

DOKTORI (PHD) ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

Különböző alakzatokon alapuló skálafüggetlen véletlen hálózatok

Perecsényi Attila

Témavezető: Dr. Fazekas István



DEBRECENI EGYETEM
INFORMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

DEBRECEN, 2020.

DOKTORI (PHD) ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

Különböző alakzatokon alapuló skálafüggetlen véletlen hálózatok

Perecsényi Attila

Témavezető: Dr. Fazekas István



DEBRECENI EGYETEM
INFORMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA

DEBRECEN, 2020.

Bevezetés

A hálózatok tudománya az utóbbi két évtizedben került a figyelem középpontjába, ami valós hálózatok általános tulajdonságait vizsgálja. Ilyen valós hálózatok például a WWW, az internet, biológiai, szociális és együttműködési hálózatok. A [3] könyv bevezetésében Barabási írja, hogy 'A key discovery of network science is that the architecture of networks emerging in various domains of science, nature, and technology are similar to each other...' és '...we will never understand complex systems unless we develop a deep understanding of the networks behind them.', azaz a hálózattudomány legfontosabb felfedezése, hogy a különböző területeken kialakuló hálózatoknak hasonló tulajdonságai vannak és csak akkor érthetjük meg ezeket az összetett rendszereket, ha mélyen tanulmányozzuk a mögöttük lévő hálózatokat.

Barabási és Albert közös, meghatározó [2] cikkükben különféle skálafüggetlen nagy hálózatokat (WWW, színészi együttműködés, stb.) sorolnak fel, majd definiálnak egy véletlen gráf modellt, ami a preferential attachment szabály szerint fejlődik, továbbá heurisztikus érveléssel és szimulációs eredményekkel is alátámasztják, hogy ez a fejlődési folyamat skálafüggetlen hálózatokhoz vezet.

Egy hálózatot skálafüggetlennek nevezünk, ha a fokszámeloszlása aszimptotikusan hatványrendű, azaz $p_d \sim Cd^{-\gamma}$, ha $d \rightarrow \infty$. Itt p_d annak a valószínűsége, hogy egy csúcsnak d a fokszáma, továbbá C és γ konstansok, ahol γ -t karakterisztikus kitevőnek nevezzük. Itt $a_k \sim b_k$ azt jelenti, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k/b_k = 1$, ahol

a_k és b_k véges sok esettől eltekintve nemnegatív számsorozatok.

A Barabási és Albert által definiált modell a következő: Minden $t = 2, 3, \dots$ lépésben egy új csúcs születik és N éllel csatlakozik régi csúcsokhoz. Annak a valószínűsége, hogy az új csúcs az i régi csúcshoz csatlakozik $\pi_i = d_i / \sum_j d_j$, ahol d_i az i csúcs fokszáma és $\sum_j d_j$ az összes csúcs fokszámának az összege. Ezt nevezzük preferential attachment szabálynak.

Ez az új fejlődési mechanizmus és a skálafüggetlen tulajdonság rengeteg kutatási eredményt szült az elmúlt két évtizedben.

Az értekezésben nem vizsgálunk valós hálózatokat, hanem az általunk definiált új matematikai modelleket és tulajdonságait ismertetjük elméleti és numerikus eszközökkel, amelyek hasznosak lehetnek valós hálózatok tulajdonságainak megismeréséhez. Ezeknek a modelleknek a növekedése során a preferential attachment szabály nagy szerepet játszik, viszont nem a fokszámok alapján fejlődnek a hálózatok, hanem bizonyos kitüntetett elemek súlya szerint.

A hálózattudomány matematikai elmélete iránt érdeklődők átfogó képet kaphatnak többek között a van der Hofstad [8] monográfiából vagy Chung-Lu [4], Durrett [5] és Janson [9] könyveiből. Továbbá, Barabási a [3] könyvében sokkal általánosabban foglalkozik a témával, amelyben egy egész fejezetet szentel a skálafüggetlen tulajdonságnak, majd nemskálafüggetlen hálózatokat is bemutat.

1. fejezet

A csillagos modell

Legyen $N \geq 3$ rögzített egész szám. A hálózat a 0 időponttól indul és a kezdeti gráfunk egy N csúcsú csillag gráf. A továbbiakban egy gráfot N -csillag gráfnak nevezünk, ha N csúcsa van, amiből $N - 1$ csúcs periféria csúcs és egy központi csúcs. Továbbá a periféria csúcsok és a központi csúcs között egy-egy él van, amelyek jelenleg irányított élek és a központi csúcs felé mutatnak. Azaz a központi csúcsnak $N - 1$ a befoka és az összes periféria csúcsnak 1 a kifoka. Ezen felül a hálózat fejlődése érdekében súlyokat rendelünk a csillagokhoz. Az N -csillagok kezdeti súlya 1, aminek $N - 1$ darab $(N - 1)$ -csillag részgráfja van. A részgráfok kezdeti súlya is egyenlő eggyel.

A hálózat fejlődési mechanizmusa a következő. Minden lépésben N csúcs lép egymással kapcsolatba, azaz együttműködnek, ami azt jelenti, hogy minden periféria csúcsból élt húzunk a központi csúcs felé, így alkotnak egy N -csillag gráfot. A korábbiakban leírtakhoz hasonlóan a párhuzamos élek megengedettek. Az új élek behúzásán kívül a súlyokat is aktualizálni kell. Ha az aktuális lépésben új N -csillag születik, akkor a kezdeti súlya 1 és ennek minden új $(N - 1)$ -csillag részgráfja is 1 súlyt kap. Előfordulhat, hogy már korábban létező $(N - 1)$ csillag is részt vesz a kölcsönhatásban, ekkor az ő súlyát növeljük eggyel. Abban az esetben, amikor már egy létező N -csillag aktiválódik újra, akkor a

súlyát és az összes $(N-1)$ -csillag részgráfjának a súlyát megnöveljük eggyel. Könnyű látni, hogy a csillagok súlyai megmutatják, hogy az aktuális csillag hányszor szerepelt együttműködésben. A csillagok súlyai fontos szerepet játszanak a hálózatunk fejlődésében, ugyanis minél nagyobb súlya van egy csillagnak annál nagyobb az esélye, hogy megint azt választjuk. Érdekes megjegyezni, hogy fejlődés alatt létrejöhetnek csillag alakzatok kölcsönhatás nélkül is, de ezeket nem tekintjük csillag gráfnak a fejlődés szempontjából, azaz 0 súllyal szerepelnek a hálózatban, így ők nem választhatóak.

