Tartalomjegyzék

1. Bevezető gondolatok **5**
1.1. Problémafelvetés . . . 6
1.2. A probléma megoldására tett lépések . . . 7
1.3. A probléma okai, lehetséges kiutak . . . 8
1.3.1. A matematikaoktatás tartalmi megújítása . . . 9
1.3.2. A számítógéppel segített oktatás . . . 11
1.3.3. A hallgatók aktív részvétele . . . 12
1.3.4. A projektmódszer használata a Miskolci Egyetemen . . . 14

2. A matematikaoktatás folyamatának elemzése **15**
2.1. Az oktatás tervezett folyamatának egy lehetséges modellje . . . 15

3. Az oktatás orientációs fázisa **17**
3.1. Bevezetés . . . 17
3.2. A matematikai ismeretek és képességek szintjének hanyatlása . . . 18
3.2.1. Társadalmi okok . . . 20
3.2.2. Más okok . . . 20
3.3. A próbálkozások és a tapasztalatok . . . 21
3.3.1. Más egyetemeken . . . 21
3.3.2. Miskolcon . . . 22
3.4. Az egyetemi munkastílus kialakítása . . . 24

4. A mérnökhallgatók matematikaoktatásának sajátosságai **28**
4.1. A matematika oktatása a mérnökképzésben . . . 28
4.2. A mérnökképzés általános céljai . . . 28
4.3. A matematika oktatásának céljai a mérnökképzésben . . . 29
4.4. A matematika, mint eszköz . . . 29
4.5. A matematika szerepe a gondolkodás fejlődésében . . . 30
4.6. Matematikatörténeti nevelési célok . . . 31
4.6.1. A magyar matematikatörténetből vett példák . . . 32
4.6.2. Egyetemünk történetéből vett példák . . . 33
4.6.3. A matematikatörténet lehetséges szerepe . . . 35
4.6.4. További nevelési célok . . . 36
4.7. A matematikaoktatás céljainak közvetítése . . . 37

5. Fogalomalkotás **38**
5.1. A fogalmak tanítása . . . 39
5.1.1. Az induktív út . . . 39
5.1.2. A deduktív út . . . 40
5.1.3. A konstruktív út . . . 40
5.1.4. Példa az induktív útra . . . 40
5.2. A fogalom megerősítése . . . 41
5.3. Fogaskerekek áttételének számítása . . . 42

5.4. Függvény fogalmának áttekintése 43
5.4.1. Alapvető fogalmak 43
5.4.2. Függvények 46
5.4.3. A függvény fogalma alapvetően fontos a mérnökképzésben 54
5.5. A mátrixok fogalmának bevezetése 57
5.6. A mátrixok alkalmazása a komplex számok
és a kvaterniók modellezésére 61
5.7. A példák és ellenpéldák szerepe 63
5.8. Memóriacímkék - figyelemfelkeltő ábrák, megjegyzések 70

6. A matematikaoktatás realizációs fázisa 71
6.1. Az egyetemi matematikaoktatás hagyományos formái 72
6.2. A Bologna-folyamat alkalmazásának lehetséges következményei
a matematika oktatásában 74
6.3. Matematikaoktatási módszerek 74
6.3.1. A hagyományos módszerek és a számítógéppel segített oktatás 74
6.3.2. Távoktatási módszerek 75
6.4. Aktív módszerek a matematika oktatásában 76
6.4.1. Előadás közben használható aktív módszerek 76
6.4.2. Gyakorlatokon használható aktív módszerek 77
6.4.3. A félévközi munka beszámítása 78
6.4.4. Projektmódszer 79

7. A MacTutor projektek alkalmazásának tapasztalatai 81
7.1. A Mathematical MacTutor 81
7.2. MacTutor projektek 81
7.3. A MacTutor projektek alkalmazásának előnyei és hátrányai . . . 82

8. Az egyéni és kiscsoportos projektek alkalmazá-sának tapasztalatai 83
8.1. A projektek célja 83
8.2. A projektek felépítése 83
8.2.1. Témafelvetés 83
8.2.2. Önkéntes feladatvállalás, együttműködők kiválasztása . . 84
8.2.3. Munkaterv, részfeladatok megbeszélése 84
8.2.4. A téma kidolgozásának követése, esetleges módosítások . 84
8.2.5. Beszámoló 84
8.2.6. Értékelés 85
8.3. A módszer előnyei 85
8.4. A módszer hátrányai 85
8.5. A deeper understanding by explaining elve 85
8.6. A kisdolgozatok alkalmazásának eredménye, tapasztalata 86
8.6.1. A projektmódszer alkalmazása 87
8.6.2. A legfontosabb következmények 88

9. Megvalósult projektek, kisdolgozatok **88**
9.1. A harmadfokú polinom gyökeiről 88
9.2. Integrál összegek alkalmazása 90
9.3. Integrálok közelítő kiszámításának két különböző módszere . . . 91
9.3.1. Taylor, MacLaurin polinomok 92
9.3.2. A téglalap módszer, és más módszerek 92
9.4. Szélsőértékszámítás egy gyakorlati alkalmazása 93
9.5. Homorú reflektortükör meridiángörbéje 95
9.6. Résztörtekre bontás egy gyorsabb módszere 98
9.7. Az egész számok néhány tulajdonsága 99
9.7.1. Története 99
9.7.2. Az egész számok néhány tulajdonsága 100
9.8. Gráfok alkalmazásai 102
9.8.1. Euler és Hamilton utak 102
9.9. Az inverz félcsoportokról 104

10. A matematikaoktatás ellenőrzési, értékelési fázisa **105**
10.1. Az ellenőrzési formák elemzése, összehasonlítása 108
10.1.1. A félévközi zárthelyi dolgozatok 108
10.1.2. Vizsgadolgozatok 109
10.1.3. A szóbeli vizsga 111
10.1.4. Az írásbeli vagy szóbeli vizsgát megelőző beugró kérdéssor - minimum teszt 112
10.2. A félévközi munka értékelése 113
10.2.1. Folyamatos ellenőrzés 113
10.2.2. Feladatok beadása 113
10.2.3. Egyéni vagy csoport projektek 114

11. Elhanyagolt tanulási- oktatási tapasztalatok felélesztése és új módszerek keresése **117**
11.1. Aktív módszerek 117
11.2. Az aktív oktatás egyik jellemzője a hasznossági elv 117
11.3. A számítógép használatának előnyei és hátrányai a matematika oktatásában. Médiahasználat lehetőségei 118

12. A nemzetközi együttműködés szerepe **120**
12.1. A matematika oktatásának kérdéseiről rendezett konferenciák . . 120
12.2. A CEEPUS H-127 hálózat működéséről 121
12.3. CEEPUS Computer Algebra Driving Licence nyári egyetem . . . 123

13. Konklúziók **124**

14. Köszönetnyilvánítás **126**

15. Az értekezés CD-mellékletének tartalma **126**

A matematika oktatása mérnökhallgatóknak

doktori (PhD) értekezés

Dr. Körtesi Péter

Debreceni Egyetem
Debrecen, 2005

"De nem végez kárbaveszett munkát az a mérnök sem, aki tudományszakunkkal, a matematikával a gyakorlati felhasználás hátsó gondolata nélkül, tisztán magáért a tudományért foglalkozik: mert eltekintve attól, hogy sohasem lehet tudni, hogy mikor lép valamely elvont mennyiségtani tétel a műszaki alkalmazás terére, az öncélú spekuláció élesíti és fokozza a matematikai gondolkodás készségének erőit, tehát azokat a lelki képességeket, amelyek a technikus sajátos ismeretvilágának alapjait és szellemi tartalmát megteremtik és táplálják. Ez a légkör - hogy úgy mondjam - a mérnök ózondús hegyi levegője és minél tovább tartózkodik ebben a légkörben, annál egészségesebben fejlődik a technikusi lelkülete."

Dr. Walek Károlynak, a Bánya-, Kohó- és Erdőmérnöki Kar dékánjának székfoglaló beszéde, Sopron, 1935 [117].

1. Bevezető gondolatok

A matematika oktatásának vannak általánosan, az ismeretátadás bármely formájában érvényes törvényszerűségei, és minden konkrét megvalósulásnak vannak sajátosságai, az általános elvekkel nagyrészt összhangban, de néha igen eltérő formában. A matematika, és ebben talán jórészt egyetértés van, a legfontosabb eszköze a logikus gondolkodásra nevelésnek, ezt a fő célt különböző formákban és eszközökkel szolgálja. A matematikaoktatás didaktikai kérdéseinek egy alapos, minden szempontot felölelő leírása nem kis feladat, és Ambrus Andrásnak e témában született egyetemi jegyzetének [65] hatása ebben a dolgozatban is bevallottan tetten érhető.

Egy szűkebb területen, a mérnökképzésben nyilván ugyanazok az általános didaktikai elvek érvényesülnek a matematikaoktatásban, mint bármely más téren, de ennek a képzésnek van néhány sajátos vonása, tekintve, hogy a mérnökök a matematikát nem csak felhasználják, hanem sokszor maguk is alakítják. Gyakran előfordul az, hogy a mérnök egy konkrét alkalmazás matematikai leíráshoz meg kell keresse a legmegfelelőbb matematikai eszközöket. Ilyenkor felvethető a kérdés matematikai megfogalmazásának gyakran nem is túl könnyű feladata [118].

Ha matematikai formában megfogalmazták a kérdést, akkor a matematikai probléma megoldásához használható eljárások közül ki kell választani a legmegfelelőbbet, azt a mérnöki probléma sajátos feltételeihez, körülményeihez kell igazítani, és ilyenkor rendszerint újabb és újabb kérdések merülnek fel. Ki kell alakítani egy oda-vissza működő párbeszédet a műszaki kérdés megoldására.

Gyakran a különleges alkalmazási feltételek új, vagy szokatlan megközelítést igényelnek, néha maga a mérnök fogalmazza meg azt a megoldandó kérdést, amire még nincs meg a matematikai eszköz. A mérnökképzésben tehát vannak olyan módszertani kérdések, amelyek másutt kevésbé hangsúlyozottan érvényesülnek, és akik mérnökhallgatókat matematikára oktatnak, mindig szembesülnek ezekkel a kérdésekkel.

Tekintve, hogy a Miskolci Egyetem és jogelődjei 1735 óta képeznek mérnököket, más egyetemekhez hasonlóan, a matematikaoktatásban itt is jelentős tapasztalat halmozódott fel. A jelen dolgozat keretei nem teszik lehetővé, hogy a Miskolci Egyetemen folytatott matematikaoktatás egészéről beszámoljon, hiszen ezt alig tehetnénk meg a teljesség igénye nélkül. Az egyetemen, és szűkebben a Matematikai Intézetben oktató kollegák tapasztalatának megismerése viszont nagy segítség volt, mivel mindannyian ugyanazokkal a nehézségekkel kerülünk szembe.

Egyetemünkön mindig kiemelt szerepet kapott a matematika oktatása. Elegendő a dolgozat mottójául választott idézet szerzőjére, dr. Walek Károlyra utalnom, hiszen ha neveket kezdenék sorolni, akkor lehet, hogy a lista nem lenne teljes, de az biztos, hogy hosszú lenne.

Kiemelve néhány véletlenszerűen kiválasztott szerzőt és címet: Borbély Samu: *A matematika oktatása a gépészmérnöki karon* [79], Gáspár Gyula: *Mátrixszámítás műszaki alkalmazásokkal* [110], vagy Hosszú Miklós és Vincze Endre: *Műszaki fogalom - matematikai tükröződés* [118], látható, hogy nem mai keletű az egyetemen ilyen irányban folytatott kutatás.

Érdekes adalék az, hogy a Miskolci Egyetem és elődeinek matematikaprofesszorai közül sokan kötődnek a kolozsvári egyetemhez, ahol a jelen dolgozat szerzője is tanult. Említhetjük Fodor Lászlót (1855-1924) [181] aki Kolozsváron doktorált, Borbély Samut [182], aki 1941-49 között, Gáspár Gyulát [173], aki 1947-49 között, és Maurer Gyulát, aki 1960-84 között volt a kolozsvári egyetem tanára.

1.1. Problémafelvetés

A matematikai ismeretek és képességek szintjének folyamatos hanyatlását jelzi a szakirodalom a mérnöki egyetemek hallgatóinak körében.

Egyre gyakoribb jelenség az, hogy a mérnökképzés terén aggodalommal tapasztalják, hogy a végzett mérnökök körében visszaesett a matematikai alapműveltség és a matematika alkalmazásának képessége.

Az IMA már 1995- ben [124] megállapítja, hogy a frissen végzett mérnökök körében hiányosságok mutatkoznak a legszükségesebb matematikai elvek és fogalmak megértésének szintjén, és ami fontosabb, csökkent a matematika mérnöki alkalmazásának hatékonysága.

Ugyanakkor, mint L. Burton és szerzőtársai 1992-ben [86], valamint Mason 1994-ben [136] megállapítják, a mérnököket alkalmazó munkáltatók olyan munkavállalókat keresnek, akik megtanultak újat tanulni, rugalmasak, jó problémamegoldó és elemző képességgel rendelkeznek, valamint csapatmunkára alkalmasak.

Az új technológiai eszközök bevezetése a termelésbe vitatható értékű, ha nem kísérik őket a szükséges változások a tanulás és a tudás ellenőrzése terén.

Az **Engineering Council** jelenti [170]: "**Egy soha nem látott aggodalom tapasztalható a felsőoktatásban dolgozó matematikusok, tudósok és**

mérnökök körében a mérnökhallgatók matematikai felkészültségét illetően."

Ez az aggodalom sajnos széleskörűen érvényes. A jelentés szerint az akkori (1995) mérnökhallgató tudásszintje jóval alatta marad a 10 évvel azelőttinek. A jelentés óta sem javult helyzet, sőt a matematikai tudásszint csökkenése folytatódott.

A változások magyarázatát a jelentés két okra vezeti vissza:

- a felvételi kibővülésére, a szakiskolák és nem hagyományos iskolák diákjai is bekerülnek az egyetemre,

- az egyetemi éveket megelőző oktatás kedvezőtlen változásaira.

A hazai tapasztalat, egy-két kivétellel (BME Villamosmérnöki Kar, és a műszaki informatikus szakirányok), **ugyanezt tükrözi**, amint a Miskolci Egyetem Matematikai Intézetének **Teaching Mathematics for Engineering Students** c. rendezvényén (Miskolc, 1999 június 2-5), a Szent István Egyetem Matematika tanszékeinek tanácskozásán, Gödöllőn (1999), valamint a Rátz László Vándorgyűlés Felsőoktatási Ankétján, a **Miskolcon (2001)** és **Győrben (2002)** is többször elhangzott. **A jelenség nem csak a mérnökképzésre jellemző**, mert például az utóbbi években a **tudományegyetemek néhány természettudományi képzésben** - a felvételi ponthatárok tekintetében - **még a műszaki felsőoktatást is alulmúlták.**

1.2. A probléma megoldására tett lépések

Az **európai műszaki egyetemek** ezt a jelenséget tapasztalván, **a következő megoldásokkal próbálkoztak** és próbálkoznak jelenleg is, pl. a **SEFI - Mathematics Working Group (SEFI-MWG)** által kidolgozott **Mathematics for the European Engineer - a Curriculum for the twenty-first century,** [92] (**a továbbiakban Core Curriculum**) szerint:

1. **A matematikai anyag egyszerűsítése,** de ez

- a képzés színvonalának csökkenését és **a kiemelkedő teljesítményű** mutató hallgatók számának **csökkenését** eredményezte.

2. A gyenge eredményt elérő **hallgatók felzárkóztatása**, szintrehozó órák beiktatása

- ez az oktatói és hallgatói terhelés növekedését eredményezte, ugyanakkor **kevés volt az eredmény, az adott hallgatók terhelhetősége is alacsony** volt.

3. A matematikatanulást **segítő oktatási központok működtetése**, pl. Mathematics Learning Support Centre Loughborough University [137],

- ezekben kiderült, hogy **egy rendszeres és átfogó ismeretpótlásra lenne szüksége ezeknek a hallgatóknak**, nem lehetett itt-ott foltozni a hiányosságokat.

A **Miskolci Egyetem Matematikai Intézetében** már évek óta rendszeresen **teszteltük az elsőéves hallgatók matematikai ismereteit az első oktatási héten**. A mérést néhány éven keresztül a Miskolci Egyetem összes olyan elsőéves hallgatójára kiterjesztettük, akik az első félévben valamilyen matematika tárgyat tanulnak. A hallgatók tudásszintjét tükröző - a nemzetközi és hazai tapasztalattal egybecsengő - eredményt a karok vezetésével megismertettük, és közösen többféle megoldást próbáltunk keresni.

Felzárkóztató órákat tartottak a kollegák, amelyekre eleinte csak elvárták a hallgatókat, majd kötelezővé tették azoknak, akik nem érték el a minimális szintet. A kisérletileg bevezetett tárgy a hallgatók túlterhelése miatt **nem hozta meg a kívánt eredményt**, és így a kisérlet nem folytatódott.

A kollegák tapasztalata szerint a néhány éve megszüntetett **ún. nulladik évfolyamos oktatás** - egy több éven át országos szinten folytatott intenzív felvételi előkészítő tanfolyam [151] - sokkal eredményesebb volt. Ennek az egyetemi oktatásra felkészítő önköltséges képzésnek - a jó eredmények dacára - az vetett véget talán, hogy **megkülönböztetést jelentett a felvételizők között**.

Az említett nulladik évfolyam rendszer megszűnésével párhuzamosan indultak az **akkreditált iskolarendszerű felsőfokú szakképzések**, röviden **mérnök-asszisztens** képzések, amelyeket az egyetem minőségbiztosítása mellett szakközépiskolák nyújtanak, és amelyek részben átveszik a nulladik évfolyam szerepét, hiszen **a két éves képzés után a diákok, különbözeti vizsgákkal ugyan, de bejuthatnak felvételi vizsga nélkül a főiskola második évére**, és ennek elvégzése után az egyetemi képzés harmadik évfolyamára, szintén az előírt különbözeti vizsgákon szerzett eredmény alapján.

A **Miskolci Egyetem több középiskolával működik együtt ebben a mérnök-asszisztens képzésben**, az akkreditációs anyag előkészítéseként a Matematika I., II. és III. tárgyak tematikáját az értekezés szerzője dolgozta ki [52], és jelenleg is részt vesz a tárgyak minőségbiztosításában Homolya Szilviával és Szilágyi Szilviával együtt.

A tapasztalat azt mutatja, hogy kevés azoknak a hallgatóknak a száma akik továbbtanulnak, ennek az lehet az oka, hogy a jelentkező hallgatók nagy része már eleve nem szándékozott főiskolát, egyetemet végezni. **A szintek közti átjárhatóságnak a fordított irányú kihasználása is adott**, de nem eléggé széles körben ismert. Ha az egyetemi, vagy főiskolai képzésben a hallgató nem tudja teljesíteni az első féléves/éves vizsgakövetelményeket, de bizonyos alaptárgyakból eredményesen vizsgázott, a mérnök-asszisztens képzés nyitva áll előtte.

1.3. A probléma okai, lehetséges kiutak

A jelenlegi helyzet kialakulásának okait bizonyára sokan szeretnénk tudni, és még inkább azt, hogy miként lehet azon felülkerekedni.

Abból a feltételezésből indulhatunk ki, hogy a hagyományos oktatási tapasztalat önmagában kevés ezeknek a kérdéseknek a megoldására, és szükség van olyan, a klasszikus oktatást kiegészítő, vagy azt helyettesítő oktatási módszerek bevezetésére, amelyek a megváltozott körülményeknek jobban megfelelnek.

A jelenlegi helyzet jelentős javulásához elvezethetnek az alábbiak

(együtt, vagy külön, esetleg továbbiakkal kiegészítve):
- a matematikaoktatás tartalmi újragondolása
- a számítógéppel segített oktatási módszerek elterjedése
- a hallgatók aktív bevonása az oktatás különböző szintjein - a "Collaborative learning".

Az értekezés **a mérnökképzés matematika oktatásának néhány aktuális kérdését tekinti át**, figyelembe véve az adott témában rendezett konferenciákon - pl. a **Teaching Mathematics for Engineering Students, Miskolc, 1999. június 2-5** [59], a **Unique and Excellent, 29. Ingenieurpädagogik 2000, IGIP-Symposium, Biel, 2000**, [141], valamint a **SEFI-MWG European Seminar on Mathematics on Engineering, Miskolc, 2000. június 14-16** [49], **Göteborg, 2002. június 9-12**, **Vienna 2004. június 15-17,** konferenciasorozaton megismert eredményeket.

A teljesség igénye nélkül ismertetjük a Matematikai Intézet oktatóinak a témához kapcsolódó **tapasztalatát, dolgozatait**, részletesebben kitérve az értekezés szerzőjének eredményeire.

1.3.1. A matematikaoktatás tartalmi megújítása

Ez szinte állandó jelleggel napirenden van a mérnöki egyetemeken [93], hiszen minden kar igyekszik a képzését a változó igényekhez igazítani, nehezen elképzelhető egy "végleges változata", és általában nem egy személy dolgozza ki, hanem az oktatók csoportja. Ez irányban megemlíthető az utóbbi években **a programozó matematikus főiskolai szak akkreditálása és beindítása**, valamint a közgazdasági programozó matematikusi egyetemi szak akkreditálásnak előkészítése, amelyekben az értekezés szerzője tevőlegesen részt vett [158].

A **Bologna- Declaration** következményeként [111], [113] az egyetemek előbb- utóbb igen jelentősen átalakítják az oktatás jelenlegi formáit, és ez mély tartalmi változásokat is jelent majd a tananyag strukturálásában.

A Miskolci Egyetemen az oktatás jelenleg négy különböző szinten valósul meg:
- Mérnök-asszisztens képzés (4 félév)
- Főiskolai szintű képzés (6 félév)
- Egyetemi szintű képzés (10 félév)
- Ph.D. képzés (6 félév)

A következő évtől indul a kétszintű képzés bevezetése, ennek tapasztalatai későbbiekben megváltoztathatják a képzésen belük a matematika oktatásának súlyát, szerepét. A tervezett képzésekben, és ez az európai tapasztalat is, csökken a matematikaoktatásra fordítható idő.

A különböző szintek közti **átjárhatóságot** a kreditrendszer alkalmazásával, a képzési formák és az adott képzés sajátosságainak a figyelembe vételével **az egyetem biztosítja.** A Miskolci Egyetem Matematikai Intézete oktatja az egyetem négy karán, a három mérnöki kar mellett a Gazdaságtudományi Karon is, a matematika tárgyakat egyetemi és főiskolai szinten egyaránt. Az intézet két tanszéke által oktatott tárgyak összesítése a dolgozat **CD-mellékletének Oktatás** könyvtárában olvashatóak.

A matematika oktatásának megújítása során fontos kiindulópontot képeznek az **oktatók által írt jegyzetek**, ebben is nagy tapasztalat halmozódott fel a Miskolci Egyetemen, a **Matematikai Intézet oktatói által írt legfontosabb tankönyvek és jegyzetek** - a teljesség igénye nélküli felsorolása - a dolgozat **CD-mellékletének Jegyzetek c**. pontjában található, valamint Borbély Samu [182], Gáspár Gyula [173], és Hosszú Miklós [162] publikációi közt olvashatók.

A Matematika Intézet miskolci történetének első krónikása Kiss Barna, akinek kéziratban olvasható részletes munkája [132] ma is érdekes adalékokat tartalmaz az elmúlt évek eseményeiről. Ugyancsak Kiss Barna érdeme egy több évtizedes időszak szinte teljesnek mondható **zárthelyi feladatgyűjteménye,** ami kiindulópontja lehet egy szakirányú kutatásnak. A **Matematikai Intézet rövid történetéről**, **oktatóinak munkájáról, publikációiról, valamint az intézetben folytatott legfontosabb kutatásokról** szól a 40. éves jubileumi kötet [64] mellett, a **Publications** jubileumi különszáma [159] , valamint a dolgozat szerzője által szerkesztett **Jubileumi kötet** [48].

Úgy tűnik, hogy a fentiekben vázolt folyamat, a matematikai alapismeretek szintjének a drámai csökkenése **egyre nagyobb felelősséget ró** az alaptárgyak, és így **elsősorban a matematikát oktatókra.**

Ez a felelősség **egyrészt az, hogy** az érettségizett fiatalok munkanélküliségét enyhítő felpuhított felvételi rendszerben a felsőoktatásba került hallgatókat megszűrje, és **továbbtanulni csak az arra alkalmasakat engedje**, másrészt viszont - és lehet, hogy ez a fontosabb - **a minimális előképzettségre alapozva használható ismereteket, tudást közvetítsen.**

A matematikai tárgyak tartalmi megújítása során talán a legfontosabb **a matematikai alapfogalmak helyes kialakítása,** az értekezésben erre néhány példán keresztül térünk ki. Fontos a fogalmak helyes sorrendjének, az egymásra épülő rendszerének a tanulmányozása, mint a tananyag fejlesztés egyik alapkérdése. Ez néha olyan kérdéseket vet fel, amelyeket önmagukban is érdemes tanulmányozni [6].

A mérnökképzés legfontosabb fogalmának **a függvény fogalmát tekintve**, annak bevezetésére a Miskolci Egyetemen Maurer Gyula által meghonosított útját [140], a relációkat használjuk. Az értekezés áttekinti a függvény fogalmának szerepét a mérnöki matematikában, valamint néhány szokatlannak tűnő alkalmazását, pl. sorozatok, vektorok, mátrixok, gráfok definíciójára.

A **mátrixok fogalmának bevezetésére, valamint a differenciálhányados fogalmához vezető kérdésekre** gyakorlati példán keresztül tesz javaslatot az értekezés.

A mátrixoknak egy érdekes alkalmazása a **komplex számok és kvaterniók fogalmának bevezetésére** példa az izomorf struktúrák alkalmazására - a modellezés egyik lehetőségeként - matematika oktatásában.

A mérnökképzésben a **műszaki példákon keresztül** a hallgatók nem csak a matematikai fogalmat, tételt, de azok gyakorlati alkalmazhatóságát is megismerhetik. Ezt az értekezés szerzője Huszthy László [121] jegyzeteiből vett példák átdolgozásával szemlélteti: pl. fogaskerekek áttételének számítása, szélsőérték-számítás alkalmazása épületek folyosóin történő szállítási feladatra és a parabolatükör meridiángörbéjének felírása.

A **logikus gondolkozásra nevelés, a helyes következtetések tanítása** szintén fontos eleme kell legyen a tartalmi átgondolásnak. Az értekezésben erről is szó esik **az induktív úton történő, intuitív tanítás mellett érvelve**, annak egy "kézzelfogható", egyszerű példáján keresztül (lásd 9.6. Az egész számok néhány tulajdonsága).

A **mérnökképzés egy fontos kérdése** az értekezés mottójául választott Walek idézetben rejlik, **"sohasem lehet tudni, hogy mikor lép valamely elvont mennyiségtani tétel a műszaki alkalmazás terére",** ezért nem elhanyagolható az, hogy a mérnökhallgatóknak, ahol lehet, a matematika néhány különleges fejezetéről is szóljunk.

Az értekezés a matematika néhány elvontabb kérdéséről, pl. az inverz félcsoport fogalmáról, a kvarterniók modellezéséről és a gráfok Euler és Hamilton útjairól, mint a műszaki egyetemek matematikaoktatásába illeszthető fejezetekről is szól.

1.3.2. A számítógéppel segített oktatás

A számítógépek számának és kapacitásának ugrásszerű növekedése elvezetett a számítógéppel segített oktatási formák rohamos növekedéséhez, megjelentek a távoktatás különböző formái, jelentősen befolyásolva a felsőoktatást, és ezen belül a matematika oktatását is, főleg a mérnöki egyetemeken.

Fontos tehát, hogy a mérnökhallgatók rendelkezzenek azzal az alapos matematikai tudással, amely képessé teszi őket a számítógépes szoftverek tudatos alkalmazására, az eredmények helyes értelmezésére és ellenőrzésére.

A számítógépes oktatás különböző kérdéseit érinteni fogjuk a szerző által koordinált CEEPUS hálózat Computer Agebra Driving Licence nyári egyetem és intenzív kurzus sorozatának ismertetésével, valamint mások eredményeire, tapasztalatára hivatkozva.

A számítógépek alkalmazása az oktatásban meglehetősen sok módszertani és tartalmi kérdést vet fel, elég ha csak a témában a Miskolci Egyetemen különböző tanácskozásokon elhangzó előadásokra gondolnunk [146], [186], [81], [163], [152], [72], [133], [165], [177], [129], [187], [164].

A téma **kutatása jelenleg is folyik többek** közt a Debreceni Egyetem Matematika és számítástudomány Doktori Iskola, Matematika- didaktika programjában [154].

A Miskolci Egyetemen **A Matematikai Intézet oktatói szinte kivétel nélkül használják a DERIVE**-ot, **a MATLAB-**ot, **a Statistics for Windows**-t stb. az oktatás során, és a számítógéppel segített oktatásban meglehetősen nagy tapasztalatra tettek szert. Oktatóink a számítógépes oktatási módszerek leírásában is közzétették tapasztalataikat lásd pl.: [108], [119], valamint a szerzőnek pl. [29], [33], [56] cikkei.

Az értekezés szerzője azt tapasztalta, hogy a számítógéppel segített oktatási formák jó része az egyéni tanulásban illetve a kisebb létszámú hallgatócsoportok oktatásában alkalmazható aktív módszerekkel párosítva sokkal hatékonyabbak, mint nagy létszámú hallgatóságnak tartott előadás esetén.

Tény, hogy a számítógép a szemléltetésben felülmúlhatatlan, de a szemléltetés az oktatásnak csak eszköze, nem célja. A számítógép ugyanakkor nélkülözhetetlen eszköz a távoktatási anyagok elérhetőségében, és végső soron magának az távoktatásnak a folyamatában is.

1.3.3. A hallgatók aktív részvétele

A dolgozat egyik fő célja a projektmódszernek, mint az egyik legfontosabb aktív tanulási módszereknek**, a részletesebb leírása**, a témához kapcsolódó **Using Computer Algebra TEMPUS JEP-0265** együttműködés [29], [13], és az **Active Methods in Teaching Mathematics**, azaz **Aktív módszerek a Matematika oktatásában c. H 127 CEEPUS hálózat** [90] tevékenység [62], valamint a **szerző saját munkája során szerzett tapasztalatai** alapján pl.: [34], [38], [39], [17], [41]. A végzett mérnökhallgatók egybecsengő véleménye szerint későbbi munkájuk során főleg annak a logikus gondolkodásmódnak vették hasznát amit a matematikatanulás során alakítottak ki.

"*A matematikatörténeti szempontok érvényesítése a műszaki felsőoktatásban sikeresen hidalhatja át azt az aránytalanságot, amely a megtanítandó matematika anyag mennyisége és a rendelkezésre szánt idő között feszül*" - Munkácsy [145]. Ennek az időhiánynak nyilván a bizonyítások részbeni vagy teljes hiánya a következménye és így jelentősen sérül az a matematika tanításban kiemelten fontos cél, hogy a tárgy a **mérnökhallgatókat a logikus gondolatmenetre is képezze.**

A matematikaoktatási kérdéseknek és a matematikatörténetnek az összekapcsolására egy nagyon sikeres példája a **Mathematical MacTutor**, amit 1992-től kezdődően a skóciai St Andrews-i Egyetemen **Edmund Robertson és John O'Connor** fejlesztettek ki. **Ez a matematikai szoftver** merőben eltér a megszokott computer algebra szoftverektől, mivel **főleg a matematika oktatása szempontjából különlegesen fontos fejezetek vizualizálásával foglalkozik**, ugyanakkor tartalmaz egy nagyon részletes, interaktívan is használható matematika történeti részt, a **MacTutor History of Mathematics-**t [138], amely azóta interneten is elérhető.

Projektmódszer. A MacTutor programcsomag ugyanakkor lehetővé teszi a **projektmódszer** [114], [130] alkalmazását az oktatás hagyományosnak mondható formái kiegészítéseként. 1994-96 között az értekezés szerzője a St Andrews-i Egyetemen a MacTutor fejlesztésén dolgozott, majd 1996-ban a TEMPUS-IMG-95-H-2019 sz. program vendégtanáraként egy szemeszteren keresztül oktatta a **MacTutor Projects** című tárgyat [91]. Ezalatt dolgozta ki a matematikai MacTutor programcsomag rövidített **magyar változatát,** a **Hungarian**

MacTutort [57] amely azóta a Miskolci Egyetemen kisebb hallgatócsoportokkal használható [29], [34], [40].

A magyar változat segítségével azok a hallgatók, akik angolul gyengébben tudnak, anyanyelvükön megismerkedhetnek a programcsomag főbb alkalmazásaival és így képesekké válnak a program egészének használatára is.

Külön érdekességként említhető a Mathematical MacTutor **Special Curves** [169] című fejezete, ami az interneten is elérhető, és interaktív Java applet-ek alkalmazásával **mintegy 70-80, a műszaki oktatásban is gyakran használt görbetípus tanulmányozását teszi lehetővé**. Az adott görbék a leginkább jellemző formájuk mellett a lehetséges explicit, implicit, paraméteres vagy polár koordinátás alakban is megjelennek, az internetes program ábrázolja az adott görbéket, sőt **kirajzolja a görbékhez tartozó úgynevezett kísérő görbéket is**, mint például evoluta, involuta, pedálgörbe, inverz-pedálgörbe, stb., **tehát kifejezetten alkalmas az adott görbék megismerésére a műszaki alkalmazások szempontjából is**.

MacTutor projektek

. A **MacTutor projektek oktatása** arra irányította a szerző figyelmét, hogy milyen egyszerű eszközökkel növelhető meg a matematikaoktatás hagyományos módszereinek a hatása. A St Andrews-i tapasztalatára támaszkodva a szerző kidolgozott több olyan **projektet**, amit a St Andrews-i Egyetemen, majd a Miskolci Egyetemen is használt [29], [16], [40], és **az a tapasztalat, hogy több fejezet megértése sokkal gyorsabbá vált ezen az úton.**

A MacTutor segítségével olyan fejezetek, mint a sorok konvergenciája, függvények közelítése Taylor polinom segítségével, vagy a határozott integrálok közelítő számítására használt módszerek összehasonlítása sokkal világosabban, alaposabban megérthetők. A szerző az **angol nyelvű MacTutor programot és a hozzákapcsolódó MacTutor projecteket a Miskolci Egyetemen közvetlenül is hasznosítani tudta az angol nyelvű oktatásban**.

A program **lehetővé teszi azt, hogy az interaktív használat révén a hallgató egy feladatot**, pl. az inga mozgását, annak vizuális tanulmányozása után, a mozgás egyenletével, és a hozzátartozó másodrendű differenciálegyenlet megoldásával együtt, **egy egységes formában láthasson**, és kísérletezhessen, a megoldást saját adatainak bevitelével módosítva.

CEEPUS együttműködésben

. A CEEPUS együttműködésben, **az Aktív módszerek a Matematika oktatásában c. H 127 CEEPUS hálózat tevékenysége során az angol nyelvű MacTutor projekteket több ízben hasznosítottuk** az idelátogató hallgatók képzésének a kiegészítésére, pl. 3 hallgató a Ljubljanai Egyetemről (University of Ljubljana), 2 hallgató a Nagybányai Egyetemről (North University of Baia-Mare). A 2003-2005 között szervezett **CEEPUS Nyári egyetem sorozatban** [90] összesen mintegy 50 hallgató vett részt, akik egyénenként, a képzettségüknek megfelelő szintű - MT., M1., M2., és M3. - jelű projekteket is kidolgozták (lásd a CD-mellékletben MacTutor Projects).

1.3.4. A projektmódszer használata a Miskolci Egyetemen

A módszer bevezetésének célja

. A MacTutor projektekkel végzett munkát Miskolcon sajnos **nem tudtuk nagyobb számú hallgatónak lehetővé tenni,** mivel az adott programcsomag kizárólag MacIntosh tipusú számítógépen futtatható. Az egyetemen összesen 4-5 ilyen típusú számítógép van, az is különböző tanszékeken, a Matematikai Intézetben is csak két ilyen található. A jelenleg beszerzett nagy teljesítményű számítógépeink remélhetőleg alkalmasak a MacIntosh-ok szimulálására, így a következő években lehetőség nyílik a program szélesebb körű alkalmazására is.

