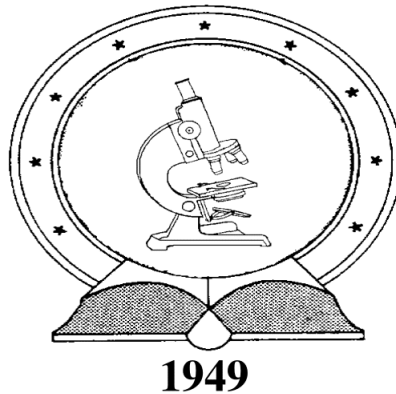


DE TTK



Nem szokványos diofantikus egyenletek és szakköri feldolgozásuk

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Rakamazi Richárd

Témavezető: **Dr. Freud Róbert**

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2019.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika (szakmódszertan) programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 20.....

.....
Rakamazi Richárd
jelölt

Tanúsítom, hogy Rakamazi Richárd doktorjelölt 2011-2019 között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika (szakmódszertan) programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 20.....

.....
Dr. Freud Róbert
témavezető

Nem szokványos diofantikus egyenletek és szakköri feldolgozásuk

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a Matematika- és Számítástudományok tudományágban

Írta: Rakamazi Richárd okleveles matematika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori iskolája
(Didaktika programja) keretében

Témavezető: Dr. Freud Róbert

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Hajdu Lajos	
tagok:	Herendiné Dr. Kónya Eszter	
	Dr. Liptai Kálmán	

A doktori szigorlat időpontja: 2018. február 23.

Az értekezés bírálói:

Dr.	
Dr.	
Dr.	

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	
tagok:	Dr.	
	Dr.	
	Dr.	
	Dr.	

Az értekezés védésének időpontja: 20...

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék hálás köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Freud Róbert Tanár Úrnak, aki több mint egy évtizede folyamatosan támogatja, segíti munkámat. Külön köszönettel tartozom a közös beszélgetésekért, az együtt matematizálásért, megannyi hasznos tanácsért és iránymutató észrevételéért, mely nélkül sem a publikációk, sem pedig ez a disszertáció nem készülhetett volna el. Kritikai, didaktikai megjegyzéseit mindig igyekeztem figyelembe venni és azokat a dolgozatomban megjeleníteni. Köszönöm tanítványaimnak, a Baár-Madas Református Gimnázium diákjainak az iskolában tartott szakköri órákon való aktív közreműködését és őszinte érdeklődését, amellyel nagymértékben hozzájárultak a szakköri foglalkozásokról szóló fejezet létrejöttéhez. Köszönettel tartozom családom tagjainak, akik türelmükkel, a nyugodt háttér biztosításával segítették elő a disszertáció megszületését. Végezetül szeretném megköszönni Csák György Tanár Úrnak, hogy a középiskolában megszerettette velem a matematikát, elindított ezen az úton, minden tekintetben követendő szakmai és emberi példát mutatott.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Binomiális együtthatók különféle közepeivel kapcsolatos diofantikus egyenletek	6
3. Binomiális együtthatókkal kapcsolatos diofantikus egyenletek megoldása elemi úton és felsőbb matematikai módszerek segítségével a középiskolai matematika szakkörön	15
3.1. Didaktikai megjegyzések, koncepciók	27
4. Diofantikus egyenletek megoldása elemi úton és Gauss-egészek segítségével a középiskolai szakkörön	30
4.1. Egy nevezetes probléma speciális esetének bizonyítása elemi módszerekkel	46
5. Versenyfeladatok szakköri feldolgozása	52
5.1. Sokszínűség a módszerekben, feladatvariációk, általánosítások	52
5.2. Versenyfeladatok szakköri feldolgozása, didaktikai megjegyzések . . .	81
5.2.1. Feladatsor	82
5.2.2. A feladatok megoldása, megjegyzések	83
5.3. Diofantikus egyenletek a nemzetközi matematikaversenyeken	94

5.3.1. Feladatsor	94
5.3.2. A feladatsor feladatainak megoldása	97
6. A témakör egy lehetséges feldolgozása szakköri órák keretében	109
6.1. A témakör tanításával kapcsolatos előzetes észrevételek, tervezés, célok megfogalmazása	110
6.2. A szakkör	112
6.2.1. Az első foglalkozás	113
6.2.2. A második foglalkozás	115
6.2.3. A harmadik és negyedik foglalkozás	118
6.2.4. Az ötödik és hatodik foglalkozás	122
6.2.5. A hetedik foglalkozás	126
6.3. Reflexió	129
7. Összefoglalás	132
8. Summary	139
9. Függelék	149
9.1. Az értekezésben szereplő pitagoraszai számhármassokkal és a Pell-egyenlettel kapcsolatos elméleti ismeretek összefoglalása	149
9.2. A szakköri foglalkozások feladatsorai	151
9.3. Az értekezésben szereplő feladatok témakör szerinti besorolása	156
9.4. Válogatás a tanulók munkáiból	157

1. fejezet

Bevezetés

Hazánkban a tehetséggondozásnak és a versenyeztetésnek jelentős hagyományai vannak. Versenyeink, az itthon megjelenő kiadványok és folyóiratok nagy része külföldön is igen népszerű. A hazai és nemzetközi matematikaversenyekről már számos igen kiváló monográfia született, itt példaként elég csak Surányi János: Matematikai versenytételek című kiváló többkötetes sorozatára gondolnunk, amely a Kürschák versenyen szereplő feladatok megoldásai mellett azok matematikai hátterét – a felhasznált tételeket és módszereket – alaposan megvilágítva járja körbe. Kutatásom fő irányvonala a fent említett versenyeken diofantikus egyenletek témakörben kitűzött feladatok több szempontból történő vizsgálata, és így néhány válogatott feladat kapcsán annak bemutatása, hogyan alkalmazhatók a felsőbb matematikában megismert módszerek, illetve milyen módon hasznosíthatók ezek a tehetséggondozásban, szakköri munkában. A feladatok megoldásai, a feladatsorok felépítése, valamint ezeknek a problémáknak a didaktikai vizsgálata teljesen önálló munkám eredménye. Az ismert versenyfeladatokat számos saját feladattal is sikerült kiegészítenem. Személyes meggyőződésem, hogy az ilyen típusú feladatok alkalmasak arra, hogy felkeltsék a diákok érdeklődését, betekintést nyújtsanak egy-egy probléma mélyebb gyökereihez, illetve fejlesszék az általános problémamegoldó képességet. Mindemellett természetesen a tanároknak is jelentős segítséget adhat tehetséggondozó munkájukhoz. Fontos feladatombnak tekintettem továbbá, hogy a különböző megoldásoknak megadjam az összehasonlítását, értékeljem azokat, sőt megvizsgáljam a kínálkozó általánosítási lehetőségeket is. Ennek a kíváncsiságnak igyekeztem a disszertáció összes fejezetében

eleget tenni. A dolgozat második, harmadik és negyedik fejezete többségében az önálló problémafölvetéseimből származnak, amelyek rendre a [15], [16] és [17] cikkekben kerültek publikálásra.

A 2. fejezetben a cél elsősorban az volt, hogy elemi módszerekkel megmutassam, hogy két különböző $\binom{n}{2}$ alakú binomiális együttható számtani, mértani és harmonikus közepe végtelen sokszor lehet ismét ilyen alakú binomiális együttható. A számtani közép esetén az összes megoldást sikerült megadnom, valamint három tag esetén sikerült bizonyos típusú binomiális együtthatókra végtelen sok nem-triviális megoldást felírni. Mivel magam is gyakorló középiskolai tanár vagyok, így fontos megjegyezni, hogy a levezetések során végig igyekeztem olyan elemi módszereket használni, melyek túlnyomó többsége tárgyalható a középiskolai oktatás során is, természetesen elsősorban szakköri órák keretében. Ez indokolja, hogy a nevezetes közepeket általában csak két tagra és a binomiális együtthatók 2-es alsó értékére vizsgáltam, hiszen a további általánosítások már lényegesen mélyebb matematikai eszközöket igényelnének a leírtaknál.

A 3. fejezet az előző folytatásának tekinthető abban az értelemben, hogy itt is binomiális együtthatókat tartalmazó diofantikus egyenletekkel foglalkoztam. Itt is nagyon lényeges szempont volt, hogy lehetőség szerint olyan egyenleteket tárgyaljunk, melyeket ha nem is teljes mélységben, de legalábbis részben feldolgozhatunk kiemelkedően tehetséges gyerekekkel középiskolai szakköri órák keretében. Több példán keresztül igyekeztem bemutatni azokat a változatos matematikai módszereket, amelyek segítségével több más, elsősorban matematikaversenyen szereplő példát is sikerrel oldhatunk meg. A feladatok kidolgozásánál a fokozatosság elvét is próbáltam szem előtt tartani, vagyis a könnyebb, esetleg elemi úton is kezelhető feladatok után következnek a nehezebb, többnyire felsőbb matematikai apparátust kívánó problémák. Minimális kitérőt tettem – a kvadratikusság alak felhasználásával – a tényleges egyetemi tananyag felé, az itt leírtak már semmiképpen sem tekinthetők középiskolaiaknak, igen változatos módszerek kerültek elő, sokszor egészen új távlatokba helyezve egy-egy probléma vizsgálatát.

A 4. fejezetben ismételten diofantikus egyenletek megoldásán keresztül mutatom be, hogy milyen jellegű számelméleti problémák esetén alkalmazhatók sikerrel a Gauss-egészek a középiskolai matematika szakkörön, vagy éppen egy matematika-

versenyen. Az általános tantervű gimnáziumi törzsanyagban már a komplex számok sem szerepelnek, így természetesen a Gauss-egészekről sem esik szó. Ha azonban eltekintünk az egyetemen megszokott precíz felépítéstől, és a nehezebb tételekre csak bizonyítás nélkül hivatkozunk, akkor már viszonylag kevés előismeret birtokában is szép és érdekes számelméleti feladatokat oldhatunk meg. A fejezet első részében szereplő feladatoknak először megadom a „szokásos” elemi megoldását, és itt a levezetések során lehetőség szerint igyekeztem ismét többféle elemi módszert, általánosítást is mutatni. Ezek egyrészt segíthetnek egy-egy probléma mélyebb megértésében, másrészt a szakkörön való szerepeltetésük motiválhatja a legtehetségesebb, a matematika iránt leginkább elkötelezett tanulókat. Minden versenyfeladatnál szerepeltetek egy Gauss-egészekkel történő megoldást is. A fejezet második részében olyan diofantikus egyenletekkel foglalkozom, melyeknél az elemi megoldás sokszor igen bonyolult, sokkal hatékonyabb Gauss-egészekkel dolgozni. Egy érdekes alkalmazásként megoldjuk néhány k értékre az $x^2 + k = y^3$ alakú ún. Mordell-egyenletet. A $k = -7$ esetben ismertetek egy szép elemi megoldást, míg $k = 1$ esetén a problémára két lényegesen különböző megoldást adok, melyek közül az első meglehetősen összetett „elemi”, míg a másik, a Gauss-egészeket felhasználó egyszerűbb bizonyítás. Az elemi megoldás közben a végtelen leszállás módszerével az $n^4 - 6m^2n^2 - 3m^4 = 1$ egyenletnek a nemnegatív egész megoldásai is adódnak. A fejezet végén egy, a Fibonacci-sorozattal kapcsolatos érdekes állítás egyik speciális esetét bizonyítom, mely így középiskolában is elmondhatóvá válik.

Az 5. fejezet három kisebb, de egymással szervesen összefüggő egységet képez. Az első részben olyan versenyfeladatok kerülnek terítékre, amelyek közül számos probléma saját kérdésfelvetésből született. Az itt szereplő feladat kavalkád célja, hogy a különféle megoldásokon, általánosításokon keresztül bemutassa a diofantikus egyenleteknél alkalmazott módszerek sokszínűségét, minél szélesebb körből választva a számelméleti ötleteket, fogásokat. Személyes tapasztalatom, hogy a matematika szakkörön résztvevők döntő többsége csak akkor szereti igazán az egyenletmegoldást, ha az kihívást jelent, vagy kellően változatos, és többféle megközelítésben is tárgyalható.

Diofantikus egyenletekkel a tanulók már a 9. osztályban találkoznak. A téma főként emelt óraszámú osztályokban kerül elő, rendszerint az első hosszabb algebrai témakör végén. Az erre adható órakeret általában 3 – 4 órában van meghatározva,

mely legtöbbször éppen csak elegendőnek bizonyul arra, hogy a diákok megismerkedjenek az alapvető eszközökkel, módszerekkel. A szakköri órákon szerencsére sokkal nagyobb a tanári szabadság, így diofantikus egyenletekkel minden pedagógus saját belátása szerinti mélységben foglalkozhat. Bőségesen találhatunk kimondottan középiskolásoknak írt feladatgyűjteményeket, szakköri füzeteket ([9], [19], [21]) diofantikus egyenletek témakörben is. Nem titkolt célja a szakkörnek a különböző matematikai versenyekre való eredményes készülés elősegítése. Mivel ezeken a versenyeken általában találkozhatunk nehezebb diofantikus egyenletekkel, ezért hasznos, ha az idevágó ismereteket később is (11 – 12. osztályban) felfrissítjük, kiegészítjük. Az 5. fejezet második – didaktikai megjegyzésekkel is fűszerezett –, illetve harmadik – nemzetközi versenyekről származó feladatokból összeállított – részében a témakör egy lehetséges bővítését mutatom be azzal a feltett szándékkal, hogy a jövőben a saját tanítványaimmal az itteni felépítésben közösen dolgozzuk fel a matematikának ezen fejezetét. (A témakörnek egy ilyen jellegű, a fenti irányelvek mentén megvalósult szakköri feloldozása szerepel részletesen a 6. fejezetben.)

A tárgyalást végig didaktikai elemzések kísérik, ezek részben a feladatok megoldása közben, részben utána, néhol egyes fejezetek végén külön is szerepelnek, de mindvégig központi szerepet játszanak az egész disszertációban. Egyes visszatérő módszereket, pl. a Pell-egyenlet alkalmazását több szempontból is alaposan körbejártam. A különféle megoldások, megközelítési módok leírásánál minden esetben igyekeztem különös tekintettel lenni arra, hogy amennyire csak lehetséges, támaszkodjam a diákoktól várható gondolatmeneti sémákra, illetve többféle megoldás bemutatása által mélyítsem és gazdagítsam a már meglévő sémák közötti kapcsolatot.

A 6. fejezet arról a – hét foglalkozásból álló – szakköri tevékenységről szól, amelyet 2018. november közepétől kezdődően két hónapon keresztül végeztem az iskolámban, a budapesti Baár-Madas Református Gimnáziumban. A szakkörön általában kiváló képességű, a különféle matematikai problémák iránt különösen fogékony, érdeklődő tanulók vettek részt. Az órákon a disszertáció szinte mindegyik fejezetéből számos feladatot dolgoztunk fel (lásd 9.3.), helyenként, – például a pitagoraszai számhármak és a Pell-egyenlet tárgyalása kapcsán – a tanulók még némi ízelítőt is kaphattak az egyetemi „magasabb” matematikából, amely egyúttal a szakkör tehetséggondozó, versenyelőkészítő jellegét is nagymértékben erősítette. A szakköri foglalkozások

egy-egy nagyobb, egymással szorosan összefüggő egységekre történő bontásban kerültek bemutatásra. A feladatmegoldás egyes fázisaiban a módszertani szempontból (is) lényegesnek gondolt tanulói és tanári reakciókat a leírás során végig hangsúlyosan emeltem ki. Az egyes foglalkozások feladatsorai, a beadható házi feladatokra adott tanulói megoldások megtalálhatóak a Függelékben, valamint a tárgyalásra került problémák disszertációbeli elhelyezkedésének visszakeresését a 9.3. alfejezet is segítheti.

A 6.3. alfejezetben összefoglalom azokat a tapasztalatokat, amelyeket a témakör tanítása során szereztem. Bízom benne, hogy a szakköri foglalkozások tanulságait felhasználva a későbbiekben a diákok eredményesebben szerepelhetnek majd a különféle országos versenyeken, és megfelelő alapokkal, mélyebb matematikai háttérrel felvértezve jelentkezhetnek majdan a felsőoktatási intézményekbe.

A 7. és 8. fejezet a magyar és angol nyelvű rövid összefoglalója a doktori értekezésnek, amelyet a 9. (Függelék) fejezet zár le. A korábban említett szakköri foglalkozások feladatsorai (9.2.), a tanulók által készített megoldások (9.4.), és a szakköri problémák disszertációbeli elhelyezkedését és tematikus besorolását segítő alfejezetek (9.3.) mellett itt található a pitagoraszai számhármassokkal, illetve a Pell-egyenlettel kapcsolatos elméleti tudnivalókat tartalmazó 9.1. alfejezet is.

2. fejezet

Binomiális együtthatók különféle közepeivel kapcsolatos diofantikus egyenletek

2.0.1. Feladat. *Adjuk meg az alábbi diofantikus egyenlet összes megoldását, ahol $y > x \geq 2$.*

$$\frac{\binom{x}{2} + \binom{y}{2}}{2} = \binom{z}{2}.$$

Megoldás:

A binomiális együtthatókat rendre kifejtve, majd az egyenlőséget 16-tal szorozva kapjuk, hogy

$$4x^2 - 4x + 4y^2 - 4y = 8z^2 - 8z.$$

Az egyenlet mindkét oldalán teljes négyzetté alakítva:

$$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 2(2z - 1)^2.$$

A megoldandó egyenlet tehát az $A^2 + B^2 = 2C^2$ alakú egyenletbe megy át, melyet alkalmas helyettesítéssel visszavezethetünk a pitagoraszai számhármassok esetére. Legyen $A = a - b$, $B = a + b$ és $C = c$. Ezekkel a paraméterekkel az előző összefüggésből az $a^2 + b^2 = c^2$ egyenlőséget kapjuk, ahol $a, b, c > 0$ egészek. Ennek az egyenletnek az általános megoldása pozitív egészekben az $a = 2uvd$, $b = (u^2 - v^2)d$,

$c = (u^2 + v^2)d$, ahol $u > v > 0$ ellentétes paritású egész számok, $(u, v) = 1$, valamint $d > 0$ tetszőleges egész szám. Ezeket visszaírva az eredeti egyenlőségbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}x &= \frac{|2uvd - (u^2 - v^2)d| + 1}{2} \\y &= \frac{2uvd + (u^2 - v^2)d + 1}{2} \\z &= \frac{(u^2 + v^2)d + 1}{2}.\end{aligned}$$

Az itt szereplő törtek csak akkor lehetnek egész számok, ha d páratlan pozitív egész.

2.0.2. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok olyan megoldása létezik, ahol $x \geq d > 0$.*

$$\frac{\binom{x-d}{2} + \binom{x}{2} + \binom{x+d}{2}}{3} = \binom{y}{2}.$$

Megoldás:

Először egy lemmát igazolunk.

2.0.3. Lemma. *Az $x^2 + 6y^2 - z^2 = 0$ egyenletnek végtelen sok megoldása van az egész számok körében, melyek megkaphatók az*

$$\begin{aligned}x &= \frac{6u^2 - 24uv - v^2}{\delta} \cdot t \\y &= \frac{-12u^2 - 2uv + 2v^2}{\delta} \cdot t \\z &= \frac{30u^2 + 5v^2}{\delta} \cdot t\end{aligned}$$

alakban, ahol u, v egész számok, $v \geq 0$ és $(u, v) = 1$,

$\delta = (6u^2 - 24uv - v^2, -12u^2 - 2uv + 2v^2, 30u^2 + 5v^2)$, valamint t tetszőleges egész szám. Az $x = \frac{6u^2 - 24uv - v^2}{\delta}, y = \frac{-12u^2 - 2uv + 2v^2}{\delta}, z = \frac{30u^2 + 5v^2}{\delta}$ megoldásokat primitív megoldásoknak nevezzük, melyek páronként különbözők, és ezen alapmegoldások többszöröseiként kapjuk az egyenlet összes megoldását az egész számok körében.

A lemma bizonyítása:

Ha $z = 0$, akkor nyilván $x = y = 0$. A továbbiakban tegyük fel, hogy $z \neq 0$. Ekkor az egyenletet z -vel elosztva, valamint bevezetve az $X = \frac{x}{z}, Y = \frac{y}{z}$ helyettesítést a

$$(2.1) \quad X^2 + 6Y^2 = 1$$

egyenletet kapjuk. Ha sikerülne ezt az egyenletet megoldani a racionális számok körében, akkor egyúttal megkapnánk az eredeti egyenlet egész megoldásait is, és megfordítva, az eredeti egyenletnek egy egész megoldása a (2.1) egyenlet egy racionális megoldását szolgáltatja. Az eredeti egyenletnek az $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$ egész megoldása, így a (2.1) egyenletnek az $X = \frac{1}{5}$, $Y = \frac{2}{5}$ racionális megoldása. Az egyenlet a síkon egy görbét definiál (ellipszist), melynek egy pontja az $(\frac{1}{5}; \frac{2}{5})$. Tekintsük az összes olyan egyenest a síkon, melynek m meredeksége racionális, valamint az egyenes átmegy a megadott $(\frac{1}{5}; \frac{2}{5})$ koordinátájú ponton. Az egyenes egyenlete felírható $Y = m(X - \frac{1}{5}) + \frac{2}{5}$ alakban. Helyettesítsük ezt be a (2.1) egyenletbe, majd rendezve az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$(6m^2 + 1)X^2 + \frac{24m - 12m^2}{5} \cdot X + \frac{6m^2 - 24m - 1}{25} = 0.$$

Amennyiben a diszkrimináns nem nulla, azaz $m \neq -\frac{1}{12}$, abban az esetben az egyenletnek pontosan két megoldása van, melyek közül az egyik nyilván az $X = \frac{1}{5}$, míg a másik gyök pl. a Viéte-formulák segítségével kapható. Egy kevés számolás után a másik értékre az $X = \frac{6m^2 - 24m - 1}{30m^2 + 5}$ adódik. Ezt az egyenes egyenletébe helyettesítve az Y másik értékére kapjuk, hogy $Y = \frac{-12m^2 - 2m + 2}{30m^2 + 5}$. Ha m értéke racionális, akkor X, Y is racionális szám. Így ha m végigfut a racionális számok halmazán, akkor X, Y éppen a (2.1) egyenlőség összes racionális megoldását szolgáltatja. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy az ellipszis minden racionális koordinátájú pontjának egyértelműen megfelel egy m meredekség, mégpedig pontosan annak az egyenesnek a meredeksége, mely az ellipszis ezen pontját köti össze a görbe $(\frac{1}{5}; \frac{2}{5})$ koordinátájú pontjával. Ezzel a módszerrel minden racionális megoldást megkaphatunk, és mindegyiket pontosan egyszer. Legyen $m = \frac{u}{v}$, ahol u, v egész számok, $(u, v) = 1$, valamint $v \neq 0$.

(Ha $v = 0$, akkor a függőleges egyenes az ellipszis $(\frac{1}{5}; -\frac{2}{5})$ pontját határozza meg, ami szintén racionális megoldást ad.) Ezt a képletekbe helyettesítve a (2.1) racionális megoldásaira az $X = \frac{6u^2 - 24uv - v^2}{30u^2 + 5v^2}$ és az $Y = \frac{-12u^2 - 2uv + 2v^2}{30u^2 + 5v^2}$ összefüggéseket, majd ebből az eredeti egyenletre vonatkozóan az

$$\begin{aligned} x &= 6u^2 - 24uv - v^2 \\ y &= -12u^2 - 2uv + 2v^2 \\ z &= 30u^2 + 5v^2 \end{aligned}$$

egész megoldásokat nyerjük. Adott u, v , $(u, v) = 1$ egész számok esetén a $\delta = (6u^2 - 24uv - v^2, -12u^2 - 2uv + 2v^2, 30u^2 + 5v^2)$ értékkel rendre leosztva az x, y, z egész megoldásokat, szintén egész megoldásokhoz jutunk. Az $x^2 + 6y^2 - z^2 = 0$ egyenlet összes egész megoldása megkapható, ha ezeket az ún. primitív egész megoldásokat egy tetszőleges t egész számmal végigszorozzuk.

Ezek után térjünk vissza az eredeti feladatunk, az

$$\frac{\binom{x-d}{2} + \binom{x}{2} + \binom{x+d}{2}}{3} = \binom{y}{2}$$

diofantikus egyenlet vizsgálatához. Az egyenletet átrendezve, majd a binomiális együtthatókat kibontva kapjuk, hogy

$$(x-d)(x-d-1) + x(x-1) + (x+d)(x+d-1) = 3y(y-1).$$

Az egyenletet 4-gyel szorozva, majd mindkét oldalhoz 3-at adva, teljes négyzeteket alakíthatunk ki.

$$[2(x-d)-1]^2 + (2x-1)^2 + [2(x+d)-1]^2 = 3(2y-1)^2.$$

Vezessük be az $A = 2(x-d)-1$, $B = 2(x+d)-1$ és $C = 2y-1$ jelöléseket. Mivel $2x-1 = \frac{A+B}{2}$, ezért az egyenletet átírhatjuk az alábbi alakba:

$$A^2 + \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 + B^2 = 3C^2.$$

Ez utóbbi viszont az $A^2 + B^2 = 2 \left[\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 + \left(\frac{B-A}{2}\right)^2 \right]$ azonosság alapján a

$$3 \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{B-A}{2}\right)^2 = 3C^2$$

összefüggéshez vezet. Itt $\left(\frac{B-A}{2}\right)^2$ osztható 3-mal, így 9-cel is, vagyis az egyenletünket 3-mal egyszerűsítve az

$$\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 + 6 \left(\frac{B-A}{6}\right)^2 = C^2$$

egyenlőséget kapjuk. Használjuk fel a Lemma eredményét, de az egyszerűség kedvéért legyen $t = \delta$. Belátjuk, hogy még ezzel a megszorítással is végtelen sok megoldását

kapjuk a diofantikus egyenletünknek. Az

$$\begin{aligned}\frac{A+B}{2} &= 6u^2 - 24uv - v^2 \\ \frac{B-A}{6} &= -12u^2 - 2uv + 2v^2 \\ C &= 30u^2 + 5v^2\end{aligned}$$

összefüggéseket felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}x &= \frac{6u^2 - 24uv - v^2 + 1}{2} \\ d &= -18u^2 - 3uv + 3v^2 \\ y &= \frac{30u^2 + 5v^2 + 1}{2}.\end{aligned}$$

Az egyenletekből leolvasható, hogy v -nek páratlannak kell lennie.

Ha $x \geq d > 0$, akkor teljesülnie kell az alábbi egyenlőtlenségeknek:

$$\begin{aligned}-18u^2 - 3uv + 3v^2 &> 0 \\ 42u^2 - 18uv - 7v^2 + 1 &\geq 0.\end{aligned}$$

A második egyenlőtlenséget az $x \geq d$ átrendezéséből kaptuk. Ha megköveteljük az erősebb $42u^2 - 18uv - 7v^2 > 0$ egyenlőtlenséget, valamint v -re még azt a megkötést is tesszük, hogy pozitív páratlan szám legyen, akkor az egyenlőtlenségeket v^2 -tel leosztva $\frac{u}{v}$ -ben másodfokú egyenlőtlenségekhez jutunk. Ekkor $\frac{u}{v}$ -re egy közelítő feltétel adódik, nevezetesen $-\frac{1}{2} < \frac{u}{v} < -\frac{1}{4}$, melyből még a fenti feltételek mellett is végtelen sok megoldását kaphatjuk az eredeti egyenletünknek. Ha pl. $u = -2k$, $v = 6k + 1$, ahol $k \geq 1$ egész, akkor $x = 138k^2 + 18k$, $d = 72k^2 + 42k + 3$ és $y = 150k^2 + 30k + 3$ adódik, mely pl. a $k = 1$ választással valóban egy megoldást ad, hiszen

$$\frac{\binom{39}{2} + \binom{156}{2} + \binom{273}{2}}{3} = \binom{183}{2}.$$

2.0.4. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok olyan megoldása van, ahol $y > x \geq 2$.*

$$\frac{2}{\frac{1}{\binom{x}{2}} + \frac{1}{\binom{y}{2}}} = \binom{z}{2}.$$

Megoldás:

Az egyenletet átalakítva kapjuk, hogy

$$2 \cdot \binom{x}{2} \cdot \binom{y}{2} = \binom{x}{2} \cdot \binom{z}{2} + \binom{y}{2} \cdot \binom{z}{2}.$$

Az $x(x-1) = A$, $y(y-1) = B$, valamint a $z(z-1) = C$ jelölésekkel a $2AB = AC + BC$ egyenletet kell megoldanunk. Mivel $A, B, C \geq 2$ mindegyike páros, ezért $AB = C'(A+B)$, ami ekvivalens azzal, hogy $A+B \mid AB$ teljesül. Legyen $d = (A, B)$, ekkor alkalmas a, b természetes számokkal $A = ad$ és $B = bd$, ahol $(a, b) = 1$. Ezt az oszthatósági feltételbe helyettesítve kapjuk, hogy $a+b \mid dab$. Mivel $(ab, a+b) = 1$ teljesül, ezért $a+b \mid d$, melyből $d = (a+b)c$ adódik. Ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$A = ac(a+b)$$

$$B = bc(a+b)$$

$$C = 2abc.$$

Rögzítsük a és c értékét 1-nek, és próbáljunk keresni egy, a feltételeket kielégítő b -t. Ezzel a választással teljesülnie kell az alábbi egyenleteknek:

$$x(x-1) = b+1$$

$$y(y-1) = b(b+1)$$

$$z(z-1) = 2b.$$

Ha minden egyenletet 4-gyel szorzunk, majd mindkét oldalhoz 1-et hozzáadunk, akkor a bal oldalakon teljes négyzeteket alakíthatunk ki. Az átalakítások után a második egyenlet jobb oldala automatikusan teljes négyzet lesz, így csak annak kell teljesülnie, hogy alkalmas n, m pozitív egész számokkal $4b+5 = n^2$, valamint $8b+1 = m^2$ legyen. Ezekből az egyenletekből az $m^2 - 2n^2 = -9$, ún. Pell-egyenlet adódik. Ennek az egyenletnek egy (n, m) megoldása minden esetben megfelelő b -t ad, hiszen a Pell-egyenletet

modulo 8 tekintve kapjuk, hogy m és n páratlan, így négyzetük 1-gyel kongruens modulo 8. Egy ilyen típusú egyenletnek, ha létezik megoldása a pozitív egészek körében, akkor végtelen sok megoldása létezik ([13]). Illusztrációul megadunk egy megoldást, majd ennek segítségével az egyenletnek előállítjuk egy újabb megoldását. Némi próbálkozás után kapjuk az $m = 3$, $n = 3$ megfelelő értékeket. A $(3-3\sqrt{2})(3+3\sqrt{2}) = -9$ felbontást, valamint az $r^2 - 2s^2 = 1$ ún. Pell-alapegyenlet egy megoldását kombinálva kaphatunk újabb megoldást. Az $1 = 3^2 - 2 \cdot 2^2 = (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$ felbontást szorozzuk össze az előző felbontással, ekkor a

$$(3 - 3\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})(3 + 3\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = (21 - 15\sqrt{2})(21 + 15\sqrt{2}) = -9$$

egyenlőség alapján az $m = 21$, illetve az $n = 15$ értékpár is megoldás. Az ehhez tartozó x, y, z értékek a következők: $x = 8$, $y = 56$ és $z = 11$. Az ellenőrzés mutatja, hogy valóban

$$\frac{2}{\frac{1}{\binom{8}{2}} + \frac{1}{\binom{56}{2}}} = \binom{11}{2}.$$

2.0.5. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok olyan megoldása létezik, ahol $y > x \geq 2$.*

$$\sqrt{\binom{x}{2} \cdot \binom{y}{2}} = \binom{z}{2}.$$

Megoldás:

Az egyenlet ekvivalens a következővel: $\binom{x}{2} \cdot \binom{y}{2} = \binom{z}{2}^2$. A binomiális együtthatókat mindkét oldalon kibontva, majd ezt követően 64-gyel történő beszorzás, valamint a zárójeleken belül teljes négyzetté alakítás után kapjuk, hogy

$$[(2x - 1)^2 - 1] [(2y - 1)^2 - 1] = [(2z - 1)^2 - 1]^2.$$

Legyen

$$A = 2x - 1$$

$$B = 2y - 1$$

$$C = 2z - 1.$$

A fenti helyettesítésben $3 \leq A < B$, továbbá írjuk elő még a $C = \frac{B-A}{2}$ feltételt is. Megmutatjuk, hogy még ezzel a megszorítással is végtelen sok megoldását kapjuk

az eredeti diofantikus egyenletünknek. Behelyettesítés és átrendezés után az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$(A^2 - 1)(B^2 - 1) - \left[\left(\frac{B - A}{2} \right)^2 - 1 \right]^2 = 0.$$

Bontsuk fel a zárójeleket, illetve szorozzuk meg az egyenlőséget 16-tal. Ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 16A^2B^2 - 16A^2 - 16B^2 - B^4 + 4B^3A - 6A^2B^2 + 4BA^3 - A^4 + 8B^2 - 16AB + 8A^2 &= 0. \\ -(A + B)^4 + 8A^3B + 8AB^3 + 16A^2B^2 - 8(A + B)^2 &= \\ = -(A + B)^2 [(A + B)^2 - 8AB + 8] &= 0. \end{aligned}$$

Mivel $A + B > 0$, az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $(A + B)^2 - 8AB + 8 = 0$. Ez az egyenlőség átírható a

$$(2.2) \quad B^2 - 6AB + A^2 + 8 = 0,$$

majd teljes négyzetté alakítás után a $(B - 3A)^2 - 8(A^2 - 1) = 0$ alakba. Az egyenletből világos, hogy $4 \mid B - 3A$, vagyis létezik olyan D egész szám, hogy $B - 3A = 4D$. Ebből az $A^2 - 2D^2 = 1$ Pell-egyenlethez jutunk. Ha $D < 0$ lenne, akkor a $B > A$ feltétel miatt $3A + 4D > A$, azaz $A + 2D > 0$. Ez viszont ellentmondás, hiszen $-2D < A$ -ból a $4D^2 < A^2 = 2D^2 + 1$ egyenlőséget kapjuk, amiből $D^2 < \frac{1}{2}$. Feltehető tehát, hogy $D \geq 0$, sőt $D > 0$ is, hiszen $D = 0$ esetén az $A = 1$ -et kapnánk, de $A \geq 3$.

Ismert ([13]), hogy az $A^2 - 2D^2 = 1$ Pell-egyenlet összes pozitív egész számpárok-ból álló (A_n, D_n) megoldása megkapható az alábbi rekurziós formulák segítségével: $A_1 = 3$, $D_1 = 2$, valamint $n \geq 1$ esetén:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 3A_n + 4D_n \\ D_{n+1} &= 2A_n + 3D_n. \end{aligned}$$

Mivel $B - 3A = 4D$, ezért a rekurzió miatt $B_n = 3A_n + 4D_n = A_{n+1}$, vagyis a (2.2) egyenletnek az $(A_n, B_n) = (A_n, A_{n+1})$ pozitív egész számpárok megoldásai. A fenti összefüggéseket felhasználva, magukra az A_n számokra is találhatunk rekurziós formulát. $A_1 = 3$, $A_2 = 17$, és $n \geq 1$ esetén:

$$A_{n+2} = 3A_{n+1} + 4D_{n+1} = 3A_{n+1} + 4(2A_n + 3D_n) =$$

$$= 3A_{n+1} + 8A_n + 3(A_{n+1} - 3A_n) = 6A_{n+1} - A_n.$$

Mivel Az A_n számok a képzésüknél fogva páratlanok, így az eredeti feladatunk állításának bizonyítására már csak azt kell megmutatnunk, hogy a $C_n = \frac{B_n - A_n}{2} = \frac{A_{n+1} - A_n}{2}$ számok is páratlanok. A sorozat első néhány tagját felírva: $A_1 = 3, A_2 = 17, A_3 = 99, A_4 = 577$ stb. látható, hogy a páros indexű tagok 4-gyel osztva 1 maradékot, míg a páratlan indexű tagok 4-gyel osztva 3 maradékot adnak. Ezt a két állítást „egyszerre” teljes indukcióval mutathatjuk meg. (A bizonyítást csak páros index esetén részletezzük, a páratlan index esete hasonlóan bizonyítható.) Tegyük fel, hogy az állítást igazoltuk minden olyan i indexre, melyre $1 < i \leq 2k$. Mivel

$$A_{2k+2} = 6A_{2k+1} - A_{2k} = 6(4l + 3) - (4s + 1) = 4r + 1,$$

ezért az állítást $i = 2k + 2$ -re is igazoltuk. Az $A_{n+1} - A_n$ számok tehát $4m + 2$ alakúak, így a C_n számok valóban páratlanok minden $n \geq 1$ -re.

Kaptuk tehát, hogy az $\binom{x}{2} \cdot \binom{y}{2} = \binom{z}{2}^2$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a $2 \leq x < y$ feltétel mellett:

$$\begin{aligned} x &= \frac{A_n + 1}{2} \\ y &= \frac{A_{n+1} + 1}{2} \\ z &= \frac{A_{n+1} - A_n + 2}{4}. \end{aligned}$$

Az A_n számokra teljesül az $A_{n+2} = 6A_{n+1} - A_n$ rekurzió az $A_1 = 3$ és $A_2 = 17$ kezdőértékekkel.

Az alábbiakban összefoglaljuk azokat a nyitott kérdéseket, melyek a binomiális együtthatókkal kapcsolatos diofantikus egyenletek megoldása közben merültek föl.

2.0.6. Kérdés. Létezik-e (végtelen sok) nem-triviális megoldása pozitív egészekben

a $\sqrt{\frac{\binom{x}{2}^2 + \binom{y}{2}^2}{2}} = \binom{z}{2}$ diofantikus egyenletnek?

Megadható-e két tagra (2-es alsó érték mellett) a mértani és harmonikus közép esetén az összes pozitív egész megoldás?

Megadható-e végtelen sok nem-triviális megoldás bármelyik közép esetén akkor, ha vagy a tagok száma, vagy az alsó érték, vagy esetleg mindkettő 2-nél nagyobb pozitív egész?

3. fejezet

Binomiális együtthatókkal kapcsolatos diofantikus egyenletek megoldása elemi úton és felsőbb matematikai módszerek segítségével a középiskolai matematika szakkörön

3.0.1. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok olyan megoldása létezik, ahol $x, y, z \geq 2$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$.*

$$\binom{x}{2} + \binom{y}{2} = \binom{z}{2}.$$

Megoldás:

A binomiális együtthatókat a definíció szerint kibontva, majd az egyenletet 2-vel szorozva az alábbi egyenletet kapjuk:

$$x^2 + y^2 - x - y = z^2 - z.$$

Az egyenletet átrendezve, illetve a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve az

$$x(x-1) = (z-y)(z+y-1)$$

adódik. Legyen $r = (x, z - y)$, így $x = rs$ és $z - y = rt$, ahol $(s, t) = 1$. Kapjuk, hogy $s(x - 1) = t(z + y - 1)$. Mivel $(s, t) = 1$, ezért $z + y - 1 = us$ és $x - 1 = tu$. Ezekből az egyenletekből a következő megoldásokat nyerjük:

$$x = rs, \quad y = \frac{us - rt + 1}{2}, \quad z = \frac{rt + us + 1}{2}.$$

ahol $rs - tu = 1$. Nyilvánvaló, hogy y és z pontosan akkor egész, ha us és rt ellentétes paritásúak. Az $rs - tu = 1$ feltételből kapjuk, hogy rs és tu ellentétes paritásúak, így az előzőekkel összevetve kapjuk, hogy y és z akkor és csak akkor egész, ha az r, s, u, t számok közül pontosan az egyik páros. Például az $r = 1, s = 4(k + 1)^2, u = 2k + 3$ és $t = 2k + 1$ választással, ahol $k \in \mathbb{N}$, az

$$x = 4(k + 1)^2, \quad y = 4k^3 + 14k^2 + 15k + 6, \quad z = 4k^3 + 14k^2 + 17k + 7$$

megoldások adódnak.

3.0.2. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok olyan megoldása létezik, ahol $x \geq 3, y \geq 2 \quad x, y \in \mathbb{Z}$.*

$$\binom{x-1}{2} + \binom{x}{2} + \binom{x+1}{2} = \binom{y}{2}.$$

Megoldás:

A binomiális együtthatókat az egyenletben rendre kifejtve, majd a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve az alábbi egyenletet kapjuk:

$$3x^2 - 3x + 2 = y^2 - y.$$

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát 4-gyel, majd alakítsunk ki teljes négyzeteket:

$$12x^2 - 12x + 8 = 4y^2 - 4y,$$

$$3(2x - 1)^2 + 6 = (2y - 1)^2.$$

A $v = 2x - 1$ és $u = 2y - 1$, $u, v \in \mathbb{Z}$ jelöléssel a megoldandó egyenlet a következőbe megy át:

$$(3.1) \quad u^2 - 3v^2 = 6.$$

A 2.0.4. Feladatnál látottakhoz hasonlóan megmutatjuk, hogy ennek az egyenletnek végtelen sok u, v páratlan egész számokból álló megoldása van. Nyilvánvaló, hogy az u, v egészek páratlanok (és így x, y egészek), hiszen ha pontosan az egyik lenne páros, akkor a bal oldal páratlan lenne, ha pedig mindketten párosak lennének, akkor a jobb oldalnak 4-gyel oszthatónak kellene lennie. Tekintsük a

$$(3.2) \quad (3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) = 6$$

felbontást, valamint az $s^2 - 3r^2 = 1$ ún. Pell-alapegyenletet. Ennek egy megoldása az $s = 2, r = 1$, melyek segítségével a $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$ felbontást nyerjük. Ha ennek az egyenletnek mindkét oldalát n -edik hatványra emeljük, akkor alkalmas α_n, β_n egész számokkal az

$$(\alpha_n - \sqrt{3}\beta_n)(\alpha_n + \sqrt{3}\beta_n) = 1$$

összefüggéshez jutunk. Ezt összeszorozva a (3.2) felbontással, a zárójeleket felbontva a (3.1) egyenletnek egy újabb megoldását kapjuk. Illusztráljuk ezt az $n = 1$ esetben. Kapjuk, hogy

$$(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) = (9 - 5\sqrt{3})(9 + 5\sqrt{3}) = 9^2 - 5^2 \cdot 3 = 6.$$

Így az $u = 9$ és $v = 5$ értékek a (3.1) egyenlet egy megoldását adják. Ekkor $x = 3$ és $y = 5$. Valóban,

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}.$$

3.0.3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok megoldása létezik, ha $x \neq y$ és $x, y \geq 2, \quad x, y, z \in \mathbb{Z}$.*

$$\frac{\binom{x}{2} + \binom{y}{2}}{2} = z^2.$$

Megoldás:

Megjegyezzük, hogy az egyenletnek végtelen sok megoldása van az $x = y \geq 2$ feltétel mellett, hiszen ekvivalens átalakításokkal egy olyan Pell-egyenletet kapunk, melynek az előzőek szerint végtelen sok megoldása van a pozitív egészek körében. Az egyenlet ekvivalens az alábbival:

$$x^2 - x + y^2 - y = (2z)^2.$$

Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát 4-gyel, majd alakítsunk ki ismét teljes négyzeteket. Kapjuk, hogy

$$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = (4z)^2 + 2.$$

3.0.4. Megjegyzés. Az $A^2 + B^2 = C^2 + 2$ diofantikus egyenletre, mint egy sokat vizsgált és mély elmélet (háromváltozós kvadratikus alak) egyik problémájára is tekinthetünk. 1916-ban S. Ramanujan vizsgálta meg azokat az egész számokat, amelyek nem állíthatók elő $ax^2 + by^2 + cz^2$ alakban, adott a , b és c egészek esetén. Az egyik legismertebb ilyen példa az $x^2 + y^2 + 10z^2$ kvadratikus alak tulajdonságainak leírása ([14]).

Előfordulhat, hogy nem célunk egy egyenlet összes egész megoldását megadni, esetleg nem is tudjuk ezt megtenni. Ilyenkor általában meg kell elégednünk végtelen sok nem-triviális megoldás felírásával, melyekhez a legtöbb esetben úgy juthatunk el, hogy a változók számát csökkentve, azok között alkalmas összefüggések teljesülését követeljük meg. Itt is ez a helyzet, mert a $B = C - 1$ helyettesítés után kapott diofantikus egyenlet elemi módszerekkel is kezelhetővé válik.

Ehhez tekintsük az $A^2 + B^2 = C^2 + 2$ diofantikus egyenletet, amelyet modulo 8 vizsgálva láthatjuk, hogy $A, B > 0$ páratlan egészek, $C > 0$, valamint $4 \mid C$. Keresünk megoldást a $B = C - 1$ feltétellel. Ezt beírva és a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve kapjuk, hogy $A^2 = 2C + 1$. Ha itt C értékét $2n^2 + 2n$ -nek választjuk, akkor $A = 2n + 1$, illetve $B = 2n^2 + 2n - 1$ adódik, ahol $n > 1$ egész szám. Ezeket az értékeket visszahelyettesítve kapunk végtelen sok megoldást x, y, z egészekben:

$$x = n + 1, \quad y = n^2 + n, \quad z = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

3.0.5. Megjegyzés. Általában az $A^2 + B^2 = C^2 + c$ egyenletnek, ahol c rögzített egész, végtelen sok megoldása van az egész számok körében, mely megoldásokat az előzőekben látottak mintájára írhatjuk fel. Az $B = C - 1$ helyettesítés, valamint az egyszerűsítések után kapjuk az alábbi megoldásokat:

$$A = t, \quad B = \frac{t^2 - 1 - c}{2}, \quad C = \frac{t^2 + 1 - c}{2}.$$

Mivel B, C számlálója azonos paritású, így a t paramétertől csak annyit kell megkövetelnünk, hogy páros c esetén $t > 0$ páratlan szám, míg páratlan c érték esetén $t > 0$ páros szám legyen.

3.0.6. Megjegyzés. Az előző feladatban egy $A^2 + B^2 = C^2 + 2$ alakú diofantikus egyenletnek sikerült megadni végtelen sok megoldását az egész számok körében. A megoldás elmondható középiskolás szinten, de felsőbb matematikai apparátus segítségével az egyenlet összes egész megoldását is felírhatjuk. A levezetéshez felhasználjuk a [12] könyv kvadratikus alakokra vonatkozó fejezetét. Összefoglaljuk a könyvben szereplő fontosabb definíciókat, tételeket.

3.0.7. Definíció. (pp. 157, Definition 3.7)

(i) Az $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ és a $g(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ kvadratikus alak ekvivalens, ha létezik olyan 2×2 -es egész elemű M mátrix, melyre $\det M = 1$, valamint $g(x, y) = f(m_{11}x + m_{12}y, m_{21}x + m_{22}y)$, minden x, y egész szám esetén. Jelölés: $f \sim g$. ($\sim$ ekvivalenciareláció)

(ii) Legyen f egy kvadratikus alak, melynek d diszkriminánsa nem teljes négyzet. Azt mondjuk, hogy f redukált, ha

$$-|a| < b \leq |a| < |c|, \quad \text{vagy} \quad 0 \leq b \leq |a| = |c|.$$

3.0.8. Tétel. (pp. 160, Theorem 3.18)

(i) Legyen d egy adott egész szám, mely nem teljes négyzet. Minden ekvivalencia osztály tartalmaz legalább egy redukált kvadratikus alakot, melynek d a diszkriminánsa.