Minden lépésben két lehetőségünk van. Az I lehetőségünk, hogy p valószínűséggel új csúcs születik és lép kapcsolatba $N-1$ régi csúccsal. A II lehetőség, hogy $1-p$ valószínűséggel nem születik új csúcs, hanem N régi csúcs fog együttműködni. A fentiekben $0 < p \leq 1$ rögzített szám.

A fenti két lehetőség további két-két lehetőségre bomlik: I/1, I/2, II/1 és II/2.

Legyen $0 \leq r \leq 1$ rögzített. Az I/1 esetben, ami r valószínűséggel következik be, választunk egy régi $(N-1)$ -csillag gráfot a preferential attachment szabály szerint és ez a csillag fog kölcsönhatásba lépni az új csúccsal. Ebben az esetben a preferential attachment szabály azt jelenti, hogy egy v_t súlyú $(N-1)$ -csillagot $v_t / \sum_h v_h$ valószínűséggel választunk ki, ahol $\sum_h v_h$ az összes $(N-1)$ -csillag súlyának összege. Ez az $(N-1)$ -csillag és az új csúcs fog kialakítani egy új N -csillagot. Ebben az új csillagban a központi csúcs az lesz, ami az $(N-1)$ -csillagban is a központi csúcs. A maradék $N-2$ periféria csúcs marad periféria csúcs. Végül az új csúcs perifériaként csatlakozik. Új éleket húzunk be a periféria csúcsoktól a központi csúcsig. Az új N -csillag súlya 1, továbbá $N-2$ darab új $(N-1)$ -csillag jött létre szintén 1 súllyal. Az egyetlen régi $(N-1)$ -csillag (az aktuális lépésben választott) súlyát pedig megnöveljük eggyel.

Az I/2 esetben, ami $1-r$ valószínűséggel következik be, egyenletesen választunk $N-1$ régi csúcsot és ők formálnak egy új N -csillagot az új csúccsal úgy, hogy az új csúcs lesz a középpont.

Behúzzuk az éleket a periféria csúcsoktól a központi csúcsig. Mivel ebben az esetben régi csillagok nem aktiválódnak, így az új N -csillag és az új $(N - 1)$ -csillagok súlya 1.

Most legyen $0 \leq q \leq 1$ rögzített. A II lehetőségén belül a II/1 eset q valószínűséggel következik be. Választunk egy létező N -csillag gráfot a preferential attachment szabály alapján és új éleket húzunk a periféria csúcsokból a központi csúcsba. Utána az N -csillag és minden $(N - 1)$ -csillag gráfnak megnöveljük eggyel a súlyát. Itt a preferential attachment szabály azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy kiválasztunk egy v_t súlyú N -csillagot egyenlő $v_t / \sum_h v_h$ -vel, ahol $\sum_h v_h$ az N -csillag gráfok összsúlya.

Végezetül a II/2 lehetőség $1 - q$ valószínűséggel következhet be. Ekkor N régi csúcsot egyenletesen választunk és ők formálnak egy N -csillag gráfot. A központot szintén egyenletesen választjuk a már kiválasztott N csúcs közül. Ezután behúzzuk az éleket a periféria csúcsokból a központi csúcsba, majd megnöveljük az N -csillag és az $(N - 1)$ -csillagok súlyát eggyel.

1.1. Fő eredmények

A továbbiakban $0 < p \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$ rögzített számok és legyenek

$$\alpha_{11} = pr, \quad \alpha_{12} = (1 - p)q,$$

$$\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12}, \quad \alpha_2 = pr \frac{N - 2}{N - 1} + (1 - p)q,$$

$$\beta_1 = \frac{(1 - p)(1 - q)}{p}, \quad \beta_2 = (N - 1) \left[(1 - r) + \frac{(1 - p)(1 - q)}{p} \right],$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2. \quad (1.1)$$

Jelöljük V_n -nel a csúcsok számát n lépés után. Ezen felül legyen a d_1 befokú és d_2 kifokú csúcsok száma az n -edik lépés után

$Y(n, d_1, d_2)$. Végezetül pedig $\mathcal{F}_0$ jelöli a triviális σ -algebrát. A következők szerint ez a fejlődési folyamat skálafüggetlen gráfokhoz vezet. A bizonyítás a [1] és [7] cikkek módszertanán alapszik.

1.1. Tétel. *Legyen $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ és $0 < r < 1$. Ekkor bármely rögzített d_1 és d_2 esetén, amennyiben vagy $d_1 = 0$ és $1 \leq d_2$, vagy $N - 1 \leq d_1$ és $d_2 \geq 0$ teljesül, akkor*

$$\frac{Y(n, d_1, d_2)}{V_n} \rightarrow y_{d_1, d_2} \quad (1.2)$$

majdnem biztosan, amint $n \rightarrow \infty$, ahol y_{d_1, d_2} rögzített nemnegatív számok.

Legyen d_2 rögzített, ekkor $d_1 \rightarrow \infty$ esetén

$$y_{d_1, d_2} \sim A(d_2) \left(\frac{d_1}{N-1} \right)^{-\left(1 + \frac{\beta_2 + 1}{\alpha_1}\right)}, \quad (1.3)$$

ahol

$$A(d_2) = \frac{1-r}{\alpha_1} \frac{1}{d_2!} \frac{\Gamma\left(d_2 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta + 1}{\alpha_1}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)}. \quad (1.4)$$

Legyen d_1 rögzített, ekkor $d_2 \rightarrow \infty$ esetén

$$y_{d_1, d_2} \sim B(d_1) d_2^{-\left(1 + \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)}, \quad (1.5)$$

ahol

$$B(d_1) = \frac{r}{\alpha_2} \frac{1}{\left(\frac{d_1}{N-1}\right)!} \frac{\Gamma\left(\frac{d_1}{N-1} + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}. \quad (1.6)$$

A fentiekben Γ a Gamma függvényt jelöli.

Ezen felül az N -csillagok súlyai is skálafüggetlen tulajdonságúak. Jelölje $S(n, w)$ a w súlyú N -csillagok számát és jelölje S_n az összes pozitív súllyal rendelkező N -csillag számát n lépés után. A bizonyítás a [6] cikk módszertanán alapszik, illetve a 2. fejezetben definiált populációs modellre vonatkozó állítások alkalmazásával második bizonyítást is ismertetünk.