Bizonyos fejezetek MacTutorral történő szemléltetésére projektort használtunk, de ez nem tette lehetővé a szoftver előnyeinek, az egyénre szabott aktív, kísérletező jellegének az érvényesülését. Ekkor merült fel az az ötlet, hogy **megtartva a MacTutor projektek előnyeit,** dolgozzunk ki a hallgatók számára **néhány olyan, ún. "papír-ceruza" projekt ötletet, ami kapcsolódik az oktatott anyaghoz, de amihez a hallgató saját munkájával hozzájárulhat.**

A projektmódszert, ami tulajdonképpen a "learning by doing" elvet valósítja meg a matematikaoktatásban, egy másik elv, a **"deeper understanding by explaining"** elve egészíti ki. A hallgatók a kisdolgozataikat be is kell mutassák társaiknak, és ez szükségessé teszi az adott anyagrész sokkal mélyebb megértését, a hallgató nem "csak" megérti, de meg is tudja értetni másokkal. Nem lebecsülendő a kisdolgozatok bemutatásával szerzett tapasztalat, és a verbális képességek ilyen módon történő fejlesztése.

A projektmódszer alkalmazása

. A dolgozatban a **projektmódszer alkalmazásának eddigi tapasztalatai** [38], [41], [39], [40], [17], mellett **kitérünk néhány sikeresebb kisdolgozat részletesebb ismertetésére**, **kiemelve azokat a további lehetőségeket, amelyek a projektmódszertől várhatók**. A projektmódszer alkalmazásaként kialakult, legsikeresebbnek bizonyult témákat a dolgozat 9. fejezete ismerteti, a projet-ötleteket részletesen kidolgozva az értekezés Függelékében találhatók.

Az értekezés anyaga nem lehet teljes, ha **legalább nagyvonalakban** nem vázolnánk azt szerencsés körülményt, hogy **a projektmódszernek ezt a sajátos megvalósítását az is segítette,** hogy a Miskolci Egyetem Matematikai Intézetének szervezésében létrejött egy tehetséggondozási forma középiskolás diákok számára, a **Matematikai Önképzőkör**.

A Matematikai Önképzőkör

. **Ez volt a projektmódszer kidolgozásának kísérleti terepe**, ahol a matematika olyan fejezeteit ismertetjük meg a diákokkal, amelyek a középiskolai oktatáson túlnőnek, de amikre nincs idő az egyetemi oktatás alatt, bár néha nagyon hasznosak, pl. gráfok, fraktálok, lánctörtek. Ugyanakkor fontos volt az, hogy **a résztvevő diákok előadták, elmagyarázták társaiknak az adott fejezetet, másoknak magyarázva bennük is újrastrukturálódott az adott kérdéskör**.

A **középiskolás diákokkal és tanáraikkal, a miskolci Földes Ferenc és Herman Ottó Gimnáziumban oktató kollegákkal az utóbbi 10-12 év alatt szorosan együttműködve** [127], [30], alakult ki a matematikai tehetséggondozásnak ez a sajátos formája, **a Matematikai Önképzőkör,** amelyet az Oktatási Minisztérium **A Miskolci Egyetem együttműködése középiskolákkal a tehetséggondozásban** c. pályázaton keresztül támogatott [156].

Együttműködés a középiskolákkal
. A Miskolci Egyetem Matematikai Intézete a tehetséges diákok számára egy sajátságos lehetőséget teremtett az **Ifjúsági Matematikai Kongresszusok (1996** [31], [35] , [58], **2000** [51], [60]) **és konferenciák, matematika táborok (1994, 1997,1999, 2001, 2003** [156]) **megrendezésével.**

Ha az anyagot nem csak megérteni, de másoknak elmagyarázni is tudja valaki, sőt mint azt az önképzőköri diákok teszik, rendezvényeken elő tudják adni ismeretlenek előtt idegen nyelven, (JMC-96 [155], JMC-98 [50], JMC-2000 [60], JMC2002 [128]) JMC2004 [20], **akkor diákjainkat sikerült az egyetemi munkastílushoz közelíteni**.

Az Önképzőkörön született legjobb dolgozatokból több kisebb kötet készült [50], [156], a munka során a diákok megtanulták a Geometer's Sketchpad c. matematikai programot használni [36], [32] és a dolgozat megírásához a Scientific WorkPlace-t használták.

Az együttműködésnek egy bevallott, de távolabbi célja az **oktató utánképzés**, és így nem véletlen talán, hogy **Szilágyi Szilvia** kollegánk első dolgozata éppen a **Pi Matematikai folyóirat 1992. évi különszámában jelent meg** [178].

2. A matematikaoktatás folyamatának elemzése

2.1. Az oktatás tervezett folyamatának egy lehetséges modellje

Akár egy tárgy oktatásának egészére, akár az oktatás egy egységére, egy órára vonatkozik a modell [65], vannak hasonlóságok a felépítésében.

Ezek a következők:
- **Orientációs fázis**
- **Realizációs fázis**
- **Értékelési fázis**.

Orientációs fázis

Felépítése	**és összetevői**
Bemenő adatok gyűjtése:	
	- hallgatók pillanatnyi ismeretszintje
	- előző oktatási tapasztalat
	- affektív oldal (hozzáállás, motiváltság, hangulat)
Kognitív struktúra:	
	- az információ felvételhez, feldolgozáshoz szükséges tudás
Cselekvési koncepció:	
	- kívánt cél
	- kiindulási állapot
	- a cél elérésére szolgáló eszközök ötvözése
Információ csere:	
	- a cselekvési koncepció közlése, a visszajelzés lehetősége
	- esetleges módosítás, végleges cselekvési koncepció
	- oktató-hallgató kölcsönös befolyása
	- a cselekvési terv elfogadtatása, motiváció lehetősége
Kielégítő-e az orientáció:	
- DÖNTÉSI HELYZET	- elkezdhető-e a realizáció?
	- ha nem, újra kell kezdeni az orientációt.

Realizációs fázis

- Tudásminták előhívása	
- Realizáció:	- tényleges cselekvés, az oktatási koncepció megvalósítása
- Adatok információk cseréje:	- oktató és hallgató között
- Cselekvési terv végrehajtása:	- ábra készítése,
	- számítások,
	- egyenletek felírása, megoldása,
	- probléma megoldása

Értékelési fázis

- Kielégítő-e az oktatás:	- az orientációs és realizációs fázis cselekvési koncepcióinak az egybevetése
- Elértük-e a célt?	
	- külső ellenőrzés lehetősége
- Adatok:	
	- az elért eredmények rögzítése,
	- tárolása,
	- a kognitív strukturálódás

Tekintsük a mérnökképzés szempontjából matematika oktatás előzményeit, a bemenő adatokat, az előzményeket, illetve próbáljuk meg elemezni azt a helyzetet, amit mindannyian tapasztalunk, vagy tapasztalni vélünk, az egyetemekre felvett hallgatók tárgyi tudása, számolási készsége, affektív hozzáállása, motivációja csökkenő.

Ennek több oka lehetséges, a fontossági sorrendjük szerint nehéz lenne rendszerezni őket.

Tekintsük át továbbá a matematikaoktatás folyamatában a legfontosabb állomásokat, elsősorban a fogalomalkotást, az oktatásban, és ellenőrzésben érvényesülő hagyományosnak mondható módszereket, illetve ezek kiterjesztésének, megújításának lehetőségét.

3. Az oktatás orientációs fázisa

3.1. Bevezetés

A középiskolai és az egyetemi oktatási forma egymástól sokban különbözik.

A középiskolában a klasszikus órafelépítés - számonkérés, ismeretközlés, számonkérés, házi feladat - elsősorban azt a célt szolgálja, hogy a tanulót **szoros ellenőrzés** mellett dolgoztathassák.

Az egyetemi oktatás hagyományos formája - előadások, gyakorlatok, esetleg konzultációk, majd viszonylag hosszú időközönként, előre bejelentett félévközi zárthelyik, lehetőleg ugyanarra a két hétre zsúfolva (6.,7. illetve 12. és 13. hét), majd a vizsgaidőszak hetente 1-2 vizsgával.

Az ismételhető vizsgák rendszere (vizsga, első, második utóvizsga...) azt jelentheti, hogy egy diák egy hathetes vizsgaidőszakban, még ha nem is volt aláíráspótlása, elvben 6 tárgyból 18 vizsgát is tehet. **Az egyetemre frissen bekerült diák nem tanulja meg, hogy munkastílusának, tanulási stílusának meg kell változnia. Eltűnik a tanár "kézenfogó" szerepe, ugyanakkor az alapozó tárgyak sora esetleg egymástól eltérő tanulási módszereket kíván.**

A **Miskolci Egyetem Bölcsészettudományi Karán az első évben külön olyan tárgy van, aminek az a szerepe, hogy a hallgató megtanulja a könyvtárhasználatot, az esszéírást, a számítógép használatát. Miért gondoljuk azt, hogy a műszaki karokon a diákok mindezt maguktól tudni fogják?**

Miért van az, hogy az a hallgató, akit néhány hónapja még a középiskolában még a "széltől is óvtak", most szégyellheti magát, ha nem tud egész éjjel rajzolni, és másnap a differenciálszámítás hathetes tömegével megbirkózni, és sikeres zárthelyit írni. Hiszen hat hete volt rá. De nézzük meg közelebbről ezt a hat hetet. Balekoktatás, évkezdő buli, összemelegedő buli, sorban állás a menzán, sorban állás a diákigazolványért, sorban állás a jegyzettámogatásért. Az előadók lelkiismeretesen megadják azt a néhány, mondjuk tárgyanként 3-4 könyvet, amit feltétlenül el kell olvasni, de természetesen nem lehet megkapni. Az öregdiákok tompítani igyekeznek a feszültségen, ez a Miskolci Egyetemen a négy-öt bár egyikét jelenti, ahol néhány sör mellett kiderül, hogy "nem kell mellre szívni, mert ők is csak a második ismételt vizsgán mentek át".

Az viszont tény, hogy a lemorzsolódás több mint a diákok fele.

Mint a bevezetőben már leírtuk, a műszakilag fejlett államokban (Egyesült Királyságtól, Svédországon át akár Ausztráliáig) a mérnökképzésben érdekeltek **egyre növekvő aggodalommal tapasztalják azt, hogy a végzett mérnökök körében mennyire visszaesett a matematikai alapműveltség és a matematika alkalmazásának képessége.** Az Egyesült Királyság Matematikai és Alkalmazott Matematikai Intézete 1995-ben kiadott jelentése szerint [124] a frissen végzett mérnökök körében nem volt ritka az, hogy hiányosságokat tapasztaltak a legszükségesebb matematikai elvek és fogalmak megértésének szintjén, ezek a mérnökök nem rendelkeztek a matematika hatékony mérnöki alkalmazásának képességével.

Burton és szerzőtársai 1992-ben [86], valamint **Mason** 1994-ben [136] állapítják meg, hogy a munkáltatók, és elsősorban a mérnököket alkalmazó munkáltatók, hangsúlyozzák azt, hogy olyan munkavállalókat keresnek, akik megtanultak többek közt tanulni, rugalmasak, jó problémamegoldó és elemző képességgel rendelkeznek, valamint csapatmunkára alkalmasak. Az új technológiai eszközök fontosak, de bevezetésük a termelésben és a tanulásban is vitatható értékű, ha nem kísérik őket a szükséges változások a tanulás- tanítás és tudás ellenőrzése terén.

3.2. A matematikai ismeretek és képességek szintjének hanyatlása

Sutherland és **Pozzi** által a londoni **Engineering Council** számára 1995-ben elkészített jelentés világosan fogalmaz: "*There is unprecedented concern amongst mathematicians, scientists and engineers in higher education about the mathematical preparadness of new undergraduates*" [170] 2.o. "*Egy* ***soha nem látott aggodalom tapasztalható a felsőoktatásban dolgozó matematikusok, tudósok és mérnökök körében a mérnökhallgatók matematikai felkészültségét illetően***."

A Mérnökképzés Európai Társulatának Matematikai Munkacsoportja **SEFI-MWG** által egy tíz éves munkával véglegesített **Core Curriculum** [92] bevezetője szerint:

"*For example* ***in 1997 only 57% of students*** *with mathematics A level grade C, tested at the start of their university studies, could correctly identify the graph of the cosine function.* ***In 1991 all comparable qualified students*** *could do this*", azaz " *Például* ***1997-ben*** *az egyetemi tanulmányaik kezdetén ellenőrzött azon* ***hallgatók****nak, akik matematikából A szinten C osztályzattal érkeztek,* ***csupán 57%-a*** *volt képes helyesen felismerni a cos függvény grafikus képét, míg* ***1991-ben még minden hasonló előképzettségű hallgató*** *képes volt arra."*

Ez az aggodalom majdnem az egész világra érvényes, és a jelentés szerint a mai mérnökhallgató tudásszintje jóval alatta marad a 10 évvel ezelőttinek.

A változások magyarázatát a jelentés két okra vezeti vissza:

- a felvételi feltételek kiszélesedése, ami lehetővé teszi a szakiskolák végzettjeinek és más nem hagyományos iskolák diákjainak bekerülését az egyetemre

- az egyetemi oktatást megelőző oktatásban tapasztalt kedvezőtlen változások.

Mindkét kérdésről, de főleg az egyetemi oktatást megelőző tapasztalatokról a későbbi fejezetekben részletesen szólunk.

Az alsó és középfokú oktatás egyre eredménytelenebb, az oktatás fellazul, **részben a rosszul értelmezett tanári szabadság, részben a tankönyvverseny miatt,** másrészt **a tantervek átalakításának elhúzódása,** a sok bizonytalanság miatt [100]. És sajnos **a mostanra kialakulni látszó középiskolai törzsanyag, illetve annak a maradéka, igen nehezen illeszkedik ahhoz, ami a felsőfokú oktatás, és így a mérnökképzés szempontjából fontos lenne** [145]**.**

Mondhatnánk, hogy tankönyv káosz van, mondhatnánk azt, hogy tanúi vagyunk a kvantitatív és kvalitatív oktatási szempontok harcának, de ennek senki nem örülhet.

A tanulói aktivitás visszaesik, a tanulók többsége túl van terhelve, az értelmiségi pálya és ezen belül a mérnöki pálya társadalmi presztízse csökken. **A zsebszámológépek és a négyjegyű függvénytáblák helytelen használata** továbbra is széleskörű, és bár mindenki ismeri a hátrányait, igazából az egyetemi oktatás látja kárát.

A zsebszámológépek és függvénytáblák használatának eredetileg az lett volna a célja, hogy csökkentse a tanulók megterhelését. A valóságban gyakran azt látjuk, hogy a középiskolás, vagy az egyetemi hallgató az olyan számításokat, mint 2·2,5, szívesebben végez zsebszámológéppel, mint fejben, de ha az előbbi művelettel egy más alakban találkozik, mondjuk $2 \cdot \frac{5}{2}$ akkor már szinte biztos, hogy a zsebszámológépet veszi igénybe, mert az $\frac{5}{2}$ tört egy bizonytalanságot jelent számára, és a törteket, ha lehet, már csak zsebszámológéppel számolja. Így lesz pl. az $\frac{1}{3} \cdot 6$ művelet eredménye 2 helyett 1,999... (vagy 1,98 mert a diák azt tanulta, hogy elegendő 2 tizedes pontossággal számolni).

Nem csoda, hogy az egyik rendszeresen visszatérő alapvető hiányosság a törtekkel végzett műveleteknél tapasztalható. Ha már az egyszerű számításokra is a zsebszámológépet használjuk, akkor ugyan mi motiválja a tanulót a törtkifejezések esetén a műveletek megtanulására?

Más esetben, például az említett elsőéves felméréseknél, ahol megengedtük a négyjegyű függvénytábla használatát, sok hallgató kétségbeesetten lapozgatta a függvénytáblát, a gondolkodás helyett, mintegy pótcselekvésként. Gyakran és talán joggal kérdezik az elsőéves diákjaink, hogy ha az érettségin és a felvételin megengedett a használatuk, akkor miért nem használhatók az integrálszámításban?

Sok tanulmány bizonyítja, hogy zsebszámológépek és a függvénytáblák helytelen használata éppen a matematikai ismeretek és készségek visszafejlesztéséhez vezethet, holott ennek az ellenkezője lenne a cél.

Sajnos ugyanez hatványozottan igaz az át nem gondolt számítógép használatra is.

3.2.1. Társadalmi okok

- Az egyetemi felvételi megkönnyítése, DÖMPING
  - Általános emberi értékek, erkölcsi normák felborulása
  - Az oktatói munka meg nem becsülése
  - Az egyetemek normatív finanszírozása
  - A tudás leértékelődése az iskolát frissen végzettek körében.

3.2.2. Más okok

A tanulót, hallgatót érő információ-áradat a jelenleg egyetemre kerülő diákság esetén túlnyomórészt agresszív, túlpolitizált, a fogyasztói társadalomra jellemző reklámnyelv. Az elmúlt húsz- huszonöt évben felnőtt gyereket már rajzfilm szinten is csak a brutalitás, diszkószerű hanghatás, fel-felvillanó klipp- szerű képinformáció terheli, ízlését, értékítéletét ez alakítja, elég ha egy heti TV programot megnézünk, biztos van horrorfilm, techno- rajzfilm, háború, negatív szenzáció-hajhász híradás, elemi katasztrófa. Ennek következménye lehet az, hogy a hallgatók az értelmi munkához is másként viszonyulnak, mint 10-15-20 évvel azelőtt. Csökken az igényük a logikusan kikerekített, esetleg hosszasan magyarázott elméleti kérdések iránt, nevezzük ezt eredeti tudásfelhalmozásnak, és megnő a fogyasztói jellege az érdeklődésüknek. Az alapozó tárgyak (mint a matematika) oktatása során is rögtön a használható tudást szeretnék látni. Ezenkívül az említett jelenségek halmozódása miatt a hallgatók érdeklődésének a felkeltéséhez szükséges ingerküszöb megemelkedik.

Ezek után "joggal" megmosolyogja a hallgató az oktató erőlködését, ha az a periodikus függvények érdekes alkalmazásairól, egy mátrixegyenlet elegáns megoldásáról, vagy egy integrálási módszer sokoldalú alkalmazásáról beszél. Idegenszerűek ezek a kifejezések. Az analízis az egészen kis mennyiségeket kedveli, a kereskedelmi média szenzációéhes világa a "gyilkol", "leégett", "felrobbant", "tömegkatasztrófa" szavakat.

Van még egy terjedőben lévő nagyon sajnálatos jelenség. Számtalan közéleti személyiség, politikus, újságíró, híres ember nyilatkozza televízióban, rádióban, újságban, hogy mennyire nem szerette a tanulást, és főleg a matematika tanulását. Mégis itt vagyok, ahol vagyok, szokták büszkén kihúzni magukat ezek a nyilatkozók.

Ez a jelenség káros, de sajnos még kevesen gondolkoznak el a következményein.

Az oktatás demokratizálódása és a vele járó gondok

Mai jelenség az, hogy a diák-önkormányzat képviselői középiskolai és egyetemi szinten véleményt nyilváníthatnak, beleszólhatnak az oktatás kérdéseibe. Ennek a tendenciának az iránya helyes, hiszen az oktatás fogyasztói az elsődleges visszacsatolást valósítják meg.

Gondot csak az jelent, hogy ezek a diák-önkormányzatok nem a minőség maximalizálására törekednek, mint a logikus és valós érdekük lenne, hanem a követelmények minimalizálására.

Ennek nyilván az az oka, hogy választott képviselők és népszerűségi okokból a lazítás a fő céljuk.

Miért nem a legeredményesebb diákok lesznek, eredményeik révén azok a diákképviselők akiket az oktatás kérdéseiben meg kell kérdeznünk, és miért ne legyenek az élsportolók a megkérdezettek a diáksportban, vagy az író-költő vénájúak a kulturális eseményekben.

Miért ez az áldemokrácia és inkompetencia?

Ezeknek a kérdéseknek és hatásoknak a figyelembevétele mind indokolt, amikor az operatív fázisban az oktatás cselekvési koncepcióját kidolgozzuk.

3.3. A próbálkozások és a tapasztalatok

A hazai és a nemzetközi tapasztalat egyaránt azt mutatja, hogy az egyetemre bejutott hallgatók matematikai ismeretei egyre kevésbé felelnek meg az egyetemek által elvártaknak. A hallgatók nagy része hiányos matematikai ismeretekkel, alacsony fokú számolási készségekkel és a matematikával szemben ellenérzésekkel kerül be még a műszaki egyetemekre is. A kollegák beszámolnak arról, hogy ez a jelenség az utóbbi 10-15 évben fokozódott. **Lawson** például az Egyesült Királyságban a műszaki egyetemekre bekerült diákok körében végzett tanulmányában azt tapasztalta [92], hogy 1997-ben a diákoknak mindössze 54%-a tudta azonosítani a cosinus függvény képét, szemben egy 1991-es felméréssel, amikor a hallgatók szinte mind képesek voltak erre. Lawson szerint a jelzett periódusban bizonyos felsőoktatási területek, mint például a közgazdaságtan esetén nem csökkent a bejutó hallgatók matematikai tudásszintje, de sajnálatos módon a mérnök képzés iránt valóban elkötelezett hallgatók száma nagyon kevés és az ide felvételizők nagy részét az előbb említett felkészületlen hallgatók teszik ki.

3.3.1. Más egyetemeken

Ennek a jelenségnek az ismeretében a **SEFI Matematikai Munkacsoportjában (MWG)** az Európai Matematika Oktatási Szemináriumok (European Seminar on Mathematics in Engineering) sorozatában a különböző egyetemek tapasztalatában háromféle elképzelés is kirajzolódott:

- **A tananyag csökkentése** vagy könnyítése illetve ismétlések beiktatásával a tananyag átstrukturálása. Ennek a módszernek a hátránya az, hogy megbontotta a mérnökképzésben kialakult gyakorlatot a matematikát igénylő szaktárgyak oktatásában a később sorra kerülő fejezetek alkalmazását korábbi időpontban igényelték. Ez a módszer tekintve a matematikai ismeretek csökkenő tendenciáját, állandó korrekcióra szorul és "mozgó célpontra lövés"-szerű.

- Más egyetemeken **külön oktatási egységeket vezettek be - szintre hozó tárgyakat.** Ez a lehetőség a modulrendszerre építkező egyetemi oktatás esetén nehezen fér be a nem kellőképpen flexibilis oktatási rendszerbe. A Miskolci Egyetem tapasztalata szerint ez a szintre hozó tárgy nem érte el a kitűzött célját, de eredményes volt az ún. nulladik évfolyam megszervezése, amit sajnálatos módon csupán néhány évig engedélyeztek.

- Bizonyos egyetemeken **külön matematika tanítást segítő központokat** állítottak fel, itt a **Loughborough University Mathematics Learning Support Centre**-t említjük példaként [137]. A központ anyagát T.Croft, H.Dalgleish, B. Dawson és S. Webb állították össze. Felépítése egy könyvtárhoz hasonlít, ahol a nehézségekkel küzdő hallgatók külön segítséget kapnak. A Loughborough-i Egyetemen az oktatók előírhatják a hallgatóknak az oktatás során felmerülő hiányosságaik pótlására az adott fejezet gyakorlását. Így például szögfüggvények hiányossága esetén a hallgató a Mathematics Learning Support Centre-ben kikeresi a szögfüggvényekre vonatkozó rövid elméleti összefoglalót, áttekinti a megoldott példákat és néhány feladat megoldásával ellenőrzi tudását. Ebben a központban "ügyeletet" teljesít egy-egy oktató, aki egyrészt segít kikeresni a megfelelő tananyagot, másrészt a hallgatónak rövid konzultációt nyújthat. Az oktatót értesítik a hallgató megjelenéséről.

A központ tapasztalata az, hogy a hallgatók, akik igénybe veszik a központot, gyakran küzdenek számolási nehézségekkel és a központ segítsége nem pótolhatja az alapvető, hézagmentes matematikai ismeretanyagot, de bizonyos fejezetek hiányosságai sikerrel pótolhatók.

Az Egyesült Királyság Mérnöki Tanácsa, a **The Engineering Council**, ezeknek a hiányosságoknak a felszámolására és a mérnökképzés megújítására tett javaslatait a **SARTOR 3** [184] című dokumentumban foglalta össze, amelynek lényege, hogy egy gyakorlati (**Incorporated Engineer**) és egy kutató-mérnöki (**Chartered Engineer**) képzést javasol. A gyakorlati mérnökképzésben az alapvető matematikai technikák ismeretét írják elő, főként a technológia által is támogatott módszerek ismeretét (Computer Algebra programcsomagok), míg a kutató-mérnökök ezen felül a szakterületüknek megfelelő alkalmazott matematikai ismereteket külön modulokban tanulják.

Érdemes megemlítenünk a **Bristoli Egyetem** mérnök-matematikus képzésében használt internet alapú tesztsorozatot [183] (**TAL** Test and Learn), amelynek célja szintén a hallgatók felkészülésében tapasztalt hiányosságok pótlása. A TAL használatához a hallgatók és az oktatók külön azonosítót kapnak, az oktató létrehozhat egy csoportot és ezáltal figyelheti a hozzá tartozó hallgatók teljesítményét hiszen a számítógépes rendszerbe a tesztek értékelése is be van építve. Az egyetem nemzetközi együttműködésének is köszönhető, hogy a TAL adatbázisa nagymértékben növelhető és az oktatás minden lépcsőjén használható. A TAL működését **M. D. J. Barry** és **J. H. Sims Williams** koordinálják [72].

A hasonló próbálkozások jelzik azt az igényt, hogy az egyetem segítséget nyújtson azoknak a hallgatóknak, akik erre késztetést éreznek.

3.3.2. Miskolcon

A Miskolci Egyetemen az utóbbi öt-hat évben azt tapasztaltuk, hogy sajnos még a közgazdász hallgatók felkészültsége is nagyon hiányos. Egy, a közgazdász hallgatókra vonatkozó felmérés után, **néhány éve rendszeresítettük az el-**

sőéves közgazdász és műszaki hallgatók tudásszintjének az év eleji felmérését, az első oktatási héten írt dolgozat alapján. Ez a dolgozat az ún. kiérettségi szintjéhez igazodó feladatokat tartalmazott és a hallgatóknak a nevük mellett csak középiskolai tanulmányainak helyét, a matematika jegyeiket és a matematika óraszámát kellett megadniuk.

Az eredményt alaposan elemezve Galántai [109] arra a következtetésre jutott, hogy **elfogadható tudással csak azok a hallgatók rendelkeznek, akik a matematikát magasabb óraszámban tanulták.** A viszonylag nagyszámú felmérés (1000 felett) azt igazolja, hogy a középiskolai matematikai jegyek és a felmérésen tapasztalt eredmény lineárisan függött össze, illetve a Cluster analízis azt mutatta, hogy a legerősebb csoport a matematikát legmagasabb óraszámban tanulók csoportja volt. A mérés számszerű adatainak nyilvánossá tételéhez nem járultak hozzá az érdekeltek.

A Gazdaságtudományi Kar és a Gépészmérnöki Kar vezetése a Matematika Intézet törekvéseit látva bizonyos kiegészítő, szintre hozó órákat iktatott be az elsőévesek programjába, majd kísérletképpen a 2001/2002-es oktatási évben kötelezővé tettük a Gépészmérnöki Kar hallgatóinak, hogy mindazok, akik ezen az év eleji felmérésen gyengén teljesítettek heti két óra terjedelemben egy szintre hozó tárgyat, **matematikai alapismereteket tanuljanak. Felzárkóztató órákat** tartott többek közt Szarka Zoltán a Gazdaságtudományi Kar hallgatóinak, Raisz Péterné és Tóth Lajosné Tuzson Ágnes a Gépészmérnöki Kar hallgatóinak. Eleinte ezekre a felzárkóztató órákra csak elvárták a hallgatókat, majd kötelezővé tették azoknak, akik nem érték el a minimális szintet. Az elképzelés szerint ennek a kísérletileg bevezetett tárgynak az eredményes lezárása előfeltétele volt a további matematika vizsgáknak, de **a nehezebben tanuló hallgatóknak aránytalanul megnőtt terhelése miatt nem hozta meg a kívánt eredményt**.

Csak azok jelentkezhettek a két másik első féléves matematika tárgyból vizsgázni, akik a matematikai alapismeretekből két sikeres zárthelyit írtak. A tapasztalat az volt, hogy a hallgatók egy része még ezt a feltételt sem tudta teljesíteni. A Gépészmérnöki Kar törölte ezt a tárgyat a további években.

Sokkal sikeresebbnek bizonyult a Gazdaságtudományi Karnak egy, előző években szervezett, ún. nulladik évfolyama [151], ahova a hallgatók önköltséges formában jelentkezhettek, egy éven keresztül elmélyítették mindazokat a matematikai alapismereteket, amelyek szükségesek voltak az első éves matematikai analízis felvételéhez. Ezek a hallgatók a tapasztalat szerint a következő évek során felvételt nyertek a Gazdaságtudományi Kar első évfolyamára és ott sikeresen teljesítették a matematika tárgyak követelményeit.

A nulladik évfolyam megszervezésének egyik vonzerejét az jelentette, hogy az ott kimagaslóan jól teljesítő hallgatókat felvétel nélkül vette fel az egyetem, de ez ellen több kifogás is felmerült, ezért megszüntették a nulladik évfolyamok rendszerét.

Jelenleg az elsőéves műszaki és közgazdász hallgatók az előadásokon és a gyakorlatokon kívül, az oktatók konzultációin keresztül kaphatnak segítséget.

Nagyjából az említett nulladik évfolyam rendszer megszűnésével párhuzamosan indultak az **akkreditált iskolarendszerű felsőfokú szakképzések**, röviden **mérnök-asszisztens** képzések, amelyeket az egyetem minőségbiztosítása mellett szakközépiskolák nyújtanak, és amelyek részben átveszik a nulladik évfolyam szerepét, hiszen **a két éves képzés után a diákok, különbözeti vizsgákkal ugyan, de bejuthatnak felvételi vizsga nélkül a főiskola második évére**, és ennek elvégzése után az egyetemi képzés harmadik évfolyamára, szintén az előírt különbözeti vizsgákon szerzett eredmény alapján.

A **Miskolci Egyetem több középiskolával működik együtt ebben mérnök-asszisztens képzésben**, az akkreditációs anyag előkészítéseként a **Matematika I., II. és III.** tárgyak tematikáját az értekezés szerzője dolgozta ki [52], és jelenleg is részt vesz a tárgyak minőségbiztosításában Homolya Szilviával és Szilágyi Szilviával együtt.

A tapasztalat azt mutatja, hogy kevés azoknak a hallgatóknak a száma akik továbbtanulnak, ennek az lehet az oka, hogy eleve a mérnök-asszisztens képzésre az egyetemi felvételi vizsgák eredményének az ismeretében, július- augusztusban jelentkezhetnek, és a jelentkező hallgatók nagy része már eleve nem szándékozott főiskolát, egyetemet végezni, vagy a felvételin nem jutott be. **Ennek a lehetőségnek a fordított irányú kihasználása is adott**, de nem eléggé széles körben ismert. Ha az egyetemi, vagy főiskolai képzésben a hallgató nem tudja teljesíteni az első féléves/éves vizsgakövetelményeket, de bizonyos alaptárgyakból eredményesen vizsgázott, a mérnök-asszisztens képzés nyitva áll előtte.

3.4. Az egyetemi munkastílus kialakítása

Általában az egyetemi oktatásba bekerülő hallgatók számára komoly nehézséget jelent a középiskolai tanulási módszerekről hirtelen áttérni a sokkal több önálló munkát igénylő egyetemi tanulásra. A legtöbb karon és így sajnos a műszaki karokon is, kevés gondot fordítunk arra, hogy a "gólyák" segítséget kapjanak a saját egyetemi tanulási módszereik kialakításához. Régebben erre nem volt szükség, mert a mérnöki egyetemre bekerülő hallgatók egyrészt megfelelőbb tudással rendelkeztek, másrészt az átállást "önerővel" meg tudták oldani. Ezeket az egyéni tanulási módszereket szerencsés esetben már a középiskolai tanulmányok alatt is megismerhetik a diákok, ha egyéni dolgozatokat írnak, önálló munkára szoktatják őket.

Az önálló munka szükségessége

. Tekintve, hogy **az egyetemi oktatás jórészt a statikus előadás és gyakorlat formára épül, az első éves hallgatók a legelső napoktól azzal szembesülnek, hogy rengeteg új ismeretet, aránylag rövid idő alatt kell befogadniuk, az előadók többnyire a középiskolás korukban megszokott ütemnél gyorsabban beszélnek, mintegy feltételezve a hallgató szintetizáló képességét.** Egyidőben kell az elsőévesnek feszülten figyelnie az új fogalmak bevezetését, a fogalmak megértését, segítő példákat, és ugyanakkor ezekről jegyzetelnie. Az előadások elszakadnak a középiskolákban gyakran előforduló, "szószerinti" diktálástól, és ha az egyetemi előadó a táblára ír, akkor rendszerint ez csak kiegészíti a szóban is elmondottakat.

A hallgatónak döntenie kell, mégpedig azonnal, hogy az előadás későbbi felidézéséhez a táblára felírt, vagy írásvetítőn megjelenített anyagból mennyit jegyez le, illetve a szóban elhangzott kérdésekből mennyit tud a folyamatos figyelés mellett lejegyezni. A hallgató tehát egyszerre koncentrál a látottakra és hallottakra és ugyanakkor igyekszik azt tömörítve jegyzetelni, hiszen reménytelen, hogy minden elhangzó szót leírjon.

Ilyenkor jó hasznát veszi a hallgató a létező egyetemi jegyzeteknek, és gyakran hasznos a diktafon használata (felvetődik a kérdés, hogy az előadások hang- és képanyagának valamilyen rögzítése mennyiben érinti a szerzői jogokat). Ugyanakkor az egyetemi jegyzetek szószerinti kivetítése, esetleg felolvasása, felmondása személytelenné teszi az előadást (minek az előadó, lehet, hogy felolvasni más kifejezőbben jut).

A különböző számítógéppel támogatott előadási formák (Power Point, stb.) mozgalmassá teszik az előadásokat, alkalmasak lehetnek az előadások lényeges pontjainak kiemelésére, ugyanakkor a technikai eszközök túlzott használata szintén a személytelenség érzetét kelti, egy vetített képes, hanghatásokat sem nélkülöző előadás éppen a nagyfokú előkészítés miatt válhat hiteltelenné.

Ráadásul minél bonyolultabb technikai eszközökre támaszkodik egy előadás, annál nagyobb műszaki hátteret igényel és ez magában hordozza az eszközök meghibásodásának a lehetőségét.

Learning to learn tantárgy bevezetése

. Az elsőéves hallgatók számára létkérdés tehát, hogy "megtanuljanak" tanulni. A Miskolci Egyetem gyakorlatában egyedül a bölcsész karokon van arra példa, hogy a hallgatók a könyvtárhasználatot, a jegyzet és bibliográfia készítést, a kisdolgozatok írásának követelményeit hivatalosan, tantárgyi keretek között tanulják meg. A többi hallgató mindezt a felsőéves társaitól vagy a tapasztaltabb kollegáktól lesi el. A legtöbb karon a hallgatók kezdeményezésében folyik egy ún. balek-oktatás, ez rendszerint az első zárthelyikre készíti fel a hallgatókat, bár ezek az oktatások gyakran az egyetemi vendéglátóipari egységekben végződnek. Nem ismeretlen fogalom a hallgatók életében a zárthelyi-előkészítő buli, utóvizsga buli stb. (lásd E/2-es klub programja).

Végül is milyen hivatalos segítséget adunk a hallgatóknak ahhoz, hogy megtanulják a tanulás módszereit? Tulajdonképpen szinte semmit, és tesszük ezt azzal a "felkiáltással", hogy érettségi után a hallgatótól elvárható az önálló munka.

