sugarú körök differenciálegyenletét, vagyis adjunk meg egy olyan differenciálegyenletet, amelynek megoldásfüggvényének grafikonja az origó középpontú, egység sugarú kör!

Megoldás:

Az origó középpontú, egység sugarú kör egyenlete

$$x^2 + y^2(x) = 1.$$

Mindkét oldalt deriválva

$$2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$$

adódik. Ebből $y'(x)$ -et kifejezve az

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

elsőrendű, explicit differenciálegyenlethez jutunk.

6. Feladat. Írjuk fel azoknak a köröknek a differenciálegyenletét, amelyeknek középpontja az x -tengelyen van, vagyis adjunk meg egy olyan differenciálegyenletet, amelynek megoldásfüggvényének grafikonja olyan kör, amelyeknek középpontja az x -tengelyen van!

Megoldás:

A feltétel szerint a középpont koordinátái $(u; 0)$. A kör egyenlete

$$(x - u)^2 + y^2(x) = u^2.$$

A nevezetes azonosság elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 2ux + u^2 + y^2(x) = u^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2ux + y^2(x) = 0.$$

Mindkét oldalt deriválva

$$2x - 2u + 2y(x) \cdot y'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2u = 2x + 2y(x) \cdot y'(x)$$

adódik. Ezt felhasználva

$$x^2 + y^2(x) = 2ux = 2x^2 + 2x \cdot y(x) \cdot y'(x).$$

Ebből $x \cdot y(x) \neq 0$ esetén $y'(x)$ -et kifejezve az

$$y'(x) = \frac{y^2(x) - x^2}{2x \cdot y(x)}$$

elsőrendű, explicit differenciálegyenlethez jutunk.

7. Feladat. Írjuk fel az egység sugarú köröknek a differenciálegyenletét, vagyis adjunk meg egy olyan differenciálegyenletet, amelynek megoldásfüggvényének grafikonjai egység sugarú körök!

Megoldás:

Legyen a kör középpontja $K = (u; v)$. A kör egyenlete

$$(x - u)^2 + (y(x) - v)^2 = 1. \quad (1)$$

Mindkét oldalt deriválva

$$2 \cdot (x - u) + 2 \cdot (y(x) - v) \cdot y'(x) = 0$$

adódik. Az egyenletet egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$(x - u) + (y(x) - v) \cdot y'(x) = 0. \quad (2)$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát deriválva

$$1 + (y'(x))^2 + (y(x) - v) \cdot y''(x) = 0$$

adódik. Ebből az egyenletből kifejezve a v paramétert azt kapjuk, hogy

$$v = \frac{1 + (y'(x))^2}{y''(x)} + y(x).$$

Ezt behelyettesítve az (2) egyenletbe

$$x - u - \frac{1 + (y'(x))^2}{y''(x)} \cdot y'(x) = 0$$

adódik, amiből az u paramétert kifejezve azt kapjuk, hogy

$$u = x - \frac{1 + (y'(x))^2}{y''(x)} \cdot y'(x).$$

Az u és a v paraméterekre kapott kifejezéseket behelyettesítve az (1) egyenletbe

$$\left(\frac{y'(x) + (y'(x))^3}{y''(x)} \right)^2 + \left(\frac{1 + (y'(x))^2}{y''(x)} \right)^2 = 1$$

adódik. Elvégezve a négyzetre emeléseket azt kapjuk, hogy

$$\frac{(y'(x))^2 + 2 \cdot (y'(x))^4 + (y'(x))^6 + 1 + 2 \cdot (y'(x))^2 + (y'(x))^4}{(y''(x))^2} = 1.$$

Elvégezve az összevonásokat az

$$\frac{1 + 3 \cdot (y'(x))^2 + 3 \cdot (y'(x))^4 + (y'(x))^6}{(y'(x))^2} = 1$$

egyenlethez jutunk. Felhasználva, hogy

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

azt kapjuk, hogy a keresett differenciálegyenlet

$$\frac{(1 + (y'(x))^2)^3}{(y'(x))^2} = 1.$$

$$x^2 + y^2(x) = 2ux = 2x^2 + 2x \cdot y(x) \cdot y'(x).$$

Ebből $x \cdot y(x) \neq 0$ esetén $y'(x)$ -et kifejezve az

$$y'(x) = \frac{y^2(x) - x^2}{2x \cdot y(x)}$$

elsőrendű, explicit differenciálegyenlethez jutunk.

8. Feladat. Írjuk fel egy olyan differenciálegyenletet, amely megoldásfüggvényének grafikonja a $v = (v_1; v_2) \neq (0; 0)$ irányvektorú, $P = (x_0; y_0)$ ponton áthaladó síkbeli egyenes!

Megoldás:

A v irányvektorú, P ponton áthaladó egyenes egyenlete

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

alakban is felírható. Ebből y -t kifejezve

$$y = \frac{x - x_0}{v_1} \cdot v_2 + y_0$$

adódik. Tehát az y az x függvényében:

$$y(x) = \frac{x - x_0}{v_1} \cdot v_2 + y_0.$$

Mindkét oldalt deriválva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = \frac{1 - x_0}{v_1} \cdot v_2.$$

9. Feladat. Írjunk fel egy olyan másodrendű differenciálegyenletet, amelynek általános megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-3x}$$

minden $c_1; c_2 \in \mathbb{R}$ esetén.

Megoldás:

Az $y(x)$ függvény deriváltja

$$y'(x) = 2c_1 \cdot e^{2x} - 3c_2 \cdot e^{-3x}.$$

Az $y(x)$ függvény második deriváltja

$$y''(x) = 4c_1 \cdot e^{2x} + 9c_2 \cdot e^{-3x}.$$

Ezeket felhasználva

$$\begin{aligned} y'(x) + y''(x) &= 6c_1 \cdot e^{2x} + 6c_2 \cdot e^{-3x} = \\ &= 6 \cdot (c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-3x}) = 6 \cdot y(x). \end{aligned}$$

Tehát

$$y''(x) + y'(x) - 6 \cdot y(x) = 0$$

egy olyan differenciálegyenlet, melynek megoldása

$$y(x) = c_1 \cdot e^{2x} + c_2 \cdot e^{-3x}.$$

10. Feladat. Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám. Adjuk meg az

$$y(x) = \frac{c}{x}$$

függvénysereg differenciálegyenletét!

Megoldás:

Az y derivált függvénye

$$y'(x) = -\frac{c}{x^2}.$$

Felhasználva, hogy $c = x \cdot y(x)$ azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = -\frac{x \cdot y(x)}{x^2},$$

így a keresett differenciálegyenlet

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x}.$$

11. Feladat. Igazoljuk, hogy az $y(x) = \sin x + \cos x$ függvény egy megoldása az $y''(x) + y(x) = 0$ differenciálegyenletnek!

Megoldás:

Az $y(x)$ függvény deriváltja

$$y'(x) = \cos x - \sin x,$$

az $y(x)$ függvény második deriváltja

$$y''(x) = -\sin x + \cos x.$$

Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy az egyenlet bal oldala

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= (\sin x + \cos x)'' + (\sin x + \cos x) = \\ &= (\cos x - \sin x)' + \sin x + \cos x = \\ &= -\sin x - \cos x + \sin x + \cos x = 0, \end{aligned}$$

ami éppen a jobb oldal, tehát a megadott függvény valóban megoldása a megadott egyenletnek.

12. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$y'(x) = y(x) + x$$

differenciálegyenletnek az $y(x) = -x - 1$ függvény megoldása!

Megoldás:

Mivel $y'(x) = -1$, ezért az y és y' függvényeket behelyettesítve a differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-1 = -x - 1 + x,$$

ami azonosság, így az $y(x) = -x - 1$ függvény valóban megoldása az egyenletnek.

13. Feladat. Megoldását alkotják-e az $y(x) = c \cdot x^2$ alakú függvények minden $c \in \mathbb{R}$ valós szám esetén az

$$x \cdot y'(x) = 2y(x)$$

differenciálegyenletnek?

Megoldás:

Behelyettesítve az egyenlet bal oldalába a megadott függvényt azt kapjuk, hogy

$$x \cdot y'(x) = x \cdot (c \cdot x^2)' = x \cdot 2 \cdot c \cdot x = 2c \cdot x^2.$$

Behelyettesítve az egyenlet jobb oldalába az $y(x)$ függvényt azt kapjuk, hogy

$$2y(x) = 2c \cdot x^2,$$

így a bal oldalon és a jobb oldalon álló kifejezés megegyezik, tehát a megadott függvény megoldása a megadott differenciálegyenletnek.

14. **Feladat.** Igaz-e, hogy tetszőleges c_1 és c_2 valós számok esetén az

$$y(x) = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$$

alakú függvények megoldásai az

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

differenciálegyenletnek.

Megoldás:

Az $y(x)$ függvény deriváltja

$$y'(x) = c_1 \cdot e^x + 2c_2 \cdot e^{2x}.$$

Az $y(x)$ függvény második deriváltja

$$y''(x) = c_1 \cdot e^x + 4c_2 \cdot e^{2x}.$$

Behelyettesítve az egyenlet bal oldalába a megfelelő függvényeket azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) &= c_1 \cdot e^x + 4c_2 \cdot e^{2x} - 3 \cdot (c_1 \cdot e^x + \\ &\quad + c_2 \cdot e^{2x}) + 2 \cdot (c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}) = \\ &= c_1 \cdot e^x + 4c_2 \cdot e^{2x} - 3c_1 \cdot e^x - \\ &\quad - 6c_2 \cdot e^{2x} + 2c_1 \cdot e^x + 2c_2 \cdot e^{2x} = 0, \end{aligned}$$

ami az egyenlet jobb oldala tehát a megadott függvények valóban megoldásai a differenciálegyenletnek.

15. **Feladat.** Az $y'(x) = 2x \cdot y(x)$ differenciálegyenlet $y(x)$ megoldásfüggvényéről tudjuk, hogy $y(x) > 0$. Mutassuk meg, hogy az $y(x)$ függvény konvex.

Megoldás:

Az $y'(x)$ függvény deriváltja

$$y''(x) = (2x \cdot y(x))' = 2 \cdot y(x) + 2x \cdot y'(x).$$

Felhasználva, hogy $y'(x) = 2x \cdot y(x)$ azt kapjuk, hogy

$$y''(x) = 2 \cdot y(x) + 2x \cdot 2x \cdot y(x) = (2 + 4x^2) \cdot y(x).$$

Mivel $2 + 4x^2 > 0$ és feltétel szerint $y(x) > 0$, ezért $y''(x) > 0$, így az $y(x)$ függvény konvex.

16. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy az

$$y'(x) = x^2 + y^2(x), \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladat megoldásának egyetlen inflexiós pontja van, és az az origó!

Megoldás:

Az $y''(x)$ függvényre azt kapjuk, hogy

$$y''(x) = 2x + 2y(x) \cdot y'(x).$$

Mivel

$$y'(x) = x^2 + y^2(x),$$

ezért

$$y''(x) = 2x + 2y(x) \cdot (x^2 + y^2(x)).$$

Inflexiós hely ott lehet, ahol a függvény másodrendű derivált függvény zérus, ezért az $y''(x) = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Jelen esetben ezen egyenlet egyetlen megoldása $x = 0$.

Az y függvény harmadrendű derivált függvénye

$$y'''(x) = 2 + 2y'(x) \cdot (x^2 + y^2(x)) + 2y(x) \cdot (2x + 2y(x) \cdot y'(x)).$$

Felhasználva, hogy $y(0) = 0$ miatt

$$y'(0) = 0^2 + y^2(0) = 0$$

azt kapjuk, hogy

$$y'''(0) = 2 + 2y'(0) \cdot (0^2 + y^2(0)) + 2y(0) \cdot (2 \cdot 0 + 2y(0) \cdot y'(0)) = 2 \neq 0,$$

így $(0; 0)$ inflexiós pontja az y függvénynek.

17. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy az

$$y'(x) = x^3 + y^3(x) - 9, \quad y(2) = 1$$

kezdetiérték feladat megoldásfüggvényének az $x = 2$ helyen lokális minimuma van!

Megoldás:

Mivel

$$y'(2) = 2^3 + 1^3 - 9 = 0,$$

ezért $x = 2$ stacionárius helye a megoldásfüggvénynek. A megoldásfüggvény másodrendű derivált függvénye

$$y''(x) = 3x^2 + 3y^2(x) \cdot y'(x),$$

így

$$y''(2) = 3 \cdot 2^2 + 3y^2(2) \cdot y'(2) = 12 + 3 \cdot 1^2 \cdot 0 = 12 > 0,$$

tehát az y függvénynek lokális minimuma van a $(2; 1)$ pontban.

18. Feladat. Tekintsük az

$$y'(x) = x \cdot y(x), \quad y(2) = 3$$

kezdetiérték feladatot!

a) Számoljuk ki az $y'(2)$ értéket!

b) Számoljuk ki az $y''(2)$ értéket!

Megoldás:

a) Az $y'(2)$ érték:

$$y'(2) = 2 \cdot y(2) = 2 \cdot 3 = 6.$$

b) Mivel

$$y''(x) = y(x) + x \cdot y'(x),$$

ezért

$$y''(2) = y(2) + 2 \cdot y'(2) = 3 + 2 \cdot 6 = 15.$$

19. Feladat. Tekintsük az

$$y'(x) = x \cdot y^2(x) + y^3(x), \quad y(1) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

a) Számoljuk ki az $y'(1)$ értéket!

b) Számoljuk ki az $y''(1)$ értéket!

Megoldás:

a) Az $y'(1)$ érték:

$$y'(1) = 1 \cdot y^2(1) + y^3(1) = 1 \cdot 2^2 + 2^3 = 12.$$

b) Mivel

$$y''(x) = y^2(x) + x \cdot 2y(x) \cdot y'(x) + 3 \cdot y^2(x) \cdot y'(x),$$

ezért

$$y''(1) = y^2(1) + 1 \cdot 2y(1) \cdot y'(1) + 3 \cdot y^2(1) \cdot y'(1),$$

így

$$y''(1) = 2^2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12 + 3 \cdot 2^2 \cdot 12 = 196.$$

20. Feladat. Határozzuk meg az $y'(x) = y(x)$ differenciálegyenlet általános megoldását!

Megoldás:

Az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk az e^{-x} függvénnyel:

$$y'(x) \cdot e^{-x} = y(x) \cdot e^{-x}.$$

Az egyenletet nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$y'(x) \cdot e^{-x} - y(x) \cdot e^{-x} = 0.$$

Tehát

$$(y(x) \cdot e^{-x})' = 0,$$

így

$$y(x) \cdot e^{-x} = c,$$

amiből $y(x)$ -et kifejezve

$$y(x) = c \cdot e^x$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

2. Közvetlenül integrálható differenciálegyenletek

21. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = \cos 2x, \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot! Függvénytranszformációs lépések segítségével ábrázoljuk a megoldásfüggvényt!

Megoldás:

A differenciálegyenlet mindkét oldalát integrálva

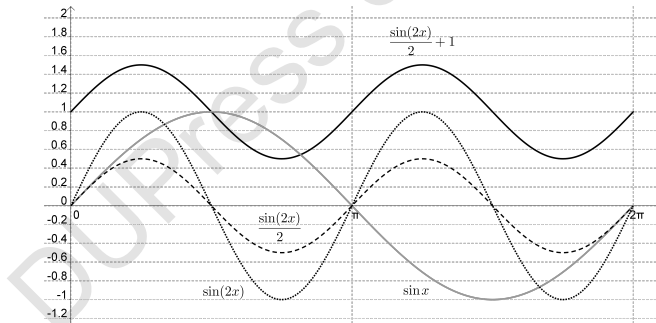
$$y(x) = \frac{\sin 2x}{2} + c$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$. Mivel $y(0) = 1$, ezért

$$1 = y(0) = \frac{\sin 0}{2} + c = c,$$

így $c = 1$, tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{\sin 2x}{2} + 1.$$



22. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = 2x + 3x^2, \quad y(1) = 4$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlet mindkét oldalát integrálva

$$y(x) = x^2 + x^3 + c$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel $y(1) = 4$, ezért

$$4 = y(1) = 1^2 + 1^3 + c = 2 + c,$$

amiből azt kapjuk, hogy $c = 2$, tehát a kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x) = x^2 + x^3 + 2.$$

23. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad y(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlet mindkét oldalát integrálva

$$y(x) = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + c$$

adódik. Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$2 = y(0) = \frac{1}{2} \cdot \ln 1 + c = c,$$

amiből azt kapjuk, hogy $c = 2$. Tehát a kezdetiérték probléma megoldása

$$y(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + 2 = \sqrt{\ln(x^2 + 1)} + 2.$$

24. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = x \cdot e^x, \quad y(0) = 3$$

kezdetiérték feladatot! A megoldást ellenőrizzük!

Megoldás:

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$y(x) = \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c.$$

A kezdetiérték feltételt felhasználva

$$3 = y(0) = -e^0 + c = -1 + c,$$

így $c = 4$, tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = (x - 1) \cdot e^x + 4.$$

A megoldás ellenőrzéséhez a kapott függvényt helyettesítsük be az eredeti egyenletbe.

Az egyenlet bal oldala:

$$((x-1) \cdot e^x + 4)' = e^x + (x-1) \cdot e^x = x \cdot e^x,$$

ami megegyezik az egyenlet jobb oldalával.

A kezdetiérték feltétel:

$$y(0) = -1 \cdot e^0 + 4 = 3.$$

Ezzel ellenőriztük a megoldást.

25. Feladat. Legyen $x > 0$. Oldjuk meg az

$$y'(x) = x \cdot \ln x, \quad y(1) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$y(x) = \int x \cdot \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A kezdetiérték feltétel szerint

$$2 = y(1) = \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} + c = c - \frac{1}{4},$$

így $c = 9/4$, tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{9}{4}.$$

26. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \frac{x-8}{x^2-x-2}, \quad x \in]2, \infty[$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Az integrálást a parciális törtekre bontás módszerével végezzük. Alakítsuk

szoroztá a nevezőt. Ehhez keressük az $x^2 - x - 2$ polinom gyökeit. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

így $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Így azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x-8}{x^2-x-2} dx = \int \frac{x-8}{(x-2) \cdot (x+1)} dx.$$

A fenti törtet bontsuk fel parciális törtek összegére:

$$\frac{x-8}{(x-2) \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}.$$

Meghatározzuk az A és B együtthatókat. Ehhez szorozzuk az egyenletet a közös nevezővel:

$$x-8 = A \cdot (x+1) + B \cdot (x-2).$$

A zárójelet felbontva, majd x -et kiemelve az x -et tartalmazó tagokból azt kapjuk, hogy

$$x-8 = x \cdot (A+B) + A-2B.$$

A jobb oldal pontosan akkor egyezik meg a bal oldallal, ha az x együtthatója, illetve ha a konstans tag megegyezik a két oldalon, azaz ha teljesül az alábbi egyenletrendszer

$$\begin{aligned} 1 &= A+B \\ -8 &= A-2B. \end{aligned}$$

Az első egyenletből kivonva a másodikat $B = 3$ adódik, amelyet visszahelyettesítve az első egyenletbe $A = -2$. Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{x-8}{(x-2) \cdot (x+1)} dx &= \int \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x+1} dx = \\ &= -2 \cdot \ln|x-2| + 3 \cdot \ln|x+1| + c. \end{aligned}$$

Felhasználva a logaritmus azonosságait

$$y(x) = \int \frac{x-8}{(x-2) \cdot (x+1)} dx = \ln \left| \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2} \right| + c = \ln \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2} + c$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

27. Feladat. Egy részecske a vízszintes tengely mentén mozog $-4 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ állandó gyorsulással. Tudjuk, hogy a $t = 0$ időpillanatban a megfigyelés helyén van, azaz $s(0) = 0$ [m], továbbá a test sebessége a 0 időpillanatban $20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, azaz $v(0) = v_0 = 20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. Adjuk meg azt a t időpillanatot, amelyre $s(t) = 18$ [m].

Megoldás:

A $\dot{v}(t) = -4$ közvetlenül integrálható differenciálegyenlet megoldása

$$v(t) = -4t + c_1.$$

Mivel $v(0) = 20$, ezért $c_1 = 20$, így a sebesség-idő függvény

$$v(t) = -4t + 20.$$

Felhasználva, hogy $\dot{s}(t) = -4t + 20$, azt kapjuk, hogy

$$s(t) = -2t^2 + 20t + c_2.$$

Mivel $s(0) = 0$, ezért $c_2 = 0$, így a hely-idő függvény

$$s(t) = -2t^2 + 20t.$$

Azt a t időpillanatot keressük, amelyre $s(t) = 18$, így a

$$-2t^2 + 20t = 18 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 10t + 9 = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Ennek megoldására $t_1 = 1$ és $t_2 = 9$ adódik, így azt kaptuk, hogy a megfigyelés kezdete után 1 másodperccel és 9 másodperccel lesz a megfigyelés helyétől 18 méterre a részecske.

28. Feladat. Valaki egy egyenes utca A pontjából indul az autójával és egyenletesen gyorsulva 10 másodperc alatt ér az utca B pontjába, ahol a sebessége 72 [km/h]. Határozzuk meg az A és B pontok távolságát!

megoldás:

Jelöljük $s(t)$ -vel a t idő alatt megtett utat. Mivel az időt másodpercben mértük, ezért a sebességet átváltjuk [m/s]-ra: 72 [km/h]= 20 [m/s]. A feltételek szerint

$$v(t) = at + b.$$

Mivel $v(0) = 0$, ezért

$$0 = a \cdot 0 + b,$$

így $b = 0$.

Mivel $v(10) = 20$, ezért

$$20 = a \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad a = 2.$$

Mivel a sebesség-idő függvény a hely-idő függvény deriváltja, ezért az

$$\dot{s}(t) = at + b$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ez egy közvetlenül integrálható differenciálegyenlet. Mindkét oldalt integrálva

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + b \cdot t + c = t^2 + c$$

adódik.

Mivel azt is tudjuk, hogy $s(0) = 0$, ezért

$$0 = s(0) = 0^2 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0.$$

Tehát a differenciálegyenlet megoldása $s(t) = t^2$. A 10 másodperc alatt megtett távolság

$$s(10) = 10^2 = 100 \text{ [m]}.$$

29. Feladat. Egy gépkocsi $54 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$ sebességről $5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ lassulással egyenletesen fékez. Számoljuk ki a fékút hosszát!

Megoldás:

Mivel

$$v(0) = v_0 = 54 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right] = 15 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

és $a = -5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$, ezért az előbbi modell szerint

$$v(t) = \int a \, dt = \int -5 \, dt = -5t + c_1.$$

Mivel $v(0) = 15$, ezért $c_1 = 15$, így

$$v(t) = -5t + 15.$$

Azt az időpillanatot keressük, amikor a gépkocsi megáll, vagyis azt a t értéket, melyre $v(t) = 0$, így a

$$0 = 15 - 5t$$

egyenletet kell megoldanunk, amelyre azt kapjuk, hogy $t = 3$.

Ismételten felhasználva az előbbi modell eredményét a gépkocsi hely-idő függvénye

$$s(t) = \int a \cdot t + v_0 \, dt = \int -5 \cdot t + 15 \, dt = -\frac{5}{2} \cdot t^2 + 15t + c_2.$$

Mivel $s(0) = 0$, ezért $c_2 = 0$, így azt kapjuk, hogy a mozgás hely-idő függvénye

$$s(t) = -2,5t^2 + 15t.$$

Tehát

$$s(3) = -2,5 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 = 22,5 \text{ [m]},$$

így a fékút $22,5 \text{ [m]}$.

30. Feladat. Egy holdjáró $v = 450 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ sebességgel kezdi meg a holdraszálást. Amikor begyűjtja a fékezőrakétákat, azok $a = -2,5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$ állandó lassulást biztosítanak. A Hold felszínétől mérve, milyen magasságban kezdje meg a holdjáró a Holdra szállást (azaz, milyen magasságban aktiválja a fékezőrakétákat) ahhoz, hogy a landolás „sima” legyen (azaz a sebessége $v = 0$ legyen a Holdra érkezéskor)? (A holdjáró haladási irányát tekintjük pozitívnak!)

Megoldás:

Mivel $\dot{v}(t) = a(t)$, ezért

$$v(t) = -2,5t + c_1.$$

Felhasználva, hogy $v(0) = 450$ azt kapjuk, hogy

$$v(t) = -2,5t + 450.$$

Azt a t időpillanatot keressük, amikor $v(t) = 0$, így meg kell oldanunk a $-2,5t + 450 = 0$ egyenletet, amire azt kapjuk, hogy $t = 180$. Jelölje a t időpillanatban a holdjárónak a Hold felszínétől való magasságát $h(t)$. Ekkor

$$\dot{h}(t) = v(t),$$

így

$$\dot{h}(t) = -2,5t + 450$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$h(t) = -1,25t^2 + 450t + c_2.$$

A $t = 0$ időpillanatban $h(0) = 0$, így

$$h(t) = -1,25t^2 + 450t.$$

Tehát

$$h(180) = -1,25 \cdot 180^2 + 450 \cdot 180 = 40\,500 \text{ [m]}.$$

Azt kaptuk, hogy a Hold felszínétől $40,5 \text{ [km]}$ magasságban kell aktiválni a fékezőrakétákat.

31. Feladat. Függőlegesen felfelé kilövünk egy nyílpuskából egy nyílvesszőt. Legyen a nyílvessző kezdősebessége $v_0 = 24,5 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$. Határozzuk meg, hogy a kilövés után mennyi idő múlva tér vissza a nyílvessző a kilövés helyére, ha a közegellenállástól eltekintünk!

Megoldás:

Newton második törvénye szerint egy test tömegének és gyorsulásának szorzata egyenlő a testre ható erők eredőjével. Jelen esetben a közegellenállástól eltekintünk, így a testre csak egy $m \cdot g$ nagyságú súlyerő hat, tehát az $m \cdot a = -m \cdot g$ egyenlethez jutunk. Felhasználva, hogy a gyorsulás-idő függvény a sebesség-idő függvény idő szerinti deriváltja azt kapjuk, hogy

$$m \cdot \dot{v}(t) = -m \cdot g, \quad \text{azaz} \quad \dot{v}(t) = -g.$$

Ez egy közvetlenül integrálható egyenlet, így mindkét oldalt integrálva

$$v(t) = -g \cdot t + c_1$$

adódik. Mivel $v(0) = 24,5$, ezért $c_1 = 24,5$, így

$$v(t) = -g \cdot t + 24,5.$$

Felhasználva, hogy a sebesség-idő függvény a hely-idő függvény deriváltja azt kapjuk, hogy

$$\dot{h}(t) = -g \cdot t + 24,5.$$

Mindkét oldalt integrálva

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + 24,5 \cdot t + c_2$$

adódik. Mivel $h(0) = 0$, ezért $c_2 = 0$, így a függőlegesen kilőtt nyílvessző hely-idő függvénye

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + 24,5 \cdot t.$$

Azt az időpillanatot keressük, amikor $h(t) = 0$, így a

$$-4,9t^2 + 24,5t = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy

$$4,9t \cdot (-t + 5) = 0.$$

Az egyenlet megoldása $t_1 = 0$, illetve $t_2 = 5$.

Azt kaptuk tehát, hogy a kilövés után 5 másodperccel tér vissza a nyílvessző a kilövés helyére.

32. **Feladat.** Egy fegyverkísérlet során egy légvédelmi ágyúval egy 45 méter magas dombról tüzelünk függőlegesen felfelé. A lövedék kezdősebessége $40 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ nagyságú. A légellenállást elhanyagoljuk. (A számolás során legyen $g = 10 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$.)

- Adjuk meg a lövedék földtől való távolságát leíró függvényt!
- Milyen magasan lesz a lövedék két másodperccel a kilövés után?
- Milyen magasra repül fel a lövedék?
- Mennyi idő telik el, amíg földet ér a lövedék?

Megoldás:

- a) A lövedék mozgásegyenlete

$$-m \cdot g = m \cdot a(t),$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$a(t) = -g.$$

Ez egy közvetlenül integrálható egyenlet, így mindkét oldalt integrálva

$$v(t) = -g \cdot t + c_1$$

adódik. Mivel $v(0) = 40$, ezért $c_1 = 40$, így a sebesség-idő függvény

$$v(t) = -g \cdot t + 40.$$

Felhasználva, hogy a sebesség-idő függvény a hely-idő függvény deriváltja azt kapjuk, hogy

$$\dot{v}(t) = -g \cdot t + 40.$$

Mindkét oldalt integrálva

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + 40t + c_2$$

adódik. Mivel $h(0) = 45$, ezért $c_2 = 45$, így a mozgás hely-idő függvénye

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + 40t + 45 = -5t^2 + 40t + 45.$$

Tehát a lövedék t másodperccel a fellövés után

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v(0) \cdot t + h(0) = -5t^2 + 40t + 45$$

méter magasságban lesz.

- b) A lövedék magassága két másodperccel a fellövés után

$$h(2) = -5 \cdot 2^2 + 40 \cdot 2 + 45 = 105 \text{ [m]}.$$

- c) A lövedék abban az időpillanatban éri el a maximális magasságot, amikor $h'(t) = 0$, azaz

$$-10t + 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 4,$$

így 4 másodperccel a fellövés után éri el a maximális magasságot. Ekkor a magassága

$$h(4) = -5 \cdot 4^2 + 40 \cdot 4 + 45 = 125 \text{ [m]}.$$

- d) A lövedék akkor ér földet, amikor

$$-5t^2 + 40t + 45 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 8t - 9 = 0$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének felhasználásával

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}$$

adódik, így a fellövés után 9 másodperccel ér földet a lövedék.

33. **Feladat.** Egy gáz adiabatikus állapotváltozásánál a nyomás a térfogat függvényében a Poisson-egyenlet segítségével írható le:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^k \quad \Rightarrow \quad p(V) = p_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V}\right)^k,$$

ahol p_0 a normál nyomást jelöli.

Egy $V_0 = 0,1 \text{ [m}^3\text{]}$ térfogatú henger alakú edényben lévő normál nyomású levegőt adiabatikusan összenyomunk $V = 0,01 \text{ [m}^3\text{]}$ térfogatra. Levegő esetén $k = 1,4$. A levegő nyomása $101\,325 \text{ [Pa]}$. Mekkora a végzett munka?

Megoldás:

A végzett munkára felírható a

$$W'(V) = -p(V)$$

differenciálegyenlet, amiből

$$W(V) = \int -p(V) \, dV.$$

Tehát

$$W(V) = p_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V}\right)^k \, dV = -p_0 \cdot V_0^k \cdot \frac{V^{-k+1}}{-k+1} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

Ha $V = V_0$, akkor a végzett munka 0, ami a $W(V_0) = 0$ kezdetérték feltételt jelenti. Ezt felhasználva

$$0 = -p_0 \cdot V_0^k \cdot \frac{V_0^{-k+1}}{-k+1} + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{p_0 \cdot v_0}{1-k}.$$

Tehát a végzett munka a térfogat függvényében

$$\begin{aligned} W(V) &= -p_0 \cdot V_0^k \cdot \frac{V^{-k+1}}{-k+1} + \frac{p_0 \cdot v_0}{1-k} = \frac{p_0 \cdot V_0}{1-k} \cdot \left(1 - \left(\frac{V_0}{V}\right)^{k-1}\right) \\ &= \frac{101\,325 \cdot 0,1}{1-1,4} \cdot \left(1 - \left(\frac{0,1}{0,01}\right)^{1,4-1}\right) = 38\,250 [J]. \end{aligned}$$

34. Feladat. Egy vállalatnál egy adott termék eladásából származó határbevételi függvényre az

$$r'(x) = 2 - \frac{2}{(x+1)^2}$$

differenciálegyenlet teljesül, ahol r -et ezer dollárban, x -et ezer darabban mérik. Adjuk meg a bevételi függvényt!

Megoldás:

A bevételi függvény

$$r(x) = \int 2 - \frac{2}{(x+1)^2} dx = 2x + \frac{2}{x+1} + c.$$

Mivel 0 darab termék gyártása esetén a bevétel is 0, így az $r(0) = 0$ kezdetiérték feltétellel élünk. Ezt felhasználva

$$0 = 0 + 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = -2,$$

így a bevételi függvény

$$r(x) = 2x + \frac{2}{x+1} - 2.$$

35. Feladat. Egy vállalatnál egy adott termék esetén a határkölség függvényre a

$$c'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

differenciálegyenlet teljesül, ahol c -t ezer dollárban, x -et ezer darabban mérik. Tudjuk továbbá azt is, hogy a termékek gyártása során 50 000 dollár fixköltséggel kell számolni. Adjuk meg a költség függvényt!