1.2. Tétel. *Legyen $0 < p < 1$ és $0 < q$. Bármely $w = 1, 2, \dots$ esetén*

$$\frac{S(n, w)}{S_n} \rightarrow s_w \quad (1.7)$$

majdnem biztosan, amennyiben $n \rightarrow \infty$, ahol s_w , $w = 1, 2, \dots$ pozitív számok, amelyek teljesítik a következő rekurziót:

$$s_1 = \frac{1}{h+1}, \quad s_w = \frac{h(w-1)}{hw+1} s_{w-1}, \quad \text{ha } w > 1, \quad (1.8)$$

ahol $h = (1-p)q$. Ezen felül,

$$s_w \sim Cw^{-(1+\frac{1}{h})} \quad (1.9)$$

$w \rightarrow \infty$ esetén, ahol $C = \frac{1}{h}\Gamma\left(1 + \frac{1}{h}\right)$.

2. fejezet

A populációs modell

A kiindulási állapotban, azaz az $n = 0$ időpontban, maximum t egyed van jelen a populációban. Minden további $n = 1, 2, \dots$ időpontban maximum t új egyed születhet és a populáció minden egyes tagjának megfeleltetünk egy pontértéket, ami egy pozitív egész szám. Egy új egyed születésekor nagy valószínűséggel a pontértéke u , ahol $u \geq 1$ egy rögzített egész szám. Pontosabban egy új egyed pontértéke legalább u és az n -edik időpontban

$$\mathbb{P}\{\text{egy új egyed pontértéke} > u\} = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.1)$$

Jelöljük $S_n(i)$ -vel az i egyed pontértékét az n -edik időpontban. Továbbá legyen $\mathcal{F}_n$ a populáció fejlődése alatt megfigyelhető események által generált σ -algebra az n -edik időpontig. Bármely adott i egyed pontértékének a fejlődése a következő időpontban az alábbi szabályok szerint történhet:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{n+1}(i) = S_n(i) + 1 | \mathcal{F}_n\} &= a \frac{S_n(i)}{n} + b \frac{1}{n} + O\left(\left(\frac{S_n(i)}{n}\right)^2\right), \\ \mathbb{P}\{S_{n+1}(i) = S_n(i) | \mathcal{F}_n\} &= 1 - a \frac{S_n(i)}{n} - b \frac{1}{n} + O\left(\left(\frac{S_n(i)}{n}\right)^2\right), \\ \mathbb{P}\{S_{n+1}(i) > S_n(i) + 1 | \mathcal{F}_n\} &= O\left(\left(\frac{S_n(i)}{n}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

ahol a és b rögzített nemnegatív számok. Tehát minden lépésben bármely a populációban jelen lévő egyednek a pontértéke növekedhet 1-gyel vagy 0-val, de alacsony valószínűséggel magasabb változás is megengedett. Továbbá tegyük fel, hogy egy lépés során létrejött pontérték növekedések összege legfeljebb t lehet. Jelöljük ξ_n -nel az új egyedek számát az n -edik lépésben és tegyük fel, hogy

$$\mathbb{E}[\xi_n] = m + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.3)$$

ahol $m > 0$.

2.1. Fő eredmények

Jelölje $X_n(s)$ az s pontértékkel rendelkező egyedek számát az n időpontban. Továbbá jelöljön $\Theta(s)$ olyan mennyiséget, melyre $|\Theta(s)| < s$. (Pl. az $s/2$ és $\ln(1+s)$ függvényekre igaz $\Theta(s)$ bármely $s > 0$ esetén; továbbá, rögzített $0 < p < q$ esetén $s^p = \Theta(s^q)$ bármely $s > 1$ -re.) A bizonyítások a [11] cikk módszertanán alapszanak.

A 2.1. Tétel szerint a pontértékek várható értékének eloszlása skálafüggetlen.

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy az S modell feltételei teljesülnek és $a > 0$. Ekkor bármely rögzített $s = u, u+1, u+2, \dots$ esetén*

$$\mathbb{E}[X_n(s)] = c(s) \left(n + \Theta\left(Ks^{2+\frac{1}{a}}\right) \right) \quad (2.4)$$

bármely n -re, ahol K egy rögzített véges konstans,

$$c(s) = \frac{m\Gamma\left(s + \frac{b}{a}\right)\Gamma\left(u + \frac{b+1}{a}\right)}{a\Gamma\left(s + \frac{b+a+1}{a}\right)\Gamma\left(u + \frac{b}{a}\right)} \quad (2.5)$$

és Γ jelöli a Γ -függvényt. Továbbá

$$c(s) \sim \frac{m\Gamma\left(u + \frac{b+1}{a}\right)}{a\Gamma\left(u + \frac{b}{a}\right)} s^{-1-\frac{1}{a}} \quad \text{ha } s \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

A 2.2. Tétel a pontértékek a várható értékük körüli koncentrációját mutatja. Ehhez a (2.3) feltétel egy erősebb változatára van szükségünk.

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az S modell feltételei teljesülnek és $a > 0$. Továbbá feltételezzük, hogy*

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = m + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.7)$$

majdnem biztosan, ahol $m > 0$. Ekkor létezik egy C konstans úgy, hogy bármely rögzített s esetén a következők igazak:

$$\mathbb{P}\{|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq s\sqrt{n} \log n\} \leq 2n^{-\log n/C}. \quad (2.8)$$

Továbbá legyen $\delta > 0$. Ekkor létezik egy $\varphi(n) = o(1)$ függvény úgy, hogy 1 valószínűséggel csak véges sok n létezik, amelyekre $|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq \varphi(n)\mathbb{E}[X_n(s)]$ igaz, bármely $s \leq n^{(a-\delta)/(4a+2)}$ esetén.

Végezetül a 2.1. és 2.2. Tételekből következik, hogy a pontértékek eloszlása hatványrendű.

2.1. Következmény. *Tegyük fel, hogy az S Modell feltételei teljesülnek és $a > 0$. Továbbá feltesszük, hogy a (2.7) feltétel is igaz. Ekkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n(s)}{n} = c(s)$$

1 valószínűséggel, ahol $c(s)$ kielégíti a (2.5) és (2.6) összefüggéseket.

A populációs modell alkalmazásával az 1.2. Tétel és az N -pontos modell [7] esetében az M -klikkek hatványrendű súlyeloszlására ([10] doktori értekezés, 2.4. Tétel) második bizonyítást adunk.

3. fejezet

Az érdekes nemskálafüggetlen eloszlás

Legyen $N \geq 2$ rögzített egész szám. Egy M csúcsú teljes gráfot M -klikknek nevezünk úgy, mint a korábbi modellek esetén. A modellben csak azokat a teljes gráfokat tekintjük klikknek, amelyek a fejlődés során együttműködés útján jöttek létre. A fejlődés a 0 időpontban kezdődik és a kezdeti gráf egy N -klikk, aminek és annak minden részklikkjének a súlya 1. Minden lépésben N csúcs lép kapcsolatba egymással. Ez azt jelenti, hogy behúzzunk minden nem létező élt a csúcsok között, hogy N -klikket kapjunk és megnöveljük a klikk, illetve annak minden részklikkjének a súlyát 1-gyel. A nem létező klikkek súlyát 0-nak tekintjük.