Ennek az önálló munkastílusnak a kialakításában **a projektmódszer** egy bizonyos szerepet betölthet, de mindenképpen **szükség lenne egy olyan tárgy bevezetésére - és talán nemcsak a műszaki karokon -, amely tudatosítja a hallgatóban a tanulási stílus, a munkastílus megváltoztatásának fontosságát és segítséget nyújt az önállóan nehezebben tanuló hallgatóknak.**

Ennek a tárgynak - egy 2 óra előadás, 2 óra gyakorlat méretben gondolkodva - **a tartalma** kiterjedhetne bizonyos **tanulás-lélektani önismereti**

kérdésekre, a hallgatóban tudatosítani kell azt, hogy másként tanul egy vizuálisan memorizáló, másként egy belső auditív módon memorizáló, stb., és jó, ha a hallgató felméri saját képességeit.

Szükség lenne az **egyetemi oktatási folyama**t különböző mozzanatai szerepének a **tudatos megismertetésére**. Az előadás, gyakorlat, laboratóriumi gyakorlat, mérések, rajzbeadás mind más és más oktatási, képzési célt szolgál és tudatosítani kell azt, hogy ezek a részcélok miként függnek össze. Túl azon, hogy minden alapozó és mérnöki szakismeret tárgyból ismertetjük az adott tárgy követelmény rendszerét, a tárgy ütemtervét, a zárthelyik időbeosztását, a vizsgakövetelményeket, a hallgatónak szüksége lenne olyan alapvető, közösen érvényes kérdések megismerésére, mint amilyeneket a közös egyetemi vizsgaszabályzat és követelmény rendszer tartalmaz.

Ne csak akkor olvassa a hallgató ezt a vizsgaszabályzatot, amikor a rektori utóvizsga engedély megadásának a feltételeit próbálja kideríteni. Örvendetes az, hogy a Miskolci Egyetem egyre bővülő internetes honlapján a hallgatók mindehhez az információhoz egyre szélesebb körben hozzáférhetnek, de valljuk be, hogy az információk tömege lassan lehetetlenné teszi, hogy a hallgatók egy ilyen - intellektuális munkavégzésre felkészítő - tárgy irányítása nélkül eligazodjanak az adott információ halmazban.

Tehát ennek a tárgynak egy másik fontos szerepe lenne az egyetemen, az oktatással, képzéssel kapcsolatos információkról való tájékoztatás, **az információs rendszer** és ezen belül a 2003-2004 oktatási évtől kötelező módon bevezetésre kerülő NEPTUN rendszer.

A tárgy további tartalmi kérdései közé sorolnám **a lehetséges önálló munkamódszerek ismertetését,** annak a megtanítását, hogy mikor és mennyit jegyzeteljen a hallgató. Fontos, hogy ha egy adott tárgyból megszerezhető az előadó által előírt jegyzet, akkor azt a hallgató néhány perc erejéig, akár előrelapozva is, megismerje, hogy felmérhesse, hogy az írott jegyzethez képest az előadáson mi az új információ.

Ugyanez érvényes más módon (pl. internet) közzé tett oktatási anyagokra. Fontos eleme lenne ennek a tárgynak annak a megtanítása, hogy feladat megoldás, kisdolgozat beadása vagy akár egy zárthelyi vagy vizsgadolgozat megírásánál a hallgatók számára milyen "íratlan" előírások vannak vagy lehetnek. **Lehetségesnek tartom ennek a tárgynak a keretén belül** a hallgatókkal - a személyiségi jogok tiszteletben tartása mellett - előző évekből származó **sikeres, követendő példák, konkrét zárthelyi vagy vizsgadolgozatok megismertetését,** illetve a jellegzetesen, évente ismétlődően előforduló hibák nemcsak általános, hanem nagyobb számú konkrét eseten keresztül történő bemutatását - azoknak elkerülése végett.

Természetesen itt fokozottan figyelni kell arra, hogy **a hibák felsorolása** azzal a **veszéllyel is járhat**, hogy **a figyelmetlen hallgatók éppen azt veszik követendő mintának**. Lehet például olyan "hol a hiba" jellegű előadást és gyakorlatot tartani, ahol a hallgatók figyelmét az éppen általuk párhuzamosan az alapozó vagy szaktárgyakból tanultakra irányítja és mintegy a hallgatókkal közösen kijavítani, felfedezni az adott hibákat.

Ennek a tárgynak természetéből adódóan fokozott az **interdiszciplina-**

ritása, tehát célszerű a párhuzamosan tanult tárgyak előadóinak a tevőleges bevonása. **A szorgalmi időszak utolsó harmadában fokozottan kívánatos lenne a vizsgaidőszakra,** mint a középiskolás korukban megszokott tanulási terheléstől merőben eltérő jellegű időszakra **koncentrálni.**

A vizsgaidőszak 6 hete az, amikor igazán magára hagyjuk a hallgatókat. Az opcionálisan igénybe vehető, esetleges konzultációk sem a hallgatók lélektani megterhelésének mennek elébe, hanem a félév közben elmulasztott, meg nem értett feladatokra összpontosítanak.

A hallgató figyelme egy adott tárgyból vizsgára készülve, már nem a félévben oktatott tárgy egészére, hanem rendszerint az előző hetekben vagy vizsgaidőszakban megismert vizsgakérdésekre koncentrál. Gyakori kérdés az, hogy mi várható a vizsgán, mintegy azt feltételezve, hogy nem a tárgy egésze, hanem csak annak bizonyos részei a kiemelten fontosak. A hallgatók egymás tapasztalatára vannak utalva, igen népszerűek a különböző "bombabiztos trükkök", egy-egy előadóra, tárgyra jellemző 20-30 feladat zártkörű cirkulációja, természetesen a vélt megoldással együtt.

Ezeknek különböző materializált formáit (puskák) a szemfüles oktatók a vizsgán rendre begyűjtik, és akinek ilyen gyűjteménye van, az képet nyerhet **a tárgy egy bizonyos visszajelzés formájáról** - ez az, amit a hallgatók fontosnak éreznek a tárgy megtanulása kapcsán. Ezek a nem megengedett, de sajnos a vizsgán néha előforduló segédeszközök (röviden puskák) a modern technika megjelenésével egyre változatosabb formát öltenek. **A legegyszerűbb formája az előadás tömörített tartalmának a fénymásolón kicsinyített változata.** A palmtopok megjelenése lehetővé teszi akár több kötetre rúgó anyag tenyérben hordozását és néha **egy jobb zsebszámológép akár a palmtop tulajdonságával is rendelkezik.**

A puskák elterjedésének másik, a technika által támogatott formáját a mobiltelefonok újabb generációi jelenthetik, hiszen **egy palmtop és mobiltelefon kombinációjával akár a Révay Nagy Lexikon adott célhoz igazított része is letölthető.** Ennek, a hallgatók szemében talán létkérdésnek tűnő, "puskázni vagy nem puskázni" kérdésnek kellemetlen következményeivel számolnunk kell és ennek körüljárása is ennek az adott tárgynak a keretében történhet meg.

Vannak olyan országok (pl. Románia), amelyekben a felsőoktatási törvény szabályozza azt, hogy a hallgatót akár egyetlen ilyen, meg nem engedett eszköz, használata után az adott egyetemről vagy az ország összes egyeteméről kitilthatják. Nálunk ezt a kérdést törvény nem szabályozza és a legtöbb egyetem vizsgaszabályzata demokratikus szemérmetességgel megkerüli. Pedig talán, ha nyíltan beszélnénk róla, akár a tanulás hasznára is lehetne.

Ha például feltéve, (de nem megengedve?), arra bíztatnánk a hallgatókat, hogy egy adott tárgyból egymással versenyezve készítsék el a lehető legjobb puskát, azt javítás végett "mutassák be", akkor az adott tárgy megértéséről bizonyára sokkal pontosabb visszajelzést nyerhetnénk, mint másképp, például kérdőíves felméréssel, véleménykérés módszerével.

Természetesen ez utóbbi módszerek célja általában nem a tárgy megértési fokának, hanem rendszerint a hallgatói megelégedettségnek a vizsgálata. Az így "előírt" puskakészítés arra sarkallhatná a hallgatókat, hogy maguk tekintsék át az anyagot, de nyilván a puskák vizsgán történő felhasználása legalábbis vitatható. Ugyanakkor ez a kialakult, megmerevedett helyzet, **a "puskák" felhasználásának tiltása teljesen irreálisan tükrözi a mérnökképzés egészének célját.**

A legtöbbször **annak a fontosságát hangsúlyozzuk, hogy képessé kell tegyük a hallgatót a tanultak felhasználására, alkalmazására**, tehát **ha az előbbi,** irreálisnak tűnő **gondolatmenetet folytatva megengedhetnénk a hallgatóknak, hogy a vizsgán az általuk legjobbnak vélt, vagy ideális körülmények között a legjobb tudásuk szerint összeállított "segédanyagot", puskát, használhassák egy előre nem ismert feladat, feladatcsoport megoldására, akkor az ellenőrzés során pontosan azt mérnénk, hogy a hallgatók a tanult ismereteket mennyire értették meg és érvényesülne az alkalmazás képességének ellenőrzése is.**

Ennek az utóbbi gondolatmenetnek az elemei szintén fellelhetők a már többször említett **projektmódszerben**, hiszen ott éppen az a cél, hogy a hallgató egy kérdést minél több oldalról megvizsgáljon, az esetleg különböző tárgyakban és helyeken tanultakat együtt alkalmazza, és önállóan keressen eszközöket az adott feladat megoldására.

4. A mérnökhallgatók matematikaoktatásának sajátosságai

4.1. A matematika oktatása a mérnökképzésben

A mérnökképzés általános céljaiból levezethetők a matematika oktatásának céljai is, lásd Businger és Fässler [88].

Az USA-beli Accreditation Board for Engineering and Technology (ABET) 1997-ben kiadott Engineering Criteria 2000 c. dokumentuma [98] az oktatási folyamat és a tananyag leírása helyett azt javasolja, hogy a mérnökképző intézetek fogalmazzák meg világosan az oktatási céljaikat és azt, hogy az adott célok megvalósítása miként mérhető az oktatás kimenő ágán, a végzettek tudásán.

4.2. A mérnökképzés általános céljai

Az **Engineering Criteria 2000** [98] szerint **a végzett mérnök képes kell legyen** :

- matematikai, tudományos és mérnöki ismeretek alkalmazására
- kísérletek megtervezésére és vezetésére
- egy rendszernek, annak egy összetevőjének, egy folyamatnak a megtervezésére
- multidiszciplináris csapatmunkára
- mérnöki feladatok felismerésére, megfogalmazására és megoldására

Ezen kívül szüksége van:

- a szakmai felelősség fontosságának megértésére

- a kapcsolatteremtés képességére
- a felhasznált technológia társadalmi hatásainak ismeretére
- folyamatos képzés - továbbképzésre
- a szakma fejlődésének a nyomon követésére
- a korszerű technika és tudás ismeretére és arra a képességre, hogy korszerű eszközöket alkalmazni tudjon.

4.3. A matematika oktatásának céljai a mérnökképzésben

A matematika oktatásának fő célja a mérnöki végzettség megszerzéséhez szükséges matematikai ismeretek és képességek előállítása.

Ennek a célnak három összetevője Businger szerint [88]:

- A matematika, mint a mérnöki oktatás eszköze
- A gondolkodás fejlesztése
- Általános nevelési célok megvalósítása

4.4. A matematika, mint eszköz

Elengedhetetlen a többi tárgy megértéséhez.

A szükséges matematikai ismeretanyag tartalmaz:

- **egy általános rész**t, mint differenciál és integrálszámítás, differenciálegyenletek, lineáris algebra, numerikus módszerek stb. és

- **egy képzés-specifikus részt,** pl. diszkrét matematika, logika, automaták, valószínűség- számítás és statisztika, operációkutatás, optimalizálás, Fourrier analízis, Laplace transzformációk, wavelet-ek.

Számítógépek megjelenése és elterjedő használata a mérnökképzésre is újabb feladatokat ró, ezek megjelennek a matematika oktatásában is, mint a számítógépes programcsomagok, DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA, MATLAB, MUPAD, STATISTICA, MACSYMA stb. ismeretének szükségessége.

Változás jelent a korábbiakhoz képest a számítógép alkalmazása a számításokban sokszor még szimbolikus számítások elvégzésére is lehetőség van. Minek tanuljon - kérdezhetik egyesek (és kérdezik is sokan!) - a diák határértékszámítást, deriválást, integrálást, ha számítógép azt úgyis elvégzi egy- két gomb lenyomása után?

Egyes szerzők szerint, Burton [87], James [126], "*A mérnökök egy része azon a véleményen van, hogy a számítógépes matematikai szoftverek képessé teszik a hallgatókat mindazoknak a műszaki feladatoknak a megoldására, amiért eddig a matematikát tanulni kellett, következésképpen, fölöslegessé vált a mérnökhallgatók matematikaoktatása*".

Sutherland és Pozzi [170] a matematikaoktatás szerepét kutatva a mérnökképzésben azzal a szélsőséges mérnöki véleménnyel is találkoztak, hogy matematikai eszközök megértésére már csak a szoftvercsomagok megíróinak van szüksége, mert a mérnök ma már csak felhasználója a számítógépnek, gépeket tervez, utakat, hidakat épít, de az analízis mélyebb kérdéseivel nem foglalkozik.

Ugyanakkor James [126] arra is rámutat, hogy "*A számítógépek és az információtechnológia alkalmazásának megnövekedett szerepe fontos a mérnökképzésben. ... A számítógép fekete dobozként történő használatával (az angol eredetiben **black box solution**) a tapasztalt mérnökök és a mérnökképzés szereplői nemcsak, hogy nem értenek egyet, de nem győzik hangsúlyozni annak veszélyességét*".

Fontos tehát, hogy a mérnökhallgatók rendelkezzenek azzal az alapos matematikai tudással, amely képessé teszi őket a számítógépes szoftverek tudatos alkalmazására, az eredmények helyes értelmezésére és ellenőrzésére.

A mérnöki tudományok is igénylik a költséges laboratóriumi **kísérletek, mérések matematikai és számítógépi modellezését**, tehát ennek elméleti megalapozása pl. sztochasztika is előbb- utóbb az alapoktatás céljai közé kerül.

4.5. A matematika szerepe a gondolkodás fejlődésében

A későbbi szakmai munka szempontjából kiemelten fontos a matematika tartós hatásának elérése.

Ennek elemei [65]:
- A logikus és analitikus gondolkodási, érvelési képesség
- logikai szabályok, bizonyítási eljárások ismerete
- matematikai adatok kontextusból történő kibontása
- heurisztikus gondolkodási képesség
- elvonatkoztatás és képzettársítás képessége
- struktúrák absztrahálása,
- szituációk közötti logikai kapcsolat felismerése
- tudatos és innovatív gondolkodás képessége
- hibák észrevételének képessége, önellenőrzés
- adatok és eljárások új módon való kombinálása, variálása
- megoldási terv megtalálása
- problémamegoldó képesség
- probléma felismerése, megfogalmazása,
- verbalizálása, elemzése, szintézise
- alternatívák fejlesztése, általánosítás képessége.

A mérnöki oktatás jelenlegi helyzetében meglehetősen nagy az idő előtti pályaelhagyás, pályamódosítás. A képzés két végén, a bemenetnél és a kimenetnél számszerű adatok bizonyítják ezt, de az, hogy ez a lemorzsolódás milyen ütemben, mikor történik ritkábban hallhatjuk. A Gépészmérnöki Kar tapasztalata szerint a lemorzsolódás nem egyenletes, hanem rendszerint többlépcsős, mindig az olyan "új" helyzetekben bizonyul kiugróan magasnak, amikor a hallgatók képzése során változik a tárgyak nagyobb része. Ez azt látszik igazolni, hogy a hallgatók még nem tudták megtanulni a tanulási módszereket.

Sok végzős azt jelzi vissza, hogy nem annyira a matematikai ismereteit, hanem az azok által kifejlődött gondolkodási képességeit hasznosítja a munkája során, mint azt Businger és Fässler [88] is megjegyzi: *"We often hear from graduates that they only use some of the mathematical* *tools they learnt, but that they daily use the mathematical reasoning power."* lásd még [87].

4.6. Matematikatörténeti nevelési célok

Tudománytörténeti kitekintés, kapcsolat az oktatott anyaggal egy felfedezéshez vezető út megismertetése, pl. Gauss, Euler, Cardano képlet, Bolyai, Goldbach sejtés, Zadeh és a fuzzy halmazok, stb. fontos elemei lehetnek a matematikaoktatásnak.

A nem matematika szakos felsőoktatás matematika tanterve és a középiskolai matematikatanítás közötti összefüggésekről érdekes idézni Munkácsy Katalin véleményét is. A felsőfokú képzés szaktárgyai a kémiától a nyelvészetig sok modern matematikai ismeretet alkalmaznak, e tárgyak oktatói elvárják, hogy a hallgatók rendelkezzenek a tárgy tanulásához szükséges matematikai ismeretekkel.

Egyre több intézményben vezetik be az első évben az egy vagy két féléves matematikaoktatást. Az első éves hallgatók számára viszont túl magasak a matematikai követelmények. **Munkácsy összehasonlított néhány felsőoktatási matematika tantervet középiskolai tantervekkel** [145], és azt tapasztalta, hogy **hiányzik azok szükséges egymásra épülése.**

Mivel a nem matematika szakos felsőoktatásban nem várható a matematika óraszámok emelése, sem a tanítandó ismeretek mennyiségének csökkenése, **elengedhetetlen, hogy a középiskolai matematikaoktatásban változások következzenek be.** Meg kell találni annak lehetőségét, hogy **a magyar középiskolai matematikatanítás megőrizze hagyományos értékeit**, a diákok jó problémamegoldó képességét és a tananyagban szereplő algoritmusok biztos ismeretét, sőt, ezeket az eredményeket a tanulók korábbinál nagyobb hányada legyen képes elérni, ugyanakkor **szélesebb körű ismereteket kell szerezniük a diákoknak a felsőbb matematika tanulásához szükséges alapfogalmakat illetően**, ilyenek pl. a határérték, a komplex számok, a mátrixműveletek.

A fogalmak fokozatos érlelése, mint fontos didaktikai elv, megtörni látszik a közép- és a felsőoktatás határán. Talán csak a valós számfogalom, az irracionalitás kérdése az, ami elvileg átnyúlik ezen a határon, egyébként csak olyan fogalmak képezik a közoktatás részét, amelyek megnyugtatóan tárgyalhatók, részlegesen lezárhatók az érettségiig. Ez korábban is okozott problémákat a továbbtanulóknak, de ma különösen élesen vetődik fel.

Néhány év alatt megduplázódott a továbbtanulók száma, így a kevésbé felkészültek is bekerülnek a felsőoktatásba, másrészt jelentősen megnőtt a matematika szerepe a különböző szakterületeken, a hagyományos műszaki szakirányú képzésen túl más területek, pl. a vámtisztek képzése is igényli a matematikát. Munkácsy kiemeli azt, hogy a középiskolai matematika tanítás változtatásának, a kialakult helyzethez történő alkalmazkodásnak, egyik lehetséges módja a matematikatörténeti ismeretek súlyának növelése a tanulási folyamatban.

A matematikatörténet motivációs szerepén túl két további fontos szempontot is említ Munkácsy [145] OTKA kutatásuk tapasztalataira támaszkodva .

1. A matematikatörténet lehetőséget kínál arra, hogy alapvető matematikai fogalmakat történeti keretbe illesztve, szemléletes formában vezessünk be, messzemenően figyelembe véve a későbbi korrekt felépítés didaktikai igényeit.

2. A matematika tanítás kényes pontja a bizonyítások kérdése. A bizonyításfogalom több mint kétezer éves fejlődésének vizsgálata segítséget nyújthat abban, hogy a XIX. századi romantikus, idealizált bizonyításfogalomnál sokkal természetesebb, egyúttal az ókori göröggel lényegében megegyező XX. századi bizonyításfogalmat tekintsük alapnak.

Munkácsy véleménye szerint ha a középiskolai matematika órákon is szóba kerülnek olyan kérdések, amelyek közelebb viszik a fiatalokat a kortárs matematikában vizsgált problémákhoz, akkor ezáltal nem csak egy, a felső matematikában előforduló fogalmak megértését segítjük elő, hanem áttételesen a tanulók számolási képességét is fejleszthetjük a magasabb motivációs szint kialakításával.

A magyar matematikatörténet szerencsére bőven ad lehetőséget arra, hogy a matematika oktatásában érvényesítsük ezt a matematikatörténeti szempontot.

4.6.1. A magyar matematikatörténetből vett példák

Apáczai [99] az ismeretközlésben a tanárt tömörségre és rövidségre intette, egy időben csak egy dolgot tanítson, ne kapkodjon ide-oda. Előadása világos és áttekinthető legyen, hogy a tanuló meg tudja különböztetni a kevésbé fontostól. A tanuló éberségét állandóan frissen kell tartani, hogy figyelme ne lankadjon. A szokratészi társalgó módszert szabatos összefoglalás kell hogy kiegészítse. Mind olyan elvek, amelyeket a modern oktatásban is alkalmazni lehet. A jó tanár ma sem több az érdekfeszítő, változatos előadásokat tartó és önálló munkára útmutatást adó pedagógusnál, aki tudja, mit, miért és hogyan kell tanítani. A begyakorlást és a tanulók önálló munkára ösztönzését Apáczai tanári gyakorlatában következetesen érvényesítette.

A tanítás módszertani és didaktikai kérdései mellett Apáczai foglalkozott az önképzés helyes eszközeivel is. A **Tanácsban** [99] a helyes utat (**-módszer**), amellyel a tanuló megszerezheti a szükséges ismereteket, **öt dologban foglalta össze: olvasás, hallás, elmélkedés, tanítás, írás**. Mind olyan tevékenységek, amelyek nélkül nem lehet alapos műveltségre szert tenni. **Az Encyclopaediában** is megtaláljuk a helyes útra vonatkozó tömör előírásokat.

A 17. század tudománya a megértést, ésszerűséget, a jól rögzített ismereteket állította előtérbe. A mindennapi élet alapos matematikai, fizikai, élettani, jogi ismereteket követelt. Az iskolákban fokozatosan tért hódított a *"non multa, sed multum"* elve, amit egy népi bölcsességgel "aki sokat markol, keveset fog"-ra magyaríthatnánk. Az enciklopédikus műveltség megszerzéséért "soká" kellett dolgozni. Akkor az enciklopédikus műveltség csak viszonylag jelentett több ismeretet. Az ismeretkör jórészt az idejét múlt középkori és humanista műveltség ismeretanyagának rovására bővült. Napjainkban a gyors információhalmozódás és elavulás okoz gondot.

Bolyai Farkas és János munkássága is sok szép példa idézését teszik lehetővé. **Bolyai Farkas**, mint matematikus, mai nyelven szólva **gyakorlati tüzeléstechnikai kutatásokat végzett** lásd **Kemence-tan** [112] 569-572, és kutatásainak, számításainak eredményeként Erdély-szerte elterjedt az úgynevezett Bolyai kályha használata, amelynek tűzterében a felmelegített levegő minél nagyobb, optimalizált hőleadásra kényszerül, ugyanakkor ezek a kályhák a megfelelő hőcirkulációt, huzatot is optimálisan biztosítják. Működő Bolyai kályhát lehet látni a Marosvásárhelyi Teleki-Bolyai Könyvtárban is, és több technika történeti múzeumban.

Bolyai Farkas, aki kerttervezéssel és gyümölcsfa nemesítéssel is foglalkozott, egyik tanulmányában a terep (domboldal) dőlésszögének függvényében számítja ki azt az **optimális gyümölcsfa ültetési alaprajzot**, ami úgynevezett félsoros csúsztatással a gyümölcsfák maximális gyökérzet kifejlődését és lombkorona optimális elhelyezkedését [171] biztosítja.

Bolyai Farkas két kötetes akkori viszonyok között egyetemi színvonalnak megfelelő tankönyve **a Tentamen**, nagy gondot fordít például a **térgeometria oktatásában a térszemlélet kialakítására, a vizualizálásra**. Talán matematikatörténeti érdekességnek számít az, hogy már az 1832-ben kiadott könyvének függelékében olyan **térben kiemelhető mértani ábrákat használt**, amelyeknek a célja a diákok térszemléletének kialakítása [27]. Ábráinak egy része mozgatható, forgatható, különböző helyzetbe állítható, ezáltal mintegy "működés közben" mutatja be az adott matematikai kérdéseket, bizonyításokat.

A Tentamen eredeti példányát a Marosvásárhelyi Református Kollégium "betűivel" és annak nyomdájában állították elő és az előzőekben jelzett, térbeli szemlélhető ábrákat tartalmazó mellékleteket valószínűleg a kollégium diákjai illeszthették be az eredeti példányokba aprólékos, gondos munkával .

Bolyai Farkas írja a matematikaoktatásról [188]: "*Mit tanuljanak? Geometriai formákon és olvasáson kell kezdeni...Ezután tanuljanak aritmetikát, aztán földmérést nemcsak a táblán, hanem a mezőkön is. ...**Mindent, amit lehet ki kell mutatni és kézzelfoghatóvá tenni. A mechanikában minél több modellát kell mutatni, s velük megcsináltatni**, pl. hordóvéső, fűrészelő, sajtoló, szőlőrücskölő, szecskavágó ...masinákat, szekereket.*"

4.6.2. Egyetemünk történetéből vett példák

A Miskolci Egyetem és jogelődjeinek a története is tanulságos példákat tartalmaz, még akár a matematika oktatásának módszertani kérdéseivel kapcsolatosan is. **Kármán Tódor**, aki - egyetemünk jogelődjén - **a selmecbányai korszakban az alkalmazott mechanika tanáraként tanított, a műszaki felsőoktatás átalakításban nagyobb szerepet szánt a tudományoknak és elsősorban a matematika oktatásának**.

Fodor László, aki a Selmecbányai Akadémián lett tanszékvezető és 37 éven át megszakítás nélkül az is maradt, 1904-06 között a 3 éves akadémiából 4 éves főiskolává átalakuló intézet első főiskolai rektoraként írta [181]: "*A főiskola feladata eszerint lerakni azt az alapot, mely később gyakorlati ismereteknek biztos látással való megszerzésére és tudatos fejlesztésére képesít. Minél erősebb, minél szélesebb az alap, annál biztosabb, annál tágabb a rajtanyugvó épület:*

minél többet képes a tudományos kiképzés a főiskolán nyújtani, annál élesebb lesz a szemünk, tágabb a látókörünk, biztosabb az ítéletünk és termékenyebb az alkotóképességünk".

A soproni évek egy másik matematikus professzora, **Walek Károly** írja 1935-ös dékáni székfoglalójában a középiskolai matematika alapos elsajátításának szükségességéről:

" *A magasabb műveltség megszerzésének szempontjából összehasonlíthatatlanul fontosabb a középiskolák matematika anyaga, amely lényegileg az algebrát, trigonometriát és az analitikai geometriát tárgyalja, és három célt szolgál:*

- elsősorban logikus gondolkodásra, helyes ítéletre és szabatos kifejezésmódra szoktat, tehát pedagógiai segédeszköz az általános műveltség alapjainak elsajátítására;

- másodsorban a reális tudományok, a fizika, mechanika, kémia tanításához a mennyiségtani bizonyítások és eljárások módjait és meghatározásait nyújtja; vagyis mint segédtudomány vétetik igénybe;

- végül harmadszor, azokra a tanulókra való tekintettel, akik technikai pályára készülnek, a műszaki szakoktatás alapjait rakja le."

Érdekes adalék az, hogy pontosan ez a három terület, az algebra, trigonometria és analitikus geometria az, amelyet az Egyesült Államokban az egyetemeken az úgynevezett intermediate course-okban (átmeneti kurzus), az egyetemi anyag megkezdése előtt ismételnek.

A matematika szerepét a természettudományi és műszaki felsőoktatásban **Walek a matematikai igazságok kutatásában és a gyakorlati alkalmazhatóságban** látja:

"Áttérek most a felsőbb mennyiségtan méltatására, amelynek kötelező művelése és tanítása egyrészt a tudományegyetemek, másrészt a technikai főiskolák hatáskörébe tartozik. Mindkét fajta egyetemnek célja azonos, nevezetesen matematikai igazságok kutatása és abszolút érvényű törvényekbe való foglalása. Csakhogy az előbbieket elvileg kizárólag a tudomány öncélú fejlesztésére irányuló szándék vezeti, az utóbbiak tevékenységénél pedig a levezetett matematikai tételeknek a gyakorlati életre való szándék vezeti, az utóbbiak tevékenységénél pedig a levezetett matematikai tételeknek a gyakorlat alkalmazhatósága is különös figyelembe részesül."

Walek Károly az elvontabb matematika tanításának fontosságára is kitér:

"De nem végez kárbaveszett munkát az a mérnök sem, aki tudományszakunkkal, a matematikával a gyakorlati felhasználás hátsó gondolata nélkül, tisztán magáért a tudományért foglalkozik: mert eltekintve attól, hogy sohasem lehet tudni, hogy mikor lép valamely elvont mennyiségtani tétel a műszaki alkalmazás terére, az öncélú spekuláció élesíti és fokozza a matematikai gondolkodás készségének erőit, tehát azokat a lelki képességeket, amelyek a technikus sajátos ismeretvilágának alapjait és szellemi tartalmát megteremtik és táplálják. Ez a légkör - hogy úgy mondjam - a mérnök ózondús hegyi levegője és minél tovább tartózkodik ebben a légkörben, annál egészségesebben fejlődik a technikusi lelkülete."

4.6.3. A matematikatörténet lehetséges szerepe

A matematikatörténeti szempontok érvényesítése a műszaki felsőoktatásban szintén kiindulópontja lehet néhány egyéni vagy csoport projektnek, hiszen itt **fokozottan érvényesül a nyomasztó az aránytalanság a megtanítandó matematika anyag mennyisége és a rendelkezésre szánt idő között.** Ennek az időhiánynak nyilván a bizonyítások részbeni vagy teljes hiánya a következménye és így jelentősen sérül az a matematika tanításban kiemelten fontos cél, hogy a tárgy a műszaki hallgatókat a logikus gondolatmenetre is képezze. Érdekes megjegyezni, hogy a **régebben végzett hallgatók véleménye** éppen azt igazolja, hogy az egyetemen, főiskolán tanult matematika ismeretek tárgyi tudás részének csak kis hányadát használták, de **munkájuk során a matematika tanulás közben kialakított logikus gondolkodásnak vették nagyobb mértékben hasznát.**

Matematikatörténeti adatbázisok

. A matematika oktatási kérdéseknek és a matematika történetnek az összekapcsolására egy nagyon sikeres próbálkozás a **Mathematical MacTutor,** amit 1992-től kezdődően a Skóciai St Andrews-i Egyetemen nagyrészt **E. Robertson** és **J. O'Connor** munkájának köszönhetően fejlesztettek ki. Ez a matematika szoftver merőben eltér a megszokott computer algebra szoftverektől, mivel csupán a matematika oktatása szempontjából különlegesen fontos fejezetek vizualizálásával foglalkozik, ugyanakkor tartalmaz egy nagyon alapos matematika történeti részt **MacTutor History of Mathematics** [138] és ez interaktívan használható.

Ha egy adott matematikai kérdésnek matematika történeti vonatkozása is van (pl. **Taylor polinom** és **Taylor, McLaurin**, **Newton-Leibniz tétel** és **Newton, Leibniz**, **Fermat sejtés** és **Fermat**, stb.), akkor a felhasználó egyetlen kattintással elmerülhet a matematika történeti részben, olvashat az adott matematikus munkásságáról, munkatársairól. Ez a matematika történeti rész, amelynek magyar vonatkozásain az értekezés szerzőjének is lehetősége volt dolgozni 1994-1996 között a TEMPUS - JEP-06044 program keretében, jelenleg interneten is elérhető [138] és a kibővített formája több mint 1800 matematikus hosszabb- rövidebb életrajzát, munkásságának főbb adatait, referenciákat és képanyagot tartalmaz. Az internetes változat népszerűségére jellemző, hogy átlagban **300 000 alkalommal érik el naponta** külső felhasználók ezt a matematikatörténeti adattárat, és miként a jó tokaji bort, már hamisítják is, illetve másolják.

Igen népszerű például a matematikusok szülőhelyét ábrázoló térkép, a **Birthplace Map**, vagy az egy adott napon született, elhunyt matematikusok felsorolását lehetővé tevő oldal a **Mathematician of the day** [139]. Az említett periódusban a közös Tempus-JEP-06044 program keretében a szerző három ízben töltött 6-6 hetet a St Andrews-i Egyetemen, majd 1996-ban, a Tempus-IMG-95-H-2019 program vendégoktatójaként, egy szemeszteren keresztül tanította a **MacTutor Projects** című tárgyat.

A MacTutor magyar változata

. A St Andrews-i kollegák segítségével sikerült kidolgozni egy fordítóprogramot, a **Translator**-t, majd a matematikai MacTutor programcsomag egy rövidített magyar változatát, a **Hungarian MacTutor** [29]. Ezt azóta az angol eredetivel együtt használhatjuk a Miskolci Egyetemen olyan kisebb hallgatócsoportokkal, akik a matematika bizonyos fejezetei iránt érdeklődnek. **A magyar változatnak az a célja,** hogy azok a hallgatók, akik **angolul gyengébben vagy szinte semmit sem tudnak** anyanyelvükön megismerkedhessenek a programcsomag főbb alkalmazásaival és így képesek lehessenek a program egészének alkalmazására is.

A brüsszeli **European Academic Softwer Award** bizottsága 1994-ben **a Mathematical MacTutor programcsomagot első díjra érdemesnek találta** és ebben bizonyos mértékű szerepe az első magyar változatnak és a fordítóprogramnak is volt. A MacTutor programcsomag magyar és angol változatát azóta is használjuk a Miskolci Egyetemen, részét képezi a **CEEPUS H-127-es hálózat Aktív Módszerek a Matematika Oktatásában** című együttműködési programjának is [89].

Szélesebb körű használatának csupán az az akadálya, hogy többszöri próbálkozásaink dacára sem sikerült további Macintosh számítógépeket használatba állítanunk a Matematikai Intézetben, bár **korlátlan számú felhasználói joggal** rendelkezik a Miskolci Egyetem és Matematikai Intézete az említett Tempus együttműködésnek köszönhetően.

A magyar változat felhasználói joga szintén a Miskolci Egyetemé.

A Special Curves fejezet

. Külön érdekességként említhető a Mathematical MacTutor internetes változatának **Special Curves** [169] című fejezete, ami interaktív Java applet-ek alkalmazásával mintegy 70-80, **a műszaki oktatásban is gyakran használt görbe típust ábrázol**. Az adott görbéket explicit, implicit, paraméteres és polár koordinátás megadási módjuk közül a leginkább jellemző formában adja meg, az internetes program ábrázolja az adott görbéket, sőt kirajzolja a görbékhez tartozó úgynevezett kísérő görbéket is, mint például evoluta, involuta, pedálgörbe, inverz-pedálgörbe, stb., tehát **kifejezetten a műszaki alkalmazások szempontjai szerint érdekes görbéket**.

4.6.4. További nevelési célok

A matematika oktatása során **további nevelési célok is megvalósulnak** [65], ezek közül a legfontosabbak:

- Szociális és közösségi magatartás és munkaformák gyakorlása
- Esztétikai, etikai nevelés:
- Céltudatos, önálló munka, önbizalom megerősítése

Ez a célok már azért sem hanyagolhatók el, mivel a hallgatók többsége ekkor kerül ki a megszokott, addigi környezetéből.

Az egyetemi oktatásnak ez utóbbi céljai természetesen nem csak a matematika oktatása során valósulnak meg, de mivel hatásaikban jelentősen befolyásolják az elsődleges cél megvalósíthatóságát, mégis kiemelten fontosak, ráadásul ezeknek a céloknak a megvalósulását még az elsőnél is sokkal nehezebb mérni.

4.7. A matematikaoktatás céljainak közvetítése

A matematika oktatása egy tervezett tevékenység, a főbb oktatási formák az előadás, gyakorlat, konzultációk és vizsgáztatás.

A **matematikaoktatás céljai az oktatott tárgyakon keresztül valósulnak meg**, ezért elsőrendű fontosságú ezeknek a tárgyaknak a célját világosan, pontosan leírni. Ez a leírás a tanmenet, a hallgató elsődleges (de rendszerint el sem olvasott) információja a tárgyról.

Elemezzük röviden a **hagyományos** formát.