(ii) Legyen f egy redukált kvadratikus alak. Ha f indefinit, akkor $0 < |a| \leq \frac{\sqrt{d}}{2}$.

Ennyi előkészület után már bebizonyíthatjuk az alábbi lemmát.

3.0.9. Lemma. Az $A^2 + B^2 = C^2 + 2$ diofantikus egyenletnek az egész számok körében végtelen sok megoldása van, az összes megoldást

$$\begin{aligned} A &= \frac{m_{11}^2 - m_{12}^2 - 2m_{21}^2 + 2m_{22}^2}{2} \\ B &= m_{11}m_{12} - 2m_{21}m_{22} \\ C &= \frac{m_{11}^2 + m_{12}^2 - 2m_{21}^2 - 2m_{22}^2}{2} \end{aligned}$$

alakban kapjuk, ahol m_{ij} egész számok, m_{11}, m_{12} páratlan egészek, illetve teljesül az $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$ egyenlőség. Az állításban A és B szerepe felcserélhető.

A 3.0.9. Lemma bizonyítása:

Az $A^2 + B^2 = C^2 + 2$ egyenletet modulo 8 vizsgálva látható, hogy csak akkor kaphatunk egész megoldást, ha A, B páratlan és $4 \mid C$. Léteznek a, b és c páratlan egész számok úgy, hogy pl. $A = \frac{a-c}{2}$, $B = b$ és $C = \frac{a+c}{2}$ legyen. Ezt a helyettesítést az egyenletbe visszaírva kapjuk, hogy $4b^2 - 4ac = 8$, ami a 3.0.7. Definíció és a 3.0.8. Tétel szerint nem más, mint az $f(X, Y) = aX^2 + 2bXY + cY^2$ kvadratikus alak diszkriminánsa, ahol $d = 8$. A 3.0.7. Definíció, valamint a 3.0.8. Tétel alapján létezik egy f -fel ekvivalens $g(X, Y) = a'X^2 + 2b'XY + c'Y^2$ redukált kvadratikus alak, ahol $d' = 8$, illetve teljesül, hogy $|a'| \leq |c'|$, $|2b'| \leq |a'|$ és $0 < |a'| \leq \frac{\sqrt{8}}{2}$. A feltételek szerint $|a'| = 1$, vagyis $a' = 1$, vagy $a' = -1$. Mindkét esetben csak $b' = 0$ lehetséges. Ezt behelyettesítve a $(2b')^2 - 4a'c' = 8$ egyenletbe, kapjuk, hogy ha $a' = 1$, akkor $c' = -2$, illetve ha $a' = -1$, akkor $c' = 2$. A két megfelelő redukált kvadratikus alak tehát a $g(X, Y) = X^2 - 2Y^2$, valamint a $g'(X, Y) = -X^2 + 2Y^2$. Ezek közül elég az egyiket tekinteni, hiszen rövid számolással igazolható, hogy a két kvadratikus alak ekvivalens. A 3.0.7. Definíció alapján az $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix megfelelő lesz. Azt kaptuk tehát, hogy léteznek olyan $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}$ egész számok, melyekre $f \sim g$, azaz minden X, Y egész szám esetén

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = (m_{11}X + m_{12}Y)^2 - 2(m_{21}X + m_{22}Y)^2,$$

valamint $\det M = 1$, azaz $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$. Innen a zárójeleket felbontva, majd az együtthatókat összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$m_{11}^2 - 2m_{21}^2 = a, \quad m_{11}m_{12} - 2m_{21}m_{22} = b, \quad m_{12}^2 - 2m_{22}^2 = c.$$

Ezt az eredeti helyettesítésbe visszaírva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A &= \frac{m_{11}^2 - m_{12}^2 - 2m_{21}^2 + 2m_{22}^2}{2} \\ B &= m_{11}m_{12} - 2m_{21}m_{22} \\ C &= \frac{m_{11}^2 + m_{12}^2 - 2m_{21}^2 - 2m_{22}^2}{2}. \end{aligned}$$

A megoldásban A és C csak akkor lesz egész, ha m_{11} és m_{12} azonos paritásúak, de nem lehetnek mindketten párosak, hiszen ekkor az $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$ feltétel nem teljesülhet. Tekintsük az $m_{11} = 5$, $m_{22} = 3$, $m_{12} = 7$ és $m_{21} = 2$ konkrét számpéldát.

Behelyettesítés után az $A = -7$, $B = 23$ és $C = 24$ értékeket kapjuk, melyek valóban jók, hiszen $(-7)^2 + 23^2 = 24^2 + 2$.

A 3.0.9. Lemma segítségével az $\frac{\binom{x}{2} + \binom{y}{2}}{2} = z^2$ egyenlet összes megoldása felírható. A megoldásokat az alábbi alakban kaphatjuk:

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_{11}^2 - m_{12}^2 - 2m_{21}^2 + 2m_{22}^2 + 2}{4} \\ y &= \frac{m_{11}m_{12} - 2m_{21}m_{22} + 1}{2} \\ z &= \frac{m_{11}^2 + m_{12}^2 - 2m_{21}^2 - 2m_{22}^2}{8}. \end{aligned}$$

A megoldásban x , y és z csak akkor lesz egész, ha m_{11} és m_{12} mindketten páratlanok, az m_{21} és m_{22} közül pontosan az egyik páros, illetve teljesül az $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} = 1$ feltétel. Teljesülnie kell továbbá az $x, y, z \geq 2$ feltételnek is, ekkor x és y szerepe felcserélhető. Tekintsük az $m_{11} = 7$, $m_{22} = 0$, $m_{12} = 1$ és $m_{21} = -1$ konkrét számpéldát. Behelyettesítés után az $x = 12$, $y = 4$ és $z = 6$ értékeket kapjuk, melyek valóban jók, hiszen $\frac{\binom{12}{2} + \binom{4}{2}}{2} = 6^2$.

Az $m_{11} = 2n + 1$, $m_{12} = 1$, $m_{21} = -1$ és $m_{22} = 0$ választással kapjuk a 3.0.3. Feladatban megadott megoldásokat.

3.0.10. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok megoldása létezik, ha $y > x \geq 2$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$.*

$$\binom{x}{2} + \binom{y}{2} = z^2.$$

Az állítás igazolására – eltérő utakat követve – többféle elemi megoldást is adunk, végül megadjuk a feltételeket kielégítő összes egész megoldást.

I. megoldás:

Az állítást az $y = x + 1$ helyettesítés után közvetlenül beláthatjuk, ha a binomiális együtthatókat rendre kifejtjük.

$$\binom{x}{2} + \binom{x+1}{2} = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{(x+1)x}{2} = x^2.$$

Az $(x; x+1; x)$ számhármass minden $x \geq 2$ esetén megoldás.

II. megoldás:

Ekvivalens átalakításokkal elérhető, hogy az egyenlet a következő alakú legyen:

$$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 2(2z)^2 + 2.$$

Az $A^2 + B^2 = 2C^2 + 2$ alakú diofantikus egyenlet esetében könnyen adódik egy lehetséges megoldás, hiszen az $A = C - 1$, $B = C + 1$ helyettesítés nyilván megfelelő.

Ebben az esetben az

$$x = \frac{t}{2}, \quad y = \frac{t+2}{2}, \quad z = \frac{t}{2}$$

megoldást kapjuk, ahol $t \geq 1$ tetszőleges páros egész szám.

III. megoldás:

Egy másik módszerrel találhatunk végtelen sok olyan megoldást is, melyben x, y és z páronként különböző. Ehhez tekintsük az $A^2 + B^2 - 2C^2 = 2$ egyenletet, ahol A, B páratlan, C páros egész szám. Mivel $2^2 + 14^2 - 2 \cdot 10^2 = 0$, ezért keressük az egyenlet megoldását

$$(2n + \alpha)^2 + (14n + \beta)^2 - 2(10n + \gamma)^2 = 2$$

alakban, ahol $n \geq 1$ egész szám, α, β, γ alkalmasan megválasztott egész paraméter. A műveleteket elvégezve, valamint az együtthatókat összehasonlítva az egyenlet mindkét oldalán, kapjuk, hogy az α, β, γ változókra az $\alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma^2 = 2$ és az $\alpha + 7\beta - 10\gamma = 0$ összefüggéseknek kell teljesülnie. Az $\alpha = 10\gamma - 7\beta$ helyettesítés után kapjuk, hogy $(5\beta - 7\gamma)^2 = 1$, melyből pl. a $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\alpha = -1$ választás megfelelő. Ekkor a $(2n - 1)^2 + (14n + 3)^2 = 2(10n + 2)^2 + 2$ egyenlőség teljesül, ahonnan megoldásként adódik az

$$x = n, \quad y = 7n + 2, \quad z = 5n + 1.$$

IV. megoldás: (Az egyenlet összes egész megoldása)

A második megoldásban szereplő $(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 2(2z)^2 + 2$ egyenletet írjuk át az

$$(y - x)^2 + (x + y - 1)^2 = (2z)^2 + 1$$

alakba. Az egyenletet átrendezve, szorzattá alakítás után kapjuk, hogy

$$(x + y - 2)(x + y) = (2z - y + x)(2z + y - x).$$

Alkalmas r, s, t, u egész számokkal

$$x + y - 2 = rs$$

$$x + y = tu$$

$$2z - y + x = rt$$

$$2z + y - x = su.$$

Az egyenletrendszerből a változókat kifejezve

$$x = \frac{2tu + rt - su}{4}$$

$$y = \frac{2tu - rt + su}{4}$$

$$z = \frac{rt + su}{4}$$

adódik, továbbá teljesülnie kell a $tu - rs = 2$ összefüggésnek is. A következő táblázat tartalmazza a t, u, r, s egészek lehetséges maradékait modulo 4:

t	u	r	s		t	u	r	s
3	1	1	1		1	2	0	2
1	3	1	1		2	1	2	0
1	1	3	1		0	2	1	2
1	1	1	3		2	0	2	1
3	1	3	3		3	2	0	0
1	3	3	3		2	3	0	0
3	3	3	1		0	0	3	2
3	3	1	3		0	0	2	3
1	2	0	0		3	2	0	2
2	1	0	0		2	3	2	0
0	0	1	2		0	2	3	2
0	0	2	1		2	0	2	3

Speciális esetként a $t = 1$, $u = 2m + 1$, $r = 2m - 1$ és $s = 1$ ($m \in \mathbb{Z}$) választással kapjuk az első és második megoldásban megtalált számhármassokat, illetve $t = 2$, $u = 4n + 1$, $r = 2n$ és $s = 4$ esetén a harmadik megoldásban szereplő számhármassokat.

Vizsgáljuk meg az előző feladattal rokon $\binom{x}{4} + \binom{y}{4} = z^2$ diofantikus egyenlet egy speciális esetét.

3.0.11. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok megoldása létezik, ha $x \geq 4$, $x, y \in \mathbb{Z}$.*

$$\binom{x}{4} + \binom{x+1}{4} = y^2.$$

Megoldás:

Az $\binom{x}{4} + \binom{x+1}{4} = y^2$ egyenlet bal oldalán szereplő tagokat kibontva kapjuk, hogy

$$x(x-1)(x-2)(x-3) + (x+1)x(x-1)(x-2) = 24y^2.$$

Ez utóbbit átalakítva, majd a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve a következő egyenlethez jutunk:

$$x(x-2)(x-1)^2 = 12y^2 = 3(2y)^2.$$

Az egyenlet bal oldalán szereplő $x(x-2)$ tényező relatív prím az $(x-1)^2$ tényezőhöz, ezért az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x(x-2) = 3u^2$ alkalmas u egész számmal. Ez utóbbi egyenlet pedig felírható $(x-1)^2 - 3u^2 = 1$ alakban is. Itt felhasználunk egy, a Pell-egyenletekről szóló tételt, mely a 3.0.2. Feladatban részletezett gondolatmenet segítségével is könnyen belátható. Ha (α_0, β_0) egy megoldása az $\alpha^2 - 3\beta^2 = 1$ egyenletnek, akkor az egyenletnek végtelen sok (α_n, β_n) megoldása van, melyek előállnak

$$\alpha_n = \frac{(\alpha_0 + \sqrt{3}\beta_0)^n + (\alpha_0 - \sqrt{3}\beta_0)^n}{2},$$

illetve

$$\beta_n = \frac{(\alpha_0 + \sqrt{3}\beta_0)^n - (\alpha_0 - \sqrt{3}\beta_0)^n}{2\sqrt{3}}$$

alakban. Esetünkben $\alpha_0 = 2$ és $\beta_0 = 1$ megoldása az $\alpha^2 - 3\beta^2 = 1$ egyenletnek, tehát az alábbi formulák végtelen sok megoldást szolgáltatnak:

$$\alpha_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n}{2}, \quad \beta_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}.$$

Például $n = 3$ esetén $\alpha_3 = 26$, ebből kapjuk, hogy $x = 27$. Valóban,

$$\binom{27}{4} + \binom{28}{4} = 195^2.$$

3.0.12. Feladat. Adjuk meg az alábbi diofantikus egyenlet összes megoldását, ha $x > y \geq 2$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

$$\binom{x}{2} - \binom{y}{2} = z^2.$$

Megoldás:

A binomiális együtthatókat kibontva, majd az egyenlőség mindkét oldalát 8-cal szorozva kapjuk, hogy

$$4x(x-1) - 4y(y-1) = 8z^2.$$

Az egyenlet bal oldalán szereplő tagokat teljes négyzetté alakítva, és alkalmazva az $A = 2x - 1$ és $B = 2y - 1$ helyettesítéseket, kapjuk hogy

$$A^2 - B^2 = 8z^2.$$

Feltehető, hogy $(A, B, z) = 1$, sőt páronként relatív prímek is, hiszen pl. ha $q \mid A$ és $q \mid B$ teljesülne egy q páratlan prímszámmal, akkor ebből $q^2 \mid 8z^2 \Rightarrow q \mid z$, ami ellentmondás. Ezt az egyenlőséget felírhatjuk

$$\frac{A-B}{2} \cdot \frac{A+B}{2} = 2z^2$$

alakban is. A bal oldalon szereplő tényezők már relatív prímek, vagyis alkalmas u, v relatív prím egészekkel

$$\begin{aligned} \frac{A-B}{2} &= u^2 \\ \frac{A+B}{2} &= 2v^2, \end{aligned}$$

vagy

$$\begin{aligned} \frac{A-B}{2} &= 2v^2 \\ \frac{A+B}{2} &= u^2. \end{aligned}$$

Az első esetben $u^2 < 2v^2$, $A = u^2 + 2v^2$ és $B = 2v^2 - u^2$. Innen $x = \frac{u^2+2v^2+1}{2}$, $y = \frac{2v^2-u^2+1}{2}$ és $z = uv$ adódik. A másik esetben hasonló gondolatmenettel kaphatjuk

meg a gyököket. Összefoglalva, az egyenlet megoldásai azok az (x, y, z) számhármasok, melyekre

$$\begin{aligned}x &= \frac{(u^2 + 2v^2)d + 1}{2} \\y &= \frac{|u^2 - 2v^2|d + 1}{2} \\z &= uvd,\end{aligned}$$

ahol $(u, v) = 1$, u és d pozitív páratlan egész számok.

3.0.13. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok megoldása létezik, ahol $x \neq y$.*

$$\frac{\binom{x}{2} + 2 \cdot \binom{y}{2}}{3} = \binom{z}{2}.$$

Megoldás:

Az egyenletben szereplő binomiális együtthatókat kibontva, majd az egyenlőséget 8-cal szorozva mindkét oldalon teljes négyzeteket alakíthatunk ki.

$$(2x - 1)^2 + 2(y - 1)^2 = 3(2z - 1)^2.$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $X = 2x - 1$, $Y = 2y - 1$ és $Z = 2z - 1$. Az $X^2 + 2Y^2 = 3Z^2$ diofantikus egyenletben ismételten feltehető, hogy $(X, Y, Z) = 1$, valamint az eddig már többször látott módon bizonyítható, hogy X, Y, Z páronként relatív prímek. Az egyenlet mindkét oldala $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ -ben szorzattá alakítható:

$$(X + \sqrt{-2}Y)(X - \sqrt{-2}Y) = (1 + \sqrt{-2})(1 - \sqrt{-2}) \cdot Z^2.$$

Legyen $(X + \sqrt{-2}Y, X - \sqrt{-2}Y) = \delta$. Ekkor $\delta \mid 2X$ és $\delta \mid 2\sqrt{-2}Y$. Kapjuk, hogy $N(\delta) \mid (4X^2, -8Y^2)$. Mivel $(X, Y) = 1$, ezért $N(\delta)$ értéke csak 1, 2 vagy 4 lehetne, de X páratlan volta miatt δ szükségképpen egység. Mivel $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ -ben is érvényes az egyértelmű prímfaktorizáció, ezért alkalmas a, b egészekkel

$$X + \sqrt{-2}Y = \pm (1 \pm \sqrt{-2}) (a + b\sqrt{-2})^2.$$

Az egyenlőség jobb oldalán a szorzást elvégezve, valamint mindenhol $+$ előjelet véve, az együtthatók összehasonlításából kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}X &= a^2 - 4ab - 2b^2 \\Y &= a^2 + 2ab - 2b^2.\end{aligned}$$

Ebből x, y, z -re

$$\begin{aligned}x &= \frac{a^2 - 4ab - 2b^2 + 1}{2} \\y &= \frac{a^2 + 2ab - 2b^2 + 1}{2} \\z &= \frac{a^2 + 2b^2 + 1}{2}.\end{aligned}$$

Az egyenletekből leolvasható, hogy a -nak páratlannak kell lennie. Ha megköveteljük továbbá, hogy $a^2 - 4ab - 2b^2 > 0$ teljesüljön $a, b > 0$ egészekkel, akkor még ezen feltételek mellett is végtelen sok pozitív egész megoldását kaphatjuk az eredeti egyenletünknek. Könnyen ellenőrizhető, hogy pl. az $a \geq 5b$ választással $x, y, z > 0$ teljesül.

3.1. Didaktikai megjegyzések, koncepciók

A középiskolai tanítási gyakorlatban (egy nem speciális tantervű matematika osztály esetén), általában szakköri órák keretén belül kb. 2 – 3 tanórán keresztül foglalkozunk diofantikus egyenletekkel. Természetesen ez az óraszám függ a szakkörön résztvevők matematikai érdeklődésétől, illetve az oktató személyes preferenciáitól is. Szerencsére a diofantikus témakör tanításához rendelkezésre állnak kiváló szakkönyvek, példatárak is ([2], [19]), illetve a hazai matematikaversenyeken is egyre többször találkozhatunk olyan diofantikus egyenletekkel, melyek kiválóan alkalmasak a kötelező tanórán kívül történő feldolgozásra. Arra igyekeztünk kísérletet tenni, hogy a szokásos felépítés (lineáris diofantikus egyenletek, pitagoraszai számhármak, egyenletek megoldhatatlanságának vizsgálata maradékokkal) mellett milyen más, érdekes problémákkal foglalkozhatunk tehetséges diákokkal. A problémák a 2. fejezetben leírtakhoz hasonlóan főként a binomiális együtthatók köré épülnek, ami egyrészt nagymértékben segítheti ennek a matematikában nagyon jelentős fogalomnak az elmélyülését, másrészt igen alkalmasnak bizonyulhat arra, hogy a tanulók maguk is apróbb „felfedezéseket” tegyenek, illetve megvizsgáljanak néhány binomiális együtthatókkal kapcsolatos számelméleti vonatkozást. Személyes meggyőződésem, hogy az egyik fontos cél lehet annak az igénynek a kialakítása a diákokban, hogy önállóan is tanulmányozzák a témához kapcsolódó szakirodalmat, vagyis maguk is végezzenek „kuta-

tómunkát”, kutatási tevékenységet. (Természetesen megfelelő szaktanári segítség és ellenőrzés mellett.) Az itt szereplő feladatsor összeállításakor a fentebb említettek mellett igyekeztünk a fokozatosság elvét is figyelembe venni. A 3.0.1. Feladatban a tanulók által jól ismert szorzattá alakítási technika jelenik meg, illetve burkolt formában az a négyszám-tétel (lásd még a 3.0.10. Feladat negyedik megoldását), mely egyszerűsége ellenére számos versenyfeladat megoldásában jól használható ([2]) és többféle elegáns bizonyítása is elmondható szakkörön ([8]).

A 3.0.2. Feladat alkalmas annak érzékeltetésére, hogy bizonyos diofantikus egyenletek esetén meg kell elégednünk azzal, hogy megadjuk az egyenletnek végtelen sok nem-triviális egész megoldását, mert az összes megoldás felírása az ismert módszereink segítségével egyelőre nem elérhető. Az itt részletesebben tárgyalt Pell-egyenlet megoldása a tanítás során szintén jól hasznosítható, hiszen kiváló példája annak, hogy bár az egyenletet az egész számok körében lévőnek tekintjük, a megoldáshoz ki kell lépnünk a valós számkörbe, hogy a megoldásokat végül ismét egész számokban kapjuk. Ideális előkészítése lehet ez annak a feladatszituációnak, amikor a harmadfokú egyenlet kapcsán a diákok először találkoznak a casus irreducibilis esettel, vagyis amikor az egyenlet gyökeinek meghatározása érdekében fel kell használnunk menet közben a komplex számokat.

A 3.0.3. Feladat és különösen a 3.0.10. Feladat mutatja, hogy egy-egy konkrét diofantikus egyenlet esetén érdemes először egyszerűbb kérdéseket feltenni, mert a probléma speciális esetekben sokkal könnyebben kezelhető. Itt tipikus példa, hogy az egyenletben szereplő változókra írunk elő valamilyen lehetőleg egyszerű feltételt, melynek teljesülése esetén még mindig kapunk végtelen sok nem-triviális megoldást. Sőt, ilyen módon általában több lényegesen különböző paraméteres alakban adott megoldás adódhat. Azért, hogy az általános megoldáshoz is eljussunk, ahogyan azt a 3.0.9. Lemma mutatja, olykor ki kell lépnünk még a középiskolai keretek közül is. A kvadratikus alaknak további mély és nehéz alkalmazásai vannak ([13]). Ennek kapcsán kiemelhető két kérdéskör, nevezetesen, hogy mely egész számok állnak elő valamilyen speciális alakban (lásd korábbi megjegyzés), illetve, hogy bizonyos (pl. $a^2 + 2b^2$ alakú) egész számok lehetséges (prím)osztóira adunk meg szükséges és elégséges feltételeket. A témakörrel azért érdemes behatóbban foglalkozni, mert ezen tételek segítségével sok esetben éppen azt tudjuk bizonyítani, hogy egy adott

diofantikus egyenletnek nincsen megoldása az egész számok körében. Ennél a pontnál akár egy rövid kitekintést is tehetünk egészen bonyolult egyenletek vizsgálatának irányába pl. a Gauss-egészek felhasználásával ([17]). Természetesen itt már fel kell hagynunk a precíz, mindenre kiterjedő bizonyításokkal, de néhány felsőbb matematikai tétel segítségével érdekes és szép állításokat mutathatunk meg a gyerekeknek. (Például, mely számok állnak elő két négyzetszám összegeként, Fermat karácsonyi tétele, korábbi feladatok új bizonyítása vagy általánosítása pl. $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ -ben.)

Összefoglalva elmondhatjuk, hogy a diofantikus témakör tanításának hozadéka számos korábban említett mellett az, hogy rávezeti a tanulókat arra, hogy bizonyos problémákat hogyan lehet összekapcsolni, a különféle módszereket ügyesen kombinálni, általánosítani, új problémákat fölvetni, akár olyanokat is, melyek számukra talán most még megoldhatatlan akadályokat jelentenek. Egy-egy ilyen feladatsor tanítása közben maga az oktató is rengeteget tanul, folyamatosan fejlesztheti a saját eszköztárát is, ami elengedhetetlen minden tehetséggondozásban szerepet vállaló kolléga számára.

4. fejezet

Diofantikus egyenletek megoldása elemi úton és Gauss-egészek segítségével a középiskolai szakkörön

4.0.1. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenletet a természetes számok körében! (Indiai versenyfeladat 1990)*

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2.$$

I. megoldás:

Az egyenlet bal oldalán szereplő kifejezést kibontva, majd mindkét oldalhoz $2xy$ -t hozzáadva kapjuk az egyenlet egy, az eredetivel ekvivalens alakját:

$$(xy - 6)^2 + 13 = (x + y)^2.$$

Ez utóbbit írjuk át az

$$[xy - 6 - (x + y)][xy - 6 + x + y] = -13$$

alakra. Mivel a tényezők egész számok, valamint a feltételek miatt $xy - 6 - x - y \leq xy - 6 + x + y$, ezért csak az alábbi esetek lehetségesek:

$$xy - 6 - x - y = -1$$

$$xy - 6 + x + y = 13,$$

$$xy - 6 - x - y = -13$$

$$xy - 6 + x + y = 1.$$

Az első egyenletrendszerből az $x = 3$ és $y = 4$, illetve az $x = 4$ és $y = 3$ megoldásokat kapjuk. A második egyenletrendszerből az $x = 0$ és $y = 7$, illetve az $x = 7$ és $y = 0$ megoldások adódnak.

II. megoldás:

Ha $x = 0$, akkor $y = 7$, ha pedig $y = 0$, akkor az $x = 7$ megoldás. Ha pl. $x = 1$ lenne, akkor az $(y - 7)^2 = y^2 + 1$ egyenletből y -ra nem kapunk egész számot. A továbbiakban feltehető, hogy $x, y \geq 2$. Ha $xy - 7 \geq x + y$ teljesülne, akkor az $x^2 + y^2 = (xy - 7)^2 \geq (x + y)^2 > x^2 + y^2$ egyenlőtlenség ellentmondásra vezet. Ezért csak az $xy - 7 < x + y$ esetén kaphatunk megoldást a természetes számok körében. Ez utóbbi egyenlőtlenség az $(x - 1)(y - 1) < 8$ alakra hozható, melyet az $x, y \geq 2$ feltétel mellett csak véges sok x, y természetes szám teljesíthet. Szimmetria miatt elég pl. a $2 \leq x \leq 8$ értékeket kipróbálni, ahonnan y -ra már csak az első megoldásban megtalált $x = 3$ és $x = 4$ esetén kapunk egész számot. Az ezekhez tartozó y értékek pedig rendre az $y = 4$ és $y = 3$.

III. megoldás:

Az eredeti egyenletet átalakítva kapjuk, hogy

$$(y^2 - 1)x^2 - 14yx + 49 - y^2 = 0.$$

Ha ezt az egyenletet x -ben másodfokúnak tekintjük, akkor pontosan akkor kaphatunk egész megoldásokat, ha a diszkrimináns teljes négyzet, vagyis alkalmas d egész számra

$$(4.1) \quad 4y^4 - 4y^2 + 196 = d^2$$

teljesül. Ekkor pedig a megfelelő x értékek a megoldóképlet alapján $x = \frac{14y \pm d}{2y^2 - 2}$. A (4.1) egyenletet átalakítva:

$$(2y^2 - 1)^2 + 195 = d^2 \implies (d - 2y^2 + 1)(d + 2y^2 - 1) = 195.$$

Ha $y = 0$, akkor az eredeti egyenletből $x = 7$ megoldás. Az általánosság megsértése nélkül föltehető, hogy $d \geq 0$, és ha $y \neq 0$, akkor az előző egyenlőség második tényezője nagyobb, mint az első, így csak az alábbi esetek lehetségesek:

$$\begin{cases} d - 2y^2 + 1 = 1 \\ d + 2y^2 - 1 = 195, \end{cases} \quad \begin{cases} d - 2y^2 + 1 = 3 \\ d + 2y^2 - 1 = 65, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d - 2y^2 + 1 = 5 \\ d + 2y^2 - 1 = 39, \end{cases} \quad \begin{cases} d - 2y^2 + 1 = 13 \\ d + 2y^2 - 1 = 15. \end{cases}$$

Mindenhol a második egyenletből az első kivonva, rendre az előző módon kapott $y = 7, 4, 3$ (és a hamis gyököt jelentő 1) értékek adódnak.

IV. megoldás:

Ha $x = 0$, akkor $y = 7$, ha pedig $y = 0$, akkor az $x = 7$ megoldás. Könnyen látható, hogy nincs más megoldás akkor, ha $xy \leq 7$. A továbbiakban tegyük fel, hogy $x, y, xy - 7 > 0$ egészek. Ha x, y megoldása az $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$ diofantikus egyenletnek, akkor $(x, y, xy - 7) = 1$, vagy $(x, y, xy - 7) = 7$. Az első esetben látható, hogy $x, y, xy - 7$ páronként is relatív prímek, vagyis a pitagoraszai számhármásokra ismert formulák, illetve a feladatbeli feltételek szerint léteznek a különböző paritású u, v egészek úgy, hogy $(u, v) = 1$, $u > v > 0$, valamint

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v^2 \\ y &= 2uv \\ xy - 7 &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

Innen $u^2 + v^2 = 2uv(u^2 - v^2) - 7$. Mivel $v \leq u - 1$, ezért

$$u^2 + (u - 1)^2 \geq 2uv(u - v)(u + v) - 7 \geq 2u(u + 1) - 7,$$

melyből a $2 \geq u$ egyenlőtlenséghez jutunk. Ebből csak az $u = 2$, $v = 1$ lehetséges, melyekből megkapjuk az $x = 3$ és $y = 4$ megoldást. Szimmetria okok miatt természetesen a változók felcserélése is megoldást szolgáltat. Amennyiben $(x, y, xy - 7) = 7$ teljesül, akkor $x = 7x'$, $y = 7y'$, $xy - 7 = 7(7x'y' - 1)$ miatt az $x'^2 + y'^2 = (7x'y' - 1)^2$ egyenletet kell megoldanunk, ahol $x', y', 7x'y' - 1$ már relatív prímek, sőt páronként relatív prímek. Az előzőek miatt léteznek r, s különböző paritású pozitív egészek, melyekre $r > s > 0$, $(r, s) = 1$, valamint

$$\begin{aligned} x' &= r^2 - s^2 \\ y' &= 2rs \\ x'y' - 1 &= r^2 + s^2. \end{aligned}$$

Ebből viszont ellentmondást kapunk, hiszen a $2rs(r^2 - s^2) - 1 = r^2 + s^2$ egyenlet bal oldala 4-gyel osztva 3 maradékot ad, míg a jobb oldal 1-et.

V. megoldás:

A IV. megoldásból felhasználjuk, hogy $(x, y, xy - 7) = 1$ vagy $(x, y, xy - 7) = 7$. Ha $(x, y, xy - 7) = 1$, akkor az x és y változók ellentétes paritásúak is, hiszen ha mindkettő páratlan lenne, akkor az egyenlet jobb oldala 4-gyel osztva 2 maradékot adna. Legyen pl. x páratlan és y páros. Az egyenlet a Gauss-egészek körében (is) szorzattá alakítható:

$$(xy - 7)^2 = (x + yi)(x - yi).$$

Megmutatjuk, hogy $(x + yi, x - yi) = 1$. Ha $\gamma \mid x + yi$ és $\gamma \mid x - yi$ a Gauss-egészek körében, akkor $\gamma \mid 2x$ és $\gamma \mid 2yi$ is teljesül. Kapjuk, hogy $\gamma \mid (2x, 2yi) = 2$. Mivel $2 = (-i)(1+i)^2$ és az $1+i$ Gauss-prím, ezért γ vagy egység, vagy γ osztható $1+i$ -vel. Ez utóbbi azonban nem lehetséges, hiszen $\frac{x+yi}{1+i} = \frac{x+y+(y-x)\cdot i}{2}$ nem Gauss-egész.

Mivel a Gauss-egészek körében érvényes a számelmélet alaptétele, ezért

$x + yi = \varepsilon(u + vi)^2 = \varepsilon(u^2 - v^2 + 2uvi)$, ahol u, v egész számok és ε egység. Az $\varepsilon = 1$ -et véve, a valós és a képzetes részek összehasonlításából kapjuk, hogy $x = u^2 - v^2$ és $y = 2uv$. Az x és y -ra kapott formulákkal a IV. megoldásban látott módon fejezhető be a feladat megoldása. Megjegyezzük, hogy az $(x, y, xy - 7) = 7$ esetet is az előzőek szerint kell kezelni.

4.0.2. Megjegyzés. Az I. megoldásban a diofantikus egyenletek egy szokásos megoldási módszerét alkalmaztuk, vagyis szorzattá alakítottuk az egyenlet egyik oldalát, így elegendő volt a jobb oldalon szereplő egész szám osztóit kipróbálni és felírni a megfelelő egyenletrendszereket. Mivel a tanulók leginkább olyan jellegű diofantikus egyenletekkel találkoztak korábbi tanulmányaikból, melyeknél ez az átalakítás általában célhoz vezetett, ezért joggal várhatjuk, hogy a diákok által adott megoldások többsége is ezt az utat fogja követni. A II. megoldásban nagyságrendi vizsgálatokat végeztünk, hiszen a bal oldal – könnyen kezelhető – véges sok esettől eltekintve nagyobb, mint a jobb oldal. Itt is születhetnek szép tanulói megoldások, hiszen esetleg ez a módszer is szerepelt már korábban szakköri foglalkozáson. Tipikus példája ennek, mikor egy kifejezésről úgy mutatjuk meg, hogy nem lehet pl. négyzetszám, hogy bebizonyítjuk, két egymást követő négyzetszám közé esik. A III. megoldásban az egyik ismeretlent paraméternek tekintjük, és lényegében a másik ismeretlenre vonat-

kozó paraméteres másodfokú egyenletet oldunk meg. Ez a fajta alkalmazás már talán kevésbé ismert a tanulók körében, még azzal együtt is, hogy egyébként paraméteres egyenletekkel alsóbb évfolyamon már találkoztak. A IV. megoldáshoz a pitagoraszai számhármások ismeretére van szükség. Ez legfeljebb az emelt óraszámú csoportokban kerül elő, ennek megfelelően ilyen jellegű megoldást is csak tőlük várhatunk. Az V. megoldást pedig még tőlük sem, hiszen ez felhasználja a Gauss-egészeket, mely jelenleg nem szerepel tananyagként egyetlen általános tantervű gimnáziumi osztályban sem. Tagozatos csoportok esetén gyakorta előfordul, hogy szakköri órák keretén belül a diákok megismerkednek a komplex szám fogalmával és kellő rutint szereznek ebben a számukra még új számkörben. Ha a csoport megfelelően motivált, érdeklődő, kiemelkedően tehetséges tanulókból áll, akkor beszélhetünk a Gauss-egészekről és felhasználhatunk bizonyos tételeket, természetesen legtöbbször szigorú bizonyítás nélkül. Végül megjegyezzük, hogy az V. megoldásban látott módon a pitagoraszai számhármásokra vonatkozó képletet közvetlenül is megkaphatjuk.

4.0.3. Megjegyzés. Természetesen bármelyik megoldásból megkapható az egyenlet összes egész megoldása, hiszen ha az (x, y) egy pozitív megoldás, akkor nyilvánvalóan a $(-x, -y)$ és a $(-y, -x)$ pár is egész megoldás, ha pedig x és y közül pontosan az egyik negatív, akkor az $(xy + 7)^2 = x^2 + y^2$ egyenlet pozitív megoldásai adják az eredeti egyenletünk további egész megoldásait. A feladat egy lehetséges általánosítása az $(xy - c)^2 = x^2 + y^2$ alakú diofantikus egyenlet vizsgálata, ahol c egy rögzített egész szám. Az első megoldásban szereplő átalakítás mutatja, hogy ennek az egyenletnek minden c egészre csak véges sok megoldása lehet, mert az egyenlet ekvivalens átalakításokkal az $[xy - (c - 1)]^2 + 2c - 1 = (x + y)^2$ alakra hozható.

4.0.4. Feladat. (Arany Dániel Matematikaverseny 2014)

Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, melyekre az $x^4 + 4 = py^4$ egyenlet megoldható az egész számok körében.

I. megoldás:

Az $x^4 + 4 = py^4$ egyenlet mindkét oldalát modulo 16 vizsgálva láthatjuk, hogy egyenlőség csak p páratlan prím, x, y páratlan egész esetén teljesülhet. (Egy negyedik hatvány 16-os maradéka 0 vagy 1 lehet aszerint, hogy a hatvány alapja páros vagy páratlan.)

Az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = py^4.$$

A bal oldalon szereplő tényezők legnagyobb közös osztóját jelölje d .

Mivel $d \mid x^2 - 2x + 2$ és $d \mid x^2 + 2x + 2$, ezért $d \mid 4x$ és $d \mid 2x^2 + 4 \Rightarrow d \mid 4x^2 + 8$ is teljesül. Innen a $d \mid 8$ reláció adódik, melyből a tényezők páratlan volta miatt csak $d = 1$ lehetséges. Mivel $x^2 \pm 2x + 2 > 0$, így két esetet kell megvizsgálnunk:

I. eset:

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 2 &= p \cdot a_1^2 \\x^2 + 2x + 2 &= b_1^2.\end{aligned}$$

A második egyenletből kapjuk, hogy $(x + 1)^2 + 1 = b_1^2$, melyből csak $x = -1$ esetén kapunk egész megoldást.

II. eset:

$$\begin{aligned}x^2 - 2x + 2 &= a_2^2 \\x^2 + 2x + 2 &= p \cdot b_2^2.\end{aligned}$$

Itt az első egyenletben végezzük el a teljes négyzetté alakítást;

$(x - 1)^2 + 1 = a_2^2$. Innen $x = 1$ adódik egyetlen egész megoldásként, ezzel az eredeti egyenlet egész megoldásai: $x = \pm 1 \Rightarrow p = 5$ és $y = \pm 1$.

4.0.5. Megjegyzés. A feladat a 2014. évi Arany Dániel Matematikaversenyen a kezdők II. kategóriájának egyik döntős példája volt. Talán meglepő, de a feladat szokatlanul nehéznek bizonyult, egyetlen tanuló sem adott rá teljes megoldást, a legtöbb

diák csak az első egy-két lépést tudta végrehajtani. Korábban számos példát mutattunk arra, hogy bizonyos diofantikus egyenletek sokkal egyszerűbben kezelhetők, ha az egész számok helyett a Gauss-egészek gyűrűjét tekintjük. A feladat második megoldásában nem ez a helyzet, csupán érdekességnek szánjuk, hogyan lehetne a kitűzött versenyfeladatot a Gauss-egészek segítségével megoldani. Természetesen, ha várható érdemi tanulói megoldási stratégia, akkor az mindenképpen az első megoldásban szereplő, azonban ha a diákok megismerkednek a komplex számkörrel, akkor találkozhatnak egy polinomnak „másféle” felbontásával is. Az itt leírt második megoldás kimondottan ezt célozza.

II. megoldás:

Az előző megoldásból felhasználjuk, hogy x, y páratlan, valamint a modulo 16 vizsgálatból kapjuk, hogy $p = 16k + 5$ alakú prímszám. Az egyenlet bal oldala a Gauss-egészek körében szorzattá alakítható:

$$(4.2) \quad (x + 1 + i)(x + 1 - i)(1 - x + i)(1 - x - i) = py^4.$$

A Gauss-egészek elméletéből ismeretes, hogy ha $p \equiv 1 \pmod{4}$, akkor $p = \alpha \cdot \bar{\alpha}$, ahol α Gauss-prím, $\bar{\alpha}$ a α konjugáltja, de nem egyszersere. Könnyű belátni, hogy a tényezők a (4.2) felbontásban páronként relatív prímek. Példaként ezt az első két tényezőre ellenőrizzük, a többire hasonló a bizonyítás. Ha $(x + 1 + i, x + 1 - i) = \delta$, akkor $\delta \mid 2i = (1 + i)^2$. Ha δ nem az egység lenne, akkor az $1 + i$ Gauss-prím osztója lenne pl. $x + 1 + i$ -nek, de már ez sem teljesül, $\frac{x+1+i}{1+i} = \frac{x+2-xi}{2}$ nem Gauss-egész, hiszen x páratlan. Az egyértelmű prímfaktorizáció miatt van (két) olyan tényező, amely felírható $i^k \cdot (u + vi)^4$ alakban, ahol $k = 0, 1, 2, 3$ és u, v egész számok. Ha

$$\pm x + 1 \pm i = i^k \cdot (u + vi)^4 = i^k \cdot [(u^2 - v^2)^2 - 4u^2v^2 + 4uv(u^2 - v^2)i],$$

akkor a valós és képzetes részek összehasonlításából, $k = 0$ és $k = 2$ esetén a $\pm 1 = 4uv(u^2 - v^2)$ egyenlet adódik, ami ellentmondás. Ha $k = 1$, akkor $\pm 1 = (u^2 - v^2)^2 - 4u^2v^2$, melyből a $(2uv)^2 \pm 1 = (u^2 - v^2)^2$ átalakítás miatt az $uv = 0$ feltételt kapjuk. A valós részre így a $\pm x + 1 = 0$ egyenletet nyerjük, vagyis $x = \pm 1$. (A $k = 3$ eset vizsgálata a képzetes részek összehasonlításából ismét a $\pm 1 = (u^2 - v^2)^2 - 4u^2v^2$ egyenlőségre vezet.)

4.0.6. Feladat. *Arany Dániel Matematikaverseny (1976)*

Legyenek p, q olyan prímszámok, melyekre $3 \leq p < q$, továbbá $p + 1, q + 1$ egyaránt osztható 4-gyel. Mutassuk meg, hogy $q^2 - p^2$ nem lehet négyzetszám!

I. megoldás:

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy alkalmas a egész számmal $q^2 - p^2 = a^2$, vagyis $(q - p)(q + p) = a^2$. Ha $(q - p, q + p) = d$, akkor $d \mid q - p$ és $d \mid q + p$ miatt $d \mid 2p$, illetve $d \mid 2q$ is teljesül. Innen kapjuk, hogy $d \mid (2p, 2q) = 2$. Mivel $q - p$ és $q + p$ páros, így $(q - p, q + p) = 2$. Az egyenletet átalakítva kapjuk, hogy

$$\frac{q - p}{2} \cdot \frac{q + p}{2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Mivel az egyenlet bal oldalán szereplő tényezők pozitívak és relatív prímek, így szükséges, hogy külön-külön is teljes négyzetek legyenek, azaz x, y egészekkel $\frac{q-p}{2} = x^2$ és $\frac{q+p}{2} = y^2$. Az egyenletekből q -t kifejezve kapjuk, hogy $q = x^2 + y^2$, ami ellentmondás, hiszen egy $4k - 1$ alakú prímszám nem írható fel két négyzetszám összegeként. (Valójában csak a $4 \mid q + 1$ feltételt használtuk ki, és ez a feladat további megoldásairól is elmondható.)

II. megoldás:

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy alkalmas a egész számmal $q^2 - p^2 = a^2$, vagyis $a^2 + p^2 = q^2$. Nyilván feltehető, hogy $(a, p, q) = 1$, valamint páronként is relatív prímek, hiszen ha pl. (a, p) nem 1 lenne, akkor a legnagyobb közös osztó, osztója lenne q^2 -nek, ebből pedig a $p \mid q$ relációt kapjuk, ami $p < q$ miatt ellentmondás. Azt kaptuk tehát, hogy az a, p, q primitív pitagoraszai számhármasság, vagyis alkalmas u, v , $(u, v) = 1$, $u > v > 0$, valamint $2 \nmid u - v$ egész számokra

$$\begin{aligned} p &= u^2 - v^2 \\ a &= 2uv \\ q &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet mutatja az ellentmondást, hiszen egy $4k - 1$ alakú prímszám nem írható fel két négyzetszám összegeként.

4.0.7. Megjegyzés. Az I. megoldásban szereplő levezetés lényegében azt az utat követi, ahogyan a pitagoraszai számhármasságokra vonatkozó összefüggéseket általában

bizonyítjuk. Ezt érdemes a tétel bizonyítása előtt szerepeltetni, mert nagymértékben segítheti annak megértését és elmélyítését.

III. megoldás:

A bizonyítás ismét indirekt, továbbá felhasználunk néhány – felsőbb matematikában szereplő – Gauss-egészekkel kapcsolatos ismeretet. Tegyük fel, hogy létezik olyan a egész szám, melyre $q^2 = a^2 + p^2$. A Gauss-egészek körében az egyenlet jobb oldala szorzattá alakítható, vagyis $q^2 = (a + pi)(a - pi)$. Mivel q egy $4k - 1$ alakú prímszám, ami a Gauss-egészek körében is prím, ezért csak úgy lehet osztója a jobb oldalnak, ha valamelyik tényezőnek osztója. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy pl. $q \mid a + pi$. Ez viszont nem teljesülhet, hiszen a feltétel szerint $q \nmid p$.

A következőkben a feladatnak egy érdekes variánsát vizsgáljuk meg Gauss-egészek segítségével. Két különböző prímszám négyzetének különbsége helyett most tekintsük az összegüket. A korábbiakból (is) triviális, hogy az összegük négyzetszám nem lehet, ezért próbálkozzunk a köbszám esetével:

4.0.8. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $p < q$ pozitív prímszámok, és a pozitív egész, akkor a $p^2 + q^2 = a^3$ diofantikus egyenletnek a $p = 2$, $q = 11$, $a = 5$ az egyetlen megoldása.*

Megoldás:

A p és q prímek nem lehetnek egyszerre páratlanok, hiszen ekkor a bal oldal 4-gyel osztva 2 maradékot ad, a jobb oldal pedig 0, vagy ± 1 maradékot. Mivel a p és q prímek különbözők, ezért csak a $p = 2$ és q páratlan prím eset lehetséges. A $q^2 + 4 = a^3$ egyenlőség bal oldalát bontsuk fel a Gauss-egészek körében. Kapjuk, hogy

$$(4.3) \quad (q + 2i)(q - 2i) = a^3.$$

Megmutatjuk, hogy ha $(q + 2i, q - 2i) = \varepsilon$, akkor ε a Gauss-egészek körében egység. Ez teljesül, hiszen ha $\varepsilon \mid 2 = (-i) \cdot (1 + i)^2$ lenne, ahol az $1 + i$ Gauss-prím, akkor mint azt a $\frac{q+2i}{1+i} = \frac{q+2}{2} + (\frac{2-q}{2})i$ átalakítás mutatja, $1 + i$ nem osztója a $q + 2i$ Gauss-egésznek, így a legnagyobb közös osztó valóban csak egység lehet. Mivel a Gauss-egészek körében is érvényes a számelmélet alaptétele, így a (4.3) egyenlőség bal oldalán szereplő tényezők külön-külön is köbszámok. Egyszerű számolás mutatja, hogy minden Gauss-egység

valamely Gauss-egység köbe, így alkalmas a és b egész számokkal teljesülnie kell a $q + 2i = (a + bi)^3$ egyenlőségnek. A valós és képzetes részeket összehasonlítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} q &= a^3 - 3ab^2 \\ 2 &= 3a^2b - b^3. \end{aligned}$$

Innen a $b \mid 2$ feltétel adódik, melyből csak a $b = -2$, $a = -1$, $q = 11$ értékek esetén kapunk megoldást.