Minden lépésben, p_k ($1 \leq k \leq N - 1$) valószínűséggel, k új csúcs születik és lépnek kapcsolatba $(N - k)$ régi csúcscsal, vagy p_0 valószínűséggel, nem keletkezik új csúcs, és N régi csúcs lép kapcsolatba egymással. Azaz, minden lépésben egy N -klikk jön létre (vagy egy létezőnek a súlyát növeljük).

Amikor k csúcs születik két lehetőségünk van kiválasztani az $(N - k)$ régi csúcscot. Egyrészt, r_k valószínűséggel, választhatunk egy régi $(N - k)$ -klikket súlyarányosan. Ez azt jelenti, hogy annak

a valószínűsége, hogy kiválasztunk egy w súlyú $(N - k)$ -klikket, $w / \sum_i w_i$, ahol $\sum_i w_i$ az összsúlya az $(N - k)$ -klikkeknek. Ez a preferential attachment szabály. Másrészt, $(1 - r_k)$ valószínűséggel, egyenletesen választunk $(N - k)$ régi csúcsot. Ez azt jelenti, hogy minden csúcs kiválasztásának a valószínűsége egyenlő. Utána a k új csúcs és az $(N - k)$ régi csúcs lépnek kölcsönhatásba egymással.

Viszont, abban az esetben amikor nem adunk a gráfhoz új csúcsot, akkor is van két lehetőségünk. Egyrészt, r_0 valószínűséggel, választhatunk egy N -klikket súlyarányosan és megnöveljük a súlyát és minden részklikkjének a súlyát. Másrészt, egyenletesen választhatunk N régi csúcsot és ők alkotnak N -klikket.

A p_k ($0 \leq k \leq N - 1$) valószínűségek úgy, hogy $\sum_{k=0}^{N-1} p_k = 1$ és r_k ($0 \leq k \leq N - 1$) rögzített nemnegatív számok.

Fazekas és Porvázsnyik következő tétele a foksámeloszlás skálafüggetlenségét állítja.

Legyenek

$$\alpha_k = \frac{N - k}{N} p_k r_k, \quad \text{és} \quad \alpha = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k. \quad (3.1)$$

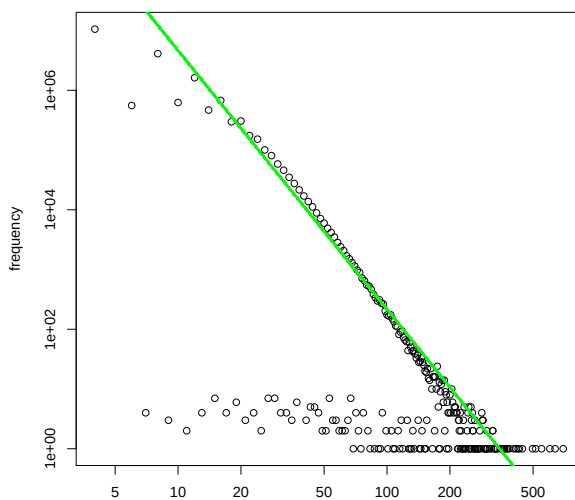
3.1. Tétel ([10], 1.7. Tétel). *Legyen $\alpha_0 > 0, \alpha \neq \alpha_0$ és tegyük fel, hogy*

$$\gcd\{k | \alpha_k > 0, k = 0, \dots, N - 1\} = 1. \quad (3.2)$$

Ekkor minden $d \geq N - 1$ esetén a d foksámsú csúcsok relatív gyakorisága aszimptotikusan

$$Cd^{-(1+\frac{1}{\alpha})}. \quad (3.3)$$

Szimulációkat futtattunk ezen a modellen különböző paraméterekkel és azt láttuk, hogy ha a (3.2) feltétel nem teljesül, akkor a hatványrendű eloszlástól eltérő eloszlást kapunk, annak ellenére, hogy a fejlődésben a preferential attachment szabály nagy szerepet játszik.



3.1. ábra. A csúcsok fokszámeloszlása, ha a (3.2) feltétel nem teljesül

Irodalomjegyzék

- [1] Á. BACKHAUSZ, T. F. MÓRI, Weights and degrees in a random graph model based on 3-interactions, *Acta Math. Hungar.*, **143**(1) (2014), 23–43.
- [2] A. L. BARABÁSI , R. ALBERT, Emergence of scaling in random networks, *Science*, **286** (1999), 509–512.
- [3] A. L. BARABÁSI, Network Science, *Cambridge University Press*, 2016.
- [4] F. CHUNG, L. LU, Complex Graphs and Networks, *AMS and CBMS*, 2006.
- [5] R. DURRETT, Random graph dynamics, *Cambridge University Press, Cambridge*, 2007.
- [6] I. FAZEKAS, CS. NOSZÁLY, A. PERECSÁNYI, Weights of Cliques in a Random Graph Model Based on Three-Interactions, *Lithuanian Mathematical Journal*, **55** (2015), 207–221.
- [7] I. FAZEKAS, B. PORVÁZSNYIK, Scale-free property for degrees and weights in an N -interactions random graph model, *J. Math. Sci.* **214** (2016), 69–89.
- [8] R. VAN DER HOFSTAD, Random Graphs and Complex Networks. *Cambridge University Press*, 2017.
- [9] S. JANSON, T. ŁUCZAK, A. RUCINSKI, Random graphs, *Wiley-Interscience, New York*, 2000.

- [10] B. PORVÁZSNYIK, Asymptotic analysis of graph evolution models, PhD thesis, *University of Debrecen, Debrecen*, 2018.
- [11] L. OSTROUMOVA, A. RYABCHENKO AND E. SAMOSVAT, Generalized preferential attachment: tunable power-law degree distribution and clustering coefficient, *Bonato A., Mitzenmacher M., Prałat P. (eds) Algorithms and Models for the Web Graph. WAW 2013. Lecture Notes in Computer Science, Springer, 8305* (2013), 185–202.

SHORT THESIS FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF
PHILOSOPHY (PhD)

Scale-free random networks based on different structures

by Attila Perecsényi

Supervisor: Dr. István Fazekas



UNIVERSITY OF DEBRECEN
DOCTORAL SCHOOL OF INFORMATICS

Debrecen, 2020.