Ez rendszerint **tartalmazza a tárgy főbb fogalmait, a tételek, szabályok, eljárások, fejezetek címét** - sokszor a diák számára érthetetlen szaknyelven- **azaz a tárgy tartalmi feltételeit** - heti bontásban, tartalomjegyzékszerűen - adja meg. Gyakori a zárthelyi dolgozat hetének megjelölése is.

Szokásos még **a tárgy formai követelményeit** is összegezni néhány sorban, mint: "*Az aláírás megszerzésének feltétele mindkét zárthelyi legalább elégséges szintű teljesítése*", vagy " *A sikertelen zárthelyik pótlásának feltétele...*",

"*Vizsgára az állhat, aki.., ...aki...nem...annak az aláírás végleges megtagadását javasoljuk*"

Ezek mind adminisztratív jellegűek és nyilván sok fontos információt tartalmaznak, hiszen hosszú évek tapasztalat során kristályosodott ki ez a forma. Mégis a diák azt érezheti belőle, hogy a **követelmény fenyegetés**, hiszen **nem a tudást jelöli meg célként, hanem a formát**, a zárthelyi elégséges teljesítését, felcserélve a célt egy mérési, ellenőrzési forma eredményével. Sarkítva:

"Nem az a cél, hogy a hallgató ismerje az anyagot, és alkalmazni is tudja, hanem az, hogy valamilyen úton sikerüljön a zárthelyi dolgozata".

Természetesen ezt nem így gondoljuk, de talán így mondjuk. Ennek mélyebb okát talán a matematikaoktatáson, sőt a mérnökképzésen túl kellene keresni, és a felsőoktatás "tömegessé válása" jelenségre adott kényszerválaszok közé sorolandó. **Az említett formai követelmény**, az aláírás megszerzésére vonatkozóan **azt is közvetíti** - akarva- akaratlanul - a hallgató felé, **hogy elegendő a minimális tudás.** Régebbi gyakorlat szerint a félévközi munka és a kitűnő zárthelyik alapján az oktató "megajánlott" egy jeles, vagy jó vizsgajegyet, amit a hallgató elfogadhatott. Tény, hogy ennek volt bizonyos húzóereje, de az esetek igen kis száma miatt nem volt számottevő. Ennek a "megajánlott jegy" rendszernek és **a félévközi munka súlyának a növelésére vezette be az értekezés szerzője a további fejezetekben leírt pontrendszert.**

Az utóbbi években kialakult igény szerint **ezeket a tartalmi leírásokat a tárgy oktatásának valódi céljaival kell helyettesíteni, cselekvési, képességi szintek megjelölésével.**

Ezekben kerülni kell az általánosságokat, mint "a középiskolai anyag alapos ismerete", "fejlett számolási készség", ezek helyett konkrétumok kellenek, amik a hallgatóknak pontos információt jelentenek, mint pl. "A másodfokú egyenletek megoldó képletének ismerete, alkalmazásának képessége" vagy "Első és másodfokú egyenletekre vezethető feladatokból az adott egyenletek felismerésének és felírásának képessége".

Álljon itt egy példaként a Core Curriculum, [92], egy rövid részlete, és annak fordítása:

"**Stationary points, maximum and minimum values**
As a result of learning this material you should be able to:
- use the derived function to find where the function is increasing or decreasing
- define a stationary point of a function
- distinguish between a turning point and a stationary point
- define a point of inflection
- locate a turning point using the first derivative of a function
- classify turning points using first derivatives
- obtain the second derived function of simple functions
- classify stationary points using second derivatives."

azaz
" **Sztacionárius pontok és szélsőértékek**
A fejezet elsajátítása után a hallgató képes kell legyen:
- felhasználni a függvény deriváltját a függvény növekvő és csökkenő szakaszainak megtalálására
- a sztacionárius pont fogalmának a meghatározására
- megkülönböztetni a visszatérési pontot a sztacionárius ponttól
- az inflexiós pont meghatározására
- alkalmazni a deriváltat a függvény visszatérési pontjainak megtalálására
- osztályozni a visszatérési pontokat felhasználva az első deriváltat
- egyszerű függvények másodrendű deriváltjának kiszámítására
- a sztacionárius pontok osztályozására a második derivált segítségével."

5. Fogalomalkotás

A **fogalom** az a jelentéstartalom, amelyet egy szó magában foglal, elvonatkoztatás útján jön létre a dolgokról szerzett képzetekből. A gondolkodás természetes ösztöne a képzetanyag rendezése, az összetartozó **dolog-képzetek** összevonása. Ugyanakkor a gondolkodás során letisztulnak a csupán szemléleti elemek. Kialakul a **fogalomképzet**, ami már nem azonos egyik dologképzettel sem, az azokat jelző szavaktól is eltávolodik. A fogalomképzet a további gondolkodási folyamat eredményeként **fogalomdefinícióvá** válik. Ez a fogalomalkotás három szakasza. A gondolkodás verbalizációjaként kialakul a fogalom szimbólumául szolgáló szó, annak írott vagy kiejtett formája lesz a memóriacímke, amivel szükség szerint előhívható a fogalomképzet vagy a fogalomdefiníció. Bruner reprezentációelmélete szerint [65] a gondolkodás és így a matematikai fogalomalkotás is három síkon megy végbe, ezek rendre az enaktív reprezentáció vagy materiális sík, az ikonikus reprezentáció és a szimbolikus reprezentáció.

A fogalomnak van tartalma és terjedelme.

Tartalma az általánosított jegyek összessége, a fogalomdefiníció, **terjedelme** a fogalomképzet által gondolt dolgok összessége. A fogalom tartalma és terjedelme között fordított arány van, bővebb tartalom esetén kisebb a terjedelem és szűkebb tartalomhoz nagyobb terjedelem tartozik. A matematikában például a konvergens sorozat fogalma bővebb tartalommal és következésképpen kisebb terjedelemmel rendelkezik, mint a sorozat fogalma, ez utóbbi esetén szűkebb a tartalom, de nagyobb a terjedelem, vagyis például "több" sorozat van mint konvergens sorozat, nem minden sorozat konvergens is egyben.

5.1. A fogalmak tanítása

Az oktatás egyik lényeges kérdése az **irányított fogalomalkotás**, **a fogalomképzés** (fogalmak tanítása).

Két fázisa különböztethető meg, **a fogalom bevezetése és a fogalom megerősítése**, bár a gyakorlatban a két fázis egybefonódhat.

A **fogalom bevezetésének** három módja lehetséges, **az induktív, a deduktív és a konstruktív út**.

Az **induktív út** során ismert példák elemzése során a közös tulajdonságok kiemelésével a hallgatók absztrakció révén jutnak el az általánosításhoz.

A **deduktív úton** az előadó egy fölérendelt fogalom (genus proximum) és a meghatározó tulajdonságok (differentia specifica) segítségével megadja a definíciót, a hallgatók elemzik azt, majd példákat keresnek és adnak a fogalom tartalmára.

A **konstruktív út** során a tanár vezetésével a fogalomnak egy vagy több reprezentánsát állítják elő ("állatorvosi ló"), ezt az eljárást általánosítva jutnak el a definíció megfogalmazásához.

5.1.1. Az induktív út

Az induktív út előnyei

. - jelentős mennyiségű önálló munkát kíván a hallgatóktól

- jobban hozzájárul az általános szellemi képességek, nyelvi-logikai képességek fejlesztéséhez

- már a definíció előtt kialakulhat a helyes fogalom-képzet,

- lehetővé teszi, hogy a hallgatók önállóan fogalmazzák meg a fogalomdefiníciót.

Az induktív út hátrányai

. - időigényesség

- csak akkor célszerű alkalmazni, ha elegendő számú példát és ellenpéldát ismernek a hallgatók

- nagyobb előkészítést igényel az előadó részéről, fárasztóbb lehet a hallgatók inaktív részének.

5.1.2. A deduktív út

A deduktív út előnyei

. - időmegtakarítás

- jól felkészülnek a hallgatók a jegyzethasználatra.

A deduktív út hátrányai

. - olyan általános szellemi képességek, mint az összehasonlítás, absztrakció háttérben maradnak

- a módszer alkalmazása feltételezi a fölérendelt fogalom és a meghatározó tulajdonságok ismeretét.

5.1.3. A konstruktív út

A konstruktív út az induktív és deduktív út között van, azok előnyeit részben egyesíti, hátrányait tompítja.

5.1.4. Példa az induktív útra

A fizikából ismert a középsebesség fogalma, ha a mozgó pont $t \longmapsto S(t)$ megfeleltetés szerint mozog, ahol t az időt, $S(t)$ a t időpontig megtett utat jelöli (egy kezdeti t_0 időpontban történt indulást feltéve), akkor két adott, t_1 és t_2 időpont között a mozgó pont középsebessége

$$v_k = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Ha a mozgás egyenletes sebességgel történik, akkor az előbbi v_k középsebesség egyben a mozgó pontnak a pillanatnyi sebességét is kifejezi, egy t időpontban a pont $v(t)$ sebességére igaz, hogy $v(t) = v_k$. A gyakorlatból viszont a legtöbb tárgy, pont nem állandó sebességgel mozog, hanem létezik egy $t \longmapsto v(t)$, megfeleltetés, sőt a változó sebességgel mozgó pont mozgására egy másik mennyiség, a gyorsulás is jellemző, tehát létezik egy $t \longmapsto a(t)$ megfeleltetés is.

A pillanatnyi sebesség jól közelíthető a középsebességgel, amennyiben a vizsgált időtartam elég rövid ahhoz, hogy azon belül a sebesség "lényegesen" ne változzon. Tehát szokás mondani, hogy ha t_0 időponthoz "elég közel van" t_1 és t_2 akkor

$$v(t_0) \approx \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Ezt még pontosabban megfogalmazhat az út $t \mapsto S(t)$ függvényből képezett differenciahányados határértékeként a t_0 pontban következőképpen:

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

Hasonlóképpen a középgyorsulás (a t_1 és t_2 időpontok között)

$$a_k = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

és a pillanatnyi gyorsulás viszonya, a t_0 időponthoz "elég közeli" t_1 és t_2 esetén:

$$a(t_0) \approx \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Ez a pillanatnyi gyorsulás pontosabb megfogalmazásához vezet, ha a $t \mapsto v(t)$ sebességfüggvényből képezett differenciahányados t_0 pontbeli határértékével értelmezzük:

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

5.2. A fogalom megerősítése

A fogalmak bevezetése rendszerint nem öncélú, további fogalmak rendszerébe épülhet be, de egy fogalom, vagy fogalomcsoport bevezetése után, annak megerősítését, rögzítését szolgálják a következő tevékenységek:

1. Olyan szituációk elemzése, melyeket a fogalom jól tükröz vissza, tulajdonságok kiemelése, motivációs feladatok

Példák:

- határérték fogalmához vezető tizedes tört közelítés, ugyanakkor ellenpéldaként a lépcsős vonal és egyenes szakasz hossza , amely "nem közelít egymáshoz".
- Differenciálhányados fogalmához vezető fizikai és geometriai kérdések

2. Egy adott fogalommal kapcsolatban különböző definiálási lehetőségek megkeresése, definíciók ekvivalenciája, adott definíciók felülvizsgálata, értékelése

Példák:

- vektorok skalár szorzatának megadása különböző módon, a definíciók közti kapcsolat alkalmazása
- vektorok vektoriális szorzatának abszolút értékére adható definíciók és alkalmazásuk
- sorozatok konvergenciájára, és határértékére adott definíciók, egyenértékűségük, használatuk
- a másodfokú egyenlet megoldása a valós számokon, és a komplex számok körében
- a valós számok rendezése ($\leq$ *reláció*) nem vihető át a komplex számok halmazára.

3. Egy adott fogalommal kapcsolatos példák és ellenpéldák adása, fogalomrealizálás

Példák:

- Leibniz kritérium sorok konvergenciájára
- függvény és primitív függvény társítása

4. Fogalomazonosítás, szituációk felülvizsgálata abból a szempontból, hogy egy adott fogalmat reprezentálnak-e ?
Példák:
- Integrálösszegek, határozott integrál

5. Egy fogalom beágyazása egy fogalomrendszerbe, fogalomáltalánosítás, fogalomspecializáció
Példák:
- függvények-relációk
- függvény, injektív, szürjektív, bijektív függvények,
- gyökvonás a komplex számok esetén

6. Egy definíció következményeinek megfogalmazása
Példák:
- mátrix determinánsának meghatározása és tulajdonságai
- trajektóriák, ortogonális trajektóriák és vonatkozó differenciálegyenleteik

Az, hogy az alapfogalmak és elemi műveletek pontos ismerete mennyire fontos a mérnökképzésben a következő fejezet is szemlélteti.

5.3. Fogaskerekek áttételének számítása

A fogaskerekek működésének kérdéséhez közelíthetjük a hallgatókat az olyan egyszerű matematika műveletek tulajdonságainak megerősítésével, mint törtek szorzása- osztása, amivel sajnos néha nehézségeket tapasztalhatunk. Itt "komoly" szerepet töltenek be, a hallgató érezheti a közvetlen művelet- alkalmazás kapcsolatot.

Az alkalmazás leírása

Négy fogaskerék fogszáma rendre $z_1 = 20$, $z_2 = 25$, $z_3 = 30$, $z_4 = 32$. Ezek közül három, tetszőlegesen kiválasztott fogaskereket összekapcsolunk, és azt vizsgáljuk, hogy az első kerék meghajtásával hogyan alakul a többi mozgása [121]. A z_a, z_b fogaskerekek közti áttételt, a fogaskerékpár áttételét az $i_{a,b}=\frac{z_a}{z_b}$ törttel definiáljuk. Ennek a törtnek a reciprok értéke a $\frac{z_b}{z_a} = \frac{\omega_a}{\omega_b}$, ahol ω_a illetve ω_b rendre a két fogaskerék szögsebessége. Meg kell jegyeznünk, hogy a fogaskerekek összekapcsolása esetén a forgó mozgás iránya megváltozik. A többszörös összetétel esetén a fogaskerék kapcsolás egy érdekes tulajdonságára világít rá a matematikai leírás. Ha a z_a, z_b fogaskerékpárt összekapcsoljuk a z_b, z_c fogaskerékpárral, akkor a három fogaskerék teljes áttétele független lesz a közbeeső fogaskerék fogszámától, azaz csak az első és a harmadik fogaskerék fogszámától függ, de a forgás iránya ebben az esetben megegyezik az első és harmadik fogaskeréknél.

Valóban **a teljes áttétel**

$$i = i_{a,b} i_{b,c} = \frac{z_a}{z_b}\frac{z_b}{z_c} = \frac{z_a}{z_c}.$$

Tehát a közbeeső fogaskerék fogszáma nem befolyásolja magát az áttételt, csupán a forgás irányát. Ugyanakkor műszaki okokból a meghajtásoknál azért is alkalmaznak többszörös áttételt, mivel az összekapcsolt fogaskerekek esetén nem előnyös az, ha túl nagy a fogszámaik közti eltérés. Ha tehát nagy az áttét, akkor több fogaskerék közbeiktatása a célszerű. Ugyanakkor az a tény, hogy a fogaskerekek összekapcsolásakor páros számú fogaskerék esetén azonos, páratlan számú fogaskerék esetén ellentétes a forgás iránya, lehetővé teszi pl. a gépkocsik sebességváltójának működtetését. Egyszerű kombinatorikai feladatként megvizsgálhatjuk, hogy a fent említett négy fogaskerék közül három-három felhasználásával milyen áttételek valósíthatók meg. Mivel a három fogaskerék összekapcsoláskor számít a sorrend, az összes lehetséges kiválasztás számát a négy elem harmadosztályú variációinak száma adja meg, azaz $V_4^3 = 4.3.2 = 24$, ugyanakkor az előbbiek értelmében csak az első és harmadik fogaskerék kiválasztása számít, tehát a három fogaskerék összekapcsolása esetén is csak a következő $V_4^2 = 4.3 = 12$ különböző áttétel lehetséges.

$$i_{1,2} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5},\ i_{1,3} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3},\ i_{1,4} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8},\ i_{2,1} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4},$$

$$i_{3,1} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2},\ i_{4,1} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5},\ i_{2,3} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6},\ i_{2,4} = \frac{25}{32},$$

$$i_{3,4} = \frac{30}{32} = \frac{15}{16},\ i_{3,2} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5},\ i_{4,2} = \frac{32}{25},\ i_{4,3} = \frac{32}{30} = \frac{16}{15}.$$

A fogalmak oktatásának és megerősítésének az összetett folyamatát a következőkben néhány példán, elsőként a függvény fogalmán keresztül tekintjük át részletesebben. A függvény fogalma nem csak elsőrendű fontosságú a matematika oktatásában és ezen belül a mérnökök matematikaoktatásában, de gyakran tapasztaljuk, hogy "baj van vele". Az egyike azoknak a fogalmaknak, amelyeket a hallgató ismerni vél a középiskolai tanulmányaiból, ezért csak "félszemmel" figyel ennek a kérdésnek az oktatásakor, ugyanakkor a függvényeket az egyetemi oktatásban a középiskolai előfordulásuknál sokkal általánosabb fogalomként használjuk, lásd karakterisztikus függvény, skalárfüggvény, vektorfüggvény, valós függvény, komplex függvény stb.

5.4. Függvény fogalmának áttekintése

A függvény fogalma már a középiskolai oktatásban is jelen van, de a fogalom pontos ismerete helyett az egyetemi, főiskolai tanulmányaik megkezdésekor a hallgatók a függvényt a valós függvény fogalmával azonosítják, sőt sokan annak is csak a grafikus képével, azon belül az első és másodfokú függvényekről és esetleg az alapvető trigonometriai függvényekről tudnak. A függvény fogalmának az áttekintése és az alapvető fogalmak tisztázása a műszaki egyetemeken azért is fontos, mert azt a hallgatók nagyon sokféle formában és sokszor eltérő megközelítésben látják viszont későbbi matematika és műszaki tanulmányaik során [18].

5.4.1. Alapvető fogalmak

Halmazok, elemek, halmazok megadása

. Idézzük fel a halmaz, az elem és a hozzátartozás fogalmakat, amelyek alapfogalmak, nem meghatározással, hanem példákon keresztül, induktív úton ismerhetők meg. Az alapfogalmak a tanulás során intuitív fogalom-képzetek formájában jelennek meg, és nagyon fontos a megfelelő számú példa, amelyek lehetőleg minél szélesebb körben szemléltetik a fogalom terjedelmét. Az axiomatikus és naiv halmazelmélet és a kettő közt felmerülő ellentmondások kérdése a mérnöki oktatásban elhallgatható, hiszen a oktatás adott szintjén a spiralitás elve érvényesülhet, a hallgatók egyre többet érthetnek meg egy- egy fejezetből.

A halmazok és elemeik közti összefüggést a hozzátartozás reláció fejezi ki, egy adott e elemre és egy adott H halmazra pontosan az egyik igaz a következő két állítás közül:

(a) $e \in H$, ekkor azt mondjuk, hogy az e elem hozzátartozik a H halmazhoz, rövidebben e eleme H-nak

(b) $e \notin H$, ekkor azt mondjuk, hogy az e elem nem tartozik a H halmazhoz, röviden e nem eleme H-nak

A halmazok megadhatók:

- tulajdonságaik leírásával, pl.: Legyen D a tízes számrendszer számjegyeinek halmaza. Ugyanezt szokás még $D = \{x \mid x \textit{ a tízes számrendszer számjegye}\}$ alakban írni.

- elemeik felsorolásával általában a kevés elemet tartalmazó véges halmazok adhatók meg, pl. $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, de ez utóbbi lehetőséget néhány egyszerű végtelen halmaz megadására is szokás alkalmazni, például.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}, \mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Néhány halmaznak külön neve is van, az előbbi $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza. Külön figyelmet érdemel az üres halmaz, jele $\varnothing$ vagy $\{\ \}$, a számítástudományban a [ ] is ezt jelöli.

A további fogalmak és a legfontosabb halmazműveletek már deduktív úton is megadhatók, az addig kialakított intuitív fogalmakra támaszkodva.

Részhalmaz

. **Meghatározás.** *Azt mondjuk, hogy az A halmaz részhalmaza B halmaznak, ha A minden eleme egyben B-nek is eleme. Jelölése $A \subset B$.*

Érdekes megjegyezni, hogy az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza, és egy halmaz önmagának is részhalmaza, vagyis bármely A halmazra igaz, hogy $\varnothing \subset A$, valamint $A \subset A$. Ezek a nem valódi részhalmazok, a többi (ha van ilyen) valódi részhalmaz.

Halmazok metszete, egyesítése és különbsége

. Az egyszerűség kedvéért ezeket a műveleteket adott A és B halmazok esetén adjuk meg a következők szerint:

- az A és B halmazok metszetét $A \cap B$ jelöli, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$,

- az A és B halmazok egyesítését $A \cup B$ jelöli, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$,

- az A és B halmazok különbségét $A \backslash B$ jelöli, $A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$.

Példa. Adottak az A ésB halmazok

$$A = \{2, 3, 5\}, B = \{1, 3, 7\}.$$

Ekkor $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{2, 3, 5, 7\}$, és $A \setminus B = \{2, 5\}$, .$B \setminus A = \{1, 7\}$
Megjegyzések.

1. Ezeknek a fogalmaknak a rögzítését, elmélyítését szolgálhatják a halmazműveletek tulajdonságainak tanulmányozása:

$$A \cap B = B \cap A,\ A \cup B = B \cup A,\ \text{de } A \setminus B \neq B \setminus A;$$

$$A \cap A = A,\ A \cup A = A,\ \text{de } A \setminus A = \varnothing;$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing,\ A \cup \varnothing = A,\ A \setminus \varnothing = A,\ \varnothing \setminus A = \varnothing;$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,,\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,.$$

2. Ez a tanulmányozás új fogalmak bevezetését is megkönnyíti:
- Ha $A \cap B = \varnothing$, akkor A és B idegen (diszjunkt) halmazok.

3. A tulajdonságok viszonyíthatók az előzőekben megadott részhalmaz fogalomhoz:
- Ha $A \subset B$, akkor $A \cap B = A$ és $A \cup B = B$, de ez a három állítás tulajdonképpen egyenértékű egymással, azaz bármelyikből következik a másik kettő.

Descartes szorzat

. **Fogalmak.** Bizonyos esetekben használjuk a *rendezett elempár* fogalmát, az a és b elemek rendezett elempárjának a jele (a, b). Jegyezzük meg, hogy $(a, b) \neq (b, a)$ kivéve ha $a = b$. Hasonlóan vezethető be a *rendezett elem-hármas*, és a *rendezett elem n-es* fogalma, az a, b, c elemek rendezett elem-hármasát (a, b, c), az $a_i (i = 1, 2, ..., n)$ elemek rendezett elem n-esét $(a_1, a_2, ..., a_n)$ jelöli.

Meghatározás. *Az A és B halmazok Descartes szorzata az $A \times B$, ahol*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}\,.$$

Hasonlóan három, vagy több halmaz Descartes szorzata

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}\,,$$

illetve

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1, 2, ..., n\}\,.$$

Megjegyzés. Ha az adott halmazok nem különböznek, akkor használatosak a következő jelölések:

$$A \times A = A^2, \quad A \times A \times A = A^3, \text{valamint } \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n} = A^n.$$

Példa. Adottak az A, B és C halmazok

$$A = \{2, 3, 5\}, B = \{1, 7\}, C = \{0, 4\},$$

ekkor

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(2,1),(2,7),(3,1),(3,7),(5,1),(5,7)\}, \\ B \times A &= \{(1,2),(7,2),(1,3),(7,3),(1,5),(7,5)\}, \\ B^2 &= \{(1,1),(1,7),(7,1),(7,7)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} A \times B \times C = \\ \{(2,1,0),(2,7,0),(3,1,0),(3,7,0),(5,1,0),(5,7,0), \\ (2,1,4),(2,7,4),(3,1,4),(3,7,4),(5,1,4),(5,7,4)\} \end{gathered}$$

Relációk

. **Meghatározás.** *Legyen A és B két halmaz. Jelölje $a\boldsymbol{\rho}b$ azt, hogy az $a \in A$ és $b \in B$ elemek $\boldsymbol{\rho}$ relációban vannak. Az A és B halmaz elemei között egy $\boldsymbol{\rho}$ reláció akkor ismert, ha pontosan tudjuk, hogy melyek azok az elemek, amelyek $\boldsymbol{\rho}$ relációban vannak, vagyis ha pontosan tudjuk, hogy melyek azok az összetartozó (a, b) elempárok, amelyekre $a\boldsymbol{\rho}b$.*

Ezeknek az elempároknak az $S_{\boldsymbol{\rho}}$ halmaza, az $A \times B$ egy részhalmaza lesz a reláció tartóhalmaza, az

$$S_{\boldsymbol{\rho}} = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a\boldsymbol{\rho}b\} \subset A \times B.$$

Az A és B halmazok elemei közti, $S_{\boldsymbol{\rho}}$ tartóhalmaz által leírt, $\boldsymbol{\rho}$ relációt röviden $(A, B, S_{\boldsymbol{\rho}})$, vagy $(A, B, \boldsymbol{\rho})$ jelöli.

5.4.2. Függvények

Meghatározás. *Két halmaz, az értelmezési tartomány (az első halmaz) és az értéktartomány (a második halmaz), valamint az elemeik közti reláció, a megfeleltetés, pontosan akkor függvény, ha az alábbi két feltétel egyidejűleg teljesül:*

(i) Az értelmezési tartomány minden elemének megfelel az értéktartománynak legalább egy eleme.

(ii) Az értelmezési tartomány minden elemének legfeljebb egy elem felel meg az értéktartományból.

Megjegyzés. Az előbbi két pont, (i) és (ii) helyett azt is mondhatnánk röviden, hogy az értelmezési tartomány minden elemének pontosan egy elem felel meg az értéktartományban, de mint látni fogjuk érdemes megkülönböztetni a megfeleltetés két tulajdonságát, mintegy "alulról" és "felülről" is behatárolni azt, mert ez két feltétel a szürjektív és injektív függvények meghatározásának alapja. Ez a két feltétel nem azt a tartalmat fedi le, ami a deduktív fogalomalkotás esetén genus proximum és differentia specifica néven ismert.

A függvények fogalma, pontosabban a megfeleltetés körülírása sokféleképpen közelíthető meg, de ezek közül a legelterjedtebb, és talán a leghasznosabb a relációkon [140], és a Descartes szorzaton alapszik.

Különböző jelölések, elnevezések

. Az alábbiakban felsoroljuk a függvények esetén leggyakrabban használt jelöléseket, elnevezéseket.

Általában az A értelmezési tartomány elemeinek az f megfeleltetéssel a B értéktartomány elemeit hozzárendelő függvényt $f : A \to B$, vagy $A \overset{f}{\mapsto} B$ jelöli. Ha az $x \in A$ független változónak a megfelelője az $y \in B$, akkor ezt $x \overset{f}{\mapsto} y$, vagy $x \mapsto y$, jelöli és azt mondjuk, hogy x-nek a képe y, vagy y az x képe (képeleme). Egyes szerzők az $y = f(x)$ jelöléssel fejezik ki ugyanezt a tényt, és azt mondják, hogy y a függvénynek az x változóban felvett értéke, röviden a függvény értéke x-ben.

Példa. Az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2,$$

vagy az

$$\mathbb{R} \overset{f}{\mapsto} \mathbb{R}, x \overset{f}{\mapsto} x^2$$

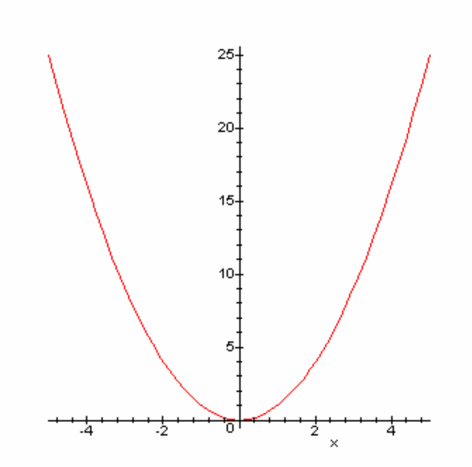
ugyanazt a függvényt jelöli, de szokás, az értelmezési tartomány és az értéktartomány megadása után, egyszerűen csak az $f(x) = x^2$, vagy az $x \mapsto x^2$ függvényről beszélni, bár ez utóbbi maga a megfeleltetés.

Gyakori fogalomzavar a függvény gráfja és a függvény grafikus képe, a függvényábra körül, ezt a két fogalmat a hallgatók gyakran felcserélik, nem használják megfelelőképpen. Az itt használt függvény gráfja kifejezés a függvényreláció tartóhalmazának szokásos elnevezése, és nem tévesztendő össze a gráfokkal, mint csúcsokból és irányított, vagy irányítatlan élekből álló alakzatokkal, amelyeknek a meghatározása a függvények segítségével a szokásosnál pontosabban is megadható, lásd későbbiekben a Függvények néhány további alkalmazása c. fejezetet.

Meghatározás. *A függvény gráfja az értelmezési és értéktartomány Descartes szorzatának az a része, $G_f \subset A \times B$, amely az összes, a függvény megfeleltetés szerint egymáshoz rendelt x független változót és y képelemet rendezett (x, y) elempárként tartalmazza. Az $y = f(x)$ jelöléssel élve:*

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

Azoknak a függvényeknek az esetében, amelyeknek értelmezési és értéktartománya is a valós számok részhalmaza, ez a függvénygráf sok esetben szemléltethető egy függvényábrával (ez a függvény grafikus képe), rendszerint egy



görbével, amely vázlatosan ugyan, de lehetőséget adhat arra, hogy a függvényre jellemző független változó- képelem megfeleltetést vizuálisan is el tudjuk képzelni. Ennek a függvényábrának többféle elnevezése használatos (függvény grafikus képe, függvény képe, rajza, görbéje stb.), és az analízis oktatása során gyakran felmerül a függvény tanulmányozása (függvény menete, függvény-diszkusszió), és a függvényábra vázlatos elkészítésének igénye.

Példák

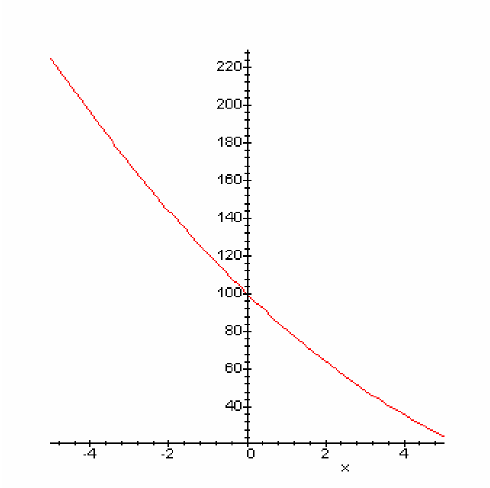
1.Példa. Az előbbiekben megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, röviden $x \mapsto x^2$ gráfja:

$$G_f = \left\{(x, x^2) \mid x \ \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

és ennek a függvénynek az ábrája a csak egy véges részt hivatott "szemléltetni", (az alábbi 4 függvényábrát a szövegszerkesztő beépített, "automatikus" funkciója készítette):

$$x \mapsto x^2$$

2. **Példa.** Ez a szemléltetés, főleg ha számítógépi programot használunk, nem biztos, hogy a függvénynek a "természetét" a legjellegzetesebb pontokban ábrázolja. Például az $x \mapsto (x - 10)^2$ függvényábrát a program a következőnek "látja":



$$x \mapsto (x-10)^2$$

ami nyilván nem hibás, csak semmitmondó, hiszen ez a második függvény az előzőnek a jobbratolása, és nyilván a program a függvénynek egy monoton szakaszát ábrázolja, ami nem jellemző a parabola - amúgy ismertnek mondható - alakjára. A hallgató számára viszont, aki esetleg nem ismeri ezt, azzal a veszéllyel járhat egy ilyen "beépített funkció" használata, hogy téves következtetésre juthat.

Ráadásként ez a függvényábra még a valós változójú valós függvények esetében sem mindig készíthető el.

3. Példa. A

$$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha az } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{ha az } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

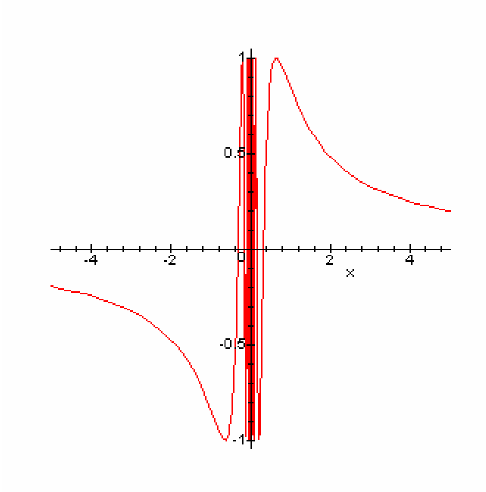
ún. Dirichlet függvény képének csak bizonyos pontjait tudjuk megrajzolni, hiszen a függvényértékek "sűrűn" lefedik az $y = 0$ és $y = 1$ egyeneseket.

4. Példa. Az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{ha az } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha az } x = 0 \end{cases}$$

képe "csak" az origó környezetében nem rajzolható meg, még a gép "igyekezete" ellenére sem, a számítógépgép diszkrét aritmetikája miatt.

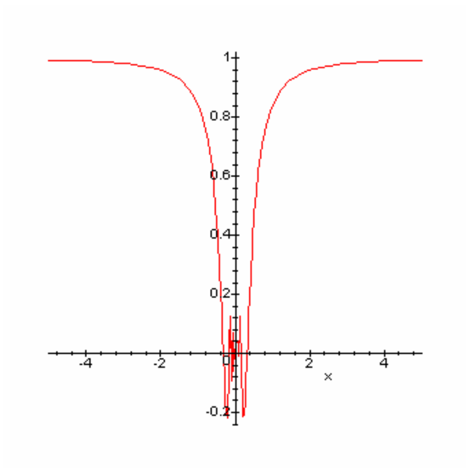
$$\sin \frac{1}{x}$$



5. Példa. Az előbbi két példában a függvényábra elkészítésének lehetetlensége abból is adódik, hogy ezek a függvények nem folytonosak (az egyik sehol sem az, a másik csak az origóban), de ha az előző példának a mintájára az origóban is folytonos

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{ha az } x\neq 0 \\ 0 & \text{ha az } x=0 \end{cases}$$

függvényt tekintjük, akkor a számítógép által "megrajzolt" ábrákon az origó környékén az egyre "pontosabb függvényábrán" azt látjuk, hogy minél apróbb részleteket nagyítunk ki, a függvényábra annál "kaotikusabban" viselkedik.



$x\sin\frac{1}{x}$

A **Plotting curves c.** MT- projekt alkalmazása során a hallgatók kifejezetten ezeket a kérdéseket tanulmányozhatják a MacIntosh számítógépeken alkalmazható Mathematical MacTutor szoftver segítségével, lásd a CD-mellékletben a MacTutor projects könyvtárat.

A függvény fogalmának pontosítása

. **Meghatározás.** *Az* (A, B, G_f) *relációt, az* A *halmazbeli változójú* B *halmazbeli értékekkel rendelkező* f *függvénynek nevezzük, ha egyidőben teljesül a következő két feltétel:*

(i) Bármely $x \in A$ *független változó esetén létezik legalább egy* $y \in B$*, amelyre* $(x, y) \in G_f$.

(ii) Bármely $x \in A$ *független változó esetén legfeljebb egy olyan* $y \in B$ *létezik, amelyre* $(x, y) \in G_f$.

Megjegyzés. Az (A, B, G_f) jelölés helyett szokás még a következő jelölések egyikét használni:

$$(A, B, f), \; f : A \to B, \text{ vagy } A \overset{f}{\mapsto} B.$$

Példa. Vegyük az $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmazokat, valamint az $A \times B$ Descartes szorzatuknak egy részhalmazát, a

$$G_f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \subseteq A \times B$$

Az (A, B, G_f) hármas egy függvény, aminek az értelmezési tartománya A, értéktartománya B. Ugyanez a függvény még megadható az (A, B, f), $f : A \to B$, vagy $A \overset{f}{\mapsto} B$ alakok egyikével, ahol $f(x) = x^2$, $x \overset{f}{\mapsto} x^2$, vagy csak egyszerűen $x \mapsto x^2$.