4.0.9. Megjegyzés. Az előző feladatban vizsgált $q^2 + 4 = a^3$ egyenlet speciális esete az $x^2 + k = y^3$ alakú egyenleteknek. A fenti egyenleteket, ahol $k \in \mathbb{Z}$, szokás Mordell-egyenleteknek nevezni. Mordell 1922-ben bebizonyította, hogy ha $k \neq 0$, akkor az egyenletnek legfeljebb véges sok megoldása lehet az egész számok körében. Néhány speciális k értéket véve tapasztalhatjuk, hogy az egész megoldások megkeresése történhet majdnem teljesen elemi úton is, legtöbbször ez a helyzet akkor, amikor az egyenletnek egyáltalán nincsen egész megoldása. A 4.0.10. Feladatban a $k = -7$ kapcsán látunk erre példát. Léteznek azonban olyan k értékek, melyekre az elemi megoldás megtalálása általában nagyon bonyolult. Ilyen a 4.0.11. Feladat első megoldása, a jelen disszertáció szerzője által talált megoldás a $k = 1$ esetben. A 4.0.11. Feladat második megoldása mutat rá arra, hogy Gauss-egészek segítségével lényegesen könnyebb vizsgálni ezt az egyenletet, sőt alkalmazásukkal a bizonyítás is jelentősen egyszerűsödött. A 4.0.13. Feladatban szereplő általánosítás szinte már el sem képzelhető más úton, csakis Gauss-egészek felhasználásával.

4.0.10. Feladat. *Az $x^2 - 7 = y^3$ egyenletnek nincsen megoldása az egész számok körében.*

Megoldás:

Az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy $x^2 = y^3 + 7$. Feltehető, hogy $y \geq -1$, valamint $(\text{mod } 4)$ véve a két oldalt nyilvánvaló, hogy y páratlan, sőt $4k + 1$ alakú kell, hogy legyen. Az $x^2 + 1 = y^3 + 8 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$ átalakításból az $y + 2 \equiv 3 \pmod{4}$ miatt kapjuk, hogy az egyenlet jobb oldalán szereplő szorzatnak van $4k + 3$ alakú prímosztója. A „kis” Fermat-tételt felhasználva viszont bizonyítható, hogy ilyen alakú prímosztója az egyenlet bal oldalán szereplő $x^2 + 1$ -nek nem lehet.

4.0.11. Feladat. Az $x^2 + 1 = y^3$ diofantikus egyenletnek az egész számok körében az $x = 0$ és $y = 1$ az egyetlen megoldása.

I. megoldás:

Az $x = 0$ és $y = 1$ nyilván megoldás. A továbbiakban az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x, y > 0$ egész számok. Írjuk fel az egyenletet az alábbi alakban:

$$x^2 = (y - 1)(y^2 + y + 1).$$

Az $y^2 + y + 1 = (y - 1)^2 + 3(y - 1) + 3$ átalakítás mutatja, hogy az egyenlőség jobb oldalán szereplő tényezők legnagyobb közös osztója vagy 1, vagy 3. Ha $(y - 1, y^2 + y + 1) = 1$, akkor alkalmas a, b egész számokkal:

$$\begin{aligned} y - 1 &= a^2 \\ y^2 + y + 1 &= b^2. \end{aligned}$$

A második egyenletben használjuk fel, hogy ha $y > 0$, akkor $y^2 < y^2 + y + 1 < (y + 1)^2$, vagyis $y^2 + y + 1$ nem lehet négyzetszám. Ha $(y - 1, y^2 + y + 1) = 3$, akkor írjuk fel az egyenlőséget a következő alakban:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{y - 1}{3} \cdot \frac{y^2 + y + 1}{3}.$$

Az itt szereplő tényezők az egyenlet jobb oldalán már relatív prímek, így alkalmas u, v pozitív egész számokkal, melyekre $(u, v) = 1$, teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \frac{y - 1}{3} &= u^2 \\ \frac{y^2 + y + 1}{3} &= v^2. \end{aligned}$$

Behelyettesítés és rendezés után kapjuk, hogy $3u^4 + 3u^2 + 1 = v^2$. Itt u páros szám kell, hogy legyen, ellenkező esetben a bal oldalon szereplő kifejezés 4-gyel osztva 3 maradékot ad, a jobb oldalon szereplő négyzetszám viszont 0 vagy 1 maradékot. Az $u = 2t$ helyettesítést, majd teljes négyzetté alakítást követően adódik a

$$3(8t^2 + 1)^2 + 1 = 4v^2 \iff (2v)^2 - 3(8t^2 + 1)^2 = 1.$$

egyenlőség.

A $3(8t^2 + 1)^2 = (2v - 1)(2v + 1)$ felbontást tekintve látható, hogy az egyenlőség jobb oldalán szereplő szorzótényezők relatív prímek, így két eset fordulhat elő.

I. eset:

Alkalmas $\alpha, \beta > 0$ páratlan egész számokkal, $(\alpha, \beta) = 1$ esetén:

$$2v - 1 = 3\alpha^2$$

$$2v + 1 = \beta^2.$$

Ebből az esetből a $\beta^2 - 3\alpha^2 = 2$ egyenletet kapjuk, amelynek nincsen egész megoldása, hiszen a bal oldal modulo 3 értéke csak 0 vagy 1 lehet.

II. eset:

Ebben az esetben fordított szereposztással kapjuk, hogy

$$2v - 1 = \alpha^2$$

$$2v + 1 = 3\beta^2.$$

A megfelelő helyettesítéseket elvégezve az alábbi összefüggésekhez jutunk:

$\alpha^2 - 3\beta^2 = -2$, valamint $\alpha\beta = 8t^2 + 1$. Itt α és β vagy mindketten $4l + 1$ alakú páratlan számok, vagy mindketten $4l - 1$ alakúak, hiszen a szorzatuk $4s + 1$ alakú. Az első egyenlethez a második kétszeresét hozzáadva, majd alkalmasan átalakítva kapjuk, hogy

$$(\alpha - \beta)(\alpha + 3\beta) = 16t^2.$$

Egy kevés számolással megmutatható, hogy a bal oldalon a tényezők legnagyobb közös osztója 4-nek is osztója, sőt az α, β -ra tett korábbi megjegyzésünk szerint a legnagyobb közös osztó pontosan 4 lesz. Ezért $\frac{\alpha - \beta}{4} \cdot \frac{\alpha + 3\beta}{4} = t^2$, azaz alkalmas relatív prím m, n egészekre:

$$\frac{\alpha - \beta}{4} = m^2$$

$$\frac{\alpha + 3\beta}{4} = n^2.$$

Teljesül továbbá, hogy $(m, n) = 1$, valamint $mn = t$. Ebből az egyenletrendszerből az α, β értékeket kifejezve kapjuk, hogy

$$\alpha = 3m^2 + n^2, \text{ valamint } \beta = n^2 - m^2, \alpha > \beta.$$

Ezeket a $\alpha^2 - 3\beta^2 = -2$ egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $n^4 - 6m^2n^2 - 3m^4 = 1$. Ezt az egyenletet a következő feladatban vizsgáljuk részletesen, valamint – a jobb áttekinthetőség kedvéért – a fenti változók egy részét a jelölésben megtartjuk.

4.0.12. Feladat. *Az $n^4 - 6m^2n^2 - 3m^4 = 1$ egyenletnek a nemnegatív egészek körében csak az $n = 1$ és $m = 0$ megoldása.*

Az egyenletet tekintsük n^2 -ben másodfokú egyenletnek. Ennek csak akkor létezhet megoldása az egész számok körében, ha a diszkriminánsa teljes négyzet, vagyis alkalmas z_1 egész számmal: $36m^4 + 4(3m^4 + 1) = z_1^2$. Mivel z_1 -nek páros számnak kell lennie, ezért $12m^4 + 1 = z^2$, ahol $z_1 = 2z$. Ez utóbbit átalakítva kapjuk, hogy

$$3m^4 = \frac{z-1}{2} \cdot \frac{z+1}{2}.$$

Ha $z = 1$, akkor $m = 0$, $n = 1$. Az egyenlet jobb oldalán szereplő tényezők relatív prímek, így $z \neq 1$ esetén két eset lehetséges: Alkalmas α, β relatív prím egész számokkal $\frac{z-1}{2} = 3\alpha^4$ és $\frac{z+1}{2} = \beta^4$, vagy $\frac{z-1}{2} = \alpha^4$ és $\frac{z+1}{2} = 3\beta^4$. Az előbbiből a $\beta^4 - 3\alpha^4 = 1$ egyenletet kapjuk, míg az utóbbiból a $3\beta^4 - \alpha^4 = 1$ egyenletet, mely nem teljesülhet, hiszen az egyenlet két oldala nem kongruens modulo 3. Az alábbiakban vizsgáljuk meg a $\beta^4 - 3\alpha^4 = 1$ diofantikus egyenletet. A $\beta = 1$, $\alpha = 0$ nyilván megoldás. A továbbiakban vizsgáljuk meg az egyenlet olyan megoldásait pozitív egészekben, ahol $\beta \geq 2$, $\alpha \geq 2$. Megmutatjuk, hogy a feltételeket kielégítő megoldás nem létezik. Ehhez a „végtelen leszállás” módszerét használjuk fel. A megoldhatatlanságot úgy fogjuk kimutatni, hogy kiindulunk egy olyan megoldásból, ahol α értéke minimális, majd konstruálunk egy $t < \alpha$ pozitív t értéket, melyre az egyenlet szintén teljesül. Nézzük mindezt részletesen:

I. eset:

Legyen β páros, α páratlan egész szám. Az egyenletet átalakítva a $\beta^4 = 3\alpha^4 + 1$ -et kapjuk, mely azonban nem teljesülhet, hiszen a bal oldal osztható 8-cal, viszont a jobb oldal 8-as maradéka 4.

II. eset:

Legyen β páratlan, α páros egész szám. Az $\alpha = 2\gamma$ helyettesítés után:

$$12\gamma^4 = \left(\frac{\beta^2 - 1}{2}\right) \left(\frac{\beta^2 + 1}{2}\right).$$

A második tényező β páratlan volta miatt páratlan, valamint 3-mal sem osztható, hiszen egy páratlan szám négyzete 3-mal osztva vagy 0, vagy 1 maradékot adhat. Ezért a fenti egyenlet átírható a következő alakba:

$$\gamma^4 = \left(\frac{\beta^2 - 1}{24} \right) \left(\frac{\beta^2 + 1}{2} \right).$$

Léteznek olyan r, s egész számok, melyekre $\beta^2 - 1 = 24r^4$ és $\beta^2 + 1 = 2s^4$, ahonnan kapjuk, hogy $s^4 - 12r^4 = 1$. Az előzőekben látott indokláshoz hasonlóan kapjuk, hogy

$$r^4 = \left(\frac{s^2 - 1}{6} \right) \left(\frac{s^2 + 1}{2} \right).$$

Az $s^2 - 1 = 6t^4$ és $s^2 + 1 = 2w^4$ egyenletekből kapjuk, hogy $w^4 - 3t^4 = 1$. A $\beta \geq 2$ feltétel miatt $s \neq 1$, valamint $t \neq 0$. Mivel $\alpha = 2\gamma$, $\gamma = rs$ és $r = tw$, így $\alpha = 2wst > t$.

A 4.0.11. Feladat II. megoldása:

Az egyenletet (mod 4) vizsgálva kapjuk, hogy x páros, valamint y páratlan egész szám kell, hogy legyen. Könnyen látható az is, hogy $(x, y) = 1$. A Gauss-egészek körében az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható, így

$$(x + i)(x - i) = y^3.$$

Belátjuk, hogy $(x + i, x - i) = \varepsilon$, ahol ε a Gauss-egészek körében egység. Ha ez nem volna igaz, akkor létezne δ Gauss-prím úgy, hogy $\delta \mid x + i$ és $\delta \mid x - i$ teljesül. Innen kapjuk, hogy $\delta \mid 2i$, azaz $\delta \mid 2$. Mivel $2 = (-i) \cdot (1 + i)^2$ a Gauss-egészek körében, ahol $1 + i$ Gauss-prím, ezért az állítás bizonyításához elegendő megmutatni, hogy $1 + i \nmid x \pm i$. Ez viszont teljesül, hiszen pl.

$$\frac{x + i}{1 + i} = \frac{(x + i)(1 - i)}{2} = \frac{x + 1}{2} + \frac{1 - x}{2} \cdot i.$$

A feltétel szerint x páros, így világos, hogy a Gauss-egészek körében ez az oszthatóság nem teljesül, vagyis $(x + i, x - i)$ szükségképpen egység. Mivel minden egység a Gauss-egészek körében valamely egységnek a köbe, valamint érvényes a számelmélet alaptétele, így léteznek u, v egész számok úgy, hogy $x + i = (u + vi)^3$. Innen kapjuk, hogy

$$(4.4) \quad x + i = u^3 - 3uv^2 + (3u^2v - v^3)i.$$

A képzetes részeket összehasonlítva a $3u^2v - v^3 = 1$ egyenlet adódik. Mivel a bal oldal osztható v -vel, így csak $v = 1$, vagy $v = -1$ lehetséges. Ezt visszahelyettesítve csak a $v = -1$ esetben kapunk u -ra egész megoldást, $u = 0$. Ezt a (4.4) egyenletbe helyettesítve az $x = 0$ értéket kapjuk, mellyel valóban $y = 1$. Ezzel az állítást igazoltuk.

4.0.13. Feladat. Az $x^2 + 1 = y^n$ egyenletnek, ahol $n \geq 2$, az egész számok körében n paritásától függően csak a triviális $x = 0$ és $y = \pm 1$ megoldása.

Megoldás:

I. eset:

Legyen n páros, $n = 2k$ alakú, ahol $k \geq 1$. Ekkor könnyen láthatóan az $x = 0$, $y = \pm 1$ megoldás. Mivel az $x^2 + 1 = (y^k)^2$ felírásban két szomszédos négyzetszám szerepel, ezért csak az $x = 0$, $y^k = \pm 1$ lehetséges, melyből valóban az $x = 0$ és $y = \pm 1$ értékeket kapjuk.

II. eset:

Ha n páratlan, akkor az állítást elegendő egy $p \geq 3$ prím kitevőre belátni, hiszen összetett n esetén, ha volna a triviálison kívül más megoldás, akkor az $x^2 + 1 = \left(y^{\frac{n}{p}}\right)^p$ átalakítás miatt prím kitevőre is létezne nem-triviális megoldás egész számokban.

Tekintsük az $x^2 + 1 = y^p$ egyenletet, ahol $p \geq 3$ prím. Az előzőek szerint x páros, y pedig páratlan szám kell, hogy legyen. Indirekten tegyük föl, hogy az egyenletnek létezik nem-triviális megoldása. Ekkor feltehető, hogy $x \geq 2$, valamint $y \geq 3$. Alakítsuk szorzattá az egyenletet a Gauss-egészek körében. Megjegyezzük, hogy a továbbiakban az egyszerűbb számolás kedvéért áttérünk a szokásos $(x + i)(x - i)$ felbontás helyett az $(1 - xi)(1 + xi)$ felbontásra.

$$(1 - xi)(1 + xi) = y^p.$$

A 4.0.11. Feladat megoldásában szereplőkhöz hasonlóan belátható, hogy $(1 - xi, 1 + xi)$ egység. Mivel a Gauss-egészek körében minden egység maga is egy egység p -edik hatványa ($p \geq 3$ prím), valamint ebben a számkörben is érvényes a számelmélet alaptétele, ezért léteznek olyan a, b egész számok, melyekre $1 + xi = (a + bi)^p$ és

$1 - xi = (a - bi)^p$. Az $1 + xi = (a + bi)^p$ egyenlőség jobb oldalát a binomiális tétel segítségével kifejtve, valamint összehasonlítva a két oldalon szereplő komplex számok valós részét, kapjuk, hogy

$$1 = a^p - \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 + \binom{p}{4}a^{p-4}b^4 - \dots \pm \binom{p}{p-1}ab^{p-1}.$$

Mivel a jobb oldal osztható a -val, ezért $a \mid 1$, vagyis $a = \pm 1$. Ugyanakkor b páros, hiszen ellenkező esetben az egyenlet jobb oldalán 2^{p-1} darab páratlan szám összege is páros volna. Ha b páros, akkor az egyenletet $(\text{mod } 4)$ véve kapjuk, hogy $a^p \equiv 1 \pmod{4}$, melyből csak az $a = 1$ lehetséges.

Az $a = 1$ értéket az egyenletbe visszaírva, majd átrendezés és egyszerűsítés ($b^2 \neq 0$) után a

$$\binom{p}{2} = \binom{p}{4}b^2 - \binom{p}{6}b^4 + \dots \pm \binom{p}{p-1}b^{p-3}$$

összefüggéshez jutunk. Azt fogjuk megmutatni, hogy az egyenletnek a bal oldala 2-nek kisebb hatványával osztható, mint a jobb oldal. Legyen $p - 1 = 2^l s$ alakú, ahol $s \geq 1$ páratlan szám. Ekkor $\binom{p}{2}$ 2-nek pontosan az $l - 1$ -edik hatványával osztható. Az egyenlet jobb oldalán szereplő általános tag

$$\frac{p(p-1) \cdots (p-2m+1)}{(2m)!} \cdot b^{2m-2},$$

ahol $2 \leq m \leq \frac{p-1}{2}$. Az első tényező számlálójában szereplő $2m$ darab szorzótényező közül a $p-1$ -en kívül $m-1$ darab osztható 2-vel, és mivel b páros, így a számláló 2-nek legalább $l + m - 1 + 2m - 2$ -edik hatványával osztható. Ismert, hogy $n!$ minden prímtényezője legfeljebb $n - 1$ -edik hatványon szerepelhet a prímtényezős felbontásban, ezért az általános tag 2-nek legalább $l + m - 1 + 2m - 2 - (2m - 1) = l + m - 2$ -edik hatványával osztható. Mivel $m \geq 2$, ezért $l + m - 2 > l - 1$, vagyis az állítást bebizonyítottuk.

4.1. Egy nevezetes probléma speciális esetének bizonyítása elemi módszerekkel

A 4.0.4. Feladatban megmutattuk, hogy az $x^4 - 5y^4 = -4$ diofantikus egyenletnek az egész számok körében csak az $x = \pm 1$ és $y = \pm 1$ megoldása. Ebben a fejezetben az $x^4 - 5y^4 = 1$ egyenletet vizsgáljuk meg elemi módszerekkel, majd az itt bizonyított eredményeket felhasználva egy, a Fibonacci-sorozattal kapcsolatos szép állítás egyik részét igazoljuk.

Az ide vonatkozó számelméleti kérdéskörnek a teljes lezárása csak az elmúlt években született meg. Nevezetesen, hogy a Fibonacci-sorozat elemei között csak a 0, 1, 8, és a 144 teljes hatvány. Ez a meglepő tétel, és annak kb. 50 oldalas bizonyítása Y. Burgeaud, M. Mignotte, S. Siksek eredménye. Ennek a tételnek egy speciális esetére, hogy ti. a Fibonacci-sorozatban mik a négyzetszámok, is csak az 1950-es években derült fény Ljunggren révén, majd a tételt tőle függetlenül Cohn és Wyler is igazolta 1964-ben.

4.1.1. Tétel. (Ljunggren-Cohn-Wyler)

Ha $n \geq 1$, akkor a Fibonacci-sorozatban $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{12} = 144$ az összes négyzetszám.

A célunk tehát az, hogy ennek a tételnek egy speciális esetét bebizonyítsuk elemi módszerekkel. A levezetés során felhasználunk néhány ismertebb összefüggést, ezek közül most egyiket sem részletezzük, ezen állítások teljes indukcióval általában könnyen igazolhatók.

$$(4.5) \quad f_{2n} = f_n(2f_{n-1} + f_n).$$

$$(4.6) \quad (-1)^n = f_{n-1}^2 + f_n f_{n-1} - f_n^2.$$

Ha a 4.1.1. Tételből felhasználjuk, hogy a páratlan indexű Fibonacci-számok között csak $n = 1$ esetén kapunk négyzetszámot, akkor ebből – mint azt az alábbiakban látni fogjuk – a páros indexű eset már elintézhető, magyarul szólva a páratlan indexű eset valamivel „erősebb”. A továbbiakban a páros indexű eset bizonyításával foglalkozunk.

4.1.2. Állítás. *A páros indexű Fibonacci-számok között csak az $f_0 = 0$, az $f_2 = 1$, és az $f_{12} = 144$ négyzetszámok.*

Bizonyítás:

Világos, hogy $f_0 = 0$, $f_2 = 1$ és $f_{12} = 144$ valóban négyzetszámok. A továbbiakban tegyük fel, hogy $n \geq 13$. Ha $\exists t \in \mathbb{N}$, hogy $f_{2n} = t^2$, akkor tekintsük a minimális ilyen n természetes számot. (4.5)-ből egyszerűen belátható, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2,$$

ekkor tehát ezzel a t -vel teljesülnie kell, hogy

$$t^2 = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2.$$

A bizonyítás folytatásához szükségünk lesz egy lemmára.

4.1.3. Lemma. *Ha $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$, akkor $(f_{n+1}, f_{n-1}) = 1$.*

Bizonyítás:

Indirekt tegyük fel, hogy $(f_{n+1}, f_{n-1}) = d > 1$ lenne. Innen a Fibonacci-sorozat $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ képzési szabályából kapjuk, hogy $d \mid f_n$, vagyis $d \mid (f_n, f_{n-1}) = 1$. Ebből $d = 1$ adódik, ami ellentmond a feltevésünknek.

Ekkor viszont szükségképpen $(t, f_{n+1}) = 1$ és $(t, f_{n-1}) = 1$, hiszen ha például $(t, f_{n+1}) = s > 1$ lenne, akkor $t^2 = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$ -ből $s^2 \mid f_{n-1}^2$, végül pedig $s \mid f_{n-1}$ adódna. Amennyiben $s \mid f_{n+1}$ és $s \mid f_{n-1}$ egyszerre teljesülne, azt kapnánk, hogy $s \mid (f_{n+1}, f_{n-1}) = 1$, ami ismét ellentmond az előző lemmának. Vagyis (t, f_{n+1}, f_{n-1}) primitív pitagoraszai számhármasság, azaz $\exists u, v$ pozitív egészek, hogy $u \not\equiv v \pmod{2}$, $u > v$ és $(u, v) = 1$.

Két eset lehetséges:

I. eset:

$$\begin{aligned} f_{n-1} &= 2uv \\ t &= u^2 - v^2 \\ f_{n+1} &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

II. eset:

$$\begin{aligned}f_{n-1} &= u^2 - v^2 \\t &= 2uv \\f_{n+1} &= u^2 + v^2.\end{aligned}$$

Az első esetből kapjuk, hogy $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$, vagyis

$$f_n = u^2 + v^2 - 2uv = (u - v)^2.$$

Ha itt n páros lenne, akkor ez $n > 12$ miatt ellentmondana a kiindulási feltételnek, hogy ti. $2n$ a minimális index volt melyre f_{2n} négyzetszám. Ha n páratlan, akkor használjuk ki, hogy ez csak $f_1 = 1$ esetén teljesülhet.

A második esetben azt kapjuk, hogy

$$f_n = u^2 + v^2 - (u^2 - v^2) = 2v^2.$$

Használjuk Cassini eredményét, vagyis az

$$f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

formulát, melynek bizonyítása pl. (4.6) alapján könnyen adódik. Ekkor a második esetben lévő összefüggéseket beírva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(2v^2)^2 - (u^2 - v^2)(u^2 + v^2) &= (-1)^{n-1} \\4v^4 - (u^4 - v^4) &= (-1)^{n-1} \\5v^4 - u^4 &= (-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

Ezt modulo 5 vizsgálva u^4 csak 0 vagy 1 maradékot adhat 5-tel osztva, így az utolsó egyenlőségben csak -1 állhat a jobb oldalon. Ezt az egyenletet átalakítva:

$$u^4 - 5(v^2)^2 = 1.$$

4.1.4. Megjegyzés. J.H.E. Cohn: The Diophantine Equation $x^4 - Dy^2 = 1$ munkájában foglalkozik ilyen egyenletekkel ([3]). A szerző mélyebb matematikai apparátus segítségével kimutatta, hogy a fenti egyenleteknek legfeljebb két pozitív egész megoldása lehet, amelyek könnyen meghatározhatók. Mint ahogyan azt korábban is jeleztük, ennek a problémának egy speciális esetét szeretnénk elemi úton igazolni. Ebből már a 4.1.2. Állítás is következik. Természetesen az „ismertebb” eredményekre továbbra is bizonyítás nélkül fogunk hivatkozni, így az alábbi lemmára is (lásd [10]).

4.1.5. Lemma. *Az $x^4 \pm y^4 = z^2$ egyenlet nem oldható meg nullától különböző egészekben.*

4.1.6. Állítás. *Az $x^4 - 5y^4 = 1$ diofantikus egyenletnek a pozitív egész számok körében csak az $x = 3$ és $y = 2$ megoldása.*

Bizonyítás:

Az egyenlet mindkét oldalát modulo 16 tekintve kapjuk, hogy x páratlan és y páros. Ha $x = 1$, akkor $y = 0$, ezért a továbbiakban tegyük fel, hogy $x > 1$, illetve $(x, y) = 1$. Az egyenletet szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 5y^4.$$

Mivel y páros, ezért $y = 2k$ alakú, melyet visszaírva az egyenlőségbe, valamint figyelembe véve a bal oldali tényezők 4-gyel való lehetséges osztási maradékait a

$$\left(\frac{x^2 - 1}{8}\right) \left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) = 5k^4$$

összefüggést kapjuk. Mivel a bal oldalon szereplő tényezők már relatív prímek, ezért pontosan az egyikük lesz 5-tel osztható. Két esetet kell megvizsgálnunk:

I. eset:

$$\left(\frac{x^2 - 1}{40}\right) \left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) = k^4.$$

Ekkor léteznie kell olyan u_1 és v_1 relatív prím pozitív egészeknek, melyekre $x^2 - 1 = 40u_1^4$ és $x^2 + 1 = 2v_1^4$ teljesül. Ez utóbbit átalakítva kapjuk, hogy

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = (v_1^2)^2.$$

A primitív pitagoraszai számhármassokat felhasználva kapjuk, hogy léteznek különböző paritású $r_1, s_1, r_1 > s_1$ pozitív egészek, melyekre $\frac{x^2-1}{4} = 2r_1s_1(r_1^2-s_1^2)$. Ezt összevetve a korábbiakkal az

$$r_1s_1(r_1^2 - s_1^2) = 5u_1^4$$

egyenletet nyerjük. A bal oldalon szereplő tényezők páronként relatív prímek, ezért két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az 5 melyik tényezőnek osztója.

I/a. eset:

Ha alkalmas $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ pozitív egész számokkal:

$$\begin{aligned}\frac{r_1}{5} &= \alpha_1^4 \\ s_1 &= \beta_1^4 \\ r_1^2 - s_1^2 &= \gamma_1^4,\end{aligned}$$

akkor ebből az $(5\alpha_1^4)^2 = \gamma_1^4 + (\beta_1^4)^4$ egyenlőséget kapjuk, melynek a 4.1.5. Lemma miatt nincsen pozitív egészekben megoldása. (Teljesen hasonlóan kerülünk ellentmondásba a lemmával abban az esetben, ha s_1 osztható 5-tel.)

I/b. eset:

Ha pedig alkalmas $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ pozitív egész számokkal:

$$\begin{aligned}r_1 &= \alpha_2^4 \\ s_1 &= \beta_2^4 \\ r_1^2 - s_1^2 &= 5\gamma_2^4,\end{aligned}$$

akkor ebből az

$$\alpha_2^8 - \beta_2^8 = (\alpha_2^4 - \beta_2^4)(\alpha_2^4 + \beta_2^4) = 5\gamma_2^4$$

egyenlőséget kapjuk. Mivel az $\alpha_2^4 + \beta_2^4$ nem osztható 5-tel, ezért szükségképpen ennek a tényezőnek kellene teljes negyedik hatványnak lennie, ami a 4.1.5. Lemma miatt lehetetlen α_2, β_2 pozitív egészekkel.

II. eset:

Ha

$$\left(\frac{x^2 - 1}{8}\right) \left(\frac{x^2 + 1}{10}\right) = k^4,$$

akkor alkalmas u_2, v_2 pozitív egész számokkal $x^2 - 1 = 8u_2^4$ és $x^2 + 1 = 10v_2^4$.

Itt is két esetet kell megvizsgálnunk aszerint, hogy $x - 1$ és $x + 1$ közül melyik lesz 4-gyel is osztható.

II/a. eset:

Ha $\frac{x-1}{4} \cdot \frac{x+1}{2} = u_2^4$, akkor alkalmas α_3, β_3 pozitív egészekkel

$$\begin{aligned}x - 1 &= 4\alpha_3^4 \\ x + 1 &= 2\beta_3^4.\end{aligned}$$

A két egyenletet egymásból kivonva kapjuk, hogy $\beta_3^4 = 2\alpha_3^4 + 1$. Ekvivalens átalakítással ebből az

$$(\alpha_3^2)^4 + \beta_3^4 = (\alpha_3^4 + 1)^2$$

egyenlőséget kapjuk, melynek a 4.1.5. Lemma miatt nincsen megoldása a pozitív egész számok körében.

II/b. eset:

Ha $\frac{x-1}{2} \cdot \frac{x+1}{4} = u_2^4$, akkor alkalmas α_4, β_4 pozitív egészekkel

$$x - 1 = 2\alpha_4^4$$

$$x + 1 = 4\beta_4^4.$$

A két egyenletet egymásból kivonva kapjuk, hogy $\alpha_4^4 = 2\beta_4^4 - 1$. Ekvivalens átalakítással ebből az

$$(\beta_4^2)^4 - \alpha_4^4 = (\beta_4^4 - 1)^2$$

egyenlőséget kapjuk, melynek a 4.1.5. Lemma miatt nincsen megoldása a pozitív egész számok körében, ha $\beta_4 \neq 1$. Ha $\beta_4 = 1$, akkor $x = 3$, majd az eredeti egyenletből $y = 2$ adódik egyetlen pozitív megoldásként. Ezzel a 4.1.6. Állítás bizonyítását befejeztük. Ebből azonnal adódik a 4.1.2. Állítás is, hiszen az

$$u^4 - 5(v^2)^2 = 1$$

egyenlet egyetlen pozitív egész megoldása az előbbieket szerint $u = 3$ és $v = 2$. Innen

$$f_{n+1} = u^2 + v^2 = 13 \iff n = 6.$$

Ekkor tehát $f_{12} = 144$.

5. fejezet

Versenyfeladatok szakköri feldolgozása

5.1. Sokszínűség a módszerekben, feladatvariációk, általánosítások

5.1.1. Feladat. (*Matematika Tanítása 2010, 5. szám*)

Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 2$ egész szám esetén léteznek olyan x, y, z pozitív egész számok, amelyekre $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + 2^n$.

I. megoldás:

Az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 2^n$. Itt használjuk fel, hogy az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható. Ennek megmutatása céljából tekintsük az alábbi egyenlőséget:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0.$$

Ezt az egyenletet tekinthetjük x -ben harmadfokú egyenletnek is.

Az $(u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0$ azonosság alapján, ha sikerülne az u, v értékeket úgy megválasztani, hogy $-3uv = -3yz$ és $-(u^3 + v^3) = y^3 + z^3$ legyen, akkor $x = u + v$ megoldása lenne az egyenletnek. Könnyen látható, hogy az $u = -y$, $v = -z$ egy megfelelő választás, így az egyenletnek gyöke az $x = -y - z$. Ezzel

beláttuk, hogy az $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ -ből kiemelhető az $x + y + z$. Innen például a polinomosztási algoritmus segítségével találhatjuk meg a kívánt szorzat alakban való felírást, ami

$$(5.1) \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Megjegyezzük, hogy a kívánt szorzattá alakítás a Newton-Girard formulák segítségével is megkapható.

A megoldandó egyenlet tehát a következő:

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = 2^n.$$

Próbáljunk olyan megoldást találni, melyben pl. $y = z$. Ezt behelyettesítve:

$$(x + 2y)(x - y)^2 = 2^n.$$

Amennyiben n páros, úgy legyen $x = y + 1$. Ezt beírva kapjuk, hogy $3y + 1 = 2^n$, ahonnan $y = \frac{2^n - 1}{3}$. Látható, hogy ez megoldható pozitív egészekben, mert ha $n \geq 2$ páros, akkor $2^n - 1$ osztható 3-mal. Ha $n = 2k + 1$ alakú páratlan szám, úgy legyen $y = x + 1$. Ezt beírva $3x + 2 = 2^{2k+1}$. Innen $x = \frac{2(2^{2k} - 1)}{3}$. Ez az előbbieket szerint szintén pozitív egész számot szolgáltat x -re, így a feladat állítását bebizonyítottuk.

II. megoldás:

Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha léteznek n -re megfelelő $x, y, z > 0$ egészek, akkor $n + 3$ esetén is léteznek. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ esetén x, y, z olyan pozitív egészek, melyekre $x^3 + y^3 + z^3 = 2^n + 3xyz$. Ekkor $n + 3$ esetén $2x, 2y, 2z$ megfelelő, hiszen

$$(2x)^3 + (2y)^3 + (2z)^3 = 2^{n+3} + 3(2x)(2y)(2z).$$

Így elegendő belátni, hogy $n = 2$, $n = 3$ és $n = 4$ esetén létezik megoldás a pozitív egészek körében. Az $n = 2$ esetben $x = y = 1$, $z = 2$ megfelelő, ha $n = 3$, akkor $x = y = 3$, $z = 2$, míg $n = 4$ esetén $x = y = 5$, $z = 6$ megoldása az egyenletnek.

III. megoldás (általánosítás):

Azt fogjuk bebizonyítani, hogy $p \neq 3$ prímszám esetén, $n \geq 2$ -re léteznek olyan pozitív x, y, z egész számok, melyekre

$$x^3 + y^3 + z^3 = p^n + 3xyz.$$

Megmutatjuk továbbá, hogy az egyenletnek $p = 3$ esetén csak az $n \geq 3$ feltétel mellett létezik megoldása pozitív egész x, y, z számokban. Alakítsuk át az egyenlőséget az I. megoldásban látott azonosság segítségével.

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) = p^n.$$

Ha $p = 3$, akkor tekintsük az alábbi helyettesítéseket, ahol $u > 1$ egész:
 $x = u - 1, y = u, z = u + 1$. Az egyenlet ezt behelyettesítve a következő alakot ölti:

$$9u = 3^n \Rightarrow u = 3^{n-2} \quad n \geq 3.$$

Ekkor tehát $x = 3^{n-2} - 1, y = 3^{n-2}, z = 3^{n-2} + 1$ megoldása lesz az egyenletünknek. Ha $p = 3, n = 2$, akkor az egyenletnek nem létezik megoldása a pozitív egész számok körében. Nyilvánvaló, hogy ellenkező esetben az

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) = 9$$

egyenletnek mindkét tényezője pozitív egész kell, hogy legyen (könnyen belátható, hogy a második tényező $x = y = z$ esetén 0, egyébként pozitív), ezért csak azt az esetet kell vizsgálnunk, melyben

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz &= 1. \end{aligned}$$

A második egyenletet átalakítva, majd behelyettesítve az első egyenletet, kapjuk az alábbi

$$(x + y + z)^2 - 3xy - 3xz - 3yz = 1 \implies 3xy + 3yz + 3xz = 80.$$

Itt a bal oldal osztható 3-mal, míg a az egyenlet jobb oldala nem, tehát ebben az esetben az egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok körében. A továbbiakban tegyük fel, hogy $p > 3$ prímszám, valamint $n \geq 2$ egész. A kiindulási

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) = p^n$$

egyenletben próbáljunk olyan megoldást találni, melyben pl. $y = z$ teljesül. Ekkor

$$(x + 2y)(x - y)^2 = p^n.$$

Amennyiben $p = 3k + 1$ alakú prímszám, úgy legyen $y = x - 1$, ezzel azt kapjuk, hogy $3x - 2 = p^n$, ez pedig megoldható x -ben, hiszen $x = \frac{p^n+2}{3}$ pl. a binomiális tétel miatt biztosan egész szám. Ha $p = 3k - 1$ alakú prímszám és $n \geq 2$ páratlan szám, akkor legyen $y = x + 1$. Ekkor $3x + 2 = p^n$, ami a megadott feltételek szerint ismét megoldható pozitív egész x -ben. Végül, ha $p = 3k - 1$ alakú prím és n páros, úgy legyen ismét $y = x - 1$, mert ekkor a $3x - 2 = p^n$ egyenlet lesz megoldható a feltételeinknek megfelelően.

IV. megoldás (általánosítás):

Azt fogjuk megmutatni, hogy általában az $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = c$ egyenletnek, ahol $c \in \mathbb{Z}$, akkor és csak akkor létezik egész megoldása, ha $(c, 3) = 1$, vagy $9 \mid c$. A szükségességhez tegyük fel, hogy az egyenletnek létezik x, y, z egészekből álló megoldása, majd vizsgáljuk meg az egyenlet bal oldalán szereplő változók 3-as maradékát. Ehhez tekintsük az alábbi táblázatot. Szimmetria okok miatt elegendő a táblázatban szereplő esetekkel foglalkozni. Bármely eset bizonyítása történhet pl. a binomiális tétel segítségével.

0	0	0	$9k$
0	0	1	$3k + 1$
0	0	-1	$3k - 1$
0	1	1	$3k - 1$
0	-1	-1	$3k + 1$
0	1	-1	$9k$
1	1	1	$9k$
1	1	-1	$3k + 1$
1	-1	-1	$3k - 1$
-1	-1	-1	$9k$

Jól látható, hogy amennyiben léteznek x, y, z egész számok, melyekre az egyenlőség teljesül, $(c, 3) = 1$, vagy $9 \mid c$.

Az elégségesség bizonyítása az előzőekhez hasonlóan történhet. Tegyük fel, hogy $(c, 3) = 1$, vagy $9 \mid c$ teljesül. Írjuk fel a diofantikus egyenletet

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz) = c$$

alakban. Az $y = z$ helyettesítés után kapjuk, hogy $(x+2y)(x-y)^2 = c$. Ha $c = 3k+1$ alakú, akkor követeljük meg még azt is, hogy $x - y = 1$ legyen. Ekkor $3y + 1 = c$,

vagyis $y = \frac{c-1}{3}$. Ha $c = 3k - 1$ alakú, akkor az $x - y = -1$ -et írjuk elő, ahonnan a $3y - 1 = c$, majd az $y = \frac{c+1}{3}$ megoldást kapjuk. Végül, ha c osztható 9-cel, akkor legyen $x = y - 1$, $z = y + 1$. Ezt beírva az egyenletbe a $9y = c$ -t kapjuk, vagyis az egyenlet ebben az esetben is megoldható az x, y, z egészekben.

5.1.2. Megjegyzés. A diofantikus egyenletek tanítása során érdemes megvizsgálni az $x^n + y^n + z^n = nxyz$ (ahol $x, y, z \in \mathbb{N}$ és $n \geq 1$ egész) egyenletet, illetve ennek az egyenletnek különféle variánsait. Az $n = 1, 2, 3, 4$ speciális esetek vizsgálata során számos módszert, ötletet sajátíthatnak el a tanulók, melyet aztán sikerrel alkalmazhatnak hasonló feladatsituációkban.

5.1.3. Feladat. *Oldjuk meg az $x + y + z = xyz$ diofantikus egyenletet a természetes számok halmazán!*

Megoldás:

Ha $xyz = 0$, akkor nyilván $x = y = z = 0$. Ha egyik változó sem 0, akkor szimmetria okok miatt feltehető, hogy $0 < x \leq y \leq z$. Ekkor $xyz \leq 3z$, ahonnan $xy \leq 3$. Innen a lehetséges esetek kipróbálásával az $x = 1, y = 2, z = 3$ értékek adódnak megoldásként. (A változók felcserélésével kapott számhármassokat nem tekintjük lényegesen különböző megoldásoknak.)

5.1.4. Feladat. *Oldjuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ diofantikus egyenletet a természetes számok halmazán!*

I. megoldás:

Ha $xyz = 0$, akkor nyilván $x = y = z = 0$. Ha egyik változó sem 0, akkor tegyük fel, hogy léteznek olyan x, y, z egész számok, melyekre az egyenlőség teljesül. Az x, y, z számok mindegyike nem lehet páratlan, hiszen ekkor a bal oldalon egy páratlan szám áll, míg a jobb oldalon páros. Nem lehet a számok között egy páratlan, valamint két páros, az előző okok miatt. Nem lehet azonban két páratlan és egy páros sem, hiszen ekkor az egyenlet bal oldala 4-gyel osztva 2 maradékot ad, a jobb oldal pedig 0 maradékot. Az egyenlet tehát csak abban az esetben teljesülhet, ha minden változó értéke páros. Legyen alkalmas x_1, y_1, z_1 0-tól különböző egész számokkal $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, valamint $z = 2z_1$. Az egyenletbe behelyettesítve az

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$$

egyenletet kapjuk. Az előzőek mintájára megmutatható, hogy az x_1, y_1, z_1 egészek valamennyien páros számok. Ezt folytatva viszont az x_k, y_k, z_k egész számok egy végtelen sorozatát kapjuk, melyre pl.

$$|x| > |x_1| > |x_2| > \dots > |x_k| > \dots \quad .$$

Ez viszont ellentmondás, hiszen $|x_i| > 0$ kellene, hogy legyen minden pozitív egész i -re. Pozitív egész számoknak nem létezik végtelen sok elemből álló szigorúan monoton csökkenő sorozata.

II. megoldás:

Az előző megoldás szerint x, y, z valamennyien páros számok, ezért $x = 2^\alpha \cdot x_1, y = 2^\beta \cdot y_1, z = 2^\gamma \cdot z_1$. Az x_1, y_1, z_1 számok itt már valamennyien páratlanok. Az egyenletben x, y, z szerepe szimmetrikus, ezért feltehető, hogy $1 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$. A fenti kifejezéseket az egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$2^{2\alpha} [x_1^2 + 2^{2\beta-2\alpha} \cdot y_1^2 + 2^{2\gamma-2\alpha} \cdot z_1^2] = 2^{\alpha+\beta+\gamma+1} \cdot x_1 y_1 z_1 .$$

Ha $\alpha = \beta = \gamma$, akkor az egyenlet bal oldala $2^{2\alpha}$ -nal osztható, míg a jobb oldal $2^{3\alpha+1}$ -gyel. Ha $\alpha = \beta < \gamma$, akkor az egyenlet bal oldala 2-nek pontosan a $2\alpha + 1$ -edik hatványával lesz osztható, míg a jobb oldal $2\alpha + \gamma + 1$ -gyel.

Ha $\alpha < \beta = \gamma$, akkor az előzőhöz hasonlóan hozható ki az ellentmondás, míg abban az esetben, ha $\alpha < \beta < \gamma$, akkor a bal oldal ismét csak $2^{2\alpha}$ -nal lesz osztható, ami kisebb, mint $\alpha + \beta + \gamma + 1$.

III. megoldás:

A korábbi megoldások értelmében ismét elegendő a megoldhatatlanságot igazolni pozitív egészek esetén. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $0 < x \leq y \leq z$ és $z \leq xy$, ugyanis ha pl. x, y, z és $z > xy$ esetén teljesülne az $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ egyenlőség, akkor $z > 2xy - z$ miatt $z' = 2xy - z$ választással x, y, z' esetén is teljesülne, hiszen

$$x^2 + y^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + (2xy - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 4xyz + 4x^2y^2 = 2xy(2xy - z) = 2xyz' .$$

Ha az így kapott új számok közül még mindig van olyan, amelyik nagyobb, mint a másik kettő szorzata, akkor ismételjük meg az eljárást. (Legfeljebb véges sok lépés

után az eljárásunk befejeződik.) Az $x^2 + y^2 + (xy - z)^2 = x^2y^2$ összefüggésből az $x^2 + y^2 + (xy - y)^2 \geq x^2y^2$ becslést kapjuk. Ezt kibontva, valamint $x \leq y$ -t felhasználva a $2xy^2 \leq 3y^2$ egyenlőtlenséget nyerjük, ahonnan $x \leq 1$. Pozitív egész megoldást csak $x = 1$ esetén kapnánk, ekkor viszont $1 + y^2 + z^2 = 2yz$ adódik, ami ekvivalens az $1 + (y - z)^2 = 0$ egyenlettel, mely megoldhatatlan a valós számok körében.

5.1.5. Megjegyzés. Az 5.1.3. Feladat példája mutatja, hogy bizonyos diofantikus egyenletek jól kezelhetők a változókra tett becslések segítségével. Érdekes a tanulók figyelmét felhívni arra, hogy az ilyen jellegű becslések hatékony alkalmazása általában függ az alaphalmaztól. A problémát általánosíthatjuk n változóra is, valamint megvizsgálhatjuk három változó esetén úgy, hogy a megoldásokat az egész számok körében keressük. Az 5.1.4. Feladat esetében először tulajdonképpen a végtelen lezárlás módszerének egy variánsát használtuk, ez a fajta okoskodás egyáltalán nem magától értetődő a tanulónak, ezért érdemes szerepeltetni. Középiskolás versenyeken általában normál gimnáziumi osztályban ez a típus kevésbé fordul elő, helyette inkább a teljes indukcióval találkozhatnak a diákok. A feladat második megoldása is egy gyakorta alkalmazott fogás, nevezetesen, hogy egy egész számból válasszuk le a legnagyobb kettőhatvány osztóját. A példa egyébként könnyen általánosítható, egy ilyen általánosítást olvashatunk Jaglom-Sklarszkij-Csencov: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I. című könyvében. A III. megoldásban szereplő ötlet segítségével belátható, hogy az

$$(5.2) \quad x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$$

diofantikus egyenletnek csak $k = 1$ és $k = 3$ esetén létezik pozitív egészekből álló megoldása.

5.1.6. Feladat. *Oldjuk meg az $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ diofantikus egyenletet a természetes számok halmazán!*

Megoldás:

A megoldás kulcsa az (5.1) szorzattá alakítás. Kapjuk, hogy

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = 0.$$

Az $x = y = z = 0$ nyilván megoldás, ha pedig valamelyik változó nullától különböző, akkor csak a második tényező adhat nullát. Az $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 0$ egyenletet

2-vel szorozva teljes négyzeteket alakíthatunk ki. Ekkor $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$, ennek pedig csak az $x = y = z$ esetén van megoldása. Az egyenlet összes megoldása így $x = y = z$, ahol $x, y, z \in \mathbb{N}$.

5.1.7. Megjegyzés. Az 5.1.6. Feladat megoldása lényegében változtatás nélkül elmondható lett volna akkor is, ha az egyenletet a pozitív valós számok körében lévőnek tekintjük. A diákok nem csak versenyeken, de még tanórán is könnyen találkozhatnak olyan egyenlettel, mely a valós számkörben, több változóval van kitűzve. Ezek a feladatok sokszor vezetnek a négyzetösszeg egyenlő 0 alakra, vagy bizonyítható, hogy az egyenlőség két oldalán szereplő kifejezések csak jól meghatározható esetekben lehetnek egyenlők. A levezetés során használt szorzattá alakítás is egy kedvelt trükk a versenyeken, mely legtöbbször nem direktben, hanem „elbújtatva” jelenik meg.

5.1.8. Feladat. *Oldjuk meg az $x^4 + y^4 + z^4 = 4xyz$ diofantikus egyenletet a természetes számok halmazán!*

Megoldás:

Itt is becslést fogunk alkalmazni, de más jellegűt, mint az 5.1.3. Feladat kapcsán. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$\sqrt[3]{x^4 y^4 z^4} \leq \frac{x^4 + y^4 + z^4}{3} = \frac{4}{3}xyz,$$

mely ekvivalens az $xyz \leq \frac{64}{27}$ egyenlőtlenséggel. Ha $xyz = 0$, akkor nyilván csak az $x = y = z = 0$ megoldás. Ha $xyz \neq 0$, akkor az fentiek miatt csak az $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$ számhármassok jöhetnek szóba, de ezek nem megoldásai az egyenletnek.