Introduction

Network science emerged during the past two decades. It studies general features of real-world networks. Such networks are the WWW, the Internet, the power grid, biological, social and trade networks. In the Introduction of [3] A. L. Barabási writes that 'A key discovery of network science is that the architecture of networks emerging in various domains of science, nature, and technology are similar to each other...' and '...we will never understand complex systems unless we develop a deep understanding of the networks behind them.'

In their seminal paper [2] Barabási and Albert list various scale free large networks (actor collaboration, WWW, power grid, etc.), and they describe the preferential attachment model moreover, give an argument and simulation evidence that the preferential attachment rule leads to a scale-free network.

A network is called scale-free if its degree distribution is asymptotically power law, that is $p_k \sim Ck^{-\gamma}$ as $k \rightarrow \infty$, where p_k is the probability that a node has degree k , C and γ are constants. Here and in what follows $a_k \sim b_k$ means that $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k/b_k = 1$.

The preferential attachment network evolution model is the following. At every time step $t = 2, 3, \dots$ a new vertex with N edges is added to the existing graph so that the edges link the new vertex to N old vertices. The probability π_i that the new vertex will be connected to the old vertex i depends on the degree d_i of vertex i , so that $\pi_i = d_i / \sum_j d_j$, where $\sum_j d_j$ is the cumulated sum of degrees. This called preferential attachment

rule.

The concept of preferential attachment and the scale-free property incited enormous research activity.

In the PhD thesis, we do not examine real networks, but we define new mathematical models and examine their properties using theoretical and numerical tools, which can be useful for understanding the properties of real networks. During the evolution of these models, the preferential attachment rule plays a big role, but the networks do not evolve on the basis of degrees, but on the weight of certain elements.

Those, who are interested in the mathematical theory of network science, can get a comprehensive picture from, among others, the van der Hofstad [8] monograph or the books of Chung-Lu [4], Durrett [5], and Janson [9]. Furthermore, Barabási investigate this topic much more generally in his book [3], in which he devotes an entire chapter to the scale-free property and then introduces non scale-free networks.

Chapter 1

The N -star model

Let $N \geq 3$ be a fixed number. We start at time 0, and the initial graph is an N -star graph. Throughout the paper we call a graph N -star graph if it has N vertices, one of them is called central vertex, the remaining $N - 1$ vertices are called peripheral vertices, and it has $N - 1$ directed edges. The edges start from the $N - 1$ peripheral vertices and their end point is the central vertex. So the central vertex has in-degree $N - 1$, and each of the $N - 1$ peripheral vertices has out-degree 1. The initial weight of the N -star is 1, and the initial weights of its $(N - 1)$ -star sub-graphs are also 1. (The number of these $(N - 1)$ -star sub-graphs is $N - 1$.)

The evolution of the graph is the following. At each step, N vertices interact. Interaction (that is cooperation) means that we draw all edges from the peripheral vertices to the central vertex so that the vertices will form an N -star graph. We allow parallel edges. When N vertices interact, not only new edges are drawn, but the weights are also increased. At the first interaction of N vertices the newly created N -star gets weight 1, and its new $(N - 1)$ -star sub-graphs also get weight 1. If a sub-graph is not newly created, then its weight is increased by 1. When an existing N -star is activated again, then its weight and the weights of its $(N - 1)$ -star sub-graphs are increased by 1. So the weight of an N -star is the number of its activations. We can see that the

weight of an $(N - 1)$ -star is equal to the sum of the weights of the N -stars containing it. The weights play crucial role in our model. The higher the weight of a star the higher the chance that it will be activated again.

We have two options in every step of the evolution. **Option I**: with probability p , we add a new vertex, and it interacts with $N - 1$ old vertices. **Option II**: with probability $1 - p$, we do not add any new vertex, but N old vertices interact. Here $0 < p \leq 1$ is fixed.

Option I. In this case, that is when a new vertex is born, we have again two possibilities: I/1 and I/2.

I/1. The first possibility, which has probability r , is the following. (Here $0 \leq r \leq 1$ is fixed.) We choose one of the existing $(N - 1)$ -star sub-graphs according to the preferential attachment rule, and it will interact with the new vertex. Here the preferential attachment rule means that an $(N - 1)$ -star of weight v_t is chosen with probability $v_t / \sum_h v_h$, where $\sum_h v_h$ is the cumulated weight of the $(N - 1)$ -stars. The interaction of the new vertex and the old $(N - 1)$ -star means that they establish a new N -star. In this newly created N -star the center will be that vertex which was the center in the old $(N - 1)$ -star, the former $N - 2$ peripheral vertices remain peripheral and the newly born vertex will be also peripheral. New edges are drawn from the new and old peripheral vertices to the central one, and then the weights are increased by 1. More precisely, the just created N -star gets weight 1, among its $(N - 1)$ -star sub-graphs there are $(N - 2)$ new ones, so each of them gets weight 1, finally the weight of the only old $(N - 1)$ -star sub-graph is increased by 1.

I/2. The second possibility has probability $1 - r$. Here we choose $N - 1$ old vertices uniformly at random, and they will form an N -star graph with the new vertex, so that the new vertex will be the center. The edges are drawn from the peripheral vertices to the center. Then the weights are increased. As here the N -star graph and all of its $(N - 1)$ -star sub-graphs are new, so all of them get weight 1.

Option II. In this case, that is when we do not add any new vertex, we have two ways again: II/1 and II/2.

II/1. The first way has probability q . (Here $0 \leq q \leq 1$ is fixed.) We choose one of the existing N -star sub-graphs by the preferential attachment rule, and draw all edges from its peripheral vertices to the center vertex. Then, as above, the weight of the N -star and the weights of its $(N - 1)$ -star sub-graphs are increased by 1. Here the preferential attachment rule means that an N -star of weight v_t is chosen with probability $v_t / \sum_h v_h$, where $\sum_h v_h$ is the cumulated weight of the N -stars.

II/2. The second way has probability $1 - q$. We choose N old vertices uniformly at random, and they establish an N -star graph. Its center is chosen again uniformly at random out of the N vertices. Then, as before, new edges are drawn from the peripheral vertices to the central one, and the weights of the N -star and its $(N - 1)$ -star sub-graphs are increased by 1.