Megoldás:

A költség függvény

$$c(x) = \int \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + k.$$

Mivel a fixköltség 50 000 forint, ezért $c(0) = 50$, így Mivel 0 darab termék gyártása esetén a bevétel is 0, így $k = 50$. Ezt felhasználva a költség függvény

$$c(x) = \sqrt{x} + 50.$$

36. Feladat. A szobába beropült két hógolyó. Az egyik sugara kétszer akkora, mint a másiké. A hógolyókat tekintsük szabályos gömb alakúnak. A hógolyó tömegének (olvadásának) változási gyorsasága arányos a hógolyó felszínével. Mekkora lesz a nagyobb hógolyó akkor, amikor a kisebbik elolvad?

Megoldás:

Jelölje $r(t)$ a hógolyó sugarát a t időpillanatban.

A hógolyó térfogata a t időpillanatban

$$V(r(t)) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3(t).$$

A hógolyó felszíne a t időpillanatban

$$V(r(t)) = 4\pi \cdot r^2(t).$$

A feladat feltétele szerint a hógolyó tömegének változási gyorsasága arányos a felszínével, így

$$\dot{m}(t) = -k \cdot A(r(t)),$$

ahol $k > 0$ az olvadás változási gyorsaságára jellemző konstans.

A hógolyó tömege a t időpillanatban

$$m(t) = \rho \cdot V(r(t)),$$

ahol ρ a hógolyó sűrűsége. Ezt felhasználva az

$$\dot{m}(t) = -k \cdot A(r(t))$$

egyenlet

$$\rho \cdot \dot{V}(r(t)) \cdot \dot{r}(t) = -k \cdot 4\pi \cdot r^2(t)$$

alakú lesz. Mivel

$$\dot{V}(r(t)) = 4\pi \cdot r^2(t),$$

ezért a megoldandó differenciálegyenlet

$$\rho \cdot 4\pi \cdot r^2(t) \cdot \dot{r}(t) = -k \cdot 4\pi \cdot r^2(t),$$

így

$$\dot{r}(t) = -\frac{k}{\rho}.$$

Ez egy közvetlenül integrálható differenciálegyenlet, amelynek megoldása

$$r(t) = -\frac{k}{\rho} \cdot t + C.$$

Ha a kisebbik hógolyó sugara a megfigyelés kezdetekor R , akkor az $r(0) = R$ kezdetiérték feltételből $C = R$ következik, így a kezdetiérték feladat megoldása, ami a kisebbik hógolyó sugara az idő függvényében

$$r_1(t) = -\frac{k}{\rho} \cdot t + R.$$

A nagyobbik hógolyó sugara az idő függvényében

$$r_2(t) = -\frac{k}{\rho} \cdot t + 2R.$$

Jelölje t^* azt az időpillanatot, amikor a kisebbik hógolyó elolvad. Ebben az időpillanatban $r_1(t^*) = 0$ teljesül, így

$$-\frac{k}{\rho} \cdot t^* + R = 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$t^* = \frac{R}{k} \cdot \rho.$$

Ekkor

$$r_2(t^*) = -\frac{k}{\rho} \cdot \frac{R}{k} \cdot \rho + 2R = R.$$

Tehát a nagyobbik hógolyó sugara az eredeti sugár fele lesz (azaz pontosan akkora, amekkora a kisebbik hógolyó sugara volt az olvadás kezdetekor).

37. Feladat. Határozzuk meg az $y'(x) = \frac{1}{x+1}$ differenciálegyenletnek azon megoldásfüggvényét, amelynek grafikonja áthalad a $P = (0; 2)$ ponton!

Megoldás:

A differenciálegyenlet megoldása

$$y(x) = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + c.$$

A $P = (0; 2)$ pont illeszkedik az y függvény grafikonjára, ezért

$$2 = \ln 1 + c \quad \Rightarrow \quad c = 2,$$

így a keresett függvény

$$y(x) = \ln|x + 1| + 2.$$

38. **Feladat.** Tekintsük az

$$y'(x) = \frac{x + 6}{\sqrt{x}}, \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

- Határozzuk meg az y megoldásfüggvény leképezési szabályát!
- Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az y függvény értelmezhető!
- Adjuk meg az y függvény zérushelyét!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Adjuk meg az(oka)t az intervallumo(ka)t, amely(ek)en az y függvény konvex, illetve az(oka)t, amely(ek)en konkáv! Határozzuk meg az inflexiósponto(ka)t, ha létez(ne)k!
- Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!
- Injektív-e az y függvény?
- Korlátos-e az y függvény?
- Periodikus-e az y függvény?
- Határozzuk meg az y függvény értékészletét!

Megoldás:

a) Mivel

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \frac{x + 6}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} + 6 \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 6 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + 12 \cdot \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

és $y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$, ezért

$$y(x) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + 12 \cdot \sqrt{x}.$$

b) A \sqrt{x} függvény miatt $x \geq 0$ kell, hogy teljesüljön, ezért

$$\mathcal{D}_y = [0; \infty[.$$

c) A zérushelyet az $y(x) = 0$ egyenlet megoldása adja, tehát az

$$\sqrt{x} \cdot \left(\frac{2}{3}x + 12 \right) = 0$$

egyenlet megoldása, amiből azt kapjuk, hogy $x = 0$ vagy $\frac{2}{3}x + 12 = 0$, amiből $x = -18$, ami nem lehetséges az értelmezési tartomány miatt. Tehát a függvény egyetlen zérushelye $x = 0$.

d) Mivel

$$y'(x) = \frac{x+6}{\sqrt{x}},$$

ezért az

$$\frac{x+6}{\sqrt{x}} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, amiből azt kapjuk, hogy $x = -6$, ami nem eleme az értelmezési tartománynak, így az $y'(x)$ függvénynek nincs zérushelye, tehát az y függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

Mivel $y'(x) \geq 0$ minden $x \geq 0$ esetén, ezért y monoton növekvő.

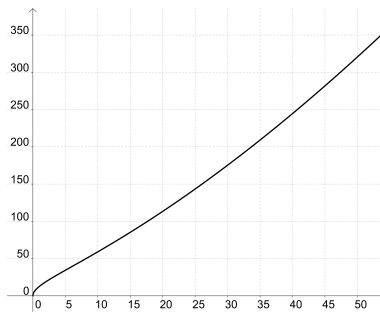
e) Mivel

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\sqrt{x} - (x+6) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x+6}{\sqrt{x}}}{x} = \\ &= \frac{2x - x - 6}{2x \cdot \sqrt{x}} = \frac{x-6}{2x \cdot \sqrt{x}}, \end{aligned}$$

ezért az $y''(x) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása $x = 6$. A második derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

x	$[0; 6[$	6	$]6; \infty[$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex
$y(x)$ értéke		$39, 19$	

f) Az y függvény grafikonja:



- g) Injektív, mert különböző elemekhez különböző elemeket rendel.
- h) A függvény nem korlátos, mert felülről nem korlátos.
- i) A függvény nem periodikus.
- j) Az y függvény értékkészlete $[0; \infty[$.

39. **Feladat.** Tekintsük az

$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatát!

- a) Határozzuk meg az y megoldásfüggvény leképezési szabályát!
- b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az y függvény értelmezhető!
- c) Adjuk meg az y függvény zérushelyét!
- d) Vizsgáljuk meg monotonitását és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- e) Adjuk meg az(oka)t az intervallumo(ka)t, amely(ek)en az y függvény konvex, illetve az(oka)t, amely(ek)en konkáv! Határozzuk meg az inflexióspontot, ha létezik!
- f) Vázzoljuk fel az y függvény grafikonját!
- g) Injektív-e az y függvény?
- h) Korlátos-e az y függvény?
- i) Periodikus-e az y függvény?
- j) Határozzuk meg az y függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Mivel

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int x \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \int 2x \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1+x^2} + c.\end{aligned}$$

és $y(0) = 1 + c \Rightarrow c = 0$, ezért

$$y(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

b) Az y függvény értelmezési tartománya

$$\mathcal{D}_y =] - \infty; \infty[.$$

c) A zérushelyet az $y(x) = 0$ egyenlet megoldása adja, tehát a

$$\sqrt{1+x^2} = 0$$

egyenlet megoldása, amiből azt kapjuk, hogy $x^2 = -1$, ami nem lehetséges, így az F függvénynek nincs zérushelye.

d) Mivel

$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

ezért az

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, aminek egyetlen megoldása $x = 0$.

Az első derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$]0; \infty[$
$y'(x)$	–	0	+
$y(x)$	\searrow	lokális minimum	\nearrow
$y(x)$ értéke		1	

e) Mivel

$$y''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1+x^2 - x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

így $y''(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért F konvex.

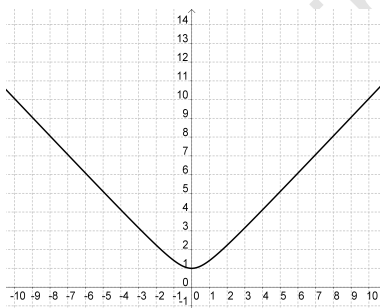
f) Az y függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \infty.$$

Az y függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty.$$

Az y függvény grafikonja:



g) Nem injektív.

h) Alulról korlátos, felülről nem korlátos, ezért nem korlátos.

i) Nem periodikus.

j) Az y függvény értékkészlete $[1; \infty[$.

40. **Feladat.** Tekintsük az

$$y'(x) = 2x + 2$$

differenciálegyenletet!

a) Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!

b) Határozzuk meg a differenciálegyenlet megoldását az $y(1) = 5$ kezdetiérték feltétel mellett!

c) Ábrázoljuk a kezdetiérték feladat megoldásfüggvényét!

- d) Adjuk meg a differenciálegyenlet azon megoldásfüggvényét, amely érinti az $y = 8x - 20$ egyenletű egyenest!

Megoldás:

- a) A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = \int 2x + 2 \, dx = x^2 + 2x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

- b) Mivel $y(1) = 5$, ezért

$$5 = 1 + 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = 2.$$

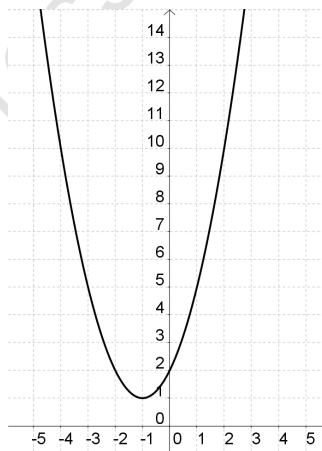
Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = x^2 + 2x + 2.$$

- c) Mivel

$$y(x) = x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1,$$

ezért a megoldásfüggvény grafikonja egy olyan parabola, amely az x^2 függvény grafikonjából a $(-1; 1)$ vektorral való eltolással származtatható. Tehát a megoldásfüggvény grafikonja:



- d) Az $y = 8x - 20$ érintő egyenest meredeksége 8, így $y'(x) = 8$, amiből azt kapjuk, hogy

$$8 = 2x + 2,$$

így $x = 3$. Ekkor $y = 8 \cdot 3 - 20 = 4$. Tehát a differenciálegyenlet $(3; 4)$ ponton áthaladó megoldásfüggvénye teljesíti a megadott tulajdonságot. Mivel a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = x^2 + 2x + c,$$

ezért a c konstans a

$$4 = 3^2 + 2 \cdot 3 + c$$

egyenletből kapjuk, amire $c = -11$ adódik. Tehát a keresett megoldásfüggvény

$$y(x) = x^2 + 2x - 11.$$

41. Feladat. Oldjuk meg az

$$x'(t) = \frac{t^2 - 4}{t - 2}, \quad x(4) = 18$$

kezdetiérték feladatot! Ábrázoljuk a megoldásfüggvényt!

Megoldás:

Mivel

$$t^2 - 4 = (t - 2) \cdot (t + 2),$$

ezért

$$\frac{t^2 - 4}{t - 2} = \frac{(t - 2) \cdot (t + 2)}{t - 2} = t + 2,$$

így

$$\int \frac{t^2 - 4}{t - 2} dt = \int t + 2 dt = \frac{t^2}{2} + 2t + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Tehát

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + 2t + c.$$

Mivel $x(4) = 18$, ezért

$$18 = \frac{4^2}{2} + 2 \cdot 4 + c \quad \Rightarrow \quad c = 2.$$

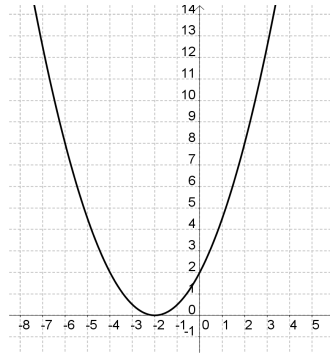
Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + 2t + 2.$$

Mivel

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot (t^2 + 4t + 4) = \frac{1}{2} \cdot (t + 2)^2,$$

ezért a függvény grafikonja:



Megjegyezzük, hogy a megoldásfüggvény minden valós szám esetén értelmezhető, azonban a differenciálegyenlet $t = 2$ esetén nem értelmezett.

42. Feladat. Adjuk meg az

$$x'(t) = \frac{t^2 - 6t + 9}{t - 3}, \quad x(0) = 6$$

kezdetiérték feladat megoldását! Határozzuk meg megoldásfüggvény szélsőértékének helyét!

Megoldás:

Mivel

$$t^2 - 6t + 9 = (t - 3)^2,$$

ezért

$$\frac{t^2 - 6t + 9}{t - 3} = \frac{(t - 3)^2}{t - 3} = t - 3,$$

így

$$\int \frac{t^2 - 6t + 9}{t - 3} dt = \int t - 3 dx = \frac{t^2}{2} - 3t + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Tehát

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - 3t + c.$$

Mivel $x(0) = 6$, ezért

$$6 = \frac{0^2}{2} + 0 \cdot 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = 6.$$

Tehát a megoldásfüggvény

$$x(t) = \frac{t^2}{2} - 3t + 6.$$

Mivel

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot (t^2 - 6t + 12) = \frac{1}{2} \cdot [(t - 3)^2 + 3] = \frac{1}{2} \cdot (t - 3)^2 + 1,5,$$

így az y függvény minimum helye $t = 3$, minimum értéke $x(3) = 1,5$.

Megjegyezzük, hogy a megoldásfüggvény minden valós szám esetén értelmezhető, azonban a differenciálegyenlet $t = 3$ esetén nem értelmezett.

43. Feladat. Adjuk meg az

$$x'(t) = \frac{e^{2t} - 4}{e^t - 2}, \quad x(0) = 4$$

kezdetiérték feladat megoldását!

Megoldás:

Mivel

$$e^{2t} - 4 = (e^t)^2 - 2^2 = (e^t - 2) \cdot (e^t + 2),$$

ezért

$$e^{2t} - 4 = \frac{(e^t - 2) \cdot (e^t + 2)}{e^t - 2} = e^t + 2,$$

így

$$\int \frac{e^{2t} - 4}{e^t - 2} dt = \int e^t + 2 dt = e^t + 2t + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Tehát

$$x(t) = e^t + 2t + c.$$

Mivel $x(0) = 4$, ezért

$$4 = e^0 + 2 \cdot 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 3.$$

Tehát a megoldásfüggvény

$$x(t) = e^t + 2t + 3.$$

Megjegyezzük, hogy a megoldásfüggvény minden valós szám esetén értelmezhető, azonban a differenciálegyenlet $t = \ln 2$ esetén nem értelmezett.

44. **Feladat.** Legyen $t \geq 0$. Határozzuk meg az

$$x'(t) = (\sqrt{t} + 2)^2, \quad x(4) = \frac{1}{3}$$

kezdetiérték feladat megoldását!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

azt kapjuk, hogy

$$(\sqrt{t} + 2)^2 = t + 4 \cdot \sqrt{t} + 4.$$

Az algebrai átalakítások és a határozatlan integrál tulajdonságai alapján:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int t + 4 \cdot \sqrt{t} + 4 \, dt = \int t + 4 \cdot t^{\frac{1}{2}} + 4 \, dt = \\ &= \frac{t^2}{2} + 4 \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4t + c = \frac{t^2}{2} + \frac{8}{3} \cdot \sqrt{t^3} + 4t + c. \end{aligned}$$

Mivel $x(4) = \frac{1}{3}$, ezért

$$8 + \frac{8}{3} \cdot 8 + 16 + c = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad c = -45,$$

így a megoldásfüggvény

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{8}{3} \cdot \sqrt{t^3} + 4t - 45.$$

45. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$x'(t) = (t^2 + 3t - 1)^2, \quad x(0) = 5$$

kezdetiérték feladat megoldásfüggvényét!

Megoldás:

Mivel

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

ezért

$$x(t) = t^4 + 9t^2 + 1 + 6t^3 - 2t^2 - 6t = t^4 + 6t^3 + 7t^2 - 6t + 1,$$

ezért

$$x(t) = \int t^4 + 6t^3 + 7t^2 - 6t + 1 \, dt = \frac{t^5}{5} + \frac{3t^4}{2} + \frac{7t^3}{3} - 3t^2 + t + c.$$

Felhasználva, hogy $F(0) = 5$ azt kapjuk, hogy

$$0 + c = 5 \quad \Rightarrow \quad c = 5.$$

Tehát a megoldásfüggvény

$$x(t) = \frac{t^5}{5} + \frac{3t^4}{2} + \frac{7t^3}{3} - 3t^2 + t + 5.$$

DUPress e-könyv

3. Szeparábilis differenciálegyenletek

46. **Feladat.** Döntsük el, hogy az alábbi differenciálegyenletek közül melyik szeparábilis és melyik nem:

- a) $y'(x) = x \cdot y(x) + x$;
 b) $y'(x) = x \cdot y(x) + x^2$;
 c) $y'(x) = e^{y(x)+x}$;
 d) $y(x) \cdot y'(x) = e^{x+y(x)} \cdot \sqrt{1+x^2}$.

Megoldás:

a) Mivel a differenciálegyenlet

$$y'(x) = (x + 1) \cdot y(x)$$

alakra hozható, ezért a $g(x) = x + 1$ és $h(y) = y$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x)),$$

így a differenciálegyenlet szeparábilis.

b) Nem szeparábilis.

c) Mivel a differenciálegyenlet

$$y'(x) = e^x \cdot e^{y(x)}$$

alakra hozható, ezért a $g(x) = e^x$ és $h(y) = e^y$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x)),$$

így a differenciálegyenlet szeparábilis.

d) Mivel a differenciálegyenlet

$$y'(x) = \frac{e^x \cdot e^{y(x)} \cdot \sqrt{1+x^2}}{y(x)}$$

alakra hozható, ezért a

$$g(x) = e^x \cdot \sqrt{1+x^2}$$

és a

$$h(y) = \frac{e^y}{y}$$

jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x)),$$

így a differenciálegyenlet szeparálható.

47. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = x \cdot y(x), \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vezessük be a $g(x) = x$ és $h(y) = y$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz. A szeparálható egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + c$$

adódik, amiből

$$y = e^{\frac{x^2}{2} + c} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^c = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

A kezdetiérték feltétel szerint $y(0) = 1$, így

$$1 = y(0) = C \cdot e^0 = C,$$

tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

48. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y(x) \cdot y'(x) = -x$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Az egyenletet átrendezve

$$y'(x) = -x \cdot \frac{1}{y(x)}$$

adódik.

Vezessük be a $g(x) = -x$ és $h(y) = \frac{1}{y}$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int y dy = \int -x dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása eleget tesz az

$$x^2 + y^2(x) = C$$

egyenletnek, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

49. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = -2y^2(x) \cdot x, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vezessük be a $g(x) = -2x$ és $h(y) = y^2$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int -2x dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{y} = -x^2 + c$$

adódik, amiből

$$y = \frac{1}{x^2 - c}.$$

A kezdetiérték feltétel szerint $y(0) = -\frac{1}{2}$, így

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{-c} \quad \Rightarrow \quad c = 2,$$

tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 2}.$$

50. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \sqrt{y(x)} \cdot e^x, \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vezessük be a $g(x) = e$ és $h(y) = \sqrt{y}$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} dy = \int e^x dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$2 \cdot \sqrt{y} = e^x + c$$

adódik, amiből

$$y(x) = \left(\frac{e^x + c}{2} \right)^2.$$

A kezdetiérték feltétel szerint $y(0) = 0$, így

$$0 = y(0) = \frac{1 + c}{2} \quad \Rightarrow \quad c = -1,$$

tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \left(\frac{e^x - 1}{2} \right)^2.$$

51. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = 3x^2 \cdot y(x), \quad y(0) = 3$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vezessük be a $g(x) = x$ és $h(y) = y$. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 3x^2 dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |y| = x^3 + c$$

adódik, amiből

$$y = e^{x^3+c} = e^{x^3} \cdot e^c = C \cdot e^{x^3}.$$

Mivel $y(0) = 3$, ezért

$$3 = y(0) = C \cdot e^0 = C,$$

tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 3 \cdot e^{x^3}.$$

52. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = \frac{\sin x}{y^2(x)}$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet átírható az

$$y'(x) = \frac{\sin x}{y^2} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = \sin x \cdot \frac{1}{y^2(x)},$$

alakra, ezért a $g(x) = \sin x$ és $h(y) = \frac{1}{y^2}$ függvények bevezetésével az általános elméletben szereplő

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk. Behelyettesítve az adatokat, azt kapjuk, hogy

$$\int y^2 dy = \int \sin x dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\frac{y^3}{3} = -\cos x + c$$

adódik. Ebből y -t kifejezve

$$y(x) = \sqrt[3]{3 \cdot (c - \cos x)}$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

53. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = \sin^2(y(x)) - 1 + x \cdot \cos^2(y(x))$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Mivel $\sin^2 y(x) = 1 - \cos^2 y(x)$, ezért az egyenlet átírható az

$$y'(x) = \cos^2(y(x)) \cdot (x - 1)$$

alakra, ezért a $g(x) = x - 1$ és $h(y) = \cos^2 y$ függvények bevezetésével az általános elméletben szereplő

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk. Behelyettesítve az adatokat, azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int x - 1 dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\operatorname{tg} y = \frac{x^2}{2} - x + c$$

adódik. Ebből y -t kifejezve

$$y(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2}{2} - x + c \right)$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

54. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = y(x) \cdot \ln(y(x)), \quad y(0) = e$$

kezdetiérték feladatot, majd határozzuk meg a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértéket!

Megoldás:

Az egyenlet szeparábilis, legyen $g(x) = 1$ és $h(y) = y \cdot \ln y$. Ekkor fennáll az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre. Behelyettesítve az adatokat

$$\int \frac{1}{y \cdot \ln y} dy = \int 1 dx$$

adódik.

Az egyenlet bal oldala f'/f alakú integrál, ugyanis

$$\int \frac{1}{y \cdot \ln y} dy = \frac{\frac{1}{y}}{\ln y} dy = \ln |\ln y|,$$

míg a jobb oldal

$$\int 1 dx = x + c,$$

így azt kapjuk, hogy

$$\ln |\ln y| = x + c \Rightarrow \ln y = e^{x+c} = C \cdot e^x,$$

amiből

$$y(x) = e^{C \cdot e^x}$$

adódik.

Mivel $y(0) = e$, ezért

$$e = y(0) = e^{C \cdot e^0} = e^C,$$

így $C = 2$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{2 \cdot e^x}.$$

A keresett határérték

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 1.$$

55. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y(x), \quad x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Az egyenlet szeparábilis, a $g(x) = \operatorname{tg} x$ és $h(y) = \operatorname{tg} y$ jelölésekkel az elméletben ismertett tétel szerint az

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} y} dy = \int \operatorname{tg} x dx$$

egyenletet kell megoldanunk az y ismeretlenre.

A bal oldalt átalakítva f'/f alakú integrált kapunk:

$$\int \frac{1}{\operatorname{tg} y} dy = \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \ln |\sin y|.$$

A jobb oldalon szereplő integrálást hasonlóan végezzük el:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = - \ln |\cos x|.$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$\ln |\sin y| = - \ln |\cos x| + c.$$

Ebből az egyenletből kifejezzük az y -t:

$$\begin{aligned}\ln |\sin y| &= -\ln |\cos x| + c \\ \sin y &= e^{-\ln |\cos x| + c} \\ \sin y &= e^{-\ln |\cos x|} \cdot e^c \\ \sin y &= e^{\ln |\cos x|^{-1}} \cdot C \\ \sin y &= \frac{1}{\cos x} \cdot C.\end{aligned}$$

Tehát a differenciálegyenlet megoldása

$$y(x) = \arcsin \left(\frac{C}{\cos x} \right),$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

56. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = -x \cdot e^{y(x)}$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Legyen $g(x) = -x$ és $h(y) = e^y$. Ekkor teljesül az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

összefüggés. Behelyettesítve az adatokat, azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{e^y} dy = \int -x dx.$$

A bal oldalt átalakítva e^{-y} adódik, így $f(ay + b)$ alakú függvényt kell integrálnunk:

$$\int \frac{1}{e^y} dy = \int e^{-y} dy.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-e^{-y} = -\frac{x^2}{2} + c$$

adódik. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva -1 -gyel, majd a $-c$ konstans helyett a C konstans írva azt kapjuk, hogy

$$e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C.$$

A kapott egyenletből kifejezve az y függvényt megkapjuk a differenciálegyenlet megoldását:

$$y(x) = -\ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right),$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

57. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2 \cdot (y(x) - 1)}, \quad y(0) = -1$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Legyen $g(x) = 3x^2 + 4x + 2$ és $h(y) = \frac{1}{2 \cdot (y-1)}$. Ekkor teljesül az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

összefüggés. Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int 2 \cdot (y - 1) dy = \int 3x^2 + 4x + 2 dx.$$

A bal oldali integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\int 2 \cdot (y - 1) dy = y^2 - 2y + c_1.$$

A jobb oldali integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\int 3x^2 + 4x + 2 dx = x^3 + 2x^2 + 2x + c_2.$$

Tehát az

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenletet nullára redukálva az

$$y^2 - 2y - x^3 - 2x^2 - 2x - c = 0$$

egyenlethez. Az egyenlet megoldása

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4c}}{2} = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 1 + c}.$$

Mivel $y(0) = -1$, ezért $-1 = 1 + \sqrt{1 + c}$, vagyis $-2 = \sqrt{1 + c}$, ami nem lehetséges, vagy $-1 = 1 - \sqrt{1 + c}$, amiből azt kapjuk, hogy $c = 3$.

58. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \frac{y(x) \cdot \cos x}{1 + 2y^2(x)}, \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Legyen $g(x) = \cos x$ és $h(y) = \frac{y}{1+2y^2}$. Ekkor teljesül az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

összefüggés. Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1 + 2y^2}{y} dy = \int \cos x dx.$$

A bal oldali integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1 + 2y^2}{y} dy = \int \frac{1}{y} + 2y dy = \ln |y| + y^2 + c_1.$$

A jobb oldali integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\int \cos x dx = \sin x + c_2.$$

Tehát

$$\ln |y| + y^2 = \sin x + c$$

Mivel $y(0) = 1$, ezért $1 = c$, így a kezdetiérték feladat megoldása azon y függvény, amely eleget tesz az

$$\ln |y| + y^2 = \sin x + 1$$

egyenletnek. Az egyenletből az y függvényt nem tudjuk kifejezni, így implicit megoldást kaptunk.

59. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = 2y^2(x) + x \cdot y^2(x), \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Az differenciálegyenlet szorzattá alakítható, így ekvivalens az

$$y'(x) = y^2(x) \cdot (2 + x)$$

egyenlettel. Legyen $g(x) = 2 + x$ és $h(y) = y^2$. Ekkor teljesül az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

összefüggés. Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 2 + x dx.$$

A bal oldali integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int y^{-2} dy = -\frac{1}{y} + c_1.$$

A jobb oldali integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\int 2 + x dx = 2x + \frac{x^2}{2}.$$

Tehát az

$$-\frac{1}{y} = 2x + \frac{x^2}{2} + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$y(x) = \frac{-1}{2x + \frac{x^2}{2} + c} = \frac{-2}{4x + x^2 + 2c}.$$

Mivel $y(0) = 1$, ezért $c = -1$, így a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{-2}{4x + x^2 - 2}.$$

60. Feladat. Tekintsük

$$y'(x) = e^x \cdot \cos^2 y(x), \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

kezdetiérték feladatot!

- a) Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- b) Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- c) Adjuk meg a megoldásfüggvény deriváltját!
- d) Határozzuk meg az $y''(x)$ függvényt!
- e) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az $y(x)$ függvényt!
- f) Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az $y(x)$ függvényt!
- g) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértékét!
- h) Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértékét!
- i) Vázzuk fel az $y(x)$ függvény grafikonját!
- j) Adjuk meg az $y(x)$ függvény értékkészletét!

Megoldás:

- a) Vezessük be a $g(x) = e^x$ és a $h(y) = \cos^2 y$ jelöléseket. Tekintsük az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet. A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int e^x dx.$$

Az integrálás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg} y = e^x + c,$$

amiből y -t kifejezve

$$y(x) = \operatorname{arctg}(e^x + c)$$

adódik.

- b) Mivel $y(0) = \frac{\pi}{4}$, ezért

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(e^0 + c) \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 + c,$$

így $c = 0$, tehát a kezdetiérték probléma megoldása:

$$y(x) = \operatorname{arctg}(e^x).$$

c) Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = \frac{1}{1 + (e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}.$$

d) A hányados és összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{e^x \cdot (1 + e^{2x}) - e^x \cdot (2 \cdot e^{2x})}{(1 + e^{2x})^2} = \frac{e^x + e^{3x} - 2 \cdot e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2} = \\ &= \frac{e^x - e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2} \end{aligned}$$

adódik.

e) Mivel $y'(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért az $y(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő, szélsőértéke nincs.

f) Az $y''(x)$ függvény zérushelye az

$$\frac{e^x - e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2} = 0$$

egyenlet megoldása. Egy tört csak akkor lehet nulla, ha a számlálója nulla, így az

$$e^x - e^{3x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^x \cdot (1 - e^{2x}) = 0.$$

egyenlethez jutunk. Mivel $e^x \neq 0$, ezért

$$1 - e^{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

A második derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$]0; \infty[$
$y''(x)$	$+$	0	$-$
$y(x)$	konvex	inflexiós pont	konkáv
$y(x)$ értéke		$\frac{\pi}{4}$	

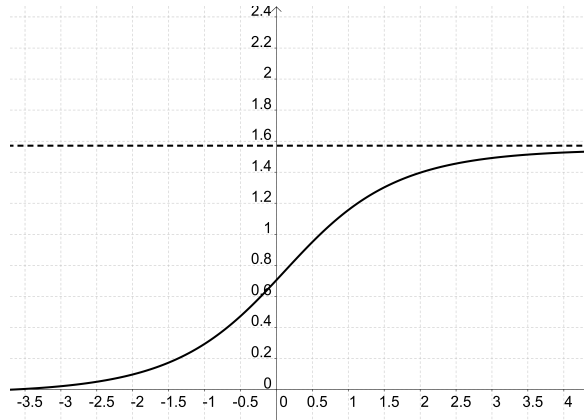
g) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg e^x = \arctg 0 = 0.$$

h) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} e^x = \frac{\pi}{2}.$$

i) A függvény grafikonja:



j) Az $y(x)$ függvény értékkészlete: $]0; \frac{\pi}{2}[$.

61. Feladat. Tekintsük

$$y'(x) = (3x^2 - 3) \cdot e^{x^3 - 3x - y(x)}, \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény deriváltját!
- Határozzuk meg az $y''(x)$ függvényt!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az $y(x)$ függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az $y(x)$ függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértékét!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértékét!
- Vázzuk fel az $y(x)$ függvény grafikonját!

Megoldás:

a) Alakítsuk át a differenciálegyenletet:

$$y'(x) = (3x^2 - 3) \cdot e^{x^3-3x} \cdot e^{-y(x)}.$$

A megállapodásunk szerint az egyenlet

$$y' = (3x^2 - 3) \cdot e^{x^3-3x} \cdot e^{-y}$$

alakban is felírható.

Vezessük be a $g(x) = e^{x^3-3x}$ és a $h(y) = e^{-y}$ jelöléseket.