5.1.9. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy létezik végtelen sok x, y pozitív egész szám úgy, hogy $x \mid y^2 + 1$, valamint $y \mid x^2 + 1$.*

Megoldás:

A feladat állításánál valamivel többet bizonyítunk be. A feltétel ekvivalens a következővel: $x \mid x^2 + y^2 + 1$, és $y \mid x^2 + y^2 + 1$. Mivel $(x, y) = 1$, ezért $xy \mid x^2 + y^2 + 1$, azaz alkalmas z pozitív egész számra $x^2 + y^2 + 1 = xyz$. Megmutatjuk, hogy ennek az egyenletnek csak $z = 3$ esetén van megoldása a pozitív egész számok körében, és ekkor végtelen sok megoldás létezik. Ha $z \neq 3$, akkor $x \neq y$, hiszen $x = y$ esetén

$2x^2 + 1 = x^2z$, vagyis $x^2(z - 2) = 1$, mely csak $z = 3$ esetén teljesülhet. Tegyük fel tehát, hogy pl. $x > y$ és alakítsuk át az egyenlőséget:

$$x^2 + y^2 - xyz + 1 = (x - yz)^2 + xyz - y^2z^2 + y^2 + 1 = (yz - x)^2 + y^2 - (yz - x)yz + 1 = 0.$$

Ez utóbbi átalakítás azt mutatja, hogy ha az (x, y, z) megoldása az egyenletnek, akkor az $(yz - x, y, z)$ is megoldás lesz. Ha belátjuk, hogy $0 < yz - x < x$, akkor a végtelen leszállás módszerével adódik, hogy nem létezik megoldás a pozitív egész számok körében. Ez pedig valóban így van, hiszen

$$xyz > x^2 + y^2 > x^2 > 0 \implies x(yz - x) > 0,$$

valamint

$$xyz = x^2 + y^2 + 1 < 2x^2 + 1 \implies xyz \leq 2x^2 \implies yz \leq 2x.$$

Itt $yz = 2x$ nem lehetséges, mert ebből behelyettesítés után az $y^2 + 1 = x^2$ egyenlethez jutunk, melynek nincs a feltételeket kielégítő megoldása. Ezzel beláttuk, hogy ha létezik megoldás a pozitív egész számok körében, akkor $z = 3$.

Vizsgáljuk most a $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$ egyenletet. Az előző átalakítást véve itt az adódik, hogy ha (x, y) megoldás, akkor $(*) (3y - x, y)$ is megoldás lesz, de az egyenlet szimmetrikus, ezért $(y, 3y - x)$ is megoldása az egyenletnek. Az $(1, 1)$ pár megoldás, az előzőek szerint az $(1, 2)$, $(2, 5)$ stb. is megoldás lesz. (A rekurziót folytatva láthatóan Fibonacci-számok jelennek meg.) Valóban, (f_{2n-1}, f_{2n+1}) ($n \geq 1$) pontosan akkor megoldása az $x^2 + y^2 + 1 = 3xy$ egyenletnek, ha

$$f_{2n-1}^2 + f_{2n+1}^2 + 1 = 3f_{2n-1}f_{2n+1}$$

teljesül. Az egyenlőségből ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy

$$(f_{2n+1} - f_{2n-1})^2 = f_{2n+1}f_{2n-1} - 1$$

$$f_{2n}^2 = (f_{2n} + f_{2n-1})f_{2n-1} - 1$$

$$f_{2n}^2 = f_{2n}f_{2n-1} + f_{2n-1}^2 - 1.$$

Ez utóbbi pedig (4.6)-ból következik n helyén $2n$ -nel.

5.1.10. Megjegyzés. Az előző feladatban szereplő $(*)$ transzformáció talán nem magától értetődő, így mindenképpen hasznos lehet, ha a tanulókkal megbeszéljük, hogyan kereshetnek önállóan alkalmas helyettesítést.

Legyen (x, y) egy megoldása az $x^2 - 3xy + y^2 = -1$ egyenletnek, és legyen $X = ax + by$, $Y = cx + dy$, ahol a, b, c és d a későbbiekben alkalmasan választott egész számok. Ekkor (X, Y) pontosan akkor lesz megoldás, ha

$$(ax + by)^2 - 3(ax + by)(cx + dy) + (cx + dy)^2 = -1$$

teljesül, melyből kibontás és kiemelés után kapjuk, hogy

$$(a^2 - 3ac + c^2)x^2 + (b^2 - 3bd + d^2)y^2 + (2ab + 2cd - 3ad - 3bc)xy = -1.$$

Ha itt a, b, c és d értékét sikerül úgy megválasztanunk, hogy

$$a^2 - 3ac + c^2 = 1$$

$$b^2 - 3bd + d^2 = 1$$

$$2ab + 2cd - 3ad - 3bc = -3$$

legyen, akkor $X^2 - 3XY + Y^2 = -1$ valóban teljesül. Egy ilyen választás lehet pl. $a = 3$, $b = -1$, $c = 1$ és $d = 0$. Így $X = 3x - y$ és $Y = x$.

Amennyiben korábban beszéltünk másodrendű rekurziókról, úgy szerencsés esetben a diákok maguk is sikerrel írhatják fel a rekurziós összefüggést, melyet megoldva egy más úton juthatunk el a Fibonacci-számokhoz.

Legyen $x_1 = 1$ és $y_1 = 1$, valamint $n \geq 1$ esetén $x_{n+1} = 3x_n - y_n$ és $y_{n+1} = x_n$.

Innen az $x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$ ($n \geq 2$) rekurziós összefüggést kapjuk, melynek a karakterisztikus egyenlete $w^2 - 3w + 1$. Ennek gyökei $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, vagyis alkalmas α és β valós számokkal

$$x_n = \alpha \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

A képletet a rekurziós összefüggés szerint kiszámított elemekkel összevetve, és az egyenletrendszert megoldva az $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ és $\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ értékek adódnak. Ezt visszaírva

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n-1} \right] = f_{2n-1}. \end{aligned}$$

Természetesen y_n is Fibonacci-szám lesz, hiszen $y_n = x_{n-1} = f_{2n-3}$.

Az, hogy az $x^2 - 3xy + y^2 = -1$ diofantikus egyenletnek végtelen sok pozitív egész megoldása van, egy egészen más megközelítésben is tárgyalható. Ehhez az eredeti egyenlőséget szorozzuk meg 4-gyel, és alkalmazzunk teljes négyzetté alakítást az egyenlet bal oldalán. Kapjuk, hogy $(2x - 3y)^2 - 5y^2 = -4$. Így egy Pell-egyenlet adódik, melynek végtelen sok pozitív egész megoldását fel tudjuk írni a már korábban látott módszer segítségével. Ha a $(2 - \sqrt{5})(2 + \sqrt{5}) = -1$ egyenlőséget n -edik hatványra emeljük, ahol $n > 0$ páratlan egész szám, elvégezve a hatványozást majd összevonva a tisztán racionális és irracionális tagokat, egy $(a_n - \sqrt{5}b_n)(a_n + \sqrt{5}b_n) = -1$ alakú összefüggéshez jutunk. Ha ezt az egyenlőséget megszorozzuk a $(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 4$ felbontással, akkor

$$\left(3a_n + 5b_n - (a_n + 3b_n)\sqrt{5} \right) \left(3a_n + 5b_n + (a_n + 3b_n)\sqrt{5} \right) = -4.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $2x - 3y = 3a_n + 5b_n$ és $y = a_n + 3b_n$, ezekből kapjuk, hogy $(x, y) = (3a_n + 7b_n, a_n + 3b_n)$ megoldása lesz az eredeti egyenletnek.

5.1.11. Feladat. (Arany Dániel Matematikaverseny 2005)

Határozzuk meg azokat az egész számokból álló (x, y) számpárokat, melyek kielégítik a következő egyenletet

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3.$$

I. megoldás:

Az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$8(x+1)(x^2+2x+2) = y^3.$$

Az $y = 2Y$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$(5.3) \quad (x+1) \left[(x+1)^2 + 1 \right] = Y^3.$$

Az $x = -1$ és $y = 0$ nyilván megoldás, illetve a bal oldalon szereplő tényezők relatív prímekek, ezért alkalmas u, v relatív prím egészekkel

$$\begin{aligned} x+1 &= u^3 \\ (x+1)^2 + 1 &= v^3. \end{aligned}$$

Ebből az $u^6 + 1 = v^3$ egyenlőség adódik, mely csak az $u = 0$ és $v = 1$ esetén teljesül. Ezekből pedig a már korábban megtalált $x = -1$ és $y = 0$ megoldás adódik.

II. megoldás:

Az (5.3)-ban legyen $X = x+1$. Megmutatjuk, hogy az $X^3 + X = Y^3$ egyenletnek $X = Y = 0$ az egyetlen egész megoldása. Ha $X > 0$, akkor az $X^3 < X^3 + X < (X+1)^3$ egyenlőtlenség is teljesülne, ami lehetetlen, mert akkor Y^3 két szomszédos köbszám közé esne. Vegyük észre, hogy ha (X, Y) teljesíti az egyenlőséget, úgy $(-X, -Y)$ is gyöke lesz az egyenletnek. Ebből következik, hogy olyan (X, Y) megoldás sem létezhet, ahol $X < 0$. Az $X = 0$ esetben adódnak az első megoldásban kapott értékek.

III. megoldás:

A feladat egy lehetséges általánosításaként oldjuk meg az alábbi feladatot.

5.1.12. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenletet, ahol $x, y \in \mathbb{Z}$, $x > y$, $x \equiv y \pmod{2}$, illetve $(x, y) = 1$, vagy $(x, y) = 2$.*

$$x^4 - y^4 = z^3.$$

Megoldás:

Az egyenlet bal oldalát alakítsuk szorzattá felhasználva, hogy x és y azonos paritásúak.

$$\frac{x-y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \cdot \left[\left(\frac{x-y}{2} \right)^2 + \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \right] = Z^3.$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $a = \frac{x-y}{2}$ és $b = \frac{x+y}{2}$.

I. eset:

Ha $(x, y) = 1$, akkor $(a, b) = 1$ is teljesül, vagyis alkalmas α, β és γ egész számokkal

$$\begin{aligned}a &= \alpha^3 \\b &= \beta^3 \\a^2 + b^2 &= \gamma^3.\end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből kapjuk, hogy $\alpha^6 + \beta^6 = \gamma^3$, melynek a Fermat-sejtés 3-as kitevőre vonatkozó esete miatt csak $\alpha = 0$, vagy $\beta = 0$ esetén van egész megoldása. Az $x > y$ feltétel miatt csak $\beta = 0$ lehetséges, melyből $x + y = 0$ adódik. Mivel $(x, y) = 1$, ezért ebben az esetben az $x = 1$ és $y = -1$ értékek adnak megoldást.

II. eset:

Ha $(x, y) = 2$, akkor legyen $x = 2m$ és $y = 2n$, ahol $m > n$ és $(m, n) = 1$. Ekkor az

$$(m - n)(m + n) [(m - n)^2 + (m + n)^2] = Z^3$$

felírásban m és n nem lehetnek különböző paritásúak, mert akkor a bal oldal 4-es maradéka 2 lenne, míg egy köbszám nem adhat 4-gyel osztva 2 maradékot. Ha m és n páratlanok, akkor

$$\frac{m - n}{2} \cdot \frac{m + n}{2} \cdot \left[\left(\frac{m - n}{2} \right)^2 + \left(\frac{m + n}{2} \right)^2 \right] = \widehat{Z}^3.$$

Az előzőekben látott módon kapjuk meg ebben az esetben az $x = 2$ és $y = -2$ értékeket.

5.1.13. Megjegyzés. Ha az x és y változókra nem írunk elő feltételt, akkor könnyen találhatunk végtelen sok nem-triviális egész megoldást. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned}x &= n(n^4 - 1)^2 \\y &= (n^4 - 1)^2 \\z &= (n^4 - 1)^3\end{aligned}$$

minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén megoldás.

5.1.14. Feladat. (OKTV 2004)

Adja meg az összes olyan n természetes számot, amelyre a $3^n + 63$ kifejezés értéke négyzetszám!

Megoldás:

Azonnal látszik, hogy $n = 0$ megoldás, $n = 1$ pedig nem. A továbbiakban tegyük fel, hogy $n \geq 2$. Ha létezne olyan x egész szám, melyre $3^n + 63 = x^2$, akkor a feltétel miatt $3^{n-2} + 7$ -nek is négyzetszámmá kell lennie. Ez csak akkor teljesülhet, ha a kitevő páros, mert ellenkező esetben $(\text{mod } 4)$ azt kapnánk, hogy egy négyzetszám 2 maradékot ad, ami lehetetlen. Ha $n - 2$ páros, akkor

$$\left(3^{\frac{n-2}{2}} - x\right) \cdot \left(3^{\frac{n-2}{2}} + x\right) = -7.$$

A lehetséges felbontásokat megvizsgálva, majd a bal oldalon szereplő tényezőket összeadva kapjuk, hogy $2 \cdot 3^{\frac{n-2}{2}} = 6$, melyből $n = 4$ adódik egy újabb megoldásként.

5.1.15. Megjegyzés. Ha a bal oldalon $c = 63$ helyett más konstans írunk, akkor a Mordell-egyenletekhez hasonlóan egészen változatos nehézségű problémákkal találkozhatunk. A továbbiakban két ilyen konstans vizsgálunk részletesebben, a $c = -1$ és $c = -2$ esetet.

A $c = -1$ esetben rögtön általánosíthatjuk is a problémát.

5.1.16. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenletet, ahol $x, n > 0$ és $k > 1$ egész számok.*

$$3^n - 1 = x^k.$$

Megoldás:

Feltehető, hogy $n \geq 2$, mert $n = 1$ nem ad megoldást. Mindkét oldalt $(\text{mod } 3)$ vizsgálva látható, hogy k -nak páratlannak kell lennie, ezért a továbbiakban legyen $k \geq 3$. Az egyenletet átrendezve és szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$3^n = (x + 1) (x^{k-1} - x^{k-2} + \dots - x + 1).$$

A jobb oldalon szereplő tényezők 3-hatványok, és $x \geq 2$ miatt a második nagyobb az elsőnél, vagyis az első tényező osztója lesz a másodiknak. Alakítsuk át a második tényezőt:

$$x^{k-1} - x^{k-2} + \cdots - x + 1 = (x^{k-1} - 1) - (x^{k-2} + 1) + \cdots - (x + 1) + k.$$

Kapjuk, hogy $x + 1 \mid k$, vagyis $3 \mid k$. Ha $k = 3m$, akkor az eredeti egyenlet átírható a következő alakra:

$$3^n = x^{3m} + 1 = (x^m)^3 + 1 = X^3 + 1.$$

Az előző gondolatmenetet megismételve kapjuk, hogy $X + 1 = 3^l$, ahol $l \geq 1$. Ezt az eredeti egyenlőségbe helyettesítve a $3^n = 3^{3l} - 3^{2l+1} + 3^{l+1}$ összefüggés adódik. Figyelembe véve nagyságrendi megfontolásokat, kapjuk, hogy ha $l > 1$, akkor

$$3^{3l-1} < 3^{3l} - 3^{2l+1} + 3^{l+1} < 3^{3l}.$$

Az eredeti egyenletnek ezért csak $l = 1$ esetén lehet megoldása, ami valóban megfelelő, hiszen ekkor $x = 2$, $n = 2$ és $k = 3$.

5.1.17. Feladat. *Adjuk meg az összes olyan n természetes számot, amelyre a $3^n - 2$ kifejezés értéke négyzetszám!*

I. megoldás:

Az $n = 1$ és $n = 3$ megoldás. Megmutatjuk, hogy más megoldás nincs. A továbbiakban feltehető, hogy $n \geq 5$ páratlan szám, mert páros kitevő esetén (mod 4) ellentmondásra jutnánk. Ha $n = 2k + 1$, akkor a $3^{2k+1} - 2 = x^2$ egyenlőséget átrendezve az

$$x^2 - 3 \cdot (3^k)^2 = -2$$

egyenlet adódik. A számolást itt nem részletezve megmutatható, hogy az $x^2 - 3y^2 = -2$ egyenlet összes megoldását megkaphatjuk úgy, hogy (a szokásos szorzatalakban felírt) egy megoldást végigszorozunk az $x^2 - 3y^2 = 1$ megoldásaival. Ez utóbbi megoldásai felírhatóak az alapmegoldásból rekurzió segítségével is, mely azt jelenti, hogy a Pell-egyenletünkben szereplő y változóra is kaphatunk rekurziós összefüggést; $y_1 = 1$, $y_2 = 3$ és $y_{n+2} = 4y_{n+1} - y_n$. Azt fogjuk bizonyítani, hogy ha $k \geq 2$, akkor y nem lehet 3-hatvány.

Készítsünk $(\text{mod } 9)$ és $(\text{mod } 17)$ maradéktáblázatot!

	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_n	$(\text{mod } 9)$	1	3	2	5	0	4	7	6	8	8	6	7
y_n	$(\text{mod } 17)$	1	3	11	7	0	10	6	14	16	16	14	6

	n	13	14	15	16	17	18	19	20
y_n	$(\text{mod } 9)$	4	0	5	2	3	1	1	3
y_n	$(\text{mod } 17)$	10	0	7	11	3	1	1	3

A táblázatból kiolvasható, hogy y_n a $9l+5$ ($l \geq 0$) alakú indexekre osztható 9-cel, de ekkor 17-tel is osztható, így nem lehet 3-hatvány.

5.1.18. Megjegyzés. Diofantikus egyenletek vizsgálata során gyakran használunk különféle modulo m maradékosztályokat. Kisebb m -ek esetén könnyű dolgunk van, nagyobb m értékekre azonban érdemes segítségül hívni valamelyik matematikai szoftvert a számolási nehézségek leküzdésére. Jelen dolgozat szerzője a Maple-t használta a megfelelő maradékosztályok megtalálásakor. (A szoftver alkalmazásra került az 5.1.31. Feladat megoldása során is.) A program egyébként kiválóan alkalmazható a tanítási gyakorlatban, a diákok körében nagyon népszerű, sokszor otthon maguk is szívesen kísérleteznek a programcsomag nyújtotta lehetőségekkel.

A feladat második megoldása során felhasználunk egy lemmát, melynek bizonyítása megtalálható pl. a [10] könyv 669. oldalán.

5.1.19. Lemma. *Az $x^3 - 2 = y^2$ egyenletnek az egész számok körében csak az $x = 3$ és $y = \pm 5$ megoldása.*

II. megoldás:

$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ -ben szorzattá alakítva a $3^n = x^2 + 2$ egyenlőséget, kapjuk, hogy

$$(1 + \sqrt{-2})^n \cdot (1 - \sqrt{-2})^n = (x + \sqrt{-2})(x - \sqrt{-2}) .$$

A jobb oldalon szereplő tényezők relatív prímek, ellenkező esetben x és így $x^2 + 2 = 3^n$ páros lenne. Ezért

$$x + \sqrt{-2} = \pm (1 \pm \sqrt{-2})^n .$$

A jobb oldalon alkalmazzuk a binomiális tételt, majd hasonlítsuk össze a képzetes részeket. Rövid számolás után látható, hogy a négyféle előjel kiosztási lehetőség közül csak kettő lényegesen különböző (pl. $++$, $+-$), így

$$(5.4) \quad \pm 1 = \binom{n}{1} - 2\binom{n}{3} + \cdots + (-2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Az (5.4) egyenlet jobb oldalán lévő kifejezésre az $(1 + \sqrt{-2})^n = a_n + b_n\sqrt{-2}$ kifejtésből kaphatunk rekurziót. A $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ és $b_{n+2} = 2b_{n+1} - 3b_n$ összefüggés alapján készítsünk egy $(\text{mod } 9)$ maradéktáblázatot!

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$b_n \pmod{9}$	1	2	1	-4	-2	-1	4	2	1

A táblázatból látható, hogy b_n 9-es maradéka csak akkor lesz ± 1 , ha $n = 1$, vagy n osztható 3-mal. Az 5.1.19. Lemma alapján a korábbiakban szereplő megoldások adódnak.

5.1.20. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ahol $y, z > 0$ egész számok, p prímszám.

$$\begin{aligned} p - 1 &= y^2 \\ 2p^2 &= z^2 + 1. \end{aligned}$$

I. megoldás:

Feltehető, hogy $p \geq 5$ és $y \neq z$, mert ellenkező esetben nem kapunk megoldást. Mindkét egyenletet $(\text{mod } p)$ véve

$$\begin{aligned} y^2 &\equiv -1 \pmod{p} \\ z^2 &\equiv -1 \pmod{p} \end{aligned}$$

adódik, melyből

$$y^2 \equiv z^2 \pmod{p} \Rightarrow y \equiv \pm z \pmod{p}.$$

Megmutatjuk, hogy $p \mid y+z$ nem teljesülhet. Ehhez tekintsük az alábbi egyenlőtlenség láncot:

$$p < \sqrt{p-1} + p < y + z < \sqrt{p-1} + \sqrt{2}p < 2p.$$

Ez nyilvánvaló, hiszen $p \geq 3$ esetén $\sqrt{p-1} < 0,5p$. A $p \mid y - z$ is csak abban az esetben teljesülhet, ha $y - z = -p$, mert

$$-2p < \sqrt{p-1} - \sqrt{2p} < y - z < 0.$$

Az $y - z = -p$ azt jelenti, hogy $\sqrt{p-1} - \sqrt{2p^2-1} = -p$. Az egyenlőséget átalakítva a $p^2 - 6p + 5 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, melynek $p = 5$ az egyetlen prímszám megoldása. Ez valóban megoldása az eredeti egyenletrendszernek, hiszen ekkor $y = 2$ és $z = 7$.

II. megoldás (általánosítás):

5.1.21. Feladat. *Oldjuk meg a pozitív egész számok körében az alábbi egyenletrendszert.*

$$\begin{aligned} x - 1 &= y^2 \\ 2x^2 &= z^2 + 1. \end{aligned}$$

Az első egyenletből x -et kifejezve, majd a második egyenlőségbe helyettesítve: $2(y^2 + 1)^2 = z^2 + 1$. Ez utóbbi ekvivalens a

$$\left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z+1}{2}\right)^2 = (y^2 + 1)^2$$

egyenlettel.

A szokásos módon kapjuk, hogy léteznek különböző paritású relatív prím $u > v > 0$ egészek, hogy

$$\begin{aligned} y^2 + 1 &= u^2 + v^2 \\ u^2 - v^2 - 2uv &= \pm 1. \end{aligned}$$

Ha $u^2 - v^2 - 2uv = -1$, akkor $u^2 - v^2 - 2uv = -(u^2 + v^2 - y^2)$. Ebből az $y^2 = 2u(u-v)$ egyenlőséget kapjuk. Mivel $u-v$ páratlan és $(u, u-v) = 1$, ezért léteznek α, β relatív prím pozitív egészek úgy, hogy $u = 2\alpha^2$, $u-v = \beta^2$ és $y = 2\alpha\beta$. Helyettesítés után kapjuk, hogy

$$(5.5) \quad 4\alpha^2\beta^2 + 1 = (2\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^4.$$

A zárójeleket felbontva α^2 -ben másodfokú egyenlethez jutunk, melynek diszkriminánsa teljes négyzet. Ekkor $32\beta^4 + 32 = \gamma^2$, vagyis $\gamma = 8\delta$ jelöléssel $\beta^4 + 1 = 2\delta^2$. Ez utóbbi egyenlet ekvivalens a

$$\delta^4 - \beta^4 = \left(\frac{\beta^4 - 1}{2}\right)^2$$

egyenlőséggel. Ismeretes (lásd pl. [10]), hogy két negyedik hatvány különbsége csak a triviális (valamelyik változó 0) esetben lehet négyzetszám, ezért esetünkben a $\frac{\beta^4 - 1}{2} = 0$, azaz $\beta = 1$ adódik. Visszahelyettesítve kapjuk, hogy $\alpha = 1$, végül eljutunk az $x = 5$, $y = 2$ és $z = 7$ megoldásokhoz. Az $u^2 - v^2 - 2uv = 1$ esetben a számolást nem végezzük el, de megmutatható, hogy az (5.5)-höz hasonló szerkezetű egyenlethez jutunk, melyből nem kapunk további megoldásokat.

5.1.22. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az $x^5 - y^2 = 4$ egyenlet nem oldható meg az egész számok körében. (Szerb versenyfeladat)*

I. megoldás:

Az első megoldásban a diofantikus egyenletek megoldhatatlanságának bizonyításánál használt fő eszközünket, a modulo m maradékosztályok segítségével történő számolást használjuk fel. A kis-Fermat-tétel miatt $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$, ha $(x, p) = 1$, ezért x^5 modulo 11 lehetséges maradékai 0 és ± 1 . Mivel egy négyzetszám 11-gyel osztva csak 0, 1, 3, 4, 5, 9 maradékot adhat, így látható, hogy a kívánt egyenlőség nem teljesülhet.

5.1.23. Megjegyzés. A tanulóknak itt ismételten hangsúlyoznunk kell, attól, hogy modulo m találunk megoldást, nem biztos, hogy az eredeti egyenlet is megoldható, ugyanakkor a fenti érveléshez használt modulust nem mindig könnyű megtalálni. Nyilván érdemes először kisebb m értékekkel próbálkozni, esetleg kihasználni, hogy bizonyos hatványok csak „kevés” maradékosztályba eshetnek modulo m . Ezen az úton továbbhaladva, illetve a Legendre-szimbólum tulajdonságait felhasználva a feladatot általánosíthatjuk.

II. megoldás (általánosítás):

5.1.24. Állítás. *Bizonyítsuk be, hogy ha $p \equiv -1$ vagy $11 \pmod{60}$ és p prímszám, akkor az $x^{\frac{p-1}{2}} - y^2 = 4$ egyenlet nem oldható meg az egész számok körében.*

Mivel $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0$ vagy $\pm 1 \pmod{p}$, ezért elég belátni, hogy az állításban szereplő p prímszámok esetén bármely y egész szám esetén az

$$y^2 + 4 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$y^2 + 4 \equiv -1 \pmod{p}$$

$$y^2 + 4 \equiv 1 \pmod{p}$$

kongruenciák közül egyik sem teljesül. Áttérve az ún. Legendre-szimbólumokra, ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \left(\frac{-4}{p}\right) &= -1 \\ \left(\frac{-5}{p}\right) &= -1 \\ \left(\frac{-3}{p}\right) &= -1. \end{aligned}$$

A Legendre-szimbólumra vonatkozó tételket, illetve a kvadratikus reciprocitási tételt többször felhasználva kapjuk, hogy

$$p \equiv -1 \pmod{3}$$

$$p \equiv -1 \pmod{4}$$

$$p \equiv 1 \pmod{5}$$

vagy

$$p \equiv -1 \pmod{3}$$

$$p \equiv -1 \pmod{4}$$

$$p \equiv -1 \pmod{5}.$$

A kínai maradéktétel miatt mindkét kongruenciarendszernek modulo 60 egyértelmű a megoldása. Az első esetben $p \equiv 11 \pmod{60}$, míg a második esetben $p \equiv -1 \pmod{60}$ adódik.

III. megoldás:

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy az egyenlet megoldható az egész számok

körében. Az egyenletet modulo 16 vizsgálva kapjuk, hogy x és y páratlan. A továbbiakban segédtegelként használjunk fel egy, a számelméletben jól ismert állítást: Ha p egy $4k + 3$ alakú prímszám és $p \mid a^2 + b^2$, akkor $p \mid a$ és $p \mid b$ is teljesül. Mivel $x^5 = y^2 + 2^2$, ahonnan $x \mid y^2 + 2^2$, így x csak $4k + 1$ alakú egész szám lehet, ellenkező esetben x -nek létezne $4m + 3$ alakú prímosztója, ami a segédtegel miatt osztója lenne a 2-nek is, ami ellentmondás.

Vegyük észre, hogy $6^2 - 2^5 = 4$, ezért az eredeti egyenlet $x^5 + 2^5 = y^2 + 6^2$ alakba is írható. Az ismert azonosságot, valamint a második tényezőt alkalmasan átalakítva kapjuk, hogy

$$(x + 2) [(x + 2)^4 - 10x(x + 2)^2 + 20x^2] = y^2 + 6^2.$$

Mivel $x + 2$ az előbbiek miatt $4l + 3$ alakú, így $3 \mid y$ -nak teljesülnie kell, különben ismét ellentmondás adódik. Legyen $y = 3Y$, és így

$$(x + 2) [(x + 2)^4 - 10x(x + 2)^2 + 20x^2] = 9(Y^2 + 4).$$

Mivel x páratlan, ezért $(x + 2, x^2) = 1$, így az egyenlőség bal oldalán szereplő tényezők d legnagyobb közös osztójára $d \mid 5$ teljesül. Mivel mindkét tényező $4s + 3$ alakú, és nem lehet mindkettő 3-mal osztható, így valamelyiknek létezik olyan páratlan q prímosztója, amely $4t + 3$ alakú és $Y^2 + 2^2$ -nek osztója. Ismételten alkalmazva a segédtegel ellentmondást kapunk.

5.1.25. Megjegyzés. A feladat harmadik megoldása bár nagyon szellemes, – igen változatosan kell kombinálni az elemi módszereket – azonban egyáltalán nem könnyű egy ilyen megoldásra rájönni. Az ilyen „vegyük észre, hogy” jellegű bizonyítások előtt mindenképpen ajánlott a segédtegel túlmenően is foglalkozni speciális alakú kifejezések prímosztóinak tulajdonságaival. Akárcsak érintőlegesen is, bizonyítások nélkül szerepeltetni az előzőekben már alkalmazott ún. Legendre-szimbólumot. Érdekes és hasznos további alkalmazásokat tárgyalhatunk itt, kiterjesztve azt egészen a Dirichlet-tétel néhány fontosabb speciális esetének vizsgálatáig.

IV. megoldás:

Ahogy azt a második megoldásban már láttuk, ha létezne megoldás, akkor x és y páratlanok. Az egyenlet szorzattá alakítható a Gauss-egészek körében. A (4.3)-ban szereplő bizonyítás mintájára megmutatható, hogy az $x^5 = (y + 2i)(y - 2i)$

felírás jobb oldalán szereplő tényezők relatív prímek, vagyis alkalmas a és b egészekkel $y + 2i = \varepsilon(a + bi)^5$, ahol ε egység a Gauss-egészek körében. Mivel $\varepsilon^5 = \varepsilon$, ezért az előbbi helyett $y + 2i = (A + Bi)^5$ is írható. Mindkét oldal képzetes részét véve, kapjuk, hogy

$$2 = B(5A^4 - 10A^2B^2 + B^4).$$

Innen már csak a $B = \pm 1$ és $B = \pm 2$ eseteket kell megnéznünk. Mind a négy esetben másodfokúra visszavezethető egyenletet kell megoldanunk, melyekből adódik, hogy az egyenletnek nincsen egész megoldása. Kevesebb számolással is eljuthatunk ehhez, hiszen mindkét oldalt modulo 5 véve kapjuk, hogy $B^5 \equiv 2 \pmod{5}$. Így csak a $B = 2$ -t kell ténylegesen kipróbálnunk, ahonnan az $A^4 - 8A^2 + 3 = 0$ egyenlőség adódik, melynek valóban nincs egész megoldása.

5.1.26. Feladat. Tekintsük az $1, 2, \dots, n$ pozitív egész számokból képzett összes permutációt. Milyen $n \geq 2$ egész esetén lesz a permutációkban az összes inverziók száma négyzetszám?

Megoldás:

Nyilvánvaló, hogy $n = 2$ és $n = 3$ megoldás, hiszen az $1, 2$ és $2, 1$ permutációkban 1, míg az $1, 2, 3$; $1, 3, 2$; $2, 1, 3$; $2, 3, 1$; $3, 1, 2$ és $3, 2, 1$ permutációkban összesen 9 darab inverzió van. Megmutatjuk, hogy más megoldás nincsen. A továbbiakban tegyük fel, hogy $n \geq 4$, majd először próbáljuk meghatározni, hogy az $1, 2, \dots, n$ elemekből képzett permutációkban összesen hány darab inverzió van. Ehhez az alábbi bijekciót fogjuk alkalmazni: Minden permutációnak feleltessük meg azt a permutációt, amelyet úgy kapunk, hogy az elemeket fordított sorrendben írjuk le. Például az $1, 2, \dots, n$ permutáció párja az $n, n-1, \dots, 1$ permutáció legyen. Az előbbiben nincs inverzió, míg az utóbbiban $\binom{n}{2}$ inverzió van, hiszen bármely két elem inverzióban áll egymással. Bármely permutáció párban szintén $\binom{n}{2}$ darab inverzió van összesen, hiszen bármely két elem a párnak pontosan az egyik permutációjában áll inverzióban egymással. Így, az inverziók száma a permutációkban $\frac{n!}{2} \cdot \binom{n}{2}$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $n \geq 4$ esetén létezik olyan k pozitív egész, melyre

$$\frac{n! \cdot \binom{n}{2}}{2} = k^2.$$

Az egyenletet átalakítva;

$$[n(n-1)]^2 \cdot (n-2)! = (2k)^2,$$

melyből rögtön adódik, hogy $(n - 2)!$ -nak négyzetszámnak kell lennie. A Csebisev-tétel miatt létezik olyan p prímszám, melyre $\frac{n-2}{2} \leq p \leq n - 2$, ekkor viszont $(n - 2)!$ ezt a prímszámot az első hatványon tartalmazza, vagyis nem lehet négyzetszám.

5.1.27. Feladat. *Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek nincs megoldása a természetes számok körében.*

$$x! + 32 = 32(x + 1)^y.$$

Megoldás:

Mivel a jobb oldal osztható 32-vel, ezért $x \geq 8$. Ekkor

$$\frac{x!}{32} + 1 = (x + 1)^y.$$

Ha az $x + 1$ páratlan szám összetett és p egy prímosztója, akkor $p \mid x!$ miatt $p \mid 32$ is teljesülne, de ez lehetetlen. Ha $x + 1 = q$ egy prímszám, akkor a Wilson-tétel miatt $(q - 1)! \equiv -1 \pmod{q}$, azaz

$$0 \equiv x! + 32 = (q - 1)! + 32 \equiv 31 \pmod{q},$$

amiből $q = 31$ adódik.

Már csak azt kell igazolnunk, hogy $\frac{30!}{32} + 1$ nem lehet 31 pozitív egész kitevőjű hatványa. Ez a Maple program ifactor parancsának segítségével gyorsan ellenőrizhető;

$$\frac{30!}{32} + 1 = 8289151869130970582384640000001 = 31 \cdot 267391995778418405883375483871.$$

Használhatjuk a programcsomag irem parancsát is, ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{30!}{32} + 1 \equiv 620 \pmod{31^2}.$$

Természetesen számítógép használata nélkül is igazolhatjuk a fenti állítást. (A bizonyításhoz egy pozitív egész szám modulo p vett rendjéről szóló állításokat használjuk fel.) A $\frac{30!}{32} + 1$ a 7 és 11 prímszámokkal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg a 31 rendjét mindkét prímmre vonatkozóan, ez egy kalkulátorral (is) könnyedén és gyorsan meghatározható. Kapjuk, hogy $\text{ord}_7(31) = 6$ és $\text{ord}_{11}(31) = 5$. A 31 legkisebb olyan hatványa, mely mindkét prímmel osztva 1 maradékot ad, a rendek legkisebb közös többszöröse $[6, 5] = 30$. A $\frac{30!}{32} + 1 < 31^{30}$ egyenlőtlenség mutatja, hogy valóban nem lehet $\frac{30!}{32} + 1$ 31-nek pozitív egész kitevőjű hatványa.

5.1.28. Feladat. (i) Oldjuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 3(x + y + z)$ diofantikus egyenletet, ahol x, y és z különböző pozitív egészek.

(ii) Bizonyítsuk be, hogy az $x^2 + y^2 + z^2 + 3(x + y + z) + 5 = 0$ egyenletnek nincs megoldása a racionális számok körében.

(i) I. megoldás:

Az egyenlet szimmetrikus, így az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy pl. $x < y < z$. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 4-gyel, majd teljes négyzetté alakítás után az alábbi ekvivalens alakot nyerjük:

$$(2x - 3)^2 + (2y - 3)^2 + (2z - 3)^2 = 27.$$

A 27 három páratlan négyzetszám összegére csak kétféleképp bontható; $1 + 1 + 25$ vagy $9 + 9 + 9$, a második esetben nem teljesülhet a különböző megoldásokra vonatkozó feltétel. Az első esetben egyetlen megoldás adódik, az $(x, y, z) = (1, 2, 4)$. Természetesen az értékhármas bármely permutációja megoldásnak tekinthető.

(i) II. megoldás:

A feladat a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség segítségével is megoldható. Kapjuk, hogy

$$\left(\frac{x + y + z}{3}\right)^2 \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} = x + y + z.$$

Innen $x + y + z \leq 9$, majd $1 \leq x < y \leq 3$ miatt itt $4 \leq z \leq 6$ adódik. A lehetséges z értékeket rendre kipróbálva az előző megoldásban kapott számhármashoz jutunk.

5.1.29. Megjegyzés. Ha valahonnan tudjuk, esetleg csak sejtjük, hogy a feladatnak a változók sorrendjétől eltekintve egyértelmű a megoldása, akkor az alábbi átalakítással is célhoz érhetünk. Előrebocsájtjuk, hogy a most következő megoldási mód inkább csak technikai érdekesség, ennél a feladatnál történő alkalmazása talán erőltetettnek tűnhet. Hangsúlyozzuk azonban, hogy a tanulókkal érdemes ezt a módszert is megismertetni, ezzel a trükkkel is bővíteni a problémamegoldó ötlettárukat.

(i) III. megoldás:

Tegyük fel ismét, hogy $0 < x < y < z$. Az $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 \leq 0$

egyenlőtlenség csak $x = 1$, $y = 2$ és $z = 4$ esetén teljesül. A négyzetre emeléseket elvégezve és átrendezve kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 + 21 \leq 2x + 4y + 8z.$$

Tegyük fel, hogy $z \neq 3$, ekkor figyelembe véve, hogy $y - x \geq 1$ és $z \geq 4$, érvényes a következő:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 21 \leq 3(x + y + z) + y - x + 5z,$$

mely ekvivalens az $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 \leq 0$ egyenlőtlenséggel. (Ha $z = 3$, akkor csak $x = 1$, $y = 2$ lehetséges, ami nem megoldás.)

(ii) Megoldás:

Alkalmazzuk az $a = 2x + 3$, $b = 2y + 3$ és $c = 2z + 3$ helyettesítéseket. Ekkor az egyenlet az eredetivel ekvivalens

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7$$

egyenletre vezet. A bal oldalon szereplő racionális számok nevezőivel beszorozva áttérhetünk az

$$A^2 + B^2 + C^2 = 7D^2$$

egyenletre, melynek kereshetjük az egész megoldásait. Megmutatjuk, hogy ennek csak a $(0, 0, 0, 0)$ számnégyes lehet egész megoldása. Ha létezne olyan egész megoldás, mely nem a csupa 0, akkor tekintsünk egy olyan megoldást, melyben $|A| + |B| + |C| + |D|$ minimális. Az egyenletet modulo 4 vizsgálva láthatjuk, hogy ez csak úgy teljesülhet, ha A, B, C, D páros számok. Ekkor azonban $(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}, \frac{D}{2})$ egy olyan megoldás lenne, melyben a változók abszolútértékeinek összege kisebb. Ez az ellentmondás igazolja, hogy csak a csupa 0 megoldás létezhet, ez viszont az eredeti kérdés esetében nem szolgáltat megoldást, hiszen $D = 0$ esetén valamelyik racionális szám nevezője 0 volna.

5.1.30. Feladat. (A 2006. évi IMO 4. feladata alapján)

Legyen adva az $a_0 = 4$, $a_1 = 11$, $a_2 = 37$ kezdőelemekkel és az

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} - 14a_n + 8a_{n-1}$$

rekurzióval definiált sorozat. Keressük meg az összes olyan $n \geq 3$ egész számot, amelyre a_n négyzetszám.

Megoldás:

Először a_n explicit alakját határozzuk meg. A rekurzió karakterisztikus egyenlete:

$$q^3 - 7q^2 + 14q - 8 = 0.$$

Azonnal látható, hogy ennek a $q = 1$ gyöke lesz, azaz az egyenlet bal oldala szorzattá alakítható:

$$(q - 1)(q^2 - 6q + 8) = 0.$$

A bal oldalon szereplő másodfokú polinomnak szintén egész gyökei vannak, azaz írható, hogy

$$(q - 1)(q - 2)(q - 4) = 0.$$

Vagyis a karakterisztikus egyenlet mindhárom gyöke valós és különböző, tehát léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valós számok, hogy minden $n \geq 0$ esetén:

$$a_n = \lambda_1 \cdot 4^n + \lambda_2 \cdot 2^n + \lambda_3 \cdot 1^n.$$

Az $n = 0, n = 1, n = 2$ értékeket beírva azt kapjuk, hogy $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ -nak eleget kell tennie a következő egyenletrendszernek.

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 4 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 11 \\ 16\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 &= 37.\end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1.$$

Vagyis a_n explicit alakja

$$a_n = 2^{2n+1} + 2^n + 1.$$

Tegyük fel, hogy valamilyen $m \in \mathbb{N}$ egészre

$$2^{2n+1} + 2^n + 1 = m^2$$

teljesül. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$ és alakítsuk át az egyenlőséget a következőképpen:

$$2^n(2^{n+1} + 1) = (m - 1)(m + 1).$$

Az $m - 1$ és $m + 1$ paritása megegyezik, sőt mindketten páros számok, hiszen a bal oldal páros. Ekkor alkalmas $\gamma \in \mathbb{N}$ és $t > 0$ páratlan számokra $m - 1 = 2^\gamma t$, azaz

$$\begin{aligned} 2^n(2^{n+1} + 1) &= 2^\gamma t(2^\gamma t + 2) \\ 2^{n-2}(2^{n+1} + 1) &= 2^{\gamma-1} t(2^{\gamma-1} t + 1) \end{aligned}$$

A $\gamma = 1$ esetet később tárgyaljuk. Tegyük fel, hogy $\gamma \geq 2$. Ekkor $2^{n-2} = 2^{\gamma-1}$, hiszen mindkét oldalon a többi tényező páratlan. Innen kapjuk, hogy $n - 2 = \gamma - 1$. Ezt beírva a

$$2^{n+1} + 1 = t(2^{n-2}t + 1)$$

egyenlőség adódik. A szorzást a jobb oldalon elvégezve:

$$2^{n+1} + 1 = 2^{n-2}t^2 + t.$$

Látható, hogy $t \neq 1$, tehát feltehető, hogy $t \geq 3$. Ekkor viszont felírható az alábbi becslés:

$$2^{n+1} + 1 \geq 9 \cdot 2^{n-2} + 3 \quad \Rightarrow \quad 1 \geq 2^{n-2} + 3,$$

és ez ellentmondás.

Ha $\gamma = 1$, akkor

$$2^{n-2}(2^{n+1} + 1) = t(t + 1),$$

ahonnan

$$2^{n-2} \mid t + 1 \quad \text{és} \quad t \mid 2^{n+1} + 1.$$

Alkalmas r pozitív páratlan egész számmal $t + 1 = 2^{n-2}r$. Ezt visszaírva:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} + 1 &= tr \\ 2^{n+1} + 1 &= (2^{n-2}r - 1)r \\ 2^{n+1} + 1 &= 2^{n-2}r^2 - r. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $r \geq 5$. Ekkor az alábbi becslés írható fel:

$$2^{n+1} + 1 \geq 2^{n-2}r^2 - r^2 = (2^{n-2} - 1)r^2 \geq 25(2^{n-2} - 1).$$

Ezt átrendezve kapjuk, hogy ebben az esetben $n \leq 3$. Ekkor $n = 3$ -at behelyettesítve látható, hogy nem kapunk négyzetszámot. Két eset vizsgálata maradt nyitva, amikor $r = 1$, illetve $r = 3$. Ha $r = 1$, akkor a

$$2^{n+1} + 1 = 2^{n-2} - 1$$

egyenletet kapjuk, aminek nincs megoldása. Ha $r = 3$, akkor a

$$2^{n+1} + 1 = 3(3 \cdot 2^{n-2} - 1) = 9 \cdot 2^{n-2} - 3$$

egyenletet kapjuk, aminek az $n = 4$ megoldása. Ezt behelyettesítve $a_4 = 529$, ami valóban négyzetszám. A feladat egyetlen megoldását ezzel előállítottuk.

Érdekes lehet megvizsgálni, hogy ha $n \geq 3$, akkor vajon a_n tartalmaz-e teljes hatványt. Páros kitevővel teljes hatványt nem tartalmazhat, csak a már megtalált teljes négyzetet, hiszen ha ilyen lenne valamilyen N természetes számra 2-nél magasabb hatványra, akkor az egyben a

$$2^{2N} + 2^N + 1 = m^{2k} = (m^k)^2$$

miatt egy új megoldását adná a négyzetszámos esetnek, ami lehetetlen. Elegendő tehát a páratlan kitevős esettel foglalkozni. Tegyük fel tehát, hogy valamilyen $n \geq 3$, $k \geq 1$, $m \geq 2$ (ahol m páratlan) természetes számokra

$$2^{2n+1} + 2^n + 1 = m^{2k+1}.$$

Ezt átalakítva kapjuk, hogy

$$2^n(2^{n+1} + 1) = (m - 1)(m^{2k} + \dots + m + 1).$$

A jobb oldalon szereplő második tényező páratlan sok páratlan szám összege, ami szintén páratlan. Ezért $m - 1$ kanonikus alakja szükségképpen $m - 1 = 2^nt$, ahol $t > 0$ páratlan. Ezt beírva az alábbi becslés adódik:

$$1 + 2^{n+1} = t(m^{2k} + \dots + m + 1) > t(m + m + \dots + m + 1) = t(2km + 1) = t[2k(2^nt + 1) + 1].$$

A szorzást elvégezve:

$$2^{n+1} + 1 > kt^2 2^{n+1} + t(2k + 1) \geq kt^2 2^{n+1} + 3,$$

ami nyilvánvaló ellentmondás. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az a_n sorozat $n \geq 3$ mellett csak $a_4 = 529 = 23^2$ esetén tartalmaz teljes hatványt.

5.1.31. Feladat. Oldjuk meg a természetes számok körében az alábbi diofantikus egyenletet

$$2^x 5^y - 1 = 7^z.$$

Megoldás:

Az alábbi átalakítások mutatják, hogy $7^z + 1$ 2-nek pontosan az első hatványával osztható ha z páros, és harmadik hatványával, ha z páratlan.

$$7^{2k} + 1 = (8 - 1)^{2k} + 1 \equiv 2 \pmod{4};$$

$$7^{2k+1} + 1 = 7 \cdot 49^k + 1 \equiv 8 \pmod{16}.$$

I. eset:

Ha $x = 3$, akkor $8 \cdot 5^y - 1 = 7^z$. Ekkor $y = 0$ és $z = 1$ megoldás. Ha $y \neq 0$, akkor z páratlan volta miatt

$$8 \cdot 5^y - 1 = 7^{2m+1} \Rightarrow -1 \equiv \pm 2 \pmod{5},$$

ami ellentmondás.