Megjegyzés. A függvények megadására használt különböző alakok más és más szemléletet hivatottak hangsúlyozni, ezért alkalmazásuk a félreérthetőség és a hibák elkerülése végett fokozott körültekintést igényel, lásd **Kósa András:** *Vírusok a matematikában* c. könyvét.

A függvényfogalom mélyebb megértéséhez célszerű a függvények egyenlőségét, kiterjesztését, és leszűkítését tanulmányozni.

Függvények egyenlősége, kiterjesztése, és leszűkítése

. **Meghatározás.** *Két függvény, az* (A_1, B_1, G_{f_1}) *és* (A_2, B_2, G_{f_2})*, pontosan akkor egyenlők, ha* $A_1 = A_2$*,* $B_1 = B_2$*, és* $G_{f_1} = G_{f_2}$*. Jelölése másképp:* $(A_1, B_1, f_1) = (A_2, B_2, f_2)$.

Példa. Vegyük ismét az $A = \{1, 2, 3\}$ és $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmazokat, és a függvény gráfja legyen

$$G_f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \subseteq A \times B$$

Vegyük továbbá a $C = \{1, 2, 3\}$ és $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ halmazokat. és a $g : C \to D$ függvényt, ahol $g(x) = x^2$. Az (A, B, G_f) függvény egyenlő lesz a (C, D, g) függvénnyel a különbözőképpen alkalmazott jelölések ellenére, hiszen értelmezési tartományaik, értéktartományaik rendre megegyeznek, és a megfeleltetés során az értelmezési tartomány minden x elemének pontosan ugyanazt az y képelemet rendelik hozzá.

Ugyanakkor az (A, E, h), ahol $h(x) = x^2$, $E = \{1, 4, 9\}$, esetén $(A, B, G_f) \neq (A, E, h)$ annak dacára, hogy $f(x) = h(x)$ minden $x \in A$ esetén, mivel az értéktartományuk különböző, sőt, mint azt később látni fogjuk (A, E, h) bijektív, miközben (A, B, G_f) nem az.

Ugyanakkor az (A, B, G_f) az (A, E, h)-nek egy kiterjesztése, és (A, E, h) az (A, B, G_f) egy leszűkítése. A függvénykiterjesztés, és a függvényleszűkítés érintheti a függvény értelmezésében szereplő bármely elemet, nem csak az értéktartományt.

Meghatározás. *Ha az (A, B, G_f) és (C, D, G_g) függvények esetén $A \subset C$, vagy $B \subset D$ vagy $G_f \subset G_g$, akkor (A, B, G_f) egy leszűkítése a $(C, D, G_g)-$nek, illetve (C, D, G_g) egy kiterjesztése az (A, B, G_f)-nek.*

Függvény inverze, szürjektív, injektív és bijektív függvények

. **Meghatározás.** *Legyen (A, B, G_f) egy függvény, és tekintsük a*

$$G_{f^*} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G_f\}$$

halmazt. Ha (B, A, G_{f^*}) szintén függvény, akkor ez az (A, B, G_f) függvény inverze.

Megjegyzés. Általában (B, A, G_{f^*}) nem függvény, (csak az inverz reláció).

Példa. Vegyük az $A = \{-1, 1, 2, 3\}$, és $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmazokat és a

$$G_f = \{(-1, 1), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \subseteq A \times B$$

Nyilvánvalóan (A, B, G_f) függvény, de (B, A, G_{f^*}), ahol

$$G_{f^*} = \{(1, -1), (1, 1), (4, 2), (9, 3)\} \subseteq B \times A$$

már nem függvény, hiszen a függvény meghatározásában szereplő feltételek egyikét sem teljesíti, $3 \in B$ elemnek egyáltalán "nincs visszafele képe", nincs olyan $a \in A$ amire $(3, a) \in G_{f^*}$, ugyanakkor például az $1 \in B$ elemnek egynél több "képe van visszafele" , hiszen $(1, -1) \in G_{f^*}$,mellett $(1, 1) \in G_{f^*}$.

Ez az ellenpélda arra is jó, hogy világossá váljon az a két feltétel, ami az inverz függvény létezéséhez szükséges, vagyis az inverz függvény csak akkor létezhet, ha a a függvényben minden értéktartománybeli elemnek "van visszafele is legalább egy képe" és egyik értéktartománybeli elemnek "sincs egynél több képe visszafele". Ezt a két tulajdonságot egy függvény külön-külön is teljesítheti, ez vezethet el a szürjektív és injektív függvények fogalmához.

Meghatározás. *Legyen egy (A, B, G_f) függvény. Ha bármely $y \in B$ elem esetén létezik legalább egy $x \in A$, amelyre $(x, y) \in G_f$, akkor (A, B, G_f) egy szürjektív függvény.*

Meghatározás *Legyen egy (A, B, G_f) függvény. Ha bármely $y \in B$ elem esetén legfeljebb egy olyan $x \in A$ létezik, amelyre $(x, y) \in G_f$, akkor (A, B, G_f) egy injektív függvény.*

Meghatározás. *Az* (A, B, G_f) *függvény bijektív, ha egyidejűleg szürjektív és injektív.*

Megjegyzés. A bijektív függvényeknek van inverze, hiszen teljesítik az inverz függvény létezésének feltételeit, az (A, B, G_f) függvény inverze a (B, A, G_{f^*}), ahol $G_{f^*} = \{(y, x) \mid (x, y) \in G_f\}$. Az (A, B, G_f) inverz függvényét rendszerint $(B, A, G_{f^{-1}})$ jelöli, ahol f^{-1} az inverz reláció jele. Másként jelölve: Az (A, B, f) bijektív függvény inverze a (A, B, f^{-1}).

1. példa. Az $A = \{-1, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 9\}$, valamint a

$$G_f = \{(-1, 1), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \subseteq A \times B$$

esetén (A, B, G_f) szürjektív függvény (de nem injektív).

2. példa. Az $A = \{-1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 4, 7, 9\}$, valamint a

$$G_f = \{(-1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \subseteq A \times B$$

esetén (A, B, G_f) injektív függvény (de nem szürjektív).

3. példa. Az $A = \{-1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4, 9\}$, valamint a

$$G_f = \{(-1, 1), (2, 4), (3, 9)\} \subseteq A \times B$$

esetén (A, B, G_f) bijektív függvény (szürjektív és injektív egyidejűleg).

Ennek a bijektív függvénynek van inverze, és ez az inverz a $(B, A, G_{f^{-1}})$, ahol

$$G_{f^{-1}} = \{(1, -1), (4, 2), (9, 3)\}.$$

Érdekes megjegyezni azt, hogy az (A, B, G_f) függvény egy más jelöléssel az $f(x) = x^2$ alakban is megadható, ugyanakkor ennek a függvénynek az inverze nem írható $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ alakban, mivel ez az 1-hez az 1-et és nem -1-et rendelné.

A függvények megnevezése

. Az oktatás során gyakran kell megemlíteni bizonyos függvényeket, és gyakran használjuk bizonyos függvények gyűjtőnevét, ezekben is sok tévedési lehetőség rejlik. A valós függvény, a kétváltozós függvény, vagy a vektorfüggvény elnevezések helyett talán az a járható út, ha a függvényeket "hosszú nevükön" nevezzük, egy szövegkörnyezetben legalább az első alkalommal.

Helyes tehát a valós változójú valós függvény (a valós függvény helyett), továbbá nyugodtan használhatók a két- (valós) változós valós függvény, a komplex változójú valós függvény és a 2 dimenziós vektor változójú valós függvény elnevezések, hiszen ezek dacára a hasonlóságnak, más és más értelmezési tartományra utalnak. Ez a négy - alapjában különböző - eset mind beilleszthető a valós függvény elnevezésbe, de ugyanakkor félreértésre is okot adhat.

Hasonlónak tekinthetők és mégis mást-mást jelentenek a három- (valós) változós valós függvény, és a 3 dimenziós vektor változójú valós függvény elnevezések is.

Bár kínosan precíznek tűnik, talán helyesebb, az előbbi fenntartással élve, a skalár-vektor, vektor-skalár és vektor-vektor függvények helyett, a pontosabb fogalmat használni, például kétdimenziós vektor változójú háromdimenziós vektor értékű függvényről beszélni.

5.4.3. A függvény fogalma alapvetően fontos a mérnökképzésben

Tekintsük át a mérnökképzésben a matematika oktatása során a fogalmak alkalmazásainak és a függvények tanulmányozásának vázlatos ok-okozat rendszerét:

Mit oktatunk?	**Azonnali cél**	**További célok**
Sorozatok	Konvergencia és határérték	Függvények vizsgálata
Függvények határértéke	Függvény lokális vizsgálata	Függvények vizsgálata
Függvények folytonossága	Függvény lokális vizsgálata	Függvények vizsgálata
Differenciálhányados	Függvény lokális vizsgálata	Függvények vizsgálata
Szélsőértékek	Függvény lokális vizsgálata	Függvények vizsgálata
Közelítő megoldások	Egyenletek megoldása	Függvények vizsgálata
Integrálszámítás	Területszám. és prim. függv.	Differenciálegyenletek
Differenciálegyenletek	Függvények keresése	Alkalmazások

Ebből a vázlatos felsorolásból is kitűnik, hogy valóban a **függvények tanulmányozása a központi célja** a matematika oktatásának a mérnökképzésben [18]. **A matematikai analízis oktatásában alapfogalom**, a **műszaki tudományok alapvető összefüggéseinek az oktatása a függvények "nyelvén" valósul meg.**

Ez indokolja azt a törekvést is, hogy mintegy megelőlegezve a később elsajátított tudást, már az első előadásoktól kezdve előfordulnak az elemi függvények, és jó, ha a hallgató vázolni is tudja ezeket az elemi függvényeket, esetleg az inverzeikkel együtt. Néha még a (valós változójú valós) racionális függvények ábrázolását is elvárjuk attól a hallgatótól, aki, nemrég még középiskolásként, négy éven keresztül tulajdonképpen a függvény fogalmát többnyire a parabola, vagy az egyenes képével azonosította.

A hallgatónak nagyon rövid ideje van megemészteni a számára új, és nehéz fogalmakat, ez a gyakori sikertelenség egyik lehetséges magyarázata.

A függvények értelmezése, és grafikus képük intuitív vázolása lehet a függvények elsődleges megközelítése, de jó ha tudatosítjuk, hogy a további fejezetek fő célja éppen ennek a pontosítása.

A sorozatok tanulmányozása, a konvergencia fogalma és a sorozatok határértékének számítása hivatott előkészíteni a függvények határértékének fogalmát. Ugyanakkor későbbi célként előkészíti a sorok fogalmát is. A függvények határértékének alapos megértése lehetővé teszi a függvények lokális vizsgálatát (a pontbeli határérték, a jobb és baloldali határérték, a végtelenben vett határérték számítása), és elvezet a folytonosság, majd a differenciálhányados fogalmához.

A folytonos függvények tulajdonságainak alapos megértése lehetővé teszi az egyenletek közelítő grafikus megoldását, és az egyenlőtlenségek megoldását is. A differenciálhányados, a deriváltak fogalma elvezethet a függvények szélsőértékeinek, monotonitásának és konvexitásának a vizsgálatához, végső soron a függvények menetének a vizsgálatához, de most már sokkal több tudás birtokában.

Itt kerül sor többnyire a függvények közelítő leírására, Taylor polinom, majd a sorok és függvénysorok megismerésén keresztül.

A határozott integrál fogalmának bevezetése a függvénygörbe és a terület fogalmának a kapcsolatát tételezi el, a határozatlan integrál is az adott tulajdonságú függvény, a primitív függvény megtalálását jelenti.

A határozott és határozatlan integrál kapcsolatát kifejező Newton-Leibniz képlet is a primitív függvény létezéséhez köthető.

A függvényegyenletek között a mérnöki munkában a differenciálegyenletek a legfontosabbak.

A függvények néhány további alkalmazása

. A függvények szokásos alkalmazásaik mellett más fejezetekben is használhatók. A következő példák ezekre a, - bizonyos esetekben szokatlan - alkalmazásokra mutatnak rá.

1. Példa.

Ismert, hogy a valós sorozatokat tekinthetjük egy olyan függvénynek, aminek az értelmezési tartománya az $\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ halmaz, a természetes számok halmaza, és értéktartományuk a valós számok halmaza, a megfeleltetés maga az $i \longmapsto x_i$ "indexelés", a sorozat egy tagjának indexe és a sorozat adott tagja között. Ebben az esetben nem szokás az itt szereplő függvényt külön jellel használni, az i független változónak megfelelő függvényérték maga a sorozat i. tagja, ezt a sorozatok esetén az index tükrözi, tehát az x_i jelölés fejezi ki a "független változó - függvényérték" kapcsolatot. A sorozatot magát az így adott függvény gráfja jelenti, az

$$\{(1, x_1), (2, x_2), (3, x_3), ..., (n, x_n), ...\}$$

halmaz, amit szokás szerint

$$(x_1, x_2, x_3, ...x_n, ...)$$

vagy még rövidebben $(x_n), (x_n)_{n \geq 1}$ vagy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is jelölhet.

Ennek ellenére a sorozatokat a legtöbbször az általános tagjukkal szokás megadni, például $x_n = \frac{1}{n}$, vagy a kezdőtagjaik felsorolásával, így az előbbi sorozat (tulajdonképpen az előbbi függvény függvényértékeinek a sorozata) felírható mint

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right)$$

2. Példa.

A valós polinomok is megadhatók az előbbi módon, hiszen a polinomok tekinthetők az együtthatóik sorozatának, olyan sorozatoknak, amelyekben csak véges számú tag nem nulla.

Kényelmi okokból egy

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n$$

valós együtthatójú valós polinom tekinthető a

$$\{0, 1, 2, 3, ..., n, n+1, n+2, ...\}$$

halmaz olyan leképzésének a valós számok halmazába, amelynek gráfja a következő halmaz

$$\{(0, a_0), (1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n), (n+1, 0), (n+2, 0), ...\}$$

vagyis röviden az

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, 0, 0, 0, ...)$$

sorozat.

3. Példa. Az $\{1, 2, 3, ..., n\}$ halmaz leképzése a valós számok halmazába, pontosabban ennek a leképzésnek a gráfja az n-dimenziós vektorok fogalmához vezethet, a függvény gráfja:

$$\{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n)\}$$

vagy röviden az

$$\langle a_1, a_2, a_3, ..., a_n \rangle$$

vektor fogalmát adja.

4. Példa. Az

$$\{1, 2, 3, ..., k\} \times \{1, 2, 3, ..., n\}$$

halmaz leképzése a valós számok halmazába, pontosabban ennek a leképzésnek a gráfja az $k \times n$ típusú mátrixok fogalmának bevezetését teszi lehetővé, a függvény gráfja ebben az esetben a következő halmaz:

$$\{((1,1), a_{11}), ((1,2), a_{12}), ..., ((1,n), a_{1n}), ((2,1), a_{21}), ..., ((n,k), a_{nk})\}$$

vagy röviden az

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & ... & . \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & ... & a_{kn} \end{Vmatrix}$$

mátrixot adja.

Az előbbiekhez hasonló gondolatmenettel megadható sorozatok, polinomok, vektorok, és mátrixok összege is, de megfogalmazhatjuk a sorozat korlátosságát, monotonitását, határértékét is.

5. Példa.

Meghatározás. *Vegyük az* $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_k\}$, *és* $V = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ *halmazokat. Az* E *elemeit éleknek, a* V *elemeit csúcsoknak, pontoknak szokás nevezni.*

Az irányítatlan gráf, aminek élei az E halmaz elemei és pontjai a V halmazban vannak, megadható egy $\Gamma : E \to V^{(2)}$ alakú függvényként, ahol

$$V^{(2)} = \{\{x, y\} \mid x, y \in V\}.$$

Ez a meghatározás olyan gráfhoz vezet, amiben lehetnek hurokélek és lehetnek többszörös élek is. Könnyen belátható, hogy ha a leképzés injektív, akkor nincsenek többszörös élek a gráfban. A hurokélek is kizárhatók, ha a meghatározást kiegészítjük még egy feltétellel a következők szerint:

$$\Gamma : E \to \{\{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y\}$$

Meghatározás *Az előbbiekben adott E és V halmazokon irányított gráf egy $\Gamma : E \to V \times V$ alakú függvény.*

Itt is érvényesül az előzőekben alkalmazott szempont, ha ez a függvény injektív, akkor nincsenek párhuzamos élek és kizárhatjuk a hurokéleket pl.:

$$\Gamma : E \to \{(v_1, v_2) \mid (v_1, v_2) \in V \times V, v_1 \neq v_2\}$$

Egy másik fontos fogalom, a mátrix bevezetésének egy, az előbbiektől eltérő konstruktív útja a következő fejezetben található.

5.5. A mátrixok fogalmának bevezetése

A műszaki felsőoktatásban a mátrixok ismerete elengedhetetlen, ugyanakkor a mátrix fogalmának természetesen adódó bevezetése, mint lineáris terek közötti transzformáció mátrixa, túl elvontnak tűnik, hiszen a hallgatók elég keveset vagy semmit nem tudnak még a lineáris terekről. Az alábbiakban ismertetünk egy olyan módszert, amivel a mátrixok és az alapvető mátrixműveletek fogalma intuitív eszközökre támaszkodva bevezethető a lineáris terek ismerete nélkül.

Kezdjük egy probléma felvetéssel és alkalmazzuk a fogalom bevezetésének konstruktív módszerét. Legyen a kiinduló példa egy irányított gráf, amiben megengedettek a hurokélek és többszörös élek is [1]. Legyen a gráf n számú nagyváros közötti vasút intercity járatok, röviden IC járatok gráfja például, amivel az adott n pont - város - közötti IC járatokat ábrázoljuk. A gráfhoz tartozó szomszédsági mátrix [4] felírásával könnyen indokolható az $n \times n$-es négyzet alakú felírás, hiszen az összes (i, j) pontpár esetén i-edik pontból a j-edik pontba mutató élek számának megadása, azaz a mátrix a_{ij} elemének az értéke tulajdonképpen egyenértékű a gráf teljes leírásával, a gráf ismeretében felírható a mátrix és fordítva, a mátrix ismeretében rekonstruálható a gráf. Például:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nyilván látható, hogy ha egy sor (A mátrix ötödik sora) vagy egy oszlop (B mátrix negyedik oszlopa) csupa nulla, az azt jelenti, hogy az ötödik pontból nincs egyetlen kiinduló IC járat sem, vagy a negyedik pontba nincsenek beérkező IC járatok (élek), bár az adott esetben (vasúti IC járatok) ez általában nem tükrözi a valóságot. Ugyanakkor mindkét mátrix főátlója csupa nulla elemet tartalmaz, aminek a jelentése nyilvánvaló: egyik nagyvárosból sincs ugyanoda visszaérkező IC járat - a konkrét példa kizárja a hurokéleket.

Meghatározás. *Legyen K egy kommutatív test, k és n adott természetes számok. A K test feletti $k \times n$-es mátrixnak nevezzük egy olyan téglalap táblázatot, amelynek k sora és n oszlopa van, és amelynek elemei K- ból valók [104].*

Jelölések, elnevezések. A mátrixok elemeit tartalmazó táblázatot ( ) , [ ] vagy ‖ ‖ zárójelben szokás megadni, az elemeknek a táblázatban elfoglalt helyét kettősindex jelöli, pl. a_{ij} -vel a mátrix i. sorában és j. oszlopában álló elemet jelöljük. Szokás pl. az $[a_{ij}]$, vagy az $[a_{ij}]_{\substack{i=1..k \\ j=1..n}}$ rövidített jelölést használni, vagy, ha a magyarázat úgy kívánja akkor pl. a részletes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & ... & a_{kn} \end{bmatrix}$$

A mátrixok szokásos műveleteinek konstruktív úton történő bevezetéséhez is eljuthatunk az előzőek szerint. Az összeadás műveletének bevezetéséhez a két (vagy több) ilyen szomszédsági mátrix összegét például két (vagy több) különböző vasúti társaság járatainak összesítésével szemléltetjük.

Az előbbi mátrixok összege $A+B$ például értelmezhető két vasúti társaság (pl. MÁV, GYSEV IC járatainak összesítéseként:

$$A+B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A mátrixok szorzásának a szemléltetéséhez az előbbi IC járat szomszédsági mátrixok felhasználásával a gyakorlatból is ismert átszállást, több lépcsős utazást említhetjük. Azaz, két ilyen IC járat forgalmat ábrázoló szomszédsági mátrix szorzata az egy átszállással megvalósuló utazások lehetőségét fogja adni, tehát például, ha eredetileg X és Z városok között nincsen direkt járat, de mindkettő kapcsolatban van Y-nal, akkor a mátrixok szorzata azt fogja tükrözni, hogy hány (elvi) lehetőség van eljutni az X városból Z-be. Itt megjegyezhetjük, hogy az IC járatok időbeni egymáshoz kapcsolódását a mátrix szorzat így megadott alakja nem tartalmazza.

Ha például vennénk az előbbi $A+B$ mátrix összeget, akkor az:

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 8 & 2 & 1 \\ 8 & 11 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 10 & 4 & 1 \\ 6 & 9 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

azt fejezi ki, hogy hányféleképpen lehet egy átszállással (pontosan két egymás utáni, átszállással kapcsolódó úton) eljutni az adott öt város egyikéből egy másikba.

Ugyanakkor, ha a szóban forgó nagyvárosok közötti IC járat forgalmi gráfjához tartozó szomszédsági mátrixnak a négyzete, harmadik hatványa, és mondjuk k-adik hatványa sem tartalmaz az ij helyen nullától különböző értéket, akkor kizárt, hogy az i-edik pontból a j-edik pontba k-nál kevesebb átszállással el lehessen jutni. Például ha "IC járat" mátrixa az alábbi M:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 6 & 9 & 10 \\ 14 & 7 & 14 & 9 & 7 \\ 18 & 2 & 10 & 9 & 10 \\ 4 & 15 & 10 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

akkor az M^2, M^3 eredmények azt mutatják, hogy az ötödik és a második városok között nincs direkt IC járat, sem egy átszállással megoldható út, de két átszállással ötféleképpen is el lehet jutni.

Az adott példáknak nyilván az az előnye, hogy a hallgatók szemléletéhez könnyen igazodik, ugyanakkor az a hátránya, hogy az adott

szemléltetés sajátosságainak megfelelően csak megszorításokkal alkalmazhatók. Nyilván a mátrixok elemei nemcsak természetes szám, hanem bármilyen valós szám is lehet, és így a szemlélethez túlságosan kötődő hallgatóknak nehézséget is okozhat az ilyen bevezetés. Az adott példákat lehet finomítani, például a nem egész számok megjelenhetnek a két pont közötti kapcsolat jellemzőjeként, lehetnek az adott kérdéshez kötődő költségek, nyereség-veszteség, és így a negatív számok szerepét is kiemelhetjük. Érdekes alkalmazásokat mutathatunk különleges típusú mátrixok szorzására. Ha például egy A sormátrix elemei az eladási adatokat (mennyiséget) jelentik termékenként, és a B oszlopmátrix ugyanezen termékek eladási árát tartalmazza, akkor az $A \cdot B$ szorzat egy elemű és a bevételt jelenti.

A mátrixok nagyon alkalmasak például termelési folyamatok részletes leírására [107]. Például:

Egy üzem m-féle alapanyagot használ fel n különböző termék előállítására. Jelölje a_{ij} az i-edik alapanyagból a j-edik termékegység előállításához szükséges mennyiséget. Az a_{ij} technológiai együtthatókból áll az ún.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

technológiai mátrix. Tegyük fel, hogy az i-edik termékből $t_i \geq 0$ mennyiséget kell előállítani ($i = 1, 2, ..., n$). A termelési feladatot reprezentáló $t = [t_1, ..., t_n]^T$ vektort programvektornak nevezzük. Az At szorzat a t termelési program anyagszükségletét adja meg. Ha p_i az i-edik erőforrás egységárát jelöli, akkor $p = [p_1, p_2, ..., p_n]^T$ vektort árvektornak nevezzük. A $p^T A$ sorvektor a termékek fajlagos anyagköltségét mutatja. A t termelési program erőforrás szükségletének, azaz a program anyagköltségének értéke $p^T(At)$. Határozzuk meg a fajlagos anyagköltséget és a termelési program anyagszükségletét, és anyagköltségét, ha

$$A = \begin{bmatrix} 50 & 70 & 60 \\ 200 & 180 & 250 \\ 160 & 120 & 80 \\ 70 & 90 & 50 \\ 170 & 210 & 130 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 30 \\ 16 \\ 10 \\ 2 \\ 20 \end{bmatrix}, t = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

A számítások ez esetben "kézzel- papíron" is elvégezhetők, de pl. a MATLAB, MAPLE is munkába állhat:

$$p^T = \begin{bmatrix} 30 & 16 & 10 & 2 & 20 \end{bmatrix}$$

$$p^T A = \begin{bmatrix} 9840 & 10\,560 & 9300 \end{bmatrix}$$

$$p^T(At) = 234\,720$$

5.6. A mátrixok alkalmazása a komplex számok és a kvaterniók modellezésére

A komplex számok bevezetésekor az összeadás és a szorzás definíciója az algebrai alak segítségével könnyen megoldható, ugyanakkor gyakran felmerül az igény arra, hogy a sík pontjai és a komplex számok halmaza között kapcsolatot teremtsünk. Jól ismert tény, hogy ha a síkon rögzítünk egy XOY koordinátarendszert, és az $a + bi$ komplex számot azonosítjuk a sík (a, b) pontjával, akkor a sík pontjainak, illetve az elempároknak az

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

és

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + c)$$

egyenlőségekkel definiálható az összeadása és a szorzása.

E műveletekre nézve a sík pontjai testet alkotnak. Az OX koordinátatengelyen ezek a műveletek a valós számokon definiált összeadást és a szorzást indukálják, tehát a sík pontjain definiált műveleteket úgy is lehet tekinteni, mint az OX tengelyen definiált műveletek kiterjesztését.

A komplex számokkal végzett műveleteket egy jól ismert módon a 2×2-es mátrixokkal is leírhatjuk. Valóban, ha az $a + bi$-t, vagy a (a, b) pontot az

$$a + bi \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

mátrix-szal azonosítjuk, akkor a szokásos mátrix műveletek pontosan tükrözik a komplex számokon végzett műveleteket, azaz a $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ és a $(M_2, +, \cdot)$ halmazok között izomorfizmus létesíthető, ahol

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \middle| a, b \in R \right\}.$$

Azt is mondhatjuk, hogy M_2-beli mátrixok modellezik a komplex számokat.

Ezt a gyűrűt **Hamilton-kvaternió ferdetestnek**, elemeit kvaternióknak nevezzük, és e ferdetestet H-val jelöljük.

Legyen $1, i, j, k$ a H vektortér bázisa. H-ban a báziselemek szorzása a következőképpen van megadva:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j.$$

E relációk alapján definiáljuk két elem szorzatát a következőképpen:

$$(a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) =$$

$$\begin{aligned} &(ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i + \\ &+(ag + ce - bh + df)j + (ah + de + bg - cf)k. \end{aligned}$$

Így H asszociatív gyűrű lesz [78], és $1 + 0i + 0j + 0k$ a gyűrű egységeleme, amelyet 1-gyel jelölünk. A szorzat definíciója alapján látható, hogy ha $a + b + c + d \neq 0$, akkor az $x = a + bi + cj + dk$ kvaterniónak van inverze, azaz egység, mivel

$$x^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Hasonlóan, mint a komplex számok esetén az $\overline{x} = a - bi - cj - dk$ kvaterniót az $x = a + bi + cj + dk$ konjugáltjának nevezzük. E fogalom jelentősége abban áll, hogy egy kvaterniónak és konjugáltjának az összege is és a szorzata is mindig valós szám.

A komplex számokhoz hasonlóan a Hamilton-kvaternókkal végzett műveleteket is modellezhetjük a mátrixokkal [8]. Tekintsük az

$$a + bi + cj + dk \mapsto \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

bijekciót a $(H, +, \cdot)$ és $(M_4, +, \cdot)$ között, ahol

$$M_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}.$$

Az adott leképezés bijekció és művelettartó. Valóban, azonnal belátható, hogy a hozzárendelés szürjektív és injektív, valamint az, hogy a kvaterniók összegének képe a képmátrixok összege.

Az alábbi rövid számítással a szorzásra is igazolható, hogy a kvaterniók szorzatának képe is a képmátrixok szorzatával egyenlő.

Ehhez vegyük az $a + bi + cj + dk$ és az $e + fi + gj + hk$ kvaternióknak rendre megfelelő:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix} \text{ és a } B = \begin{bmatrix} e & f & g & h \\ -f & e & -h & g \\ -g & h & e & -f \\ -h & -g & f & e \end{bmatrix} \text{ mátrixokat.}$$

Az adott mátrixok AB szorzata a következő:

$$\begin{bmatrix} ae - bf - cg - dh & af + be + ch - dg & ag - bh + ce + df & ah + bg - cf + de \\ -be - af + dg - ch & ae - bf - cg - dh & -bg - ah - de + cf & ag - bh + ce + df \\ -ce - df - ag + bh & ah + bg - cf + de & ae - bf - cg - dh & -be - af + dg - ch \\ -bg - ah - de + cf & -ce - df - ag + bh & af + be + ch - dg & ae - bf - cg - dh \end{bmatrix}$$

azaz az adott kvaterniók

$$(a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk)$$

szorzatának, az

$$\begin{aligned}&(ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i + \\ &+ (ag + ce - bh + df)j + (ah + de + bg - cf)k\end{aligned}$$

kvaterniónak a képe.

A mátrixokkal történő modellezés mind a komplex számok, mind a kvaterniók esetén további előnyt jelent, hiszen az adott testekben az elemek inverzének a képe a modellezés (megfeleltetés) során az adott elem képének mátrix inverze.

Az is könnyebben érthetővé válik a hallgatók számára, hogy bár az M_2-ben a szorzás kommutatív, az M_4-ben már nem az és így még jobban megértik, hogy a komplex számok kommutatív testet és a Hamilton kvaterniók ferdetestet képeznek az összeadás és szorzás műveletére.

Megjegyzés.

A kvaterniók további tulajdonságainak tanulmányozását jelentősen megkönnyíti ez a mátrix modell [8], részletesebb leírását lásd még Függelék X. rész. A konjugált kvaterniók, illetve mátrix képeik, tulajdonságait tanulmányozva belátható, hogy $\overline{\overline{A}} = A$, $\left(\overline{A}\right)^{-1} = \overline{A^{-1}}$, $A + \overline{A}$ és $A \cdot \overline{A}$ valósak, tehát a komplex számok egy sor tulajdonsága "öröklődik" , de $\overline{A \cdot B} = \overline{B} \cdot \overline{A}$.

5.7. A példák és ellenpéldák szerepe

A mérnökhallgatók, és általában az elsőéves hallgatók számára nagy megterhelést jelent az a tömörebb, előadásokra alapozódó oktatás amit a matematika és más tárgyak is jelentenek. Az új fogalmak nagy száma, a fogalmakra alapozódó tulajdonságok, tételek és az, hogy begyakorlásra viszonylag kevés idő van sok gondot okozhat. A hallgatók egy részének még az addig biztosnak hitt tudásanyag is bizonytalanná válik.

Ezért a mérnökképzés egészére nézve fontos, hogy az alapozó tárgyak oktatásban a hallgatók fogalmakat, definíciókat, tételeket és a tételekhez vezető matematikai érvelést, bizonyítást alaposan megértsék. Az a hallgató, aki megtanult logikusan gondolkozni, következtetni - és talán ez a legfontosabb érték, amit a matematika közvetít - az összetettebb, bonyolultabb feladatokat is értelmezni, kezelni tudja majd.

A cél az, hogy a mechanikus memorizálás helyett **a hallgatók többet gondolkodjanak a tanulás közben, és képesek legyenek saját tévedéseik, hibáik felismerésére, kijavítására.**

Ezt a célt jól szolgálják **az oktatásba beépített példák és ellenpéldák.** A monotonitás elkerülésére a példákat, ellenpéldákat néha fűszerezhetjük „Hol a hiba" jellegű megoldásokkal, ez utóbbi különösen alkalmas arra, hogy a hallgató saját munkájának ellenőrzését is megtanulja. A számítógépes módszerek elterjedésével párhuzamosan fontossá válik az olyan példák ismertetése, ahol a "számítógép tévedhet", azaz a számítógépes szoftverek korlátait, megbízhatóságát, alkalmazhatóságát is tanítani kell.

A Budapesti Műegyetem oktatói (Wettl Ferenc megjegyzése a RLV Felsőoktatási ankétján, Miskolcon, 2001) példatárat szerkesztettek a MAPLE hibáiból, az adott szoftver alkalmazhatóságának korlátait körvonalazva.

Az oktató idézhet ellenpéldákat olyan könyvekből mint B. R. Gelbaum and J. M. H. Olmsted: *Counterexamples in Analysis* (1964), vagy O. Konnerth: *Typical Mistakes in Learning Analysis* (1982), használhatja az American Mathematical Monthly számait, de idézhet "saját gyűjtésű gyöngyszemeket" is [14].

1. Példa.

Ellentmondást tartalmazó állítások.

Tekintsük a következő „állításokat" :

p_1 : Magyarország fővárosa Miskolc.

$p_2 : 2 \cdot 2 = 5$.

p_3 : Hungary egy magyar szó.

$p_4(n)$: Ez a sor és a megelőző sorok n hamis állítást tartalmaznak.

Mit mondhatunk a $p_n(n)$ állításról különböző n értékekre?

Nyilván $p_4(1)$ és $p_4(2)$ hamisak, ugyanakkor $p_4(3)$ igaz. Mit állíthatunk $p_4(4)$-ről?

Ha igaz, akkor az utóbbi állítás a $p_4(4)$ is hamis. Hasonlóan, ha hamis, akkor viszont $p_4(4)$ igaz.

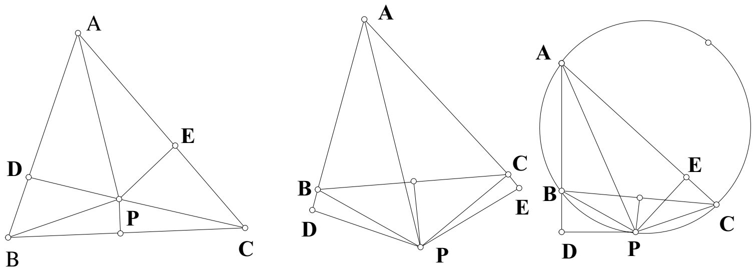
Mindkettő önmagában ellentmondás, tehát a hiba az állítások szerkezetében van.

2. Példa.

„Bebizonyítható", hogy minden háromszög egyenlő oldalú. Legyen ABC egy általános háromszög. Először azt „igazoljuk", hogy $AB = AC$. Jelölje P a BAC szög belső szögfelezőjének és a BC oldalfelező merőlegesének metszéspontját. A rajz alapján is látható, hogy a P pont a háromszög belsejében van. Jelölje D és E az adott P pont vetületét az A szög száraira. Ha ez a pont a háromszög belsejében van, belátható, hogy az APD és APE háromszögek valamint a PBD és PCE háromszögek rendre egybevágóak, hiszen az APD és APE derékszögű háromszögekben $DP = PE$ egyenlő hosszúságú befogók és AP átfogó közös, a PBD és PCE derékszögű háromszögekben pedig szintén két befogó egyenlő, $DP = PE$ és $BP = PC$ átfogók is egyenlők, hiszen a P pont egyenlő távolságra van a BC oldal végpontjaitól. Következésképpen $AB = AD + DB$ és $AC = AE + EC$ vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú.

Ha most ezt a „bizonyítást" megismételjük például az ABC szög esetén is, tehát $AB = BC$ is „bizonyítható", vagyis az ABC háromszög egyenlő oldalú. A „bizonyítás" könnyebb „megértéséhez" mellékeljük az alábbi ábrákat. Az első rajz a „bizonyításban" leírt esetet „szemlélteti". Ha az előbbi „bizonyításban" a háromszög szögfelezőjének és az oldalfelező merőleges metszéspontját a háromszögen kívül rajzoljuk és a rajzot az alábbiak szerint torzítjuk, akkor ugyanígy megismételhető a „bizonyítás", csak ez esetben a „következtetés":

$AB = AD - DB$ és $AC = AE - EC$, lásd középső ábra. Hol van tehát a hiba?