Tekintsük az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet. A megfelelő függvények behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{e^{-y}} dy = \int e^{x^3-3x} \cdot (3x^2 - 3) dx,$$

azaz

$$\int e^y dy = \int e^{x^3-3x} \cdot (3x^2 - 3) dx,$$

Az integrálás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$e^y = e^{x^3-3x} + c,$$

amiből y -t kifejezve

$$y(x) = \ln(e^{x^3-3x} + c)$$

adódik.

b) Mivel $y(0) = 0$, ezért

$$0 = \ln(e^0 + c) \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 + c,$$

így $c = 0$, tehát a kezdetiérték probléma megoldása:

$$y(x) = x^3 - 3x.$$

c) Az $y(x)$ függvény deriváltja

$$y'(x) = 3x^2 - 3.$$

d) Az $y(x)$ függvény második deriváltja

$$y''(x) = 6x$$

adódik.

e) Az $y'(x)$ függvény zérushelyei, azaz az $x^3 - 1 = 0$ egyenlet megoldásai $x = \pm 1$.

Az $y'(x)$ függvény előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; -1[$	$- 1$	$] - 1; 1[$	1	$]1; \infty[$
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	\nearrow	lok. max.	\searrow	lok. min.	\nearrow
$y(x)$ értéke		1		$- 1$	

f) Az $y''(x)$ függvény zérushelye, azaz a $6x = 0$ egyenlet megoldása: $x = 0$.

A második derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$]0; \infty[$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex
$y(x)$ értéke		0	

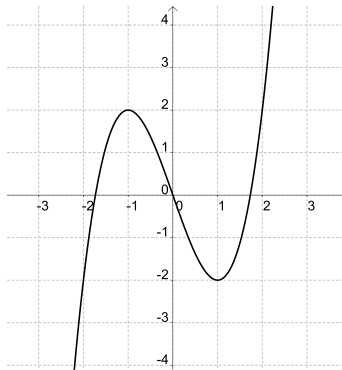
g) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x = -\infty.$$

h) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x = \infty.$$

i) Az $y(x)$ függvény grafikonja:



62. **Feladat.** Tekintsük

$$y'(x) = 2x \cdot y(x), \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény deriváltját!
- Határozzuk meg az $y''(x)$ függvényt!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az $y(x)$ függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az $y(x)$ függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértékét!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértékét!
- Vázoljuk fel az $y(x)$ függvény grafikonját!
- Adjuk meg az $y(x)$ függvény értékkészletét!

Megoldás:

- Vezessük be a $g(x) = 2x$ és a $h(y) = y$ jelöléseket. Tekintsük az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet. A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx.$$

Az integrálás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\ln |y| = x^2 + c,$$

amiből y -t kifejezve

$$y(x) = C \cdot e^{x^2}$$

adódik.

b) Mivel $y(0) = 1$, ezért

$$1 = C \cdot e^0,$$

így $C = 1$, tehát a kezdetiérték probléma megoldása:

$$y(x) = e^{x^2}.$$

c) Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = 2x \cdot e^{x^2}.$$

d) A megoldásfüggvény második deriváltja

$$y''(x) = 2 \cdot e^{x^2} + 4x^2 \cdot e^{x^2} = (2 + 4x^2) \cdot e^{x^2}$$

adódik.

e) Az $y'(x) = 0$ egyenlet megoldása $x = 0$. A derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] - \infty; 0[$	0	$]0; \infty[$
$y'(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	\searrow	lokális minimum	\nearrow
$y(x)$ értéke		1	

f) Mivel $y''(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért az $y(x)$ függvény konvex, inflexiós pontja nincs.

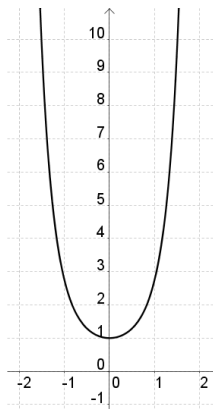
g) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2} = \infty.$$

h) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2} = \infty.$$

i) A függvény grafikonja:



j) Az $y(x)$ függvény értékészlete: $[1; \infty[$.

63. **Feladat.** Tekintsük

$$y'(x) = -2x \cdot y(x), \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- Határozzuk meg a kezdetiérték feladat y megoldásfüggvényét!
- Adjuk meg a megoldásfüggvény deriváltját!
- Határozzuk meg az $y''(x)$ függvényt!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az $y(x)$ függvényt!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az $y(x)$ függvényt!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$ határértékét!
- Számoljuk ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ határértékét!
- Vázoljuk fel az $y(x)$ függvény grafikonját!
- Adjuk meg az $y(x)$ függvény értékészletét!

Megoldás:

a) Vezessük be a $g(x) = 2x$ és a $h(y) = y$ jelöléseket. Tekintsük az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet. A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -2x dx.$$

Az integrálás elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\ln |y| = -x^2 + c,$$

amiből y -t kifejezve

$$y(x) = C \cdot e^{-x^2}$$

adódik.

b) Mivel $y(0) = 1$, ezért

$$1 = C \cdot e^0,$$

így $C = 1$, tehát a kezdetiérték probléma megoldása:

$$y(x) = e^{-x^2}.$$

c) Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}.$$

d) A megoldásfüggvény második deriváltja

$$y''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} + 4x^2 \cdot e^{-x^2} = (-2 + 4x^2) \cdot e^{-x^2}$$

adódik.

e) Az $y'(x) = 0$ egyenlet megoldása $x = 0$. A derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$] -\infty; 0[$	0	$]0; \infty[$
$y'(x)$	+	0	-
$y(x)$	\nearrow	lokális maximum	\searrow
$y(x)$ értéke		1	

f) Az $y''(x) = 0$ egyenlet megoldásai $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. A másodrendű derivált előjelét vizsgálva az alábbi táblázathoz jutunk:

x	$]-\infty; -\sqrt{\frac{1}{2}}[$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$]-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{2}}[$
$y''(x)$	+	0	-
$y(x)$	konvex	infl. pont	konkáv
$y(x)$ értéke		0,6065	

x	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$]\sqrt{\frac{1}{2}}; \infty[$
$y''(x)$	0	+
$y(x)$	infl. pont	konvex
$y(x)$ értéke	0,6065	

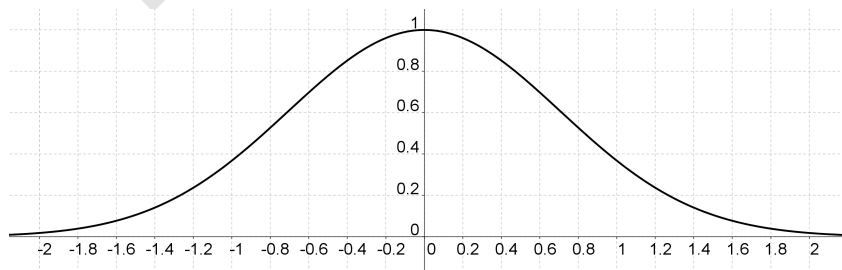
g) Az $y(x)$ függvény határértéke $-\infty$ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0.$$

h) Az $y(x)$ függvény határértéke ∞ -ben:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = 0.$$

i) A függvény grafikonja:



j) Az $y(x)$ függvény értékkészlete: $]0; 1]$.

64. **Feladat.** Egy folyadékcsepp a felszínével arányosan párolog. Egy folyadékcsepp a megfigyelés kezdetekor 5 [mm] sugarú, gömb alakú.

- Adjuk meg a folyadékcsepp sugarát az idő függvényében!
- Megfigyeltük, hogy a folyadékcsepp 5 másodperc múlva 3 mm sugarú volt. Adjuk meg a párolgásra jellemző együttható értékét!
- A megfigyelés után hány másodperccel lesz a folyadékcsepp sugara 1 [mm]?

Megoldás:

- A folyadékcsepp sugarának idő szerinti változási gyorsasága arányos a gömb sugarával, így felírható az

$$\dot{r}(t) = -k \cdot 4r^2(t) \cdot \pi$$

differenciálegyenlet. Ez egy szeparábilis egyenlet.

Legyen $h(r) = r^2$ és $g(t) = -4k \cdot \pi$. Meg kell oldanunk az

$$\int \frac{1}{h(r)} dr = \int g(t) dt$$

egyenletet az r ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{r^2} dr = \int -k \cdot \pi dt.$$

Az integrálásokat elvégezve

$$-\frac{1}{r} = -k \cdot \pi \cdot t + c$$

adódik, amiből

$$r(t) = \frac{1}{4k \cdot \pi \cdot t - c}.$$

Mivel $r(0) = 5$, ezért

$$5 = -\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{5},$$

így a folyadékcsepp sugara az idő függvényében

$$r(t) = \frac{1}{4k \cdot \pi \cdot t + \frac{1}{5}} = \frac{5}{20k \cdot \pi \cdot t + 1}.$$

b) Mivel $r(5) = 3$, ezért

$$3 = \frac{5}{100k \cdot \pi + 1} \quad \Rightarrow \quad 300k \cdot \pi + 3 = 5,$$

amiből azt kapjuk, hogy a keresett állandó értéke

$$k = \frac{1}{150\pi}.$$

c) Felhasználva, hogy $k = \frac{1}{150\pi}$ azt kapjuk, hogy a folyadéksepp sugara az idő függvényében

$$r(t) = \frac{5}{20 \cdot \frac{1}{150\pi} \cdot t + 1} = \frac{5}{\frac{2}{15}t + 1} = \frac{75}{2t + 15}.$$

Az $r(t) = 1$ egyenlet megoldását keressük, így meg az

$$1 = \frac{75}{2t + 15}$$

egyenletet kell megoldanunk. A közös nevezővel szorozva, majd az egyenletet rendezve

$$2t + 15 = 75 \quad \Rightarrow \quad t = 30$$

adódik, így a megfigyelés kezdete után 30 másodperccel lesz a folyadéksepp sugara 1 [mm].

65. Feladat. Egy bányakőzet megvizsgált darabja 100 [mg] uránt és 14 [mg] ólmot tartalmaz. Ismert az urán felezési ideje $4,5 \cdot 10^9$ év és, hogy 238 [g] urán teljes elbomlásakor 206 [g] ólom keletkezik. Állapítsuk meg a bányakőzet korát! (Tegyük fel, hogy a keletkezése pillanatában a kőzet nem tartalmazott ólmot.)

Megoldás:

Ha 238 [g] uránból 206 [g] ólom keletkezik, akkor 14 [mg] ólom

$$14 \cdot \frac{238}{206} = 16,1748 \text{ [mg]}$$

urán teljes elbomlásának terméke. Kezdetben a kőzetben

$$100 + 16,1748 \text{ [mg]}$$

urán volt. Az urán bomlására felírhatjuk az

$$\dot{N}(t) = -\lambda \cdot N(t)$$

differenciálegyenletet.

A differenciálegyenlet megoldásához tekintsük a $g(t) = -\lambda$ és $h(N) = N$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(N)} dN = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{N} dN = \int -\lambda dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln N = -\lambda \cdot t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$N(t) = e^{-\lambda \cdot t + c} = e^{-\lambda \cdot t} \cdot e^c = C \cdot e^{-\lambda \cdot t}.$$

Mivel az urán felezési ideje $4,5 \cdot 10^9$ év, ezért

$$N(4,5 \cdot 10^9) = \frac{N(0)}{2},$$

így

$$N(0) \cdot e^{-4,5 \cdot 10^9 \lambda} = \frac{N(0)}{2},$$

amiből $\lambda = 1,54 \cdot 10^{-10}$. Ezt felhasználva

$$116,1748 \cdot e^{-1,54 \cdot 10^{-10} t} = 100,$$

amiből $t = 9,73 \cdot 10^8$ éves a kőzet.

66. Feladat. Egy tartályban 100 liter sós oldat van, amely 8 gramm sót tartalmaz. A tartályba percenként 4 liter vizet engedünk be és 2 liter oldatot engedünk ki. Mennyi só marad az oldatban egy óra múlva?

Megoldás:

Jelölje a só mennyiségét s , az eltelt időt t .

A tartályban lévő oldat mennyisége t perc elteltével

$$100 - 2t + 4t = 100 + 2t.$$

Az oldat koncentrációja ekkor

$$\frac{s(t)}{100 + 2t}.$$

A Δt idő alatt kiáramló oldat mennyisége $2\Delta t$. A só mennyiségének megváltozása Δt idő alatt

$$\Delta s(t) = -\frac{s(t)}{100 + 2t} \cdot 2\Delta t,$$

amelyet átrendezve

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = -\frac{2s(t)}{100 + 2t}$$

adódik. Ha vesszük a $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenetet, akkor azt kapjuk, hogy

$$\dot{s}(t) = -\frac{2s(t)}{100 + 2t} \quad \Rightarrow \quad \dot{s}(t) = -\frac{s(t)}{50 + t}.$$

Vezessük be a $h(s) = s$ és a $g(t) = -\frac{1}{50+t}$ függvényeket.

A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(s)} ds = \int g(t) dt$$

egyenletet kell megoldanunk az s ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{s} ds = \int -\frac{1}{50 + t} dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln s = -\ln(50 + t) + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$s(t) = \frac{c}{50 + t}.$$

Mivel a 0 időpillanatban 8 gramm só volt az oldatban, ezért az $s(0) = 8$ kezdetiérték feltételt kell tekintenünk. Ezt felhasználva

$$8 = \frac{c}{50} \quad \Rightarrow \quad c = 400,$$

így a só mennyisége az oldatban (az idő függvényében)

$$s(t) = \frac{400}{50 + t}.$$

Egy perc (60 másodperc múlva) a só mennyisége

$$s(t) = \frac{400}{100} \approx 3,6 \text{ [g]}.$$

67. **Feladat.** Egy kisebb település lakossága 100 fő. A szaporodási ráta 0,3. A település maximális lélekszáma nem haladhatja meg az 1 000 főt. (Vagyis az eltartóképesség 1 000 fő.)

- Írjuk fel a logisztikus modellnek megfelelő differenciálegyenletet!
- Oldjuk meg az előbbi differenciálegyenletet, azaz adjuk meg a település egyedszámát az idő függvényében!
- Vázoljuk fel a függvény grafikonját!

Megoldás:

- a) A differenciálegyenlet

$$\dot{N}(t) = 0,3 \cdot N(t) - 0,0003 \cdot N^2(t),$$

vagyis

$$\dot{N}(t) = 0,3 \cdot N(t) \cdot (1 - 0,001 \cdot N(t)),$$

Ezen differenciálegyenlet megoldásához vezessük be a $g(t) = 0,3$ és a $h(N) = N \cdot (1 - 0,001N)$ függvényeket! Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(N)} dN = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{N \cdot (1 - 0,001N)} dN = \int 0,3 dt.$$

A bal oldalon szereplő integrált a parciális törtekre bontás módszerével tudjuk elvégezni. Tekintsük az

$$\frac{1}{N \cdot (1 - 0,001 \cdot N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{a - b \cdot N}$$

felbontást! Az egyenletet a közös nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$1 = A \cdot (1 - 0,001 \cdot N) + B \cdot N.$$

Az egyenletet fokszám szerint rendezve

$$1 = N \cdot (B - 0,001A) + A$$

adódik. Ebből azt kapjuk, hogy $A = 1$, így $B = 0,001$. Tehát

$$\frac{1}{N \cdot (1 - 0,001N)} = \frac{1}{N} + \frac{0,001}{1 - 0,001N}.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{N \cdot (1 - 0,001N)} dN &= \int \frac{1}{N} + \frac{0,001}{1 - 0,001N} dN = \\ &= \int \left(\frac{1}{N} - \frac{-0,001}{1 - 0,001 \cdot N} \right) dN = \\ &= (\ln |N| - \ln |1 - 0,001N|) = \ln \left| \frac{N}{1 - 0,001 \cdot N} \right|. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\int 0,3 dt = 0,3t + c,$$

így az

$$\ln \left| \frac{N}{1 - 0,01N} \right| = 0,3t + c$$

egyenlethez jutunk, így

$$\ln \left| \frac{N}{1 - 0,01N} \right| = 0,3t + c_1.$$

Ebből

$$\frac{N}{1 - 0,01N} = e^{0,3t} \cdot C$$

adódik. A nevezővel szorozva mindkét oldalt azt kapjuk, hogy

$$N = e^{0,3t} \cdot C \cdot (1 - 0,01N).$$

Az N -et kifejezve

$$N(t) = \frac{e^{0,3t} \cdot C}{1 + 0,001 \cdot e^{0,3t} \cdot C} = \frac{C}{e^{-0,3t} + 0,001C}$$

adódik. Felhasználva, hogy $N(0) = 100$ azt kapjuk, hogy

$$100 = \frac{C}{1 + 0,001C},$$

így

$$100 + 0,1C = C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1000}{9}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$N(t) = \frac{\frac{1000}{9}}{e^{-0,3t} + \frac{1}{9}} = \frac{1000}{9 \cdot e^{-0,3t} + 1}.$$

b) Az N függvénynek nincs zérushelye.

A függvény határértéke a ∞ -ben

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 1000.$$

A függvény határértéke a 0 helyen

$$\lim_{t \rightarrow 0} N(t) = 100.$$

Az N függvény deriváltja

$$\dot{N}(t) = 1000 \cdot \frac{-9 \cdot e^{-0,3t} \cdot (-0,3)}{(9 \cdot e^{-0,3t} + 1)^2} = 1000 \cdot \frac{2,7 \cdot e^{-0,3t}}{(9 \cdot e^{-0,3t} + 1)^2}$$

Mivel $\dot{N}(t) > 0$, ezért a függvény szigorúan monoton növekvő.

Az N függvény második deriváltja

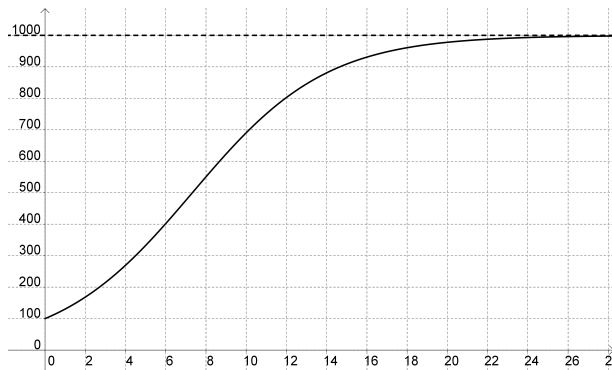
$$\begin{aligned} \ddot{N}(t) &= 1000 \cdot \frac{2,7 \cdot e^{-0,3t} \cdot (-0,3) \cdot (-9 \cdot e^{-0,3t} + 1)^2}{(9 \cdot e^{-0,3t} + 1)^4} - \\ &- 1000 \cdot \frac{2,7 \cdot e^{-0,3t} \cdot 2 \cdot (9 \cdot e^{-0,3t} + 1) \cdot 9 \cdot e^{-0,3t} \cdot (-0,3)}{(9 \cdot e^{-0,3t} + 1)^4} = \\ &= 1000 \cdot \frac{2,7 \cdot e^{-0,3t} \cdot (-0,3) \cdot (-9 \cdot e^{-0,3t} + 1) \cdot (-9 \cdot e^{-0,3t} + 1)}{(9 \cdot e^{-0,3t} + 1)^4}. \end{aligned}$$

A $\ddot{N}(t) = 0$ egyenlet megoldása

$$t = \frac{\ln \frac{1}{9}}{-0,3} \approx 7,32.$$

t	$]0; 7,32[$	$7,32$	$]7,32; \infty[$
$\ddot{N}(t)$	$+$	0	$-$
$N(t)$	konvex	inflexiós pont	konkáv
$N(t)$ értéke		500	

Az előbbieket szerint a függvény grafikonja:



68. **Feladat.** Egy 98°C -os kemény tojást egy nagy tál 18°C -os vízbe teszünk. A tojás hőmérséklete 5 perc alatt 38°C -ra csökken. (A környezet hőmérséklete nem változik.)

- Írjuk fel a hűlésre jellemző differenciálegyenletet!
- Adjuk meg a tojás hőmérsékletét az idő függvényében!
- Mennyi lesz a tojás hőmérséklete 6 perccel a tálba helyezés után?
- Mikor lesz a tojás hőmérséklete 20°C ?

Megoldás:

- Jelöljük a környezet (jelen esetben a tálban lévő víz) hőmérsékletét T_k -val, a test hőmérsékletét a t időpillanatban $T(t)$ -vel és az ismert, $t = 0$ időpillanatbeli hőmérsékletét T_0 -lal!

A Newton-féle hűlési törvény szerint a test hőmérsékletének $\dot{T}(t)$ változási gyorsasága arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével, azaz $T - T_k$ -val. Ezt felhasználva a

$$\dot{T}(t) = -\kappa \cdot (T(t) - T_k)$$

differenciálegyenletet kapjuk, ahol κ rögzített, a test anyagára és alakjára jellemző pozitív állandó.

- A T függvény meghatározásához rendelkezésünkre áll az előbbi differenciálegyenlet. Ezen kívül a T függvénynek ismerjük még egy rögzített pontjában az értékét, hiszen tudjuk, hogy kezdetben a test hőmérséklete T_0 . Így egy szeparábilis differenciálegyenlethez tartozó kezdetiérték feladatot kapunk.

A differenciálegyenlet megoldásához tekintsük a $g(t) = -\kappa$, valamint a

$h(T) = T - T_k$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(T)} dT = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{T - T_k} dT = \int -\kappa dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln(T - T_k) = -\kappa \cdot t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$T(t) = T_k + e^{-\kappa \cdot t + c} = T_k + e^{-\kappa \cdot t} \cdot e^c = T_k + C \cdot e^{-\kappa \cdot t}.$$

Mivel $T(0) = T_0$, ezért $T_0 - T_k = C$, így a t időpillanatban a test hőmérséklete

$$T(t) = T_k + (T_0 - T_k) \cdot e^{-\kappa \cdot t}.$$

Az adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$T(t) = 18 + 80 \cdot e^{-\kappa \cdot t}.$$

Mivel $T(5) = 38$, ezért az előbbi egyenletből azt kapjuk, hogy

$$38 = 18 + 80 \cdot e^{-5\kappa}.$$

Ebből a κ ismeretlent kifejezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{20}{80} = e^{-5\kappa} \Rightarrow \ln \frac{1}{4} = -5\kappa \Rightarrow \kappa = \frac{\ln \frac{1}{4}}{-5} = \frac{\ln 4}{5}.$$

Tehát a test hőmérséklete a t időpillanatban

$$T(t) = 18 + 80 \cdot e^{-\frac{\ln 4}{5} \cdot t} = 18 + 80 \cdot (e^{\ln 4})^{-\frac{1}{5} \cdot t} = 18 + 80 \cdot 4^{-\frac{t}{5}}.$$

c) A tojás hőmérséklete 6 perccel a tálba helyezés után

$$T(6) = 18 + 80 \cdot 4^{-\frac{6}{5}} \approx 33, 16^\circ \text{C}$$

d) Azt a t időpillanatot keressük, amikor $T(t) = 20$, így megoldandó a

$$20 = 18 + 80 \cdot 4^{-\frac{t}{5}}$$

exponenciális egyenlet. Mindkét oldalból kivonva 18-at, majd az egyenlet mindkét oldalát elosztva 80-nal azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{40} = 4^{-\frac{t}{5}}.$$

Mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát véve

$$\lg \frac{1}{40} = -\frac{t}{5} \cdot \lg 4$$

adódik, így

$$t = \frac{5 \cdot \lg 40}{\lg 4} \approx 13,3.$$

Tehát a tojás hőmérséklete 13,3 perc múlva lesz 20°C hőmérsékletű.

69. Feladat. Egy kisváros lakosságának körében a tapasztalat azt mutatja, hogy a pletyka terjedésének változási gyorsasága arányos a pletykát ismerő emberek és a pletykát még nem ismerő emberek számának szorzatával. Az arányossági tényező legyen $\frac{1}{250}$. Tekintsünk egy 1 000 fős települést és tegyük fel, hogy a pletykát 2 személy indítja el (azaz a nulladik napon 2 ember ismeri a pletykát)!

- Írjuk fel a pletykát ismerő emberek számára vonatkozó differenciálegyenletet!
- Oldjuk meg az előbbi differenciálegyenletre vonatkozó megfelelő kezdeti-érték feladatot!
- Mikor fog eljutni a város lakóinak feléhez a pletyka?

Megoldás:

- Jelöljük $y(t)$ -vel azon emberek számát, akik a t időpillanatban már ismerik a pletykát. Ekkor fennáll az

$$y'(t) = k \cdot y(t) \cdot (1\,000 - y(t)).$$

- Az előbbi differenciálegyenlet szeparábilis. Vezessük be a $g(t) = k$ és a $h(y) = y \cdot (1\,000 - y)$ függvényeket! Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y \cdot (1000 - y)} dy = \int k dt.$$

A bal oldalon szereplő integrált a parciális törtekre bontás módszerével tudjuk elvégezni. Tekintsük az

$$\frac{1}{y \cdot (1000 - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1000 - y}$$

felbontást! Az egyenletet a közös nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$1 = A \cdot (1000 - y) + B \cdot y.$$

Az egyenletet fokszám szerint rendezve

$$1 = y \cdot (-A + B) + 1000A$$

adódik. Ebből azt kapjuk, hogy $1000A = 1$, így $A = \frac{1}{1000}$. Ezt felhasználva a $-A + B = 0$ egyenletből $B = A = \frac{1}{1000}$ adódik. Tehát

$$\frac{1}{y \cdot (1000 - y)} = \frac{1}{1000} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1000 - y} \right).$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y \cdot (1000 - y)} dy &= \frac{1}{1000} \cdot \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1000 - y} \right) dy = \\ &= \frac{1}{1000} \cdot \int \left(\frac{1}{y} - \frac{-1}{1000 - y} \right) dy = \\ &= \frac{1}{1000} \cdot (\ln |y| - \ln |1000 - y|) = \\ &= \frac{1}{1000} \cdot \ln \left| \frac{y}{1000 - y} \right|. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\int k dt = k \cdot t + c,$$

így az

$$\frac{1}{1000} \cdot \ln \left| \frac{y}{1000 - y} \right| = k \cdot t + c$$

egyenlethez jutunk. Az egyenletet 1000-rel szorozva azt kapjuk, hogy

$$\ln \left| \frac{y}{1000 - y} \right| = 1000k \cdot t + c_1.$$

Ebből

$$\frac{y}{1000 - y} = e^{1000k \cdot t} \cdot c_1$$

adódik. A nevezővel szorozva mindkét oldalt azt kapjuk, hogy

$$y = 1000 \cdot e^{1000k \cdot t} \cdot c_1 - e^{1000k \cdot t} \cdot y \cdot c_1.$$

Az y -t kifejezve

$$y(t) = \frac{1000 \cdot e^{1000k \cdot t} \cdot c_1}{1 + e^{1000k \cdot t} \cdot c_1} = \frac{1000 \cdot e^{1000k \cdot t}}{c_2 + e^{1000k \cdot t}}.$$

Felhasználva, hogy $k = \frac{1}{250}$ azt kapjuk, hogy

$$y(t) = \frac{1000 \cdot e^{4t}}{c_2 + e^{4t}}.$$

Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$2 = \frac{1000}{c_2 + 1} \quad \Rightarrow \quad c_2 = 499.$$

Tehát a keresett függvény

$$y(t) = \frac{1000 \cdot e^{4t}}{499 + e^{4t}}.$$

- c) Azt a t időpillanatot keressük, amelyre $y(t) = 500$ teljesül, így meg kell oldanunk az

$$500 = \frac{1000 \cdot e^{4t}}{499 + e^{4t}}$$

egyenletet! A nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$249500 + 500 \cdot e^{4t} = 1000 \cdot e^{4t}.$$

Az egyenletet átrendezve az

$$500 \cdot e^{4t} = 249500 \quad \Rightarrow \quad e^{4t} = 499$$

egyenlethez jutunk, így

$$t = \frac{\ln 499}{4} \approx 1,55,$$

így 1,55 nap múlva már a lakosság fele ismerni fogja a pletykát.

70. **Feladat.** Egy egyenes körhenger alakú tartály sugara 1,5 [m]. A henger magassága 4 [m]. A tartályból le szeretnénk engedni a teljes vizet.

- a) Írjuk fel azt a kezdetiérték feladatot, amely arra vonatkozik, hogy a t időpillanatban mennyi a hengerben lévő víz magassága!
- b) Oldjuk meg az előbbi kezdetiérték feladatot, azaz adjuk meg a víz magasságát az idő függvényében úgy, hogy a differenciálegyenletben fellépő arányossági tényező legyen $k = 0, 1$.
- c) Mennyi idő alatt ürül ki a tartály?

Megoldás:

- a) A tartályban lévő víz térfogata az idő függvényében:

$$V(t) = r^2 \cdot \pi \cdot x(t).$$

A tartályban lévő víz térfogatának változási gyorsasága

$$V'(t) = r^2 \cdot \pi \cdot x'(t) = 2,25\pi \cdot x'(t).$$

A Torricelli törvény szerint a kifolyó víz térfogatának változási gyorsasága

$$V'(t) = -0,1 \cdot \sqrt{x(t)}.$$

Tehát az

$$2,25 \cdot \pi \cdot x'(t) = -0,1 \cdot \sqrt{x(t)}$$

szeparábilis differenciálegyenlethez jutunk.

- b) Az előbbi egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$x'(t) = \frac{-0,1}{2,25 \cdot \pi} \cdot \sqrt{x(t)}.$$

Vezessük be a $h(x) = \sqrt{x}$ és a $g(t) = \frac{-0,1}{2,25 \cdot \pi}$ függvényeket. Az

$$\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt$$

egyenletet kell megoldanunk az x ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int -\frac{0,1}{2,25 \cdot \pi} dt.$$

A bal oldalon szereplő integrálás:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{x}.$$

A jobb oldalon szereplő integrálás:

$$\int \frac{-0,1}{2,25 \cdot \pi} dt = \frac{-0,1}{2,25 \cdot \pi} \cdot t + c.$$

Tehát a

$$2\sqrt{x} = \frac{-0,1}{2,25 \cdot \pi} \cdot t + c$$

egyenletet kell megoldanunk az ismeretlen x függvényre:

$$x(t) = \left(\frac{-0,1}{4,5 \cdot \pi} \cdot t + \frac{c}{2} \right)^2.$$

Mivel a hengerben kezdetben 4 méter magasságig volt a víz, ezért $x(0) = 4$, így

$$\left(\frac{c}{2} \right)^2 = 4,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$c = 2 \cdot \sqrt{4} = 4.$$

Tehát a hengerben lévő víz magassága az idő függvényében

$$x(t) = \left(\frac{-0,1}{4,5 \cdot \pi} \cdot t + 2 \right)^2 = \left(2 - \frac{t}{45} \right)^2.$$

- c) A hengerben lévő víz abban a t időpillanatban ürül ki, amikor $x(t) = 0$ teljesül, vagyis meg kell oldanunk a

$$0 = \frac{-k}{2r^2 \cdot \pi} \cdot t + \frac{\sqrt{h}}{4},$$

egyenletet. Az egyenlet megoldására azt kapjuk, hogy

$$t = \frac{2\sqrt{h} \cdot r^2 \cdot \pi}{k} = \frac{9 \cdot \pi}{0,1} = 90\pi.$$

Tehát 4,75 óra múlva ürül ki a tartály.

71. Feladat. Egy hógolyót gömb alakúnak tekintünk, amelynek a megfigyelés kezdetekor 5 [cm] a sugara. A hógolyó a felszínével arányosan olvad.

- Adjuk meg a hógolyó sugarát az eltelt idő függvényében!
- Megfigyeltük, hogy a hógolyó 5 másodperc múlva 3 [cm] sugarú volt. Adjuk meg a párolgásra jellemző együttható értékét!
- A megfigyelés után mennyi idővel olvad el teljesen a hógolyó? (Tegyük fel, hogy a hógolyó akkor olvad el, ha a sugara eléri a 0,1 centimétert.)

Megoldás:

- a) A hógolyó sugarának idő szerinti változási gyorsasága arányos a gömb sugarával, így felírható az

$$\dot{r}(t) = -k \cdot 4r^2(t) \cdot \pi$$

differenciálegyenlet, ami egy szeparábilis egyenlet.