II. eset:

Ha $x = 1$, akkor $2 \cdot 5^y - 1 = 7^z$. Ekkor $y = 0$ és $z = 0$ megoldás. Ha $y \neq 0$, akkor $2 \cdot 5^y \equiv 1 \pmod{7}$. Ez ekvivalens az $5^y \equiv 4 \pmod{7}$ kongruenciával. Innen teljes indukcióval, modulo 7 maradéktáblázattal, vagy az ún. diszkrét logaritmus segítségével kereshetjük meg a megfelelő y értékeket. A változatosság kedvéért most az utóbbi utat követve, felhasználva a diszkrét logaritmusra vonatkozó azonosságokat, valamint azt a tényt, hogy a 3 primitív gyök $\pmod{7}$ kapjuk, hogy

$$y \cdot \text{ind}_3 5 \equiv \text{ind}_3 4 \pmod{6}.$$

A $p = 7$ prímre és $g = 3$ primitív gyökre vonatkozó indextáblázat alapján az $5y \equiv 4 \pmod{6}$ kongruencia adódik, melynek egyetlen megoldása $y \equiv 2 \pmod{6}$.

Alkalmas m és t természetes számokkal a $2 \cdot 5^{6t+2} - 1 = 7^{2m}$ egyenletet kell megoldanunk. Ezt átrendezve az alábbi Pell-egyenlethez jutunk

$$(7^m)^2 - 2 \cdot (5^{3t+1})^2 = -1.$$

Látható, hogy $m = 1$ és $t = 0$ megoldás, melyből az $y = 2$ és $z = 2$ értékeket kapjuk. A továbbiakban tegyük fel, hogy $m \geq 2$.

Az 5.1.17. Feladat első megoldásában, illetve a megoldás utáni megjegyzésekben mondottak alapján megmutatható, hogy az $x^2 - 2y^2 = -1$ egyenlet minden pozitív (x_n, y_n) megoldása előállítható alkalmas rekurzió segítségével. Például teljesül az $x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}$ összefüggés az $x_1 = 1$ és $x_2 = 7$ kezdőelemekkel.

Készítsünk (mod 49) és (mod 239) maradéktáblázatot! (Lásd 5.1.18.)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_n \pmod{49}$	1	7	41	43	21	34	36	35	27	29	0	20
$x_n \pmod{239}$	1	7	41	0	198	232	238	1	7	41	0	198

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$x_n \pmod{49}$	22	14	13	15	28	6	8	42	48	1	7
$x_n \pmod{239}$	232	238	1	7	41	0	198	232	238	1	7

A táblázatból kiolvasható, hogy x_n pontosan a $21j + 11$ alakú indexekre osztható 49-cel. Mivel $21j + 11 = 7(3j + 1) + 4$, ezért ezekre az indexekre x_n 239-cel is osztható, így nem lehet 7-hatvány. A feladat összes megoldása így; $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 2)$ és $(3, 0, 1)$.

5.2. Versenyfeladatok szakköri feldolgozása, didaktikai megjegyzések

Ebben a részben egy kimondottan a kötelező tanórán kívüli foglalkozásokra javasolt feladatsort állítottunk össze abban a reményben, hogy a fokozatosan nehezedő, változatos példák kiválóan alkalmasak lehetnek arra, hogy szakköri órák keretén belül, legalább a feladatok egy részét a tanulókkal feldolgozzuk. A feladatsor végén rövid megoldásokat is közlünk, sok helyen rávilágítva arra, hogy az adott feladat esetében mit érzünk kiemelkedően fontosnak, miért ajánljuk pont ezeket a példákat szerepeltetni a versenyekre felkészítő feladatmegoldó órákon.

5.2.1. Feladatsor

5.2.1. Feladat. Oldjuk meg az egész számok körében az alábbi diofantikus egyenletet.
(Lengyel versenyfeladat)

$$x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1.$$

5.2.2. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében az alábbi diofantikus egyenletet. (Orosz versenyfeladat)

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

5.2.3. Feladat. Adjuk meg azokat az (x, y) egész számpárokat, melyekre teljesül, hogy

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4.$$

(Román versenyfeladat)

5.2.4. Feladat. Oldjuk meg az egész számok körében az alábbi diofantikus egyenletet.

$$x^2 + xy = y^2 + xz.$$

5.2.5. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében az alábbi diofantikus egyenletet.

$$xy + yz + zx - xyz = 2.$$

5.2.6. Feladat. Oldjuk meg az egész számok körében az alábbi diofantikus egyenletet.
(Orosz versenyfeladat)

$$(x^2 - y^2)^2 = 1 + 16y.$$

5.2.7. Feladat. Határozzuk meg az alábbi diofantikus egyenlet

$$\frac{x}{y} = \frac{(x^2 - y^2)^{\frac{y}{x}} + 1}{(x^2 - y^2)^{\frac{y}{x}} - 1}$$

pozitív egész megoldásait. (KöMaL)

5.2.8. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok körében.

$$x^2 + y^2 = 2017(x - y).$$

5.2.9. Feladat. Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenletet a pozitív egész számok körében. (Izraeli versenyfeladat)

$$5^x - 3^y = 16.$$

5.2.10. Feladat. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan x, y, z, v pozitív egész szám létezik, amelyre $(x, y, z, v) = 1$ és az

$$x^3 + y^3 + z^2 = v^4$$

egyenlet teljesül. (Román versenyfeladat)

5.2.2. A feladatok megoldása, megjegyzések

Az 5.2.1. Feladat megoldása:

Vezessük be az $u = x - 1$ és $v = y - 1$ új változókat. Ekkor az egyenlet átírható az $uv(u + v) + 4uv + u + v = 1$ alakra. Itt már nem olyan nehéz észrevenni, hogy szorzattá alakítást követően az

$$(u + v + 4)(uv + 1) = 5$$

egyenlőség adódik, ahonnan a lehetséges felbontásokat megvizsgálva kapjuk, hogy

$$(u, v) = \{(0, 1); (1, 0); (-6, 1); (1, -6)\},$$

vagyis

$$(x, y) = \{(1, 2); (2, 1); (-5, 2); (2, -5)\}.$$

Az 5.2.2. Feladat I. megoldása:

Itt az 5.1.1. Feladat I. megoldásában vizsgált $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ kifejezés jelenik meg kicsit „elbújtatva”. Hogy ezt észrevegyük, szorozzuk meg mindkét oldalt 27-tel, majd vonjunk ki mindkét oldalból 1-et. Ekkor kapjuk, hogy

$$(3x)^3 + (-3y)^3 + (-1)^3 - 3(3x)(-3y)(-1) = 1646.$$

Így (5.1) alapján (lásd 53. oldal)

$$(5.6) \quad (3x - 3y - 1)(9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y) = 1646 = 2 \cdot 823.$$

Mivel a bal oldalon lévő első tényező kisebb, mint a második, valamint figyelembe véve, hogy a 823 prím és $3x - 3y - 1$ nem lehet 1-gyel egyenlő, így csak a

$$\begin{aligned} 3x - 3y - 1 &= 2 \\ 9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y &= 823 \end{aligned}$$

egyenletrendszer kell megoldanunk. Ennek egyetlen megoldása a $(6, 5)$ számpár.

5.2.11. Megjegyzés. Az 5.2.2. Feladat kapcsán jogosan merülhet fel a tanulóknál az a kérdés, hogyan lehet erre a „trükkre” rájönni? Miért pont 27-tel kell az elején szorozni stb.? Véleményünk szerint ilyen és ehhez hasonló kérdésekre sokszor egyáltalán nem könnyű választ adni. Talán éppen ezért is nagyon hasznos olyan feladatokat szerepeltetni a szakkörön, melyek jó példái ilyen jellegű átalakításoknak. Tapasztalatunk szerint az ügyesebb tanulóknak elég egy-két hasonló technikai fogást igénylő példát látniuk, de sokkal hatékonyabb, ha olyan megoldást – szerencsésebb esetben megoldásokat – is mutatunk, melyek kevésbé tűnnek számukra „ad hoc” módszernek. Ebből a célból alábbiakban röviden vázolunk két másik lehetséges megközelítést.

Az 5.2.2. Feladat II. megoldása:

Nyilvánvalóan feltehető, hogy $x > y > 0$. Ekkor a $p = x - y$ jelölést bevezetve, a $p \geq 1$ feltétel mellett kapjuk, hogy

$$(3p - 1)y^2 + (3p^2 - p)y + p^3 = 61.$$

Ennek, az y -ban másodfokú egyenletnek csak akkor létezik pozitív egész megoldása, ha $p^3 < 61$. A lehetséges eseteket kipróbálva láthatjuk, hogy csak $p = 1$ esetén kapunk pozitív egész megoldást, mégpedig az $(x, y) = (6, 5)$ számpárt.

Az 5.2.2. Feladat III. megoldása:

Vezessük be az $u = x - y$ és $v = xy$ új változókat. Ekkor

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y)[(x - y)^2 + 3xy] = xy + 61,$$

vagyis kapjuk, hogy

$$u^3 + 3uv = v + 61.$$

Ebből $v = \frac{61 - u^3}{3u - 1}$. Mivel $u > 0$ és $v > 0$, ezért az előző megoldásban is szereplő $u^3 < 61$ egyenlőtlenség adódik.

5.2.12. Megjegyzés. Ha a harmadik megoldás végén felhasználjuk az $a - b \mid a^3 - b^3$ oszthatóságot, akkor végül a $3u - 1 \mid 1646 = 2 \cdot 823$ feltételhez jutunk, mely egyrészt (5.6)-ban is szerepelt már, másrészt ezzel a módszerrel akár az egyenlet összes egész megoldásához is eljuthatnánk, nem csak a pozitív egész megoldásokhoz. Rövid számolással azonban megmutatható, hogy az egyenletnek az egész számok körében (is) csak a már megtalált $(6, 5)$ számpár lesz megoldása.

Az 5.2.3. Feladat I. megoldása:

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát 4-gyel, majd a bal oldalon végezzünk teljes négyzetté alakítást. Kapjuk, hogy $(2x^3 + 3)^2 - 5 = 4y^4$, ami ekvivalens a következővel:

$$(2x^3 + 2y^2 + 3)(2x^3 - 2y^2 + 3) = 5.$$

A lehetséges felbontásokat megvizsgálva, rövid számolás után látható, hogy a $(0, 1)$ és $(0, -1)$ számpárok adnak megoldást.

Az 5.2.3. Feladat II. megoldása:

Sokszor igen hatékony trükknek bizonyul, ha a diofantikus egyenletet paraméteres egyenletként kezeljük. Tekintsük az eredeti egyenletet x^3 -ban másodfokú egyenletnek, ahol y legyen most paraméter. Az $x^6 + 3x^3 + 1 - y^4 = 0$ egyenlet diszkriminánsa $D = 4y^4 + 5$. Ha az egyenletnek vannak egész gyökei, akkor a diszkriminánsnak teljes négyzetnek kell lennie, ez pedig csak $y = \pm 1$ esetén teljesül, hiszen $|y| \geq 2$ -re érvényes az alábbi egyenlőtlenség:

$$(2y^2)^2 < 4y^4 + 5 < (2y^2 + 1)^2.$$

Behelyettesítés után az $x = 0$ adódik mindkét y érték esetén, összhangban a fentiekkel.

Az 5.2.3. Feladat III. megoldása:

Megmutatjuk, hogy amennyiben $x \neq 0$, az $x^6 + 3x^3 + 1$ kifejezés két szomszédos négyzetszám közé esik. Ha $x > 0$, akkor

$$(x^3 + 1)^2 < x^6 + 3x^3 + 1 < (x^3 + 2)^2.$$

Ha $x < -1$, akkor

$$(x^3 + 2)^2 < x^6 + 3x^3 + 1 < (x^3 + 1)^2.$$

A hiányzó $x = -1$ eset nem ad megoldást, míg $x = 0$ -ra az $y = \pm 1$ megfelelő.

Az 5.2.4. Feladat I. megoldása:

Írjuk át az egyenletet az eredetivel ekvivalens

$$y^2 = x(x + y - z)$$

alakba. Ha $y = 0$, akkor $x = 0$ vagy $x = z$ teljesül. Ekkor a $(0, 0, t)$ és a $(t, 0, t)$ rendezett számhármás megoldás minden t egész szám esetén. Ha $y \neq 0$, akkor a számelmélet alaptétele miatt léteznek olyan α , u és v nem-nulla egész számok, amelyekre $(u, v) = 1$, és teljesül, hogy

$$\begin{aligned} x &= \alpha u^2 \\ x + y - z &= \alpha v^2. \end{aligned}$$

Ekkor $y = \alpha uv$ is teljesül, ahonnan $z = \alpha(u^2 + uv - v^2)$. Az egyenletnek végtelen sok egész megoldása van, a megoldásokat az alábbi paraméteres alakban kapjuk:

$$x = \alpha u^2, \quad y = \alpha uv, \quad z = \alpha(u^2 + uv - v^2).$$

(Ebben a $(0, 0, t)$ és $(t, 0, t)$ megoldások is szerepelnek $u = 0$, illetve $v = 0$ mellett.)

Az 5.2.4. Feladat II. megoldása:

Az egyenletet át írjuk át most az

$$x(x - z) = y(y - x)$$

alakra. Legyen $d = (x, y)$, azaz alkalmas X és Y egész számokkal $x = dX$ és $y = dY$, valamint $(X, Y) = 1$. Behelyettesítve a fenti egyenlőségbe, az egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$X(x - z) = dY(Y - X).$$

Mivel $(X, Y - X) = 1$, ezért $X \mid d$, vagyis $d = mX$, ahol m egész szám. Ekkor

$$x = mX^2, \quad y = mXY, \quad z = m(X^2 + XY - Y^2).$$

5.2.13. Megjegyzés. A feladat a korábban szereplő ún. négyszám-tétel segítségével is megoldható. A tanulóknak az alkalmazásokon túl ajánlott a tétel bizonyítását is megmutatni, néhány szép bizonyítás megtalálható a [8] könyvben.

Az 5.2.5. Feladat megoldása:

Egy újabb módszerrel ismertethetjük meg a tanulókat, melynek lényege, hogy a változó(k)ra tett különféle becslések segítségével az egyenlet megoldásainak meghatározását véges sok, jól kezelhető eset vizsgálatára vezetjük vissza.

Az egyenletből világos, hogy $xy + yz + zx > xyz$, vagyis $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1$. A szimmetria miatt nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy pl. $x \leq y \leq z$. Mivel $x, y, z > 0$, ezért $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$, azaz $\frac{3}{x} > 1$. Ha $x = 1$, akkor $y + z = 2$, ahonnan csak $y = z = 1$ lehetséges.

Amennyiben $x = 2$, úgy $2y + 2z - yz = 2$, mely ekvivalens az

$$(y - 2)(z - 2) = 2$$

egyenlettel, melynek az $y \leq z$ feltételt kielégítő egyetlen megoldása $y = 3$ és $z = 4$. Az egyenlet megoldásai így:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1), \quad \text{vagy} \quad (x, y, z) = (2, 3, 4).$$

Természetesen az utóbbi esetben az értékhármas bármely permutációja is megoldást szolgáltat.

5.2.14. Megjegyzés. Ha alkalmazzuk az $a = x - 1$, $b = y - 1$ és

$c = z - 1$ helyettesítést (ez az ötlet szerepelt tulajdonképpen az 5.2.1-ben is), akkor az egyenlet új alakja $a + b + c = abc$ lesz, melynek egész megoldásait már (5.1.3)-ban megadtuk. A helyettesítés gondolatát itt az egyszerű

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1$$

azonosság ismerete adhatja, melyet a szorzattá alakítás témakörben normál osztályban (is) szoktunk tanítani.

Az 5.2.6. Feladat megoldása:

Mivel az egyenlőség bal oldala nemnegatív, ezért a jobb oldalon $y \geq 0$ teljesül. Ha $y = 0$, akkor nyilvánvalóan $x = \pm 1$ megoldás. A továbbiakban legyen $y \geq 1$. Mivel $x \neq y$, ezért vagy $|x| \geq y + 1$, vagy pedig $|x| \leq y - 1$ teljesül. A második esetben kapjuk, hogy $x^2 = |x|^2 \leq y^2 - 2y + 1$, azaz $|x^2 - y^2| \geq 2y - 1$. Így

$$16y + 1 = (x^2 - y^2)^2 \geq (2y - 1)^2.$$

Ez a becslés az első esetre is érvényes. Innen $y \leq 5$ adódik, a szóba jövő y értékeket rendre kipróbálva kapjuk, hogy az egyenlet összes megoldása a $(\pm 1, 0); (\pm 4, 3); (\pm 4, 5)$ számpárok.

5.2.15. Megjegyzés. Az 5.2.6. Feladat is megoldható helyettesítéssel.

Legyen $a = x + y$ és $b = y - x$. Ekkor az egyenlet a következő alakot ölti:

$$(*) \quad a^2 b^2 = 8(a + b) + 1.$$

Mivel az új változók bevezetése után szimmetrikus egyenletet kaptunk, így feltehető, hogy pl. $a \geq b$. Ha $a = b$, akkor az $a^4 = 16a + 1$ egyenletnek nincs egész gyöke, hiszen $a \mid 1$ és $a = \pm 1$ láthatóan nem megoldás. Így $a > b$, sőt mindjárt $b \leq a - 2$ is feltehető, hiszen nyilvánvaló, hogy $(*)$ -ban a és b páratlanok. Mivel $(*)$ -ból az is adódik, hogy $b \neq 0$, ezért $b^2 \geq 1$, és innen kapjuk, hogy $a^2 \leq 16a - 15$, azaz $1 \leq a \leq 15$. A lehetséges páratlan a értékeket kipróbálva előbb a megfelelő b értékekhez, majd az egyenlet első megoldásában felírt megoldásokhoz jutunk.

Látható, hogy a második megoldás „kicsit számolósabb”, mint az első, ellenben a helyettesítés után sokkal könnyebben lehet automatizálni a lépéseket. Különösen fontosnak tartjuk a szimmetrikus egyenletekkel, polinomokkal kapcsolatos órai észrevételeket, rámutatva arra, hogy milyen előnyökkel járhat az alkalmazásuk. A szimmetrizálás természetesen nemcsak számelméleti témakörben, hanem sok egyéb más területen (pl. kombinatorikában) is haszonnal alkalmazható.

Az 5.2.7. Feladat I. megoldása:

Először egy majdnem tisztán számelméleti gondolatmenetet adunk, de a további megoldásokban – változatos módszereket használva – igyekszünk bemutatni, hogy az analízis hogyan használható diofantikus egyenletek megoldására.

A jobb oldali tört nevezője nem lehet 0, ezért $x^2 - y^2 \neq 1$. Az egyenletet a nevezőkkel beszorozva kapjuk, hogy

$$x(x^2 - y^2)^{\frac{y}{x}} - x = y(x^2 - y^2)^{\frac{y}{x}} + y.$$

Az egyenletet rendezve

$$(x - y)(x^2 - y^2)^{\frac{y}{x}} = x + y$$

adódik, majd x -edik hatványra emelés után felhasználva az $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ azonosságot, végül az

$$(x - y)^{x+y} = (x + y)^{x-y}$$

egyenlőséghez jutunk. Ha bevezetjük az $a = x + y$ és $b = x - y$ jelölést, akkor a jól ismert (*) $b^a = a^b$ egyenlet adódik, ahol most $a > b$, hiszen y pozitív, valamint a -val együtt b is pozitív, hiszen negatív b esetén a (*) egyenlet bal oldalának abszolútértéke 1-nél nagyobb volna, míg a jobb oldalé 1-nél kisebb. Mivel $x = y$ nem megoldás, ezért $b \neq 0$, azaz $b \geq 1$.

Legyen $d = (a, b)$. Ekkor u és v olyan pozitív egészek, melyekre $a = du$ és $b = dv$, valamint $(u, v) = 1$. Mivel $a > b$, így $u > v$ is teljesül, azaz

$$d^{u-v}v^u = u^v.$$

Az $(u, v) = 1$ feltétel miatt ez csak úgy lehetséges, ha v -nek nincs prímosztója, vagyis ha $v = 1$. Kapjuk, hogy

$$d^{u-1} = u.$$

Az utolsó egyenlőségben $d \neq 1$ és $u \neq 1$, hiszen $a \neq b$. Az alábbi egyenlőtlenséglánc mutatja, hogy csak $d = 2$ lehetséges:

$$d^{u-1} \geq 3^{u-1} \geq u + 1 > u, \quad \text{ha} \quad d \geq 3.$$

Ha $d = 2$, akkor $2^{u-1} = u$ csak $u = 1$ és $u = 2$ esetén áll fenn, de az előbbi nem lehetséges. Ha $u = 2$, akkor $a = 4$ és $b = 2$, ahonnan az egyenlet egyetlen pozitív egész (x, y) megoldásaként a $(3, 1)$ számpár adódik.

Az 5.2.7. Feladat II. megoldása:

Az $a^b = b^a$ egyenletben feltehető, hogy $a > b$, hiszen az $a = b$ esetet az előző megoldásban foglaltak miatt kizárhatjuk. Ekkor létezik olyan $c > 0$ egész szám, amelyre $a = b + c$. Ekkor $(b + c)^b = b^{b+c}$, mely ekvivalens átalakításokkal az

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{b}{c}}\right)^{\frac{b}{c}} = b$$

alakra hozható. Analízisből ismert, hogy az $(1 + \frac{1}{x})^x$ -nek a 3 egy felső korlátja. Innen $b = 1$ esetén $a = 1$ adódik, mely nem megoldás, $b = 2$ esetén $a^2 = 2^a$ -t kapunk, ahonnan most csak $a = 4$ a feltételeket kielégítő megoldás.

5.2.16. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy a második megoldással lényegében ekvivalens levezetést kaphatunk akkor is, ha az $a^b = b^a$ egyenletet $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ alakra átírjuk, majd az $f : n \rightarrow \sqrt[n]{n}$ pozitív egész számokon értelmezett függvény monotonitását vizsgáljuk. Pl. teljes indukcióval is könnyen belátható, hogy $n \geq 5$ esetén a függvényértékek mind különbözők, és a függvény szigorúan monoton csökkenő ($n \geq 3$ -ra).

Egy másik lehetőség, hogy az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ függvényről deriválás segítségével bebizonyítjuk, hogy szigorúan monoton csökken, ha $x > e$. Így $a > b > e$ esetén $a^{\frac{1}{a}} < b^{\frac{1}{b}}$, azaz $a^b < b^a$. Ismét csak véges sok a és b értéket kell kipróbálnunk, hogy eljussunk a feladat egyetlen megoldásához.

Az 5.2.7. Feladat III. megoldása:

A Bernoulli-egyenlőtlenséget használjuk fel. Ehhez előbb egy segédtelet kell igazolnunk.

5.2.17. Lemma. *Ha $r = n^s$, ahol $n > 0$ egész és $r, s > 0$ racionális számok, akkor r egész.*

A lemma bizonyításához legyen $r = \frac{u}{v}$ és $s = \frac{p}{q}$, ahol u, v, p, q pozitív egész számok és $(u, v) = (p, q) = 1$. Ekkor az egyenlet átírható az

$$u^q = v^q \cdot n^p$$

alakra. Mivel $(u, v) = 1$, ezért v -nek nem lehet prímosztója, hiszen ez a prímosztó a jobb oldalt is osztaná. Így $v = 1$, vagyis r valóban egész szám.

Az eredeti problémára visszatérve legyen $a^b = b^a$. Ekkor $a = b^{\frac{a}{b}}$. Ha $w = \frac{a}{b}$, akkor $bw = b^w$, azaz $w = b^{w-1}$. Mivel $w - 1$ racionális szám, ezért a lemma miatt w egész szám, így a Bernoulli-egyenlőtlenség miatt

$$w = b^{w-1} = (1 + b - 1)^{w-1} > 1 + (b - 1)(w - 1) \geq w, \quad \text{ha } b \geq 2 \text{ és } w \geq 3.$$

Ha $b = 1$, akkor $w = 1$, és így $a = 1$, ami nem megoldás;

Ha $w = 1$, akkor $a = b$, ami ismét nem megengedett;

Végül, ha $w = 2$, akkor $a = 2b$, melyből megkapjuk a feladat feltételeit kielégítő egyetlen megoldást ($a = 4$ és $b = 2$).

Az 5.2.8. Feladat megoldása:

Szorozzuk meg az egyenlőséget 2-vel, majd alakítsunk ki teljes négyzeteket. Kapjuk, hogy

$$(x+y)^2 + (x-y-2017)^2 = 2017^2.$$

Mivel $x, y > 0$, $x+y < 2017$ és $x-y < x+y$, ezért $-2017 < x-y-2017 < 0$. Ha átírjuk az egyenletet az eredetivel ekvivalens

$$(x+y)^2 + (2017-x+y)^2 = 2017^2$$

alakra, akkor a bal oldalon mindkét zárójelben pozitív és 2017-nél kisebb kifejezések állnak.

A 2017 prímszám, ezért $(x+y, x-y-2017) = 1$, így léteznek olyan u, v különböző paritású pozitív egész számok, melyre $u > v$, $(u, v) = 1$, illetve

$$u^2 + v^2 = 2017$$

$$u^2 - v^2 = x + y$$

$$2uv = 2017 - x + y.$$

Az utolsó két egyenletben x és y paritásától függően esetleg fordítva szerepel $x+y$ és $2017-x+y$. Mivel $u > v > 0$, így fennáll: $u^2 < 2017$ és $2u^2 > 2017$. A két egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $32 \leq u \leq 44$. Az u lehetséges értékeit kipróbálva kapjuk, hogy $u = 44$ megfelelő, ekkor $v = 9$. Ha a fenti szereposztással helyettesítünk, akkor $(x, y) = (1540, 315)$, míg ha fordított szereposztással helyettesítünk, akkor az $(x, y) = (477, 315)$ számpár adódik megoldásként.

5.2.18. Megjegyzés. A feladatból nagyon könnyen gyárthatunk egy speciális paraméteres diofantikus egyenletet. Legyen p egy olyan páratlan prímszám, melynek kétszerese $n^2 + 1$ alakú. (A 2017 nem ilyen prím, de a megadott alakú prímekre lehet könnyen általánosítani.) Ekkor a fenti levezetés lépései egyszerűen átvihetők az $x^2 + y^2 = p(x-y)$ diofantikus egyenletre. A korábbi jelöléseket megtartva az $u^2 + v^2 = p$ egyenlethez jutunk. Mivel $p \equiv 1 \pmod{4}$ alakú prím kell, hogy legyen, ezért – a változók sorrendtől eltekintve – pontosan egyféleképpen írható fel két négyzetszám összegeként. Mivel $2p = n^2 + 1$, ezért $p = (\frac{n+1}{2})^2 + (\frac{n-1}{2})^2$, így $u = \frac{n+1}{2}$ és $v = \frac{n-1}{2}$ megfelelő választás. Visszahelyettesítve mindkét lehetséges esetben, azt kapjuk, hogy

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{2p-1} + 1}{2}, \frac{\sqrt{2p-1} - 1}{2} \right)$$

vagy

$$(x, y) = \left(\frac{2p-1-\sqrt{2p-1}}{2}, \frac{\sqrt{2p-1}-1}{2} \right).$$

Az 5.2.9. Feladat I. megoldása:

Megmutatjuk, hogy az $(x, y) = (2, 2)$ számpár az egyetlen megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát modulo 3 véve kapjuk, hogy $2^x \equiv 1 \pmod{3}$ -nak kell teljesülnie, vagyis x páros. Ha $x = 2X$, akkor az egyenlőségben most modulo 4-et véve

$$5^{2X} - 3^y \equiv 1 - (-1)^y \equiv 0 \pmod{4}$$

adódik, azaz $y = 2Y$ is páros egész. Így érvényes az

$$(5^X + 3^Y)(5^X - 3^Y) = 16$$

szorzattá alakítás, melyből a lehetséges eseteket megvizsgálva kapjuk, $X = 1$ és $Y = 1$, mely az állításnak megfelelően az egyetlen megoldást jelentő $(x, y) = (2, 2)$ számpárra vezet.

Az 5.2.9. Feladat II. megoldása:

A feladat a pitagoraszai számhármassok segítségével is megoldható. Mivel

$$(5^X)^2 = (3^Y)^2 + 4^2,$$

így léteznek olyan $u > v > 0$ különböző paritású relatív prím egészek, melyekre

$$5^X = u^2 + v^2$$

$$3^Y = u^2 - v^2$$

$$4 = 2uv.$$

Az utolsó egyenlőségből kapjuk, hogy $u = 2$ és $v = 1$, innen pedig az előző megoldásban látott $X = 1$ és $Y = 1$ adódik.

Az 5.2.10. Feladat I. megoldása:

Tekintsük az $(a+1)^4 - (a-1)^4 = 8a^3 + 8a$ azonosságot. Ekkor $a = b^3$ választással, ahol $a, b > 0$ egészek, kapjuk, hogy

$$(b^3 + 1)^4 = (2b^3)^3 + (2b)^3 + [(b^3 - 1)^2]^2.$$

Ha b -t páros egész számnak választjuk, akkor $b^3 + 1$ és $b^3 - 1$ két egymást követő páratlan szám, vagyis $b = 2k$ -t írva, ahol $k > 0$ egész, az alábbi paraméteres alakban kapunk végtelen sok, a relatív prím tulajdonságot is kielégítő számnégyest.

$$(x, y, z, v) = (16k^3, 4k, (8k^3 - 1)^2, 8k^3 + 1).$$

Az 5.2.10. Feladat II. megoldása:

Más úton is eljuthatunk végtelen sok megoldáshoz. Ehhez az alábbi jól ismert $\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ azonosságot használjuk fel. Ezt azt összefüggést az első $n - 2$ tagra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = (n-1)^3 + n^3 + \left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} \right]^2$$

Már csak azt kell garantálnunk, hogy $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$ legyen alkalmas m pozitív egészszel. Ekvivalens átalakítások után a

$$(2n+1)^2 - 2(2m)^2 = 1$$

klasszikus Pell-egyenlet adódik, melynek végtelen sok megoldását többféle módszerrel és alakban is előállíthatjuk.

5.2.19. Megjegyzés. Az 5.2.10. probléma kapcsán érdemes a diákokkal megbeszélni, hogy bizonyos diofantikus egyenleteknek nem, vagy csak nagyon bonyolult eszközökkel adhatjuk meg az összes megoldását, de arra esetleg van remény, hogy végtelen sok nem-triviális megoldást felírjunk az egész számok körében. Utóbbi esetben általában paraméteresen állíthatjuk elő a megoldásokat, erre többféle elindulás is kínálkozhat. Egyszerűbb esetekben elég a változókra tett korlátozó feltételekkel azok számát csökkenteni, bonyolultabb esetekben ügyes, néhol teljesen „ad hoc”-nak látszó lépésekkel, akár kísérletezésekkel indítani a megoldást. A fenti két levezetés is ilyen jellegű, bár a második megoldás előnye, hogy akár a Pell-egyenletek bevezetéseként is felhasználható a tanítási munkában. A Pell-egyenletek tárgyalását követően további érdekes alkalmazásokat vizsgálhatunk pl. a háromszögszámokkal kapcsolatban.

5.3. Diofantikus egyenletek a nemzetközi matematikaversenyeken

Ebben a részben egy olyan feladatsort állítottunk össze, melynek feladatait különféle nemzetközi matematikaversenyekről válogattuk. Az összeállítás során igyekeztünk a fokozatosság elvét betartani, vagyis először az általunk egyszerűbbnek gondolt, később pedig a nehezebbnek ítélt problémákat gyűjtöttük csokorba. A feladatsor után megoldási útmutató is szerepel, melyekben a megoldások mellett azok főbb gondolatait, a bizonyítások lényeges részeit emeljük ki.

5.3.1. Feladatsor

5.3.1. Feladat. *Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletet. (Nemzetközi Magyar Matematikaverseny)*

$$y(1-x)^2 + x(1-y)^2 + (x+y)^2 - x^3 - y^3 = 2000.$$

5.3.2. Feladat. *Oldjuk meg az egész számok körében az alábbi diofantikus egyenletet.*

$$x^3 - y^3 = 2xy + 8.$$

(IMO LongList)

5.3.3. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenletet az egész számok körében. (IMO LongList)*

$$x^2 + y^2 = (x - y)^3.$$

5.3.4. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ diofantikus egyenletnek végtelen sok megoldása van az egész számok körében. (Olasz versenyfeladat)*

5.3.5. Feladat. *Oldjuk meg a pozitív egész számok körében az*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{5}$$

diofantikus egyenletet. (Román versenyfeladat)

5.3.6. Feladat. Határozzuk meg az összes nemnegatív egészekből álló (x, y) számpárt, melyre

$$y^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8.$$

(Német versenyfeladat)

5.3.7. Feladat. Adjuk meg az összes pozitív egész $n, x_1, x_2, \dots, x_n$ -t, melyre

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 5n - 4 \quad \text{és} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

(Putnam versenyfeladat)

5.3.8. Feladat. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az

$$x^y + y = y^x + x$$

diofantikus egyenletet. (Nemzetközi Magyar Matematikaverseny)

5.3.9. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^3 + y^3 + z^3 = x^2 + y^2 + z^2$$

diofantikus egyenletnek végtelen sok megoldása van az egész számok körében. (Tournament of Towns)

5.3.10. Feladat. Keressük meg az

$$5^x 7^y + 4 = 3^z$$

egyenlet összes megoldását a nemnegatív egész számok körében. (Bolgár versenyfeladat)

5.3.11. Feladat. Adjunk meg egy olyan c pozitív egész számot, melyre az

$$xy^2 - y^2 - x + y = c$$

egyenletnek pontosan három (x, y) megoldása van a pozitív egész számok körében. (Angol versenyfeladat)

5.3.12. Feladat. Legyen n pozitív egész szám. Mutassuk meg, hogy az

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$

egyenletnek nincs megoldása a pozitív racionális számok körében. (Görög versenyfeladat)

5.3.13. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan (p, q, n) számhármast, melyre p, q prímszámok, $n \geq 1$ és teljesül, hogy

$$p(p+1) + q(q+1) = n(n+1).$$

(Lengyel versenyfeladat)

5.3.14. Feladat. Határozzuk meg azokat az x, y és n pozitív egészeket, melyekre $(x, n+1) = 1$ és

$$x^n + 1 = y^{n+1}.$$

(Indiai versenyfeladat)

5.3.15. Feladat. Határozzuk meg az összes olyan (m, n, p, q) nemnegatív egészekből álló számnégyest, melyre teljesül, hogy

$$p^m q^n = (p+q)^2 + 1.$$

(Román versenyfeladat)

5.3.16. Feladat. Határozzuk meg azokat az x, y nemnegatív egész számokat, melyekre teljesül a

$$p^x - y^p = 1$$

egyenlet, ahol p adott páratlan prímszám. (Cseh versenyfeladat)

5.3.17. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$x^2 y^2 = z^2 (z^2 - x^2 - y^2)$$

diofantikus egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok körében. (Bolgár versenyfeladat)

5.3.18. Feladat. Adott az m pozitív egész szám. Adjuk meg m függvényében az összes olyan x, y és n pozitív egészt, melyekre

$$(m, n) = 1 \quad \text{és} \quad (x^2 + y^2)^m = (xy)^n.$$

(Koreai versenyfeladat)

5.3.19. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok pozitív egész (x, y) számpár megoldása van. (Vietnámi versenyfeladat nyomán)

$$x^2 + y^2 - 5xy + 5 = 0.$$

5.3.2. A feladatsor feladatainak megoldása

Az 5.3.1. Feladat megoldása:

Az ismert nevezetes azonosságok alkalmazása és ekvivalens átalakítások után az

$$[1 - (x - y)^2] (x + y - 1) = 1999$$

egyenlőség adódik. Az 1999 prímszám, így a lehetséges felbontásokat megvizsgálva kapjuk az egyetlen egész megoldást, $(x, y) = (1000, 1000)$

Az 5.3.2. Feladat megoldása:

Az $x = y + a$ helyettesítés után az y -ban másodfokú

$$(3a - 2)y^2 + a(3a - 2)y + a^3 - 8 = 0$$

egyenlet adódik, melynek diszkriminánsa

$$D = (3a - 2)(-a^3 - 2a^2 + 32).$$

Ha $a \leq 0$, akkor $3a - 2 < 0$ és $-a^3 - 2a^2 + 32 > 0$. Ha $a \geq 3$, akkor $3a - 2 > 0$ és $-a^3 - 2a^2 + 32 < 0$, így látható, hogy D csak $a = 1$ és $a = 2$ lesz nemnegatív, mely esetek közül $a = 2$ -re D valóban teljes négyzet. Visszahelyettesítés után kapjuk az egyenlet két megoldását, a $(0, -2)$ és $(2, 0)$ számpárokat.

Az 5.3.3. Feladat I. megoldása:

Legyen $x = \frac{a+b}{2}$ és $y = \frac{a-b}{2}$ alkalmas a, b egészekkel. Ekkor az eredeti egyenlet átírható

az $a^2 + b^2 = 2b^3$ alakra, mely ekvivalens az $a^2 = b^2(2b - 1)$ egyenlettel. Ha $a = 0$, akkor $b = 0$, melyből $(x, y) = (0, 0)$ nyilván megoldás. Ha $b \neq 0$, akkor $2b - 1$ -nek egy páratlan négyzetszámmal kell lennie, ezért $2b - 1 = (2k + 1)^2$, vagyis $b = 2k^2 + 2k + 1$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy $a = \pm(2k + 1)(2k^2 + 2k + 1)$, végül az egyenlet összes egész megoldásához eljuthatunk. Az $(x, y) = (0, 0)$ triviális megoldás mellett paraméteres alakban adódnak a nem-triviális megoldások:

$$x = (k + 1)(2k^2 + 2k + 1); \quad y = k(2k^2 + 2k + 1);$$

és

$$x = -k(2k^2 + 2k + 1); \quad y = -(k + 1)(2k^2 + 2k + 1).$$

Az 5.3.3. Feladat II. megoldása:

A feladat a fenti megoldástól eltérő gondolatmenet segítségével is megoldható. Ha $x = dX$, $y = dY$ és $(X, Y) = 1$, akkor kapjuk, hogy $X^2 + Y^2 = d(X - Y)^3$. Ha $X = Y$, akkor $(x, y) = (0, 0)$ nyilván megoldás. Ha $X \neq Y$, akkor $X - Y \mid 2Y^2$ és $(Y, X - Y) = 1$, így $X - Y = \pm 2$, vagy $X - Y = \pm 1$. Ha $X - Y = 1$, akkor a visszahelyettesítés mutatja, hogy

$$x = (Y + 1)(2Y^2 + 2Y + 1); \quad y = Y(2Y^2 + 2Y + 1)$$

minden Y egész szám esetén megoldás. Ha $X - Y = 2$, akkor egyrészt a feltétel miatt X és Y is páratlan, másrészt az $X^2 + (X + 2)^2 = 8d$ egyenlőség adódik, mely pl. modulo 8 vizsgálva ellentmondáshoz vezet. A negatív esetek teljesen hasonlóan kezelhetők, rövid számolással kapható, hogy csak az $X - Y = -1$ eset ad megoldást, mégpedig az

$$x = -(Y - 1)(2Y^2 - 2Y + 1); \quad y = -Y(2Y^2 - 2Y + 1)$$

számpárt.

5.3.20. Megjegyzés. Megvizsgálhatjuk, hogy a feladat általánosításának tekinthető $x^n + y^n = (x - y)^{n+1}$ diofantikus egyenletnek melyek az egész megoldásai. Kezelhető-e ez az egyenlet a fenti módszerek valamelyikével, esetleg más módszerrel érdemes próbálkozni? Az ilyen és ehhez hasonló általánosítási lehetőségeket mindenképpen hasznos a tanulóknak felvetni, még akkor is, ha esetleg a megoldandó probléma utólag

túl nehéznek bizonyul. A matematikában tehetséges diákok viszonylag rövid idő alatt képesek lehetnek az önálló problémafelvetésekre, illetve azok teljes vagy részleges megoldására.

Az 5.3.4. Feladat megoldása:

Ismét segíthet, ha a változók számát úgy csökkentjük, hogy közöttük alkalmas összefüggések teljesülését írjuk elő. Ha pl. $c = b + 1$, akkor $a^2 = 2b + 4$ adódik, így ha $b + 2 = 2n^2$, ahol $n \in \mathbb{Z}$, akkor az

$$a = 2n$$

$$b = 2n^2 - 2$$

$$c = 2n^2 - 1$$

értékválasztás mellett végtelen sok egész megoldását kapjuk eredeti egyenletünknek.

5.3.21. Megjegyzés. Természetesen sok egyéb más paraméteres alakban is megadhatunk végtelen sok egész megoldást, sőt megmutatható, hogy az $a^2 + b^2 = c^2 + k$ diofantikus egyenletnek, minden $k \in \mathbb{Z}$ -re is végtelen sok megoldása van az egész számok körében.

Az 5.3.5. Feladat megoldása:

Egyik változó sem lehet 1-gyel egyenlő, és az egyenlet szimmetriája miatt feltehető, hogy $2 \leq x \leq y \leq z$. Kapjuk, hogy $\frac{3}{x} \geq \frac{3}{5}$, így csak az $x = 2, 3, 4$ és 5 értékeket kell a továbbiakban kipróbálnunk. Mind a négy esetben olyan kétváltozós diofantikus egyenlet adódik, melynek könnyen meghatározhatjuk a feltételeket kielégítő pozitív egész megoldásait:

$$(x, y, z) = \{(2, 11, 110); (2, 12, 60); (2, 14, 35); (2, 15, 30); (2, 20, 20); \\ (3, 4, 60); (3, 5, 15); (3, 6, 10); (4, 4, 10); (5, 5, 5)\}.$$

Természetesen a fenti értékhármasok bármely permutációja is megoldás.

Az 5.3.6. Feladat megoldása:

Ismét becslést alkalmazunk. Mivel

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 > (x + 1)^3 \iff 5x^2 - 9x + 7 > 0$$

minden x -re teljesül, kapjuk, hogy ha (x, y) nemnegatív megoldása az egyenletnek, akkor $y \geq x + 2$. Ugyanakkor $y < x + 3$ is fennáll $x \in \mathbb{N}$ esetén, hiszen

$$(x + 3)^3 > x^3 + 8x^2 - 6x + 8 \iff x^2 + 33x + 19 > 0.$$

Az egyenletnek így csak $y = x + 2$ esetén lehet megoldása, behelyettesítés után kapjuk, hogy $x^2 - 9x = 0$, amelyből az $(x, y) = \{(0, 2); (9, 11)\}$ számpárok adódnak.

Az 5.3.7. Feladat megoldása:

A becsléshez a számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget használjuk fel.

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \iff 5n - 4 \geq n^2.$$

Utóbbiból kapjuk, hogy $n \leq 4$. Ha $n = 1$, akkor $x_1 = 1$ megoldás. Szimmetriaokok miatt ismételten feltehető, hogy $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Ha $n = 2$, akkor $x_1 + x_2 = 6$, de sem a $(3, 3)$ sem pedig a $(2, 4)$ pár nem teljesíti a második feltételt. Ha $n = 3$, akkor $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, a szóba jövő $(2, 2, 7)$, $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 5)$, $(3, 3, 5)$ és $(3, 4, 4)$ számhármakok közül csak a $(2, 3, 6)$ teljesíti a második feltételt. (Itt egyszerűbben is eljáráhatunk, ha az $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$ „jól ismert”, a tanulókkal korábban megoldott diofantikus egyenletnek a pozitív egész megoldásait helyettesítjük az $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ feltételbe.) Ha $n = 4$, akkor a becslésben szereplő egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, vagyis csak $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 4$ esetén kaphatunk megoldást, amely valóban megfelelő.

Az 5.3.8. Feladat megoldása:

Az (n, n) , $(1, n)$ és $(n, 1)$ pár nyilván minden n pozitív egész szám esetén megoldás. A továbbiakban feltehető, hogy pl. $x < y$, valamint legyen $y = x + c$, ahol $c \geq 1$ egész szám. Behelyettesítést követően mindkét oldalt x^x -nel osztva kapjuk, hogy

$$x^c + \frac{c}{x^x} = \left(1 + \frac{c}{x}\right)^x.$$

Felhasználva, hogy a jobb oldal felülről korlátos és egy felső korlátja e^c , így $x^c < e^c$, végül $x \leq 2$ adódik. Ha $x = 2$, akkor $2^y = y^2 - y + 2$, melynek egyetlen (korábban fel nem sorolt) megoldása $y = 3$. Ha $y > 3$, akkor a bal oldal nagyobb lesz, mint a jobb oldal, ezért más megoldás nincs.

Az 5.3.9. Feladat megoldása:

Itt is próbálkozhatunk azzal a módszerrel, hogy az összes egész megoldás felírása

helyett – ami jelen esetben elég reménytelennek tűnik – csak bizonyos feltételek teljesülése mellett adunk meg végtelen sok nem-triviális megoldást. Ha pl. $z = -y$ -t helyettesítünk, akkor az eredeti egyenlet az $x^3 = x^2 + 2y^2$ -re vezet, majd egy újabb $y = tx$, $t \in \mathbb{Z}$ helyettesítés és egyszerűsítést követően az alábbi paraméteres megoldásokhoz jutunk:

$$\begin{aligned}x &= 2t^2 + 1 \\y &= t(2t^2 + 1) \\z &= -t(2t^2 + 1) .\end{aligned}$$

5.3.22. Megjegyzés. Az $x^3 = x^2 + 2y^2$ egyenlőséget átalakítva kapjuk, hogy $2y^2 = x^2(x - 1)$. Itt pl. az 5.2.4-ben látott módon is befejezhetjük a feladatot.

Az 5.3.10. Feladat megoldása:

Nyilvánvaló, hogy $z \geq 1$. Három esetet fogunk vizsgálni.

I. eset:

Ha $x = 0$, akkor a $7^y + 4 = 3^z$ egyenlőséget modulo 3 véve ellentmondást kapunk.

II. eset:

Ha $x \geq 1$ és $y = 0$, akkor az $5^x + 4 = 3^z$ egyenlőséget modulo 5 véve $3^z \equiv -1 \pmod{5}$ adódik, melyből maradékvizsgálattal kapjuk, hogy z egy $4k + 2$ alakú páros szám. Így

$$(*) \quad 5^x = (3^{2k+1} - 2)(3^{2k+1} + 2) .$$

A jobb oldalon lévő tényezők különbsége 4, ezért legfeljebb az egyikük lehet 5-nek pozitív egész kitevőjű hatványa, a másik 1-gyel egyenlő. Látható, hogy ez csak $k = 0$ esetén teljesül, innen pedig $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ valóban megoldás.

III. eset:

Ha $x \geq 1$ és $y \geq 1$, akkor az eredeti egyenletet modulo 7 véve a $3^z \equiv -3 \pmod{7}$ kongruenciát kapjuk, melyből maradékvizsgálattal adódik, hogy z -nek $6m + 4$ alakú páros számnak kell lennie. Az egyszerűbb jelölés miatt legyen $z = 2Z$. Ekkor

$$5^x 7^y = (3^Z - 2)(3^Z + 2) .$$

Mivel a jobb oldalon szereplő tényezők páratlanok, különbségük 4, ezért relatív prímek is. Mivel $x, y \geq 1$, ezért ez csak úgy teljesülhet, ha

$$3^Z - 2 = 5^x$$

$$3^Z + 2 = 7^y$$

vagy

$$3^Z - 2 = 7^y$$

$$3^Z + 2 = 5^x.$$

Mindkét egyenletrendszerből vonjuk ki a második egyenletből az első. Kapjuk, hogy $7^y - 5^x = 4$, illetve $5^x - 7^y = 4$. Az első esetben modulo 5 véve kapjuk, hogy y páros, a második esetben modulo 7 véve adódik x párossága. Mindkét esetben szorzattá alakíthatunk, és (*)-hoz hasonló érveléssel belátható, hogy egyikből sem kapunk már további megoldásokat.