A valódi helyzetet a harmadik ábrán láthatjuk, az említett metszéspont az ABC háromszög köré írható körön van, viszont vetületei az AB oldal meghosszabbításában és az AC oldalon vagy fordítva az AC oldal meghosszabbításán és az AB oldalon található. A „bizonyításban" igazából nincs hiba, csak a szemléltetés közben használt rajzok alapján tűnik úgy, hiszen a következtetés helyesen az lenne, hogy például a harmadik rajzon az $AB = AD - DB$ és $AC = AE + EC$. Ez a feladat arra irányítja a figyelmünket, hogy mennyire fontos a bizonyítások során a szemléltetés, hiszen egy hibás rajzból hibás következtetésre juthatunk. Úgy is fel lehetne fogni ezt a feladatot, hogy a három eset közül csak ez a harmadik lehetséges, hiszen ellenkező esetben bármely háromszög egyenlő szárú, egyenlő oldalú lesz.

3. Példa.

Két periodikus függvény összege, nem mindig periodikus mint azt a következő függvény is szemlélteti, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \cos(x) + \cos(x\sqrt{2})$$

Tulajdonképpen, azt bizonyítjuk, hogy ha egy $f(x) = \cos(x) + \cos(x \cdot \mathbf{k})$ leképzés periodikus függvény akkor $\mathbf{k}$ racionális kell legyen.

Indoklás: Jelölje $T > 0$ a periódust, tehát:

$$\cos(x + T) + \cos((x + T) \cdot \mathbf{k}) = \cos(x) + \cos(x \cdot \mathbf{k}), \qquad \text{minden } x - \text{re}$$

.

Legyen $x = 0$, következésképpen

$$\cos T + \cos \mathbf{k}T = 2$$

csak akkor teljesülhet, ha $T = 2m\pi$ és $\mathbf{k}T = 2n\pi$, és így $\mathbf{k} = \frac{n}{m}$.

4. Példa.

Egy olyan $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, amely nem korlátos egy intervallumon sem, a következőképpen adható meg:

$$f(x) = \begin{cases} n & ha\ x = \frac{m}{n},\ n > 0 \text{ és } (m,n) = 1, \text{ ahol } m,n \in \mathbb{Z} \\ 0 & ha\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

5. Példa.

Ismert, hogy zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény korlátos és eléri szélsőértékeit. A fogalom pontosabb megértésére hasznos a következő példa egy olyan $f : [0,1] \to [0,1]$ korlátos függvényre, amelynek nincs helyi szélsőértéke:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & ha\ x = \frac{m}{n},\ n > 0 \text{ és } (m,n) = 1, \text{ ahol } m,n \in \mathbf{Z} \\ \mathbf{0} & ha\ x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

6. Példa.

A monoton függvények tulajdonságainak megértéséhez hasznos a következő $f : [0,1] \to [0,1]$ függvény, amely az értelmezési tartománynak egy részintervallumán sem monoton (sehol sem monoton):

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \in \mathbf{Q} \\ 1 - x & \text{ha } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

7. Példa.

A folytonosan deriválható fogalom jobban érthetővé válik, ha tekintjük a következő deriválható függvényt, amelynek a deriváltja nem folytonos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{ahol } f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

8. Példa.

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 2 \cdot \cos^2 x = 1$$

„1. megoldás": Jelölje t a tg$x$-et, és figyelembe véve, hogy $\sin^2 x =$tg$^2 x \cos^2 x$, $\sin x \cdot \cos x =$tg$x \cos^2 x$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x}$, az átalakítások következtében az egyenlet

$$\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} - \frac{2}{1+t^2} = 1$$

alakban írható, aminek megoldása $t = -3$,és így $x \in$Arctg(-3), ahol Arctg(-3) jelöli a tg$x = -3$ megoldáshalmazát.

2. (helyes) megoldás: Az egyenlet átírható a következő alakba:

$$3 \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0$$

$$\text{vagyis} \quad \cos x \cdot (3 \cos x + \sin x) = 0$$

aminek két megoldása van:
1. $\cos x = 0$, ezt az előző megoldás nem tartalmazza,
2. $3 \cos x + \sin x = 0$, ami nyilván az előző megoldással megegyező.

Megjegyzés: az első megoldásban elkövetett hiba az, hogy az adott helyettesítések csak a tangens függvény értelmezési tartományán használhatók, ez pedig a cos$x = 0$ eset kizárását jelenti.

9. Példa.
Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\text{arctg}x + \text{arctg}(2-x) = \text{arctg}x\sqrt{3} + \text{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$$

„Megoldás”: Vegyük mindkét oldal tangensét:

$$\text{tg}(\text{arctg}x + \text{arctg}(2-x)) = \text{tg}(\text{arctg}x\sqrt{3} + \text{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}})$$

és például egy computer algebra programot használva ennek megoldására a következő egyenlethez jutunk:

$$\frac{x + (2-x)}{1 - x \cdot (2-x)} = \frac{x\sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{3}}}{1 - x\sqrt{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}}}$$

Aminek egyszerűsítése után a:

$$2 \cdot x^2 - 2x + \sqrt{3} = 0$$

egyenletet kapjuk, aminek nincsenek valós gyökei. Ugyanakkor könnyen belátható, hogy $x = 1$ megoldása az eredeti egyenletnek. Hol a hiba? A válasz ebben az esetben az, hogy a tangens értelmezésének megfelelően csak akkor írható fel egy adott kifejezés tangense, ha az adott kifejezés különbözik a $\frac{\pi}{2} + k\pi$-től, k egész. A helyes megoldáshoz az előbbi gondolatmenetet ki kell egészítenünk azokkal az esetekkel, amikor például az

$$\text{arctg}x + \text{arctg}(2-x)$$

összeg $\frac{\pi}{2}+k\pi$ alakú. Tekintve, hogy az arctg értéktartománya a $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ intervallum, ez az összeg csak a $(-\pi,\pi)$ intervallumban lehet, vagyis ez az érték $-\frac{\pi}{2}$ vagy $\frac{\pi}{2}$, hasonlóan a jobb oldalon szereplő

$$\mathrm{arctg} x\sqrt{3}+\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$$

kifejezés értékéhez. Vegyük most például az

$$\mathrm{arctg} x+\mathrm{arctg}(2-x)=\frac{\pi}{2}$$

esetet, és írjuk át a következő alakba

$$\mathrm{arctg}(2-x)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg} x$$

Most vegyük mindkét oldal tangensét, az $0<x<2$ esetben (az $x<0$ és $x>2$ ellentmondáshoz vezetne):

$$2-x=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg} x)=\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg} x)=\frac{1}{x}$$

és így

$$2-x=\frac{1}{x}$$

azaz $x^2-2x+1=0$, ha $x\neq 0$, nyilván az $x=1$-hez vezet.
Az előbbiek értelmében ez a megoldás meg kell egyezzen az

$$\mathrm{arctg} x\sqrt{3}+\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2}$$

egyenlet megoldásával. Ez átírható:

$$\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg} x\sqrt{3}$$

alakba és az $0<x<2$ esetben

$$\frac{x}{\sqrt{3}}=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg} x\sqrt{3}\right)=\mathrm{ctg}(\mathrm{arctg} x\sqrt{3})=\frac{1}{x\sqrt{3}}$$

azaz

$$\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{1}{x\sqrt{3}},\quad x^2=1,\quad x=1$$

Az

$$\mathrm{arctg} x+\mathrm{arctg}(2-x)=-\frac{\pi}{2}$$

és

$$\mathrm{arctg} x\sqrt{3}+\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{2}$$

eset hasonlóképpen tárgyalható, de megoldásuk nem tartalmaz közös részt, a második megoldása $x=-1$ és az elsőnek ez nem megoldása. Tehát az adott egyenletnek az egyetlen megoldása $x=1$.

10. Példa.

Igazoljuk a jól ismert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ eredményt!

„Megoldás": A l'Hospital szabály alkalmazásával:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

tehát az eredeti határérték nyilván ugyanez:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ez a megoldás egy nehezebben érthető hibát tartalmaz, egy körkörös indukció sort (circulus viciosus), mivel a $\sin x$ deriváltjának kiszámításához,

$$(\sin x)' = \cos x$$

már eleve szükség van önmagára a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

határértékre.

Valóban:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \cos(x + \frac{h}{2}) = \cos x$$

11. Példa.

Az alábbi példa azt szemlélteti, hogy a valós számsorok esetén az integrál kritérium csupán elégséges, de nem szükséges feltétele a számsorok konvergenciájának. A következő $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény példa egy olyan esetre, ahol $\sum f(n)$ konvergens, bár az $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ divergens. Vegyük a

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = n \in \mathbb{N}, \mathbf{n \geq 2} \\ 1 & \text{ha } 1 \leq x < \frac{3}{2} \\ x & \text{ha } x \in [n - \frac{1}{n}, n) \cup (n, n + \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{kivéve a fenti eseteket} \end{cases}$$

majd legyen $f(x) = g(x) + \frac{1}{x^2}$.

Nyilván az $\int\limits_1^\infty f(x)dx = \infty$ divergens, ugyanakkor $\sum f(n) = \sum \frac{1}{n^2}$ konvergens.

12. Példa.

A kettős integrálok esetén a legtöbb könyvben az szerepel, hogy ha az integrálási tartomány egy téglalap, akkor az integráláskor a változók sorrendje felcserélhető.

Valójában ez csak bizonyos esetekben teljesül, mint azt a következő ellenpélda is bizonyítja, amelyben:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx \neq \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy,$$

$$\text{ahol } f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{ha } 0 < x < y < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{ha } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

1. Ha $0 < y < 1$ akkor:

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^y \frac{1}{y^2}dx - \int_y^1 \frac{1}{x^2}dx = 1$$

$$\text{így } \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 1 \cdot dy = 1$$

2. Ha $0 < x < 1$ akkor:

$$\int_0^1 f(x,y)dy = -\int_0^x \frac{1}{x^2}dy - \int_x^1 \frac{1}{y^2}dy = -1$$

$$\text{és így } \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx = \int_0^1 (-1) \cdot dx = -1.$$

Tehát az integrálás sorrendjét felcserélve a téglalap tartomány fölött két különböző eredményt kapunk.

5.8. Memóriacímkék - figyelemfelkeltő ábrák, megjegyzések

A matematika tanításának nem közvetlen célja, de egy téma, bizonyítás vagy alkalmazás rögzítésére a szokásos példák mellett az előadó fűszerezheti az előadását egy-egy frappáns megjegyzéssel. Egy jól kiválasztott tréfa, rövid történet, vagy ábra, kép, rajz vagy más utalás alkalmas arra, hogy a hallgató az ahhoz kapcsolt ismeretet könnyebben megjegyezze. Köztudomású, hogy a **rövid távú ún. munkamemória a dolgok megértésére alkalmas csak, de az új ismeretnek el kell raktározódnia a hallgató hosszútávú memóriájába**, onnan pedig az ilyen **"memóriacímke"** a legalkalmasabb az ismeret előhívására.

Ezt a módszert nyilván nem lehet állandó jelleggel alkalmazni, de sokszor hasznosnak bizonyulhatnak. Egy fárasztó levezetés után, előadót és hallgatót egyaránt továbblendíthet egy ilyen megjegyzés.

Nagynevű előadók előadásukba eleve beépítettek ilyen elemeket, ezt magam is megfigyelhettem, pl. **Erdős Pál** esetén, aki egy 1996-ban Miskolcon elhangzó előadásán szinte szóról szóra ugyanazokat a történeteket mondta el, amit egy róla készült és kereskedelemben is forgalmazott videón is láthatunk. Mindkettőn elhangzik pl. az a történet egy neves matematikusról, aki azzal nyit ajtót egy őt felkereső idegennek - *Kérem, jöjjön vissza máskor és máshoz!*

Minden előadó gyűjthet ilyen és ehhez hasonló történeteket a saját szórakozására is, de még inkább a hallgatói okulására.

Néhány ismert "gyöngyszem".

1. Példa.

Események függetlenségének tanításakor lehet hivatkozni a következőre:

Repülőút előtt beszélget két izgatott utas.

- Mondd - kérdi az egyik- te nem félsz attól, hogy lesz egy bomba a repülőn?

- Nem -hangzik a válasz- mert én is hoztam egyet, és annak a valószínűsége, hogy két bomba legyen egyszerre a gépen szinte nulla.

2. Példa.

Kiegészítő események valószínűsége:

Öreg matematikus kérdi a fiatal meteorológust:

- És mondja, fiam, milyen százalékban találják el a jó idő - rossz idő előrejelzését?

- Hát, úgy 40 %-ban.

- Akkor miért nem mondja fordítva? Máris jobb lenne a 60 % találati arány!

3. Példa.

Weierstrass tétel

Sosem felejtem el - gondolja és mondja a diák- s magam is derűsen emlékszem például a Weierstrass tétel egy tréfás bizonyítására: Hogyan lehet egy sivatagban a hangyák egyik királynőjét megtalálni (hangyakirálynő = egy olyan pont, aminek a bármely nyílt környezetében végtelen sok hangya van)? A valódi kérdés annak a bizonyítása, hogy végtelen és korlátos számhalmaznak van torlódáspontja. A tréfás ötlet szerint első lépésként ketté osztjuk a sivatagot, majd az egyik felét átszórjuk egy homokszitán. Ha csak véges számú hangya akad fel a szitán, akkor a másik felével folytatjuk az eljárást az előző lépésben leírt módon.

6. A matematikaoktatás realizációs fázisa

A Miskolci Egyetemen az oktatás jelenleg négy különböző szinten valósul meg:

- Felsőfokú szakképzés (pl mérnökasszisztens képzés) (4 félév)

- Főiskolai szintű képzés (6 félév)
- Egyetemi szintű képzés (10 félév)
- Phd. képzés (6 félév)

A négy szintre lebontott képzésről a CD mellékletben találhatók a 2003/2004 évre vonatkozó adatok.

A Gépészmérnöki Karon a mérnökasszisztens képzésben az egyetem egy közös akkreditációs anyagot nyújt be a képzésben részt vevő középiskolákkal, az oktatást a középiskolák tanárai végzik, a tárgyak előírásainak teljesítését a Miskolci Egyetem oktatói egy ún. minőségbiztosítási folyamat keretében ellenőrzik. Ez a tananyaggal kapcsolatos megbeszéléseket, konzultációkat, a tárgy oktatásának a követését és a vizsgáztatásban való aktív részvételt jelenti. Jelenleg négy különböző középiskolában is folyik ilyen képzés, gépészmérnöki és villamosmérnöki szakirányban. Az itt végzettek az előírt különbözeti vizsgák letételével beiratkozhatnak másodévre a Gépészmérnöki Karon, gépészmérnöki, vagy villamosmérnöki főiskolai szakon. A főiskolai szakok közt fontos szerepet játszik még az itt indított Programozó matematikus szak, amelynek már a második évfolyama végez.

A főiskolai szakok végzettjei számára is nyitott az a lehetőség, hogy az előírt különbözeti vizsgák eredményes teljesítése után beiratkozhassanak harmadévre az egyetemi szakokra.

A Miskolci Egyetem Gépészmérnök Karán a következő szakok vannak.
- Egyetemi szintű gépészmérnök képzés
- Műszaki informatikai szak
- Műszaki menedzser szak
- Energetikus mérnök szak
- Mechatronikai mérnök szak

A PhD képzés a Gépészmérnöki Kar két doktori iskolájában folyik:
- Sályi István Gépészmérnöki Doktori Iskola
- Hatvani Lajos Informatikai Doktori Iskola.

A különböző szintek közti **átjárhatóságot** a kreditrendszer alkalmazásával, a képzési formák és az adott képzés sajátosságainak a figyelembe vételével **az egyetem biztosítja.** A Miskolci Egyetem Matematikai Intézete oktatja az egyetem négy karán, a három mérnöki kar mellett a Gazdaságtudományi Karon is, a matematika tárgyakat egyetemi és főiskolai szinten egyaránt. Az intézet két tanszéke által oktatott tárgyak összesítése a dolgozat **CD-mellékletének Oktatás** könyvtárában olvashatóak.

A Miskolci Egyetemen a matematikaoktatás realizációs fázisa meglehetősen egyszerűsített. Két fő formája az előadás és gyakorlat, az ún. akadémikus oktatás keretében zajlik.

Ez megint egy olyan kérdés, amiben nem merítjük ki az összes lehetőséget, ezekre néhány példát sorolnék fel.

6.1. Az egyetemi matematikaoktatás hagyományos formái

Az előadások és gyakorlatok váltakozása elvben megvalósítja az ismeretközlést, az ismeretek megértését, és az elsajátítását is részben,

mivel a gyakorlatokon az elméleti kérdések jobb megértésére feladatokat oldunk meg.

A mérnökképzés mai rendszerében az alapozó tárgyakra és ezeken belül elsősorban a matematikára hárul az a hálátlan feladat, hogy a hallgatókat a tanulási képességeik és készségeik szerint megszűrje, és az átlagban három félévi matematika után tanított mérnöki szaktárgyakat már csak ez a válogatott hallgatóság ismeri meg. Ebben a formában a hallgatók motivációja a matematikatanulásban szinte csak arra összpontosul, hogy a három félév matematika, a két kollokvium és egy szigorlat csak "akadály", amin túl kell lépniük. A hallgatók jelentős hányada anélkül lesz pályaelhagyó, hogy halvány elképzelése lenne arról, amit végzett mérnökként dolgozna. **A motiváció alacsony szintjét a felvételi rendszer is döntően befolyásolja.** A felvételiző elvileg korlátlan számú helyre jelentkezhet, tehát a középiskola amúgy sem ellentmondásmentes világát éppen túllépő fiatal elvileg bármely, és így ad absurdum az összes induló képzésre jelentkezhet. Ezek után elképzelhető az olyan felvételiző, aki orvosi pálya mellett, jogász, közgazdász, informatikus, programozó matematikus, gépészmérnök, angol nyelvtanár, kohómérnök vagy teológus hallgató szeretne lenni.

A felvételizők kisebb hányada választotta első helyen azt a mérnöki képzést, amire végül bejut, bár a mérnöki karok általában feltöltik a meghirdetett helyeket, de az elsőévesek jelentős része máris kényszerpályán érzi magát. Ez pedig nem erősít meg a tanulás, és ezen belül a matematika tanulás pozitív motivációját. Marad a fenyegetettség, "lemaradsz, ha kimaradsz" jellegű kényszer.

A műszaki egyetemeken a matematika oktatásának alapvető célja **a matematikai fogalmak és műszaki alkalmazások közti kapcsolat "működésének" a megtanítása**, vagyis az, hogy egy műszaki kérdés mögött milyen típusú matematikai feladat rejlik.

Tehát a műegyetemeken oktatott matematika nem öncélú, hiszen a hallgató egy tételt, eljárást nem azért tanul meg elsősorban, hogy újabb tételek sorának bizonyítását megértse, hanem főként azért, hogy valamilyen mérnöki tárgy tanulásában hasznosíthassa azt.

A hallgatók motiválása a mérnöki egyetemi oktatásban ezek alapján kézzel fogható kellene legyen és mégis a motiváció hiánya tűnik a viszonylag gyenge eredmények magyarázatának. A mérnökképzésben a matematika elhelyezése a tananyagban nyilvánvalóan adódik, alapozó tantárgy lévén az első három-négy félévben kap helyet. Ugyanakkor a fent említett motivációs szempont azt indokolná, hogy az alapvető mérnöki ismeretek birtokában kellene elkezdje a hallgató a matematika tanulását, majd az itt szerzett matematikai "fegyverzet" birtokában kellene a mérnöki tudományok magasiskoláját kijárnia.

Ebből a szempontból a Bologna-folyamat és annak megvalósítása során a műszaki felsőoktatásra váró átalakítás talán ebben az irányban történő elmozdulás lesz.

6.2. A Bologna-folyamat alkalmazásának lehetséges következményei a matematika oktatásában

Úgy vélem, hogy a fent vázolt helyzeten **bizonyos fokig változtathat a Bologna folyamat szerint felépülő kétszintes oktatási rendszer. A tervezett BSC fokozat** esetén az az igény merül fel Európa szerte, hogy ez **a gyakorlathoz közelebb álló,** a beindított termelési folyamatokat felügyelő, **végrehajtó típusú szakemberek képzését jelentené**, és ezek szerint a matematika tárgyak oktatása is az alapképzésben egyszerűsíthető, főleg az adott mérnökképzés jellegének megfelelő szakterület matematikai feladatainak gyakorlati megközelítését jelentheti.

A második fokozat, **az MSc képzésben** a hallgatók tanulási motivációja fokozódik, irányítottabbá válik és **a mélyebb matematikai eszköztár hasznossága a várhatólag tervezési és kutatási feladatokra készülő mérnökhallgatók számára is kézzel fogható**.

6.3. Matematikaoktatási módszerek

6.3.1. A hagyományos módszerek és a számítógéppel segített oktatás

Az előadások és gyakorlatok váltakozása elvben megvalósítja tehát az ismeretközlést, az ismeretek megértését, és az elsajátítását is részben.

A diákok egyre nagyobb létszáma és az oktatók számának csökkenése, vagy relatív csökkenése arra vezet, hogy az előadásokon egyre több hallgató van jelen. A nagyobb számú hallgatóság esetén a**z előadó és a hallgatók közti közvetlen kommunikáció nehezebbé válik**. Az előadó egyre kevésbé érzékeli azt, hogy a hallgatók milyen mélységben értik az előadott anyagot, azok az apró visszajelzések, amiből ez kiderülhetne, egyre inkább esetlegesek.

A tanulás során **a hallgató egy statikus folyamat része**. Figyelheti az előadást, igyekezhet azt alaposan megérteni, és a gyakorlaton néhány egyszerű példa megoldásának megértésével - amibe esetleg bekapcsolódhat a táblánál dolgozva egyes gyakorlatvezetők esetén - mintegy leellenőrizheti a saját tudásának, az anyag megértésének szintjét. Az, hogy a hallgató a táblánál dolgozzon, sajnos egyre ritkábban fordul elő, mivel a gyakorlatokon is nagy a hallgatók száma, és a hallgatóknak nem kötelező sem az előadást, sem a gyakorlatot látogatni.

A tanult anyag elsajátításának ez a legegyszerűbb ún."kétlépcsős" módszere, amit elég későn követ a beszámoltatás, a vizsga. A vizsgaidőszakban, a hallgató a saját és mások jegyzetei, majd tankönyvek alapján igyekszik felidézni a néha már 7-12 héttel azelőtt tanultakat, konzultációt kérhet, igyekszik megszerezni az előző évben feladott írásbeli vizsgasorokat, hogy az azokban előforduló típuspéldákból felkészülhessen.

Általában nem a kijelölt anyagrész megértését, hanem az adott, már korábbi vizsgán felszínre kerülő kérdéseket tekinti a vizsgára készülés alapjának. Ha a vizsgáztató bizonyos meghatározott, akár széles körből válogatott feladattípusokat használ, akkor ezzel a diákot még jobban megerősíti ebben az elképzelésében.

Az előadások egy része **a korszerű szemléltetés eszközeit, írásvetítő, számítógép, számítógép kivetítése**, videó-technika arra használja, hogy az előadás jobb megértését célozza meg. Ez természetesen önmagában nem baj, sőt **kifejezetten hasznos is lehet**, hiszen a megértés során a hallgatónak több információt nyújthat, és az előadó-hallgató kommunikációs vonalat szélesíti.

Az elhangzó és táblára írt információ a hallgatónak auditív és vizuális inger, mozgás közbeni ábrázolás, színes képi információ kiegészítheti, megerősítheti az előzőeket, de nem helyettesítheti. Az audio-vizuális eszközök túlzott használata és a nagyon olajozottan pergő előadás **elveszítheti az élő jellegét, egyre inkább moziszerűvé válik**, egyre kevésbé fontos az előadó jelenléte. Egy jó felkészültségű technikus és az előre elkészített oktatófilm esetleg fölöslegessé is teheti az előadó személyét. Ez lenne a jövő? Akkor a világ legjobb tanárai taníthatnának úgyszólván a világ legeldugottabb sarkán lévő egyetemen, legfeljebb a kép minősége különbözne, az is csak az alkalmazott technika miatt.

6.3.2. Távoktatási módszerek

Egy lépéssel továbbmenve automatizált eszközök esetén még a technikus is fölösleges lesz, vagy a távoktatás eszközeinek fejlődésével, a hallgató otthon maradhat, egy távoli helyről, akár más kontinensről is "jelen" lehet az előadáson, sőt az sem fontos, hogy egy időben minden hallgató ugyanazt tanulja, elég akkor "futtatnia" az előadást, ha éppen ráérő kedvében van.

Ez az utópisztikus elképzelés csak abban sántít, hogy a **távoktatás módszertani kutatása arra mutatott rá, hogy a számítógép előtti távoktatás akkor hatékony, ha az oktatott anyagot egy csoport egyszerre, egy időben, órarendszerű beosztással tanulja (esetleg egymástól eltérő ritmusban és mélységben, az egyén képességeinek megfelelően)**. Ugyanakkor szükséges egy oktató "jelenléte", aki szintén a számítógép előtt ülve az "órarend" szerint követi a hallgatók haladását a megértésben, és "rendelkezésre áll" a felmerülő kérdések - ezek a visszajelzések- megválaszolására. A távoktatás szakemberei úgy vélik, hogy **az optimális méret egy 10-15 fős hallgató csoport** és egy-két oktató együttműködése.

Vagyis **a távoktatás kutatása arra is feleletet ad, hogy a kiscsoportos oktatás kétezer éves formája mai is korszerű.**

A gyakorlatokon ez a kiscsoportos oktatás kellene előtérbe kerüljön, itt lenne a helye a hallgató aktív részvételének az oktatási folyamatban. A valóságban a gyakorlatok nagy létszámú hallgató részvételével feladatmegoldó szemináriumokká válnak, ahol a hallgató legfeljebb bólinthat, ha kérdezik, hogy érti-e az anyagot. Arra rendszerint nincs idő és mód, hogy a hallgatót kihívják a táblához, ez a feleltetés-szerű alkalom egyre inkább eltűnik, eltűnik ez a fajta visszajelzés a tananyag megértési fokáról, a hallgató tudásának ellenőrzése, illetve a hallgató számára a visszajelzés arról, hogy az amit megértett mennyire használható.

Természetesen a matematika előadások a műszaki egyetemeken sem jelentenek kivételt az általános szabályok alól, de annyiban sajátosak, hogy a vizuális eszközök alkalmazása többnyire nem a jelenségek bemutatását, vagy laboratóriumi körülményeket helyettesítenek, hanem a számítógép által nyújtott lehetőségekre támaszkodnak. És ez legalább kétélű fegyver.

Egyrészt a számítógépen futtatható egyre igényesebb matematikai szoftverek Maple, Matlab, Mathematica egyre könnyebben kezelhetőek, a **programok egy része szinte sugallja azt, hogy az előadás szövegét is már az adott programkörnyezetben** szerkessze meg a tanár, és így az alkalmazások **"természetesen" kigördíthetők egy gombnyomásra**. Ez nagyon hatásos, ha a hallgatóság már tudja, hogy miről van szó.

Akik megtanulták a differenciál- és integrálszámítás apró buktatóit, és bizony megkínlódtak egy-egy feladattal, feladat- típussal, átlátják és **értékelik azt, hogy a szoftverek milyen könnyed mozdulattal kezelnek nehéz feladatokat is**, de lehet, hogy az egyetemi hallgató egy szoftverben csak a gépi működést fogja elsődlegesen meglátni. Fontos azonban az, hogy a gépben csak egy eszközt, a matematika alkalmazását megkönnyítő eszközt lássa a hallgató. **Cél és eszköz bonyolult kapcsolatában maga a matematika a cél elérésének útja, a gép, mint eszköz ezt az utat szolgálja, és végül a matematika a mérnöki probléma megoldásához vezető út maradjon.**

A számítógép **alkalmazásának veszélyeit csak ritkán szokás emlegetni, pedig ismeretük fontos, tudomásul kell őket vennünk, és tudatosan védekeznünk kell ellenük.** Ezek a veszélyek abban rejlenek, hogy bármilyen fejlett is a technika, csak akkor alkalmazható eredményesen az oktatásra, vagy a tanulásra, ha a hallgató ismeri azt a matematikai fogalmat, azt a matematikai metakommunikációs környezetet, amiben elhelyezhető az adott feladat, és ekkor valóban a gép szerepe hasznos.

6.4. Aktív módszerek a matematika oktatásában

A matematika oktatásának előbb vázolt statikus folyamata néhány egyszerű módszer, a továbbiakban aktív módszerek, alkalmazásával **dinamikussá tehető.**

Ezeknek az aktív módszereknek a lényege az, hogy a hallgatókat bevonja az oktatás-tanulás folyamatába. Mivel ezek a módszerek az oktatott anyagtól is függnek, áttekintésük során példákra hivatkozunk.

6.4.1. Előadás közben használható aktív módszerek

- A hallgatók egy csoportjának, egy vagy több hallgatónak direkt megszólítása.

Pl. : A vektorok vektoriális szorzatának egyik, a fizikából is ismert alkalmazása az elektromágneses indukció vektor számítása, amint azt a villamosipari szakközépiskolák végzettjei saját tapasztalatukból is tudhatják.

- A hallgatók véleményének, sejtésének megkérdezése az oktatott anyagra vonatkozólag.

Pl. : A páros és páratlan függvények fogalmának tanításakor célszerű megkérdezni, hogy vajon ezen a két függvénytípuson kívül van-e még más függvénytípus is, azaz van-e olyan függvény, ami se nem páros se nem páratlan, s ha van, keressünk rá példát.

Pl. : A sorok oktatásakor célszerű egy néhány példa bemutatásával kiemelni azt, hogy

egyes sorok mint az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}+...$ mértani sor konvergens,

de a harmonikus sor $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ divergens. Mi ennek az oka?

Mi a hallgatók sejtése a $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$ sorra vonatkozóan?

Előzőleg az is megkérdezhető, hogy melyik a nagyobb 2^n, vagy n^2?

- Az oktatáshoz kapcsolódó, rövid részfeladatok csoportos elvégeztetése.

Pl.: A Cramer szabály alkalmazásaként egy példa közösen is megoldható, a részfeladatok , a determinánsok kiszámítása, kiosztható tankörönként.

- Ellenpéldák, vagy hibás gondolatmenetre épülő megoldások közlése.

Pl. : Keressük meg együtt a hibát a következő megoldásban. A $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+8}{2x^2-8x+14}$ "számításakor" a l'Hospital szabály ismételt alkalmazásával előbb a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-5}{4x-8}$, majd a $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ adja a "helyes" eredményt.

A hiba nyilván az, hogy az adott határérték számítására nem alkalmazható a l'Hospital szabály, dacára annak, hogy a helyes eredmény valóban $\frac{1}{2}$, de ez az x = 1 helyettesítéssel egyszerűen az eredeti törtből kapható.

6.4.2. Gyakorlatokon használható aktív módszerek

Általában az előadásokon használható módszerek mindegyike alkalmas a gyakorlati munka dinamikusabbá tételere, és vannak sajátos, csak a gyakorlatokon alkalmazható módszerek, mint:

- A hallgató bevonása a feladatok megoldásába. Ez általában esetlegesen történik, a jelenlévő hallgatók közül névsor alapján, vagy csak az amúgy aktívabb diákok szerepeltetésével. Célszerűbb lenne előre közölni a beosztást, ezzel lehetőség adható a hallgatók alaposabb felkészülésére a gyakorlatra, hiszen előre tudják, hogy ki kell menniük a táblához, ez **igazán akkor hatékony, ha előre tudhatják azokat a feladatokat, amikből mintegy "felelniük" kell.**

Pl. : A jövő heti gyakorlaton a l'Hospital szabály alkalmazásra oldjuk meg a hallgatók rendelkezésére bocsájtott 15-20 feladatot tartalmazó feladatsor 5-6 feladatát, és a csoportból a feladatokat a táblánál a következő hallgatók oldják meg...

- Kisdolgozatok rendszere. A későbbiekben részletesen leírt projektmódszer alkalmazása.

6.4.3. A félévközi munka beszámítása

A jelenlegi rendszer a minimális félévközi munkára alapoz, hiszen az aláírás megszerzéséhez a legtöbb követelmény leírása (nyílván adminisztratív okokból) úgy kezdődik "Vizsgára az jelentkezhet, aki legalább elégséges szinten megírja a félévközi zárthelyiket...". Semmi sem ösztönzi tehát a hallgatót a félévközi munka magasabb szintű elvégzésére. **Szokás volt** ugyan a legjobbaknak **megajánlott jegyet** adni, de ez egy nagyon szűk réteget jelentett, csak a legjobbakat. **Mi legyen a közepes, vagy közepesnél valamivel jobb képességűekkel?**

Pl.: A félévközi munka beszámítására a Lineáris algebra c. tárgy oktatásában az első éves gépészmérnök hallgatók és az első éves programozó matematikus hallgatók számára a következő módszert dolgoztam ki.

A vizsgajegyet egy 100 pontos rendszerben lehet megszerezni, ezek egy része a kötelező munka, más része önkéntes szorgalmi feladatok alapján, valamint a vizsgazárthelyin elért pontokból tevődik össze.

A vizsgára hozható pontokat a két, kötelezően megírt félévközi zárthelyi dolgozat pontszámának a fele, vagy a pótzárthelyik pontszámának a negyede jelenti. A félévközi, vagy pótzárthelyi dolgozatok akkor sikeresek, ha legalább 10 pontot elérnek a 25 pontból. Ezen túl, a projektmódszer alkalmazásaként, két egyéni feladat vállalható, ezekkel feladatonként még további 0-5 pont szerezhető, tehát a vizsgára hozható pontok alsó határa 5 pont, felső határa 35 pont.

A gépészmérnök hallgatók a kétórás írásbeli vizsgán 65 pont szerezhetnek, sikeres a vizsgadolgozat, ha legalább a 30 pontot eléri. A programozó matematikusok 30 pontot érő írásbeli beugró után, ami 15 pont felett számít sikeresnek, szóbeli vizsgát tesznek, ahol 35 pontot szerezhetnek.

A vizsgajegy a hozott és szerzett pontok alapján a következőképp számítható:
- 89 pont felett jeles
- 74-88 pont között jó
- 59-73 pont között közepes
- 43-58 pont között elégséges
- 43 pont alatt elégtelen

Ennek a pontozási rendszernek célja a rendszeres, időben elvégzett munka ösztönzése, és a jobb minőség jutalmazása.

Így például egy olyan gépészmérnök hallgató, aki időben megszerez egy közepes pontszámot, mondjuk ír két 15 pontos félévközi zárthelyi dolgozatot és bead egyet a két szorgalmi dolgozatból, ezzel mondjuk még 4 pontot szerezve, a vizsgára már 19 pontot hoz és egy 40 pontos vizsgadolgozattal már a közepes vizsgajegyet szerezhette meg.

Ellenpéldaként a minimális hozott pontszámmal - ez 5 pont, amit a pótzárhelyik minimális teljesítésével, vagy aláíráspótló vizsgán szerezhet - a 37 pontos vizsgadolgozat még elégtelen vizsgajegyet eredményez. A félévközben szerezhető maximális pontszám, a 35 pont mellett, a minimális 30 pontos vizsgazárthelyi is bőven elegendő a közepes jegyhez.

Ennek **a pontrendszernek a tapasztalata** az, hogy a hallgatók bizonyos része felismerve az előnyeit, vállalta a félévközi többletmunkát, és **tapasztalható az igény a minimálisnál magasabb tudás elérésére**. A legszembetűnőbb az volt, hogy mintegy 8-10 olyan félévismétlő hallgató is belekapcsolódott ebbe a rendszerbe, és igyekezett magasabb félévközi pontszámot gyűjteni, akik már előző félévben megszerezték az aláírást, de nem voltak elégedettek az előző évben szerzett minimális pontszámukkal, és kérték, hogy a vizsgára hozott pontjaikat az önként vállalt megismételt félévközi zárthelyik, és kisdolgozat(-ok) alapján számítsuk.