Legyen $h(r) = r^2$ és $g(t) = -4k \cdot \pi$. Meg kell oldanunk az

$$\int \frac{1}{h(r)} dr = \int g(t) dt$$

egyenletet az r ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{r^2} dr = \int -k \cdot \pi dt.$$

Az integrálásokat elvégezve

$$-\frac{1}{r} = -k \cdot \pi \cdot t + c$$

adódik, amiből

$$r(t) = \frac{1}{4k \cdot \pi \cdot t - c}.$$

Mivel $r(0) = 5$, ezért

$$5 = -\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{5},$$

így a hógolyó sugara az idő függvényében

$$r(t) = \frac{1}{4k \cdot \pi \cdot t + \frac{1}{5}} = \frac{5}{20k \cdot \pi \cdot t + 1}.$$

- b) Mivel $r(5) = 3$, ezért

$$3 = \frac{5}{100k \cdot \pi + 1} \quad \Rightarrow \quad 300k \cdot \pi + 3 = 5,$$

amiből azt kapjuk, hogy a keresett állandó értéke

$$k = \frac{1}{150\pi}.$$

- c) Felhasználva, hogy $k = \frac{1}{150\pi}$ azt kapjuk, hogy a hógolyó sugara az idő függvényében

$$r(t) = \frac{5}{20 \cdot \frac{1}{150\pi} \cdot t + 1} = \frac{5}{\frac{2}{15}t + 1} = \frac{75}{2t + 15}.$$

Az $r(t) = 0,1$ egyenlet megoldását keressük, így a

$$0,1 = \frac{75}{2t + 15}$$

egyenletet kell megoldanunk. A közös nevezővel szorozva, majd az egyenletet rendezve

$$0,2t + 1,5 = 75 \quad \Rightarrow \quad t = 367,5$$

adódik, így a megfigyelés kezdete után 6,125 perccel olvad el a hógolyó.

72. Feladat. Vízbe szórunk 100 [g] cukrot. A cukor mennyiségének változási gyorsasága arányos a még fel nem oldódott cukor mennyiségével.

- Adjuk meg azt a kezdetiérték feladatot, amely a feloldódott cukor mennyiségére vonatkozik!
- Írjuk fel azt a függvényt, amely megadja, hogy a t időpillanatban mennyi cukor oldódott fel, vagyis oldjuk meg az előbbi kezdetiérték feladatot!
- Ha tudjuk, hogy 2 másodperc alatt 19 [g] cukor oldódott fel, akkor határozzuk meg az előbbi függvényben szereplő (az oldódásra jellemző) paraméter értékét!
- Vázoljuk fel az előbbi függvény grafikonját!

Megoldás:

- a) Legyen a t időpillanatban már feloldódott cukor mennyisége $q(t)$. Az oldódás változási gyorsasága arányos a még fel nem oldódott cukor mennyiségével, így teljesül a

$$\dot{q}(t) = k \cdot (100 - q(t))$$

differenciálegyenlet. Mivel a 0 időpillanatban még nem oldódott fel cukor, ezért a $q(0) = 0$ kezdetiérték feltétellel élünk.

- b) A megoldandó differenciálegyenlet szeparábilis. Megoldásához vezessük be a $h(q) = 100 - q$ és a $g(t) = k$ függvényeket! Meg kell oldanunk az

$$\int \frac{1}{h(q)} dq = \int g(t) dt$$

egyenletet a q ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{100 - q} dq = \int k dt.$$

Az integrálásokat elvégezve

$$\ln |100 - q| = k \cdot t + c$$

adódik, amiből

$$100 - q = C \cdot e^{-k \cdot t},$$

így

$$q(t) = 100 - C \cdot e^{-k \cdot t}.$$

Mivel $C(0) = 0$, ezért $C = 100$, így a kezdetiérték feladat megoldása

$$q(t) = 100 - 100 \cdot e^{-k \cdot t}.$$

c) Mivel 2 másodperc alatt 19 [g] cukor oldódott fel, ezért

$$q(2) = 19,$$

így

$$19 = 100 - 100 \cdot e^{-2k},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$0,81 = e^{-2k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln 0,81}{-2}.$$

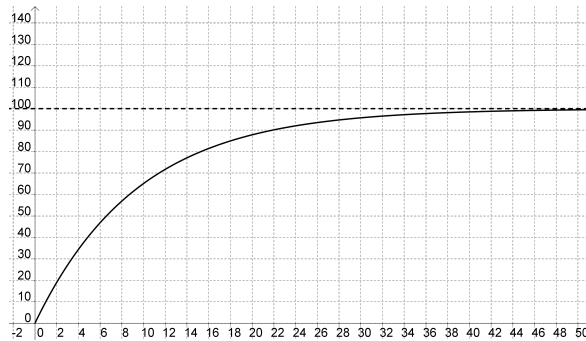
Tehát az oldódásra jellemző paraméter értéke

$$k = \frac{\ln 0,81}{-2}.$$

Ezt felhasználva

$$q(t) = 100 - 100 \cdot e^{-k \cdot t} = 100 - 100 \cdot e^{-\frac{\ln 0,81}{-2} \cdot t} = 100 - 100 \cdot 0,9^t.$$

d) Az előbbi függvény grafikonja:



73. **Feladat.** A légköri nyomást olyan modellel írjuk le, ahol a nyomásnak a tengerszint feletti magasságtól való változási gyorsasága a nyomással arányos. Tegyük fel, hogy a tengerszinten a légköri nyomás 1 013 [hPa] és 20 [km] magasságban a nyomás 90 [hPa].

- Írjuk fel a feladatnak megfelelő kezdetiérték problémát!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!
- Ábrázoljuk a nyomást a tengerszint feletti magasság függvényében!
- Mekkora a nyomás 50 [km] magasságban?
- Milyen magasságban lesz a nyomás 900 [hPa]?

Megoldás:

- A feladat szövegének megfelelő kezdetiérték probléma

$$p'(h) = -k p(h), \quad p(0) = 1\,013.$$

- Vezessük be a $g(h) = -k$ és $a(p) = p$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{a(p)} dp = \int g(h) dh$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{p} dp = \int -k dh.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln p = -k \cdot h + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$p(h) = e^{-k \cdot h + c} = e^{-k \cdot h} \cdot e^c = C \cdot e^{-k \cdot h}.$$

Ha a 0 magasságban a nyomás $p(0) = 1013$, akkor

$$1013 = C \cdot e^0 \quad \Rightarrow \quad C = 1013,$$

így azt kapjuk, hogy a nyomás a tengerszint feletti magasság függvényében

$$p(h) = 1013 \cdot e^{k \cdot h}.$$

Mivel $p(20) = 90$, ezért

$$90 = 1013 \cdot e^{20k}.$$

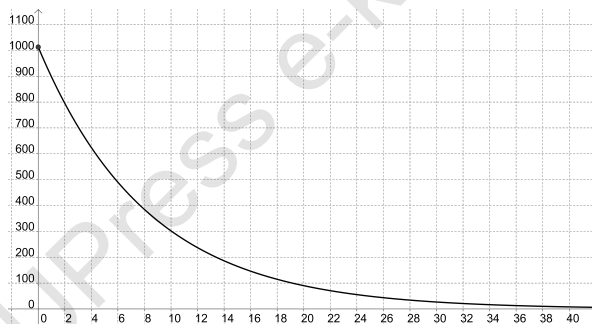
Ebből azt kapjuk, hogy

$$90 = 1013 \cdot e^{20k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{20} \cdot \ln \frac{90}{1013}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy $k = -0,121$. Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$p(h) = 1013 \cdot e^{-0,121 \cdot h}.$$

c) A függvény grafikonja:



d) A nyomás 50 [km] magasságban

$$p(50) = 1013 \cdot e^{-0,121 \cdot 50} = 2,39 \text{ [hPa]}.$$

e) Meg kell oldanunk a

$$900 = 1013 \cdot e^{-0,121h}$$

egyenletet. Az egyenletből h értéke

$$h = -\frac{1}{0,121} \cdot \ln \frac{900}{1013} = 0,977 \text{ [km]}.$$

Tehát 977 méter magasságban lesz 900 [hPa] a nyomás.

74. Feladat. Elsőrendű kémiai reakciókban a résztvevő anyagok mennyiségének változási gyorsasága arányos az illető anyag mennyiségével. A δ -glükonolakton glükonsavvá alakulását az

$$\dot{y}(t) = -0,6y(t)$$

differenciálegyenlet írja le, ahol a t időt órában mérjük. Ha a $t = 0$ időpillanatban 100 gramm δ -glükonolakton van a mintában, akkor mennyi lesz benne az első óra végén?

Megoldás:

Vezessük be a $g(t) = -0,6$ és $h(y) = y$ jelöléseket! Ekkor az egyenlet

$$\dot{y}(t) = g(t) \cdot h(y)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t) dt$$

egyenletet kell megoldanunk a y ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -0,6 dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |y| = -0,6 \cdot t + c$$

adódik, amiből

$$y(t) = e^{-0,6 \cdot t}.$$

Mivel $y(0) = 100$, ezért

$$100 = y(0) = C \cdot e^0 = C,$$

tehát az

$$\dot{y}(t) = -0,6y(t), \quad y(0) = 100$$

kezdetiérték feladat megoldása

$$y(t) = 100 \cdot e^{-0,6 \cdot t}.$$

Egy óra múlva

$$y(1) = 100 \cdot e^{-0,6 \cdot 1} = 54,88 \text{ [gramm]}$$

δ -glükonolakton lesz a mintában.

75. Feladat. Egy motorcsónak sebessége $20 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$. A motorcsónak motorját leállítjuk. Ezután 40 másodperc alatt a csónak sebessége $8 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$ -ra csökken. Ha a víz ellenállása arányos a csónak sebességével, akkor mennyi lesz a csónak sebessége 2 perc múlva?

Megoldás:

A csónakra ható erő nagysága

$$F = m \cdot a = -k \cdot v,$$

ahol $k > 0$ a mozgásra jellemző állandó. Felhasználva, hogy $a(t) = \dot{v}(t)$ az

$$m \cdot \dot{v}(t) = -k \cdot v(t)$$

differenciálegyenlethez jutunk. Az egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$\dot{v}(t) = -\frac{k}{m} \cdot v(t),$$

amelyből látható, hogy egy szeparábilis differenciálegyenletet kell megoldanunk. Vezessük be a $g(t) = -\frac{k}{m}$ és $h(v) = v$. Ekkor az egyenlet

$$v'(t) = g(t) \cdot h(v)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(v)} dv = \int g(t) dt$$

egyenletet kell megoldanunk a v ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{v} dv = \int -\frac{k}{m} dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |v| = -\frac{k}{m} \cdot t + c$$

adódik, amiből

$$v = e^{-\frac{k}{m}t + c} = e^{-\frac{k}{m}t} \cdot e^c = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Mivel $v(0) = 20$, ezért

$$20 = v(0) = C \cdot e^0 = C,$$

tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$v(t) = 20 \cdot e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Mivel 40 másodperc múlva a csónak sebessége $8 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$, ezért teljesül a

$$v \left(\frac{1}{90} \right) = 8$$

feltétel, amiből azt kapjuk, hogy

$$8 = 20 \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{90}}.$$

Ebből

$$-\frac{k}{m} = 90 \cdot \ln \frac{5}{2}$$

adódik. Tehát a csónak sebessége 2 perc múlva

$$v \left(\frac{1}{90} \right) = 20 \cdot e^{-90 \cdot \ln \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{30}} = 20 \cdot \frac{8}{125} = \frac{32}{25} \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right].$$

76. Feladat. Egy ágyúlövedéket $v_0 = 120 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$ sebességgel lőnek ki függőlegesen felfelé. Határozzuk meg, mennyi idő elteltével éri el a lövedék a maximális magasságot, ha a rá ható közegellenállási erő nagyságát leíró összefüggés az alábbi alakú:

$$F = k \cdot v^2,$$

ahol v a lövedék pillanatnyi sebessége, k pedig a közegellenállási együttható.

Megoldás:

A lövedékre mozgása során a gravitációs és a légellenállási erő hat, így mozgásegyenlete az alábbi kezdetiérték probléma:

$$-m \cdot g - k \cdot v^2(t) = m \cdot a(t), \quad v(0) = 120 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right].$$

Az egyenlet mindkét oldalát osztva m -mel az alábbi egyenletet kapjuk

$$a(t) = -g - \frac{c}{m} \cdot v^2$$

összefüggést kapjuk.

Vezessük be az $b = \frac{k}{m}$ jelölést. Ekkor az

$$a(t) = -g - b \cdot v^2(t)$$

egyenlethez jutunk. A pálya menti gyorsulás-idő függvény a pályakoordináta-idő függvény deriváltja, így a

$$\dot{v}(t) = -g - b \cdot v^2(t)$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet. Legyen $h(v) = -g - a \cdot v^2(t)$ és $f(t) = 1$. Ekkor a megoldandó egyenlet:

$$\int \frac{1}{-g - b \cdot v^2(t)} dv = \int 1 dt.$$

A bal oldali integrálást végezzük el elsőként. Az integrandust arctg típusú integrálra vezetjük vissza. Ehhez elsőként végrehajtjuk az alábbi átalakításokat:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{-g - b \cdot v^2} dv &= - \int \frac{1}{g + b \cdot v^2} dv = -\frac{1}{g} \cdot \int \frac{1}{1 + \frac{b}{g} \cdot v^2} dv = \\ &= -\frac{1}{g} \cdot \int \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{b}{g}} \cdot v\right)^2} dv. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2},$$

továbbá azt az integrálási módszert, miszerint

$$\int f(ax + b) = \frac{F(ax + b)}{a},$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g} \cdot \int \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{b}{g}} \cdot v\right)^2} dv &= -\frac{1}{g} \cdot \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{b}{g}} \cdot v \right) \cdot \sqrt{\frac{g}{b}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{g \cdot b}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{b}{g}} \cdot v \right). \end{aligned}$$

A jobb oldal integrálja

$$\int 1 dt = t + c.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$-\frac{1}{\sqrt{g \cdot b}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{b}{g}} \cdot v \right) = t + c.$$

Az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{b}{g}} \cdot v \right) = -\sqrt{g \cdot b} \cdot t + C,$$

amiből

$$v(t) = \operatorname{tg}(-\sqrt{g \cdot b} \cdot t + C) \cdot \sqrt{\frac{g}{b}}$$

adódik. A lövedék abban a t^* időpillanatban éri el a maximális magasságot, amikor a sebessége zérus, azaz $v(t^*) = 0$. Ekkor

$$\operatorname{tg}(-\sqrt{g \cdot b} \cdot t^* + C) = 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$C = \sqrt{g \cdot b} \cdot t^* \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{C}{\sqrt{g \cdot b}}.$$

A kezdeti érték feltételből

$$v(0) = 120$$

adódik, így

$$120 = \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot \operatorname{tg} C,$$

amiből a C -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$C = \operatorname{arctg} \left(120 \cdot \sqrt{\frac{b}{g}} \right).$$

Tehát a lövedék a

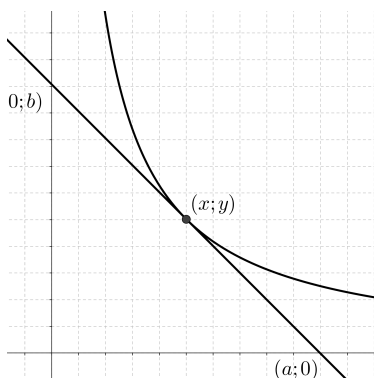
$$t^* = \frac{\operatorname{arctg} \left(120 \cdot \sqrt{\frac{b}{g}} \right)}{\sqrt{g \cdot b}}$$

időpillanatban éri el a legnagyobb magasságot.

77. Feladat. Melyek azok a függvények, amelyeknél az érintési pont felezi az érintőszakaszoknak a koordinátatengelyek közötti darabját?

Megoldás:

Jelölje a keresett függvény grafikonjának egy pontját $(x; y)$. Tegyük fel, hogy az ebbe a pontba húzott érintőegyenes az x -tengelyt az $(a; 0)$, míg az y -tengelyt a $(0; b)$ pontban metszi.



A feltétel szerint az $(a; 0)$ és $(0; b)$ pontokat összekötő szakasz felezőpontja $(x; y)$, így

$$(x; y) = \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2} \right),$$

tehát $a = 2x$ és $b = 2y$.

Az érintőszakasz meredeksége

$$y' = -\frac{b}{a} = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}.$$

Tehát az

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x}$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk. Az egyenlet szeparábilis.

Vezessük be a $g(x) = -\frac{1}{x}$ és $h(y) = y$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz, így az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre.

Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{1}{x} dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

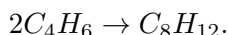
$$\ln |y| = - \ln |x| + c$$

adódik, amiből

$$y(x) = \frac{C}{x},$$

vagyis a keresett alakzatok a hiperbolák.

78. Feladat. A butadién másodrendű reakcióban dimerizálódik a következő reakcióegyenlet szerint



A reakciósebességi együttható

$$k = 4,9 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\text{dm}^3}{\text{mol} \cdot \text{s}} \right].$$

Határozzuk meg, hogy 30 perc alatt a butadién hány százaléka dimerizálódik, ha a koncentrációja kezdetben $0,05 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} \right]$.

Megoldás:

Mivel $A + A \rightarrow D$ típusú másodrendű reakcióról van szó (vagyis kiindulási anyagok azonosak, egyenlő koncentrációban), ezért a reakciósebességi egyenlet

$$v(t) = \dot{C}_A(t) = -k \cdot 2C_A^2(t).$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(t) = -2k$ és $h(C_A) = C_A^2$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(C_A)} dC_A = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{C_A^2} dC_A = \int -2k dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{C_A} = -2k \cdot t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$C_A(t) = \frac{1}{2k \cdot t - c}.$$

A kiindulási anyagok koncentrációja kezdetben $C_A(0) = 0,05$ volt, akkor

$$0,05 = -\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{0,05}$$

adódik, így a kiindulási anyag koncentrációja az idő függvényében

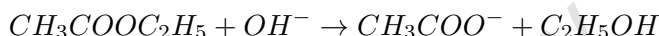
$$C_A(t) = \frac{0,05}{0,05 \cdot 2 \cdot 4,9 \cdot 10^{-3} \cdot t + 1}.$$

Ezt felhasználva

$$C_A(1800) = \frac{0,05}{0,05 \cdot 2 \cdot 4,9 \cdot 10^{-3} \cdot 1800 + 1} \approx 0,0266 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} \right].$$

Ez azt jelenti, hogy a kezdeti koncentráció 53,2%-a van jelen fél óra múlva, tehát 46,8%-a dimerizálódott.

79. Feladat. A



másodrendű kémiai reakció sebességi együtthatója $0,11 \left[\frac{\text{dm}^3}{\text{mol} \cdot \text{s}} \right]$. Mennyi lesz az észter koncentrációja 10 perc múlva, ha az észter kezdeti koncentrációja $0,1 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} \right]$ és a lúg kezdeti koncentrációja $0,05 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} \right]$.

Megoldás:

Jelölje $C_A(t)$ az észter koncentrációját a t időpillanatban és $C_B(t)$ a lúg koncentrációját a t időpillanatban. Az észter kezdeti koncentrációja $C_{A_0} = 0,1$, a lúg kezdeti koncentrációja $C_{B_0} = 0,05$.

A reakciósebességi egyenletek

$$\dot{C}_A(t) = -k \cdot C_A(t) \cdot C_B(t)$$

$$\dot{C}_B(t) = -k \cdot C_A(t) \cdot C_B(t).$$

Ez egy differenciálegyenlet rendszer, ami azonban redukálható egyetlen differenciálegyenletté. Legyen x a kiindulási anyagok elbomlott koncentrációja. Ekkor egyrészt $C_A(t) = 0,1 - x(t)$, másrészt $C_B(t) = 0,05 - x(t)$. Továbbá

$$\dot{C}_A(t) = (0,1 - x(t))' = -\dot{x}(t)$$

és

$$\dot{C}_B(t) = (0,05 - x(t))' = -\dot{x}(t).$$

Ezeket az eredményeket felhasználva az

$$\dot{x}(t) = k \cdot (0,1 - x(t)) \cdot (0,05 - x(t))$$

differenciálegyenlethez jutunk.

Vezessük be a $g(t) = k$ és $h(x) = (0,1 - x) \cdot (0,05 - x)$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{(0,1 - x) \cdot (0,05 - x)} dx = \int k dt.$$

A bal oldalon szereplő integrálást parciális törtekre bontás módszerével végezhajjuk el.

Tekintsük az

$$\frac{1}{(0,1 - x) \cdot (0,05 - x)} = \frac{L}{0,1 - x} + \frac{M}{0,05 - x}$$

előállítást. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel, majd rendezve a jobb oldalon szereplő tagokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 &= L \cdot (0,05 - x) + M \cdot (0,1 - x) \\ 1 &= x \cdot (-L - M) + L \cdot 0,05 + M \cdot 0,1. \end{aligned}$$

A két oldalon a megfelelő fokszámú tagokat összehasonlítva az

$$\left. \begin{aligned} -L - M &= 0 \\ L \cdot 0,05 + M \cdot 0,1 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Azt első egyenletből azt kapjuk, hogy $L = -M$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-M \cdot 0,05 + M \cdot 0,1 = 1 \quad \Rightarrow \quad M = 20.$$

Ezt felhasználva $L = -20$. A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int -20 \cdot \frac{1}{0,1 - x} + 20 \cdot \frac{1}{0,05 - x} dx = \int k dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$20 \cdot \ln |0,1 - x| - 20 \cdot \ln |0,05 - x| = k \cdot t + c$$

adódik, így azt kapjuk, hogy

$$20 \cdot \ln \frac{0,1 - x}{0,05 - x} = k \cdot t + c$$

Felhasználva, hogy $x(0) = 0$ azt kapjuk, hogy

$$20 \cdot \ln 2 = c.$$

Tehát

$$20 \cdot \ln \frac{0,1 - x}{0,05 - x} = 20 \cdot \ln 2.$$

Az egyenletet átrendezve

$$20 \cdot \left(\ln \frac{0,1 - x}{0,05 - x} - \ln 2 \right) = k \cdot t,$$

vagyis

$$20 \cdot \ln \frac{(0,1 - x(t)) \cdot 0,05}{(0,05 - x(t)) \cdot 0,1} = k \cdot t.$$

Felhasználva a

$$0,1 - x(t) = C_A(t)$$

$$0,05 - x(t) = C_B(t)$$

összefüggéseket azt kapjuk, hogy

$$20 \cdot \ln \frac{0,05 \cdot C_A(t)}{0,1 \cdot C_B(t)} = k \cdot t.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\frac{C_A(t)}{C_B(t)} = 2 \cdot e^{0,05 \cdot k \cdot t}$$

adódik. Mivel ez az egyenlet az A és B anyag koncentrációját is tartalmazza és mi elsőként az A koncentrációját szeretnénk megkapni az idő függvényében, ezért az alábbi átalakítással élünk:

$$C_B(t) = 0,05 - x(t) = 0,05 - 0,1 + 0,1 - x(t) = -0,05 + C_A(t).$$

Ezt felhasználva

$$\frac{C_A(t)}{C_A(t) - 0,05} = 2 \cdot e^{0,05 \cdot k \cdot t}.$$

Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$C_A(t) \cdot (1 - 2 \cdot e^{0,05 \cdot k \cdot t}) = -0,1 \cdot e^{0,05 \cdot k \cdot t},$$

így az A anyag koncentrációja az idő függvényében

$$\begin{aligned} C_A(t) &= \frac{-0,1 \cdot e^{0,05 \cdot k \cdot t}}{1 - 2 \cdot e^{0,05 \cdot k \cdot t}} = \\ &= \frac{-0,1}{e^{-0,05 \cdot k \cdot t} - 2} \approx 0,0509 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} \right]. \end{aligned}$$

A B anyag koncentrációja az idő függvényében

$$C_B(t) = -0,05 + C_A(t) = 0,0009 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} \right].$$

80. Feladat. A szacharóz savas oldatban 66 perc elteltével 57%-ban hidrolizált. Feltételezve, hogy a kémiai reakció kinetikailag elsőrendű, számoljuk ki a 75%-os hidrolízishez szükséges időt!

Megoldás:

Ha egy kémiai reakció elsőrendű, akkor a reakciósebességi egyenlete

$$\dot{C}_A(t) = -k \cdot C_A(t).$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(t) = -k$ és $h(C_A) = C_A$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(C_A)} dC_A = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{C_A} dC_A = \int -k dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln C_A = -k \cdot t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$C_A(t) = e^{-k \cdot t + c} = C \cdot e^{-k \cdot t}.$$

Ha feltesszük, hogy kezdetben a kiindulási anyag koncentrációja $C_A(0) = C_{A_0}$ volt, akkor

$$C_{A_0} = C$$

adódik, így a kiindulási anyag koncentrációja az idő függvényében

$$C_A(t) = C_{A_0} \cdot e^{-k \cdot t}.$$

A feladat feltétele szerint

$$0,43C_{A_0} = C_{A_0} \cdot e^{-k \cdot t},$$

így

$$0,43 = e^{-k \cdot t},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$k = \frac{\ln 0,43}{-66} \approx 0,0128 \left[\frac{1}{s} \right].$$

Mivel

$$0,25 = e^{-0,0128 \cdot t},$$

ezért

$$t = \frac{\ln 0,25}{-0,0128} \approx 108,3 \text{ [min]},$$

így azt kaptuk, hogy a 75%-os hidrolízishez szükséges idő 108,3 perc.

DUPress e-könyv

4. Szeparábilis differenciálegyenletre visszavezethető egyenletek

81. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = e^{\frac{y(x)}{x}} + \frac{y(x)}{x}$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Vezessük be az

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

függvényt. Ekkor

$$y(x) = x \cdot u(x).$$

Az $y(x)$ függvény deriváltja

$$y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x).$$

Ezt felhasználva az eredeti egyenlet átírható

$$u(x) + x \cdot u'(x) = e^{u(x)} + u(x) \quad \Rightarrow \quad x \cdot u'(x) = e^{u(x)}$$

módon, amely egy szeparábilis egyenlet.

Legyen $h(u) = e^u$ és $g(x) = \frac{1}{x}$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{e^u} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

Az integrálások elvégzése után az

$$-e^{-u} = \ln x + c$$

egyenlet adódik, amiből az u ismeretlen függvényt kifejezve

$$u(x) = -\ln(-\ln x + c).$$

Mivel $y(x) = x \cdot u(x)$, ezért az általános megoldás

$$y(x) = -x \cdot \ln(-\ln x + c),$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

82. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \frac{y^2(x) - x^2}{x \cdot y(x)}, \quad y(1) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vezessük be az

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

függvényt. Ekkor

$$y(x) = x \cdot u(x).$$

Az $y(x)$ függvény deriváltja

$$y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x).$$

Ezt felhasználva az eredeti egyenlet átírható

$$u(x) + x \cdot u'(x) = u(x) - \frac{1}{u(x)} \Rightarrow u'(x) = -\frac{1}{u(x)} \cdot \frac{1}{x}$$

módon, amely egy szeparábilis egyenlet.

Legyen $h(u) = u$ és $g(x) = -\frac{1}{x}$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int u du = \int -\frac{1}{x} dx.$$

Az integrálások elvégzése után az

$$\frac{u^2}{2} = -\ln x + c$$

egyenlet adódik, amiből az u ismeretlen függvényt kifejezve

$$u(x) = \sqrt{-2 \cdot \ln x + c}.$$

Mivel $y(x) = x \cdot u(x)$, ezért

$$y(x) = x \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln x + c}.$$

Mivel $y(1) = 1$, ezért

$$1 = 1 \cdot \sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad c = 1,$$

ezért a megoldásfüggvény

$$y(x) = x \cdot \sqrt{-2 \cdot \ln x + 1}.$$

83. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = 1 + 2 \cdot \frac{y(x)}{x}, \quad y(1) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vezessük be az

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

függvényt. Ekkor

$$y(x) = x \cdot u(x).$$

Az $y(x)$ függvény deriváltja

$$y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x).$$

Ezt felhasználva az eredeti egyenlet átírható

$$u(x) + x \cdot u'(x) = 1 + 2u(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1 + u(x)}{x}$$

módon, amely egy szeparábilis egyenlet.

Legyen $h(u) = 1 + u$ és $g(x) = \frac{1}{x}$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{1+u} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

Az integrálások elvégzése után az

$$\ln |1 + u| = \ln |x| + c$$

egyenlet adódik, amiből az u ismeretlen függvényt kifejezve

$$u(x) = C \cdot x - 1.$$

Mivel $y(x) = x \cdot u(x)$, ezért

$$y(x) = C \cdot x^2 - x.$$

Mivel $y(1) = 1$, ezért

$$1 = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 2,$$

tehát a megoldásfüggvény

$$y(x) = 2x^2 - x.$$

84. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \operatorname{tg} \left(\frac{y(x)}{x} \right)$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Vezessük be az

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

függvényt. Ekkor

$$y(x) = x \cdot u(x).$$

Az $y(x)$ függvény deriváltja

$$y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x).$$

Ezt felhasználva az eredeti egyenlet átírható

$$u(x) + x \cdot u'(x) = u(x) + \operatorname{tg}(u(x)) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg}(u(x))$$

módon, amely egy szeparábilis egyenlet.

Legyen $h(u) = \operatorname{tgu}$ és $g(x) = \frac{1}{x}$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{\cos u}{\sin u} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

Az integrálások elvégzése után az

$$\ln |\sin u| = \ln |x| + c$$

egyenlet adódik, amiből az u ismeretlen függvényt kifejezve

$$\sin u(x) = C \cdot x \quad \Rightarrow \quad u(x) = C \cdot \arcsin(x).$$

Mivel $y(x) = x \cdot u(x)$, ezért

$$y(x) = C \cdot x \cdot \arcsin(x),$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

85. Feladat. Tekintsük az

$$y'(x) = -1 - \frac{y(x)}{x}, \quad y(1) = \frac{3}{2}$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!
- Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az y függvény értelmezhető!
- Számoljuk ki az y függvény zérushelye(i)t!
- Adjuk meg az y függvény deriváltját!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és szélsőérték szerint az y függvényt!
- Adjuk meg az y függvény második deriváltját!
- Vizsgáljuk meg konvexitás szerint az y függvényt! Van-e inflexiós pontja, ha igen, adjuk meg!
- Számoljuk ki az y függvény határértékeit az értelmezési tartományának határpontjaiban!
- Vázzuk fel az y függvény grafikonját!

Megoldás:

- a) Vezessük be az

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

függvényt. Ekkor

$$y(x) = x \cdot u(x).$$

Az $y(x)$ függvény deriváltja

$$y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x).$$

Ezt felhasználva az eredeti egyenlet átírható

$$u(x) + x \cdot u'(x) = -1 - u(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{-1 - 2u(x)}{x}$$

módon, amely egy szeparábilis egyenlet.

Legyen $h(u) = -1 - 2u$ és $g(x) = \frac{1}{x}$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{-1 - 2u} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

Az integrálások elvégzése után az

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln |-1 - 2u| = \ln |x| + c$$

egyenlet adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{-1 - 2u}} = x \cdot c,$$

így

$$-1 - 2u = \left(\frac{1}{x \cdot c} \right)^2,$$

amiből az u függvényt kifejezve

$$u(x) = \left(-1 - \frac{1}{x^2 \cdot c^2} \right) \cdot \frac{1}{2}.$$

Mivel $y(x) = x \cdot u(x)$, ezért

$$y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{C}{x}.$$

Felhasználva, hogy $y(1) = \frac{3}{2}$ azt kapjuk, hogy

$$y(x) = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}.$$

b) Az y függvény értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Az y függvény zérushelye(i) a

$$\frac{2}{x} - \frac{x}{2} = 0$$

egyenlet megoldása(i):

$$\frac{4 - x^2}{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2.$$

Tehát az y függvény zérushelyei $x = \pm 2$.

d) Az y függvény deriváltja

$$y'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}.$$

e) Az y' függvény zérushelye a

$$-\frac{2}{x^2} - \frac{1}{2} = 0$$

egyenlet megoldása. Az egyenletet a közös nevezővel szorozva

$$-4 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -4$$

adódik, így az y' függvénynek nincs zérushelye, tehát az y függvénynek nincs szélsőértéke.

Mivel $y'(x) < 0$ minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén, ezért y szigorúan monoton csökkenő.

f) Az y függvény második deriváltja

$$y''(x) = \frac{4}{x^3}.$$

g) Mivel $y''(x) \neq 0$, ezért az y függvénynek nincs inflexiós pontja.