Az 5.3.11. Feladat megoldása:

A megadott egyenlőségből x -et kifejezve kapjuk, hogy

$$x = \frac{y^2 - y + c}{(y - 1)(y + 1)}.$$

Mivel x pozitív egész, ezért kell, hogy $y - 1 \mid c$, illetve az $y^2 - y = y^2 - 1 - (y + 1) + 2$ átalakítás mutatja, hogy az $y + 1 \mid c + 2$ oszthatóság is szükségképpen teljesül. Kongruenciákra áttérve

$$c \equiv 0 \pmod{y - 1}$$

$$c \equiv -2 \pmod{y + 1}.$$

Mivel mindkét kongruenciának megoldása a $c = y - 1$, ezért a kínai maradéktétel miatt

$$c \equiv y - 1 \pmod{y^2 - 1}, \text{ ha } y \text{ páros}.$$

Ha $y = 2$, akkor $c \equiv 1 \pmod{3}$, így próbáljunk ki néhány kongruenciát kielégítő „kis” c értéket. Rövid számolás után látható, hogy $c = 10$ megfelelő, mert ekkor az $y - 1 \mid 10$ és $y + 1 \mid 12$ oszthatóságok pontosan három pozitív egész $y > 1$ -re teljesülnek: $y = 2$, $y = 3$ és $y = 11$. A hozzájuk tartozó x értékek rendre $x = 4$, $x = 2$ és $x = 1$.

5.3.23. Megjegyzés. Ekvivalens átalakításokkal az egyenlet szorzattá alakítható:

$$(y-1)(xy+x-y)=c.$$

Ha c -t pl. $c=pq$ alakban keressük, ahol p és q különböző prímszámok, akkor a megfelelő felbontásokból adódó megoldások:

$$\left(\frac{c+2}{3}, 2\right); \left(\frac{p+q+1}{p+2}, p+1\right); \left(\frac{p+q+1}{q+2}, q+1\right); (1, c+1).$$

Ha $c \equiv 1 \pmod{3}$, akkor az első számpár mindkét tagja egész, az utolsó pár nyilván mindig az, így az kell, hogy a második és harmadik pár közül pontosan az egyiknek legyen mindkét komponense egész. Ez az első előírt alakú c -re ($c=10$) rögtön teljesül. Megvizsgálhatjuk azt is, hogy további „kis” c értékekre találhatunk-e még megoldást, esetleg más alakú számokkal is kísérletezhetünk a tanulókkal.

Az 5.3.12. Feladat megoldása:

Legyen $x = \frac{a}{b}$ és $y = \frac{c}{d}$, ahol a, b, c, d pozitív egészek és $(a, b) = (c, d) = 1$. A behelyettesítést követő egyszerűsítések után kapjuk, hogy

$$ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2) = 3abcd.$$

$(ab, a^2 + b^2) = 1$, hiszen ha egy p prímszámra $p \mid ab$ és $p \mid a^2 + b^2$ is teljesül, akkor $p \mid a$ és $p \mid b$ is fennáll, ami ellentmond a feltételnek. Ugyanígy belátható, hogy $(cd, c^2 + d^2) = 1$, azaz a fenti egyenletben $ab \mid cd$ és $cd \mid ab$, ami a pozitivitás miatt azt jelenti, hogy $ab = cd$. Így az

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3nab$$

összefüggés adódik, melyet modulo 3 vizsgálva kapjuk, hogy a, b, c és d közül vagy mindegyik 3-mal osztható, vagy pontosan az egyikük lesz 3-mal osztható. Az első esetben az $(a, b) = (c, d) = 1$, míg a második esetben az $ab = cd$ egyenlőség miatt jutunk ellentmondásra.

Az 5.3.13. Feladat megoldása:

Ekvivalens átalakításokkal kapjuk, hogy

$$p(p+1) = (n-q)(n+q+1).$$

A p a jobb oldalon lévő második tényezőnek osztója, mert ha $p \mid n-q$, akkor $p \leq n-q$, és akkor

$$n(n+1) = p^2 + q^2 + p + q < (p+q)^2 + (p+q) \leq n^2 + n,$$

ami ellentmondás. Mivel $n > p$, így létezik olyan $k \geq 2$ egész szám, amelyre $n+q+1 = kp$. Behelyettesítést követően kapjuk, hogy

$$p(p+1) = kp(kp-2q-1).$$

Egyszerűsítés és átrendezés után a

$$2kq = k^2p - k - p - 1$$

egyenlőség adódik, melynek jobb oldala szorzattá alakítható:

$$(*) \quad 2kq = (k+1)(kp-p-1).$$

Ha itt q osztaná a második tényezőt, akkor $kp-p-1 = mq$ -t írva a $2k = (k+1)m$ összefüggéshez jutunk, ami $k \geq 2$ mellett lehetetlen. Mivel $(k, k+1) = 1$, ezért q az első tényezőt, míg k a második tényezőt osztja. Léteznek olyan u és v pozitív egészek, amelyekre

$$\begin{aligned} k+1 &= uq \\ kp-p-1 &= vk. \end{aligned}$$

Ezt $(*)$ -ba helyettesítve, majd egyszerűsítve $uv = 2$ adódik. Pl. ha $u = 1$ és $v = 2$, akkor a második egyenletből $k = \frac{p+1}{p-2} = 1 + \frac{3}{p-2}$, azaz $p = 3$ vagy $p = 5$. A második esetben hasonló számolások után kapjuk meg először a megfelelő p, k , majd visszahelyettesítések után a q, n értékeket. Az egyenlet összes megoldása:

$$(p, q, n) = \{(3, 5, 6); (5, 3, 6); (2, 2, 3)\}.$$

Az 5.3.14. Feladat megoldása:

Az egyenletet átrendezve, majd az ismert nevezetes azonosságot alkalmazva kapjuk, hogy

$$x^n = (y-1)(y^n + y^{n-1} + \cdots + 1).$$

A jobb oldalon a második tényezőt az egyszerűség kedvéért a továbbiakban jelöljük q -val. Ekkor $q \mid x^n$, így a feltétel miatt $(q, n+1) = 1$. Osszuk el q -t maradékosan $y-1$ -gyel, ekkor

$$q = (y-1) [y^{n-1} + 2y^{n-2} + \dots + (n-1)y + n] + n+1.$$

Világos, hogy $(q, y-1) = 1$, mert ellenkező esetben létezne egy olyan p prímszám, melyre $p \mid q$ és $p \mid y-1$, de akkor $p \mid n+1$ és $p \mid q \mid x$ miatt $p \mid (x, n+1) = 1$ teljesül, ami ellentmondás. Azt kaptuk, hogy q -nak teljes n -edik hatványnak kell lennie. Ez azonban az alábbi becslés miatt nem teljesülhet $n > 1$ -re

$$(y+1)^n = y^n + ny^{n-1} + \binom{n}{2}y^{n-2} \dots + ny + 1 > q > y^n.$$

Ha $n = 1$, akkor $x = y^2 - 1$, ami páros y esetén teljesíti az $(x, 2) = 1$ feltételt.

Az 5.3.15. Feladat megoldása:

Felhasználjuk az 5.1.5. Megjegyzés végén szereplő állítást, melyből következik, hogy az $x^2 + y^2 + 1 = xyz$ egyenletnek csak $z = 3$ esetén van megoldása a pozitív egész számok körében. Ha $m > 0$ és $n > 0$, akkor $pq \mid p^2 + q^2 + 1$, így a fentiek miatt a $\frac{p^2+q^2+1}{pq}$ tört értéke csak 3 lehet. Mivel az eredeti egyenletnek $p = 0$ és $q = 0$ nem lehet megoldása, ezért pq -val történő osztást követően kapjuk, hogy

$$p^{m-1}q^{n-1} = \frac{p^2 + q^2 + 1}{pq} + 2 = 5.$$

A felbontásból adódó lehetőségeket összevetve a $p^2 + q^2 + 1 = 3pq$ egyenlettel, az alábbi számnégyesek adnak megoldást:

$$(m, n, p, q) = \{(1, 2, 13, 5); (1, 2, 2, 5); (2, 1, 5, 2); (2, 1, 5, 13)\}.$$

Ha pl. $m = 0$, akkor a $q^n = (p+q)^2 + 1$ egyenletet kell megoldanunk. A 4.0.13. Feladatban beláttuk, hogy az $x^2 + 1 = y^n$ egyenletnek $n \geq 2$ esetén n paritásától függően csak az $x = 0$ és $y = \pm 1$ megoldása, melyből nem adódik újabb megfelelő számnégyes. Ha $n = 1$, akkor $q < q^2 + 1 < (p+q)^2 + 1$, ami ismét nem szolgáltat gyököt. Ha $n = 0$, akkor $p = q = 0$ adódik, melyre az eredeti egyenlet bal oldala nem értelmezett. Az $n = 0$ és $m \in \mathbb{N}$ esetben a fentiekhez hasonlóan járhatunk el.

Az 5.3.16. Feladat megoldása:

Az egyenletet átrendezve, majd nevezetes azonosság segítségével szorzattá alakítva a jobb oldalt, kapjuk, hogy

$$p^x = (y + 1)(y^{p-1} - y^{p-2} + \dots - y + 1).$$

Ekkor $y + 1 = p^z$, ahol $z \in \mathbb{N}$. Ha $z = 0$, akkor $y = 0$ és $x = 0$, ami azt jelenti, hogy az egyenlőség bármely páratlan p prímre teljesül. Ha $z \geq 1$, akkor

$$p^x = (p^z - 1)^p + 1 = p^{zp} - p \cdot p^{z(p-1)} + \binom{p}{2} p^{z(p-2)} - \dots - \binom{p}{p-2} p^{2z} + p^{z+1}.$$

Mivel $1 \leq k \leq p-1$ esetén $p \mid \binom{p}{k}$, ezért az utolsó tagot kivéve, minden tag p -nek legalább a $z+2$ -edik hatványával osztható, így p^{z+1} pontos osztója p^x -nek. Behelyettesítve $x = z+1$ -et, a

$$p^{zp} - p \cdot p^{z(p-1)} + \dots - \binom{p}{p-2} p^{2z} = 0$$

egyenlőséghez jutunk. Ha $p = 3$, akkor $3^{3z} - 3^{2z+1} = 0$ adódik, melyből $z = 1$, ahonnan $x = y = 2$. Amennyiben $p \geq 5$, úgy $\binom{p}{p-2} = \frac{p(p-1)}{2}$ miatt a bal oldal utolsó tagja p^{2z+1} -nel osztható, míg a többi tag p -nek $2z+1$ -nél magasabb hatványával. Ez ellentmondás, hiszen a 0 p -nek bármilyen nagy hatványával osztható.

5.3.24. Megjegyzés. Catalan híres sejtése volt, hogy csak a 8 és 9 olyan egymást követő pozitív egész számok, melyek teljes hatványok. Ezt a sejtést 2002-ben Mihai-lescu igazolta.

Az 5.3.17. Feladat megoldása:

Ekvivalens átalakítások után a

$$z^4 - (x^2 + y^2)z^2 - x^2y^2 = 0,$$

z^2 -ben másodfokú egyenlethez jutunk. Ha az eredeti egyenletnek létezne megoldása a pozitív egész számok körében, akkor diszkriminánsának $(D = x^4 + 6x^2y^2 + y^4)$ teljes négyzetnek kell lennie. Ha bevezetjük az $a = x^2 + y^2$ és $b = 2xy$ helyettesítést, akkor egyrészt $D = a^2 + b^2$, másrészt $a^2 - b^2 = (x^2 - y^2)^2$. Ha $x \neq y$, akkor az ismert tételből (lásd [10]) kapjuk, hogy két nem-nulla négyzetszám összege és különbsége nem lehet

egyszerre négyzetszám, így D sem lehet teljes négyzet. Ha $x = y$, akkor $D = 8x^4$ ismét nem teljes négyzet. Ez az ellentmondás igazolja, hogy az eredeti diofantikus egyenletnek nincsen megoldása a pozitív egész számok körében.

5.3.25. Megjegyzés. Az idézett tétel bizonyítása megtalálható pl. a ([10]) könyvben, mint a végtelen leszállás módszerének egyik szép alkalmazása, de jelen disszertációban is találhatunk példát a „descente infinie” módszer használatára (4.0.11).

Az 5.3.18. Feladat megoldása:

Először a mértani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget használjuk fel:

$$(xy)^n = (x^2 + y^2)^m \geq (2xy)^m > (xy)^m \implies n > m.$$

Legyen p^α x -nek, míg p^β y -nak pontos osztója. Ha pl. $\beta > \alpha$, akkor egyrészt

$$p^{2\alpha} \parallel x^2 \quad \text{és} \quad p^{2\beta} \parallel y^2 \implies p^{2m\alpha} \parallel (x^2 + y^2)^m,$$

másképp

$$p^{(\alpha+\beta)n} \parallel (xy)^n.$$

Kapjuk, hogy

$$2m\alpha = (\alpha + \beta)n > 2n\alpha \implies m > n,$$

ami ellentmondás. Analóg számolással kapjuk, hogy $\alpha > \beta$ is ellentmondásra vezet. Tehát $\alpha = \beta$ minden prímmre, így $x = y$, és az eredeti egyenletből $2^m = x^{2n-2m}$ adódik. Itt x szükségképpen 2-hatvány, azaz $x = 2^k$ alkalmas k pozitív egész számmal. Ekkor $2kn = (2k + 1)m$, így $(m, n) = 1$ és $(2k, 2k + 1) = 1$ miatt $m = 2k$, azaz $(x, y, n) = (2^{\frac{m}{2}}, 2^{\frac{m}{2}}, m + 1)$.

Az 5.3.19. Feladat megoldása:

Tekintsük a megadott egyenletet x -ben másodfokú egyenletnek. Ekkor az egyenlet D diszkriminánsának ($D = 21y^2 - 20$) teljes négyzetnek kell lennie, ezért megoldandó az $a^2 - 21b^2 = -20$ ún. negatív Pell-egyenlet. Mivel az $(1, 1)$ pár megoldás, ezért

$$(*) \quad (1 - \sqrt{21})(1 + \sqrt{21}) = -20.$$

Az $a^2 - 21b^2 = 1$ Pell-egyenlet alapmegoldása (pl. táblázatból) $(a_0, b_0) = (55, 12)$. Az alábbi kettős rekurzió segítségével kaphatjuk az összes különböző pozitív megoldását

az alapegyenletnek ($n \geq 1$):

$$a_n = 55a_{n-1} + 252b_{n-1}$$

$$b_n = 12a_{n-1} + 55b_{n-1}.$$

Mivel

$$a_n^2 - 21b_n^2 = (a_n - \sqrt{21}b_n)(a_n + \sqrt{21}b_n) = 1,$$

ezért ha az utolsó egyenlőség, valamint a (*) felbontás megfelelő oldalait összeszorozzuk, akkor végtelen sok különböző pozitív megoldását kapjuk a negatív Pell-egyenletnek. (Sajnos nem állíthatjuk, hogy az összes pozitív (a, b) megoldás előáll ilyen módon.) A műveletek elvégzése után az

$$(a_n - 21b_n)^2 - 21(a_n - b_n)^2 = -20$$

egyenlőség adódik. Ha ezt behelyettesítjük az eredeti $x^2 - 5yx + y^2 + 5 = 0$ egyenletbe, akkor az alábbi alakban kapunk végtelen sok különböző (x_n, y_n) megoldást:

$$x_n = 2a_n + 8b_n$$

$$y_n = a_n - b_n,$$

ahol $(a_0, b_0) = (55, 12)$ és az a_n, b_n sorozatokat definiáló összefüggésekből nyilvánvalóan $a_n > b_n$ is teljesül, így valóban különböző pozitív egész (x_n, y_n) megoldások adódnak.

6. fejezet

A témakör egy lehetséges feldolgozása szakköri órák keretében

Ebben a fejezetben arról a – hét foglalkozásból álló – szakköri tevékenységről lesz szó, amelyet 2018. november közepétől kezdődően két hónapon keresztül végeztem az iskolámban, a budapesti Baár-Madas Református Gimnáziumban. Az első foglalkozást 10 tanuló részvételével tartottam meg, az egyes szakköri alkalmak időtartama általában 60 perc volt. A diákoknak az évfolyamok szerinti megoszlása a következőképpen alakult: 2 fő a 12.*b* tagozatos¹, 2 fő a 11. matematika fakultációs, 1 fő a 11.*b* tagozatos osztályból, 4 fő a 10.*b* tagozatos, valamint egy tanuló a 10.*c* alap matematika² csoportból vett részt az első szakköri órán. Fontos hangsúlyozni, hogy a szakkörre általában kiváló képességű, a matematikai problémák iránt különösen fogékony, érdeklődő tanulók jelentkeztek, akiknek döntő többsége (8 fő) saját tanítványom, de úgy gondolom, hogy a más osztályokból érkező diákokkal is sikerült egy nyugodt légkörű, korrekt munkakapcsolatot kialakítanom. Külön öröm volt számomra, hogy a kezdeti létszám hamar állandósult, nem volt számottevő lemorzsolódás, sőt egy-egy érdekesebb téma előtt olyan diákok is jelentkeztek, akik egyébként nem voltak állandó résztvevői a szakkörnek.

¹Az iskolában a matematika tagozat nem a speciális matematikai osztályt, hanem a hat évfolyamos képzésben a matematikát heti 5 órában tanuló osztályokat jelenti.

²Az alap matematika csoportok heti óraszám 3.

6.1. A témakör tanításával kapcsolatos előzetes észrevételek, tervezés, célok megfogalmazása

A tervezés során automatikusan adódott a kérdés, hogyan, milyen tartalommal töltssem meg a rendelkezésre álló időkeretet? Teljesen természetesnek hatott az a gondolat, hogy már az első alkalomtól kezdve a témakör felépítése megfelelően illeszkedjen a tanulók előzetes ismereteihez, ugyanis a diákok közül csak az általam tanított 12.b és a 10.b osztályos tanulóknak volt némi jártasságuk a témában, miután egyszerűbb diofantikus egyenleteket tárgyaltunk már a 9. osztályban is a számelméleti anyagrész végén. Az erre fordítható órakeret általában 2 – 3 órában van meghatározva, amely éppen elegendő arra, hogy a feladatgyűjteményben szereplő típusfeladatok közül legalább néhányat meg tudjunk beszélni. Célszerűnek látszott a szakköri órákat az egyszerűbb „szorzat=szám” típusú egyenletek vizsgálatával elindítani. Itt szeretném jelezni, hogy erről bővebben a 6.2.1. részben lesz szó. Ez egyrészt magabiztosságot adott azoknak a tanulóknak, akik a korábbi tanulmányaikból már rendelkeztek bizonyos fogalmakkal, másrészt nem riasztották el azokat a diákokat sem, akiknek a diofantikus témakör még teljesen új területnek számított. A későbbi részek tárgyalása esetében is igyekeztem egyfajta fokozatos építkezést követni, folyamatosan figyelve a tanulóktól érkező reakciókat. A második óra anyaga, a „szorzat=hatvány” típusú egyenletek már minden résztvevőnek egy komoly fogalmi ugrást jelentett, ami számomra is világossá tette, hogy a foglalkozásokat ezentúl érdemes úgy alakítani, hogy egy-egy nagyobb egységre a továbbiakban (legalább) két tanóra jusson. Ezt az utat követtem a harmadik és negyedik alkalommal is, amikor a különféle becslések alkalmazásával megoldható feladatok, egyenletek megoldhatatlanságának bizonyítása modulo m maradékok segítségével, illetve a végtelen leszállás módszere került górcső alá.

Természetes, hogy egy ilyen szakkörnek az egyik célja lehet, hogy segítse a diákokat az országos tanulmányi versenyekre történő eredményes felkészülésben. A problémamegoldási ötlettár gazdagítása, valamint a különböző megoldási módszerek, technikák elsajátítása megítélésem szerint nem csak alapkőve lehet egy sikeres versenyszereplésnek, – hanem ami ettől talán még sokkal fontosabb –, órasi hozadéka van a kreatív gondolkodás fejlesztésében, de különféle problémaszituációkban

a helyes irány, a megfelelő döntések meghozatalában is mérhetetlenül nagy jelentőséggel bír. Mindezek mellett az volt a tapasztalatom, hogy a tanulók érdeklődését is nagymértékben sikerült felkeltenem olyan, számukra újszerű anyagrészek tanításával, amelyekkel reguláris órán nem lett volna alkalmuk találkozni. Ilyen volt többek között a kongruencia fogalma, amelyet csak nagyon röviden, pusztán az egyszerűbb jelölésmód kedvéért vezettem be, ennek ellenére az egyik tanuló olyan sikeresen adaptálta a szakkörön elhangzottakat, hogy egy kis otthoni kutatómunkát követően a normál tanórán is – egy teljes indukciós bizonyítás kapcsán – sikerrel alkalmazta az önállóan elsajátított ismereteket. Az ilyen jellegű tanulói aktivitások elősegítése és támogatása érdekében minden anyagrészhez egy-egy feladatsort készítettem, amelyen az egyszerűbb házi feladatok mellett bonyolultabb, általában komoly kihívást és alapos utánajarást igénylő nehezebb beadható feladatok is szerepeltek. A diákok szép számmal adtak be ilyen feladatmegoldásokat, ezekből készült egy válogatás, amely a Függeléknek a 9.4. alfejezetében található. A többségében valóban elegáns és kifogástalan tanulói megoldások mellett szándékosan olyan munkák is bekerültek a válogatásba, amelyek valamilyen okból nem tekinthetők teljesnek, esetleg hibás gondolatot vagy érvelést tartalmaznak. Ezeknek a hibáknak, hiányosságoknak a megbeszélése általában mindig az óra elején történt, fontosnak éreztem a tanulságosabbakat külön is kiemelni. Rendszerint a beadott dolgozatokat a tanulók részletesen kijavítva és lepontozva kapták vissza, ennek alapján kialakulhatott az otthoni feladatmegoldást is erőteljesen ösztönző, diákok közötti pontverseny. Mindezek együttes hatására a szakkör előrehaladtával észrevehetően csökkent a hibák és hiányosságok száma, illetve jelentős javulást tapasztaltam a megoldások leírásának minőségében is.

A szakkör elindításakor alapvetően fontos szempont volt, hogy a gyerekek – a disszertáció címében szereplő ígérethez híven – némi ízelítőt kapjanak nem szokványos diofantikus egyenletek vizsgálatából, megismerkedjenek olyan alkalmazásokkal, amelyek felsőbb matematikai módszereket igényelnek. Ennek a kíváncsiságnak végig, de különösen a pitagoraszai számhármassokról szóló ötödik és hatodik, illetve a szóban forgó foglalkozássorozatot lezáró (Pell-egyenletekről szóló) hetedik órán igyekeztem eleget tenni. Ezeknél az anyagrészeknél fokozott tanári irányítás vált szükségessé, szemben a korábbiakkal, ahol kifejezetten törekedtem a felfedeztető módszer alkalmazására. A pitagoraszai számhármassok esetében a képlet levezetése után célzottan olyan feladatok kerültek terítékre, ahol a diákoknak bőségesen lehetőségük nyílt a

kísérletezésre, önálló sejtéseik megfogalmazására. A Pell-egyenletekről szóló óra igazi egyetemi kitekintőként, egyfajta látókörbővítésként szolgált. Legnagyobb sajnálatomra az időkeretbe ezúttal nem fértek bele a Gauss-egészek, de a terveim között szerepel, hogy a közeljövőben elindítok egy mostanihoz hasonló szakkört a komplex számokról, így a megfelelő elméleti megalapozás után a Gauss-egészekkel kapcsolatos alkalmazások is tárgyalhatóvá válhatnak.

A szakkörön feldolgozásra került, valamint a beadható házi feladatoknak szánt példákbl egy lista készült (lásd Függelék), amely lényegesen megkönnyítheti annak visszakeresését, hogy az adott feladat mely sorszámmal szerepel az értekezésben, esetleg milyen további, a disszertációban előforduló problémának a tárgyalását készítheti elő. Meggyőződésem, hogy célszerű a dolgozatban szereplő feladatsorokat, – de akár a korábbi részekben található nehezebb problémákat is – ezen lista szerinti bontásban, vagyis egy-egy kisebb, de egymással szorosan összefüggő egységbe gyúrva feldolgozni a tanulókkal.

6.2. A szakkör

Az alábbiakban áttekintjük a szakköri foglalkozásokon feldolgozásra került problémákat, helyenként külön kiemelve a feladatmegoldás egyes fázisaiban módszertani szempontból (is) lényegesnek gondolt tanulóit, illetve tanári reakciókat. A szakkörön a disszertáció szinte mindegyik fejezetéből számos feladatot dolgoztunk fel (lásd 9.3.), de természetesen az ezekben felhasznált eszközök (pitagoraszai számhármassok, Pell-egyenlet) tárgyalását is be kellett iktatnunk. Ez utóbbiak egyben valamennyi tekintést is jelentettek az egyetemi „magasabb” matematikába, és így az egész szakkör tehetséggondozó, versenyelőkészítő jellegét is erősítették.

Megjegyezzük, hogy a V-VI. – pitagoraszai számhármassokról –, valamint a VII. – Pell-egyenletekről – szóló szakköri foglalkozásokon tárgyalt elméleti anyagrészek az egész disszertációra nézve alapvető jelentőséggel bírnak. Az itt szereplő módszerekre, eljárásokra és formulákra az értekezésben több ízben történik hivatkozás, ezért a szóban forgó kiemelt fontosságú részeknek a Függelékben egy külön alfejezetet szentelünk. Megemlítjük továbbá, hogy az összefoglalókban szereplő feladatok számozása az órákhoz készített, a Függelékben található feladatsorok számozását követi.

6.2.1. Az első foglalkozás

I/1. Feladat. *Egy tál süteményt szeretnénk feldarabolni a téglalap alakú tepsi oldalaival párhuzamos vágásokkal úgy, hogy a szeletelés után a tepsi szélével érintkező (kicsit égett) sütemények száma egyenlő legyen a tepsi szélével nem érintkező sütemények számával. Hogyan tehetjük ezt meg?*

Az első feladatban, amely elég közismert – általában normál tanórán is megoldjuk – szinte azonnal, a várakozásaimnak megfelelően sikerült felírni a tanulóknak a megoldáshoz vezető $(x-2)(y-2) = 2x+2y-4$ diofantikus egyenletet, ahol $x-1$ a vízszintes, $y-1$ a függőleges vágások száma. Érdekes volt számomra, hogy a megoldásokhoz senki nem próbált kísérleti úton eljutni, talán túlságosan hangsúlyos volt az óra elején tartott rövid bevezetőmben, hogy a továbbiakban különféle érdekes, speciális egyenletekkel fogunk foglalkozni, így valószínűleg rögtön törekedtek arra, hogy a feltételek alapján fel tudják írni egyenlet formájában a megfelelő összefüggést. A kapott egyenlőséget 0-ra rendeztük, majd ezen a ponton egy lényeges tanári rávezetés szükségesnek látszott, hogy elérjük a számunkra célravezető $(x-4)(y-4) = 8$ előállítást. A „szorzat=szám” típusú egyenletet felismerve a diákok könnyen felírták a feladat szempontjából szóba jövő megoldásokat. Miután eredetileg a szakkör egyik céljaként lett megjelölve, hogy lehetőség szerint többféle megoldási módszert tárgyaljunk, és a diákok közül mindenki találkozott már valamilyen síkbeli alakzat egyenletével, kértem, hogy próbálják kitalálni, hogy az egyenlet milyen síkbeli alakzatot definiál. A $y = 4 + \frac{8}{x-4}$ felírás mutatja, hogy hiperbolával van dolgunk, és az eredeti kérdés másképpen fogalmazva az, hogy a hiperbolának melyek az első síknegyedben lévő rácspontjai. Ilyen módon is megkaptuk az első megoldásban talált $x = 6$, $y = 8$, illetve az $x = 5$, $y = 12$ értékeket. (x és y szerepe felcserélhető.)

I/2. Feladat. *Három prímszám szorzata ötszöröse összegüknek. Melyek ezek a prímek?*

A második feladat megoldását elég nehezen sikerült elindítani, mert legnagyobb meglepetésemre a $pqr = 5(p+q+r)$ egyenletben az 5-tel való oszthatóságot, és a p, q, r számoknak a prím voltát csak egy tanuló tudta összekapcsolni. Innentől már minden diák számára világossá vált, hogy a feladat megoldható az előző feladattal analóg módon, hiszen ismét egy hasonló szerkezetű kétváltozós diofantikus egyenletet kell vizsgálnunk. Az egyik tanuló felvetette, hogy mi lenne akkor, ha p, q, r egyikéről

sem tennénk fel, hogy prímek, hanem az előző feladathoz hasonlóan a pozitív egész, esetleg az egész számok körében keresnénk meg a megoldásokat. Az érdekesnek látszó általánosabb kérdést nyitva hagytuk, bár talán néhány órával később, többféle megoldási módszer ismeretében hasznos lett volna visszatérni erre a felvetésre, amelyre végül – érdemi megoldási javaslatok hiányában – nem került sor.

I/3. Feladat. *Ottlik Géza, a kiváló prózaíró, matematikai tanulmányokat is folytatott. Ezzel kapcsolatos visszaemlékezéseiben szerepel az alábbi feladat: Bizonyítsuk be, hogy bármely $p > 2$ prím esetén $\frac{2}{p}$ pontosan egyféleképpen írható fel két különböző pozitív egész reciprokának összegeként. (Az összeadandók sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)*

A harmadik feladat felvezetéseként felolvastam a diákoknak egy kedves történetet, amelyet maga Ottlik Géza mesél el, és amelynek a szövege a KöMaL 1986. évi októberi számában is megjelent. Azt kértem a tanulóktól, hogy ne ugorjanak neki rögtön az általános problémának, hanem először néhány kis p értékre próbálják megtalálni a feladat szövege szerinti egyetlen különböző pozitív egész x, y megoldást. A $p = 3$ esetben az egyik tanuló javaslatára a $\frac{2}{3}$ -ot bővítettük $\frac{4}{6}$ -ra, így azonnal megkaptuk az $\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ összefüggést, amelyből adódott a (feladat szövege szerinti) $x = 6$ és $y = 2$ – sorrendtől eltekintve – egyértelmű megoldás. Néhány további p -re is gyorsan megtalálták a megfelelő x és y értékeket, sőt a konkrét példák alapján az egyik végzős diák azt a sejtést fogalmazta meg, hogy az egyik változó éppen p -szerese lesz a másiknak. Arra biztattam, hogy próbálja meg önállóan ellenőrizni a sejtését, bár azt közösen megállapítottuk, hogy ennek az egy megoldásnak a megtalálásból még nem következik az egyértelműség, azaz nincs kizárva, hogy esetleg létezik még további, a feltételeket kielégítő számpár. Kis idő múlva a tanuló jelezte, hogy nem boldogul a bizonyítással, így jobbnak láttam rátérni a probléma általános vizsgálatára, természetesen azzal a megjegyzéssel, hogy amennyiben sikerül a feladatot megoldani, úgy arra is fény derül majd, hogy helyes volt-e a sejtés. Az egyenlet felírása után az előzetes várakozásaimnak megfelelően a $2xy - px - py = 0$ alakból történő szorzat-előállítás jelentett gondot, hiszen itt az xy (1-től különböző) együtthatója miatt nem teljesen automatikusan adódik a továbblépés. Ezen a ponton újra be kellett avatkoznom, arra kérve a tanulókat, hogy próbáljanak visszaemlékezni olyan feladatsituációra a korábbi tanulmányaikból, amelyben pl. egyenletmegoldás közben egy alkalmas ekvivalens

átalakítás terelt minket a jó irányba. A 2-vel történő beszorzásra többen rájöttek a saját tanítványaim közül, míg volt olyan tanuló, aki a 2-vel való egyszerűsítést választotta, gondolom, hogy ez a kis eltérés talán annak köszönhető, hogy a másodfokú egyenlet megoldóképletének levezetésekor a szaktanár melyik átalakítást ($4a$ -val való beszorzás vagy a -val történő osztás) preferálja. A szorzatalakban való előállítás után minden gond nélkül sikerült felírni a megoldásokat, amelyből adódtak a – sorrendtől eltekintve egyértelmű – $x = \frac{p+1}{2}$, $y = \frac{p(p+1)}{2}$ értékek, ráadásként így a korábbi sejtés helyességéről is meggyőződhattunk.

I/4. Feladat. *A sík sokszögekkel való hézagmentes és átfedés nélküli lefedését parkettázásnak vagy csempézésnek nevezzük. Melyek azok a **szabályos** sokszögek, amelyekkel a sík parkettázható?*

A negyedik feladatot – a legnagyobb sajnálatomra – időhiány miatt már nem lehetett az előre eltervezett módon felépíteni, pedig nagyon érdekes vonatkozásai (pl. Penrose-féle csempézés, hogyan lehet a leghatékonyabban egyenlő részekre osztani a teret minimális anyagigénnyel? stb.) vannak az általánosabb problémának, amelyről a téma iránt érdeklődőknek otthonra egy érdekes olvasnivalót is ajánlottam a feladatlapra. Az eredeti kérdésünkre visszatérve a tanulók viszonylag rövid idő alatt előálltak a három lehetséges szabályos sokszöggel, sőt az egyik diák kijelentette, hogy 6-nál nagyobb oldalszámú sokszögeket nem is érdemes vizsgálni, hiszen ennek egy belső szöge már nagyobb 120° -nál, azaz egy csúcsnál legfeljebb két sokszög találkozhatna, ami ellentmondás. Ennek precíz alátámasztása, illetve a korábbi módszerek elmélyítése, gyakorlása végett felírtuk a megfelelő diofantikus egyenletet, amelyből valóban a korábban megtalált szabályos sokszögek adódtak.

6.2.2. A második foglalkozás

Mivel a foglalkozásra előzetesen tervezett feladatok, illetve a megoldáshoz szükséges ötletek lényegében minden tanuló számára teljesen ismeretlen terepet jelentettek, ezért jóval szerényebb tanulói aktivitásra számítottam, mint az első alkalommal.

II/1. Feladat. *Adjuk meg azokat az (x, y) egész számpárokat, melyekre teljesül, hogy*

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4.$$

A nyitó feladattal kapcsolatban rögtön megjegyezték, hogy ha a jobb oldalon y^4 helyett 0 állna, akkor egy másodfokúra vezető egyenlettel lenne dolgunk, amelyet könnyen meg tudnánk oldani. Talán az előző foglalkozás hozadékaként itt jött egy újabb ötlet, alakítsuk szorzattá a bal oldalt, bár az egyik tanuló azonnal jelezte, hogy akkor a jobb oldalon egy konstans állt, így az ottani gondolatmenet a mostani esetre nem alkalmazható, ráadásul a bal oldalon lévő kifejezés szorzatalakban történő előállítását sem lehet egész együtthatókkal elérni. Ezen a ponton azt javasoltam, hogy ilyen könnyen ne engedjük el a másodfokú vonalat, próbálkozzunk teljes négyzetté kiegészítéssel, ami számukra egy teljesen megszokott átalakítás a témakörben. Legtöbben a természetesen adódó $(x^3 + \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4} = y^4$ úton indultak el, a rutinosabb 12. osztályos tanulók a kényelmesebb, 4-gyel történő felszorzással operáltak. Innen már nem volt különösebben nehéz probléma megtalálni azt a felírást, amelyből a szokásos módon megkaptuk az egyenlet egész gyökeit. Megbeszéltük azt is, hogy a négyzetszámok közötti különbségek vizsgálatával is befejezhattük volna a megoldást. Fontosnak éreztem, hogy ennél a példánál beszéljük meg azt a másik hatékony módszert, miszerint az egyenletet x^3 -ban másodfokú egyenletként kezelve x -re csakis akkor kaphatunk egész megoldást, ha a diszkrimináns négyzetszám. Rávezető kérdésekkel próbáltam elérni, hogy ez a fontos gondolat a megoldóképlet felírása után lehetőleg valamelyik tanuló szájából hangozzék el.

II/2. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenletet a pozitív egész számok körében.*

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

A második feladatban a várákozásnak megfelelően mindenki a bal oldalon lévő köbszámok különbségének szorzattá alakításával próbált elindulni, de ismervén a feladat kétféle megoldását, éreztem, hogy ennél messzebb tanári segítség nélkül aligha fognak jutni. Az egyenletből azonnal leolvasható, hogy $x > y$, ezért indítványoztam, hogy a különbséget jelöljük n -nel, ahol $n \geq 1$, majd rendezzük az egyenletet az y változó szerint. Innen kaptuk, hogy

$$(3n - 1)y^2 + (3n^2 - n)y + n^3 - 61 = 0.$$

Az egyik tanuló felvetette, hogy az előző példában megismert módszerrel esetleg lehetne folytatni, mire egy másik diák azonnal megjegyezte, hogy az itt szereplő diszkrimináns az együtthatók jóval bonyolultabbnak látszó formája miatt nem szívesen

számítaná ki. (Ezen a ponton végül az utóbbinál maradtunk, de az óra után ellenőriztem az eredeti felvetést, amelyből az derült ki, hogy véges sok eset kipróbálásával célt érhetünk. A megoldás azon múlik, hogy a diszkriminánsként adódó negyedfokú polinom főegyütthatója negatív, így egy „kis” n indextől kezdve a diszkrimináns negatívvá válik.)

II/3. Feladat. *Határozzuk meg azokat az egész számokból álló (x, y) számpárokat, melyekre teljesül, hogy*

$$(x + 2)^4 - x^4 = y^3.$$

A harmadik feladat kapcsán már előzetesen, a feladatsor összeállításánál is az volt a szilárd meggyőződése, hogy mindenképpen a diákokkal közösen érdemes hozzáfogni, mert több olyan fontos ötletre és előismeretre lesz menet közben szükség, amellyel a diákok még nem rendelkeznek. Az egyenlet szerkezetét megvizsgálva szinte azonnal észrevették, hogy a két negyedik hatvány különbségét szorzattá lehet alakítani, majd a lehetséges kiemelések után „az y páros” megjegyzésre sem kellett sokáig várnom. Az $y = 2k$ helyettesítést követően az $(x + 1)(x^2 + 2x + 2) = k^3$ egyenlet adódik. Itt kellett az első hosszabb kitérőt tenni, és a számelmélet alaptételének, valamint a teljes hatványok kanonikus alakjának tulajdonságainak felhasználásával azt a nagyon fontos megállapítást mondtuk ki, hogy ha két nem-nulla egész szám relatív prím és a szorzatuk köbszám, akkor ezek a számok szükségképpen külön-külön is köbszámok. Az $x = -1$ esetből megoldásként a $(-1, 0)$ számpár adódik, és – némi rávezetés után – az $(x + 1, x^2 + 2x + 2) = 1$ megmutatása sem okozott gondot a tanulóknak, hiszen ilyen jellegű bizonyításokkal már találkoztak 9. osztályban a számelméleti témakör tanulmányozásakor. Innen már a köbszámok között fellépő különbségek vizsgálatával sikerült befejeznünk a megoldást. Sajnos viszonylag kevés idő maradt egy második lehetséges megközelítés alapos végiggondolására és bemutatására, így ez a rész legnagyobb sajnálatomra igencsak vázlatosra sikeredett. Az $X = x + 1$ jelölés bevezetése után az $X^3 + X = k^3$ egyenletet kell megoldanunk. Ha $X = 0$, akkor a korábban már látott megoldást kapjuk, míg $X > 0$ esetén az $X^3 < X^3 + X < (X + 1)^3$ egyenlőtlenség-lánc mutatja, hogy ebben az esetben nem kaphatunk további megoldásokat. Ezt a gondolatmenetet minden különösebb gond nélkül megértették, de az már komoly nehézséget okozott, hogy ebből hogyan következik egyszerűen az $X < 0$ eset.

Összességében fontos megjegyeznem, hogy a második foglalkozás minden tekintet-

ben komoly ugrás volt a diákoknak, hiszen több olyan ötlet, módszer került terítekre, amellyel korábban még egyáltalán nem találkoztak. Maguk a levezetések is jóval hosszadalmasabbak (remélem, hogy nem unalmasabbak) voltak a számukra eddig megszokottnál. A gyerekek reakcióit folyamatosan figyelve arra a megállapításra jutottam, hogy a hátralévő alkalmak mindegyikén törekednem kell arra, hogy a bizonyítások lehetőleg ne tartalmazzanak egyszerre túl sok „új” információt. Ez minden bizonnyal még azzal együtt is igaz, hogy ezeknek túlnyomó többsége tipikusan a bizonyítások egy-egy lényeges pontján felbukkanó ún. rutin lépéseknek számítanak. („Szorzat egyenlő hatvány”, „két egész szám relatív prím voltának igazolása” stb.)

6.2.3. A harmadik és negyedik foglalkozás

Az előzetes tervezésem alapján a feladatsor feldolgozása legalább két szakköri órát igényelt, hiszen rögvest két olyan fontos elméleti tudnivalóra is szükségünk volt a megoldások során, mint például a végtelen leszállás módszere, valamint a kongruencia fogalma és tulajdonságai. Ennek megfelelően első ízben mindkét – a diákok számára teljesen új – fogalmat nem mindjárt egy nehezebb diofantikus egyenlet kapcsán, hanem egyszerűbb példákon keresztül próbáltam bemutatni. Természetesen ezekre a módszerekre itt most csak egyfajta segédletként tekintettem a diofantikus egyenletek megoldásához, nem szerettem volna túlságosan részletesen körbejárni ezeket a fogalmakat, noha tisztában vagyok azzal, hogy különösen a nehezebb részek sikeres elsajátításának vonatkozásában mennyire fontos, hogy a haladást ne siettessük, illetve, hogy az új tudáselemeket megfelelő számú, fokozatosan nehezedő példák segítségével alaposan építsük be. Erre itt most nem volt mód, de szerencsére az órán résztvevők matematikai tehetsége, előképzettsége és motivált hozzáállása is elegendőnek bizonyult arra, hogy a számunkra szükséges ötleteket még ilyen rövid idő alatt is könnyen befogadják.

A végtelen leszállás módszerének megbeszélése után egy olyan példát választottam, amelynek a gyerekek ismerik a „szokásos” órai bizonyítását, nevezetesen, hogy $\sqrt{2}$ irracionális. A bizonyítás azon alapul, hogy amennyiben $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ahol $p, q > 0$ és q a legkisebb ilyen pozitív nevező, akkor $\sqrt{2} = \frac{2q-p}{p-q}$ is igaz, amint azt egy egyszerű átalakítás mutatja. Könnyű belátni, hogy $0 < p - q < q$, azaz találtunk egy q -nál kisebb nevezőt. A diákoknak nagyon tetszett ez a rövid, frappáns bizonyítás,

azt azonban megjegyeztük, hogy az órai bizonyításnak nagy előnye, hogy a levezetés mindvégig világos, minden ötletből jól érezhető, hogy mi lesz a bizonyítás következő lépése, amely aztán egy számunkra kíváncsú ellentmondásban végződik. Itt a $\frac{2q-p}{p-q}$ vizsgálata egyfajta „deus ex machina”, nem ad betekintést abba, hogyan lehetne arra rájönni, hogy miért éppen ezt a törtet érdemes átalakítani.

A kongruenciák kapcsán példákon keresztül vizsgáltuk meg a definíciót, és bizonyítások nélkül ugyan, de áttekintettük a legfontosabb tudnivalókat. Megállapítottuk, hogy a kongruenciákat szabad összeadni, kivonni, összeszorozni, és többféle ellenpéldával is megmutattuk, hogy nem szabad őket elosztani. A szorzásból rögtön adódott a hatványozási szabály, és különösen a 10. osztályosok értékelték azt, hogy a számukra friss emlékű $a - b \mid a^n - b^n$ oszthatóság is azonnal megkapható hatványozással. A rövid bevezető után egy feladatban próbáltuk meg alkalmazni a kongruenciákat, szándékosan egy olyan példát választottam ebben az esetben is, amelyet már korábban más módszerrel – teljes indukcióval – megoldottunk. A $11 \mid 3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ oszthatóság igazolását tűztem ki, és bíztam benne, hogy az elegáns, lényegében egysoros bizonyítás elnyeri majd a diákok tetszését. Nem csalódtam, sőt utólagosan azt gondolom, hogy ezen a ponton teljességgel megérte volna a ráfordított időt még néhány érdekes állítást kongruenciákkal megvizsgálni, mert egy-két tanulónak annyira megtetszett ez a fajta jelölésmód, hogy a szakkört követő „normál” tanórán több ízben is igyekeztek alkalmazni a tanultakat.

III-IV/1. Feladat. *Oldjuk meg az $x^n + y^n + z^n = nxyz$ diofantikus egyenletet a pozitív egész számok körében az $n = 1, 2, 3, 4$ esetekben!*

Az elméleti összefoglaló után hozzákezdünk az óra valódi céljaként megjelölt $x^n + y^n + z^n = nxyz$ diofantikus egyenlet pozitív egész megoldásainak megkereséséhez az $n = 1, 2, 3$ és $n = 4$ esetekben. $n = 1$ esetén az egyik tanuló az xyz -vel történő leosztást javasolta, amelyből az $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = 1$ egyenlet adódik, de sajnos innentől nem sikerült továbbfűznie a kiindulási ötletet. Annyit azonban megállapítottunk, hogy a második házi feladat hasonló szerkezetű, illetve – ösztönözvén a beadandó problémákkal való foglalkozást – ezt kiegészítettem azzal, hogy ez a „leosztós” gondolat nem feltétlenül haszontalan elindulás, mert például a negyedik beadandó feladatot nagyon is érdemes így elkezdni. Visszatérve az egyenlet eredeti alakjához, azt többen észrevették, hogy nem lehet „túl sok” megoldás, mert az egyenlet jobb oldalán a

szorzat „gyorsabban” növekszik. Ezen a ponton megállapítottuk, hogy talán valamilye becsléssel kellene próbálkozni. Segítő kérdésekkel rávezettem a tanulókat arra a gondolatra, hogy az egyenlet szimmetrikus, vagyis az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy például $x \leq y \leq z$. Innen az $xy \leq 3$ egyenlőtlenséget kaptuk, amelyből adódott a – sorrendtől eltekintve – egyértelmű $(1, 2, 3)$ megoldás. Feltődött a kérdés, hogy vajon egy más utat bejárva is megkaphattuk volna-e ezt a számhármast? Az egyik tanuló ugyanis emlékezett rá, hogy már az első foglalkozáson szereplő prímszámos feladat ($pqr = 5(p + q + r)$) is egy ilyen típusú egyenlet volt, amelynél szintén nyitva hagytuk ezt a lehetőséget. Az $n = 2$ eset vizsgálatát azzal kezdtük, hogy megnéztük, vajon az $n = 1$ -re alkalmazott ötlet átvihető-e erre az esetre is. Csalódottan vettük tudomásul, hogy valószínűleg nemleges a válasz, mert az egyszerűsítések után a továbbiakban az igen nehezen kezelhetőnek látszó $3z \geq 2xy$ egyenlőtlenség adódik. Emlékeztettem a diákokat arra, hogy az óra elején nem véletlenül beszéltünk a kongruenciák kapcsán a modulo m maradékokról, és néhány további rávezető kérdés-felelek után eljutottunk oda, hogy az $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ egyenlet csak akkor teljesülhet pozitív egészekkel, ha x, y, z valamennyien páros számok. Áttérve az $\frac{x}{2} = x_1, \frac{y}{2} = y_1$ és $\frac{z}{2} = z_1$ pozitív egészekre, ezután már sokaknak világos volt, hogyan is szeretnénk a végtelen leszállás módszerét alkalmazni.