1.1 Main results

In the followings $0 < p \leq 1$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$ are fixed numbers. Let

$$\alpha_{11} = pr, \quad \alpha_{12} = (1 - p)q,$$

$$\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{12}, \quad \alpha_2 = pr \frac{N - 2}{N - 1} + (1 - p)q,$$

$$\beta_1 = \frac{(1 - p)(1 - q)}{p}, \quad \beta_2 = (N - 1) \left[(1 - r) + \frac{(1 - p)(1 - q)}{p} \right], \quad (1.1)$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2.$$

Let V_n denote the number of vertices after n steps. Let $Y(n, d_1, d_2)$ denote the number of vertices with indegree d_1 and

outdegree d_2 after the n th step, and $\mathcal{F}_0$ denotes the trivial σ -algebra. According to the next theorem this graph evolution process leads to scale-free graphs. The proof is based on [1] and [7].

Theorem 1.1. *Let $0 < p < 1$, $0 < q < 1$, $0 < r < 1$. Then for any fixed d_1 and d_2 with either $d_1 = 0$ and $1 \leq d_2$ or $N - 1 \leq d_1$ and $d_2 \geq 0$ we have*

$$\frac{Y(n, d_1, d_2)}{V_n} \rightarrow y_{d_1, d_2} \quad (1.2)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where y_{d_1, d_2} are fixed non-negative numbers.

Let d_2 be fixed, then as $d_1 \rightarrow \infty$

$$y_{d_1, d_2} \sim A(d_2) \left(\frac{d_1}{N-1} \right)^{-\left(1 + \frac{\beta_2 + 1}{\alpha_1}\right)}, \quad (1.3)$$

where

$$A(d_2) = \frac{1-r}{\alpha_1} \frac{1}{d_2!} \frac{\Gamma\left(d_2 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta + 1}{\alpha_1}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)}. \quad (1.4)$$

Let d_1 be fixed, then as $d_2 \rightarrow \infty$

$$y_{d_1, d_2} \sim B(d_1) d_2^{-\left(1 + \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_2}\right)}, \quad (1.5)$$

where

$$B(d_1) = \frac{r}{\alpha_2} \frac{1}{\left(\frac{d_1}{N-1}\right)!} \frac{\Gamma\left(\frac{d_1}{N-1} + \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta + 1}{\alpha_2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)}. \quad (1.6)$$

Here Γ denotes the Gamma function.

Moreover the weights of the N -stars are also scale-free. Let $S(n, w)$ denote the number of N -stars with weight w , and let S_n denote the number of all N -stars after n steps. Furthermore, V_n denotes the number of vertices after n steps. The proof is based on [6] and in Chapter 2 we provide a second proof, where we apply the result of the population model.

Theorem 1.2. *Let $0 < p < 1$ and $0 < q$. For all $w = 1, 2, \dots$ we have*

$$\frac{S(n, w)}{S_n} \rightarrow s_w \quad (1.7)$$

almost surely as $n \rightarrow \infty$, where s_w , $w = 1, 2, \dots$ are positive numbers satisfying the recurrence relation

$$s_1 = \frac{1}{h+1}, \quad s_w = \frac{h(w-1)}{hw+1} s_{w-1}, \quad \text{if } w > 1, \quad (1.8)$$

where $h = (1-p)q$. Moreover,

$$s_w \sim Cw^{-(1+\frac{1}{h})} \quad (1.9)$$

as $w \rightarrow \infty$, with $C = \frac{1}{h}\Gamma\left(1+\frac{1}{h}\right)$.

Chapter 2

A population model

At time $n = 0$ there exist maximum t members of the population. At each time $n = 1, 2, \dots$ maximum t individuals are born. Any member of the population is characterized by its score. The value of the score is a positive integer. At birth the score of any individual is u with high probability. Here $u \geq 1$ is a fixed integer. More precisely the score of a new individual is at least u and at time n

$$\mathbb{P}\{\text{the score of a new individual} > u\} = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.1)$$

The score of the individual i at time n is denoted by $S_n(i)$. Let $\mathcal{F}_n$ denote the past of the population up to time n . The evolution of the score of any given individual i is described by the following rules

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{n+1}(i) = S_n(i) + 1 | \mathcal{F}_n\} &= a \frac{S_n(i)}{n} + b \frac{1}{n} + O\left(\left(\frac{S_n(i)}{n}\right)^2\right), \\ \mathbb{P}\{S_{n+1}(i) = S_n(i) | \mathcal{F}_n\} &= 1 - a \frac{S_n(i)}{n} - b \frac{1}{n} + O\left(\left(\frac{S_n(i)}{n}\right)^2\right), \\ \mathbb{P}\{S_{n+1}(i) > S_n(i) + 1 | \mathcal{F}_n\} &= O\left(\left(\frac{S_n(i)}{n}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

where a and b are fixed non-negative numbers. So at each step the score of any member of the population is increased by 1 or 0, higher increase is of low probability. Assume also that the cumulated increase of the scores is at most t at each time step. Denote by ξ_n the number of new individuals at time n . Assume that

$$\mathbb{E}[\xi_n] = m + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.3)$$

where $m > 0$.

2.1 Main results

Let $X_n(s)$ denote the number of individuals having score s at time n . Let $\Theta(s)$ denote a quantity with $|\Theta(s)| < s$. (Eg. the functions $s/2$ and $\ln(1+s)$ are $\Theta(s)$ for $s > 0$; moreover, for fixed $0 < p < q$ we have $s^p = \Theta(s^q)$ for $s > 1$.) The proofs are based on [11].

The Theorem 2.1. shows that the expectation of the score distribution is scale-free.

Theorem 2.1. *Suppose that the conditions of Model S are satisfied and $a > 0$. Then for any fixed $s = u, u+1, u+2, \dots$ we have*

$$\mathbb{E}[X_n(s)] = c(s) \left(n + \Theta\left(Ks^{2+\frac{1}{a}}\right) \right) \quad (2.4)$$

for all n , where K is a fixed finite constant,

$$c(s) = \frac{\Gamma\left(s + \frac{b}{a}\right) \Gamma\left(u + \frac{b+1}{a}\right)}{a\Gamma\left(s + \frac{b+a+1}{a}\right) \Gamma\left(u + \frac{b}{a}\right)} m \quad (2.5)$$

and Γ denotes the Γ -function. Moreover

$$c(s) \sim \frac{m\Gamma\left(u + \frac{b+1}{a}\right)}{a\Gamma\left(u + \frac{b}{a}\right)} s^{-1-\frac{1}{a}} \quad \text{as } s \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Now we consider the concentration of the scores around their expectations. But here we shall need a stronger version of condition (2.3).