6.4.4. Projektmódszer

A projektmódszer történetéről

. A projekt fogalma tanulási-tanítási módszerként az 1900-as évek elején fordult elő először az USA-ban [65]. Dewey a projekt-elvet, mint a gyakorlati-technikai problémák megoldására vonatkozó heurisztikus eljárást tekintette.

Kilpatrick a következőket tekinti a projektmódszer alapjának:

- A tanulás aktív folyamat (cselekvés)
- A tanulónak "teljes szívvel" részt kell vennie ebben a cselekvésben
- A cselekvés célirányos
- A cselekvést szociális kontextusban folyik (csoport, együttműködés).

Európában két jelentősebb irányzat volt, korábbaǹ Kerschensteiner munkaiskolai koncepciója Németországban, majd a szovjet reform-mozgalmak következtében, 1930/31-ben az összes szovjet iskolában bevezették a projektmódszert, majd egy évvel később visszavonták a rendelkezéseket [65].

A projektorientált matematikaoktatás főbb jellemzői Ambrus [65] szerint:

- orientációt jelent a tanulót körülvevő környezet problémáira
- a tanuló szükségletei, érdeklődése kerülnek a matematikaoktatás középpontjába
- a tanulói autonómia
- a tanulói teljesítmény kritikus értékelése, amibe bevonhatók a tanulók is
- a csoportmunka és a közös megbeszélés előtérbe állítása.

Példa. Projektmódszerrel egy tanulócsoport arra a szituációra keres megoldást, hogy: "Valaki autót szeretne vásárolni, és azt 10 évig működtetni. Mi a célszerűbb, használt autót venni, azt fenntartva először spórolni és készpénzért újat venni, vagy egyből újat vásárolni, kölcsönt felvéve?

A projektmódszer lényege

. A megértés, elsajátítás, "belsővé válás", felhasználható tudás, ezek a tanulás fázisai. Ezt az összetett hatást szolgálhatja a projektmódszer, amelyben maga a tanuló/hallgató is részese az adott téma kidolgozásának, és lényegesen jobban megérti azt. A másoknak elmagyarázott anyagrészt sokkal mélyebben meg kell értenie a hallgatónak, az anyag belső, memória síkon történő logikai megszervezése is megvalósulhat, ez a projektmódszer lényege.

A projektmódszer alkalmazása a felsőoktatásban is teret nyert és sajátos módszerek kialakítását tette lehetővé, lásd pl. a Unique and Excellenct - Ingenieurpädagogik 2000 c. IGIP konferencián elhangzó előadások egy részét [130], [75], [82], [153], [161].

Gibson ír le [114] egy olyan kísérletet, amelynek során az **Engineering Design** c. tárgyat az Ipari mérnök és Információs rendszerek program keretében, az írországi National University of Ireland (Galway)-on, **szinte kizárólag a projektmódszer alkalmazására építették**. Ez a tárgy két féléves, és a négyéves Bachelor képzés harmadik évében a követelmények mintegy 20%-át jelenti.

Az értekezés szerzője által kialakított, és a Miskolci Egyetemen negyedik éve használt egyéni- és csoportprojektmódszer bizonyos tekintetben hasonlít, más szempontból különbözik a fent ismertetett eredményektől [16].

Alkalmazhatunk egyéni és csoport projekteket, a kettő között kevés az eltérés, ezért nem tárgyaljuk külön őket, hanem a csoportprojektmódszert vizsgáljuk.

A módszer alkalmazásának lépései:

- Témafelvetés
- Önkéntes feladatvállalás, együttműködők kiválasztása
- Munkaterv, részfeladatok megbeszélése
- A téma kidolgozásának követése, esetleges módosítások
- A téma bemutatása - kiselőadás, dolgozat, beszámoló.

Köztes tevékenységek:

- Konzultációs lehetőség
- Irányított csoportmunka, vagy elővezérelt önálló munka.

Előnyei:

Összetett feladatok - szintetizálás, elemzés.
Csapatmunkára felkészülés - "Team work".
Kisdolgozat - későbbi publikációk.
Kiselőadás - verbális készségek.

Hátrányai:

Idő- és munkaigényes.
Nehéz minden hallgatóra kiterjeszteni, főleg a "tömegoktatás" körülményei között.

A következő fejezetekben a projektmódszer gyakorlati megvalósításának két példáját elemezzük, a **MacTutor projekteket** és a Miskolci Egyetemen alkalmazott, ún. **egyéni és kiscsoportos**, papír- és ceruza (paper and pencil) projekteket.

7. A MacTutor projektek alkalmazásának tapasztalatai

7.1. A Mathematical MacTutor

A skóciai St Andrews Egyetem Matematikai intézetében kifejlesztett Mathematical MacTutor egy olyan matematika oktatási és tanulási szoftver, ami lehetővé teszi a projektmódszer egy változatának, a **MacTutor projekteknek** az alkalmazását.

A szoftver kidolgozói Edmund Robertson és John O'Connor a mai napig állandóan tökéletesítik azt a programcsomagot, ami 1992-ben az angol királynő részéről nyerte el a legjobb oktatói programnak odaítélt Partnership Award-ot, majd 1994-ben az Európai akadémiai Szoftver Nagydíjat, és ez a nagydíj részben az általam kezdeményezett magyar változatnak is köszönhető, ezzel igazoltuk, hogy a szoftver az általunk készített fordító programmal együtt alkalmas bármely nyelven történő használatra.

Ez a programcsomag tartalmaz egy **egyedülálló matematika történeti részt** is, aminek egy kibővített változata, a **MacTutor History of Mathematics** [138] az interneten elérhető bárki számára. Népszerűségére és ismertségére jellemző adatok szintén az interneten elérhetőek, naponta átlagosan háromszázezer "virtuális látogató" keresi fel. Mivel ez egy állandóan bővülő adatbázis a jelenlegi mintegy 2100 matematikus életrajz és a hozzá fűződő sokezer szócikk száma is szinte naponta változik, növekszik. Ez az internetes matematikatörténeti adatbázis sokféleképpen használható. Vannak, akik csak nézegetik, mások ki is nyitják, ugyanis egyik igen népszerű funkciója az, hogy minden naphoz hozzárendeli azoknak matematikusoknak a nevét és adatait, akik azon a naptári napon születtek, vagy haltak meg, lásd a **Mathematicians of the day** [139] oldalt az interneten. Lehetőség van megtekinteni a matematikusok születéshelyét ábrázoló oldalt, **Birthplace Map,** név és téma szerint keresni adatokat **search form**, vagy csak "lapozgatni" a programban. A **Special curves [169]** fejezet több, mint 80 ismert, vagy kevésbé ismert görbe adatait tartalmazza, esetenként a függvény különböző alakjait, mint polár-koordinátás, vagy paraméteres stb. függvények.

7.2. MacTutor projektek

A **Using Computer Algebra c. TEMPUS - JEP 06044** együttműködés keretében 1994-96 közt alaposan megismerhettem a Mathematical MacTutor szoftvert, részt vehettem annak fejlesztésében, a magyar változat kidolgozásában és tanulmányozhattam annak felhasználását a matematika oktatásában, majd a **TEMPUS - IMG-95-H-2019 vendégtanári ösztöndíj** keretében magam is részt vehettem a projektmódszer oktatásában a St Andrews-i Egyetemen. Az alapvető matematikai tárgyak oktatását a 12 hetes félévben 3-3 MacTutor projekt egészíti ki, ezek elnevezése a tárgyak elnevezését követi, pl. M3-MacTutor projects. A projekt oktatása az adott tárgy, az említett M3 a Mathematics 3 oktatásával párhuzamosan, azt kiegészítve történik, heti egy óra számítógéptermi foglalkozásként, ebből az első hét a projekt felvezetése, ismertetése, majd egyéni konzultációs lehetőség biztosítása mellett a hallgatók elkészítik a projekt beszámolót, azaz egy elővezérelt egyéni munka folyik az oktató jelenlétében.

A hallgatók az órarendi foglalkozáson túl bármennyi időt fordíthatnak rá a dolgozat elkészítésére, mivel a MacIntosh számítógéptermek napi 24 órában használhatók, természetesen az órarendi foglalkozás esetén előnyben vannak azok, akik az órára jönnek, de a szabadon maradó gépeket a többi hallgató használhatja.

A harmadik héten beadott írásbeli dolgozat értékelése 0-1-2 pont, majd ezek a pontok a félév végi vizsgajegybe 6% erejéig beszámítanak.

A MacTutor projektek az adott matematikai tárgy anyagához szorosan kapcsolódnak, de az egyéni munkának megfelelően sok részlet és ötlet alapján kiegészülnek. A diákok a MacTutor program különböző fejezeteit használva kísérleteznek az adott feladattípusokkal, interaktívan válthatnak a fejezetek között, beleértve a matematikatörténeti részt is.

A programcsomag vizuális szemléltetésre és a tanulmányozott kérdések dinamikus kezelésére alkalmas, egyszerű kezelhetősége szinte provokálja a diákok aktív bekapcsolódását, az "akkor mi lesz, ha megváltoztatom a feltételek egy részét" típusú kísérletezést.

A St Andrews-i Egyetemen tartózkodva kidolgoztam egy néhány olyan MacTutor projektet is amelyek mérnökhallgatóknak oktatott matematika tárgyak kiegészítésére is alkalmasak, és ezek közül néhány - a paraméteresen adott függvények, polár koordinátákban adott függvények, bizonyos felületek ábrázolására vonatkozó projektek bekerültek a St Andrews-i Egyetem projekt-tárába is.

Ugyanakkor ezeknek a projekteknek a magyar megfelelőjét is elkészítettem, majd ezeket a Miskolci Egyetemen is alkalmaztam az általam oktatott tárgyak gyakorlati oktatásának kiegészítéseként. Az eredeti, angol nyelvű projekteket is használtam a Miskolci Egyetemen az angol nyelvű képzésben mindhárom félévben (Mathematics 1-3), valamint a CEEPUS együttműködés keretében a Miskolci Egyetemen tanuló külföldi diákok (3 szlovén, 2 román) oktatásában is. A H 127 CEEPUS hálózat Computer Algebra Driving Licence nyári egyetem programjában is beiktattuk a MacTutor projekteket.

7.3. A MacTutor projektek alkalmazásának előnyei és hátrányai

A módszer előnye az, hogy **átfoghatja az egész évfolyamot** (St Andrewsban), a számítógép használatával jól **alkalmazkodik a hallgatók egyéni munkatempójához, alkalmas az oktatott anyag különböző részeinek**

összekapcsolására, a feladatok alkalmazhatóságának megértésére. A programcsomag könnyen kezelhető, nagyon jó a vizuális megjelenítése és ezáltal megvalósítható a tanult anyagnak a rögzítése vizuális síkon is (Bruner elmélete szerinti enaktív és ikonikus reprezentáció közti kapcsolat valósul meg). A kísérletezés során megfogalmazott megfigyelések, a leíráshoz használt fogalmak a szimbolikus reprezentációt segíthetik.

A módszer hátránya az, hogy **ugyanazt a projektet használja minden hallgató, így megnő a másolás veszélye**, tehát az önálló munka veszélybe kerülhet, a hallgatók részéről nagy önfegyelemre van szükség azért, hogy valódi célját elérhesse.

Egy másik **hátránya az, hogy nem fedi le az oktatott matematika teljes egészét**, inkább a kényes, nehezen érthető és könnyen vizualizálható fejezetekre összpontosít.

Hátránynak számít az is, hogy jelenleg a hazai gyakorlatban nem terjedt el a MacIntosh számítógépek használata, és így például a Miskolci Egyetemen mindössze 4-5 ilyen számítógép van, ebből kettő a Matematikai Intézetben. Ezt a hátrányt részben ki lehet küszöbölni a kivetítők alkalmazásával, és az egyéni MacTutor projektek helyett valamilyen csoport projektként működtetni, de ezzel éppen az egyéni munka jellege vész el, igaz a csapatmunka viszont megerősíthető. Éppen **ezért volt alkalmas az angol nyelvű képzésben és a külföldi hallgatók oktatásában, mivel ők kis létszámban voltak.**

A számítógépek korlátozott száma volt az egyik oka annak, hogy kidolgoztam és negyedik éve alkalmazom a projektmódszer egy másik változatát, ami egyéni vagy csoportos kisdolgozat elkészítésével és annak nyilvános (gyakorlatokon történő) előadásával végződik.

8. Az egyéni és kiscsoportos projektek alkalmazásának tapasztalatai

8.1. A projektek célja

Az egyéni és kiscsoportos projektmódszer nem hivatott helyettesíteni az oktatás klasszikus formáit, hanem csak kiegészíteni, elmélyíteni azt, lehetővé téve az egyéni munkán keresztül a hallgatók aktívabb bekapcsolódását a képzés egészébe. A projektek eredménye nyilvánossá és elérhetővé válik a hallgatók számára.

8.2. A projektek felépítése

8.2.1. Témafelvetés

Az általam oktatott tárgyak esetén az előadás keretében, néha szünetében, vagy a gyakorlatokon az adott anyagra vonatkozó, vagy azzal kapcsolatba hozható további alkalmazásokat említek, megadva a forrásmunkák adatait és körvonalazva azt, hogy a továbbiakban milyen formában hasznosíthatóak ezek az ismeretek.

Megemlítem azt, hogy 1-2 esetleg 3, különböző kisdolgozat is készülhet az adott téma terjedelmétől függően.

8.2.2. Önkéntes feladatvállalás, együttműködők kiválasztása

A felvetett kisdolgozat témákra a hallgatók önkéntesen jelentkeznek, az előadáson éppen megértett, érdekesnek, alkalmazhatónak talált anyagrésszel kapcsolatosan. A jelentkezés az előadás szünetében, konzultációkon, vagy gyakorlaton történik, és egy téma elvállalásakor a jelentkező (esetleg tanácsot kérve) azt is eldönti, hogy egyénileg, vagy egy-két társával közösen készíti el a kisdolgozatot. A projektmódszer itt leírt használatában részt vettek Székelyné Homolya Szilvia, Szilágyi Szilvia és Rozgonyi Erika kollegák is, akiknek segítségével aránylag nagy számú hallgatót sikerült bevonni ebbe a munkába.

8.2.3. Munkaterv, részfeladatok megbeszélése

Néhány különleges témának 1-2 oldalas írásbeli felvezetője adott, más esetekben csak a szóbeli utasítások, vagy az előadáson elhangzottakat vehetik a hallgatók alapul, és a témához kapcsolódó elérhető irodalmat.

Konzultáción a hallgató a témával megismerkedik, és az első héten bemutat egy előzetes munkatervet, és beszámol arról, hogy milyen forrásmunkákat talált, megbeszéljük a dolgozat elkészítésének formáját (Word.doc, Latex.tex file vagy hasonló).

8.2.4. A téma kidolgozásának követése, esetleges módosítások

A következő 2 hét alatt a hallgató konzultációt kérhet a feladat kidolgozásával kapcsolatban, ha elakad újabb segítséget kaphat, ha esetleg módosítani akarja a kisdolgozat témáját ezalatt megteheti. Gyakran előfordul, hogy a témát túl kevésnek, vagy túl soknak találja a hallgató, vagy éppen valamelyik áttanulmányozott anyagban érdekes kiegészítést talál, amit szintén be akar venni a dolgozatba.

8.2.5. Beszámoló

Három hét után az első gyakorlaton beadhatja az elkészült kisdolgozatot, ennek **egy példányát a tankör rendelkezésére bocsátja**, egy másik példánya az előadónál marad.

A gyakorlaton 5-10 percben a dolgozat egy általa kiválasztott részletét (kiselőadás) a társainak elmagyarázza, majd a hallgatók és a gyakorlatvezető kérdéseire válaszol.

Ha kiscsoportos dolgozat készült, akkor a beszámolóban és az értékelésben kitérünk arra is, hogy a csoport tagjai milyen részt vállaltak a dolgozat előkészítésében, bemutatásában.

8.2.6. Értékelés

A hallgatók jelenlétében a gyakorlatvezető pár szóban értékeli a dolgozatot és közli a szerzett pontszámot, amit a hallgató a vizsgára hoz a többi, félévközi zárthelyiken szerzett ponttal együtt.

8.3. A módszer előnyei

Irányított csoportmunka, vagy elővezérelt önálló munka történik, a hallgató aktívan foglalkozik a tanult anyaggal.

Az összetett feladatok lehetőséget teremtenek **a tanult anyag szintetizálására, elemzésére**.

A kiscsoportos projekt további előnye **a csapatmunkára felkészülés** - "Team work"-.

Kisdolgozat elkészítésének szerepe felkészülni a későbbi szakdolgozatok megírására, egyben a többi hallgató számára ezáltal válik elérhetővé a kisdolgozatban érintett fejezet.

Fontos az egyéni munka és felelősség kérdése, hiszen a dolgozat nyilvánossá válik, hibáival, előnyeivel, értékelésével együtt.

Kiselőadás jelentősége:

- verbális készségek fejlődése

- szimbolikus reprezentáció megerősítése, a másoknak elmagyarázott anyagrészt sokkal mélyebben meg kell értenie a hallgatónak, az anyag belső, memória síkon történő logikai megszervezése is elérhető.

A **"learning by doing"** elv továbbfejlesztéseként a **" better understanding by explaining"** , vagy **"deeper understanding by explaining"** elv alkalmazása valósul meg.

8.4. A módszer hátrányai

Nagyobb mennyiségű munkát igényel az oktatók részéről.

Nem fedi le, nem fedheti le az oktatott anyag összes fejezetét.

Nem terjeszthető ki, éppen az önkéntes jellege miatt, a hallgatóság egészére, főleg az olyan alaptárgyak, mint a matematika esetében. A projektmódszer alkalmazásának Gibson által leírt felsőoktatási kísérletében [114], amelyben az Engineering Design c. tárgyból az egész harmadik évfolyam számára kötelezővé tették, azt tapasztalták, hogy a módszer előnyei jobban érvényesülnek nagyobb tanulási tapasztalat esetén.

Átfedések, ismétlések nem kerülhetők el.

A hallgatók által elkövetett hibák csak nehézkesen, esetleges utójegyzékkel javíthatók ki.

8.5. A deeper understanding by explaining elve

A **"learning by doing"** elv a begyakorláson keresztül vezet el az adott fejezet alaposabb megértéséhez, a feladatok egy fejezetben tanultaknak alkalmazása mellett az alkalmazással járó kisebb nagyobb nehézségek megoldása során a hallgató mélyebb összefüggéseiben érti meg matematikai tételek "működését", a tételek pontos kijelentésének átismétlése, az alkalmazásukhoz szükséges feltételek ellenőrzésén keresztül a tételek rögzítése és képesség szinten történő beépülése is végbemegy.

Ennek az elvnek a továbbfejlesztéseként a **"better understanding by explaining", vagy "deeper understanding by explaining"** elvről beszélhetünk, hiszen a kiselőadásokra készülő hallgatónak a társai előtt azt kell bizonyítania, hogy nemcsak megértette az adott tételt, alkalmazást, hanem annak elmagyarázására is képes. **A verbális készségek fejlesztése mellett, a hallgatónak át kell gondolnia, hogy a társai milyen kérdéseket tehetnek fel, hiszen azokra is neki kell válaszolni, melyek azok a pontok ahol a megértés során neki is nehézségei támadtak és hogyan sikerült azokon túljutnia.** Nagyon fontos szempontja kiselőadásoknak, hogy egész másképpen, "más szempontból" tudja elmagyarázni az adott kérdést egy olyan valaki, aki a hallgatóság soraiból kerül ki, azokkal összemérhető tudása, és az előadásokon keresztül az oktató is jobban lemérheti azt, hogy miként értették meg a hallgatók az anyagot.

A kiselőadások bevezetésének az is előnyös következménye lehet, hogy a hallgató nem csak a saját kiselőadásának az anyagát kénytelen sokkal alaposabban megérteni ahhoz, hogy azt másokkal is megértethesse, **de az előadó és a társai által elmondottakra is jobban oda kell figyeljen, mivel hivatkoznia kell az anyag összefüggéseire,** legalább a saját előadását megelőző két-három előadást a szokásosnál is nagyobb figyelemmel kell követnie, hogy ne ismételje a mások által elmondottakat.

Ráadásul **a kiselőadások kiértékelését helyben meg tudjuk oldani** és ebbe a hallgatókat is bevonjuk, akkor ez a figyelmi kényszer egy újabb dimenzióval gyarapszik. A hallgatónak arra is gondot kell fordítania, hogy amit elmond, azt a társai is jól fogadják. Természetesen a hallgatói értékelés még más következménnyel is járhat, a kiscsoport szociológiai kérdéseit, esetleges viszálykodást, vagy kölcsönös segíteni akarást is gyakran észrevehetünk. A legjobb a kiselőadás, illetve az ebből az alkalomból elkészített kisdolgozat nyilvános ismertetése, pl. internet, vagy a tankörben néhány másolat kiosztása.

8.6. A kisdolgozatok alkalmazásának eredménye, tapasztalata

Szerencsésnek bizonyultak azok a kisdolgozat témák, amelyek az előadás, vagy gyakorlat anyagához szorosan kapcsolódtak és esetleg **egy egyszerűbb, frappáns megoldásra hívták fel a hallgató társak figyelmét. Ilyenkor a hallgató, még ha közepes képességű is, az adott kérdés "szakemberévé" vált és ez a "presztízs" gyakran eredményezte azt, hogy újabb kisdolgozatot is vállalt.**

A további fejezetekben ismertetett kisdolgozatok között ilyen "presztízsnövelő hatásúak voltak pl. a résztörtek kiszámításának egy gyorsabb módszere, az előző fejezetek egyikében leírt módszer a mátrixok és a komplex számok, kvaterniók fogalmának az összekapcsolására, vagy az értekezésben nem részletezett, Cardano képlettel kapcsolatos kisdolgozatok. A kapott pozitív visszajelzésért valóban meg kellett dolgozni, de nem volt elérhetetlen, amit vállaltak, és ilyenkor a vizsgán is megmutatkozott az eredmény. Mivel a kisdolgozatok vállalása nem volt kötelező, és egy hallgató több dolgozatot is vállalhatott (gépészmérnöki, és műszaki informatika szakon 2, programozó matematikus és közgazdasági programtervező matematikus szakon 3), az eredmények mérése csupán közvetett, de így is jelentős. Nem alkalmazhattunk ún. kontrollcsoportot, hiszen nem lehet eltérő esélyt biztosítani az azonos karon tanuló hallgatóknak, így az eredmények értékeléséhez hozzátartozik azis, hogy nem tudhatjuk, hogy a kisdolgozatok alkalmazása nélkül.

8.6.1. A projektmódszer alkalmazása

A következő tárgyak oktatása során használtuk kollegáimmal a projektmódszert:

Lineáris algebra gépészmérnök hallgatóknak, I. félév

2003-04- ben 214 hallgató, 35 kisdolgozatot adott be.

2004-05- ben 212 hallgató, 83 kisdolgozatot adott be, vizsgaeredményeiket tekintve: 67 elégtelen 17 kisdolgozatot adtak be, 72 elégséges 28 kisdolgozat, 27 közepes 16 kisdolgozat, 21 jó eredmény 18 kisdolgozat, és 3 jeles, akik 4 kisdolgozatot adtak be.

Lineáris algebra I. programozó matematikus és közgazdasági programtervező matematikus hallgatóknak, I. félév

2003-04- ben 28 hallgató 6 kisdolgozatot adott be.

2004-05- ben 55 hallgató 10 kisdolgozatot adott be. A hallgatók eredménye: 13 elégtelen, 28 elégséges, 9 közepes, 3 jó, 2 jeles. A kisdolgozatok szerzői közt: 1 elégtelen, 4 közepes, 1 jó és 1 jeles.

Diszkrét matematika 2. műszaki informatikus hallgatóknak, II. félév,

2003-04- ben 134 hallgató 84 kisdolgozat,

2004-05- ben 120 hallgató 57 kisdolgozatot adott be.

Ez utóbbi tárgy gyakorlati jeggyel zárul.

2003-04- ben a hallgatók eredménye és a beadott kisdolgozatok száma közti összefüggés jelemző adatai:

Elégtelen gyakorlati jeggyel zárta a félévet 18 hallgató, ők 4 kisdolgozatot adtak be.

Elégséges volt 67 hallgató gyakorlati jegye, ők összesen 24 kisdolgozatot adtak be, néhányan 2-3-at is.

Közepes eredményt 28 hallgató ért el, 24 kisdolgozatot adtak be.

Jó eredményt 16 hallgató ért el, beadott kisdolgozataik száma 17.

Jeles gyakorlati jegye 5 hallgatónak volt, ők 4 kisdolgozatot írtak.

2004-05- ben ezek az adatok a következők voltak:

Elégtelen gyakorlati jeggyel zárta a félévet 38 hallgató, ők 4 kisdolgozatot adtak be.

Elégséges volt 62 hallgató gyakorlati jegye, ők összesen 29 kisdolgozatot adtak be, néhányan 2-3-at is.

Közepes eredményt 11 hallgató ért el, 11 kisdolgozatot adtak be.

Jó eredményt 7 hallgató ért el, beadott kisdolgozataik száma 11.

Jeles gyakorlati jegye 2 hallgatónak lett, egyikük 2 kisdolgozatot is írt.

Látható, hogy főleg az elégséges és jó eredmény eléréséhez segítette a hallgatókat a kisdolgozatok rendszere.

8.6.2. A legfontosabb következmények

A módszer alkalmazásának nyomán az előző, mintegy 10-12 év tapasztalatával összevetve jelentősen nőtt azoknak a hallgatóknak a száma, akik szóbeli vizsgára jelentkeztek. Azokból a tárgyakból, amelyek oktatásában kipróbáltuk a projektmódszert, azelőtt is adott volt a lehetőség az írásbeli vizsga helyett szóban vizsgázni, vagy az írásbeli eredményének javítására szóbeli vizsgán, de a hallgatók nagyon ritkán, vagy egyáltalán nem éltek vele.

Csökkent az ismételt vizsgák száma az adott tárgyakból, különösen azokra vetítve akik kisdolgozatot adtak be. A kisdolgozatot vállaló hallgatók közt alacsonyabb volt a későbbi "pályaelhagyás", azoknak a száma, akik tanulmányi okokból félévet ismételtek. A kisdolgozatot beadók átlag eredménye jobb volt a vizsgán a többi hallgatóhoz viszonyítva, ez részben annak is betudható, hogy eleve a jobb képességűek, vagy a tanulásban motivált hallgatók vállalták ezt a többletmunkát.

9. Megvalósult projektek, kisdolgozatok

A következők tartalmaznak néhányat azok közül a projektötletek közül, amelyeket az oktatásban többször alkalmaztunk, és amelyek a leghatásosabbnak bizonyultak. Ezek egy részét publikációkban is közzé tettem. A projektötlet célját és vázlatos leírását a dolgozat, a teljes leírásukat a Függelék tartalmazza. Egy-egy projektötlet a feldolgozása során lett egyre összetettebb, ugyanis ezeknek a felhasználáskor a hallgatók támaszkodhattak az előző években kidolgozott projektek anyagára, egy projektötlet fejlődik, alakul. A felhasználás során a hallgatók az ötlet és a matematikai tartalom megértése után a rendelkezésükre álló szakirodalomból, azt saját munkájukkal kiegészítve alkalmazásokat, példákat keresnek és az anyagból készülő kisdolgozatban részletezik azokat is. A dolgozat bemutatásakor egyrészt magát a módszert, eljárást, ötletet ismertetik, majd annak általuk legjobban megértett alkalmazását.

9.1. A harmadfokú polinom gyökeiről

A projektötlet célja

A középiskolából ismert másodfokú polinom függvény érdekes szimmetria tulajdonságait általában ismerik a hallgatók. Ezeknek a tudatosítása, ismétlése után a harmadfokú polinom függvény esetén hasonló tulajdonságokat kereshetünk és találhatunk, és ezeknek a megismerésével, alkalmazásával a hallgatók a tengelyes szimmetria és pontszerinti szimmetria geometriából megismert fogalmához társítani tudják a páros, illetve páratlan függvények általánosabb értelmezéseként az adott függvénytulajdonságokat. Begyakorolhatják a deriváltak alkalmazását, és a Cardano képlet alkalmazásáról is többet tudnak majd. Ezt a projektötletet megelőzően az első félév elején szó került a Cardano képletről, amiről minden évben több hallgató írt kisdolgozatot.

A projektötlet leírása

Ismert, hogy a másodfokú polinom által értelmezett

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$$

függvény, röviden másodfokú függvény képe egy parabola és már középiskolás ismeretek alapján a hallgatók többsége ismeri a parabola szimmetria tulajdonságainak következményeit [70]: a parabolának szimmetria tengelye lesz az

$$x = -\frac{b}{2a},$$

azaz:

$$f(-\frac{b}{2a} - x) = f(-\frac{b}{2a} + x),$$

bármely x-re teljesülni fog, és például a gyökök is szimmetrikusan helyezkednek el ehhez az értékhez képest.

Az a kérdés, hogy a harmadfokú polinom által értelmezett

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

röviden harmadfokú függvény rendelkezik-e valamilyen hasonló szimmetria tulajdonsággal? A válasz az, hogy valóban létezik egy pontszerinti szimmetria, ennek a felfedezése és tárgyalása szintén alkalmas egy egyéni vagy csoport projekt témájának (a projektötlet részletes leírása: Függelék I.).

Megállapítás [10].

Az

$$f = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

valós együtthatós polinomhoz rendelt függvény grafikus képe szimmetrikus az

$$S = (\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$$

pontra nézve.

Bizonyítás: Elégséges belátni, hogy bármilyen valós x esetén:

$$f(-\frac{b}{3a}) - f(-\frac{b}{3a} - x) = f(-\frac{b}{3a} + x) - f(-\frac{b}{3a}),$$

vagyis

$$2f(-\frac{b}{3a}) = f(-\frac{b}{3a} + x) + f(-\frac{b}{3a} - x)$$

$$f(-\frac{b}{3a}) = a(-\frac{b}{3a})^3 + b(-\frac{b}{3a})^2 + c(-\frac{b}{3a}) + d$$

$$f(-\frac{b}{3a}+x)=a(-\frac{b}{3a}+x)^3+b(-\frac{b}{3a}+x)^2+c(-\frac{b}{3a}+x)+d$$

$$f(-\frac{b}{3a}-x)=a(-\frac{b}{3a}-x)^3+b(-\frac{b}{3a}-x)^2+c(-\frac{b}{3a}-x)+d,$$

tehát

$$f(-\frac{b}{3a}+x)+f(-\frac{b}{3a}-x)=$$

$$=-2a\frac{b^3}{27a^3}+2\frac{b^3}{9a^2}-2\frac{bc}{3a}+2d=2f(-\frac{b}{3a}).$$

9.2. Integrál összegek alkalmazása

A projektötlet célja

A határozott integrál helyes értelmezése az integrál számítás egyik alapvető kérdése, ennek a fogalomnak a megerősítését, mélyebb megértését egészíti ki ez a projektötlet. A különböző integrál összegek meghatározása a hallgatók számára néha mesterkéltnek tűnnek, de a következő néhány példa jól szemlélteti azt, hogy miként lehet a határozott integrál definíciója mellett az integrál összegeknek néhány konkrét alkalmazását is bemutatni. Az adott összegek határértékének és a határozott integrál fogalmának összekapcsolásával a hallgatók maguk is "gyárthattak" példát olyan összegek határértékének a kiszámítására, ami más módszerrel jóval nehezebben oldható meg.

A projektötlet leírása

Elméleti háttere

A határozott integrál értelmezése során különböző integrál-összegekkel találkozhatunk. Nyilvánvaló, hogy a határozott integrál pontosan akkor létezik, ha ezek az integrál-összegek konvergensek. Ez azt is jelenti, hogy ha egy határozott integrál létezik, mert pl. van primitív függvénye az adott intervallumon, vagy az intervallumon folytonos függvény integrálját tekintjük, akkor ez a határozott integrál egyben mindenfajta, sajátos formában felírt integrál-összegnek a határértéke is [5] .

Ha az f Riemann integrálható az elmélet szerint a $\sigma_{\Delta_n}(f,\xi_k^n)$ [125] Riemann integrál összeg határértéke az $\int\limits_a^b f(x)dx$, ahol Δ_n a felosztásokat, ξ_k^n az adott felosztásnak megfelelő k. intervallumhoz tartozó független változót jelöli.

Ha tehát adott egy integrálható $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény és az $[a,b]$ intervallumnak egy egyenlő közű felosztása mégpedig a $\frac{b-a}{n}$ hosszúságú részintervallumokra, akkor az $[a,b]$ intervallum osztópontjainak halmaza:

$$\left\{a,a+\frac{b-a}{n},a+2\frac{b-a}{n},...,a+(n-1)\frac{b-a}{n},a+n\frac{b-a}{n}\right\}$$

Ehhez képezzük a

$$\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

integrálösszeget, ahol

$$f(a+k\frac{b-a}{n})$$

rendre az f függvénynek az

$$\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}\right]$$

részintervallumok jobboldali végpontjában felvett értékei, ekkor az előbbiek értelmében:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$$

Alkalmazása

Ha bizonyos összegek határértékének a kiszámítása [94] a célunk, akkor már csak azt kell felismernünk, hogy milyen függvényhez és milyen intervallumhoz tartozó integrál- összeg írható fel (a projektötlet részletes leírása: Függelék II.).

1. Példa.

Számítsuk ki a következő összeg határértékét:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}})$$

Az adott összeg a jelzett átalakítások után

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}) = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

9.3. Integrálok közelítő kiszámításának két különböző módszere

A projektötlet célja

A határozott integrálszámítás alapvető kérdéseinek elsajátítása után merül fel annak az igénye, hogy az olyan függvények határozott integrálját is kiszámítsuk (a műszaki alkalmazások nagy része ilyen), amelyeknek nem ismert a primitív függvénye. A projekt megvalósítása során a hallgató megismeri az integrálok numerikus számításának több lehetőségét, és tapasztalni fogja a különböző módszerek előnyeit, hátrányait, összehasonlíthatja az eredmények pontosságát, az elvégzendő műveletek mennyiségét. Adott esetben a műszaki alkalmazás során választani tud a rendelkezésére álló módszerek közül, kritikus szemmel nézve a kapott eredményeket.

Amellett, hogy a téglalap (trapéz, Simpson) módszeren keresztül a hallgató a határozott integrálok fogalmát is mélyebben megérti, a Taylor polinommal való közelítés lényegének megértése új környezetbe helyezve, elmélyíti azt.

A projektötlet leírása

Az alkalmazás alapelve

Gyakran találkozunk olyan függvény határozott integráljának kiszámításával, aminek nincs primitív függvénye vagy nagyon körülményes azt megkeresni. Ilyen esetekben a számítás elvégzése, még ha csak közelítő értékre is jutunk, lényeges lehet a gyakorlati alkalmazásokban. Ennek érdekében több módszer is ismeretes, a projektötletben két ilyen eljárást tanulmányozunk és a különböző esetekben összehasonlítjuk a pontosságukat. Ez a két eljárás merőben különböző, mivel az egyikben a függvényt helyettesítjük az adott intervallumon egy jól közelítő polinommal, a másikban numerikus módszerek egyikét, a téglalap módszert alkalmazzuk (a projektötlet részletes leírása: Függelék III.) .

A két módszer lényegét, többek közt, ugyannak a feladatnak kétféle megoldásával is összehasonlíthatjuk:

9.3.1. Taylor, MacLaurin polinomok

A feladat a $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx$ értékét kiszámítani, ha előbb az integrandusz függvény számlálójában közelítő értéket helyettesítünk, azaz:
$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx \approx \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5}{x} dx \approx .991\,54.$

9.3.2. A téglalap módszer, és más módszerek

Ugyanazt a feladat a téglalap módszerrel (10 részintervallummal, a részintervallumok kezdőpontjában vett értékekkel számolva):

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx \approx .933\,26$$

Pontosabb a számítás, ha a részintervallumok közepe szerinti téglalapokat vesszük, ekkor:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx \approx .971\,46.$$

A trapéz módszer.
A trapéz módszer [71] még nagyobb pontosságot ad, már $n = 10$-re is:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx \approx .980\,4.$$

A Simpson módszer.
Hasonlóan nagyobb lesz ez a pontosság a Simpson módszerrel [71]:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx \approx .974\,44.$$

9.4. Szélsőértékszámítás egy gyakorlati alkalmazása

A projektötlet célja
A szélsőértékszámítást a hallgató külön- külön megtanulja az egyváltozós valós függvények, és a többváltozós függvények esetén is. A vázolt ötlet arra alkalmas, hogy egy olyan műszaki kérdés megoldására késztesse a hallgatót, amelynek egyszerűsített formája egyváltozós, de a valósághoz közelebb álló megfogalmazása során többváltozós szélsőértékproblémához vezet.