Az $n = 3$ eset vizsgálatára sajnos már nem jutott elég idő, a hátralévő perceket így arra használtam fel, hogy fölelevenítsem a tanulók számára a polinomosztásról tanultakat. Azt kértem, hogy az $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ polinomot osszák el maradékosan az $x + y + z$ polinommal, és beszorzással ellenőrizzék a kapott felbontás helyességét. Összességében elmondható, hogy az az előzetesen gondolt feltevés, hogy ezt az alkalmat lehetőség szerint bontott órában kellene megtartani, végeredményben valóban jó döntésnek bizonyult. A tervezésben a továbbiakra nézve is megfontolandó, hogy amennyiben a diákok számára teljesen ismeretlen és nehéz elméleti részek kerülnek elő, úgy – ezeknek a fogalmaknak még oly felületes bevezetése mellett is – elegendő időt kell hagyni a diákoknak arra, hogy ezeket a fogalmakat alaposan megemészt-hessék, illetve, hogy a kellő rutint megszerezve később alkalmazni tudják a feladatok megoldásakor.

A negyedik alkalommal az előzőleg félbehagyott $n = 3$ eset vizsgálatával kezdtük meg a szakköri munkát. Miután az $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ polinom szorzattá alakítását

legutóbb már elvégeztük, így a megoldás befejezéséhez tulajdonképpen nem sok tenni-valónk maradt. Az $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 0$ egyenletnél többen ráismertek a teljes négyzetté kiegészítésre, mint egy természetesen kínálkozó átalakításra, sőt a 2-vel történő felszorzás is sokaknak ismerős lehetett közvetlenül a normál matematikaórákról. Az $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 = 0$ felírásból azonnal, szinte kórusban mondták a végtelen sok megoldást jelentő $x = y = z$ összefüggést, ami nem is csoda, hiszen a ilyen típusú egyenletekkel is számos alkalommal találkoztak már a diákok korábbi tanulmányaik során. Ezen a ponton úgy éreztem, hogy mindenképpen hasznos volna, ha a tanulók egy régebbi probléma kapcsán újra felidéznék ennek a polinomnak ezt a szép (ti. szorzattá alakítható) tulajdonságát. A tervem végrehajtásához a második foglalkozáson szereplő $x^3 - y^3 = xy + 61$ diofantikus egyenletet választottam. Az elindulást, illetve a megoldás kulcsát jelentő két ötlet, – a 27-tel történő felszorzás és az 1-nek mindkét oldalból való kivonása – igencsak mesterkéltnek tűnt a tanulók számára, azonnal jeleztem, hogy természetesen az ilyen átalakításoknak általában csak akkor van értelme, ha az egyenlet szerkezetéből „érezhető”, hogy a feladatunkban valamilyen azonosság van elrejtve. Szerencsére a diákok már ezen az órán is láttak hasonlót, mert lényegében a 2-vel történő felszorzás is ilyen átalakítás volt, amely a teljes négyzetek kialakítását célozta. A $(3x - 3y - 1)(9x^2 + 9y^2 + 9xy + 3x - 3y + 1) = 1646 = 2 \cdot 823$ felírást követően megállapítottuk, hogy az $x > y$ feltétel miatt elég lesz az 1646 pozitív egészekre történő felbontásait vizsgálni, illetve a második tényező biztosan nagyobb lesz az elsőnél. Legnagyobb meglepetésemre az egyik – eddig igen csekély aktivitást mutató – 10. osztályos tanuló jelezte, hogy a $3x - 3y - 1 = 1 \Rightarrow 3x - 3y = 2$ esetet sem kell külön megvizsgálni a 3-mal való oszthatóság miatt. Az egyedül nyitva hagyott $3x - 3y - 1 = 2$ és $9x^2 + 9y^2 + 9xy + 3x - 3y + 1 = 823$ eset befejezését otthoni munkára adtam fel, de előtte még gyorsan ellenőriztük, hogy az egyenletrendszernek a $(6, 5)$ számpár valóban megoldása lesz.

Ezt követően rátértünk az $n = 4$ eset vizsgálatára. Ismételten előkerült a nagyságrendre vonatkozó gondolat, azaz, hogy a bal oldal „sokkal” gyorsabban növekszik a negyedik hatványok miatt, hiszen a jobb oldalon szereplő szorzat „csak” harmadfokú. Hagytam, hogy a korábban a szimmetria miatt alkalmazott $x \leq y \leq z$ becsléssel most is megpróbálkozzanak, de ezúttal ők jelezték, hogy az $n = 2$ esethez hasonlóan ebben az esetben is más ötlet után kell néznünk. Feltettem a kérdést, hogy nem ismernek-e a korábbi tanulmányaikból olyan tételt vagy módszert, amelyet tipikusan különféle

becslések, szélsőértékek megkeresésekor alkalmaztunk. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség elhangzását követően megállapítottuk, hogy a tétel alkalmazható a feladatunkra, sőt a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve lényegében csak az $(1, 1, 1)$ és $(1, 1, 2)$ számpárokat kellene kipróbálnunk ahhoz, hogy belássuk, $n = 4$ esetén a kiindulási egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok körében.

Mivel teljesen új anyagrész tárgylásához a hátralévő időben már nem akartam hozzáfogni, és maradt még nagyjából 10 – 15 perc az órából, arra gondoltam, hogy egy kicsit ösztönözni fogom a beadható feladatokkal kapcsolatos otthoni munkát, ezért a 2. és 3. házi feladatokhoz közösen javasoltunk néhány segítő ötletet azoknak, akiknek eddig még nem sikerült önállóan megoldani szakkörön kitűzött feladatot. A 2. feladat kapcsán ismételten kiemeltük, hogy szimmetrikus egyenlet esetében hasznos lehet rögtön ellenőrizni, hogy pl. az $x \leq y \leq z$ becslésből nyerhetünk-e valami használhatót a továbbiakra nézve. Szerencsére itt ez lesz a helyzet, hiszen az $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$ egyenlőtlenségből $\frac{3}{x} \geq 1$ adódik, amelyből x lehetséges értékei: $x = 1$, $x = 2$ és $x = 3$. A befejezést házi feladatként a tanulókra bízom. A 3. feladat esetében is egy fontos stratégiai gondolat hangzott el, nevezetesen, hogy ha egy diofantikus egyenletben szerepel például egy 3-as együttható, akkor érdemes az egyenletet mindjárt modulo 3 tekinteni, és megnézni azt, hogy milyen következtetéseket tudunk ebből leszűrni. Itt további segítséget nem akartam adni, bízom benne, hogy négyzetszámok lehetséges 3-as maradékainak ismeretében a diákok önállóan fedezik fel, hogy az egyenletnek csak abban az esetben lehetne megoldása, ha x és y külön-külön is 3-mal osztható, amelyből a szokásos $x = 3x_1$, $y = 3y_1$ helyettesítés után már valószínűleg nem volt nehéz felismerniük a végtelen leszállás alkalmazásának lehetőségét.

6.2.4. Az ötödik és hatodik foglalkozás

A szakkör elején röviden vázoltam a gyerekeknek a tanóra célját, vagyis az $x^2 + y^2 = z^2$ diofantikus egyenlet összes pozitív egész megoldásának a paraméteres alakban történő előállítását, amelyet aztán további szép és érdekes problémák vizsgálata kapcsán szeretnénk majd a későbbiekben felhasználni. Mivel a tanulók egy normál iskolai órán a pitagoraszai számhármassokkal összefüggésben legfeljebb a definícióval és néhány konkrét számpéldával ismerkednek meg, így a megoldások felírásához vezető utat szerettem volna a diákok számára jól körülhatárolható módon apróbb

egységekre bontani. Minden ilyen rész esetén igyekeztem figyelni a tanulók reakcióit, hogy nehogy véletlenül „túl gyorsan” ugorjak át egy-egy ilyen logikai egységet. Az első fontos észrevétel, hogy elég csupán a primitív pitagoraszai számhármakat megkeresni, mert az egyenlet minden pozitív egész megoldása előáll, mint egy alapmegoldás alkalmas többszöröse. Illusztrációként felírtunk néhány ilyen alapmegoldást, amelyből gyártottunk további megfelelő számhármakat, külön kiemelve, hogy ilyen módon a végtelen sok megoldás létezése természetesen garantált, és a lényeges itt éppen annak megmutatása lesz, hogy alapmegoldásból is végtelen sok van. A második logikai egységben beláttuk, hogy az $(x, y, z) = 1$ -ből (és az egyenletből) következik, hogy x, y és z páronként is relatív prímek. Arra kértem a tanulókat, hogy a korábbi tanulmányaik alapján adjanak meg olyan számhármakat, amelyekre $(x, y, z) = 1$ teljesül, de egyik pár sem relatív prím. Így világossá vált számukra, hogy ez a feladatunkban valóban bizonyításra szoruló, egyáltalán nem magától értetődő tulajdonság. Az indirekt érvelés sokak számára ismerős lehetett, hiszen a számelméleti témakör tanításakor bőségesen előfordulnak a legnagyobb közös osztóval kapcsolatos, a mostanihoz hasonló lépéseket igénylő bizonyítási stratégiák. A harmadik fázis annak megmutatása, hogy az egyenlet az $(x, y, z) = 1$ feltétel mellett csak akkor teljesülhet, ha x és y ellentétes paritású. A lehetséges esetek vizsgálata nem okozott különösebb nehézséget, mert a diákok élénken emlékeztek még az előző foglalkozáson szereplő egyik fontos momentumra, amelyben a négyzetszámok lehetséges 4-es maradékait adtuk meg. Az $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{z-y}{2} \cdot \frac{z+y}{2}$ egyenlőség felírását követően ismételten emlékeztettem a tanulókat, hogy a jobb oldalon lévő tényezők relatív prím voltát igazolni kellene ahhoz, hogy a továbbiakban hivatkozassunk arra, hogy ezek a tényezők külön-külön is négyzetszámok. Annál is inkább tartottam ezt fontosnak, mert az egyik tanuló a második feladatsor 4. sorszámú, utólagosan beadott házi feladatában rosszul alkalmazta ezt a lépést, vagyis nem vizsgálta meg a tényezők legnagyobb közös osztóját, így természetesen a feladatot sem sikerült kifogástalanul megoldania. A relatív prím tulajdonság igazolása indirekt úton a korábbi minta alapján elég gördülékenyen ment. Az alapmegoldások, illetve az egyenlet összes pozitív egész megoldásának felírása után néhány általuk alkalmasan választott u, v pozitív egészek segítségével felírtunk néhány pitagoraszai számhármast. (Az állítás megfordítását, vagyis, hogy a megtalált képlet mindig primitív pitagoraszai számhármakat állít elő, megjegyeztük, de végül nem bizonyítottuk.)

V-VI/1. Feladat. *Adjuk meg az összes olyan derékszögű háromszöget, amelynek az oldalai egész számok, valamint a terület és terület mérőszáma megegyezik.*

Bízom benne, hogy az első feladat, – ami egy igen jól ismert kérdés a témakörben, – rögtön alkalmasnak bizonyulhat arra, hogy a tanulók önállóan próbáljanak meg eljutni a megoldáshoz, tekintve, hogy az imént megadott képletek szinte sugalmazzák az egyik lehetséges elindulást. A megoldás egyébként a képletek felhasználása nélkül is könnyen elérhető, bár elég valószínűtlennek tűnt, hogy a gyerekek nem fogják azonnal alkalmazni azokat a formulákat, amelyekhez néhány perccel korábban jutottunk el. A szükséges algebrai átalakítások után szinte kivétel nélkül mindenkinél szerepelt a helyes $2 = v(u - v)d$ egyenlőség, amelyből a két megfelelő derékszögű (a 6, 8, 10 és 5, 12, 13 egység hosszúságú oldalakkal rendelkező) háromszög adódott.

V-VI/2. Feladat. *Igaz-e, hogy minden olyan derékszögű háromszögben, amelynek az oldalai egész számok, az oldalak szorzata osztható 60-nal?*

A második feladat jóval nagyobb kihívás elé állította a tanulókat. Néhány konkrét példa alapján abban széleskörű egyetértés született, hogy az állítás igaz, és az egyik fiú észrevette, hogy elegendő az állítást olyan derékszögű háromszögekre belátni, amelyek oldalaira $(a, b, c) = 1$ teljesül. A továbbiakban – érdemi hozzászólás híján – együtt vizsgáltuk meg a

$$60 \mid 2uv(u^2 - v^2)(u^2 + v^2)$$

oszthatóságot, ahol az u és v pozitív egész számokra teljesülnek a tételben szereplő feltételek. A 4-gyel való oszthatóságot gyorsan elintéztük, hiszen u és v valamelyike páros. Az egyik diák jelezte, hogy az előző foglalkozáson felhasználtuk, hogy egy négyzetszám 3-as maradéka 0 vagy 1 lehet, ezért ha u és v valamelyike 3-mal osztható, akkor készen vagyunk, ha nem, akkor pedig u^2 és v^2 is 1 maradékot ad 3-mal osztva, vagyis ebben az esetben $u^2 - v^2$ lesz 3-mal osztható. Innentől mindenki számára világos volt, hogyan kell megvizsgálni az 5-tel való oszthatóság kérdését, ezért a foglalkozás hátralévő perceiben hagytam a tanulókat önállóan befejezni a bizonyítást, amelyet aztán az egyik diák szóban röviden ismertetett.

A hatodik foglalkozás elején emlékeztető gyanánt felírtuk a pitagoraszai számhármasokat megadó képleteket, amelyet még a téli szünet előtti utolsó foglalkozáson vezettünk le. Megkértem azt a tanulót, aki eddig a legtöbb beadandó feladatot oldotta meg helyesen, hogy ismertesse a 9. problémára adott megoldását. A megoldása

kifogástalan volt, egyetlen ponton talán egy kicsit körülményesen írta le az indoklást, így jobbnak láttam, ha a továbbhaladás előtt még azt is megbeszéljük, hogyan lehetne egyszerűsíteni a levezetést.

V-VI/3. Feladat. *Figyeljük meg az alábbi primitív pitagoraszai számhármassokat:*

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 5^2 + 12^2 = 13^2, \quad 7^2 + 24^2 = 25^2, \quad 9^2 + 40^2 = 41^2.$$

Milyen sejtés olvasható ki e példákából? Keressünk hasonló szerkezetű pitagoraszai számhármassokat!

Az óra folytatásaként a 3. feladatot beszéltük meg, és arra kértem a diákokat, hogy próbáljanak meg – egyelőre a formulák felhasználása nélkül – felállítani egy sejtést arról, hogyan kaphatunk még további megoldásokat. Az egyik tanuló észrevette, hogy $3^2 = 4 + 5$, $5^2 = 12 + 13$, $7^2 = 24 + 25$ stb. Könnyű észrevenni, hogy a bal oldalon az 1-nél nagyobb páratlan számok jelennek meg, és a jobb oldalon egymást követő egész számok, így a következő alakot használta: $(2n+1)^2 = k+k+1$, ahonnan $k = 2n(n+1)$ adódik. Innen már nem volt nehéz megfogalmazni a sejtésünket, amelynek teljesülése esetén végtelen sok, a feltételeket kielégítő számhármashoz jutunk. A

$$(2n+1)^2 + [2n(n+1)]^2 = [2n(n+1)+1]^2$$

egyenlőség helyességéről ekvivalens átalakítások után a diákok könnyen meggyőződhettek. Rávilágítottunk arra is, hogy egyelőre még nem állíthatjuk, hogy az összes olyan derékszögű háromszöget, – amelynek az oldalai egészek és az átfogója 1-gyel nagyobb a nagyobbik befogónál – megkaphatjuk ezen a módon. Ennek bizonyítására a (primitív) pitagoraszai számhármassokra vonatkozó képleteket használtuk fel. Az $a < b < c$, $c = b+1$ és $(c, b) = 1$ feltételek miatt valóban elegendő csupán az alapmegoldásokkal foglalkozni. Mivel c páratlan, így csak az alábbi szereposztás valósulhat meg: $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ és $c = u^2 + v^2$. Behelyettesítés után kapjuk, hogy $u - v = 1$, amelyből a korábban látott

$$a = 2v + 1, \quad b = 2v(v + 1), \quad c = 2v(v + 1) + 1$$

megoldások adódnak.

V-VI/4. Feladat. *Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenletet a pozitív egész számok körében.*

$$5^x - 3^y = 16.$$

A 4. feladat esetében elsőre talán nem egészen nyilvánvaló, hogyan kapcsolódik a pitagoraszai számhármaskhoz. Annyi természetesen azonnal észrevehető, hogy $x = 2$ és $y = 2$ megoldás. Rávezető, elindulást segítő kérdésekkel próbáltam elérni, hogy végül ők mondják ki azt, hogy a kitevőknek párosnak kell lennie. Ennél a pontnál a negyedik foglalkozáson már használt modulo m maradékokkal történő számoláshoz nyúltunk vissza. A korábbi tanácsokat megfogadva többen javasolták a $(\text{mod } 5)$, illetve a $(\text{mod } 3)$ maradékosztályok alkalmazását. Mindkét esetben rövid számolás után kapjuk, hogy x és y is páros. Az egyik diák $(\text{mod } 5)$ helyett $(\text{mod } 4)$ -et választott a számoláshoz, amellyel tovább lehetett egyszerűsíteni a célunk eléréséhez szükséges lépések sorozatát. Az $x = 2n$ és $y = 2k$ helyettesítést követően az $(5^n)^2 - (3^k)^2 = 4^2$ összefüggésből sokan felfedezték, hogy egyszerű szorzattá alakítással is célt érhetünk. A befejezést a gyerekekre bízta, majd ellenőriztük, hogy a (primitív) pitagoraszai számhármaskra vonatkozó formulákból is ugyanez a megoldás adódik.

6.2.5. A hetedik foglalkozás

Az órát azzal kezdtük, hogy az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenlet kapcsán megbeszéltük, hogy mit nevezünk triviális megoldásnak, illetve, hogy miért célszerű a d -ről eleve feltenni, hogy pozitív és nem négyzetszám. Mindezek után figyelmünket a – klasszikusnak számító – $x^2 - 2y^2 = 1$ egyenlet vizsgálatára irányítottuk, amely egyenletnek a tanulmányozását eredetileg az óra céljaként jelöltem meg. Természetesen a gyerekek azonnal megtalálták a legkisebb nem-triviális megoldást $((3, 2))$, sőt az egyik (gyorsabb) tanuló számológépe segítségével egy másik megoldással $((17, 12))$ is előállt. A szisztematikus próbálgatást ezen a ponton leállítottam, persze a kérdés magától értetődően jött: Vajon hány további megoldása van az egyenletnek, van-e egyáltalán a megtalált számpárokon kívül megoldás? Ha igen, akkor meddig kell további próbálgatást végezni ahhoz, hogy megkapjuk a harmadik, negyedik stb. ilyen számpárt? Ennek megválaszolásához visszatértünk a legkisebb megoldáshoz, amelyet először a $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1$, majd szorzattá alakítás után a $(*) (3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1$ alakban írtunk fel. Nagy volt a kísértés, hogy rögvest eláruljam a diákoknak, hogy miért pont ezt csináljuk, mert néhány tanuló arcán ebben a pillanatban némi zavarodottságot véltem

felfedezni. Megerősítésként ellenőriztük az átalakítás helyességét, majd arra kértem a diákokat, hogy emeljék négyzetre az egyenlőséget. A $(17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2}) = 1$ összefüggésből kaptuk, hogy $17^2 - 2 \cdot 12^2 = 1$, vagyis a korábban megtalált $(17, 12)$ megoldáshoz jutottunk. Itt rövid számolástechnikai gyakorlatként a diákok megvizsgálták, hogy mit kapunk akkor, ha a (*) egyenlőséget köbre emeljük, amelynek végén egy újabb megoldás, a $(99, 70)$ számpár adódott. A példák segítségével a tanulók előtt teljesen világossá vált, hogy ilyen módon az eljárásunk végtelen sok megoldást szolgáltat, és nemsokára az is felvetődött, hogy vajon megkapjuk-e ezzel a módszerrel az összes megoldást? Ennek a kérdésnek a megválaszolásához kiosztottam az órai feladatsort, amelynek az elejére – a korábbi feladatsorokhoz hasonlóan – egy rövid elméleti összefoglalót is készítettem. Fontosnak tartottam, hogy a példák megoldása előtt alaposan átbeszéljük a szükséges tudnivalókat, illetve az előző kérdés kapcsán elmondtam a diákoknak, hogy az eljárás valóban megadja az $x^2 - 2y^2 = 1$ Pell-egyenlet összes pozitív egész megoldását, de ennek bizonyítását most mellőzzük, mert lényegesen meghaladná a szakkör kereteit. Ezt követően értelmeztük a tételben szereplő jelöléseket, illetve megvizsgáltuk az egyenlet megoldásainak különféle alakban történő előállításait. A hatvány, valamint a rekurzív formulák esetében is kiszámoltuk az első néhány n értékre a megoldásokat, amelyekről egy listát is készítettünk. (Ezt a listát a 2. feladat megoldása során is felhasználtuk.) Szó volt róla, hogy már viszonylag kis d értékek esetén is (pl. $d = 61$) nagyon nehéz megtalálni az alapmegoldást. Az egyik diák jelezte, hogy időközben az interneten megtalálta, hogy $d \leq 100$ -ig mely számpárok az alapmegoldások. Érdekes és tanulságos volt egy rövid pillantást vetni erre a táblázatra, hogy d függvényében milyen szeszélyesen viselkedik az alapmegoldások (x, y) értékeinek nagyságrendje.

VII/1. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok pozitív egész n -re teljesül, hogy az első n pozitív egész szám összege négyzetszám! Keressük meg az összes megoldást!*

Az 1. feladat a témakör egyik ismert, klasszikusnak számító problémája. Az első n pozitív egész szám összegére vonatkozó képletet használva az $n(n + 1) = 2k^2$ egyenletet kapjuk. Egy kevés idő után a tanulók közül többen rájöttek, hogyan lesz ebből Pell-egyenlet. Az egyenlőséget 4-gyel szorozva teljes négyzetet alakíthatunk ki. A $(2n + 1)^2 - 2 \cdot (2k)^2 = 1$ egyenletre alkalmazva a megoldásokat hatványalakban

előállító formulát kapjuk, hogy

$$n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^m + (3 - 2\sqrt{2})^m - 2}{4}, \quad \text{ahol } m = 1, 2, 3, \dots$$

VII/2. Feladat. *Egy szórakozott matematikaprofesszor elindult, hogy meglátogassa egy volt tanítványát. Mikor az utca elejére ért rájött, hogy elfelejtette a tanítvány házszámát. Ebben az utcában csak az egyik oldalon voltak házak, számozásuk 1-gyel kezdődött és egyesével növekedett. A professzor emlékezett rá, hogy legalább 200 és legfeljebb 500 ház van az utcában. Továbbá arra is, hogy a tanítványa háza az utca numerikus középpontjában áll, azaz a házzámoknak az utca elejétől a házig vett összege megegyezik a háztól az utca végéig vett házzámok összegével. Rövid gondolkodás után a professzor rájött, hogy hova kell mennie. Meg tudjuk-e mi is határozni a kérdéses házzámot?*

Ha a 2. feladatban x jelöli az utcában lévő házak számát, y pedig a kérdéses házzámot, ahol $200 \leq x \leq 500$, akkor felírható az alábbi egyenlőség.

$$1 + 2 + \dots + y = y + y + 1 + \dots x.$$

Itt ismételten felhasználtuk az első n pozitív egész szám összegére vonatkozó zárt formulát, így eljutottunk az

$$\frac{y(y+1)}{2} = \frac{x(x+1)}{2} - \frac{y(y-1)}{2}$$

egyenlőséghez, amelyet az előzőekben leírt módon alakítottuk át, és így a $(2x+1)^2 - 2 \cdot (2y)^2 = 1$ egyenlet adódott. A feltételek miatt csak az a megoldás érdekelt minket, amelyre $401 \leq 2x+1 \leq 1001$. A korábban elkészített, az $x^2 - 2y^2 = 1$ Pell-egyenlet első néhány megoldását tartalmazó listát felhasználva kaptuk az egyetlen megoldást: $x = 288$ és $y = 204$.

6.3. Reflexió

Természetes, hogy minden tanítási és tanulási folyamat végén érdemes egyfajta számvetést készíteni az elvégzett munkáról, amelynek során célszerű alaposan végiggondolni döntéseinket, az egyes helyzetekben vajon megfelelőek voltak-e a reakcióink, illetve, hogy a jövőben hogyan és miként járhatunk el a remélt pedagógiai siker érdekében. A Baár-Madas Református Gimnáziumban tartott – hét foglalkozásból álló – szakköri tevékenység reményeim szerint egyidejűleg többféle előzetesen célul kitűzött „küldetést” teljesített be. Egyrészt a téma rendkívül alkalmasnak bizonyult az érdeklődés felkeltésére, a matematikához fűződő pozitív attitűd kialakítására, amelyhez az iskolánkban szerencsés módon eleve adott volt kiváló képességű diákoknak egy 10 – 12 fős csoportja, akikre a különféle matematikai problémák iránti kellő fogékonyság már eddig is jellemző volt, de úgy gondolom, hogy a szakköri órák utáni beszélgetések, a diákoktól érkező, szinte kíváncsiságból fakadó kérdések és megjegyzések számomra mind ékes bizonyítékát adják annak, hogy a diofantikus egyenletek témakör tanítása a feladat-és problémamegoldási motiváció további erősítéséhez is jelentős mértékben hozzájárulhat. A foglalkozások anyagát igyekeztem úgy megválasztani, hogy az (különösen a szakkör kezdetén) szorosan illeszkedjen a tanulók korábbi ismereteihez, annak értelemszerű kibővítését tartalmazza. Másrészt egy tehetséggondozásra irányuló szakkörnek feltétlenül olyan új anyagrészek és módszerek elsajátítására is kell fókuszálnia, ami által gazdagodik a problémamegoldási repertoár, amelyek birtokában a tanulók eredményesen szerepelhetnek az országos versenyeken, illetve a legkülönfélébb megmérettetéseken. Kimondottan ez a cél vezérelt, amikor összeállítottam az első három foglalkozásra tervezett feladatso-rokat. Olyan problémákat próbáltam összeválogatni, amelyeknek megoldása többféle megközelítésben elérhető, számos példa itt kifejezetten az értekezésben (is) szereplő érdekesebbnek és/vagy tanulságosabbnak ítélték közül valók. Sajnos az időkeret végül nem minden esetben tette lehetővé az összes előzetes elképzelésem megvalósítását. Mindezek ellenére bízom abban, hogy összességében sikerült ötletekben és módszerekben gazdag, a matematika ezen szeletének sokszínűségét jól visszatükröző, – középiskolások számára is érthető – alkalmazásokban bővelkedő feladatsorokat készíteni.

Sok kollégával egyetértésben vallom, hogy az számít igazán értékes és maradandó

tudásnak, amelyre a diák önállóan jön rá, saját maga fedez fel, így a tanári irányításban is – amennyire csak lehetséges volt – próbáltam ezt az utat követni. Az időfaktor nyilvánvalóan gátja az ilyen jellegű munkafolyamatnak, éppen ezért a feladatsorokra otthoni, nyugodt, időzavartól mentes „kutatómunkára” szánt problémák is kerültek. A házi (általában könnyebb) feladatok az órai ötletek és módszerek begyakorlását segítették, míg a nehezebb beadható feladatok többnyire valóban komoly fejtörést, nem egy esetben alapos utánajárást igényeltek a tanulóktól. A beadott feladatokat egységes pontrendszer alapján értékeltem, és az így kialakult „házi-verseny” – megítélesem szerint – szintén ösztönzőleg hatott a tanulókra. Ezzel párhuzamosan említhető, hogy a megoldások leírásának világos megfogalmazása, az egyes indoklások minősége is sokat javult az idő előrehaladtával, amelynek fejlesztésére a szaktanárok általában véve is kellő figyelmet fordítanak.

Fontos hangsúlyozni, hogy már az első (de különösen a második) foglalkozást követően éreztem, hogy talán túl sok új ismeretanyagot zúdítok egyszerre a tanulókra, éppen ezért a későbbiekben alapvetően megváltoztattam mind a feldolgozás módját, mind pedig a tanári irányításbeli felfogásom. Áttértem a „két alkalom, egy feladatsor” koncepcióra, ami abból a megfontolásból mindenképpen hatékonynak bizonyult, hogy nem kellett túlságosan sietni, a tanulóknak bőven hagyott időt arra, hogy barátkozzanak az új fogalmakkal, alaposan körbejárhassuk a számukra eddig nem ismert bizonyítási módszereket, a szokásostól eltérő gondolatmeneteket. Így a tanulók számára teljesen ismeretlen, merőben új, illetve a várhatóan nehezebbnek ígérkező részek esetén a felfedezettő módszert felváltotta egyfajta „interaktív előadásmód”, amelynek során a diákokkal olyan jellegű párbeszédet alakítottam ki, melyek révén a segítő, iránymutató kérdéseim mentén azt szerettem volna elérni, hogy a megoldás kritikus fázisaiban a gyerekek maguk fogalmazhassák meg a döntő szerepet játszó gondolatot vagy a továbblépéshez lényegesnek vélt észrevételeket.

Az ötödik és hatodik (pitagoraszai számhármassokról), illetve a hetedik (Pell-egyenletekről szóló) foglalkozás már kifejezetten azt célozta, hogy főként középiskolai ismereteken alapuló ízelítőt adjon a felsőbb matematika világából. E helyütt nem törekedtem szigorú bizonyításokra, leszámítva a pitagoraszai számhármassokra vonatkozó formulákat, amelyről előzetesen sejthető volt, hogy számot tarthat majd a diákok fokozott érdeklődésére. Az elméleti tudnivalókról a feladatsorok elején készí-

tettem egy rövid összefoglalót, lehetőséget teremtve a tanulóknak arra, hogy bármilyen apró elakadás esetén ide visszatérve újra fel tudják venni a fonalat. Fontosabb definíciók és tételek esetében soha nem a magasabb absztrakciós szint felől közelítettünk, hanem mindig konkrét, egyszerű példákon keresztül győztünk meg azok „működéséről”. Utólagosan azt mondhatom, hogy talán szerencsés lett volna ezen a ponton legalább még egy tanórát beiktatni, esetleg többféle hatékony tanulásszervezési módot is kipróbálni az órán, hiszen a témakörnek az idevágó része kiválóan alkalmas arra, hogy a gyerekek kísérletezzenek, önállóan sejtéseket, általánosításokat fogalmazzanak meg, amelyeket aztán – akár tanári segítséggel is – bizonyítsanak. Ahogyan korábban is szó volt róla, némi hiányérzet feltétlenül maradt bennem a Gauss-egészek tárgyalásának elmaradása miatt, bár a szükséges elméleti megalapozás nélkül valószínűleg egyébként is csak a levegőben lógott volna ennek az újfajta számkörnek a vizsgálata. Ugyanez érvényes a disszertációban szereplő $\mathbb{Z}(\sqrt{-2})$ gyűrűre.

Összességében véve a szakköri foglalkozásokat, a diákokkal elvégzett közös munkát mind személyes véleményem, mind pedig a tanulók pozitív visszajelzései alapján is rendkívül eredményesnek ítélem. Bőséges mennyiségű tapasztalatot sikerült összegyűjtenem a jövőre nézve a diákok reakcióiból, illetve a saját óravezetési, munkaszervezési tevékenységeimmel kapcsolatosan is. Az egyes foglalkozások utáni építő jellegű beszélgetések, tanulói megjegyzések számomra teljesen egyértelművé tették, hogy a későbbiekben is érdemes olyan, – akár egy a mostanihoz hasonló több alkalmas – szakköri órákat szervezni, amelynek célja egy-egy olyan témakör feldolgozása, aminek kapcsán a gyerekeket olyan ismeretekhez, tapasztalatokhoz juttathatjuk, amelynek hozadéka a matematika tanítás és tanulás számos aspektusából nézve busásan megtérül.

7. fejezet

Összefoglalás

1. Bevezetés

A disszertáció elkészítésekor a legfőbb célom az volt, hogy a középiskolai versenyeknek a – számomra talán legkedvesebb – diofantikus egyenletek témakörben kitűzött feladatait több szempontból megvizsgáljam, és néhány válogatott feladat kapcsán bemutassam, hogyan alkalmazhatóak a felsőbb matematikában megismert módszerek, illetve milyen módon hasznosíthatóak ezek a tehetséggondozásban, szakköri munkában. A feladatok megoldásai, a feladatsorok felépítése, valamint ezeknek a problémáknak a didaktikai vizsgálata teljesen önálló munkám eredménye. Az ismert versenyfeladatokat számos saját feladattal is kiegészítettem. Személyes meggyőződésem, hogy az ilyen típusú feladatok alkalmasak arra, hogy felkeltsék a diákok érdeklődését, betekintést nyújtsanak egy-egy probléma mélyebb gyökereihez, illetve fejlesszék az általános problémamegoldó képességet. Mindemellett természetesen a tanároknak is jelentős segítséget adhat tehetséggondozó munkájukhoz. Fontos feladatomnak tekintettem továbbá, hogy a különböző megoldásoknak megadjam az összehasonlítását, értékeljem azokat, megvizsgáljam a kínálkozó általánosítási lehetőségeket is. Ennek a kíváncsiságnak igyekeztem a disszertáció összes fejezetében eleget tenni. A dolgozat második, harmadik és negyedik fejezete többségében az önálló problémafelvetéseimből származik, amelyek rendre a [15], [16] és [17] cikkekben kerültek publikálásra.

2. Binomiális együtthatók különféle közepeivel kapcsolatos diofantikus egyenletek

A 2. fejezetben a cél elsősorban az volt, hogy elemi módszerekkel megmutassam, hogy két különböző $\binom{n}{2}$ alakú binomiális együttható számtani, mértani és harmonikus közepe végtelen sokszor lehet ismét ilyen alakú binomiális együttható. Egyelőre nyitott kérdés, hogy mit mondhatunk a négyzetes közép esetén. A számtani közép kapcsán az összes megoldást sikerült megadnom, valamint három tag esetén sikerült bizonyos típusú binomiális együtthatókra végtelen sok nem-triviális megoldást felírni.

A levezetések során végig igyekeztem olyan elemi módszereket használni, melyek túlnyomó többsége tárgyalható a középiskolai matematika oktatás keretei között is, természetesen elsősorban szakköri órákon. Szinte kivétel nélkül mindegyik általam vizsgált nevezetes közép bizonyítása egy-egy további érdekes kitekintési lehetőséggel, felfedeznivalóval kecsegtet más matematikai területek irányába. Így például a számtani közép a pitagoraszai számhármassal, a harmonikus közép a Pell-egyenlettel, míg a mértani közép a rekurziókkal hozható összefüggésbe. Megítélésem szerint ezek a problémák kiválóan alkalmasak lehetnek módszertani szempontból arra, hogy az adott részek tanításakor ezeket – mint az igazán komoly fejtörést jelentő nehezebb feladatokat – a tanulóknak „kutatási” célból kitűzzük. Ugyanakkor ténylegesen számolnunk kell azzal az eshetőséggel is, hogy – a problémák jellegéből adódóan – akár már viszonylag korán leküzdhetetlennek látszó nehézségekbe ütközhetnek. Tulajdonképpen ez az oka annak, hogy a nevezetes közepeket általában csak két tagra és a binomiális együtthatók 2-es alsó értékére vizsgáltam, hiszen a további általánosítások már lényegesen mélyebb matematikai eszközöket igényelnének.

3. Binomiális együtthatókkal kapcsolatos diofantikus egyenletek megoldása elemi úton és felsőbb matematikai módszerek segítségével a középiskolai matematika szakkörön

A 3. fejezet az előző folytatásának tekinthető abban az értelemben, hogy ismét binomiális együtthatókat tartalmazó diofantikus egyenletekkel foglalkoztam. Itt is nagyon lényeges szempont volt, hogy lehetőség szerint olyan egyenleteket tárgyaljak, melyeket ha nem is teljes mélységben, de legalábbis részben feldolgozhatunk kiemelkedően tehetséges gyerekekkel középiskolai szakköri órák keretében. Több példán

keresztül igyekeztem bemutatni azokat a változatos matematikai módszereket, amelyek segítségével több, elsősorban matematikaversenyeken szereplő példát is sikerrel oldhatunk meg. A fejezet egyik központi részét képezi az $A^2 + B^2 = C^2 + 2$ diofantikus egyenlet vizsgálata, amelynek először tisztán elemi úton végtelen sok egész megoldását, majd – a kvadratikus alak felhasználásával – az összes egész megoldását sikerült felírnom. Ezen a ponton egy apró kitérőt tettem a tényleges egyetemi tananyag felé, az itt leírtak már semmiképpen sem tekinthetők középiskolainak.

A feladatok kidolgozásánál a fokozatosság elvét is próbáltam szem előtt tartani, vagyis a könnyebb, esetleg elemi úton is kezelhető feladatok után következnek a nehezebb, többnyire felsőbb matematikai apparátust kívánó problémák. A 3.0.10. Feladat megoldása mutatja ezt a legjobban, ahol négy különböző megoldást is sikerült találnom, amelyek közül az utolsó – a problémafelvetést általánosítva – az egyenlet összes egész megoldásához is elvezet.

A feladat négyféle megoldása jól érzékelteti, hogy a témakör egy-egy problémájának eltérő feldolgozása alkalmas lehet arra, hogy a diákok önállóan próbálkozzanak, további kérdéseket tegyenek fel és újabb problémák megoldását tűzzék ki célul. Nyilvánvalóvá válhat számukra, hogy a feltételeket kicsit megváltoztatva a könnyűből a nehézén át, esetenként csak mély módszerekkel kezelhető problémákon keresztül egészen a megoldatlanig, az egyszerűen megfogalmazható problémák óriási tárházát kapjuk. A diákok további rokon feladatokat – ilyen például a 3.0.13. Feladat – és alkalmazásokat kereshetnek, megvizsgálhatják ezek nehézségi fokát, vagy akár egy-egy – teljes általánosságban – bonyolultabbnak ígérkező kérdésfelvetés után megpróbálkozhatnak a probléma néhány egyszerűbb speciális esetének megoldásával.

A 3.0.11. Feladatban a Pell-egyenletnek egy, a korábbiaktól eltérő tárgyalását adom, valamint a 3.0.13. Feladat kapcsán az $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ gyűrűnek néhány számelméleti tulajdonságát használom fel, ezzel is mintegy előkészítve, felvezetve a későbbi Gauss-egészekről szóló részt. A fejezet megírása közben végig törekedtem a szerepeltetett módszerek sokszínűségének érzékeltetésére, mely módszerek sokszor egészen új távlatokba helyezték egy-egy problémának a vizsgálatát. A 3. fejezet zárásaként egy hosszabb, didaktikai megjegyzésekkel is gazdagon fűszerezett rész található. Az egyes feladatokat módszertani szempontból ismételten áttekintem, részletesen kibontva – a felmerülő nehézségek mellett – a témakör tanításának számos pozitív hozadékát.

4. Diofantikus egyenletek megoldása elemi úton és Gauss-egészek segítségével a középiskolai szakkörön

A 4. fejezetben ismételten diofantikus egyenletek megoldásán keresztül mutatom be, hogy milyen jellegű számelméleti problémák esetén alkalmazhatóak sikerrel a Gauss-egészek a középiskolai matematika szakkörön, vagy akár egy matematikaversenyen ([17]). Az általános tantervű gimnáziumi törzsanyagban már a komplex számok sem szerepelnek, így természetesen a Gauss-egészekről sem esik szó. Ha azonban eltekintünk az egyetemen megszokott precíz felépítéstől, és a nehezebb tételekre csak bizonyítás nélkül hivatkozunk, akkor már viszonylag kevés előismeret birtokában is szép és érdekes számelméleti feladatokat oldhatunk meg. A fejezet első részében szereplő feladatoknak először megadtam a „szokásos” elemi megoldását, és itt a levezetések során lehetőség szerint igyekeztem ismét többféle elemi módszert és általánosítást is mutatni (lásd 4.0.6. Feladat). Ezek egyrészt segíthetnek egy-egy probléma mélyebb megértésében, másrészt a szakkörön való szerepeltetésük motiválhatja a legtehetségesebb, a matematika iránt leginkább elkötelezett tanulókat arra, hogy bátran kísérletezzenek.

A feladat egy érdekes variánsát a 4.0.8. Feladatban vizsgáltam meg, amely végül természetes módon vezetett el a diofantikus egyenletek egy speciális osztályához, az $x^2 + k = y^3$ alakú ún. Mordell-egyenletekhez. Egy érdekes alkalmazásként megadom néhány k értékre a Mordell-egyenlet megoldásait. A $k = -7$ (4.0.10. Feladat) esetben ismertetek egy szép elemi megoldást, míg $k = 1$ (4.0.11. Feladat) esetén a problémára két lényegesen különböző megoldást adok, melyek közül az első meglehetősen összetett „elemi”, míg a másik, a Gauss-egészeket felhasználó egyszerűbb bizonyítás. Az elemi megoldás közben a végtelen leszállás módszerével – mintegy „melléktermékként” – az $n^4 - 6m^2n^2 - 3m^4 = 1$ egyenletnek a nemnegatív egész megoldásai is adódnak.

A fejezet végén egy, a Fibonacci-sorozattal kapcsolatos érdekes állítás egyik speciális esetét bizonyítom, mely így középiskolában is elmondhatóvá válik. Kimondottan nehéz és sokat vizsgált számelméleti kérdés volt az utóbbi időben, hogy a Fibonacci-sorozat elemei között melyek lesznek teljes hatványok. Ennek az általános tételnek egy speciális (ti. a négyzetszámokra vonatkozó) esetére valójában már az 1950-es években ismert volt a válasz. Lényegében egymástól függetlenül mutatta meg Cohn, Ljunggren és Wyler ([3]), hogy ha $n \geq 1$, akkor a Fibonacci-sorozatban $f_1 = 1$, $f_2 = 1$

és $f_{12} = 144$ az összes négyzetszám. A tételnek páros indexekre történő igazolását szerettem volna – a szerzők által adott meglehetősen komplikált gondolatmenettől eltérő módon – a középiskolások számára emészthetőbb formába önteni.

5. Versenyfeladatok szakköri feldolgozása

Az 5. fejezet három kisebb, de egymással szervesen összefüggő egységet képez. Az első részben olyan versenyfeladatok kerülnek terítékre, amelyek kapcsán számos probléma saját kérdésfelvetésből született. Az itt szereplő feladatkavalkád célja, hogy a különféle megoldásokon, általánosításokon keresztül bemutassa a diofantikus egyenleteknél alkalmazott módszerek sokszínűségét, minél szélesebb körből választva a számelméleti ötleteket, fogásokat. Személyes tapasztalatom, hogy a matematika szakkörön résztvevők döntő többsége csak akkor szereti igazán az egyenletmegoldást, ha az kihívást jelent, vagy kellően változatos, és többféle megközelítésben is tárgyalható. Reményeim szerint a fejezet nyitó problémája (5.1.1. Feladat) teljes mértékben megfelel a fentebb megfogalmazott célkitűzéseknek.

Megvizsgáltam a problémához szervesen kapcsolódó $x^n + y^n + z^n = nxyz$ alakú egyenleteket néhány pozitív egész n értékre, különös tekintettel az $n = 2$ esetre, ahol ismételten többféle megoldási módszert, fogást igyekeztem felvonultatni. Az 5.1.14. és 5.1.22. Feladatok is ezen szempontok mentén kerültek górcső alá. A korábban leírtaknak megfelelően erre a fejezetre is érvényes az a megállapítás, hogy még az ismert feladatokhoz is igyekeztem újabb megoldásokat keresni, illetve, ha erre lehetőség kínálkozott, további általánosításokkal, kapcsolódási pontokkal azokat kiegészíteni.

Az 5.1.21., 5.1.26., 5.1.27., 5.1.30. és 5.1.31. Feladatok még ezen törekvéseimen is túlmutatnak, azaz többnyire saját készítésű feladatok. A felsoroltak közül az 5.1.30. Feladat különösen közel áll hozzám, hiszen a középiskolai matematika csúcsának tekinthető nemzetközi diákolimpiának egyik feladatából merítettem a fő inspirációt.

Az 5. fejezet második és harmadik része versenyfeladatokat dolgoz fel. Ezzel a témakör egy lehetséges bővítését mutatom be azzal a feltett szándékkal, hogy a jövőben a saját tanítványaimmal közösen, az itteni felépítésben dolgozzuk fel a matematikának ezen fejezetét (lásd 6. fejezet).

A tárgyalást végig didaktikai elemzések kísérik, ezek részben a feladatok megoldása közben, részben utána, néhol egyes részek végén külön is szerepelnek, de mindvégig

központi szerepet játszanak az egész disszertációban. Egyes visszatérő módszereket, például a Pell-egyenlet alkalmazását több szempontból is alaposan körbejártam. A különféle megoldások, megközelítési módok leírásánál minden esetben igyekeztem különös tekintettel lenni arra, hogy amennyire csak lehetséges, támaszkodjam a diákoktól várható gondolatmeneti sémákra, illetve többféle megoldás bemutatása által mélyítsem, és gazdagítsam a már meglévő sémák közötti kapcsolatot.

Az 5. fejezet harmadik részében egy olyan feladatsort állítottam össze, amelynek feladatait különféle nemzetközi matematikaversenyekről válogattam. A válogatásban az interneten található anyagok (IMO) mellett a [2], [9] és [21] monográfiák voltak segítségemre. Az összeállítás során igyekeztem a fokozatosság elvét szigorúan betartani, vagyis először az általam egyszerűbbnek gondolt, később pedig a nehezebbnek ítélt problémákat gyűjtöttem csokorba. A második résztől eltérő módon itt elsősorban nem az egyes problémákra adható többféle megoldási stratégia lehetőségét szerettem volna hangsúlyozni, hanem a megoldási módszereknek azt a sokszínűségét, amellyel általában a hagyományos tanórai keretek között aligha találkozhatunk. A feladatsor után megoldási útmutató is szerepel, amelyekben a megoldások mellett azok főbb gondolatait, a bizonyítások lényeges részeit emelem ki. A feladatok megoldásait a disszertációban korábban bemutatott eljárások és fogások egyfajta esszenciájaként szerettem volna megjeleníteni.