Mivel $y''(x) < 0$, ha $x < 0$ és $y''(x) > 0$, ha $x > 0$, ezért az y függvény a $] -\infty; 0[$ intervallumon konkáv és a $]0; \infty[$ intervallumon konvex.

h) Az y függvény határértéke $-\infty$ -ben

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \infty.$$

Az y függvény határértéke ∞ -ben

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = -\infty.$$

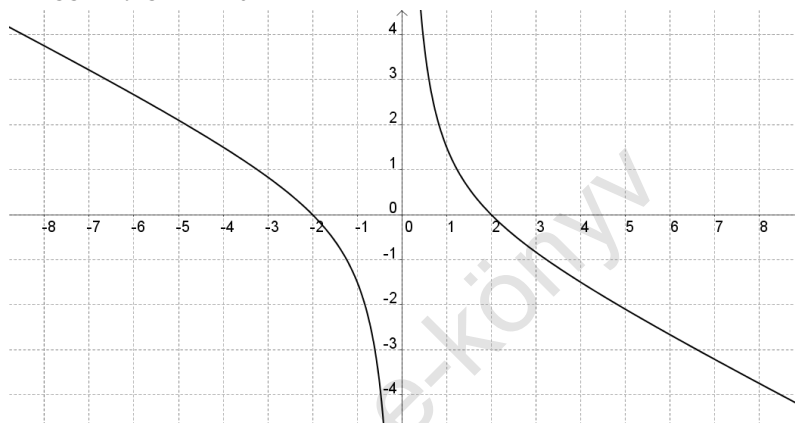
Az y függvény bal oldali határértéke a 0 helyen

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = -\infty.$$

Az y függvény jobb oldali határértéke a 0 helyen

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \infty.$$

i) Az y függvény grafikonja



86. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = (x + y(x))^2$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Vezessük be az $u(x) = x + y(x)$ függvényt. Ekkor

$$y(x) = u(x) - x,$$

így $y'(x) = u'(x) - 1$. Ezt felhasználva az eredeti egyenlet

$$u'(x) - 1 = (u(x))^2 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = u^2(x) + 1$$

alakra írható át. Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Legyen $h(u) = u^2 + 1$ és $g(x) = 1$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \int 1 dx.$$

Az integrálások elvégzése után az

$$\operatorname{arctg} u = x + c$$

egyenlet adódik, amiből az u ismeretlen függvényt kifejezve

$$u(x) = \operatorname{tg}(x + c).$$

Mivel $y(x) = u(x) - x$, ezért

$$y(x) = \operatorname{tg}(x + c) - x,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

87. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = (x - y(x))^2 + 1$$

differentiálegyenletet!

Megoldás:

Vevezsük be az $u(x) = x - y(x)$ függvényt. Ekkor

$$y(x) = x - u(x),$$

így $y'(x) = 1 - u'(x)$. Ezt felhasználva az eredeti egyenlet

$$1 - u'(x) = (u(x))^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = -u^2(x)$$

alakra írható át. Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Legyen $h(u) = -u^2$ és $g(x) = 1$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int -\frac{1}{u^2} du = \int 1 dx.$$

Az integrálások elvégzése után

$$\frac{1}{u} = x + c.$$

adódik. Az egyenletből kifejezve az u ismeretlen függvényt azt kapjuk, hogy

$$u(x) = \frac{1}{x+c}.$$

Mivel $y(x) = x - u(x)$, ezért

$$y(x) = x - \frac{1}{x+c},$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

88. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \cos(x + y(x))$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Vezessük be az $u(x) = x + y(x)$ függvényt. Ekkor

$$y(x) = u(x) - x,$$

így $y'(x) = u'(x) - 1$. Ezt felhasználva az eredeti egyenlet

$$u'(x) - 1 = \cos(u(x))$$

alakra írható át. Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Legyen $h(u) = 1 + \cos u$ és $g(x) = 1$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{1 + \cos u} du = \int 1 dx.$$

A bal oldal szereplő integrálást végezzük el először. Ehhez vezessük be a $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = t$ helyettesítést. Ekkor egyrészt

$$u = 2 \operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = \frac{2}{1+t^2},$$

másrészt

$$\cos u = \cos^2 \frac{u}{2} - \sin^2 \frac{u}{2} = \frac{\cos^2 \frac{u}{2} - \sin^2 \frac{u}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2} + \sin^2 \frac{u}{2}}.$$

A számlálót és nevezőt is $\cos^2 \frac{u}{2}$ -vel osztva és felhasználva, hogy $\operatorname{tg} \frac{u}{2} = t$ azt kapjuk, hogy

$$\cos u = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

A helyettesítést végrehajtva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \cos u} du &= \int \frac{1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int \frac{1}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\ &= \int \frac{1+t^2}{2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int 1 dt = t + c_1, \end{aligned}$$

ahol $c_1 \in \mathbb{R}$.

Mivel $t = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$, ezért

$$\int \frac{1}{1 + \cos u} du = \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Másrészt $\int 1 dx = x + c_2$, ahol $c_2 \in \mathbb{R}$, így a $c = c_2 - c_1$ jelölés bevezetésével a

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = x + c$$

egyenlethez jutunk, amit az u ismeretlen függvényre kell megoldanunk:

$$u(x) = 2 \cdot \operatorname{arctg}(x + c).$$

Mivel $y(x) = u(x) - x$, ezért a differenciálegyenlet megoldása

$$y(x) = 2 \cdot \operatorname{arctg}(x + c) - x,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

89. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \sin^2(x - y(x))$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Vezessük be az $u(x) = x - y(x)$ függvényt. Ekkor

$$y(x) = x - u(x),$$

így $y'(x) = 1 - u'(x)$. Ezt felhasználva az eredeti egyenlet

$$1 - u'(x) = \sin^2(u(x)) \quad \Rightarrow \quad 1 - \sin^2(u(x)) = u'(x)$$

alakra írható át. Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Legyen $h(u) = 1 - \sin^2 u$ és $g(x) = 1$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{1 - \sin^2 u} du = \int 1 dx.$$

Mivel $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$, ezért

$$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \int 1 dx.$$

Az integrálásokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg} u = x + c$$

adódik, amiből

$$u(x) = \operatorname{arctg}(x + c)$$

adódik.

Mivel $y(x) = x - u(x)$, ezért a differenciálegyenlet megoldása

$$y(x) = x - \operatorname{arctg}(x + c),$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

90. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = x + y(x), \quad y(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vezessük be az

$$u(x) = x + y(x)$$

függvényt! Ekkor

$$u'(x) = 1 + y'(x).$$

A helyettesítés után az

$$u'(x) - 1 = u(x)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Az egyenletet átrendezve

$$u'(x) = 1 + u(x)$$

adódik, amely egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Legyen $h(u) = 1 + u$ és $g(x) = 1$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{1+u} du = \int 1 dx.$$

Az integrálásokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\ln |1 + u| = x + c$$

adódik, így

$$u(x) = C \cdot e^x - 1.$$

Mivel $y(x) = u(x) - x$, ezért a differenciálegyenlet megoldása

$$y(x) = C \cdot e^x - 1 - x.$$

Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$2 = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 3.$$

Tehát az egyenlet megoldása

$$y(x) = 3 \cdot e^x - 1 - x.$$

91. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \frac{4x - y(x) + 7}{2x + y(x) - 1}$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Mivel

$$\det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 6 \neq 0,$$

ezért meg kell oldanunk a

$$4x - y + 7 = 0$$

$$2x + y - 1 = 0$$

egyenletrendszer. A két egyenletet összeadva $6x + 6 = 0$ adódik, így $x = -1$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy $y = 3$.

Hajtsuk végre az

$$x = u - 1$$

$$y(x) = v(u) + 3$$

helyettesítést! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$v'(u) = \frac{4 \cdot (u - 1) - v(u) - 3 + 7}{2 \cdot (u - 1) + v(u) + 3 - 1} = \frac{4u - v(u)}{2u + v(u)} = \frac{4 - \frac{v(u)}{u}}{2 + \frac{v(u)}{u}}.$$

Vezessük be a

$$z(u) = \frac{v(u)}{u}$$

függvényt! Ekkor

$$v(u) = u \cdot z(u),$$

így

$$v'(u) = z(u) + u \cdot z'(u).$$

Ezt felhasználva a

$$z(u) + u \cdot z'(u) = \frac{4 - z(u)}{2 + z(u)}$$

differenciálegyenlethez jutunk. Az egyenletet explicit alakra hozva

$$z'(u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{4 - z(u) - 2z(u) - z^2(u)}{2 + z(u)}$$

adódik. Az összevonás után azt kapjuk, hogy

$$z'(u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{4 - 3z(u) - z^2(u)}{2 + z(u)}.$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet. Legyen

$$h(z) = \frac{4 - 3z - z^2}{2 + z}$$

és

$$g(u) = \frac{1}{u}.$$

Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(z)} dz = \int g(u) du$$

egyenletet kell megoldanunk az z ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2+z}{-z^2-3z+4} dz = \int \frac{1}{u} du.$$

A bal oldalon szereplő integrált átalakítva azt kapjuk, hogy

$$-\int \frac{2+z}{z^2+3z-4} dz.$$

A kapott integrált a parciális törtekre bontás módszerével végezzük el.

Először szorzattá alakítjuk a tört nevezőjét. Ehhez keressük a $z^2 + 3z - 4$ polinom gyökeit. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva

$$z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2},$$

adódik, így $x_1 = 1$, illetve $x_2 = -4$. Ezt felhasználva

$$z^2 + 3z - 4 = (z - 1) \cdot (z + 4).$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$-\int \frac{2+z}{z^2+3z-4} dz = -\int \frac{2+z}{(z-1) \cdot (z+4)} dz.$$

A fenti törtet felbontjuk parciális törtek összegére:

$$\frac{2+z}{(z-1) \cdot (z+4)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+4}.$$

Meghatározzuk az A és B együtthatókat. Mindkét oldalt szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2+z = A \cdot (z+4) + B \cdot (z-1).$$

Felbontjuk a zárójelet, majd z hatványai szerint csoportosítjuk a tagokat. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$2+z = z \cdot (A+B) + 4A - B$$

adódik. A jobb oldal pontosan akkor egyezik meg a bal oldallal, ha az z együtt-hatója és a konstans tag megegyezik a két oldalon, azaz ha teljesül az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 1 &= A + B \\ 2 &= 4A - B. \end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva $A = \frac{3}{5}$ adódik, amelyet visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $B = \frac{2}{5}$. Tehát

$$\begin{aligned} - \int \frac{2+z}{(z-1) \cdot (z+4)} dz &= -\frac{3}{5} \cdot \int \frac{1}{z-1} - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{z+4} dz = \\ &= -\frac{3}{5} \cdot \ln|z-1| - \frac{2}{5} \cdot \ln|z+4| + c_1. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c_2.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$-\frac{3}{5} \cdot \ln|z-1| - \frac{2}{5} \cdot \ln|z+4| = \ln|u| + c.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát -5 -tel szorozva és a logaritmus azonosságait felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(z-1)^3 \cdot (z+4)^2 = \frac{C}{u^5}.$$

Mivel $z = \frac{v}{u}$, ezért

$$\left(\frac{v}{u} - 1\right)^3 \cdot \left(\frac{v}{u} + 4\right)^2 = \frac{C}{u^5}.$$

A kapott egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$\frac{(v-u)^3 \cdot (v+4u)^2}{u^5} = \frac{C}{u^5},$$

így

$$(v-u)^3 \cdot (v+4u)^2 = C.$$

Mivel $v = y-3$ és $u = x+1$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldására

$$(y(x) - x - 4)^2 \cdot (y(x) + 4x + 1)^2 = C$$

adódik, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

92. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = \frac{2x + y(x) + 3}{4x + 2y(x) + 2}$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Mivel

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 0,$$

ezért be kell vezetnünk az

$$u(x) = 2x + y(x)$$

függvényt. Ekkor

$$u'(x) = 1 - 2y'(x),$$

így

$$y'(x) = u'(x) - 2.$$

Ezt felhasználva a differenciálegyenlet

$$u'(x) - 2 = \frac{u(x) + 3}{2u(x) + 2}$$

alakúra írható át. Az egyenletet explicit alakra hozva azt kapjuk, hogy

$$u'(x) = \frac{u(x) + 3 + 4u(x) + 4}{2u(x) + 2},$$

így

$$u'(x) = \frac{5u(x) + 7}{2u(x) + 2}$$

adódik, ami egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Legyen $h(u) = \frac{5u+7}{2u+2}$ és $g(x) = 1$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2u + 2}{5u + 7} du = \int 1 dx.$$

Mivel

$$\begin{aligned}\frac{2u+2}{5u+7} &= \frac{2}{5} \cdot \frac{u+1}{u+\frac{7}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{u+\frac{7}{5}-\frac{2}{5}}{u+\frac{7}{5}} = \\ &= \frac{2}{5} - \frac{\frac{4}{25}}{u+\frac{7}{5}} = \frac{2}{5} - \frac{4}{25u+35},\end{aligned}$$

ezért

$$\int \frac{2u+2}{5u+7} du = \frac{2}{5}u - \frac{4}{25} \cdot \ln |25u+35| + c,$$

így a differenciálegyenlet megoldása azon u függvény, amelyre teljesül, hogy

$$\frac{2}{5}u - \frac{4}{25} \cdot \ln |25u+35| = x + C.$$

Felhasználva, hogy $u = 2x + y$ azt kapjuk, hogy

$$\frac{2}{5} \cdot (2x + y) - \frac{4}{25} \cdot \ln |25 \cdot (2x + y) + 35| = x + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

93. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = \frac{x - 2y(x) + 1}{2x - 4y(x) + 3}$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Mivel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 0,$$

ezért be kell vezetnünk az

$$u(x) = x - 2y(x)$$

függvényt. Ekkor

$$u'(x) = 1 - 2y'(x),$$

így

$$y'(x) = \frac{u'(x) - 1}{-2} = \frac{1 - u'(x)}{2}.$$

Ezt felhasználva a differenciálegyenlet

$$\frac{u'(x) - 1}{-2} = \frac{u(x) + 1}{2u(x) + 3}$$

alakúra írható át. Az egyenletet explicit alakra hozva azt kapjuk, hogy

$$u'(x) = \frac{-2u(x) - 2 + 2u(x) + 3}{2u(x) + 3},$$

így

$$u'(x) = \frac{1}{2u(x) + 3}$$

adódik, ami egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Legyen $h(u) = \frac{1}{2u+3}$ és $g(x) = 1$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

A megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int 2u + 3 du = \int 1 dx.$$

Az integrálásokat elvégezve

$$u^2 + 3u = x + c$$

adódik. Mivel $u = x - 2y$, ezért

$$(x - 2y)^2 + 3x - 6y = x + c.$$

A megfelelő azonosság alkalmazása és az összevonás után azt kapjuk, hogy

$$4y^2 + y \cdot (-4x - 6) + x^2 + 2x - c = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$y_{1,2} = \frac{4x + 6 \pm \sqrt{16x^2 + 48x + 36 - 16x^2 - 32x + 16c}}{8}$$

adódik, így az algebrai átalakítások után azt kapjuk, hogy a differenciálegyenlet megoldása

$$y_{1,2}(x) = \frac{2x + 3}{4} \pm \frac{\sqrt{x + c}}{2},$$

ahol c tetszőleges olyan valós szám, amelyre az y függvény értelmezve van.

5. Elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek

94. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) + 4x \cdot y(x) = 0$$

differenciálegyenletet.

Megoldás:

Mivel

$$\int 4x \, dx = 2x^2,$$

ezért

$$y(x) = C \cdot e^{-\int 4x \, dx} = C \cdot e^{-\int 2x^2},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

95. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) + x \cdot e^x \cdot y(x) = 0$$

differenciálegyenletet.

Megoldás:

Első lépésben az $\int x \cdot e^x \, dx$ integrált számoljuk ki.

A parciális integrálás képlete szerint

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx,$$

ezért az $f'(x) = e^x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int e^x \, dx = e^x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 1.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^x \, dx &= x \cdot e^x - \int e^x \, dx = \\ &= x \cdot e^x - e^x + c = e^x \cdot (x - 1). \end{aligned}$$

Ezt felhasználva a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = C \cdot e^{-\int x \cdot e^x \, dx} = C \cdot e^{e^x \cdot (1-x)},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

96. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) + \frac{2x + 3}{x^2 + 5x + 6} \cdot y(x) = 0$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Először az

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 5x + 6} dx$$

integrált kell kiszámolnunk.

Ehhez szorzattá alakítjuk a tört nevezőjét. Ehhez keressük az $x^2 + 5x + 6$ polinom gyökeit. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2},$$

adódik, így $x_1 = -3$, illetve $x_2 = -2$. Ezt felhasználva

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3).$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 5x + 6} dx = \int \frac{2x + 3}{(x + 2) \cdot (x + 3)} dx.$$

A fenti törtet felbontjuk parciális törtek összegére:

$$\frac{2x + 3}{(x + 2) \cdot (x + 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3}.$$

Meghatározzuk az A és B együtthatókat. Mindkét oldalt szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2x + 3 = A \cdot (x + 3) + B \cdot (x + 2).$$

Felbontjuk a zárójelet, majd x -et kiemelünk az x -et tartalmazó tagokból. Ekkor

$$2x + 3 = x \cdot (A + B) + 3A + 2B$$

adódik. A jobb oldal pontosan akkor egyezik meg a bal oldallal, ha az x együtthatója és a konstans tag megegyezik a két oldalon, azaz ha teljesül az alábbi egyenletrendszer:

$$2 = A + B$$

$$3 = 3A + 2B.$$

Az első egyenlet kétszeresét kivonva a második egyenletből $A = -1$ adódik, amelyet visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $B = 3$. Tehát

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + 3}{(x + 2) \cdot (x + 3)} dx &= \int \frac{-1}{x + 2} + \frac{3}{x + 3} dx = \\ &= -1 \cdot \ln |x + 2| + 3 \cdot \ln |x + 3| + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Felhasználva a logaritmus azonosságait

$$\int \frac{2x + 3}{(x + 2) \cdot (x + 3)} dx = \ln \left| \frac{(x + 3)^3}{x + 2} \right| + c$$

adódik.

A kapott eredményt felhasználva

$$y(x) = C \cdot e^{-\ln \left| \frac{(x + 3)^3}{x + 2} \right|} = C \cdot \frac{x + 2}{(x + 3)^3},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$.

6. Elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek megoldása konstansvariálással

97. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = 2x \cdot y(x) + e^{x^2}, \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén. A feladatot 4 lépésben oldjuk meg.

1. lépés (a homogén egyenlet általános megoldása):

Megoldjuk az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenletet, azaz elhagyjuk a differenciálegyenletből azt a tagot, amitől az inhomogén, és megoldjuk a kapott, már homogén egyenletet:

$$y'(x) - 2x \cdot y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int -2x \, dx} = C \cdot e^{x^2}.$$

Ezáltal megkaptuk a homogén egyenlet megoldását, amit y_h -val jelölünk.

Megjegyezzük, hogy a homogén egyenlet szeparábilis, így a szeparábilis egyenletek megoldási módszerével is megoldható:

$$y'(x) = 2x \cdot y(x).$$

Ez az egyenlet szeparábilis, így a korábbi jelölésekkel élve legyen $g(x) = 2x$, $h(y) = y$. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(y)} \, dy = \int g(x) \, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y} \, dy = \int 2x \, dx$$

egyenletnek.

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |y| = x^2 + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$y_h(x) = e^{x^2+c} = e^{x^2} \cdot e^c = C \cdot e^{x^2}.$$

2. lépés (konstansvariálás):

A homogén egyenlet megoldásánál kapott C konstanszt kicseréljük egy $C(x)$ függvényre, és az eredeti inhomogén egyenlet egy (partikuláris) megoldását

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^{x^2}$$

alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y_p'(x) = 2x \cdot y_p(x) + e^{x^2},$$

azaz

$$(C(x) \cdot e^{x^2})' = 2x \cdot C(x) \cdot e^{x^2} + e^{x^2}.$$

Elvégezve a bal oldalon a deriválást

$$C'(x) \cdot e^{x^2} + C(x) \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 2x \cdot C(x) \cdot e^{x^2} + e^{x^2}$$

adódik.

Vegyük észre, hogy a $C(x)$ szorzótényezőt tartalmazó tag kiesik. (Ennek a tagnak mindig ki kell esnie.) Tehát azt kapjuk, hogy

$$C'(x) \cdot e^{x^2} = e^{x^2},$$

azaz $C'(x) = 1$, aminek egy primitív függvénye $C(x) = x$. (Elegendő egy primitív függvényt megadnunk, mivel az inhomogén egyenlet egy megoldását kerestük.) Ezáltal megkaptuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását:

$$y_p(x) = x \cdot e^{x^2}.$$

3. lépés (az inhomogén egyenlet általános megoldása):

Az inhomogén egyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként kapjuk, azaz

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} = (C + x) \cdot e^{x^2}.$$

4. lépés (a kezdetiérték feladat megoldása):

Mivel azt a megoldásfüggvényt keressük, amire $y(0) = 1$, ezért

$$1 = y(0) = (C + 0) \cdot e^{0^2} = C,$$

így $C = 1$, tehát a kezdetiérték feladat megoldásfüggvénye

$$y(x) = (1 + x) \cdot e^{x^2}.$$

98. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) = y(x) + x, \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását konstansvariálással határozzuk meg!

Megoldás:

A differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén. A feladatot 4 lépésben oldjuk meg.

1. lépés (a homogén egyenlet általános megoldása):

Elhagyjuk a differenciálegyenletből azt a tagot, amitől az inhomogén, és megoldjuk a kapott, már homogén egyenletet:

$$y'(x) = y(x) \quad \Rightarrow \quad y'(x) - y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int -1 dx} = C \cdot e^x.$$

2. lépés (konstansvariálás):

A homogén egyenlet megoldásánál kapott C konstans kicseréljük egy $C(x)$ függvényre, és az eredeti inhomogén egyenlet egy (partikuláris) megoldását

$$y_p = C(x) \cdot e^x$$

alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y_p'(x) = y_p(x) + x,$$

azaz

$$(C(x) \cdot e^x)' = C(x) \cdot e^x + x.$$

Elvégezve a bal oldalon a deriválást azt kapjuk, hogy

$$C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x = C(x) \cdot e^x + x.$$

A $C(x)$ szorzótényezőt tartalmazó tag kiesik, így

$$C'(x) \cdot e^x = x \Rightarrow C'(x) = \frac{x}{e^x} = x \cdot e^{-x}$$

adódik.

Ebből a parciális integrálás módszerével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C(x) &= \int x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = \\ &= -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = (-x - 1) \cdot e^{-x}. \end{aligned}$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = (-x - 1) \cdot e^{-x} \cdot e^x = -x - 1.$$

3. lépés (az inhomogén egyenlet általános megoldása):

Az inhomogén egyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként kapjuk, azaz

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^x - x - 1$$

4. lépés (a kezdetiérték feladat megoldása):

Mivel azt a megoldást keressük, amelyik a 0 helyen 1-et vesz fel, ezért

$$1 = y(0) = C - 1,$$

tehát $C = 2$, így a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 2e^x - x - 1.$$

99. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) + y(x) = e^x$$

differenciálegyenletet! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a konstansvariálás módszerével oldjuk meg!

Megoldás:

A differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén. A feladatot 3 lépésben oldjuk meg.

1. lépés (a homogén egyenlet általános megoldása):

Elhagyjuk a differenciálegyenlethez az inhomogén tagot, és megoldjuk a kapott

$$y'(x) + y(x) = 0$$

homogén egyenletet. Az egyenlet általános megoldása

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int 1 dx} = C \cdot e^{-x}.$$

2. lépés (konstansvariálás):

A homogén egyenlet megoldásánál kapott C konstanszt kicseréljük egy $C(x)$ függvényre, és az eredeti inhomogén egyenlet egy (partikuláris) megoldását

$$y_p = C(x) \cdot e^{-x}$$

alakban keressük. Ezt visszahelyettesítjük az eredeti inhomogén egyenletbe, így azt kapjuk, hogy

$$y_p'(x) + y_p(x) = e^x,$$

azaz

$$(C(x) \cdot e^{-x})' + C(x) \cdot e^{-x} = e^x.$$

Elvégezve a bal oldalon a deriválást

$$C'(x) \cdot e^{-x} + C(x) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = C(x) \cdot e^{-x} + e^x$$

adódik. Az összevonás után

$$C'(x) \cdot e^{-x} = e^x \Rightarrow C'(x) = e^{2x}$$

adódik. Mivel $f(ax + b)$ -típusú integrált kaptunk, így egy primitív függvény

$$C(x) = \frac{e^{2x}}{2}.$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^{-x} = \frac{e^{2x}}{2} \cdot e^{-x} = \frac{e^x}{2}.$$

3. lépés (az inhomogén egyenlet általános megoldás):

Az inhomogén egyenlet általános megoldását a homogén egyenlet megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként kapjuk, vagyis

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{-x} + \frac{e^x}{2}.$$

100. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) - y(x) = e^{5x}$$

differenciálegyenletet! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását konstansvariálás módszerével határozzuk meg!

Megoldás:

A differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén. A feladatot 3 lépésben oldjuk meg.

1. lépés (a homogén egyenlet általános megoldása):

Elhagyjuk a differenciálegyenlethez az a tagot, amitől az inhomogén, és megoldjuk a kapott

$$y'(x) - y(x) = 0$$

homogén egyenletet. A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int -1 dx} = C \cdot e^x.$$

2. lépés (konstansvariálás):

A homogén egyenlet megoldásánál kapott C konstanszt kicseréljük egy $C(x)$ függvényre és az eredeti inhomogén egyenlet egy (partikuláris) megoldását

$$y_p = C(x) \cdot e^x$$

alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe

$$y_p'(x) - y_p(x) = e^{5x}$$

adódik, így

$$(C(x) \cdot e^x)' - C(x) \cdot e^x = e^{5x}.$$

Elvégezve a bal oldalon a deriválást azt kapjuk, hogy

$$C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x - C(x) \cdot e^x = e^{5x},$$

azaz

$$C'(x) \cdot e^x = e^{5x} \Rightarrow C'(x) = e^{4x}.$$

Mivel $f(ax + b)$ -típusú integrált kaptunk, így egy primitív függvény

$$C(x) = \frac{e^{4x}}{4}.$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldására azt kapjuk, hogy

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^x = \frac{e^{4x}}{4} \cdot e^x = \frac{e^{5x}}{4}.$$

3. lépés (az inhomogén egyenlet általános megoldása):

Az inhomogén egyenlet általános megoldását a homogén egyenlet megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként kapjuk, vagyis

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^x + \frac{e^{5x}}{4}.$$

101. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$\sin x \cdot y'(x) - \cos x \cdot y(x) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén. A feladatot 4 lépésben oldjuk meg.

1. lépés (a homogén egyenlet általános megoldása):

A homogén egyenlet

$$\sin x \cdot y'(x) - \cos x \cdot y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(x) - \frac{\cos x}{\sin x} \cdot y(x) = 0.$$

Vezessük be az

$$a(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$$

függvényt. Ekkor az $a(x)$ egy piritív függvénye

$$\int a(x) dx = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\ln |\sin x|,$$

így a homogén egyenlet általános megoldására azt kapjuk, hogy

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int a(x) dx} = C \cdot e^{\ln |\sin x|} = C \cdot \sin x.$$

2. lépés (konstansvariálás):

A homogén egyenlet megoldásánál kapott C konstans kicseréljük egy $C(x)$ függvényre, és az eredeti inhomogén egyenlet egy (partikuláris) megoldását

$$y_p = C(x) \cdot \sin x$$

alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe

$$y_p'(x) \cdot \sin x - y_p(x) \cdot \cos x = 1$$

adódik, vagyis

$$(C(x) \cdot \sin x)' \sin x - C(x) \cdot \sin x \cdot \cos x = 1.$$

Elvégezve a bal oldalon a deriválást azt kapjuk, hogy

$$C'(x) \cdot (\sin x)^2 + C(x) \cdot \cos x \cdot \sin x - C(x) \cdot \sin x \cdot \cos x = 1.$$

Egyszerűsítés után

$$C'(x) \cdot (\sin x)^2 = 1 \Rightarrow C'(x) = \frac{1}{(\sin x)^2}$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$C(x) = -\operatorname{ctg}x.$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = C(x) \cdot \sin x = -\operatorname{ctg}x \cdot \sin x = -\cos x.$$

3. lépés (az inhomogén egyenlet általános megoldása):

Az inhomogén egyenlet általános megoldását a homogén egyenlet megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként kapjuk, azaz

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot \sin x - \cos x.$$

4. lépés (a kezdetiérték feladat megoldása):

A kezdetiérték feltétel miatt

$$1 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C \cdot \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = C,$$

így $C = 1$, tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \sin x - \cos x.$$

102. Feladat. Soros R-L körre U_0 konstans feszültséget kapcsolva a körben folyó áram erőssége hogyan függ az időtől?

Megoldás:

Az áramerősség-idő függvény az alábbi elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L} \cdot I(t) = \frac{U_0}{L}.$$

A feszültség rákapcsolásakor az áramerősség 0. Ezt az $I(0) = 0$ kezdetiérték feltétellel lehet figyelembe venni. A megfelelő homogén egyenlet

$$\dot{I}(t) + \frac{R}{L} \cdot I(t) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$I_h(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Az inhomogén egyenlet egy megoldását konstansvariálással kapjuk. Legyen

$$I_p(t) = C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}.$$

Ezt visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe

$$\dot{C}(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \frac{-R}{L} + \frac{R}{L} \cdot C(t) e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{U_0}{L}$$

adódik. A $C(t)$ -t tartalmazó tag kiesik, így azt kapjuk, hogy

$$\dot{C}(t) = \frac{U_0}{L} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t},$$

amiből

$$C(t) = \frac{U_0}{L} \cdot \frac{L}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t}.$$

Ezt felhasználva

$$I_p(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{\frac{R}{L} \cdot t} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{U_0}{R}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U_0}{R}.$$

A kezdetiérték feltétel miatt $I(0) = 0$, így

$$0 = C + \frac{U_0}{R} \Rightarrow C = -\frac{U_0}{R},$$

tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$I(t) = I_h(t) + I_p(t) = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U_0}{R}.$$

103. Feladat. Egy olajfinomítóban egy olajtartályban 8000 liter benzin van, ami eredetileg 50 [kg] adalékot tartalmaz oldott állapotban. A téli időjárásra tekintettel percnként 160 liter olyan benzint pumpálnak a tartályba, amely 0,25 [kg] adalékot tartalmaz literenként.

A jól elkevert folyadékból percnként 180 litert engedik ki a tartályból.

Mennyi adalékanyag lesz a tartályban 20 perccel az eljárás megkezdése után?

Megoldás:

Legyen $y(t)$ az adalékanyag mennyisége a t időpillanatban. Tudjuk, hogy $y(0) = 50$.

A tartályban lévő benzin mennyisége a t időpillanatban

$$V(t) = 8000 + (160 - 180) \cdot t = 8000 - 20t.$$

A tartályból kifolyó adalék sebessége

$$\frac{y(t)}{V(t)} \cdot 180 = \frac{y(t)}{8000 - 20t} \cdot 180 = \frac{9y(t)}{400 - t}.$$

A tartályba befolyó adalék sebessége

$$0,25 \cdot 160 = 40.$$

Tehát a tartályban lévő adalékanyag mennyiségének változási gyorsasága

$$y'(t) = 40 - \frac{9y(t)}{400 - t},$$

amely egy elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet.

A differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet

$$y'(t) + \frac{9y(t)}{400 - t} = 0.$$

Ennek általános megoldása

$$y_h(t) = C \cdot e^{-\int \frac{9}{400-t} dt} = C \cdot e^{9 \cdot \ln |400-t|} = C \cdot (400 - t)^9.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_p(t) = C(t) \cdot (400 - t)^9$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$9 \cdot (400 - t)^8 \cdot (-1) \cdot C(t) + (400 - t)^9 \cdot C'(t) = 40 - \frac{9 \cdot (400 - t)^9 \cdot C(t)}{400 - t}.$$

Az egyenletet rendezve

$$C'(t) = \frac{40}{(400 - t)^9}$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$C(t) = \frac{40 \cdot (400 - t)^{-8}}{8} = \frac{5}{(400 - t)^8}.$$

Tehát

$$y_p(t) = 5 \cdot (400 - t)$$

az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása. Az inhomogén egyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként kapjuk, hogy

$$y(t) = C \cdot (400 - t)^9 + 5 \cdot (400 - t).$$

Mivel $y(0) = 50$, ezért

$$C = -\frac{1\,950}{400^9}.$$

Ezt felhasználva

$$y(20) \approx 671 \text{ [kg]}.$$

DUPress e-könyv

7. Elsőrendű konstansegyütthetős lineáris inhomogén differenciálegyenletek megoldása próbafüggvénnyel

104. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) - 2y(x) = 6x + 2$$

differenciálegyenletet! Az inhomogén egyenlet egy megoldását a próbafüggvény módszerrel határozzuk meg!