Theorem 2.2. *Suppose that the conditions of Model S are satisfied and $a > 0$. Moreover, assume that*

$$\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = m + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.7)$$

almost surely, where $m > 0$. Then there exists a constant C such that for any fixed s the following holds:

$$\mathbb{P}\{|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq s\sqrt{n} \log n\} \leq 2n^{-\log n/C}. \quad (2.8)$$

Furthermore let $\delta > 0$. Then there exists a function $\varphi(n) = o(1)$ such that with probability 1 we have: there exist only finitely many values of n such that $|X_n(s) - \mathbb{E}[X_n(s)]| \geq \varphi(n)\mathbb{E}[X_n(s)]$ for any $s \leq n^{(a-\delta)/(4a+2)}$.

Now we find that the score distribution is scale-free.

Corollary 2.1. *Suppose that the conditions of Model S are satisfied and $a > 0$. Assume that condition (2.7) is true. Then*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n(s)}{n} = c(s)$$

with probability 1, where $c(s)$ satisfies (2.5) and (2.6).

Applying the above results, we provide a second proof for Theorem 1.2. and for the scale-free property of M -cliques in the N -interaction model [7], which concluded the same result as Theorem 2.4. in [10].

Chapter 3

The non scale-free random graph

Let $N \geq 2$ be a fixed integer. We call a complete graph on N vertices an N -clique. In our model we consider a complete graph to be a clique, if it emerged by an interaction (cooperation) of its vertices. We start the evolution at time 0 and the initial graph is an N -clique. All subcliques of the initial graph have initial weight 1. At each step N vertices will interact. It means that we draw all non-existing edges between the vertices to obtain an N -clique and we increase the weights of all subcliques by 1. We consider the weights of non-existing elements as 0.

At each step, with probability p_k ($1 \leq k \leq N - 1$), k new vertices are born and they interact with $(N - k)$ old vertices or, with probability p_0 , we do not add any new vertex, but N old vertices will interact with each other. Therefore, at each step an N clique is constructed (or the weight of an existing N -clique is increased).

When k vertices are born we have two options to choose the $(N - k)$ old vertices. On the one hand, with probability r_k , we choose an old $(N - k)$ -clique according to the weights of the $(N - k)$ -cliques. It means that an $(N - k)$ -clique of weight w is chosen with probability $w / \sum_i w_i$, where $\sum_i w_i$ is the total weight

of all $(N - k)$ -cliques. This is the preferential attachment rule. On the other hand, with probability $(1 - r_k)$, we choose $(N - k)$ old vertices uniformly at random. Then the k new and the $(N - k)$ old vertices form an N -clique.

Otherwise, when we do not add any new vertex we have two options as well. On the one hand, with probability r_0 , we choose an old N -clique according to the weights of N -cliques and increase its weight and the weight of its subcliques. On the other hand, we choose N old vertices uniformly at random and they will form an N -clique.

The probabilities p_k ($0 \leq k \leq N - 1$), with $\sum_{k=0}^{N-1} p_k = 1$ and r_k ($0 \leq k \leq N - 1$) are fixed non-negative numbers.

The following Theorem of Fazekas and Porvázsnik shows the scale-free degree distribution.

Let

$$\alpha_k = \frac{N - k}{N} p_k r_k, \quad \text{és} \quad \alpha = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k. \quad (3.1)$$

Theorem 3.1 ([10], Theorem 1.7.). *Let $\alpha_0 > 0, \alpha \neq \alpha_0$ and assume that*

$$\gcd\{k | \alpha_k > 0, k = 0, \dots, N - 1\} = 1. \quad (3.2)$$

Then for all $d \geq N - 1$ the relative frequency of vertices with degree d asymptotically

$$C d^{-(1+\frac{1}{\alpha})}. \quad (3.3)$$

We run simulations for this model, with different parameters. According to the numerical results, in case (3.2) condition is not fulfilled, then this process leads to a distribution, which different from power law distribution, despite of the preferential attachment rule has a big role in the evolution of the model.

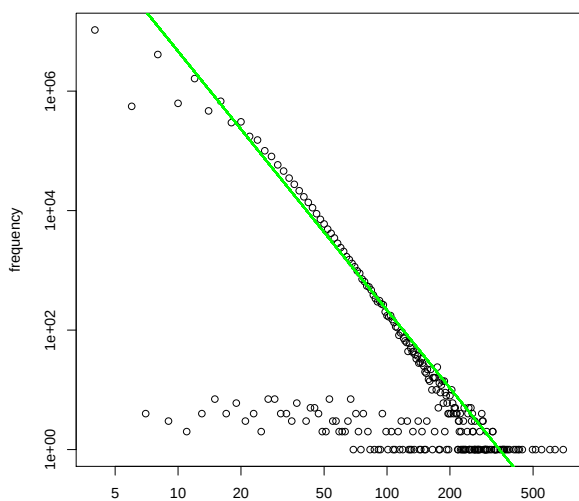


Figure 3.1: Degree distribution, when (3.2) condition is not fulfilled

Bibliography

- [1] Á. BACKHAUSZ, T. F. MÓRI, Weights and degrees in a random graph model based on 3-interactions, *Acta Math. Hungar.*, **143**(1) (2014), 23–43.
- [2] A. L. BARABÁSI , R. ALBERT, Emergence of scaling in random networks, *Science*, **286** (1999), 509–512.
- [3] A. L. BARABÁSI, Network Science, *Cambridge University Press*, 2016.
- [4] F. CHUNG, L. LU, Complex Graphs and Networks, *AMS and CBMS*, 2006.
- [5] R. DURRETT, Random graph dynamics, *Cambridge University Press, Cambridge*, 2007.
- [6] I. FAZEKAS, CS. NOSZÁLY, A. PERECSÁNYI, Weights of Cliques in a Random Graph Model Based on Three-Interactions, *Lithuanian Mathematical Journal*, **55** (2015), 207–221.
- [7] I. FAZEKAS, B. PORVÁZSNYIK, Scale-free property for degrees and weights in an N -interactions random graph model, *J. Math. Sci.* **214** (2016), 69–89.
- [8] R. VAN DER HOFSTAD, Random Graphs and Complex Networks. *Cambridge University Press*, 2017.
- [9] S. JANSON, T. ŁUCZAK, A. RUCINSKI, Random graphs, *Wiley-Interscience, New York*, 2000.

- [10] B. PORVÁZSNYIK, Asymptotic analysis of graph evolution models, PhD thesis, *University of Debrecen, Debrecen*, 2018.
- [11] L. OSTROUMOVA, A. RYABCHENKO, E. SAMOSVAT, Generalized preferential attachment: tunable power-law degree distribution and clustering coefficient, *Bonato A., Mitzenmacher M., Pralat P. (eds) Algorithms and Models for the Web Graph. WAW 2013. Lecture Notes in Computer Science, Springer*, **8305** (2013), 185–202.