6. A témakör egy lehetséges feldolgozása szakköri órák keretében

A 6. fejezet arról a – hét foglalkozásból álló – szakköri tevékenységről szól, amelyet 2018. november közepétől kezdődően két hónapon keresztül végeztem az iskolámban, a budapesti Baár-Madas Református Gimnáziumban. A szakkörön általában kiváló képességű, a különféle matematikai problémák iránt különösen fogékony, érdeklődő tanulók vettek részt. A foglalkozások anyagát igyekeztem úgy megválasztani, hogy az (különösen a szakkör kezdetén) szorosan illeszkedjen a tanulók korábbi ismereteihez, annak értelemszerű kibővítését tartalmazza. Másrészről egy tehetséggondozásra irányuló szakkörnek feltétlenül olyan új anyagrészek és módszerek elsajátítására is kell fókuszálnia, ami által gazdagodik a problémamegoldási repertoár, amelyek birtokában a tanulók eredményesen szerepelhetnek az országos versenyeken, illetve a

legkülönbözőbb megmértetéseken. Ezen irányelvek mentén válogattam és állítottam össze az órai feladatsorokat, amelyek a disszertáció szinte mindegyik fejezetéből bőségesen tartalmazott érdekes, feldolgozásra váró problémákat (lásd 9.3.). Helyenként, – például a pitagoraszai számhármakok és a Pell-egyenlet tárgyalása kapcsán – a tanulók még némi ízelítőt is kaphattak az egyetemi „magasabb” matematikából, amely egyúttal a szakkör tehetséggondozó, versenyelőkészítő jellegét is nagymértékben erősítette.

A szakköri foglalkozások egy-egy nagyobb, egymással szorosan összefüggő egységekre történő bontásban kerültek bemutatásra. Az első két foglalkozáson a „szorzat=szám”, illetve a „szorzat=hatvány” típusú egyenletek kerültek a vizsgálat középpontjába, míg a harmadik és negyedik alkalommal a modulo m maradékosztályok, a különféle becslések segítségével megoldható diofantikus egyenletek, és a végtelen leszállás módszere került górcső alá. A pitagoraszai számhármakok, valamint a Pell-egyenletek vizsgálata képezte az ötödik és hatodik, illetve a hetedik szakköri óra anyagát, utóbbi igazi egyetemi kitekintőként, a látókör kibővítéseként szolgált. A feladatmegoldás egyes fázisaiban a módszertani szempontból (is) lényegesnek gondolt tanulói és tanári reakciókra igyekeztem a leírás során végig kellő hangsúlyt fordítani.

Az egyes foglalkozások feladatsorai, a beadható házi feladatokra adott tanulói megoldások a Függelékben szerepelnek, de ugyanitt található a 9.3. alfejezet is, amely a tárgyalásra került problémák disszertációbeli elhelyezkedésének visszakeresését segítheti.

A 6.3. alfejezetben összegzem azokat a tapasztalatokat, amelyeket a témakör tanítása során szereztem. Reményeim szerint összességében sikerült ötletekben és módszerekben gazdag, a matematika ezen területének szépségét és sokszínűségét jól visszatükröző – középiskolások számára is érthető és érdekes – problémákat kiválogatni, és közösen a diákokkal mindezeket eredményesen feldolgozni. Meggyőződésem, hogy a szakköri foglalkozások tanulságait felhasználva, a későbbiekben a tanítványaim még sikeresebben szerepelhetnek majd a különféle országos versenyeken, és megfelelő alappal, sokkal mélyebb matematikai háttérrel felvértezve jelentkezhetnek majdan a felsőoktatási intézményekbe.

8. fejezet

Summary

1. Introduction

While writing this dissertation, one of my objectives was the manifold examination of Diophantine equation problems in high school competitions (which topic is my personal favorite) and to demonstrate the applicability of higher mathematical methods through a few selected problems, and how these can be used in talent management and study group sessions. I solved and structured the problems and performed their didactic analysis completely by myself. The well-known competition challenges are supplemented by many of my own assignments. I strongly believe that such problems are suitable to wake students' interest, to provide a deeper insight, and to develop problem solving skills in general. Additionally, it supports teachers in their talent management endeavors, as well. One of my priorities is to compare and evaluate various solutions and to examine generalizations. I have attempted to meet this requirement throughout the dissertation. Most problems in Chapters 2, 3, and 4 are created by myself, and the results were published in papers [15], [16], and [17], respectively.

2. Diophantine equations concerning various means of binomial coefficients

The primary aim of Chapter 2 was to demonstrate with elementary methods that the arithmetic, geometric, and harmonic means of two distinct binomial coefficients $\binom{n}{2}$ are of the same form infinitely often. However, the solution for square means is unknown for the time being. For arithmetic means, I managed to provide all solutions. Also, for the case of three terms, I found infinitely many nontrivial solutions for certain types of binomial coefficients.

I strived to use elementary methods most of which can be discussed within the framework of high school mathematics education, dominantly in study group sessions, of course. Most proofs opened up a further, interesting outlook to other fields in mathematics. For example, the arithmetic mean can be associated with the Pythagorean triples, the harmonic mean with Pell's equation, while the geometric mean can lead to recursions. In my opinion, these problems may be methodically suitable for “research” projects for students looking for truly serious, challenging assignments. At the same time, we also have to count on the possibility that – due to the nature of the problems – they may feel challenged by seemingly unsolvable puzzles even in an early stage. Actually, this is the reason why I examined the means only for two terms and only for the lower value number 2 of the binomial coefficients. Further generalizations would require significantly more complex mathematical tools.

3. Solving Diophantine equations with binomial coefficients in study group sessions using both elementary and higher mathematical methods

Chapter 3 can be regarded as the continuation of the previous chapter in the sense that it carries on the discussion of Diophantine equations containing binomial coefficients. I maintain the importance of discussing equations which – at least partially – can be treated by especially talented students in high school study group sessions. I attempted to show the diversity of mathematical methods through several examples, which can be used to solve many problems, mainly of mathematical competitions. One of the focal points of the chapter is the examination of the Diophantine equation problem $A^2 + B^2 = C^2 + 2$, to which I managed to provide an infinite number of

integer solutions, at first with pure elementary methods, while later, by using quadratic forms, I provided all integer solutions. It is apparent, that in this case I made a little detour towards university material. These methods can by no means be taught in high school.

During the creation of the problems I also tried to follow the principle of gradualness, i.e. to start with easier assignments that can possibly be solved by elementary methods and to continue with more complex problems, mostly requiring higher mathematical structures. This is illustrated nicely by the Problem 3.0.10. , where I managed to find four different solutions, the last of which – posing a more general problem – will lead to all integer solutions of the equation.

The four methods show that different procedures can be suitable to motivate students to try their own ways, to ask further questions, and to work on solving new problems. Thus they can understand that a little twist in the conditions will result in a vast array of problems, ranging from easier to difficult ones, sometimes requiring deep methods or can remain even unsolved. Students can explore further similar problems – for example Problem 3.0.13. – and applications, they can examine the difficulty level, or after presenting a general complex problem, they can attempt to solve its easier special cases.

In Problem 3.0.11. I present another handling of Pell's equation, while in Problem 3.0.13. I use a few arithmetical features of the ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ to prepare the later discussion of Gaussian integers. While writing this chapter, I strived to show the diversity of methods, which often opened up new horizons in the examination of a given problem.

To close Chapter 3, I included a longer part with didactic notes, wherein I reiterate the methodology of each problem, going into the details of positive yields and possible difficulties of teaching Diophantine topics.

4. Solving Diophantine equations with elementary methods and with the help of Gaussian integers in high school mathematics study group sessions

In Chapter 4, I continue to use Diophantine equations to show to what type of number theory problems can Gaussian integers be applied in high school study groups or at a mathematics competition ([17]). The basic high school material doesn't even contain complex numbers, therefore, Gaussian integers are not mentioned, either. However, if we forgo the detailed structure used at universities, and refer to more difficult theorems without proofs, we will be able to solve beautiful and interesting problems in number theory, even with a relatively scarce background knowledge. For the problems in the first part of the chapter, I provided first the "usual" elementary solutions, then I went on to demonstrate various elementary methods and generalizations (see Problem 4.0.6.). These, on the one hand, may help the deeper understanding of a given problem, and on the other hand, can motivate the most talented and keen students to experiment freely. I examined an interesting variant in Problem 4.0.8., which finally led to a special class of Diophantine equations of the form $x^2 + k = y^3$, called Mordell's equations. To present an interesting application, I solve Mordell's equation for a few values of k . I describe a beautiful elementary solution for $k = -7$ (Problem 4.0.10.), while for $k = 1$ (Problem 4.0.11.), I show two significantly different solutions: a very complex elementary one and a simpler proof using Gaussian integers. As a "side product", the infinite descent in the elementary proof yielded also the non-negative integer solutions of equation $n^4 - 6m^2n^2 - 3m^4 = 1$.

At the end of the chapter I offer a proof of a special case of an interesting statement about Fibonacci sequences, making it presentable for high school curricula. An extremely difficult and widely examined number theory problem of the recent period is to establish the perfect power elements in the Fibonacci sequence. The special case for square numbers was answered already in the 1950's: Cohn, Ljunggren and Wyler ([3]) showed independently that $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, and $f_{12} = 144$ are the only squares in the Fibonacci sequence. My goal was to present a proof of this theorem for even indices in a more suitable form for high school students in contrast with the very sophisticated train of thoughts by the authors.

5. Discussion of competition problems in study group sessions

Chapter 5 comprises three shorter, but strongly intertwined entities. The first part discusses competition problems most of which were generalized by me. The aim of this rich set of problems is to demonstrate the diversity of tools used for Diophantine equations by presenting different methods, generalizations, ideas, and useful “tricks”. In my experience, most students in the study groups are interested in solving equations only if these problems are challenging, or if they can be solved using different approaches. Hopefully, the opening problem of the chapter (Problem 5.1.1.) fully meets the above objectives. I examined the related equations $x^n + y^n + z^n = nxyz$ for a few positive integer values of n , especially for $n = 2$, showing again several different solutions. I analysed Problems 5.1.14. and 5.1.22. accordingly, as well. My aim of finding new solutions even for already known problems is still valid for this chapter. Therefore, where it was possible, I supplemented known solutions with further generalizations and connecting points.

Problems 5.1.21., 5.1.26., 5.1.27., 5.1.30. and 5.1.31. surpass even these endeavors, i.e. they are mostly own creations. Problem 5.1.30. is especially close to my heart, as it was mainly inspired by a problem of the International Mathematical Olympiad which can be considered as the very top of high school mathematics.

Each of the second and third parts of Chapter 5 elaborates a set of selected competition problems. This is a possible extension of the topic to explore this mathematical field together with my students (see Chapter 6).

The discussion is supplemented with didactic analysis throughout. These are at times placed within the solution of the problems, at times they follow those, and at times you can read them separately, at the end of the given section. They have one thing in common: they play a focal role in the entire dissertation. Some recurring methods, for example, applications of Pell’s equation were presented in several different approaches. I tried to write the various solutions and approaches according to the train of thoughts expected from students. I also strove to deepen and enrich links between already existing schemes by presenting several solutions.

In the third part of Chapter 5, I compiled a series of problems from various international mathematical competitions using online materials (IMO) and monographs [2], [9], and [21]. During the selection, I strictly followed gradualness, i.e. I started

with simpler problems progressing towards more complex ones. Contrary to the multitude of solutions emphasized in the second part, in this section I rather focused on the diversity of methods generally not included in conventional curricula. I also added a solution guide, featuring the main ideas and crucial points of the proofs, as well. This is intended to be an essence of the techniques presented earlier.

6. An option for the introduction of the topic during study group sessions

Chapter 6 explores a study group activity of seven sessions I conducted for two months in my school, Baár-Madas Reformed Comprehensive Secondary School, starting in mid-November 2018. The study group is usually attended by students with excellent abilities, who are especially interested in solving mathematical problems. I tried to choose session materials that (especially for the early sessions) are linked to students' already existing knowledge and entail a self-explanatory extension thereof. At the same time, a talent-management study group should also aim for focusing on the acquisition of new material and methods enhancing students' problem-solving "toolkits", forming the foundation of their success in nationwide competitions and various contests. The session worksheets are comprised of interesting, challenging problems from all chapters of my dissertation (see [9.3.](#)).

Here and there, for example when discussing Pythagorean triples and Pell's equation, students even got a glimpse of university material, which significantly reinforces the study group's talent management- and competition-preparation nature.

The study group sessions are presented in larger units. In the first two sessions, we discuss the equation types "product=number" and "product=power", while during the third and fourth sessions, we deal with the residue classes modulo m , Diophantine equations that can be solved by using various estimations, and proof by infinite descent. Pythagorean triples and Pell's equation were the subjects of our fifth, sixth, and seventh sessions, the latter rather served explicitly to extend students' horizon towards university material. In the individual phases of problem solutions, I attempted to place adequate emphasis on students' and teachers' reactions I deemed important from the methodology point of view (amongst others) throughout the description.

The worksheets of individual sessions, students' solutions of home projects are

listed in the Appendix, along with sub-chapter 9.3. which may help tracking the discussed problems' location within the thesis.

Sub-chapter 6.3. is a summary of the experiences gained during teaching this topic. I hope that all in all, I managed to cherry-pick and process interesting problems abundant in ideas and methods, reflecting the beauty and diversity of this mathematical field, yet understandable at a middle-school level. I strongly believe that using the lessons learned from study group sessions, my students will become even more successful at various nationwide competitions allowing them to apply for admittance to higher education institutes with an adequate underlying knowledge and a strong mathematical background.

Irodalomjegyzék

- [1] T. Andreescu, D. Andrica, *Number Theory Structures, Examples, and Problems*, Birkhäuser, (2009).
- [2] T. Andreescu, D. Andrica, and I. Cucurezeanu, *An Introduction to Diophantine Equations*, Springer (2010).
- [3] J. H. E. Cohn, *The Diophantine Equation $x^4 - Dy^2 = 1$* , Acta Arithmetica 78, (1997), 401 – 403.
- [4] L. Costica, *Methods of solving Diophantine equations in secondary education in Romania*, Science Journal of Education 2014, 2(1), 22 – 32.
- [5] H. Davenport, *The Higher Arithmetic, eighth ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, (2008), 138 – 139.
- [6] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, (1998).
- [7] Erdős P., Surányi J., *Válogatott fejezetek a számelméletből*, Polygon, Szeged (1996), 6 – 7.
- [8] Erdős P., Surányi J., *Válogatott fejezetek a számelméletből*, Polygon, Szeged (1996), 17 – 18.
- [9] Faragó L., *A számelmélet elemei*, Tankönyvkiadó Budapest, (1967)
- [10] Freud R., Gyarmati E., *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó Budapest, (2006), 320 – 325.
- [11] M.E. Kuczma, *144 Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competitions*, The Academic Distribution Center (1994).

- [12] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers, fifth ed.*, John Wiley & Sons Inc., New York, (1991), 150 – 161.
- [13] I. Niven, H. S. Zuckerman, and H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers, fifth ed.*, John Wiley & Sons Inc., New York, (1991), 351 – 356.
- [14] K. Ono, K. Soundararajan, *Ramanujan's ternary quadratic form*, *Inventiones Mathematicae* (1997), 415 – 454.
- [15] R. Rakamazi, *Diophantine equations concerning various means of binomial coefficients*, *Teaching Mathematics and Computer Science*, University of Debrecen, (2014), 71 – 79.
- [16] R. Rakamazi, *Solving Diophantine equations with binomial coefficients in study group sessions using both elementary and higher mathematical methods*, *Teaching Mathematics and Computer Science*, University of Debrecen, (2016), 1 – 12.
- [17] R. Rakamazi, *Solving Diophantine equations with elementary methods and with the help of Gaussian integers in high school mathematics study group session*, *Problem Solving in Mathematics Education* (2013), 163 – 175.
- [18] M. Rassias, *Problem-Solving and Selected Topics in Number Theory*, Springer (2010).
- [19] Róka S., 2000 *feladat az elemi matematika köréből*, Typotex Budapest, (2006), 29 – 33.
- [20] A. Schinzel and W. Sierpinski, *Sur l' équation diophantienne*
 $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = \left[\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 - 1\right]^2$, *Elem. Math.* 18, (1963), 132 – 133.
- [21] W. Sierpinski, 200 *feladat az elemi számelméletből*, Tankönyvkiadó, Budapest, (1968), 19 – 26.
- [22] W. Sierpinski, *Elementary Theory of Numbers*, Pwn-Polish Scientific Publishers (1988), 57 – 58.

A szerzőnek a disszertációhoz kapcsolódó publikációi:

[R1] R. Rakamazi, *Diophantine equations concerning various means of binomial coefficients*, Teaching Mathematics and Computer Science, University of Debrecen, (2014), 71 – 79.

[R2] R. Rakamazi, *Solving Diophantine equations with binomial coefficients in study group sessions using both elementary and higher mathematical methods*, Teaching Mathematics and Computer Science, University of Debrecen, (2016), 1 – 12.

[R3] R. Rakamazi, *Solving Diophantine equations with elementary methods and with the help of Gaussian integers in high school mathematics study group session*, Problem Solving in Mathematics Education (2013), 163 – 175.

A szerző egyéb publikációi:

[R4] R. Rakamazi, *Analysis of a problem in plane geometry discussed in an 11th grade group study session*, Teaching Mathematics and Computer Science, University of Debrecen, 11/2, (2013), 181 – 193.

DOI: 10.5485/TMCS.2013.0339

A szerzőnek a disszertációhoz kapcsolódó előadásai:

- *Binomiális együtthatók különféle közepeivel kapcsolatos diofantikus egyenletek*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Eger, 2014.
- *Gauss-egészek segítségével megoldható diofantikus egyenletek a középiskolai szakörökön*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Nagyvárad, 2013.

9. fejezet

Függelék

9.1. Az értekezésben szereplő pitagoraszai számhármassal és a Pell-egyenlettel kapcsolatos elméleti ismeretek összefoglalása

Pitagoraszai számhármassoknak az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlet pozitív egész megoldásait nevezzük. Azonnal látszik, hogy az egyenlet megoldható (például a 3, 4, 5 számhármass megoldás), sőt egy x, y, z megoldást egy tetszőleges d pozitív számmal beszorozva a kapott dx, dy, dz számhármass is megoldás. Ezért külön érdemes azokat a megoldásokat vizsgálni, amelyekre $(x, y, z) = 1$ teljesül, ezeket alapmegoldásoknak vagy primitív pitagoraszai számhármassoknak nevezzük.

Tétel. *(i) Az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenletnek az $(x, y, z) = 1$ feltételt kielégítő összes pozitív egész megoldását (azaz az alapmegoldásokat vagy primitív pitagoraszai számhármassokat) a következő képlet szolgáltatja (itt az x és y felcseréléséből adódó megoldásokat azonosnak tekintjük):*

$$x = 2uv, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = u^2 + v^2,$$

ahol az u és v paraméterek tetszőleges olyan pozitív egészek, amelyekre u és v különböző paritású, $u > v$ és $(u, v) = 1$.

(ii) Az eredeti egyenlet összes pozitív egész megoldását az alapmegoldások többszöröseiként kapjuk meg, tehát

$$x = 2uvd, \quad y = (u^2 - v^2)d, \quad z = (u^2 + v^2)d,$$

alakban, ahol d tetszőleges pozitív egész, az u és v pozitív egészekre pedig teljesülnek az (i) pontban előírtak.

Pell-egyenletnek egy $x^2 - dy^2 = 1$ alakú diofantikus egyenletet nevezünk, ahol a d egy rögzített pozitív egész és nem négyzetszám. Az egyenlet két triviális megoldása az $x = \pm 1$ és $y = 0$, az ezektől különböző ($y \neq 0$ típusú) megoldásokat nevezzük a nem-triviális megoldásoknak.

Tétel. Ha d pozitív egész és nem négyzetszám, akkor az $x^2 - dy^2 = 1$ egyenletnek végtelen sok megoldása van a pozitív egész számok körében, amelyek felírhatók az alábbi alakban:

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n,$$

ahol (x_1, y_1) az ún. alapmegoldás, azaz olyan megoldás, ahol $y_0 > 0$ minimális.

Az egyenlet összes pozitív egészekből álló megoldásait a következő formában is megadhatjuk:

(i)

$$x_n = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n + \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n}{2}, \quad y_n = \frac{\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^n - \left(x_1 - y_1\sqrt{d}\right)^n}{2\sqrt{d}}.$$

Az egyenlet pozitív egész megoldásaira rekurzív összefüggést kaphatunk az alábbi formulák segítségével:

(ii)

$$x_{n+1} = x_1x_n + dy_1y_n, \quad y_{n+1} = y_1x_n + dx_1y_n.$$

Megjegyezzük, hogy már néhány „kis” d érték esetén sem könnyű meghatározni az alapmegoldást. Például $d = 61$ -re az $x_1 = 1766319049$ és $y_1 = 226153980$ értékeket kapjuk.

9.2. A szakköri foglalkozások feladatsorai

Az I. szakköri foglalkozás feladatsora

1. Egy tál süteményt szeretnénk feldarabolni a téglalap alakú tepsi oldalaival párhuzamos vágásokkal úgy, hogy a szeletelés után a tepsi szélével érintkező (kicsit égett) sütemények száma egyenlő legyen a tepsi szélével nem érintkező sütemények számával. Hogyan tehetjük ezt meg?
2. Három prímszám szorzata ötszöröse összegüknek. Melyek ezek a prímek?
3. Ottlik Géza, a kiváló prózaíró, matematikai tanulmányokat is folytatott. Ezzel kapcsolatos visszaemlékezéseiben szerepel az alábbi feladat: Bizonyítsuk be, hogy bármely $p > 2$ prím esetén $\frac{2}{p}$ pontosan egyféleképpen írható fel két különböző pozitív egész reciprokának összegeként. (Az összeadandók sorrendjére nem vagyunk tekintettel.)
4. A sík sokszögekkel való hézagmentes és átfedés nélküli lefedését parkettázásnak vagy csempézésnek nevezzük. Melyek azok a **szabályos** sokszögek, amelyekkel a sík parkettázható?

Házi feladatok:

5. Melyek azok a téglalapok, amelyeknek az oldalai pozitív egész számok, és terület mérőszáma megegyezik a kerület mérőszámával?
6. Oldjuk meg az egész számok körében az alábbi diofantikus egyenletet:

$$2xy + 4x - y - 9 = 0.$$

Beadható nehezebb problémák:

7. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre $4p + 1$ köbszám?
8. Jelölje $\star$ az alábbi műveletet: Ha a és b valós számok, akkor $a \star b = ab + a + b + 1$. Léteznek-e olyan x, y egész számok, amelyekre az $(x \star y) \star 2$ értéke
(a) 2018?

(b) 2019?

9. Adjunk megoldási eljárást az $axy + bx + cy + d = 0$ diofantikus egyenlet megoldására, ahol $a \neq 0$, a, b, c, d egészek, és az egyenlet megoldásait is az egész számok körében keressük.

Olvasnivaló: <http://www.termesztvilaga.hu/tv9708/penrose1.html>

A II. szakköri foglalkozás feladatsora

1. Adjuk meg azokat az (x, y) egész számpárokat, melyekre teljesül, hogy

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4.$$

2. Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenletet a pozitív egész számok körében.

$$x^3 - y^3 = xy + 61.$$

3. Határozzuk meg azokat az egész számokból álló (x, y) számpárokat, melyekre teljesül, hogy

$$(x + 2)^4 - x^4 = y^3.$$

Házi feladatok:

4. Határozzuk meg az $y = \sqrt{x^4 + 17x^2 + 60}$ görbe összes rácspontját (azaz olyan pontját, melynek mindkét koordinátája egész szám).
5. Oldjuk meg a nemnegatív egész számok körében az alábbi diofantikus egyenletet

$$x^3 + x^2 + x = y^2.$$

Beadható nehezebb problémák:

6. Határozzuk meg az összes olyan nemnegatív egészekből álló (x, y) számpárt, amelyre

$$y^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8.$$

7. A karácsonyfa minden ágán annyi szaloncukor van, mint ahány ága van a fának. Egy alkalommal véletlenül feldőlt a fa, és két ága letörött. Miután újból fölállították a fát, Andris minden megmaradt ágról lecsent néhány cukrot (mindegyik ágról ugyanannyit), majd így szólt: Jé, most éppen feleannyi cukor van a fán, mint eredetileg volt. Testvére Kati erre így szólt: Akkor rosszul számoltál. Vajon melyiküknek van igaza?
8. Az a és b különböző természetes számok számtani közepe az $\overline{xy}$ kétjegyű szám, mértani közepük az $\overline{yx}$ kétjegyű szám. Határozzuk meg az a és b számokat.

A III-IV. szakköri foglalkozás feladatsora

1. Oldjuk meg az $x^n + y^n + z^n = nxyz$ diofantikus egyenletet a pozitív egész számok körében az $n = 1, 2, 3, 4$ esetekben!

Házi feladatok:

2. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében az alábbi diofantikus egyenletet!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

3. Mutassuk meg, hogy az $x^2 + y^2 = 3z^2$ diofantikus egyenlet nem oldható meg a nullától különböző egészek körében.

Beadható nehezebb problémák:

4. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében az alábbi egyenletet:

$$3(xy + yz + zx) = 4xyz.$$

5. Oldjuk meg az egész számok körében az alábbi egyenletet:

$$xy + \frac{x^3 + y^3}{3} = 29.$$

6. Van-e az $x^2 + xy + y^2 = 2z^2$ egyenletnek megoldása a pozitív egész számok körében?

Az V-VI. szakköri foglalkozás feladatsora

1. Adjuk meg az összes olyan derékszögű háromszöget, amelynek az oldalai egész számok, valamint a kerület és terület mérőszáma megegyezik.
2. Igaz-e, hogy minden olyan derékszögű háromszögben, amelynek az oldalai egész számok, az oldalak szorzata osztható 60-nal?
3. Figyeljük meg az alábbi primitív pitagoraszai számhármast:

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 5^2 + 12^2 = 13^2, \quad 7^2 + 24^2 = 25^2, \quad 9^2 + 40^2 = 41^2.$$

Milyen sejtés olvasható ki e példákból? Keressünk hasonló szerkezetű pitagoraszai számhármast!

4. Oldjuk meg az alábbi diofantikus egyenletet a pozitív egész számok körében.

$$5^x - 3^y = 16.$$

Házi feladatok:

5. Adjuk meg az összes olyan primitív pitagoraszai számhármast, amelyre $z \leq 50$.
6. Mutassuk meg, hogy ha egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, akkor nem lehet mindkét befogó hossza páratlan. Adjuk meg az összes olyan derékszögű háromszöget, amelyek oldalai egészek, az oldalakra $(a, b, c) = 1$ teljesül, valamint a páros befogó hossza 48 egység.
7. Van-e olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai egész számok, és az átfogója 2019 egység?
8. Melyek azok a derékszögű háromszögek, amelyek a, b és c oldalai egész számok, az oldalakra $(a, b, c) = 1$ teljesül, valamint a páratlan oldal négyzete megegyezik a páros oldal, illetve az átfogó hosszának összegével.

Beadható nehezebb problémák:

9. Bizonyítsuk be, hogy nincsen olyan derékszögű háromszög, amelynek oldalai egész számok, és a területének mérőszáma megegyezik az átfogó mérőszámával.

10. Legyenek p, q olyan prímszámok, amelyekre $3 \leq p < q$, továbbá $p + 1, q + 1$ egyaránt osztható 4-gyel. Mutassuk meg, hogy $q^2 - p^2$ nem lehet négyzetszám.
11. Oldd meg a pozitív egész számok körében az $x^2 + y^2 = 13(x - y)$ diofantikus egyenletet. Egy lehetséges általánosításként próbálj megoldási módszert találni arra az esetre, amikor a 13 helyett egy $4k + 1$ alakú p prím szerepel az egyenletben.

A VII. szakköri foglalkozás feladatsora

1. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok pozitív egész n -re teljesül, hogy az első n pozitív egész szám összege négyzetszám! Keressük meg az összes megoldást!
2. Egy szórakozott matematikaprofesszor elindult, hogy meglátogassa egy volt tanítványát. Mikor az utca elejére ért rájött, hogy elfelejtette a tanítvány házszámát. Ebben az utcában csak az egyik oldalon voltak házak, számozásuk 1-gyel kezdődött és egyesével növekedett. A professzor emlékezett rá, hogy legalább 200 és legfeljebb 500 ház van az utcában. Továbbá arra is, hogy a tanítványa háza az utca numerikus középpontjában áll, azaz a házsámoknak az utca elejétől a házig vett összege megegyezik a háztól az utca végéig vett házsámok összegével. Rövid gondolkodás után a professzor rájött, hogy hova kell mennie. Meg tudjuk-e mi is határozni a kérdéses házszámot?

Házi feladatok:

3. Határozzuk meg az $x^2 - 10y^2 = 1$ Pell-egyenlet alapmegoldását, és ennek segítségével állítsuk elő az egyenlet további 3 nem-triviális megoldását.
4. Oldjuk meg a pozitív egész számok körében az $x^2 - 4xy + y^2 = 1$ egyenletet!

Beadható nehezebb problémák:

5. Keressük meg az összes olyan háromszöget, melynek oldalai egymást követő egész számok és a területe is egész szám.
6. Mutassuk meg, hogy az alábbi diofantikus egyenletnek végtelen sok megoldása létezik, ha $x \geq 4$, x és y egész számok.

$$\binom{x}{4} + \binom{x+1}{4} = y^2.$$

9.3. Az értekezésben szereplő feladatok témakör szerinti besorolása

Ahogy az korábban már jeleztük, a disszertációban szereplő feladatoknak egy lehetséges témakör szerinti besorolását adjuk annak reményében, hogy ezzel is elősegíthetjük ezen példák a különféle iskolai szakkörökön történő eredményes feldolgozását. Megjegyezzük, hogy az alábbi csoportosítás lényegében a doktori dolgozat szerzőjének saját szakköri óráihoz kapcsolódik, kivételt ez alól csak a Gauss-egészek, a $\mathbb{Z}(\sqrt{-2})$ euklideszi gyűrű, illetve a kvadratikus alak segítségével megoldható problémák képeznek. A feladatok számozása az értekezésben szereplő számozást követi. A szakkörön tárgyalásra került, valamint a beadható feladatoknak szánt példák sorszámát vastagon szedjük.

I. foglalkozás („szorzat=szám” típusú egyenletek): 4.0.1. (I. és III. megoldás); 5.1.14.; 5.2.1.; **5.2.2. (I. megoldás);** 5.3.1.

II. foglalkozás („szorzat=hatvány” típusú egyenletek): 3.0.12.; 4.0.4. (I. megoldás); 4.0.6. (I. megoldás); 5.1.1. (I. és III. megoldás); **5.1.11. (I. és III. megoldás);** 5.1.16.; 5.1.26.; 5.1.30.; **5.2.2. (II. és III. megoldás);** **5.2.3.;** 5.2.4.; **5.3.2.;** **5.3.6.;** 5.3.10.; 5.3.14.; 5.3.17.

III-IV. foglalkozás (különféle becslések, megoldhatatlanság bizonyítása modulo m maradékok segítségével, a végtelen leszállás módszere) : 4.0.1. (II. megoldás); 4.0.10.; 4.0.11. (I. megoldás); 5.1.1. (II. megoldás); **5.1.3.;** **5.1.4.;** **5.1.6.;** **5.1.8.;** 5.1.9.; **5.1.11. (II. megoldás);** 5.1.20.; 5.1.22. (I.; II. és III. megoldás); 5.1.27.; 5.1.28.; 5.2.5.; 5.2.6.; 5.2.7.; **5.2.9. (I. megoldás);** 5.3.3.; 5.3.4.; **5.3.5.;** 5.3.7.; 5.3.8.; 5.3.9.; 5.3.11.; 5.3.12.; 5.3.13.; 5.3.15.; 5.3.16.; 5.3.18.

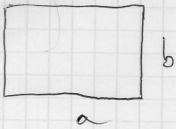
V-VI. foglalkozás (pitagoraszi számhármak): 2.0.1.; 2.0.2.; 4.0.1. (IV. megoldás); **4.0.6. (II. megoldás);** 5.1.21.; 5.2.8.; **5.2.9. (II. megoldás)**

VII. foglalkozás (Pell-egyenlet): 2.0.4.; 2.0.5.; 3.0.2.; **3.0.11.;** 5.1.31.; 5.2.10. (II. megoldás); 5.3.19.

Gauss-egészek, $\mathbb{Z}(\sqrt{-2})$, kvadratikus alak: 3.0.3.; 3.0.13.; 4.0.1. (V. megoldás); 4.0.4. (II. megoldás); 4.0.6. (III. megoldás); 4.0.8.; 4.0.11. (II. megoldás); 4.0.13.; 5.1.17.; 5.1.22. (IV. megoldás).

9.4. Válogatás a tanulók munkáiból

5



$a, b > 0$ egész

$$T = ab$$

$$K = 2(a + b)$$

$$ab = 2(a + b)$$

$$ab - 2a - 2b = 0$$

$$a(b - 2) - 2(b - 2) - 4 = 0$$

$$a(b - 2) - 2(b - 2) = 4$$

$$(a - 2)(b - 2) = 4$$

$1 \cdot 4 \rightarrow a = 3 \quad b = 6$
 $4 \cdot 1 \rightarrow a = 6 \quad b = 3$ egybeesik az elsővel
 $2 \cdot 2 \rightarrow a = 4 \quad b = 4$
 $-1 \cdot (-4) \rightarrow a = 1 \quad b = -2$ η
 $-4 \cdot (-1) \rightarrow \eta \quad a = -2$
 $-2 \cdot (-2) \rightarrow \eta \quad a = 0$

$$M = \{(3; 6)(4; 4)\}$$

$$2xy + 4x - y - 9 = 0$$

$$2x(y + 2) - (y + 2) - 7 = 0$$

$$2x(y + 2) - (y + 2) = 7$$

$$(y + 2)(2x - 1) = 7$$

$1 \cdot 7 \rightarrow y = -1 \quad x = 4$
 $7 \cdot 1 \rightarrow y = 5 \quad x = 1$
 $-1 \cdot (-7) \rightarrow y = -3 \quad x = -3$
 $-7 \cdot (-1) \rightarrow y = -9 \quad x = 0$

$$M = \{(4; -1)(1; 5)(-3; -3)(0; -9)\}$$

9.1. ábra. B.M. megoldása az I/5. feladatra

$4p+1 = n^2$
 $4p = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$

I. $4 = n-1$
 $n = 5$
 $n^2 + n + 1 = p = 31$
 31 prím

II. $n^2 + n + 1 = 4$
 $n = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
 nem egész, $\downarrow$

f. $a \star b = a \cdot b + a + b + 1 = (a+1)(b+1)$
 $(x \star y) \star 2 = (2+1) \cdot [(x+1) \cdot (y+1) + 1]$
 g. $2018 = 3 \cdot [(x+1)(y+1) + 1]$
 $\frac{2015}{3} = (x+1)(y+1) \quad \downarrow \text{mivel } x, y \in \mathbb{Z}$
 h. $2019 = 3 \cdot [(x+1)(y+1) + 1]$
 $672 = (x+1)(y+1)$ Számos ilyen szorzatuk lehet

9. $a \cdot x + b \cdot x + c \cdot y + d = 0$
 E. f. l. a fenti feltételre így:
 $(a \cdot x + u)(y + k) + m = 0$
 Ezt kibontjuk:
 $a \cdot x \cdot y + a \cdot k \cdot x + u \cdot y + u \cdot k + m = 0$
 $b = a \cdot k \quad u = c \quad d = u \cdot k + m = \frac{c}{a} \cdot c + m$
 $k = \frac{b}{a}$
 Tehát: $(a \cdot x + c)(y + \frac{b}{a}) + (d - \frac{c}{a} \cdot c) = 0$

pl: $x+1=4$
 $x=3$
 $y+1=168$
 $y=167$
 $672 = 2^5 \cdot 3$
 $\downarrow \downarrow$
 24 osztó
 $\downarrow \downarrow$
 12 szorzat
 azaz 12
 darab

9.2. ábra. T.Á. megoldása az I/7., I/8. és I/9. feladatra

$$(x-2)(x-8) = \frac{x^2}{2}$$

Amennyiben találunk megoldást erre a diffrankus egyenletre, úgy Andris amennyiben azt kapjuk, hogy nincs megoldása az egyenletnek, úgy Karinak van igazsága.

$$x > y \quad x > 2 \quad x, y \in \mathbb{Z}^+$$

$$2(x-2)(x-4) = x^2 \Rightarrow \text{no pares}$$

$$2x - 2y = x - 2 + \frac{4(x-2) + 4}{x-2}$$

$$x - 2y = 2 + \frac{4}{x-2} \Rightarrow 2 + \frac{4}{x-2} \text{ is egész kell, hogy legyen!}$$

x-2-nelc osztania kell a 4-et

Goszlói: $4; 2; 1; -1; -2; -4$

$$x-2 = -1 \Rightarrow x=1 \quad \& \quad (x > 2)$$

$$x-2 = -2 \Rightarrow x = 0 \text{ (} x > 2 \text{)}$$

$$x-2 = -4 \Rightarrow x = -2 \text{ (} x > 2 \text{)}$$

159

$a \neq b$ $a, b \in \mathbb{N}$ $1 \leq x, y \leq 9$ $x, y \in \mathbb{Z}^+$

$$\frac{a+b}{2} = \overline{xy} = 10x+y \Rightarrow a+b = 20x+2y$$

$$\sqrt{ab} = \overline{yx} = 10y+x \Rightarrow b = \frac{(10y+x)^2}{a}$$

$$a + \frac{(10y+x)^2}{a} = 20x+2y$$

$$a^2 - (20x+2y)a + (10y+x)^2 = 0$$

vagyunk úgy, mintha x és y paraméter lenne

$$a_{1,2} = \frac{20x+2y \pm \sqrt{(20x+2y)^2 - 4(10y+x)^2}}{2}$$

$$a_1 = 10x+y + \frac{\sqrt{(20x+2y)^2 - 4(10y+x)^2}}{2}$$

$$a_2 = 10x+y - \frac{\sqrt{(20x+2y)^2 - 4(10y+x)^2}}{2}$$

egész szám egész számok ennek is egésznek kell lennie

$$\sqrt{\frac{(20x+2y)^2 - 4(10y+x)^2}{4}} = \sqrt{\frac{400x^2 + 80xy + 4y^2 - 400y^2 - 80xy - 4x^2}{4}} =$$

$$\sqrt{100x^2 + 20xy + y^2 - 100y^2 - 20xy - x^2} = \sqrt{99(x^2 - y^2)} = 3\sqrt{11} \cdot \sqrt{x^2 - y^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \underbrace{\sqrt{11}}_{\text{egész szám}} \cdot \sqrt{x^2 - y^2} \rightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{11} \cdot k$$

k lehet 1 illetve 2 (maximum 80 lehet az $x^2 - y^2$ eredménye)

I. $k=1$

$$x^2 - y^2 = 11 \Rightarrow \boxed{x=6} \text{ és } \boxed{y=5} \Rightarrow \boxed{a_1=98} \Rightarrow \boxed{b_1=32}$$

$$(1 \leq x, y \leq 9) \quad \boxed{a_2=32} \Rightarrow \boxed{b_2=98}$$

9.4. ábra. J.M. megoldása a II/8. feladatra

III. $k=2$

$$x^2 - y^2 = 44$$

$$(x-y)(x+y) = 44$$

1	44	$\Rightarrow x=22,5$	$y=2,5$	$\nmid$	$(x,y \in \mathbb{Z}^+)$
2	22	$\Rightarrow x=12$	$y=10$	$\nmid$	
4	11	$\Rightarrow x=4,5$	$y=3,5$	$\nmid$	
11	4	$\Rightarrow x=4,5$	$y=-3,5$	$\nmid$	
22	2	$\Rightarrow x=12$	$y=-10$	$\nmid$	
44	1	$\Rightarrow x=22,5$	$y=-2,5$	$\nmid$	

Csak az $a=98$ $b=32$, illetve $a=32$ $b=98$ számpárok jó megoldások.

9.5. ábra. J.M. megoldása a II/8. feladatra (folyt.)

ap 9. feladat

Indirekt t.f.h. létezik olyan derékszögű háromszög, amelyre

$$\frac{ab}{2} = c$$


$$\frac{uvd \cdot (u^2 - v^2)d}{2} = (u^2 + v^2)d$$

$u > v > 0$
 $u, v \in \mathbb{Z}^+$
 u és v paritása különböző

$$uvd \cdot (u^2 - v^2) = u^2 + v^2$$

$$u^3vd - uv^3d = u^2 + v^2$$

$$u^3vd - u^2 = uv^3d + v^2$$

$$\underbrace{u^2(uvd-1)}_{\text{páratlan}} = \underbrace{v^2(uvd+1)}_{\text{páratlan}}$$

$uvd+1$, mert u vagy v páros, tehát uvd is páros, tehát $uvd \pm 1$ páratlan

Vagy u^2 vagy v^2 páratlan $\Rightarrow$ páratlan $\cdot$ páratlan = páros $\cdot$ páratlan $\nmid$
a másik pedig páros

Tehát nincs olyan derékszögű háromszög, amelynek a területét mérőszáma megegyezik az átfogója hosszának mérőszámával.

1. feladat

2. feladat

$x, y, z \in \mathbb{R}^+$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

$(yz + xz + xy = xyz)$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \leq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \text{szimmetria} \Rightarrow x \leq y \leq z$

$\boxed{1 \leq \frac{3}{2}}$

$\Rightarrow z \leq 3$

I. $z = 1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{1} = 1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1 = 1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

$\frac{1}{x} = -\frac{1}{y}$

$\boxed{x = -y}$

Ellenőrzés:

$x > 0, y > 0$

pozitív szám = - (pozitív szám)

$\Rightarrow 0 \neq < 0$

x, y x-vel nem lehet y

ellentmondás.

$M_1 = \emptyset$

II. $z = 2$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$\frac{y+x}{xy} = \frac{1}{2}$

$2y + 2x = xy$

$xy - 2x - 2y = 0$

$x(y-2) - 2(y-2) - 4 = 0$

$(x-2)(y-2) = 4$

$\begin{matrix} x_1 = 3 & y_1 = 6 & 1 \cdot 4 \\ x_2 = 6 & y_2 = 3 & 4 \cdot 1 \\ x_3 = 4 & y_3 = 4 & 2 \cdot 2 \\ x_4 = 1 & y_4 = -2 & -1 \cdot -4 \\ x_5 = -2 & y_5 = 1 & -4 \cdot -1 \end{matrix}$

$M_2 = \{(3, 6, 2), (6, 3, 2), (4, 4, 2)\}$

III. $z = 3$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{3} = 1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{3} = 1$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$

$\frac{x+y}{xy} = \frac{2}{3}$

$3x + 3y = 2xy$

$3xy - 2x - 2y = 0$

$xy - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y = 0$

$x(y - \frac{2}{3}) - \frac{2}{3}(y - \frac{2}{3}) - \frac{4}{9} = 0$

$(x - \frac{2}{3})(y - \frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$

$\begin{matrix} x_1 = \frac{5}{3} & y_1 = \frac{5}{3} & \frac{1}{9} \cdot 4 \\ x_2 = \frac{4}{3} & y_2 = \frac{4}{3} & \frac{2}{9} \cdot 2 \\ x_3 = \frac{2}{3} & y_3 = -\frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \cdot -4 \\ x_4 = -\frac{2}{3} & y_4 = \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} \cdot 1 \end{matrix}$

$M_3 = \{(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 3), (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 3)\}$

$(3x-2)(3y-2) = 4$

9.7. ábra. K.K. megoldása a III-IV/2. feladatra

$(3x-2)(3y-2) = 4$
 $3x-2=1 \Rightarrow x=1$ $3y-2=4 \Rightarrow y=2$
 $1 \cdot 4 \Rightarrow$ primmunkor
 $2 \cdot 2$
 $-1 \cdot -4$
 $\Rightarrow$

$\frac{x+y}{xy} = \frac{2}{3}$
 $3x+3y=2xy$
 $2xy-3x-3y=0 \quad | :2$
 $xy - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y = 0$
 $x(y - \frac{3}{2}) - \frac{3}{2}(y - \frac{3}{2}) - \frac{9}{4} = 0$
 $(x - \frac{3}{2})(y - \frac{3}{2}) = \frac{9}{4} \quad | \cdot 4$
 $2 \cdot (x - \frac{3}{2}) \cdot 2(y - \frac{3}{2}) = 9$
 $(2x-3)(2y-3) = 9$

$2x-3=1 \Rightarrow x_1=2$ $2y-3=9 \Rightarrow y=6$
 $3 \cdot 1 \Rightarrow x_2=6$ $2y-3=3 \Rightarrow y_2=3$
 $3 \cdot 3 \Rightarrow x_3=3$ $2y-3=-3 \Rightarrow y=0$ $y=0 \vee y>0$
 $-1 \cdot -3 \Rightarrow x_4=1$ $2y-3=-3 \Rightarrow y=0$ $y=0 \vee y>0$
 $-3 \cdot -1 \Rightarrow x_5=0$ $2y-3=-3 \Rightarrow y=0$ $y=0 \vee y>0$

$M_2 = \{(6, 2, 3)(3, 3, 3)\}$
 $\text{Ell: } \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3+1+2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \vee$
 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \vee$

$M = M_2 \cup M_3 \cup M_1 = \{(6, 3, 2)(3, 3, 3)(4, 4, 2)\}$
 Ezek három permutáció $\Rightarrow$ primmunkor egész

9.8. ábra. K.K. megoldása a III-IV/2. feladatra (folyt.)

6) Zurdoldal biztos befogó, mert
 (u^2+v^2) oldal a leghosszabb,
 ezért ennek kell lennie az ~~old~~
 átfogónak, és Zurd-biztos páros
 mert megosztva 2-vel
 $u \not\equiv v \pmod{2} \quad u > v > 0 \quad (u,v)=1$

$(a,b,c)=1$
 $b=48 \Rightarrow$ ez a páros befogó $b=2uv$ (d elhagy-
 $uv=24$ hato, mert $(a,b,c)=1$)
 kikötés alapján $u > v > 0$
 $\Downarrow$

I. $u=24 \quad v=1$
 $c=24^2-1^2=575 \quad a=24^2+1^2=577$

II. $u=12 \quad v=2$
 $c=12^2-2^2=140 \quad a=12^2+2^2=148$ $(a,b,c)=1$
 nem teljesül

III. $u=8 \quad v=3$
 $c=8^2-3^2=55 \quad a=8^2+3^2=73$

IV. $u=6 \quad v=4$ $a=6^2+4^2=52$ $(a,b,c)=1$
 nem teljesül

Megfelelő számhármasok: 577; 575; 48
 73; 55; 48

9.9. ábra. T.F. megoldása az V-VI/6. feladatra

f) Ilyen primitív pitagorasz-számhármas nincs, mert:
 $z = u^2 + v^2$
 Négyzetszám 4-es maradék 0, vagy 1, így z
 4-es maradék 0, 1, 2 lehet, de a 2019 (4-es)
 maradék 3.
 De lehet ez az átfogó, az alap megoldás többszöröse.
 pl: ha $d=3$ és $u^2 + v^2$ 4-es maradék 1

8. $(u^2 - v^2)^2 = 2uv + u^2 + v^2$
 $(u^2 - v^2)^2 = (u + v)^2$
 $u^2 - v^2 = u + v$
 $u^2 - u = v^2 + v$
 $u(u - 1) = v(v + 1)$
 Két-két szomszédos szám szorzata, akkor egyenlő, ha
 a két-két szomszédos szám ugyanaz.
 Tehát: $u = v + 1$
 $v = u - 1$
 Tehát ~~ha~~ ha u és v szomszédos, akkor
 teljesül ez a feltétel.
 pl: $u=2$ $x=4$ $y=3$ $z=5$
 $v=1$
 $3^2 = 4 + 2$
 $3^2 = 4 + 5$
 $9 = 9$ ✓

9.10. ábra. SZ.SZ. megoldása az V-VI/7. és V-VI/8. feladatra