Megoldás:

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) - 2y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = K \cdot e^{-\int -2 dx} = K \cdot e^{2x},$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A próbafüggvényt

$$y_p(x) = Ax + B$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_p'(x) = A.$$

Az y_p és y_p' függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$A - 2 \cdot (Ax + B) = 6x + 2.$$

A tagokat fogszám szerint rendezve

$$-2Ax + A - 2B = 6x + 2$$

adódik. Tehát

$$\left. \begin{array}{r} -2A \quad \quad = 6 \\ A - 2B \quad = 2 \end{array} \right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldására azt kapjuk, hogy $A = -3$ és $B = -2,5$. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = -3x - 2,5.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K \cdot e^{2x} - 3x - 2,5,$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

105. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) - 4y(x) = 4x^2 + 6x + 2, \quad y(0) = 10$$

kezdetiérték feladatot! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerrel határozzuk meg!

Megoldás:

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) - 4y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = K \cdot e^{-\int -4 dx} = K \cdot e^{4x},$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A próbafüggvényt

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

alakban keressük. Ekkor

$$y'_p(x) = 2Ax + B.$$

Az y_p és y'_p függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y'_p(x) - 4y_p(x) = 4x^2 + 6x + 2,$$

vagyis

$$2Ax + B - 4 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = 4x^2 + 6x + 2,$$

így

$$-4Ax^2 + (2A - 4B) \cdot x + B - 4C = 4x^2 + 6x + 2.$$

Tehát teljesülnie kell a

$$\left. \begin{array}{rcl} -4A & & = 4 \\ 2A - 4B & & = 6 \\ B - 4C & = & 2 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszernek.

Az egyenletrendszer megoldására $A = -1$, $B = -2$ és $C = -1$ adódik. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = -x^2 - 2x - 1.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K \cdot e^{4x} - x^2 - 2x - 1.$$

Mivel $y(0) = 10$, ezért

$$10 = K - 1 \quad \Rightarrow \quad K = 11.$$

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 11 \cdot e^{4x} - x^2 - 2x - 1.$$

106. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) + 3y(x) = 3x^2 - x + 2$$

differenciálegyenletet! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próba-függvény módszerrel határozzuk meg!

Megoldás:

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) + 3y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = K \cdot e^{-\int 3 dx} = K \cdot e^{-3x},$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A próbafüggvényt

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_p'(x) = 2Ax + B.$$

Az y_p és y_p' függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y_p'(x) + 3y_p(x) = 3x^2 - x + 2,$$

vagyis

$$2Ax + B + 3 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = 3x^2 - x + 2,$$

így

$$3Ax^2 + (2A + 3B) \cdot x + B + 3C = 3x^2 - x + 2.$$

Tehát teljesülnie kell a

$$\left. \begin{array}{rcl} 3A & & = 3 \\ 2A + 3B & & = -1 \\ B + 3C & & = 2 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszernek.

Az egyenletrendszer megoldására azt kapjuk, hogy $A = 1$, $B = -1$ és $C = 1$. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = x^2 - x + 1.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K \cdot e^{-3x} + x^2 - x + 1,$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

107. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) - 2y(x) = -4 \sin 2x, \quad y(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerrel határozzuk meg!

Megoldás:

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) - 2y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = K \cdot e^{-\int -2 dx} = K \cdot e^{2x},$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A próbafüggvényt

$$y_p(x) = A \cdot \sin 2x + B \cdot \cos 2x$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_p'(x) = 2A \cdot \cos 2x - 2B \cdot \sin 2x.$$

Az y_p és y_p' függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y_p'(x) - 2y_p(x) = -4 \sin 2x,$$

azaz

$$2A \cdot \cos 2x - 2B \cdot \sin 2x - 2A \cdot \sin 2x - 2B \cdot \cos 2x = -4 \sin 2x,$$

így

$$(2A - 2B) \cdot \cos 2x + (-2A - 2B) \cdot \sin 2x = -4 \sin 2x.$$

Tehát teljesülnie kell a

$$\left. \begin{array}{l} -2A - 2B = -4 \\ 2A - 2B = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszernek.

Az egyenletrendszer megoldására azt kapjuk, hogy $A = 1$ és $B = 1$. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = \sin 2x + \cos 2x.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K \cdot e^{2x} + \sin 2x + \cos 2x.$$

Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$2 = K + 1 \quad \Rightarrow \quad K = 1.$$

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{2x} + \sin 2x + \cos 2x.$$

108. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) - 3y(x) = e^{2x}$$

differenciálegyenletet! Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerrel oldjuk meg!

Megoldás:

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) - 3y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = K \cdot e^{-\int -3 dx} = K \cdot e^{3x},$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A próbafüggvényt

$$y_p(x) = A \cdot e^{2x}$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_p'(x) = 2A \cdot e^{2x}.$$

Az y_p és y_p' függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$2A \cdot e^{2x} - 3A \cdot e^{2x} = e^{2x},$$

így

$$-A \cdot e^{2x} = e^{2x},$$

amiből $A = -1$ adódik. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = -e^{2x}.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K \cdot e^{3x} - e^{2x},$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

109. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) - 5y(x) = e^{5x}$$

differenciálegyenletet! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerrel oldjuk meg!

Megoldás:

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) - 5y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = K \cdot e^{-\int -5 dx} = K \cdot e^{5x},$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A próbafüggvényt

$$y_p(x) = A \cdot x \cdot e^{5x}$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_p'(x) = A \cdot (e^{5x} + 5x \cdot e^{5x}).$$

Az y_p és y_p' függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$A \cdot e^{5x} + A \cdot 5x \cdot e^{5x} - 5A \cdot x \cdot e^{5x} = e^{5x},$$

így

$$A \cdot e^{5x} = e^{5x},$$

amiből $A = 1$ adódik. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = e^{5x}.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K \cdot e^{5x} + e^{5x} = (K + 1) \cdot e^{5x},$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

110. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) - 3y(x) = 12 \operatorname{ch} 3x$$

differenciálegyenletet! Az inhomogén egyenlet egy megoldását a próbafüggvény módszerrel határozzuk meg!

Megoldás:

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) - 3y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = K \cdot e^{-\int -3 dx} = K \cdot e^{3x},$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Mivel

$$\operatorname{ch} 3x = \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2},$$

ezért a zavaró függvény

$$12 \operatorname{ch} 3x = 6e^{3x} + 6e^{-3x}.$$

Mivel a zavarófüggvény egyik tagja tartalmazza a homogén egyenlet megoldását, ezért a próbafüggvényt

$$y_p(x) = A \cdot x \cdot e^{3x} + B \cdot e^{-3x}$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_p'(x) = A \cdot e^{3x} + 3A \cdot x \cdot e^{3x} - 3B \cdot e^{-3x}.$$

Az y_p és y_p' függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y_p'(x) - 3y_p(x) = 6e^{3x} - 6e^{-3x},$$

így

$$\begin{aligned} A \cdot e^{3x} + 3A \cdot x \cdot e^{3x} - 3B \cdot e^{-3x} - 3 \cdot (A \cdot x \cdot e^{3x} + B \cdot e^{-3x}) &= \\ = 6e^{3x} - 6e^{-3x}. \end{aligned}$$

A tagokat megfelelő módon rendezve

$$A \cdot e^{3x} - 6B \cdot e^{-3x} = 6e^{3x} - 6e^{-3x}$$

adódik. Tehát teljesülnie kell az

$$\left. \begin{aligned} A &= 6 \\ -6B &= 6 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszernek.

Az egyenletrendszer megoldására azt kapjuk, hogy $A = 6$ és $B = -1$. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = 6x \cdot e^{3x} - e^{-3x}.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot e^{3x} + 6x \cdot e^{3x} - e^{-3x}.$$

111. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) - 6y(x) = 12x^2 + 4e^{2x}$$

differenciálegyenletet! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próbafüggvény módszerrel határozzuk meg!

Megoldás:

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) - 6y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = K \cdot e^{-\int -6 dx} = K \cdot e^{2x},$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A próbafüggvényt

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + D \cdot e^{2x}$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_p'(x) = 2Ax + B + 2D \cdot e^{2x}.$$

Az y_p és y_p' függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y_p'(x) - 6y_p(x) = 12x^2 + 4e^{2x},$$

vagyis

$$2Ax + B + 2D \cdot e^{2x} - 6Ax^2 - 6Bx - 6C - 6D \cdot e^{2x} = 12x^2 + 4e^{2x},$$

így

$$-6Ax^2 + (2A - 6B) \cdot x + B - 6C - 4D \cdot e^{2x} = 12x^2 + 4e^{2x}.$$

Tehát teljesülnie kell a

$$\left. \begin{array}{rcl} -6A & & = 12 \\ 2A - 6B & & = 0 \\ & B - 6C & = 0 \\ & & - 4D = -1 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszernek.

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $A = -2$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-4 - 6B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{2}{3}$$

adódik. A harmadik egyenletből azt kapjuk, hogy

$$-\frac{2}{3} - 6C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{9}.$$

Az utolsó egyenletből $D = -1$ adódik.

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = -2x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} - e^{2x}.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K \cdot e^{6x} - 2x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} - e^{2x},$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

112. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(t) - 2y(t) = 4t + 8 + e^{2t}, \quad y(0) = 4$$

kezdetiérték feladatot! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását próba-függvény módszerrel határozzuk meg!

Megoldás:

A megfelelő homogén egyenlet

$$y'(t) - 2y(t) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h = K \cdot e^{-\int -2 dt} = K \cdot e^{2t},$$

ahol $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A

$$b(t) = 4t + 8 + e^{2t}$$

zavaró függvény e^{2t} tagja csak konstansszorzóban különbözik a homogén egyenlet általános megoldásától, ezért a próbafüggvényt

$$y_p(x) = At + B + C \cdot t \cdot e^{2t}$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_p'(x) = A + C \cdot e^{2t} + 2C \cdot t \cdot e^{2t}.$$

Az y_p és y_p' függvényeket behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y_p'(t) - 2y_p(t) = 4t + 8 + e^{2t},$$

vagyis

$$A + C \cdot e^{2t} + 2C \cdot t \cdot e^{2t} - 2A \cdot t - 2B - 2C \cdot t \cdot e^{2t} = 4t + 8 + e^{2t},$$

így

$$-2A \cdot t + (A - 2B) + C \cdot e^{2t} = 4t + 8 + e^{2t}.$$

Tehát teljesülnie kell a

$$\left. \begin{array}{rcl} -2A & & = 4 \\ A - 2B & & = 8 \\ & C & = 1 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszernek.

Az egyenletrendszer megoldására $A = -2$, $B = -5$ és $C = 1$ adódik. Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(t) = -2t - 5 + t \cdot e^{2t}.$$

Ezt felhasználva az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = K \cdot e^{2t} - 2t - 5 + t \cdot e^{2t}.$$

Mivel $y(0) = 4$, ezért

$$4 = K - 5 \quad \Rightarrow \quad K = 9.$$

Tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(t) = 9 \cdot e^{2t} - 2t - 5 + t \cdot e^{2t} = -2t - 5 + (9 + t) \cdot e^{2t}.$$

DUPress e-könyv

8. Elsőrendű konstansgyűtthetős lineáris inhomogén differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

113. **Feladat.** Legyen $f: [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény! Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathcal{L}[f'] = s \cdot [f] - f(0)$$

teljesül!

Megoldás:

Felhasználva a Laplace-transzformált definícióját és parciális integrálás tételét azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'] &= \int_0^{\infty} f'(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f'(t) \cdot e^{-st} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \right]_0^c - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(t) \cdot e^{-st} \cdot (-s) dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{f(c)}{e^{s \cdot c}} - f(0) - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f(t) \cdot e^{-st} \cdot (-s) dt = \\ &= s \cdot \mathcal{L}[f] - f(0), \end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást.

114. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy az $f(t) = 1$ függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}.$$

Megoldás:

A Laplace-transzformált definíciója szerint

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1] &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-st} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-s \cdot t}}{-s} \right]_0^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{-s \cdot c}}{-s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

amivel igazoltuk az állítást.

115. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy $f(t) = t$ ($t > 0$) függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$$

Megoldás:

A Laplace-transzformált definícióját és a parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t] &= \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c t \cdot e^{-st} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^c - \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left[t \cdot \frac{e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left(c \cdot \frac{e^{-s \cdot c}}{-s} - \frac{e^{-s \cdot c}}{s^2} \right) + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}, \end{aligned}$$

ugyanis

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{-s \cdot c}}{s^2} = 0$$

és a L'Hospital-szabály szerint

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} c \cdot \frac{e^{-s \cdot c}}{-s} &= \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{c}{e^{s \cdot c} \cdot s} = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^{s \cdot c} \cdot s^2} = 0. \end{aligned}$$

Ezzel bizonyítottuk az állítást.

116. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(t) = 7t + 4$$

függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldás:

A linearitás tulajdonsága és az előbbi feladat eredményé miatt azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[7t + 4] = 7\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[4] = \\ &= 7 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s} = \frac{7 + 4s}{s^2} = \frac{4s + 7}{s^2}.\end{aligned}$$

117. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(t) = t^3 - t^2 + 5t + 2$$

függvény Laplace-transzformáltját felhasználva, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Megoldás:

A linearitás tulajdonsága miatt és felhasználva az említett állítást azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[t^3 - t^2 + 5t + 2] = \mathcal{L}[t^3] - \mathcal{L}[t^2] + 5\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[2] = \\ &= \frac{3!}{s^4} - \frac{2!}{s^3} + 5 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} = \\ &= \frac{6 - 2s + 5s^2 + 2s^3}{s^4} = \frac{2s^3 + 5s^2 - 2s + 6}{s^4}.\end{aligned}$$

118. **Feladat.** Legyen $a \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(t) = e^{a \cdot t}$$

függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s - a}.$$

Megoldás:

A Laplace-transzformált definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{at}] &= \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{(a-s)t} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-c)t}}{a-s} - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}.\end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

119. **Feladat.** Az előző feladat eredményét felhasználva adjuk meg az

$$f(t) = e^{2t} + e^{-3t}$$

függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldás:

A linearitás tulajdonsága miatt és felhasználva az előbbi feladat eredményét azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[e^{2t} + e^{-3t}] = \mathcal{L}[e^{2t}] + \mathcal{L}[e^{-3t}] = \\ &= \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+3} = \frac{s+3+s-2}{(s-2) \cdot (s+3)} = \frac{2s+1}{s^2+s-6}. \end{aligned}$$

120. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(t) = 7t + 6e^t - 2e^{-t} - 10$$

függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldás:

A linearitás tulajdonsága miatt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[7t + 6e^t - 2e^{-t} - 10] = 7\mathcal{L}[t] + 6\mathcal{L}[e^t] - 2\mathcal{L}[e^{-t}] - \mathcal{L}[10] = \\ &= \frac{7}{s^2} + \frac{6}{s-1} - \frac{2}{s+1} - \frac{10}{s} = \\ &= \frac{7 \cdot (s-1) \cdot (s+1) + 6s^2 \cdot (s+1) - 2s^2 \cdot (s-1) - 10s \cdot (s^2-1)}{s^2 \cdot (s-1) \cdot (s+1)} = \\ &= \frac{-6s^3 + 15s^2 + 10s - 7}{s^4 - s^2}. \end{aligned}$$

121. **Feladat.** Legyen $\omega \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(t) = \sin(\omega \cdot t)$$

függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[\sin(\omega \cdot t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Megoldás:

A Laplace-transzformált definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[\sin(\omega \cdot t)] = \int_0^{\infty} \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt.$$

Első lépésben meghatározzuk a $\sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st}$ függvény egy primitív függvényét. A parciális integrálás képletét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} - \int \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\ &= \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} - \left(\omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} + \int \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} dt \right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\left(\frac{\omega^2}{s^2} + 1 \right) \cdot \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt = \left(\frac{\sin(\omega \cdot t)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{s^2} \right) \cdot e^{-st},$$

így

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\frac{\sin(\omega \cdot t)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{s^2} \right) \cdot e^{-st} + c. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\sin(\omega \cdot t)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)}{s^2} \right) \cdot e^{-st} \right]_0^c = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin(\omega \cdot c)}{-s} - \frac{\omega \cdot \cos(\omega \cdot c)}{s^2} \right) \cdot e^{-sc} + \frac{\omega}{s^2} \right) = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \frac{\omega}{s^2} = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

122. Feladat. Legyen $\omega \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(t) = \cos(\omega \cdot t)$$

függvény Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}[\cos(\omega \cdot t)] = \frac{s}{\omega^2 + s^2}.$$

Megoldás:

A Laplace-transzformált definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[\cos(\omega \cdot t)] = \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt.$$

Első lépésben meghatározzuk a $\cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st}$ függvény egy primitív függvényét. A parciális integrálás képletét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} + \int \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} dt = \\ &= \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{-s} + \left(\omega \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} - \int \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2} dt \right). \end{aligned}$$

Tehát

$$\left(\frac{\omega^2}{s^2} + 1 \right) \cdot \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt = \left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{s^2} \right) \cdot e^{-st},$$

így

$$\begin{aligned} \int \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{s^2} \right) \cdot e^{-st} + c. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos(\omega \cdot t) \cdot e^{-st} dt &= \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \lim_{c \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\cos(\omega \cdot t)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)}{s^2} \right) \cdot e^{-st} \right]_0^c = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \left(\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos(\omega \cdot c)}{-s} + \frac{\omega \cdot \sin(\omega \cdot c)}{s^2} \right) \cdot e^{-sc} + \frac{1}{s} \right) = \\ &= \frac{s^2}{\omega^2 + s^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{\omega^2 + s^2}. \end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk az állítást.

123. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(t) = \sin 3t \cdot \sin 2t$$

függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

azt kapjuk, hogy

$$\sin 3t \cdot \sin 2t = \frac{\cos t - \cos 5t}{2},$$

így

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[\sin 3t \cdot \sin 2t] = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}[\cos t - \cos 5t] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{L}[\cos t] - \mathcal{L}[\cos 5t]) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s}{s^2 + 1} - \frac{s}{s^2 + 25} \right) = \\ &= \frac{12s}{s^4 + 26s^2 + 25}. \end{aligned}$$

124. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$F(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját, azaz adjuk meg azt az f generátorfüggvényt, amelynek Laplace-transzformáltja F !

Megoldás:

Első lépésben szorzattá alakítjuk a nevezőt. Ehhez megkeressük az

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

egyenlet megoldásait. Az egyenlet gyökei

$$s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2},$$

azaz $s_1 = -2$, illetve $s_2 = -3$. Ezt felhasználva a másodfokú polinom gyöktényezős alakja

$$s^2 + 5s + 6 = (s + 2) \cdot (s + 3).$$

Ezután meg kell határoznunk az A és B valós számok úgy, hogy

$$\frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 3}$$

teljesüljön. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2s + 3 = A \cdot (s + 3) + B \cdot (s + 2).$$

Felbontva a zárójeleket

$$2s + 3 = As + 3A + Bs + 2B$$

adódik. A tagokat fokszám szerint csökkenő sorrendben csoportosítva azt kapjuk, hogy

$$2s + 3 = (A + B) \cdot s + 3A + 2B.$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\begin{aligned} A + B &= 2 \\ 3A + 2B &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk.

Az egyenletrendszer megoldására $A = -1$ és $B = 3$ adódik. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6} = \frac{-1}{s + 2} + \frac{3}{s + 3}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-1}{s + 2} + \frac{3}{s + 3} \right] = -e^{-2t} + 3e^{-3t} = \\ &= 3e^{-3t} - e^{-2t}. \end{aligned}$$

125. Feladat. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az

$$y'(t) - 2y(t) = t + 2, \quad y(0) = 4$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y'(t) - 2y(t)] = \mathcal{L}[t + 2].$$

Felhasználva a Laplace-transzformált linearitását

$$\mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[t + 2]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)$$

és

$$\mathcal{L}[t + 2] = \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[2] = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s},$$

ezért az

$$s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0) - 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}$$

egyenlethez jutunk.

Mivel $y(0) = 4$, ezért

$$s \cdot \mathcal{L}[y] - 4 - 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s - 2) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + 4$$

adódik, amiből kifejezve a $\mathcal{L}[y]$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1 + 2s + 4s^2}{s^2 \cdot (s - 2)}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{1 + 2s + 4s^2}{s^2 \cdot (s - 2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s - 2}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$1 + 2s + 4s^2 = A \cdot s \cdot (s - 2) + B \cdot (s - 2) + C \cdot s^2.$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$(A + C) \cdot s^2 + (-2A + B) \cdot s - 2B = 4s^2 + 2s + 1$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{rcl} A & + & C = 4 \\ -A + B & & = 2 \\ - & B & = 4 \end{array} \right\}.$$

Az utolsó egyenletről $B = -\frac{1}{2}$ következik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $A = -\frac{5}{4}$. Ezt felhasználva az első egyenletről $C = \frac{21}{4}$ adódik. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{21}{4} \cdot \frac{1}{s-2}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására azt kapjuk, hogy

$$y(t) = -\frac{5}{4} - \frac{1}{2} \cdot t + \frac{21}{4} \cdot e^{2t}.$$

126. Feladat. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az

$$y'(t) - 6y(t) = 2t + 1, \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y'(t) - 6y(t)] = \mathcal{L}[2t + 1].$$

Felhasználva a Laplace-transzformált linearitását

$$\mathcal{L}[y'] - 6\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[2t + 1]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)$$

és

$$\mathcal{L}[2t + 1] = 2\mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[1] = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s},$$

ezért az

$$s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0) - 6\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$$

egyenlethez jutunk.

Mivel $y(0) = 0$, ezért

$$s \cdot \mathcal{L}[y] - 6\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s - 6) = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$$

adódik, amiből kifejezve a $\mathcal{L}[y]$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2 + s}{s^2 \cdot (s - 6)}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{2 + s}{s^2 \cdot (s - 6)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s - 6}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2 + s = A \cdot s \cdot (s - 6) + B \cdot (s - 6) + C \cdot s^2.$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$(A + C) \cdot s^2 + (-6A + B) \cdot s - 6B = s + 2$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{r} A \quad \quad \quad + C = 0 \\ -6A \quad + \quad B = 1 \\ \quad \quad - 6B = 2 \end{array} \right\}.$$

Az utolsó egyenletből $B = -\frac{1}{3}$ következik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $A = -\frac{2}{9}$. Ezt felhasználva az első egyenletből $C = \frac{2}{9}$ adódik. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{s - 6}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására azt kapjuk, hogy

$$y(t) = -\frac{2}{9} - \frac{1}{3} \cdot t + \frac{2}{9} \cdot e^{6t}.$$

127. Feladat. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az

$$y'(t) - 3y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y'(t) - 3y(t)] = \mathcal{L}[e^{2t}].$$

Felhasználva a Laplace-transzformált linearitását

$$\mathcal{L}[y'] - 3\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{2t}]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)$$

és

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2},$$

ezért az

$$s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0) - 3\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-2}$$

egyenlethez jutunk.

Mivel $y(0) = 0$, ezért

$$s \cdot \mathcal{L}[y] - 3\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-2}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s-3) = \frac{1}{s-2}$$

adódik, amiből kifejezve a $\mathcal{L}[y]$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s-2) \cdot (s-3)}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{1}{(s-2) \cdot (s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$1 = A \cdot (s-3) + B \cdot (s-2).$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$(A+B) \cdot s - 3A - 2B = 1$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 0 \\ -3A - 2B = 1 \end{array} \right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldására $A = -1$ és $B = 1$ adódik. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{-1}{s-2} + \frac{1}{s-3}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására azt kapjuk, hogy

$$y(t) = -e^{2t} + e^{3t}.$$

128. Feladat. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az

$$y'(t) - 2y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 2$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y'(t) - 2y(t)] = \mathcal{L}[e^{2t}].$$

Felhasználva a Laplace-transzformált linearitását

$$\mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{2t}]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)$$

és

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2},$$

ezért az

$$s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0) - 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-2}$$

egyenlethez jutunk.

Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$s \cdot \mathcal{L}[y] - 2 - 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-2}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s-2) = \frac{1}{s-2} + 2$$

adódik, amiből kifejezve a $\mathcal{L}[y]$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(2s-3) \cdot (s-2)^2}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{2s - 3}{(s - 2)^2} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{(s - 2)^2}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2s - 3 = A \cdot (s - 2) + B.$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$A \cdot s - 2A + B = 2s - 3$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{l} A + \quad \quad = 2 \\ -2A - B = -3 \end{array} \right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldására $A = 2$ és $B = 1$ adódik. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{2}{s - 2} + \frac{1}{(s - 2)^2}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására azt kapjuk, hogy

$$y(t) = 2e^{2t} + t \cdot e^{2t} = e^{2t} \cdot (t + 2).$$

9. Bernoulli-differenciálegyenlet

129. **Feladat.** Tekintsük az

$$y'(x) + \frac{4}{x} \cdot y(x) = x^3 \cdot y^2(x), \quad y(1) = 1, \quad x > 0$$

kezdetiérték feladatot!

- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!
- Határozzuk meg a $]0; \infty[$ halmaz azon legbővebb részhalmazát, amelyen az y függvény értelmezhető!
- Számoljuk ki az y függvény zérushelyét!
- Határozzuk meg az y függvény derivált függvényét!
- Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- Határozzuk meg az y függvény másodrendű derivált függvényét!
- Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- Számoljuk ki az y függvény határértékét az értelmezési tartományának határpontjaiban!
- Vázoljuk fel az y függvény grafikonját!
- Határozzuk meg az y függvény értékkészletét!
- Korlátos-e az y függvény?
- Páros vagy páratlan-e az y függvény?
- Periodikus-e az y függvény?
- Injektív-e az y függvény?

Megoldás:

- a) Az egyenletet az $y^2(x)$ függvénnyel osztva azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} + \frac{4}{x} \cdot y^{-1}(x) = x^3. \quad (3)$$

Vezessük be az

$$u(x) = y^{-1}(x)$$

függvényt! Ekkor az u függvény deriváltja

$$u'(x) = -y^{-2}(x) \cdot y'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -u'(x).$$

Az (3) egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$-u'(x) + \frac{4}{x} \cdot u(x) = x^3.$$

Ez az egyenlet egy elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet.

Az egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$-u'(x) + \frac{4}{x} \cdot u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(x) - \frac{4}{x} \cdot u(x) = 0.$$

A homogén egyenlet megoldása

$$u_h(x) = C \cdot e^{-\int -\frac{4}{x} dx} = C \cdot e^{4 \cdot \ln|x|} = C \cdot e^{\ln x^4} = C \cdot x^4.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$u_p(x) = C(x) \cdot x^4$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve a

$$-u'(x) + \frac{4}{x} \cdot u(x) = x^3$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-C'(x) \cdot x^4 - C(x) \cdot 4x^3 + \frac{4}{x} \cdot C(x) \cdot x^4 = x^3.$$

Ebből az egyenletből kifejezve a $C'(x)$ függvényt

$$C'(x) = -\frac{1}{x}$$

adódik, amelyet integrálva

$$C(x) = -\ln|x|.$$

Ezt felhasználva

$$u_p(x) = -x^4 \cdot \ln x$$

adódik, így

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = C \cdot x^4 - x^4 \cdot \ln x.$$

Mivel

$$u(x) = y^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{y(x)},$$

ezért

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{x^4 \cdot (C - \ln x)}.$$

Mivel $y(1) = 1$, ezért

$$1 = \frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad C = 1,$$

így a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{1}{x^4 \cdot (1 - \ln x)}.$$

- b) Mivel $1 - \ln x \neq 0$, így $\ln x \neq 1$, tehát $x \neq e$, így a $]0; \infty[$ azon legbővebb részhalmaza, amelyen az y függvény értelmezhető

$$D_y: x \in]0; \infty[\setminus \{e\}.$$

- c) Az y függvény zérushelye az

$$\frac{1}{x^4 \cdot (1 - \ln x)} = 0$$

egyenlet megoldása, amiből $1 = 0$ következne, így az y függvénynek nincs zérushelye.

- d) Az y függvény derivált függvénye

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{-4x^3 \cdot (1 - \ln x) - x^4 \cdot \frac{-1}{x}}{(x^4 \cdot (1 - \ln x))^2} = \\ &= \frac{-4x^3 \cdot (1 - \ln x) + x^3}{x^8 \cdot ((1 - \ln x))^2} = \frac{x^3 \cdot (-3 + 4 \ln x)}{x^8 \cdot ((1 - \ln x))^2} = \\ &= \frac{-3 + 4 \ln x}{x^5 \cdot ((1 - \ln x))^2}. \end{aligned}$$

- e) Az $y'(x) = 0$ egyenlet megoldását kell meghatároznunk. Mivel

$$y'(x) = \frac{-3 + 4 \ln x}{x^5 \cdot ((1 - \ln x))^2},$$

ezért az

$$\frac{-3 + 4 \ln x}{x^5 \cdot ((1 - \ln x))^2} = 0$$

egyenlet egyetlen megoldása $x = e^{\frac{3}{4}}$.

A derivált függvény előjeleit táblázatba foglaljuk:

x	$]0; e^{\frac{3}{4}}[$	$e^{\frac{3}{4}}$	$]e^{\frac{3}{4}}; e[$	e	$]e; \infty[$
$y'(x)$	$-$	0	$+$	nincs értelmezve	$+$
$y(x)$	\searrow	lok. min.	\nearrow	nincs értelmezve	\nearrow
$y(x)$		$0, 2$			

f) Az y függvény másodrendű derivált függvénye

$$\begin{aligned}
 y''(x) &= \frac{\frac{4}{x} \cdot x^5 \cdot (1 - \ln x)^2}{x^{10} \cdot (1 - \ln x)^4} - \\
 &= \frac{-(-3 + 4 \ln x) \cdot (5x^4 \cdot (1 - \ln x)^2 + x^5 \cdot 2 \cdot (1 - \ln x) \cdot \frac{-1}{x})}{x^{10} \cdot (1 - \ln x)^4} = \\
 &= \frac{4x^4 \cdot (1 - \ln x) - (-3 + 4 \ln x) \cdot x^4 \cdot (3 - 5 \ln x)}{x^{10} \cdot (1 - \ln x)^3}.
 \end{aligned}$$

Az összevonások után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 y''(x) &= \frac{4 - 4 \ln x + 9 - 15 \ln x - 12 \ln x + 20 \ln^2 x}{x^6 \cdot (1 - \ln x)^3} = \\
 &= \frac{20 \ln^2 x - 31 \ln x + 13}{x^6 \cdot (1 - \ln x)^3}.
 \end{aligned}$$

g) Az y'' függvény zérushelye az

$$\frac{20 \ln^2 x - 31 \ln x + 13}{x^6 \cdot (1 - \ln x)^3} = 0$$

egyenlet megoldása. A nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$20 \ln^2 x - 31 \ln x + 13 = 0.$$

Ez egy $\ln x$ -ben másodfokú egyenlet. Mivel

$$\ln x_{1,2} = \frac{31 \pm \sqrt{961 - 4 \cdot 20 \cdot 13}}{40} = \frac{31 \pm \sqrt{-79}}{40},$$

ezért az y'' függvény számlálója mindenhol pozitív, így a nevező előjele dönti el az másodrendű derivált előjelét.

x	$]0; e[$	e	$]e; \infty[$
$y''(x)$	$+$	nincs értelmezve	$-$
$y(x)$	konvex	nincs értelmezve	konkáv

h) Az y függvény határértéke ∞ -ben

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0.$$

Az y függvény jobb oldali határértéke a 0 helyen

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \infty.$$

Az y függvény bal oldali határértéke az e helyen

$$\lim_{x \rightarrow e^-} y(x) = \infty.$$

Az y függvény jobb oldali határértéke az e helyen

$$\lim_{x \rightarrow e^+} y(x) = -\infty.$$

i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékészlete: $\mathbb{R} \setminus [0; 2[$

k) A függvény nem korlátos.

l) Nem páros, nem páratlan.

m) Nem periodikus.

n) Nem injektív, mert van vannak olyan azonos függvényértékek, amelyeket két különböző helyen is felvesz a függvény.

130. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) + \frac{1}{x} \cdot y(x) = y^2(x) \quad (x > 0)$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Az egyenletet az $y^2(x)$ függvénnyel osztva azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} + \frac{1}{x} \cdot y^{-1}(x) = x^3. \quad (4)$$

Vezessük be az

$$u(x) = y^{-1}(x)$$

függvényt! Ekkor az u függvény deriváltja

$$u'(x) = -y^{-2}(x) \cdot y'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -u'(x).$$

Az (4) egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$-u'(x) + \frac{1}{x} \cdot u(x) = 1.$$

Ez az egyenlet egy elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet.