A szerző publikációi

A disszertáció alapjául szolgáló publikációk

Referált folyóiratban megjelent cikkek:

1. I. FAZEKAS, CS. NOSZÁLY, A. PERECSENYI, A population evolution model and its applications to random networks, *Statistics and Probability Letters* **143** (2018), 17–27. (IF: 0.615 (2018))
2. I. FAZEKAS, CS. NOSZÁLY, A. PERECSENYI, The N-star network evolution model, *Journal of Applied Probability*, **56(2)** (2019), 416–440. (IF: 0.61 (2018))

Konferenciakiadványban megjelent cikkek:

1. I. FAZEKAS, A. PERECSENYI, Evolution of a generalized population model. *The Publications of the MultiScience - XXX. microCAD International Multidisciplinary Scientific Conference, University of Miskolc*, (2016).
2. I. FAZEKAS, A. PERECSENYI, B. PORVÁZSNYIK, Numerical analysis of a network evolution model, *IEEE 8th International Conference on Cognitive InfoCommunications (CogInfoCom)*, (2017), 171–174.
3. I. FAZEKAS, A. PERECSENYI, Scale-free property of the weights in a random graph model, *Annales Mathematicae et Informaticae* **48** (2018), 15–22.

Egyéb publikációk:

Konferenciakiadványban megjelent cikkek:

1. I. FAZEKAS, CS. NOSZÁLY, A. PERECSENYI, Weights of Cliques in a Random Graph Model Based on Three-Interactions, *Lith Math J* **55** (2015), 207–221. (IF: 0.314)

A szerző konferencia előadásai

1. Weights of Cliques in a Random Graph Model Based on Three-Interactions. *19th Young Statisticians Meeting*, Bassovizza, Italy, October 17-19, 2014.
2. Weights of Cliques in a Random Graph Model Based on Three-Interactions. *5th International Conference on Mathematics and Informatics*, Targu Mures, Romania, 2 September 2015.
3. Evolution of a generalized population model. *MultiScience – XXX. microCAD International Multidisciplinary Scientific Conference*, Miskolc, Hungary, 21 April 2016.
4. Scale-free properties of the weights in a random graph model. *The 10th International Conference on Applied Informatics*, Eger, Hungary, 1 February 2017.
5. Numerical analysis of a network evolution model. *IEEE 8th International Conference on Cognitive InfoCommunications: CogInfoCom*. Debrecen, Hungary, 12 September 2017.
6. Simulation results in a random network. *9th International Workshop on Applied Probability*, Budapest, Hungary, 18 June 2018.



Nyilvántartási szám: DEENK/131/2020.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Perecsényi Attila
Neptun kód: WOFVQ6
Doktori Iskola: Informatikai Tudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10047446

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (2)

1. Fazekas, I., Noszály, C., **Perecsényi, A.**: The N-star network evolution model.
J. Appl. Probab. 56 (2), 416-440, 2019. ISSN: 0021-9002.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/jpr.2019.21>
IF: 0.61 (2018)
2. Fazekas, I., Noszály, C., **Perecsényi, A.**: A population evolution model and its applications to random networks.
Stat. Probab. Lett. 143, 17-27, 2018. ISSN: 0167-7152.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.spl.2018.07.012>
IF: 0.615

Idegen nyelvű konferencia közlemények (2)

3. Fazekas, I., **Perecsényi, A.**: Scale-free property of the weights in a random graph model.
Ann. Math. Inform. 48, 15-22, 2018. ISSN: 1787-5021.
4. Fazekas, I., **Perecsényi, A.**, Porvázsnyik, B.: Numerical analysis of a network evolution model.
In: 8th IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications : CogInfoCom 2017 : Proceedings : September 11-14, 2017 Debrecen, Hungary, IEEE Computer Society, Piscataway, 171-174, 2017. ISBN: 9781538612644

Idegen nyelvű absztrakt kiadványok (1)

5. Fazekas, I., **Perecsényi, A.**: Evolution of a generalized population model.
In: The Publications of the MultiScience XXX. microCAD International Multidisciplinary Scientific Conference, Miskolci Egyetem, Miskolc, 1-4, 2016. ISBN: 9789633581131





További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (1)

6. Fazekas, I., Noszály, C., **Perecsényi, A.**: Weights of Cliques in a Random Graph Model Based on Three-Interactions.

Lith. Math. J. 55 (2), 207-221, 2015. ISSN: 0363-1672.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10986-015-9274-z>

IF: 0.314

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 1,539

**A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre):
1,225**

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudásmetriaai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2020.04.08.





Registry number:
Subject:

DEENK/131/2020.PL
PhD Publikációs Lista

Candidate: Attila Perecsényi

Neptun ID: WOFVQ6

Doctoral School: Doctoral School of Informatics

MTMT ID: 10047446

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (2)

1. Fazekas, I., Noszály, C., **Perecsényi, A.**: The N-star network evolution model.
J. Appl. Probab. 56 (2), 416-440, 2019. ISSN: 0021-9002.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/jpr.2019.21>
IF: 0.61 (2018)
2. Fazekas, I., Noszály, C., **Perecsényi, A.**: A population evolution model and its applications to random networks.
Stat. Probab. Lett. 143, 17-27, 2018. ISSN: 0167-7152.
DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.spl.2018.07.012>
IF: 0.615

Foreign language conference proceedings (3)

3. Fazekas, I., **Perecsényi, A.**: Scale-free property of the weights in a random graph model.
Ann. Math. Inform. 48, 15-22, 2018. ISSN: 1787-5021.
4. Fazekas, I., **Perecsényi, A.**, Porvázsnyik, B.: Numerical analysis of a network evolution model.
In: 8th IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications : CogInfoCom 2017 : Proceedings : September 11-14, 2017 Debrecen, Hungary, IEEE Computer Society, Piscataway, 171-174, 2017. ISBN: 9781538612644
5. Fazekas, I., **Perecsényi, A.**: Evolution of a generalized population model.
In: The Publications of the MultiScience XXX. microCAD International Multidisciplinary Scientific Conference, Miskolci Egyetem, Miskolc, 1-4, 2016. ISBN: 9789633581131





List of other publications

Foreign language scientific articles in international journals (1)

6. Fazekas, I., Noszály, C., **Perecsényi, A.**: Weights of Cliques in a Random Graph Model Based on Three-Interactions.

Lith. Math. J. 55 (2), 207-221, 2015. ISSN: 0363-1672.

DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s10986-015-9274-z>

IF: 0.314

Total IF of journals (all publications): 1,539

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 1,225

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

08 April, 2020