Az egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$-u'(x) + \frac{1}{x} \cdot u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(x) - \frac{1}{x} \cdot u(x) = 0.$$

A homogén egyenlet megoldása

$$u_h(x) = C \cdot e^{-\int -\frac{1}{x} dx} = C \cdot e^{1 \cdot \ln|x|} = C \cdot e^{\ln x} = C \cdot x.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$u_p(x) = C(x) \cdot x$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve a

$$-u'(x) + \frac{1}{x} \cdot u(x) = 1$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-C'(x) \cdot x - C(x) + C(x) = 1.$$

Ebből az egyenletből kifejezve a $C'(x)$ függvényt

$$C'(x) = -\frac{1}{x}$$

adódik, amelyet integrálva

$$C(x) = -\ln |x|.$$

Ezt felhasználva

$$u_p(x) = -x \cdot \ln x$$

adódik, így

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = C \cdot x - x \cdot \ln x.$$

Mivel

$$u(x) = y^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{y(x)},$$

ezért

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{x \cdot (C - \ln x)},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $\ln x$ értékétől különböző értékű konstans.

131. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) + \frac{x}{x^2 + 1} \cdot y(x) = x \cdot y^2(x)$$

differentiálegyenletet!

Megoldás:

Az egyenletet az $y^2(x)$ függvénnyel osztva azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} + \frac{x}{x^2 + 1} \cdot y^{-1}(x) = x. \quad (5)$$

Vezessük be az

$$u(x) = y^{-1}(x)$$

függvényt! Ekkor az u függvény deriváltja

$$u'(x) = -y^{-2}(x) \cdot y'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -u'(x).$$

Az (5) egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$-u'(x) + \frac{x}{x^2 + 1} \cdot u(x) = x.$$

Ez az egyenlet egy elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet.

Az egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$-u'(x) + \frac{x}{x^2 + 1} \cdot u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(x) - \frac{x}{x^2 + 1} \cdot u(x) = 0.$$

A homogén egyenlet megoldása

$$u_h(x) = C \cdot e^{-\int \frac{x}{x^2+1} dx} = C \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1)} = C \cdot \sqrt{x^2 + 1}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$u_p(x) = C(x) \cdot x$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve a

$$-u'(x) + \frac{x}{x^2 + 1} \cdot u(x) = x$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-C'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} - C(x) \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x}{x^2 + 1} \cdot C(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} = x.$$

Ebből az egyenletből kifejezve a $C'(x)$ függvényt

$$C'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = x \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$$

adódik, amelyet integrálva

$$C(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Ezt felhasználva

$$u_p(x) = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} = x^2 + 1$$

adódik, így

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = C \cdot \sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1.$$

Mivel

$$u(x) = y^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{y(x)},$$

ezért

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{C \cdot \sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

132. Feladat. Oldjuk meg az

$$\cos x \cdot y'(x) + \sin x \cdot y(x) = -y^3(x)$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Az egyenletet az $y^3(x)$ függvénnyel osztva azt kapjuk, hogy

$$\cos x \cdot \frac{y'(x)}{y^3(x)} + \sin x \cdot y^{-2}(x) = -1. \quad (6)$$

Vezessük be az

$$u(x) = y^{-2}(x)$$

függvényt! Ekkor az u függvény deriváltja

$$u'(x) = -2y^{-3}(x) \cdot y'(x) = -\frac{2y'(x)}{y^3(x)}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^3(x)} = -\frac{u'(x)}{2}.$$

Az (6) egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$-\frac{\cos x}{2} \cdot u'(x) + \sin x \cdot u(x) = -1.$$

Ez az egyenlet egy elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet.

Az egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$-u'(x) + \frac{2 \sin x}{\cos x} \cdot u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(x) - \frac{2 \sin x}{\cos x} \cdot u(x) = 0.$$

A homogén egyenlet megoldása

$$u_h(x) = C \cdot e^{-\int -\frac{2 \sin x}{\cos x} dx} = C \cdot e^{-2 \cdot \ln |\cos x|} = \frac{C}{\cos^2 x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$u_p(x) = \frac{C(x)}{\cos^2 x}$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve a

$$-u'(x) + \frac{2 \sin x}{\cos x} \cdot u(x) = -1$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-\frac{\cos x}{2} \cdot \frac{C'(x) \cdot \cos^2 x - C(x) \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} + \sin x \cdot \frac{C(x)}{\cos^2 x} = -1.$$

Ebből az egyenletből kifejezve a $C'(x)$ függvényt

$$C'(x) = 2 \cos x$$

adódik, amelyet integrálva

$$C(x) = 2 \sin x.$$

Ezt felhasználva

$$u_p(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$$

adódik, így

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = \frac{C}{\cos^2 x} + \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} = \frac{C + 2 \sin x}{\cos^2 x}.$$

Mivel

$$u(x) = y^{-2}(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{y^2(x)},$$

ezért

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{C+2 \sin x}{\cos^2 x}}} = \frac{|\cos x|}{\sqrt{C + 2 \sin x}},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan konstans, amelyre az előbbi függvény értelmezve van.

133. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) - \frac{1}{x} \cdot y(x) = -x^3 \cdot y^4(x)$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Az egyenletet az $y^4(x)$ függvénnyel osztva azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^4(x)} - \frac{1}{x} \cdot y^{-3}(x) = -x^3. \quad (7)$$

Vezessük be az

$$u(x) = y^{-3}(x)$$

függvényt! Ekkor az u függvény deriváltja

$$u'(x) = -3y^{-4}(x) \cdot y'(x) = -\frac{3y'(x)}{y^4(x)}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^4(x)} = -\frac{1}{3}u'(x).$$

Az (7) egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$-\frac{1}{3}u'(x) - \frac{1}{x} \cdot u(x) = -x^3 \quad \Rightarrow \quad u'(x) + \frac{3}{x} \cdot u(x) = 3x^3.$$

Ez az egyenlet egy elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet.

Az egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$u'(x) + \frac{3}{x} \cdot u(x) = 0.$$

A homogén egyenlet megoldása

$$u_h(x) = C \cdot e^{-\int \frac{3}{x} dx} = C \cdot e^{-3 \cdot \ln|x|} = \frac{C}{x^3}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$u_p(x) = \frac{C(x)}{x^3}$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve az

$$u'(x) + \frac{3}{x} \cdot u(x) = 3x^3$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{C'(x) \cdot x^3 - C(x) \cdot 3x^2}{x^6} + \frac{3}{x} \cdot \frac{C(x)}{x^3} = 3x^3.$$

Ebből az egyenletből kifejezve a $C'(x)$ függvényt

$$\frac{C'(x)}{x^3} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 3x^6$$

adódik, amelyet integrálva

$$C(x) = \frac{3}{7} \cdot x^7.$$

Ezt felhasználva

$$u_p(x) = \frac{3}{7} \cdot x^4$$

adódik, így

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = \frac{C}{x^3} + \frac{3}{7} \cdot x^4 = \frac{7C + 3x^7}{7x^3}.$$

Mivel

$$u(x) = y^{-3}(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{y^3(x)},$$

ezért

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{u(x)}} = \sqrt[3]{\frac{7x^3}{7C + 3x^7}} = x \cdot \sqrt[3]{\frac{7}{7C + 3x^7}},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges olyan konstans, amelyre az előbbi függvény értelmezve van.

134. Feladat. Írjuk fel azoknak a függvényeknek a leképezési szabályát, amelyekre teljesül, hogy a függvény grafikonjának bármely pontjába húzott érintő-egyenese az y tengelyből $2xy^2$ hosszúságú szakaszt metsz ki.

Megoldás:

Mivel

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x) = \frac{y(x) - 2xy^2(x)}{x},$$

ezért az

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = -2 \cdot y^2(x)$$

Bernoulli-egyenletet kell megoldanunk.

Az egyenletet az $y^2(x)$ függvénnyel osztva azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} - \frac{1}{x} \cdot y^{-1}(x) = -2. \quad (8)$$

Vezessük be az

$$u(x) = y^{-1}(x)$$

függvényt! Ekkor az u függvény deriváltja

$$u'(x) = -y^{-2}(x) \cdot y'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -u'(x).$$

Az (8) egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$u'(x) + \frac{1}{x} \cdot u(x) = 2.$$

Ez az egyenlet egy elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet.

Az egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$u'(x) + \frac{1}{x} \cdot u(x) = 0.$$

A homogén egyenlet megoldása

$$u_h(x) = C \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} = C \cdot e^{-\ln|x|} = \frac{C}{x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$u_p(x) = \frac{C(x)}{x}$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve a

$$u'(x) + \frac{1}{x} \cdot u(x) = 2$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = 2.$$

Ebből az egyenletből kifejezve a $C'(x)$ függvényt

$$C'(x) = 2x$$

adódik, amelyet integrálva

$$C(x) = x^2.$$

Ezt felhasználva

$$u_p(x) = \frac{C(x)}{x} = x$$

adódik, így

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = \frac{C}{x} + x = \frac{x^2 + C}{x}.$$

Mivel

$$u(x) = y^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{y(x)},$$

ezért

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{x}{x^2 + C}.$$

135. Feladat. Tekintsük az

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = -2 \cdot y^2(x), \quad y(1) = \frac{1}{2}$$

kezdetiérték feladatot!

- a) Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását!
- b) Határozzuk meg a valós számok halmazának azon legbővebb részhalmazát, amelyen az y függvény értelmezhető!
- c) Számoljuk ki az y függvény zérushelyét!
- d) Határozzuk meg az y függvény derivált függvényét!
- e) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az y függvényt!
- f) Határozzuk meg az y függvény másodrendű derivált függvényét!
- g) Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az y függvényt!
- h) Számoljuk ki az y függvény határértékét az értelmezési tartományának határpontjaiban!
- i) Vázzuk fel az y függvény grafikonját!
- j) Határozzuk meg az y függvény értékkészletét!
- k) Korlátos-e az y függvény?
- l) Páros vagy páratlan-e az y függvény?
- m) Periodikus-e az y függvény?
- n) Injektív-e az y függvény?

Megoldás:

a) Az egyenletet az $y^2(x)$ függvénnyel osztva azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} - \frac{1}{x} \cdot y^{-1}(x) = -2. \quad (9)$$

Vezessük be az

$$u(x) = y^{-1}(x)$$

függvényt! Ekkor az u függvény deriváltja

$$u'(x) = -y^{-2}(x) \cdot y'(x) = -\frac{y'(x)}{y^2(x)}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -u'(x).$$

Az (9) egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$u'(x) + \frac{1}{x} \cdot u(x) = 2.$$

Ez az egyenlet egy elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet.

Az egyenletnek megfelelő homogén egyenlet

$$u'(x) + \frac{1}{x} \cdot u(x) = 0.$$

A homogén egyenlet megoldása

$$u_h(x) = C \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} = C \cdot e^{-\ln|x|} = \frac{C}{x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$u_p(x) = \frac{C(x)}{x}$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve a

$$u'(x) + \frac{1}{x} \cdot u(x) = 2$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = 2.$$

Ebből az egyenletből kifejezve a $C'(x)$ függvényt

$$C'(x) = 2x$$

adódik, amelyet integrálva

$$C(x) = x^2.$$

Ezt felhasználva

$$u_p(x) = \frac{C(x)}{x} = x$$

adódik, így

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = \frac{C}{x} + x = \frac{x^2 + C}{x}.$$

Mivel

$$u(x) = y^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{y(x)},$$

ezért

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{x}{x^2 + C}.$$

Mivel $y(1) = \frac{1}{2}$, ezért

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + C} \quad \Rightarrow \quad C = 1,$$

így a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

- b) A valós számok halmazának azon legbővebb részhalmaza, amelyen az y függvény értelmezhető

$$D_y: x \in \mathbb{R}.$$

- c) Az y függvény zérushelye az

$$\frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

egyenlet megoldása, amiből $x = 0$ következik.

- d) Az y függvény derivált függvénye

$$y'(x) = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

e) Az $y'(x) = 0$ egyenlet megoldását kell meghatároznunk. Mivel

$$y'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2},$$

ezért az

$$\frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

egyenlet egyetlen megoldásai $x = \pm 1$.

A derivált függvény előjeleit táblázatba foglaljuk:

x	$] - \infty; -1[$	-1	$] - 1; 1$	1	$] 1; \infty[$
$y'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$y(x)$	\searrow	lok. min.	\nearrow	lok. max.	\searrow
$y(x)$		$-0,5$		$0,5$	

f) Az y függvény másodrendű derivált függvénye

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{-2x \cdot (x^2 + 1)^2 - (-x^2 + 1) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{-2x^3 - 2x + 4x^3 - 4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

g) Az y'' függvény zérushelye az

$$\frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^2} = 0$$

egyenlet megoldása. A nevezővel szorozva azt kapjuk, hogy

$$2x^3 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot (x^2 - 3) = 0.$$

Az egyenlet megoldásai $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$ és $x_3 = \sqrt{3}$. Az y'' függvény előjeleit táblázatba foglaljuk:

x	$] -\infty; -\sqrt{3}[$	$-\sqrt{3}$	$] -\sqrt{3}; 0[$	0
$y''(x)$	$-$	0	$+$	0
$y(x)$	konkáv	infl. pont	konvex	infl. pont
$y(x)$		$-\frac{\sqrt{3}}{4}$		0

x	$]0; \sqrt{3}[$	$\sqrt{3}$	$] \sqrt{3}; \infty[$
$y''(x)$	$-$	0	$+$
$y(x)$	konkáv	infl. pont	konvex
$y(x)$		$\frac{\sqrt{3}}{4}$	

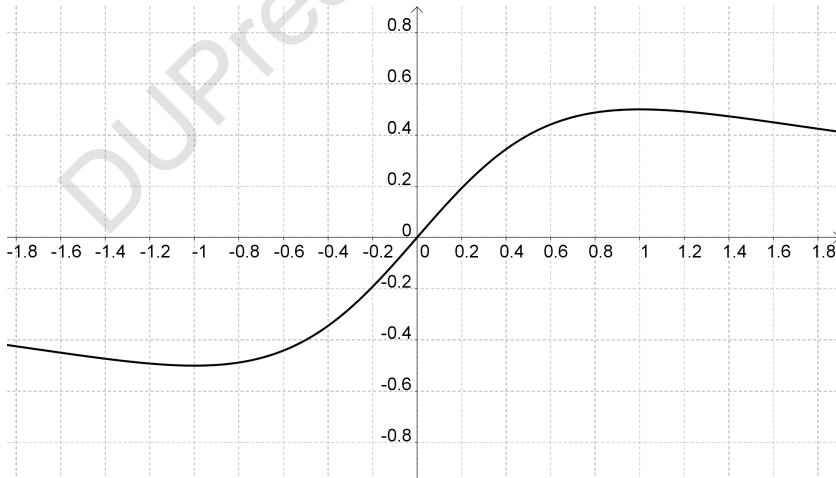
h) Az y függvény határértéke ∞ -ben

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0.$$

Az y függvény határértéke $-\infty$ -ben

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0.$$

i) Az y függvény grafikonja:



j) Az y függvény értékészlete: $[\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

- k) A függvény nem korlátos.
- l) Páratlan.
- m) Nem periodikus.
- n) Nem injektív, mert van vannak olyan azonos függvényértékek, amelyeket két különböző helyen is felvesz a függvény.

DUPress e-könyv

10. Egzisztencia és unicitási tétel elsőrendű differenciálegyenletekre

136. **Feladat.** Egyértelműen megoldható-e az

$$y'(x) = x \cdot \sqrt{y(x) - 3}, \quad y(4) = 3$$

kezdetiérték feladat?

Megoldás:

Vezessük be az

$$f(x; y) = x \cdot \sqrt{y - 3}$$

függvényt! Az f függvény y változó szerinti parciális deriváltja

$$f'_y(x; y) = \frac{x}{2 \cdot \sqrt{y - 3}},$$

ami nem folytonos a $(4; 3)$ pontban, mert

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (4;3)} \frac{x}{2 \cdot \sqrt{y - 3}} = \infty.$$

Megmutatható, hogy az f függvény nem teljesíti a Lipschitz-feltételt sem a második változójában, így a nem alkalmazható a Picard-Lindelöf-féle egzisztencia és unicitási tétel.

A differenciálegyenlet szeparábilis. Vezessük be a $g(x) = x$ és $h(y) = \sqrt{y - 3}$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenlet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sqrt{y - 3}} dy = \int x dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$2 \cdot \sqrt{y - 3} = \frac{x^2}{2} + c$$

adódik, amiből

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{c}{2} \right)^2 + 3.$$

A kezdetiérték feltétel szerint $y(4) = 3$, így $c = -8$, tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{4} - 4 \right)^2 + 3.$$

Másrészt az $y(x) = 3$ konstans függvény szintén megoldása a kezdetiérték problémának. Ezzel tehát azt kaptuk, hogy a kezdetiérték feladat megoldása nem egyértelmű.

137. **Feladat.** Igazoljuk a Picard-Lindelöf tétel segítségével, hogy az

$$y'(x) = x \cdot y(x), \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladat megoldása egyértelmű!

Megoldás:

Vezessük be az

$$f(x; y) = x \cdot y$$

függvényt! Mivel f folytonos a $(0; 1)$ pont környezetében, ezért létezik megoldás.

Mivel az f függvény második változója szerinti parciális derivált függvénye

$$f'_y(x; y) = x,$$

amely folytonos a $(0; 1)$ pont környezetében, ezért a kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható.

138. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy az

$$y'(x) = x \cdot y^2(x) + \sin y(x), \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható!

Megoldás:

Tekintsük az

$$f(x; y) = x \cdot y^2 + \sin y$$

függvényt!

Egyrészt az f függvény \mathbb{R}^2 minden pontjában folytonos.

Másrészt létezik az f függvény második változója szerinti parciális derivált függvénye:

$$f'_y(x; y) = 2xy + \cos y,$$

amely folytonos, így korlátos is.

Figyelembe véve a fentieket, a kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható.

139. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$y'(x) = \sqrt{y(x)}, \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladat nem oldható meg egyértelműen.

Megoldás:

Az egyenlet szeparábilis. Vezessük be a $g(x) = 1$ és $h(y) = \sqrt{y}$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz, így az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenlet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre.

Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int 1 dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$2 \cdot \sqrt{y} = x + c$$

adódik, amiből

$$y(x) = \left(\frac{x}{2} + C\right)^2.$$

Mivel $y(0) = 0$, ezért $C = 0$. Tehát

$$y(x) = \frac{x^2}{4}.$$

Másrészt látható, hogy az $y(x) = 0$ szintén megoldása a kezdetiérték feladatnak, így a megoldásfüggvény nem egyértelmű.

140. **Feladat.** Igazoljuk, hogy az

$$y'(x) = \sqrt{x^2 + y^2(x)}, \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladat egyértelműen megoldható!

Megoldás:

Az $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény folytonos, azonban az origóban nem differenciálható. Ellenőriznünk kell, hogy a második változójában teljesíti-e a Lipschitz-feltételt. Legyenek $(x; y_1)$ és $(x; y_2)$ tetszőleges \mathbb{R}^2 -beli pontok. Ekkor

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| = |\sqrt{x^2 + y_1^2} - \sqrt{x^2 + y_2^2}|.$$

Tekintsük azt a háromszöget a síkon, amelynek csúcsai $A = (0; 0)$, $B = (x; y_1)$ és $C = (x; y_2)$. A háromszög oldalainak a hossza

$$d_{AB} = \sqrt{x^2 + y_1^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{x^2 + y_2^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{0^2 + (y_2 - y_1)^2} = |y_1 - y_2|.$$

Mivel egy háromszög bármely két oldalhosszának különbsége nem nagyobb a harmadik oldal hosszánál, ezért

$$|\sqrt{x^2 + y_1^2} - \sqrt{x^2 + y_2^2}| \leq |y_1 - y_2|,$$

így

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| \leq |y_1 - y_2|,$$

vagyis az f függvény teljesíti az

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

Lipschitz-feltétel az $L = 1$ konstanssal.

Azt kaptuk tehát, hogy az f függvény folytonos és a második változójában teljesíti a Lipschitz-feltételt, így a Picard-Lindelöf tétel szerint egyértelműen megoldható.

11. Elsőrendű differenciálegyenletek iránymezője

141. **Feladat.** Határozzuk meg

$$y'(x) = x + y(x)$$

differenciálegyenlet megoldásfüggvényének meredekségét a

$$H = \{(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq y, -2 \leq y \leq 2\}$$

halmaz pontjaiban! A kapott eredmény segítségével vázoljuk fel az iránymezőt a $[-2; 2] \times [2; 2]$ tartományon!

Megoldás:

Vezessük be az

$$f(x; y) = x + y$$

függvényt!

Ha $P_1 = (-2; -2)$, akkor

$$y' = f(P_1) = f(-2; -2) = -2 + (-2) = -4.$$

Ha $P_2 = (-2; -1)$, akkor

$$y' = f(P_2) = f(-2; -1) = -2 + (-1) = -3.$$

Ha $P_3 = (-2; 0)$, akkor

$$y' = f(P_3) = f(-2; 0) = -2 + 0 = -2.$$

Ha $P_4 = (-2; 1)$, akkor

$$y' = f(P_4) = f(-2; 1) = -2 + 1 = -1.$$

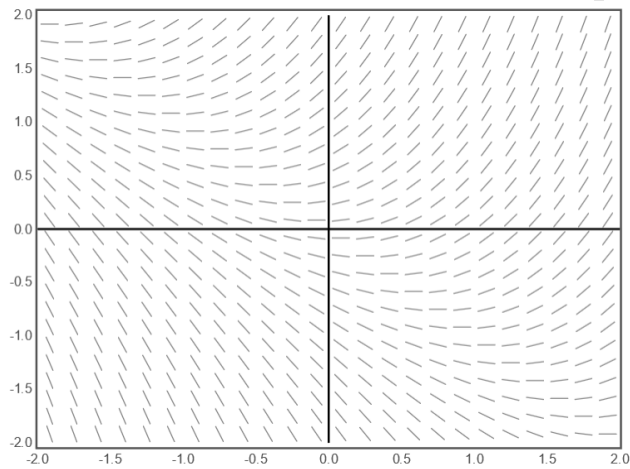
Ha $P_5 = (-2; 2)$, akkor

$$y' = f(P_5) = f(-2; 2) = -2 + 2 = 0.$$

Táblázatba foglaljuk H halmaz pontjaiban a meredekségeket:

$x \backslash y$	-2	-1	0	1	2
-2	-4	-3	-2	-1	0
-1	-3	-2	-1	0	1
0	-2	-1	0	1	2
1	-1	0	1	2	3
2	0	1	2	3	4

Az iránymező felvázolása:



142. **Feladat.** Határozzuk meg

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

differenciálegyenlet megoldásfüggvényének meredekségét a

$$H = A \setminus B$$

halmaz pontjaiban, ahol

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq y, -2 \leq y \leq 2\}$$

és

$$B = \{(-2; 0); (-1; 0); (0; 0); (1; 0); (2; 0)\}.$$

A kapott eredmény segítségével vázoljuk fel az iránymezőt a $[-2; 2] \times [2; 2]$ tartományon!

Megoldás:

Vezessük be az

$$f(x; y) = -\frac{x}{y}$$

függvényt!

Ha $P_1 = (-2; -2)$, akkor

$$y' = f(P_1) = f(-2; -2) = -\frac{-2}{-2} = -1.$$

Ha $P_2 = (-2; -1)$, akkor

$$y' = f(P_2) = f(-2; -1) = -\frac{-2}{-1} = -2.$$

Ha $P_3 = (-2; 1)$, akkor

$$y' = f(P_3) = f(-2; 1) = -\frac{-2}{1} = 2.$$

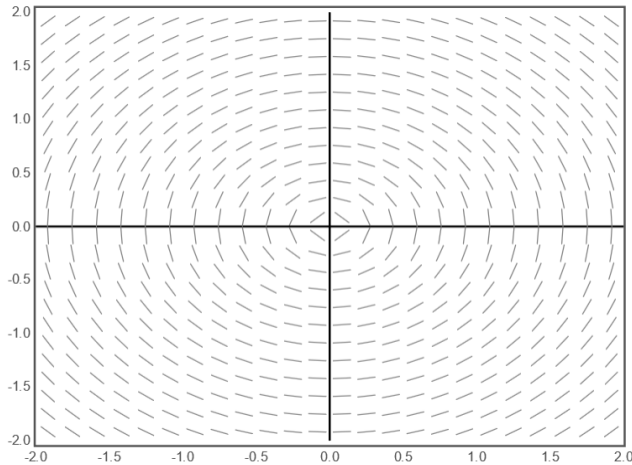
Ha $P_4 = (-2; 2)$, akkor

$$y' = f(P_4) = f(-2; 2) = -\frac{-2}{2} = 1.$$

Táblázatba foglaljuk a H halmaz pontjaiban a meredekségeket:

$x \backslash y$	-2	-1	1	2
-2	-1	-2	2	1
-1	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$
2	1	2	-2	-1

Az iránymező felvázolása:



143. **Feladat.** Tekintsük az

$$y'(x) = 2x \cdot e^{y(x)}$$

differenciálegyenletet és az arra vonatkozó $y(0) = 1$ kezdetiérték feladatot!

a) Határozzuk meg a differenciálegyenlet megoldásfüggvényének meredekségét a

$$H = \{(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq y, -2 \leq y \leq 2\}$$

halmaz pontjaiban!

b) Vázoljuk fel az iránymezőt a $[-2; 2] \times [2; 2]$ tartományon!

c) Oldjuk meg a differenciálegyenletet elemi úton!

d) Oldjuk meg a kezdetiérték feladatot!

e) Vázoljuk fel a megoldásfüggvényt ugyanabba a koordináta-rendszerbe, amibe az iránymezőt ábráztuk!

Megoldás:

a) Vezessük be az

$$f(x; y) = 2xy$$

függvényt!

Ha $P_1 = (-2; -2)$, akkor

$$y' = f(P_1) = f(-2; -2) = 2 \cdot (-2) \cdot (-2) = 8.$$

Ha $P_2 = (-2; -1)$, akkor

$$y' = f(P_2) = f(-2; -1) = 2 \cdot (-2) \cdot (-1) = 4.$$

Ha $P_3 = (-2; 0)$, akkor

$$y' = f(P_3) = f(-2; 0) = 2 \cdot (-2) \cdot 0 = 0.$$

Ha $P_4 = (-2; 1)$, akkor

$$y' = f(P_4) = f(-2; 1) = 2 \cdot (-2) \cdot 1 = -4.$$

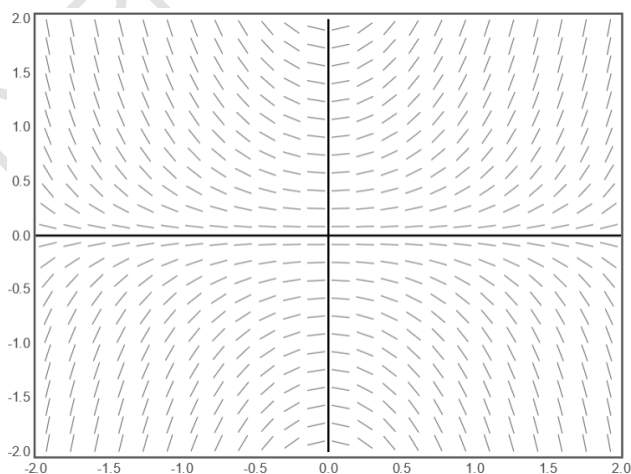
Ha $P_5 = (-2; 2)$, akkor

$$y' = f(P_5) = f(-2; 2) = 2 \cdot (-2) \cdot 2 = -8.$$

Táblázatba foglaljuk H halmaz pontjaiban a meredekségeket:

$x \backslash y$	-2	-1	0	1	2
-2	8	4	0	-4	-8
-1	4	2	0	-2	-4
0	0	0	0	0	0
1	-4	-2	0	2	4
2	-8	8	0	4	8

b) Az iránymező felvázolása:



c) Vezessük be a $g(x) = x$ és $h(y) = y$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenlet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |y| = x^2 + c$$

adódik, amiből

$$y = e^{x^2+c} = e^{x^2} \cdot e^c = C \cdot e^{x^2}.$$

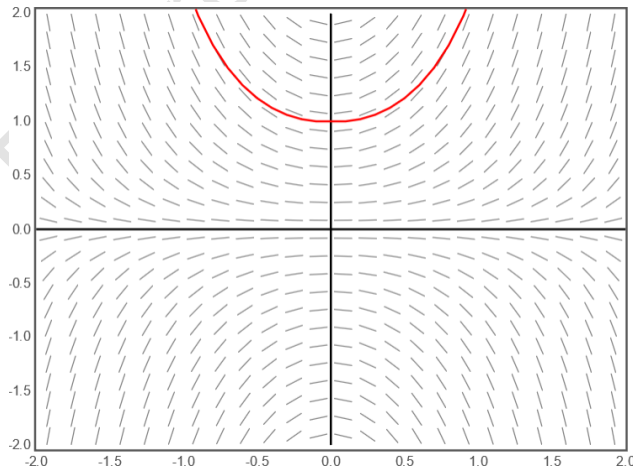
d) A kezdetiérték feltétel szerint $y(0) = 1$, így

$$1 = y(0) = C \cdot e^0 = C,$$

tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^{x^2}.$$

e) A megoldásfüggvény és az iránymező ábrázolása:



12. Numerikus módszerek elsőrendű differenciálegyenletekre

144. **Feladat.** Tekintsük az

$$y'(x) = x \cdot y(x), \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

- Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a Picard-féle iterációs eljárás alkalmazásához szükséges feltételek!
- Határozzuk meg a Picard-féle iterációs eljárásban szereplő függvénysorozat első 3 tagját!
- Az előzőekben kiszámolt tagok segítségével írjuk fel a függvénysorozat általános tagját!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását az előbbi függvénysorozat határértékének kiszámolásával!
- Vázzuk fel a függvénysorozat első 3 tagját és a kezdetiérték feladat megoldásfüggvényét közös koordináta-rendszerben!
- Számoljuk ki a kezdetiértékfeladat megoldásfüggvényének deriváltfüggvényét!
- Oldjuk meg elemi úton is a kezdetiérték problémát!
- Ellenőrizzük a megoldásfüggvény helyességét!

Megoldás:

a) Vezessük be az

$$f(x; y) = x \cdot y$$

függvényt! Ez a függvény egyrészt minden véges x és y érték esetén korlátos, másrészt létezik olyan $L > 0$ valós szám, hogy

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| = |x \cdot y_1 - x \cdot y_2| = |x| \cdot |y_1 - y_2| \leq L \cdot |y_1 - y_2|,$$

azaz teljesül a Lipschitz-feltétel, így alkalmazható a Picard-féle iterációs eljárás.

b) Mivel $x_0 = 0$ és $y(x_0) = 1$, ezért a sorozat első tagja

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t; y(x_0)) dt = 1 + \int_0^x f(t; 1) dt = 1 + \int_0^x t dt = \\ &= 1 + \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = 1 + \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

A sorozat második tagja

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t; y_1(t)) dt = 1 + \int_0^x f\left(t; 1 + \frac{t^2}{2}\right) dt = \\ &= 1 + \int_0^x t + \frac{t^3}{2} dt = \\ &= 1 + \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}\right]_0^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}. \end{aligned}$$

A sorozat harmadik tagja

$$\begin{aligned} y_3(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t; y_2(t)) dt = 1 + \int_0^x f\left(t; 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}\right) dt = \\ &= 1 + \int_0^x t + \frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{8} dt = \\ &= 1 + \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48}\right]_0^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48}. \end{aligned}$$

c) A függvénysorozat általános tagja

$$y_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^n.$$

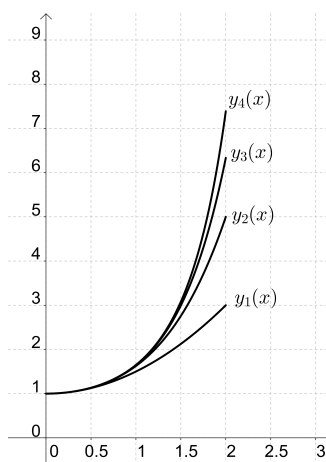
Felhasználva, hogy

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

azt kapjuk, hogy

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^k = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

d) A függvénysorozat első 3 tagja és a kezdetiérték feladat megoldásfüggvénye a $[0; 2]$ intervallumon:



e) A kezdetiértékfeladat megoldásfüggvényének deriváltfüggvénye

$$y'(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x.$$

f) Vezessük be a $g(x) = x$ és $h(y) = y$ függvényeket! Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk. Behelyettesítve az adatokat, azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + c$$

adódik. Ebből y -t kifejezve azt kapjuk, hogy

$$y(x) = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Mivel $y(0) = 1$, ezért

$$1 = C \cdot e^0 \quad \Rightarrow \quad C = 1,$$

így a kezdetiérték feladat megoldása

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

g) A differenciálegyenlet bal oldala a megoldásfüggvény behelyettesítése után

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x.$$

A differenciálegyenlet jobb oldala a megoldásfüggvény behelyettesítése után

$$x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Tehát a bal oldal és a jobb oldal egyenlő, így igazoltuk, hogy a megoldásfüggvény eleget tesz a differenciálegyenletnek. Továbbá az is teljesül, hogy

$$y(0) = e^0 = 1,$$

így a megoldásfüggvény a kezdetiérték feltételt is teljesíti.

145. **Feladat.** Tekintsük az

$$y'(x) = x + y(x), \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

- Ellenőrizzük, hogy teljesülnek-e a Picard-féle iterációs eljárás alkalmazásához szükséges feltételek!
- Határozzuk meg a Picard-féle iterációs eljárásban szereplő függvénysorozat első 3 tagját!
- Az előzőekben kiszámolt tagok segítségével írjuk fel a függvénysorozat általános tagját!
- Adjuk meg a kezdetiérték feladat megoldását az előbbi függvénysorozat határértékének kiszámolásával!
- Vázzoljuk fel a függvénysorozat első 3 tagját és a kezdetiérték feladat megoldásfüggvényét közös koordinátarendszerben!
- Oldjuk meg elemi úton is a kezdetiérték problémát!
- Ellenőrizzük a megoldásfüggvény helyességét!

Megoldás:

a) Vezessük be az

$$f(x; y) = x \cdot y$$

függvényt! Ez a függvény egyrészt minden véges x és y érték esetén korlátos, másrészt létezik olyan $L > 0$ valós szám, hogy

$$|f(x; y_1) - f(x; y_2)| = |x + y_1 - x - y_2| = 1 \cdot |y_1 - y_2| \leq L \cdot |y_1 - y_2|,$$

azaz teljesül a Lipschitz-feltétel, így alkalmazható a Picard-féle iterációs eljárás.

b) Mivel $x_0 = 0$ és $y(x_0) = 0$, ezért a sorozat első tagja

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t; y(x_0)) dt = \int_0^x f(t; 0) dt = \int_0^x t dt = \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

A sorozat második tagja

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t; y_1(t)) dt = \int_0^x f\left(t; \frac{t^2}{2}\right) dt = \int_0^x t + \frac{t^2}{2} dt = \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \right]_0^x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

A sorozat harmadik tagja

$$\begin{aligned} y_3(x) &= y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t; y_2(t)) dt = \int_0^x f\left(t; \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right) dt = \\ &= \int_0^x t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} dt = \\ &= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} \right]_0^x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}. \end{aligned}$$

c) A függvénysorozat általános tagja

$$y_n(x) = \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - x - 1.$$

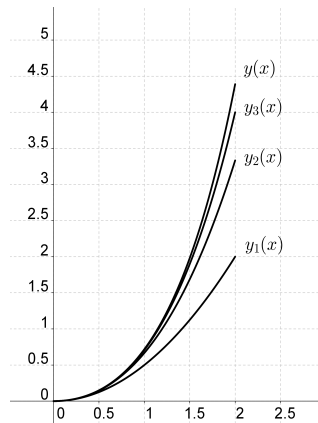
Felhasználva, hogy

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - x - 1 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - x - 1 = e^x - x - 1. \end{aligned}$$

- d) A függvénysorozat első 3 tagja és a kezdetiérték feladat megoldásfüggvénye a $[0; 2]$ intervallumon:



- e) A kezdetiértékfeladat megoldásfüggvényének deriváltfüggvénye

$$y'(x) = e^x - 1.$$

- f) Vezessük be az

$$u(x) = x + y(x)$$

függvényt! Ekkor

$$u'(x) = 1 + y'(x).$$

A helyettesítés után az

$$u'(x) - 1 = u(x)$$

differenciálegyenletet kapjuk. Az egyenletet átrendezve

$$u'(x) = 1 + u(x)$$

adódik, amely egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Legyen $h(u) = 1 + u$ és $g(x) = 1$. Ekkor az

$$\int \frac{1}{h(u)} du = \int g(x) dx$$

egyenletet kell megoldanunk az u ismeretlenre függvényre.

Az megfelelő függvények behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{1+u} du = \int 1 dx.$$

Az integrálásokat elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\ln |1 + u| = x + c$$

adódik, így

$$u(x) = C \cdot e^x - 1.$$

Mivel $y(x) = u(x) - x$, ezért a differenciálegyenlet megoldása

$$y(x) = C \cdot e^x - 1 - x.$$

Mivel $y(0) = 0$, ezért

$$0 = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1.$$

Tehát az egyenlet megoldása

$$y(x) = e^x - x - 1.$$

Mivel a differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet, ezért más módszerrel is megoldhatjuk. Az inhomogén egyenlethez tartozó megfelelő homogén egyenlet

$$y'(x) - y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int -1 dx} = C \cdot e^x.$$

A inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^x$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve az eredeti differenciálegyenletbe azt kapjuk, hogy

$$C'(x) \cdot e^x + C(x) \cdot e^x = x + C(x) \cdot e^x,$$

így

$$C'(x) = \frac{x}{e^x}.$$

A $C(x)$ függvényt parciális integrálással határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \frac{x}{e^x} dx = \int x \cdot e^{-x} dx = \\ &= -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = (-x - 1) \cdot e^{-x}. \end{aligned}$$

Tehát

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^x = (-x - 1) \cdot e^{-x} \cdot e^x = -x - 1.$$

Ezt felhasználva az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = C \cdot e^x - x - 1.$$

Mivel $y(0) = 0$, ezért $C = 1$, így a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = e^x - x - 1.$$

g) A differenciálegyenlet bal oldala a megoldásfüggvény behelyettesítése után

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x.$$

A differenciálegyenlet jobb oldala a megoldásfüggvény behelyettesítése után

$$x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Tehát a bal oldal és a jobb oldal egyenlő, így igazoltuk, hogy a megoldásfüggvény eleget tesz a differenciálegyenletnek. Továbbá az is teljesül, hogy

$$y(0) = e^0 = 1,$$

így a megoldásfüggvény a kezdetiérték feltételt is teljesíti.

146. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$y'(x) = x + y(x)$$

differenciálegyenlet megoldását úgy, hogy a megoldást 0 középpontú hatványsor alakban keressük!

Megoldás:

Feltételezzük, hogy a megoldásfüggvény

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

alakú. Ennek a deriváltfüggvénye

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe a hatványsorokat azt kapjuk, hogy

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = x + a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításából azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 \\ 2a_2 &= 1 + a_1 \\ 3a_3 &= a_2 \\ 4a_4 &= a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tehát $a_1 = a_0$, az a_2 együttható kifejezhető az a_0 együttható értékével:

$$a_2 = \frac{1 + a_1}{2} = \frac{1 + a_0}{2},$$

az a_3 együttható kifejezhető az a_0 együttható értékével:

$$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1 + a_0}{6},$$

és így tovább. Tehát

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \\ &= a_0 + a_0 \cdot x + \frac{1 + a_0}{2} \cdot x^2 + \frac{1 + a_0}{6} \cdot x^3 + \dots = \\ &= a_0 \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) + \\ &\quad + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - 1 - x = \\ &= (a_0 + 1) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - 1 - x = \\ &= (a_0 + 1) \cdot e^x - x - 1. \end{aligned}$$

Ha bevezetjük a $C = a_0 + 1$ jelölést, akkor azt kapjuk, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = C \cdot e^x - x - 1.$$

147. **Feladat.** Tekintsük az

$$y'(x) = 1 + y(x), \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték feladatot!

- Határozzuk meg az Euler-módszer segítségével a kezdetiérték feladat integrálgörbéjének leképezési szabályát a $[0; 2]$ intervallumon az $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1,5$ pontok felhasználásával!
- Oldjuk meg elemi úton a kezdetiérték feladatot!
- Szemléltessük az Euler-módszerrel kapott „közelítő” megoldást és az elemi úton kapott „valódi” megoldásfüggvényt közös koordinátarendszerben a $[0; 2]$ intervallumon.

Megoldás:

a) Tekintsük az

$$f(x; y) = x + y$$

függvényt! A kezdetiérték feltétel miatt $x_0 = 0$ és $y_0 = 1$.

A $[0; 0,5]$ intervallumon a közelítő egyenes egyenlete

$$\begin{aligned} L_1(x) &= y_0 + f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) = 1 + f(0; 1) \cdot (x - 0) = \\ &= 1 + 2 \cdot (x - 0) = 1 + 2x. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$y_1 = L_1(x_1) = 1 + 2 \cdot 0,5 = 2.$$

A $[0,5; 1]$ intervallumon a közelítő egyenes egyenlete

$$\begin{aligned} L_2(x) &= y_1 + f(x_1; y_1) \cdot (x - x_1) = 2 + f(0,5; 2) \cdot (x - 0,5) = \\ &= 2 + 3 \cdot (x - 0,5) = 0,5 + 3x. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$y_2 = L_2(x_2) = 2 + 3 \cdot 0,5 = 3,5.$$

Az $[1; 1,5]$ intervallumon a közelítő egyenes egyenlete

$$\begin{aligned} L_3(x) &= y_2 + f(x_2; y_2) \cdot (x - x_2) = 3,5 + f(1; 3,5) \cdot (x - 1) = \\ &= 3,5 + 4,5 \cdot (x - 1) = 4,5x - 1. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$y_3 = L_3(x_3) = 4,5 \cdot 1,5 - 1 = 5,75.$$

Az $[1, 5; 2]$ intervallumon a közelítő egyenes egyenlete

$$\begin{aligned} L_4(x) &= y_3 + f(x_3; y_3) \cdot (x - x_3) = 5,75 + f(0; 5,75) \cdot (x - 1,5) = \\ &= 5,75 + 6,75 \cdot (x - 1,5) = 6,75x - 4,375. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$y_3 = L_3(x_3) = 4,5 \cdot 1,5 - 1 = 5,75.$$

b) Vezessük be a $g(x) = 1$ és $h(y) = 1 + y$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenlet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{1+y} dy = \int 1 dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |1 + y| = e^x + c$$

adódik, amiből

$$y(x) = C \cdot e^x - 1.$$

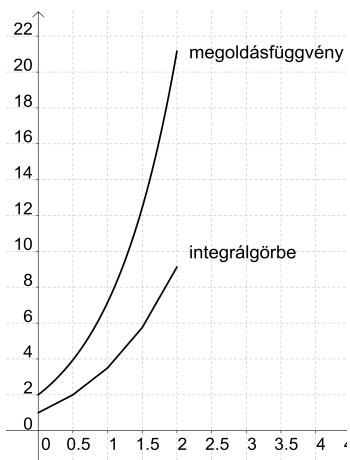
A kezdetiérték feltétel szerint $y(0) = 1$, így

$$1 = y(0) = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 2,$$

tehát a kezdetiérték feladat megoldása

$$y(x) = 2 \cdot e^x - 1.$$

c) Az integrálgörbe és a megoldásfüggvény szemléltetése:



DUPress e-könyv

13. Vegyes feladatok az elsőrendű differenciálegyenletek témaköréből

148. **Feladat.** Egy 100 literes tartályban 4 gramm klórmész van oldott állapotban. A tartályba percenként 5 liter tiszta víz folyik be és az oldat ugyanilyen sebességgel a túlfolyón kifolyik. Mennyi lesz a víz klórmész tartalma fél óra múlva, ha a klórmész egyenletes eloszlását folyamatos keveréssel biztosítjuk?

Megoldás:

Legyen a klórmész tartalma a megfigyelés után t perc elteltével x gramm. Ekor az oldat koncentrációja

$$\frac{x}{100} \left[\frac{\text{g}}{\text{l}} \right].$$

Ezt felhasználva felírható az

$$\dot{x}(t) = -\frac{5}{100} \cdot x(t)$$

szeparábilis differenciálegyenlet. Vezessük be a $g(t) = -\frac{5}{100}$ és $h(x) = x$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$\dot{x}(t) = g(t) \cdot h(x)$$

alakú lesz. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t) dt$$

egyenlet kell megoldanunk az x ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{x} dx = \int -\frac{5}{100} dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |x| = -\frac{5}{100} \cdot t + c$$

adódik, amiből

$$x(t) = e^{-\frac{5}{100}t+c} = C \cdot e^{-\frac{5}{100}t}.$$

Mivel a megfigyelés kezdetén a tartályban 4 gramm klórmész volt, ezért teljesül az $x(0) = 4$ feltétel. Ezt felhasználva

$$4 = x(0) = C \cdot e^0 = C,$$

tehát a t időpillanatban

$$x(t) = 4 \cdot e^{-\frac{5}{100} \cdot t}$$

gramm klórmész van oldott állapotban. Tehát a víz klórmész tartalma 30 perccel a megfigyelés után

$$x(30) = 4 \cdot e^{-\frac{5}{100} \cdot 30} = 4 \cdot e^{-1,5} \approx 0,892 \text{ [g]}.$$

149. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$y'(x) + \frac{2}{x} \cdot y(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{2}, \quad y(1) = \frac{5}{2}$$

kezdetiérték feladatot! Határozzuk meg a megoldásfüggvény másodrendű derivált függvényét!

Megoldás:

A differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén. Az egyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet

$$y'(x) + \frac{2}{x} \cdot y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet megoldása

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int \frac{2}{x} dx} = C \cdot x^{-2} = \frac{C}{x^2}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{x^2}$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{C'(x) \cdot x^2 - C(x) \cdot 2x}{x^4} + \frac{2}{x} \cdot \frac{C(x)}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{2}.$$

Az egyenletet rendezve

$$C'(x) = 2x - \frac{3}{2} \cdot x^2$$

adódik, így

$$C(x) = x^2 - \frac{x^3}{2}.$$

Tehát

$$y_p(x) = 1 - \frac{x}{2},$$

így az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{C}{x^2} + 1 - \frac{x}{2}.$$

Mivel $y(1) = \frac{5}{2}$, ezért

$$\frac{5}{2} = C + 1 - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 2,$$

tehát a kezdetiérték feladat általános megoldása

$$y(x) = \frac{2}{x^2} + 1 - \frac{x}{2}.$$

A megoldásfüggvény derivált függvénye

$$y'(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2},$$

a másodrendű derivált függvény

$$y''(x) = \frac{12}{x^3}.$$

150. Feladat. Oldjuk meg az

$$x \cdot y'(x) + y(x) = \cos x$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén. Az egyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet

$$x \cdot y'(x) + y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(x) + \frac{1}{x} \cdot y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet megoldása

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{C}{x}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{x}$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x \cdot \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = \cos x.$$

Az egyenletet rendezve

$$C'(x) = \cos x$$

adódik, így

$$C(x) = \sin x.$$

Tehát

$$y_p(x) = \frac{C}{x} = \frac{\sin x}{x},$$

így az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{\sin x}{x} = \frac{C + \sin x}{x},$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

151. **Feladat.** Oldjuk meg az

$$x \cdot y'(x) - 2y(x) = x, \quad y(1) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

A differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén. Az egyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet

$$x \cdot y'(x) - 2y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(x) - \frac{2}{x} \cdot y(x) = 0.$$

A homogén egyenlet megoldása

$$y_h(x) = C \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} = C \cdot x^2.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_p(x) = C(x) \cdot x^2$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (C'(x) \cdot x^2 + C(x) \cdot 2x) - 2 \cot C(x) \cdot x^2 = x.$$

Az egyenletet rendezve

$$C'(x) = \frac{1}{x^2}$$

adódik, így

$$C(x) = -\frac{1}{x}.$$

Tehát

$$y_p(x) = C(x) \cdot x^2 = -x,$$

így az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = C \cdot x^2 - x.$$

Mivel $y(1) = 0$, ezért

$$0 = C - 1 \quad \Rightarrow \quad C = 1,$$

így a kezdetiérték feladat megoldásfüggvénye

$$y(x) = x^2 - x.$$

152. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x^2 \cdot e^x$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

A differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén. Az egyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = 0.$$

A homogén egyenlet megoldása

$$y_h(x) = C \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} = C \cdot x.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását

$$y_p(x) = C(x) \cdot x$$

alakban keressük. Ezt behelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{C(x) \cdot x}{x} = x^2 \cdot e^x.$$

Az egyenletet rendezve

$$C'(x) = x \cdot e^x$$

adódik, így

$$C(x) = \int x \cdot e^x dx.$$

Az integrálást a parciális integrálás képletével végezhetjük el:

$$C(x) = x \cdot e^x - e^x = e^x \cdot (x - 1).$$

Tehát

$$y_p(x) = x \cdot (x - 1) \cdot e^x,$$

így az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = C \cdot x + x \cdot (x - 1) \cdot e^x,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

153. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = (5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x) \cdot y(x)$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Vezessük be a $g(x) = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x$ és $h(y) = \ln y$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz, azaz szeparábilis. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenlet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$\ln |y| = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + c$$

adódik, amiből a megoldásfüggvény

$$y(x) = C \cdot e^{x^5 + x^4 + x^3 + x^2}.$$

154. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) = y^2(x) - 4y(x) + 4$$

differenciálegyenletet!

Megoldás:

Vezessük be a $g(x) = 1$ és $h(y) = y^2 - 4y + 4$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz, azaz szeparábilis. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenlet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y^2 - 4y + 4} dy = \int 1 dx.$$

A bal oldalon szereplő kifejezést átalakítva azt kapjuk, hogy

$$\int (y - 2)^{-2} dy = \int 1 dx.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{y - 2} = x + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$y(x) = -\frac{1}{x + c} + 2,$$

ahol c tetszőleges olyan valós szám, amelyre az előbbi függvény értelmezve van.

155. Feladat. A $A \rightarrow B$ nulladrendű kémiai reakcióban részt vevő A anyag koncentrációja kezdetben $1,5 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} \right]$, 120 másodperc múlva az A anyag koncentrációja $0,75 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} \right]$.

- Írjuk fel a reakciósebességi egyenletet!
- Határozzuk meg az A anyag koncentráció-idő függvényét!
- Adjuk meg a reakciósebességi együttható értékét!

Megoldás:

A reakciósebességi egyenlet

$$\dot{C}_A(t) = -k.$$

A reakciósebességi egyenlet egy közvetlenül integrálható differenciálegyenlet, melynek megoldása

$$C_A(t) = -k \cdot t + c.$$

A kiindulási anyag koncentrációja kezdetben $C_A(0) = 1,5$ volt, így $c = 1,5$, vagyis a kiindulási anyag koncentrációja az idő függvényében

$$C_A(t) = 1,5 - k \cdot t.$$

Mivel $C(120) = 0,75$, ezért

$$0,75 = 1,5 - 120k,$$

amiből azt kapjuk, hogy a reakciósebességi együttható értéke

$$k = 0,00625 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3 \cdot \text{s}} \right].$$

156. **Feladat.** Egy kémiai reakció sebességi egyenlete

$$C'_A(t) = -k \cdot C_A^2(t).$$

Ha az A anyag koncentrációja kezdetben $C_{A_0} = 0,24 \left[\frac{\text{mol}}{\text{dm}^3} \right]$, akkor a 92 perc után a reakció 75%-ban játszódik le.

- Határozzuk meg a reakciósebességi együttható értékét!
- Írjuk fel a koncentráció-idő függvényt!
- Vázoljuk fel a koncentráció-idő függvény grafikonját!

Megoldás:

a) A

$$\dot{C}_A(t) = -k \cdot C_A^2(t).$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet.

Vezessük be a $g(t) = -k$ és $h(C_A) = C_A^2$ függvényeket. Ekkor teljesülnie kell az

$$\int \frac{1}{h(C_A)} dC_A = \int g(t) dt$$

egyenletnek. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{C_A^2} dC_A = \int -k dt.$$

Elvégezve az integrálásokat

$$-\frac{1}{C_A} = -k \cdot t + c$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy

$$C_A(t) = \frac{1}{k \cdot t - c}.$$

Mivel a kiindulási anyagok koncentrációja

$$C(0) = 0,24$$

volt, ezért

$$0,24 = -\frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{25}{6}$$

adódik, így a kiindulási anyag koncentrációja az idő függvényében

$$C_A(t) = \frac{1}{k \cdot t + \frac{25}{6}}.$$

Mivel 92 perc után 75%-ban játszódott le a reakció, ezért

$$0,25 \cdot 0,24 = \frac{1}{k \cdot 92 + \frac{25}{6}}.$$

Tehát

$$0,06 = \frac{1}{k \cdot 92 + \frac{25}{6}} \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{6} = 92k + \frac{25}{6},$$

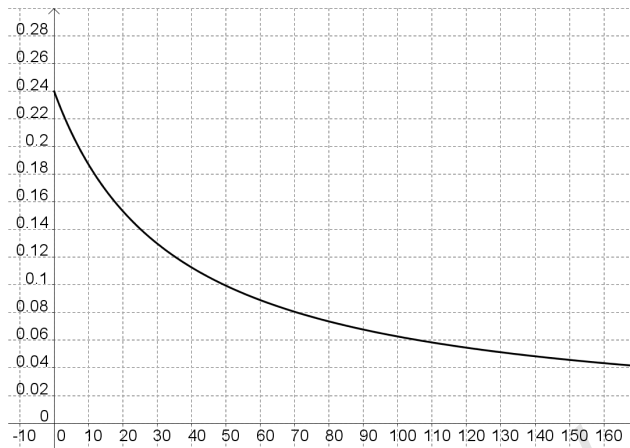
amiből azt kapjuk, hogy

$$k = \frac{75}{552} \approx 0,1359 \left[\frac{\text{dm}^3}{\text{mol} \cdot \text{min}} \right].$$

b) A koncentráció-idő függvény

$$C_A(t) = \frac{1}{\frac{75}{552} \cdot t + \frac{25}{6}} = \frac{552}{75t + 2300}.$$

c) A koncentráció-idő függvény grafikonja:



157. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$y'(x) = \frac{1}{2} \cdot (y^2(x) - 1)$$

differenciálegyenlet azon megoldásfüggvényét, amelyre $y(0) = 2$ teljesül!

Megoldás:

Vezessük be a $g(x) = \frac{1}{2}$ és $h(y) = y^2 - 1$ függvényeket. Ekkor az egyenlet

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y)$$

alakú lesz, azaz szeparábilis. A szeparábilis egyenletek általános elmélete szerint az

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$$

egyenlet kell megoldanunk az y ismeretlen függvényre. Az adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{y^2 - 1} dy = \int \frac{1}{2} dx.$$

A bal oldalon lévő integrandust első lépésben átalakítjuk:

$$\int \frac{1}{y^2 - 1} dy = \int \frac{1}{(y + 1) \cdot (y - 1)} dy.$$

Az

$$\frac{1}{(y + 1) \cdot (y - 1)}$$

törtet parciális törtekre bontva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(y+1) \cdot (y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel, majd a tagokat mindkét oldalon fokszám szerint rendezve

$$\begin{aligned} 1 &= A \cdot (y-1) + B \cdot (y+1) \\ 1 &= (A+B) \cdot y - A + B \end{aligned}$$

adódik, így az

$$\left. \begin{aligned} A+B &= 0 \\ -A+B &= 1 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer kell megoldanunk. Az egyenletrendszer megoldására azt kapjuk, hogy $B = \frac{1}{2}$ és $A = -\frac{1}{2}$. Tehát

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(y+1) \cdot (y-1)} dy &= \int \frac{-\frac{1}{2}}{y+1} + \frac{\frac{1}{2}}{y-1} dy = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln|y-1| - \frac{1}{2} \cdot \ln|y+1| = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right|. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x + c.$$

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \frac{1}{2} x + c,$$

így

$$\ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = x + c,$$

amiből

$$\left| \frac{y-1}{y+1} \right| = C \cdot e^x$$

adódik. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$y-1 = C \cdot e^x \cdot (y+1).$$

Az egyenletet úgy rendezve, hogy egy oldalon szerepeljenek az y függvényt tartalmazó tagok

$$C \cdot e^x + 1 = y - C \cdot e^x \cdot y$$

adódik, így

$$1 + C \cdot e^x = y \cdot (1 - C \cdot e^x),$$

amiből kifejezve az y függvényt azt kapjuk, hogy

$$y(x) = \frac{1 + C \cdot e^x}{1 - C \cdot e^x}.$$

Mivel $y(0) = 2$, ezért

$$2 = \frac{1 + C \cdot e^0}{1 - C \cdot e^0},$$

vagyis

$$2 = \frac{1 + C}{1 - C},$$

amiből $C = \frac{1}{3}$ adódik. Tehát a keresett megoldásfüggvény

$$y(x) = \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot e^x}{1 - \frac{1}{3} \cdot e^x} = \frac{3 + e^x}{3 - e^x}.$$

158. Feladat. Oldjuk meg az

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = x \cdot e^x,$$

differenciálegyenletet! Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását konstansvariálással határozzuk meg!

Megoldás:

A differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén.

Először elhagyjuk a differenciálegyenletből azt a tagot, amitől az inhomogén, és megoldjuk a kapott, már homogén

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(x) - \frac{1}{x} \cdot y(x) = 0$$

differenciálegyenletet.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$y_h(x) = C \cdot e^{-\int -\frac{1}{x} dx} = C \cdot e^{\ln|x|} = C \cdot x.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását konstansvariálással határozzuk meg.

A homogén egyenlet megoldásánál kapott C konstanst kicseréljük egy $C(x)$ függvényre, és az eredeti inhomogén egyenlet egy (partikuláris) megoldását

$$y_p = C(x) \cdot x$$

alakban keressük. Ezt visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y_p'(x) - \frac{y_p(x)}{x} = x^2 \cdot e^x,$$

azaz

$$(C(x) \cdot x)' - \frac{C(x) \cdot x}{x} = x^2 \cdot e^x.$$

Elvégezve a bal oldalon a deriválást azt kapjuk, hogy

$$C'(x) \cdot x + C(x) - C(x) = x^2 \cdot e^x.$$

A $C(x)$ szorzótényezőt tartalmazó tag kiesik, így

$$C'(x) \cdot x = x^2 \cdot e^x \Rightarrow C'(x) = x \cdot e^x$$

adódik.

Ebből a parciális integrálás módszerével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C(x) &= \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = \\ &= x \cdot e^x - e^x = (x - 1) \cdot e^x. \end{aligned}$$

Tehát az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_p(x) = x \cdot (x - 1) \cdot e^x = x^2 \cdot e^x - x \cdot e^x.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként kapjuk, azaz

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C \cdot x + x^2 \cdot e^x - x \cdot e^x,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

159. Feladat. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az

$$y'(t) - 2y(t) = e^t, \quad y(0) = 0$$

kezdetiérték feladatot!

Megoldás:

Vegyük a differenciálegyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y'(t) - 2y(t)] = \mathcal{L}[e^t].$$

Felhasználva a Laplace-transzformált linearitását

$$\mathcal{L}[y'] - 2\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^t]$$

adódik.

Mivel

$$\mathcal{L}[y'] = s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0)$$

és

$$\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1},$$

ezért az

$$s \cdot \mathcal{L}[y] - y(0) - 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1}$$

egyenlethez jutunk.

Mivel $y(0) = 0$, ezért

$$s \cdot \mathcal{L}[y] - 2\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1}.$$

Az egyenletet átrendezve

$$\mathcal{L}[y] \cdot (s-2) = \frac{1}{s-1}$$

adódik, amiből kifejezve a $\mathcal{L}[y]$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s-2) \cdot (s-1)}.$$

A kapott törtet parciális törtek összegére bontva

$$\frac{1}{(s-2) \cdot (s-1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1}$$

adódik. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$1 = A \cdot (s-1) + B \cdot (s-2).$$

A tagokat mindkét oldalon fokszámuk szerint csoportosítva

$$(A+B) \cdot s - A - 2B = 1$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok egyenlőségéből azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 0 \\ -A - 2B = 1 \end{array} \right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldására $A = 1$ és $B = -1$ adódik. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}.$$

Ebből a kezdetiérték feladat megoldására azt kapjuk, hogy

$$y(t) = e^{2t} - e^t.$$

160. Feladat. Írjuk fel azt az elsőrendű differenciálegyenletet, amelynek általános megoldása

$$y(x) = C \cdot e^{4x} + x,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$.

Megoldás:

Az

$$y(x) = C \cdot e^{4x} + x$$

függvény mindkét oldalát deriváljuk az x változó szerint. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$y'(x) = 4C \cdot e^{4x} + 1.$$

Az

$$y(x) = C \cdot e^{4x} + x$$

egyenletből kifejezve a C paramétert azt kapjuk, hogy

$$C = \frac{y(x) - x}{e^{4x}}.$$

Ezt behelyettesítve az

$$y'(x) = 4C \cdot e^{4x} + 1$$

egyenletbe

$$y'(x) = 4 \cdot \frac{y(x) - x}{e^{4x}} \cdot e^{4x} + 1$$

adódik. Tehát a keresett differenciálegyenlet

$$y'(x) = 4 \cdot (y(x) - x) + 1.$$

Irodalomjegyzék

- [1] Babcsányi István – Csank Lajos – Nagy Attila – Szép Gabriella – Zibolen Bence, *Matematika feladatgyűjtemény III.*, Műegyetemi Kiadó, 2007.
- [2] Bajcsy Pál, *Matematika III.*, Műegyetemi Kiadó, 1996.
- [3] Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – Duró Lajosné dr. – Gyapjas Ferencné – Hack Frigyes – dr. Kántor Sándorné – dr. Korányi Erzsébet, *Matematika feladatgyűjtemény II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.
- [4] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II.*, Műegyetemi Kiadó, 2002.
- [5] C. Henry Edwards, David E. Penney, *Elementary differential equations*, Pearson, 2008.
- [6] Farkas Miklósné, *Közönséges differenciálegyenletek*, Műegyetemi Kiadó, 2009.
- [7] Gémes Margit–Szentmiklóssy Zoltán, *Bevezetés a matematikába - jegyzet és példatár kémia BsC-s hallgatók számára*, elektronikus jegyzet, 2015.
- [8] Ernest F. Haeussler, *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, the Life and Social Sciences*, Prentice Hall, 2011.
- [9] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.
- [10] Keszei Ernő, *A reakciókinetika alapjai*, ELTE, Budapest, 2015.
- [11] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf>, 2011.
- [12] Kovács Márton, *Reakciókinetika feladatgyűjtemény*, elektronikus jegyzet, 2018.
- [13] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [14] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritzey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.
- [15] Lökös Sándor, *Differenciálegyenletek környezetben alapszakos hallgatóknak*, elektronikus jegyzet, 2018.
- [16] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.
- [17] Ósz Katalin, *Fizikai kémia II. példatár*, elektronikus jegyzet, <http://web.unideb.hu/uh9v32/peldatar.html>, 2019.
- [18] Pintér Lajos, *Analízis I.*, Typotex, 1998.
- [19] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.
- [20] Rujp Veronika, *Differenciálegyenletek felállítása és megoldása fizikai példákon keresztül*, ELTE, szakdolgozat, 2013.
- [21] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.
- [22] Knut Sydsaeter, Peter Hammond, *Matematika közgazdászoknak*, Aula, 2006.
- [23] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial*, Life and Social Sciences, Brooks/Cole, 1999.
- [24] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.
- [25] Turányi Tamás, *Fizikai kémiai előadások (reakciókinetika)*, ELTE, Kémiai Intézet, 2018.

Tartalomjegyzék

1. Alapfogalmak	4
2. Közvetlenül integrálható (elsőrendű) differenciálegyenletek	16
3. Szeparábilis differenciálegyenletek	40
4. Szeparábilis differenciálegyenletre visszavezethető egyenletek	93
5. Elsőrendű lineáris homogén differenciálegyenletek	112
6. Elsőrendű lin. inhom. diff.egy. megold. konstansvariálással	115
7. Elsőrendű konstansseg. lin. inhom. diff.egy. megold. próbafüggvénnyel	126
8. Elsőrendű konstansseg. lin. inhom. diff.egy. megold. Laplace- transzformációval	137
9. Bernoulli differenciálegyenlet	151
10. Egzisztencia és unicitási tételek elsőrendű differenciálegyenletekre	170
11. Elsőrendű differenciálegyenletek iránymezője	174
12. Numerikus módszerek elsőrendű differenciálegyenletekre	180
13. Vegyes feladatok az elsőrendű differenciálegyenletek témaköréből	192