A projektötlet leírása

1. Példa. Az a feladat [121], hogy vízszintes helyzetben át kell vinni egy hosszú rudat (pl. létrát) egy derékszögben megtört folyosón. Legfeljebb mekkora lehet a rúd hossza, ha a folyosók a, és b szélessége méterben kifejezve $a = 2, b = 3$?

Megoldás: A folyosók külső falát tekintsük egy koordinátarendszer tengelyeinek olyan helyzetben, hogy a folyosók belső falainak találkozása (sarka) az $S\,(a, b)$ pont legyen. Az S ponton áthaladó m iránytényezőjű egyenes egyenlete:

$$y - b = m(x - a)$$

Ez az egyenes a koordinátatengelyeket (a folyosó külső falait) az

$$x_0 = \frac{-b + ma}{m}$$

és az

$$y_0 = b - ma$$

pontokban metszi, ezek d távolságának a négyzete:

$$d^2 = \left(\frac{-b + ma}{m}\right)^2 + (b - ma)^2$$

A feladat tehát megkeresni a rúd hosszának maximumát, ami egybeesik jelen esetben az adott d távolság minimumával. Igazából könnyebb a d^2 kifejezés minimumát megkeresni, tehát a

$$f(m) = d^2 = \left(\frac{-b+ma}{m}\right)^2 + (b-ma)^2 = (-b+ma)^2 \frac{1+m^2}{m^2}$$

kifejezés szélsőértékei közt egy lokális minimumot keresünk.

Ha most a konkrét számadatokkal, $a = 2, b = 3$, dolgozunk, a rúd hosszára

$$d = \sqrt{\left(\frac{-b+ma}{m}\right)^2 + (b-ma)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{-3+2\,(-1.\,144\,7)}{(-1.\,144\,7)}\right)^2 + (3-2\,(-1.\,144\,7))^2} \approx 7.\,023\,5$$

azaz kerekítve a 7 méter értéket adódik.

2. Példa. Ha most a feladatnak egy összetettebb változataként, egy derékszögben megtört a és b szélességű folyosón egy c szélességű, l hosszúságú téglalap alakú tárgyat tekintünk, akkor az előbbi feladat jelentheti egy parkolóházban, vagy szűk útkereszteződésben befordulni képes (adott c szélességű) gépkocsi maximális l hosszának a megkeresését. Megjegyezhető, hogy pl. az autóbuszok gyártásában az ún. csuklós- buszok két részének a külön mozgása lehetővé teszi egy nagyobb méretű autóbusz áthaladását egy viszonylag szűkebb helyen.

Ugyanez a feladat a raktárhelységek tervezésénél gyakran előfordul, hiszen ott az egyik lehetséges fő szempont a raktározó felület maximálissá tétele, amit nyilván a folyosók méretének szűkítésével is érvényesíthetnek.

Egy lehetséges megoldás egy vázlata

Az összetettebb feladat matematikailag többféleképpen megfogalmazható, ezek egyike a következő: tekintsük ismét a folyosó külső falait a rendszer koordinátatengelyeinek, és legyen a belső oldalak metszéspontja ismét $S(a, b)$. Most viszont nem az S ponton áthaladó egyenest, hanem az S középpontú, c sugarú kört érintő egyeneseket írjuk fel. Az S középpontú c sugarú kör egyenlete:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$$

A kör egy (m, n) pontjában a kör érintőjének egyenlete:

$$(x-a)(m-a) + (y-b)(n-b) = c^2$$

és ez az érintő a tengelyeket rendre az:

$x_0 = \frac{ma-a^2+bn-b^2+c^2}{m-a}$ és az $y_0 = -\frac{ma-a^2+bn-b^2+c^2}{-n+b}$ pontokban metszi.

Az előbbi metszéspontok d távolságának a minimuma alapján határozható meg a keresett maximális l értéke, ahol

$$d^2 = \left(\frac{ma - a^2 + bn - b^2 + c^2}{m - a}\right)^2 + \left(-\frac{ma - a^2 + bn - b^2 + c^2}{-n + b}\right)^2$$

Az egyszerűség kedvéért megint a d^2 minimumát keressük, legyen

$$(m, n) \to f(m, n)$$

tehát a következő függvény (feltételes) minimumát kell megkeresni:

$$d^2 = f(m, n) = \left(\frac{ma - a^2 + bn - b^2 + c^2}{m - a}\right)^2 + \left(-\frac{ma - a^2 + bn - b^2 + c^2}{-n + b}\right)^2$$

vagyis az

$$f(m, n) = \left(ma - a^2 + bn - b^2 + c^2\right)^2 \frac{n^2 - 2bn + b^2 + m^2 - 2ma + a^2}{(m - a)^2 (-n + b)^2}$$

függvény szélsőértékeit keressük az

$$(m - a)^2 + (n - b)^2 = c^2$$

feltétel mellett.

A matematikai probléma tehát egy kétváltozós függvény feltételes szélsőértékének(szélsőértékeinek) a megtalálása.

Ez a szélsőérték kérdés megoldható a változók számának csökkentésével, vagy a Lagrange módszerrel, mindkét esetben a számítógépes matematikai szoftverek alkalmazása indokolt.

Megjegyzés. A feladat az egyszerűbb változatban megoldható úgy is, hogy az m paraméter(az egyenes iránytényezője helyett, az egyenes és az abszcisszatengely közti φ szöget tekintjük változónak. Ebben az esetben az $m = tg\varphi$ miatt így sem lesz sokkal egyszerűbb a számítás, de a bonyolultabb feladatot ugyanígy tekintve, eleve egyváltozós függvény szélsőértékéhez juthatunk (a projektötlet részletes leírása: Függelék IV.).

9.5. Homorú reflektortükör meridiángörbéje

A projektötlet célja

Mérnökhallgatók számára érdekes technikatörténeti adalék lehet az, hogy a bolygódugattyús motor elve sokkal régebbi, mint a pontos műszaki megvalósítása és ennek egyik oka az volt, hogy nem tudták azt, hogy milyen a legmegfelelőbb felület. Végül az tette lehetővé a műszaki kivitelezést, hogy az 1940-es évek végén sikerült megoldani azt a differenciál egyenletrendszert, ami a dugattyúház és a dugattyú felületét írja le. Tehát a műszaki elképzelés matematikai megfogalmazása, a matematikai kérdés megoldása, és végül a számítások útján nyert eredmény felhasználása vezetett eredményre, a jó műszaki megoldáshoz.

Az alábbi példán keresztül megvilágítható ez az út (a projektötlet részletes leírása: Függelék V.).

A projektötlet leírása

A hallgatók ismerik a parabola geometriai tulajdonságát, mégis érdekes az adott feltételt kielégítő differenciálegyenlet felállításán és megoldásán keresztül végigkövetni azt, ahogy a műszaki tulajdonság matematikai megfogalmazásán keresztül megtaláljuk a választ a problémára.

Felvethető a kérdés[121]: Milyen görbét kell az x-tengely körül megforgatni, hogy olyan homorú tükör felületét kapjuk, amely az x-tengellyel párhuzamosan beeső fénysugarakat az origóban veri vissza?

A mellékelt ábrán az x-tengellyel párhuzamosan beeső fénysugár a P pontban éri el a tükör felületét, a rajz szerint a feltételezett meridiángörbét.

A P pontbeli beesési merőleges és az adott pontbeli érintő merőlegesek, tehát a fényvisszaverődés törvénye szerint a sugármenet az előbbi ábra szerint alakul, ahol az AOP háromszög egyenlő szárú, mivel a P csúcsnál lévő β szöge megegyezik az A csúcsnál lévő szöggel, ez utóbbi ugyanis párhuzamos szárú szögként egyenlő a beérkező fénysugár és a meridángörbe érintője közt jelölt szöggel, ami szintén β a fényvisszaverődés törvénye alapján.

Tehát az AOP egyenlőszárú háromszög O pontnál lévő külső szöge a $\gamma = 2\beta$. Továbbá a meridiángörbét leíró függvény deriváltja a P pontban az $y' = tg\beta$, így ott felírható: $\frac{y}{x} = tg2\beta$, majd az ismert képlet szerint: $\frac{y}{x} = \frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta}$, azaz eljutunk a keresett differenciálegyenlethez:

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-(y')^2}, x \neq 0, y' \neq \pm 1.$$

A kapott egyenlet a következő alakban írható:

$$\frac{y}{x}(y')^2 + 2y' - \frac{y}{x} = 0, x \neq 0, y' \neq \pm 1.$$

Ebből

$$y' = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}, x \neq 0, y' \neq \pm 1,\ y \neq 0.$$

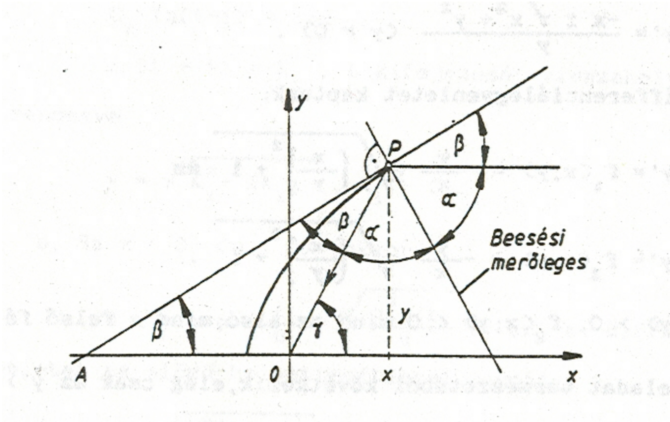
A megoldáshoz ez a két differenciál egyenlet vezet el. A szimmetria miatt feltételezhetjük azt, hogy csak a felső félsíkban keresünk megoldást, ahol feltehető $y > 0$, sőt $y' > 0$.

A számítások elvégzése után az

$$y^2 = C^2 + 2Cx, y = \sqrt{C^2 + 2Cx}, x > 0, C > 0.$$

és az

$$y^2 = 2Kx + K^2, y = \sqrt{2Kx + K^2}, K > 0, -\frac{K}{2} \leq x < 0.$$



1. ábra. Homorú reflektortükör meridiángörbéje

megoldásokhoz jutunk, és láthatólag a két megoldás egyforma alakú.

Válasszuk most ki azt a görbét, amire $y(-\frac{1}{2}) = 0$, ekkor a második megoldás szerint
$0 = \sqrt{K^2 - K}$, ennek megoldásai $K = 0, K = 1$.
Tehát ezen az intervallumon a keresett megoldás:

$$y = \sqrt{2x+1}, 0 > x \geqq -\frac{1}{2}.$$

Ha folytonos görbülettel illesztjük a másik intervallumon ($x > 0$) található megoldáshoz, akkor ott az $y(0) = 1, y\prime(0) = 1$ feltételeket kell vennünk, így a $\sqrt{C^2} = 1$ mellett az: $y' = \frac{2C}{2\sqrt{C^2+2Cx}}$ -ből, a $\frac{C}{\sqrt{C^2}} = 1$, azaz $C = 1$ adódik, tehát a keresett megoldás:

$$y = \sqrt{2x+1}, x \geqq -\frac{1}{2}$$

azaz mint várható volt, egy parabola két, egymáshoz illeszkedő íve.

A reflektortükör meridiángörbéje tehát ebben az esetben a szimmetriát is figyelembe véve

$$y = \pm\sqrt{2x+1}, x \geqq -\frac{1}{2}.$$

Az általános esetben, ha az előzőek szerinti folytonos görbülettel csatlakozunk az $x = 0$-ban akkor az

$$y = \pm\sqrt{2Cx + C^2}, x \geqq -\frac{C}{2},$$

azaz az $x = -\frac{C}{2}$ vezéregyenesű $\left(\frac{C}{2}, 0\right)$ fókuszpontú parabola lesz a megoldás.

9.6. Résztörtekre bontás egy gyorsabb módszere

A projektötlet célja

A határozott integrálok oktatása során gyakran találkozunk olyan integrálszámítási feladattal, amit pl. változócserével törtek integrálásra vezetünk vissza (gondolhatunk irracionális függvényeket, szögfüggvényeket, vagy hiperbolikus függvényeket tartalmazó példákra). Ezért a törtek integrálása hangsúlyosabb szerepet kap. A résztörtekre bontás amúgy algebrai feladatát az oktatók tapasztalata szerint a hallgatók nehezebben sajátítják el. A résztörtekre bontásnak ez a módszere, főleg az egyszerűbb feladatok megoldása során, lényegesen lerövidíti a számításokat, és így ez a módszer, bár a megtanulása bizonyos fokú többletmunkára épül, mégis népszerű a hallgatók között. Többször tapasztaltuk, hogy azok a hallgatók, akik ezt a módszert alaposan elsajátították, valóságos "szakértőivé" váltak a fejezetnek. A módszer elsajátítása törtekkel végzett műveletek gyakorlása mellett még a függvényeknek a pontosabb tanulmányozását is eredményezi, főként az értelmezési tartományuk végpontjaiban.

A projektötlet leírása

Maga a leírás az általános esetben sokkal bonyolultabbnak tűnhet mint a módszer alkalmazása, főleg az egyszerű esetekben.

Az alábbi tört az ismert módon felírható résztörtek összegeként (lásd a projektötlet részletes leírásában: Függelék VI.) :

$$\begin{aligned}\frac{8(x-2)}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)} &= -\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-\frac{3}{(x+1)^2}+\\ &\quad -\frac{5}{x+1}+\frac{2(x-2)}{x^2+1}\end{aligned}$$

Ugyanezeket az együtthatókat másképpen, bizonyos esetekben sokkal rövidebben is meghatározhatjuk. Tekintsük ismét az adott felbontást:

$$\begin{aligned}\frac{8(x-2)}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)} &= \frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\\ &\quad \frac{B_1}{(x+1)^2}+\frac{B_2}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\end{aligned}$$

Szorozzuk most mindkét oldalát $(x-1)^2$-nel:

$$\begin{aligned}\frac{8(x-2)}{(x+1)^2(x^2+1)} &= A_1+A_2(x-1)+\\ &\quad (x-1)^2\left[\frac{B_1}{(x+1)^2}+\frac{B_2}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\right]\end{aligned}$$

Ha most ez utóbbi azonosságba $x=1$-et "behelyettesítjük", az $A_1=-1$-hez jutunk, ami természetesen megegyezik az előzőekben kapott eredménnyel.

Itt felhívhatjuk a hallgatók figyelmét arra, hogy a két előbbi azonosság nem teljesen egyenértékű, hiszen míg az elsőnek nincs értelme $x = 1$ és $x = -1$ esetén, a másodiknak $x = 1$-ben már van értelme. A hallgatók még pontosabban megérthetik ennek a módszernek a lényegét, ha az utóbbi egyenlőségben az $x = 1$ behelyettesítése helyett a kifejezések határértékéről beszélünk, ha $x \to 1$.

9.7. Az egész számok néhány tulajdonsága

A projektötlet célja

A projektmódszer alkalmazása ebben az esetben arra vezethet, hogy egy-két hallgató vagy egy kisebb hallgatócsoport tanulását katalizálja. A tanult anyagrészhez kapcsolódó, de a tanultakat kicsit más szempontok szerint összefogó kérdések arra ösztönzik a hallgatót (hallgatókat), hogy a tanultakat mélyebben megértsék, azok alkalmazásának feltételeit pontosabban megismerjék és alkalmazni tudják a szokatlanabb feladat-helyzetekben. A megvalósítása során a hallgató az intuitív gondolkodásmód kialakítására kaphat mintát [103], arra, hogy egy egyszerűnek tűnő számítási feladat továbbgondolása mire vezethet . Erre a következetes, logikus gondolkodásmódra feltétlen szüksége van a mérnökhallgatónak. Ennek az induktív útnak egy jó példája ez a kisdolgozat, ami az egész számok egy tulajdonságáról szól.

9.7.1. Története

A kisdolgozat (egyéni projekt) megvalósulásának 1980-as évekre visszanyúló története a matematikai indukció tanítása során a következő példa megoldása után kezdődött:

Példa: *Igazolja, hogy* $n^5 - n$ *mindig osztható* 30*-al, ha* $n \geq 1, n \in N$.

A diákoknak az volt a tennivalója, hogy néhány egyszerű esetben közvetlen számítással ellenőrizzék az adott állítást, és ha igaznak bizonyul, akkor általánosan is igazolják

Ez a feladat annak a szemléltetésére is alkalmas, hogy az induktív úton kapott sejtés a matematikai indukcióval történő bizonyítás mellett gyakran közvetlenül is belátható.

A feladat megoldását követő órán Nemes Attila szakközépiskolás, aki ma kitűnő mérnök, egy kérdést tett fel, amiben az egész számoknak egy nagyon egyszerű, általa észrevett tulajdonságával foglalkozott. Észrevette ugyanis, hogy két egymást követő egész szám harmadik hatványainak a különbsége hárommal osztva mindig 1-et ad maradékul. Ezt a tulajdonságot több tucat esetben ellenőrizte a zsebszámológépével és a nagy számú példa kiszámítása után azt állította, hogy ez mindig így következik be.

Nemes Attila szavaival élve "egy kis felfedezést tett a matematikában" és megfogalmazott egy sejtést, egy tételt. Azt kérte, hogy mondjak véleményt, hogy ez a megállapítás újdonságot tartalmaz-e vagy sem, mivel mindenképpen a saját eredményének érezte a tulajdonság észrevételét, és szerette volna tudni, hogy mennyire van igaza. A jelzett tulajdonság hivatalos bizonyítását aránylag könnyen belátta, de szerencsére nem veszített érdeklődéséből. Tanácsomra elméleti úton is, meg a zsebszámológéppel is próbálkozott az adott tulajdonság további ellenőrzésével, a tulajdonság kapcsán megfogalmazódó további állításokkal.

A következő hetekben szinte minden alkalommal, amikor találkoztunk **a tulajdonság újabb** és újabb változataival, esetenként **általánosításával** jelentkezett. A tulajdonságok egyre összetettebb alakjának bizonyítása közben, tulajdonképpen a tanult anyag egy tekintélyes része rendre szóba került, hiszen a matematikai indukció mellett polinomok gyökeiről, polinomok oszthatóságáról, Bézout tételéről, komplex számok algebrai, majd trigonometriai alakjának felírásáról, ezek alkalmazásáról szóltak ezek a bizonyítások.

Nemes Attila az általa felvetett kérdés egyre pontosabb, szélesebb körű megoldása révén észrevétlenül megtanulta a matematika fent említett fejezeteit, sőt azokat alkalmazni kényszerült. Tehát akarva-akaratlanul ennek a néhány tulajdonságnak és a tulajdonság következményeinek köszönhetően a tanult anyag jelentős részét nagyon alaposan megtanulta, sőt alkalmazni is tudta nem egyszerű begyakorló példákon, hanem "élesben" egy elméleti bizonyítás során. Az általa felvetett egyszerű feladat motiválta abban, hogy jó néhány előadáson keresztül feszülten figyeljen, közbevetett kérdéseivel a tanultak alkalmazhatóságának határát, lehetőségét igyekezett felfedezni és mire ezt a kisdolgozatot megírta, már nem csak azt tartotta fontosnak, hogy zsebszámológéppel, sok-sok példán keresztül felismerjen valamilyen szabályszerűséget, hanem azt is, hogy a tanult elméleti tételek alapján, esetleg elméleti úton próbálja felfedezni, megfogalmazni a még lehetséges tulajdonságokat. Ez a folyamatosan visszacsatolásokkal tarkított közös munka mintegy 8 hétig tartott és eredményeképp született meg egy közös dolgozatunk [47].

A dolgozat felépítése pontosan nyomon követi a projekt során kialakuló apróbb lépéseket, és tükrözi azt a sorrendet, amint az adott tulajdonságokat "felfedeztük" és bebizonyítottuk. Ennek a projektnek külön érdekessége az, amint Nemes Attilának a matematikatanulással szembeni magatartása megváltozott. Fegyelmezett, jóindulatú, szemlélődő, többnyire passzív emberből egy szenvedélyesen vitatkozó, nagyon aktív, a matematikát nagy becsben tartó diák lett, később egyetemet végzett és jelenleg egy sikeres mérnöki iroda vezetője.

A Függelék VII. része ennek a dolgozatnak a részleteit idézi fel, nyomon követve azt, hogy milyen matematikai ismeretek meglétét, alkalmazási képességét tételezi fel és a munka hogyan egészül ki egyre összetettebb matematikai eszközökkel. A dolgozat nyomán az utóbbi években a Miskolci Egyetemen is több kisdolgozat született.

9.7.2. Az egész számok néhány tulajdonsága

Észrevehető, hogy két egymás utáni egész szám harmadik hatványainak különbsége hárommal osztva 1-et ad maradékul, azaz:

$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot M_3 + 1,\, M_3 \in \mathbb{Z}, \text{ ahol } M_3 = n(n+1) \in \mathbb{Z}.$$

Ezt a tulajdonságot magasabb kitevőkre is általánosíthatjuk. A negyedik hatványra nem érvényes a hasonló tulajdonság, tehát a páros számokat elvetjük, az ötödik és hetedik hatványra ismét érvényes egy hasonló tulajdonság, de a kilencedik hatvány esetén nem, tehát a páratlan számokra sem mindig igaz.

Felötlik tehát az a gondolat, hogy csak prímszámkitevőkre érvényes a következő:

1. Tulajdonság. *Tetszőleges $p \geq 3$ prímszám és bármely n egész szám esetén:*

$$(n+1)^p - n^p = p \cdot M_p + 1, \text{ahol } n(n+1) \mid M_p \text{és } M_p \in \mathbb{Z}.$$

továbbá:

$$Ha\ p \geq 5, \text{akkor még } \left(n^2+n+1\right) \mid M_p.$$

2. Tulajdonság. *Ha p egy háromnál nagyobb prímszám és n valamint k tetszőleges egész számok, akkor:*

$$(n+k)^p - n^p = p \cdot n \cdot k \cdot (n+k) \cdot M + k^p,$$

ahol $M \in \mathbb{Z}$.

3. Tulajdonság.

Ha $p \geq 3$ egy prímszám és n valamint $k \geq 0$ egész számok, akkor:

$$(n+k)^p - n^p = p \cdot \overline{\overline{M}}_p + k,$$

ahol $\overline{\overline{M}}_p \in \mathbb{Z}$.

Alkalmazások.

1. A 3. Tulajdonságból egyszerű helyettesítéssel bizonyítható az ún. kis Fermat tétel:

Ha $n = 0$ és $k = a$, akkor (12) alapján:

$$a^p - 0 = p \cdot \overline{\overline{M}}_p + a$$

vagyis

$$a^p - a = p \cdot \overline{\overline{M}}_p$$

ez Fermat kis tételének egyik alakja.

2. A 2. és 3. Tulajdonság alapján másképp is bebizonyíthatjuk a kis Fermat tételt:

A 2.Tulajdonság alapján:

$$(n+a)^p - n^p = p \cdot \overline{M}_p + a^p \qquad (k = a)$$

A 3. Tulajdonság alapján:

$$(n+a)^p - n^p = p \cdot \overline{\overline{M}}_p + a.$$

A fenti két sor különbsége:

$$0 = p \cdot \left(\overline{M}_p - \overline{\overline{M}}_p\right) + a^p - a$$

tehát

$$a^p - a = p \cdot M^* (M^* = \overline{M}_p - \overline{\overline{M}}_p \in \mathbb{Z}).$$

Feltevődik a kérdés, hogy a talált tulajdonság nem jellemzi-e a prímszámokat, vagyis abból, hogy:

$$(n+k)^p - n^p = p \cdot \overline{M}_p + k^p$$

igaz bármely n és k-ra, következik-e, hogy p prímszám.

Ez a kérdés nyitott marad, és külön érdekessége az, hogy a kis Fermat tétel megfordítására ellenpélda adható [167].

9.8. Gráfok alkalmazásai

A projektötlet célja

Bár a gráfok tanítása nem mindig képezi részét a műszaki felsőoktatásnak, tekintve a gráfok sokoldalú műszaki alkalmazásait valószínű, hogy előbb-utóbb kötelező részévé válik a gráfelmélet a mérnöki egyetemek matematikaoktatásának (A projektötlet részletes leírása a Függelék VIII. részben található) [20].

Két alapvető gráfelméleti kérdés az Euler-gráfok és a Hamilton-gráfok kérdése nyilván megkerülhetetlen, például logisztikai tervezések, útvonalak, szállítás, információ áramlat. Az Euler-gráfok jelentősége abban áll, hogy egy adott gráf éleinek olyan bejárását jelentik, amelyekben minden élet pontosan egyszer járunk be. Ilyen például egy műszaki objektum őrzése során a biztonsági bejárási útvonal, de Euler utak szerepelnek például áramkörök tervezésénél is. A műszaki informatikus vagy programozó matematikus hallgatóknak, de talán **a logisztikai szakirányon tanuló gépészmérnök hallgatóknak sem érdektelen feladat egy-egy ilyen Euler útvonal tervezése**.

A Hamilton utak, körök keresése (amikor a gráf összes pontján keresztül haladó utat keresünk) fontos lehet gazdasági kérdésekben, pl. egy orvoslátogató útjának megtervezése, vagy egy tevékenység (pl. kiterjedt nemzetközi projekt) megvalósítási terve.

9.8.1. Euler és Hamilton utak

Projektötlet leírása

Legyen $\Gamma : E \to V^2$ egy irányított gráf megadása, ahol a gráf éleinek halmaza $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$, csúcsai a $V = \{v_1, v_2, v_3, ...v_k\}$ halmazban vannak.

Vegyük a P mátrixot, aminek p_{ij} elemei azoknak az e_x éleknek az "algebrai összege", amelyek a v_i csúcsot a v_j csúccsal kötik össze, ha ilyen élek nincsenek, akkor legyen az érték 0. Párhuzamos élek és hurokélek ebben az esetben megengedettek.

$$P = [p_{ij}]\,, ahol$$

$$p_{ij} = \begin{cases} e_x + e_y + ... & ha \quad e_x, e_y, ...\ v_i \text{ és } v_j \text{ közti élek} \\ 0 & \text{különben} \end{cases} ,i = 1..k \text{ és } \ j = 1..k$$

Euler "ösvénynek" nevezzük egy Euler út egy részét .

Állítás. *A P mátrix "hatványai" Euler "ösvényei" az adott gráfnak, ha a hatványozást a következő szabályok szerint végezzük el:*

(i) 0 és bármely más elem szorzata 0,

(ii) a szorzás nem kommutatív, de a kapott szorzatok "összege" eltérő Euler ösvényekként értelmezhető,

(iii) érvényes a jobboldali disztibutivitás,

(iv) a szorzat értéke 0 ha két azonos tényezőt tartalmaz, a tényezők helyétől függetlenül.

Az Euler utak, vagy körök a P^nelemei lesznek.

Egy adott gráf Hamilton útjának, ha létezik, a gráfnak egy olyan bejárását mondjuk, amely a gráf minden csúcspontján egyszer halad át. Ez a Hamilton út záródó, ha az utolsó csúcsból van él az első csúcsba, és nyitott, ha az utolsó csúcs és az első közt nincs éle a gráfnak.

Tekintsük a $\Gamma : E \to V^2, (V^2 = V \times V, |V| = k \geq 3)$ irányított gráfot, ahol $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ a gráf éleinek halmazát, és $V = \{v_1, v_2, v_3, ...v_k\}$ a gráf pontjainak halmazát jelöli. A gyakorlatban szokás a gráf $e \in E$ élének megfelelő képet $\Gamma(e) = (v_i, v_j)$ helyett a $v_i v_j$ szorzattal jelölni, ez esetben nem kommutatív "szorzatra" gondolunk, tehát $v_i v_j \neq v_j v_i$. Rendeljük hozzá a gráfhoz két mátrixot, a szomszédsági mátrixnak egy olyan H_2-vel jelölt változatát, ahol az éleket a két végpontjuk jellemzi, majd ennek egy részét tartalmazó G mátrixot amivel a Hamilton utakat elő fogjuk állítani. Megjegyzés, ha a módszert irányítatlan gráfokra alkalmazzuk, akkor az alkalmazás érdekében minden élet két oda-vissza irányított élpárral lehet helyettesíteni.

Az egyszerűség kedvéért zárjuk ki a többszörös éleket, és a hurokéleket, bár a végeredmény szempontjából teljesen mindegy, hogy van-e többszörös él, hurokél. Csak abban az esetben kell figyelembe venni a többszörös élek számát, ha meg kell különböztetni két Hamilton utat aszerint, hogy két adott pont között a többszörös élek közül melyiket választjuk.

Ha a gráfban van v_i-ből v_j-be mutató él, akkor az h_{ij} elem a H_2-ben a $v_i v_j$ "nemkommutatív" szorzat, és g_{ij} elem a G-ben v_j, különben H_2 és a G többi eleme 0, tehát

$$H_2 = [h_{ij}]\,, \text{ ahol } h_{ij} = \begin{cases} v_i v_j & ha \quad \text{van él } v_i\text{-ből } v_j\text{-be} \\ 0 & \text{különben} \end{cases} ,i = 1..k \text{ és } j = 1..k$$

$$G = [g_{ij}]\,,\ \text{ahol}\ g_{ij} = \begin{cases} v_j & \textit{ha} \quad \textit{van él } v_i\textit{-ből } v_j\textit{-be} \\ 0 & \qquad\qquad \textit{különben} \end{cases},\ i = 1..k \ \textit{és}\ j = 1..k$$

A továbbiakban a gráf esetén Hamilton ösvénynek nevezzük bármely Hamilton út részét.

Állítás. *Belátható, hogy a $H_r = H_{r-1} \cdot G$ rekurzív összefüggés előállítja a gráf r hosszúságú Hamilton ösvényeit, amennyiben ezt "szorzást" a következő szabályok betartásával végezzük:*
(i) a 0 és bármely elem szorzata 0,
(ii) a szorzás "nem kommutatív", de a kapott szorzatok "összege" eltérő Hamilton ösvényekként értelmezhető,
(iii) a szorzatra érvényesül a jobboldali disztibutivitás,
(iv) a szorzat 0 ha két azonos tényezőt tartalmaz.

Az eljárás alkalmas arra, hogy eldöntse, hogy van-e Hamilton út egy adott gráfban, konstruktív módon meg is adja az összes Hamilton utat, mint pontok rendezett sorozatát, és ennek alapján, a gráf adatai szerint minden esetben eldönthető az, hogy záródó, vagy nyitott-e az adott Hamilton út. Ha a rekurzív úton kiszámított H_k minden elem 0, akkor nincs Hamilton út a gráfban, a nullától különböző elemek egy-egy Hamilton útat jellemző pontsorozatot jelentenek, és végül egy ilyen út záródó, ha van a gráfnak az utolsó pontból az elsőbe mutató éle.

9.9. Az inverz félcsoportokról

A projektötlet célja

A műszaki egyetemek oktatásában nem közvetlen feladat az algebrai struktúrák oktatása. Mégis a hallgató találkozik olyan fogalommal, mint az inverz létezése, lásd mátrixok, vagy függvények inverze. Az inverz elem fogalmának a bevezetésére többnyire a semleges elem létezése mellett, azt követően kerül sor. A projektben kihasználható az inverz fogalmának az általánosabb értelmezése, és egy ilyen értelmezés logikus továbbgondolása. A módszer arra is alkalmas, hogy a hallgató figyelmét magára az inverz keresésére irányítsa, annak tulajdonságainak ismeretében.

Ugyanakkor a projektötlet a matematikai egy olyan fejezetére példa, aminek az műszaki matematikaoktatásban is lehet szerepe, gondoljunk a parciális transzformációk invertálhatóságára.

A projektötlet leírása

A csoport fogalmának a bevezetésekor megismerkedünk a félcsoport és a monoid fogalmával is.

Ha egy $G \times G \to G$ művelet asszociatív, azaz:

$$(\forall)a, b, c : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(a művelet jele "$\cdot$"), akkor $(G,\cdot)$ félcsoportot alkot.

Amennyiben a félcsoportban semleges elem is létezik, azaz:

$(\exists)e \in G$ úgy, hogy

$$(\forall)x \in G : x \cdot e = e \cdot x = x,$$

akkor $(G,\cdot)$ monoid.

Egy olyan monoidot, amelyben minden elemnek létezik szimmetrikusa, azaz $(\forall)x \in G, (\exists)x^{-1}$, amelyre: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$, csoportnak nevezzük.

Ebben a sorrendben logikusnak látszik, hogy a szimmetrikus elem fogalmát csak a semleges elem fogalma után vezetjük be. Mégis kimutatható, hogy a szimmetrikus elem fogalma bevezethető a semleges elem létezésétől függetlenül [44].

Meghatározás. *Egy olyan $(G,\cdot)$ félcsoportot, amelyben teljesül a következő két feltétel:*

(i) $(\forall)a \in G, (\exists)b \in G : a \cdot b \cdot a = a$ *és* $b \cdot a \cdot b = b$,

(ii) a G idempotens elemei egymásközt felcserélhetők, (egy a elemet idempotensnek nevezünk, ha $a^2 = a$) inverz félcsoportnak nevezünk.

A Függelék IX. részben kiderül, hogy az ily módon meghatározott elem az inverz elem tulajdonságai közül nagyon sokat teljesít, tehát jogos az elnevezése [2].

Definíció.

Az S szimmetrikus inverz félcsoportban $x \leq y$ pontosan akkor, ha az alábbi hat ekvivalens feltétel egyike teljesül:

(α) $xy^{-1} = xx^{-1}$

(β) $x^{-1}y = x^{-1}x$

(γ) $yx^{-1} = xx^{-1}$

(δ) $y^{-1}x = x^{-1}x$

(ε) $xy^{-1}x = x$

(ζ) $x^{-1}yx^{-1} = x^{-1}$

A kisdolgozat elmélyítéseként tanulmányozhatjuk a rendezés néhány egyszerű tulajdonságát is [25], ami elvezethet néhány további eredményre [7].

10. A matematikaoktatás ellenőrzési, értékelési fázisa

Brown [85] **szerint a hallgatók ellenőrzésének, értékelésének a következő főbb céljai lehetnek:**

- a tanulmányi előrehaladást méri a hallgató és az oktató szemszögéből

- lehetővé teszi az oktató számára az oktatás hatékonyságának a mérését

- a diák számára egyéni, az évfolyam számára egy közös visszajelzés egy adott előadás egészéről

- hozzásegíti a hallgatókat a tanulmányok elvégzéséhez
- a jobb hallgatók számára bizonyos fokú sikerélményt nyújt
- lehetővé teszi a hallgatók tanulási módszereinek az ellenőrzését
- lehetővé teheti a jövőbeli munkaadó számára az alkalmazásra kerülő hallgatók teljesítményének megismerését
- a közösen végzett munkának egy nyilvános értékelése
- a hallgatók számára a visszajelzés ösztönzi az alaposabb tanulást
- motiválhatja a hallgatókat
- kiemeli (diagnosztizálja) a hallgatók erősségeit és gyengeségeit és ezáltal kialakítja a hallgatók önellenőrzési készségeit.

Az ellenőrzés eredménye felhasználható:

- egy fokozat vagy végzettség megszerzéséhez (államvizsga, felvételi vizsga)
- egy követelmény (aláírás, vizsga) teljesítésének a mérésére illetve a teljesítmény minősítésére (sikeres, sikertelen vagy 1-5-ig osztályzatok révén)
- egy hallgatónak a jobb megismerésére
- a hallgatók kiválasztása (pl. szakirányok, túljelentkezés esetén)
- a hallgató jövőbeli teljesítményének az előrejelzésére.

A műszaki felsőoktatásban, és ezen belül a matematika oktatásában az ellenőrzési formák nagyon szorosan kötődnek az előadások anyagához és túlnyomórészt írásbeli ellenőrzések. Ez az ellenőrzés lényegében **"termék ellenőrzés"**, azaz a megszerzett tudást mérik valamilyen formában, ahol a "termék" a hallgató által elsajátított, megértett tételeket és azok alkalmazását jelenti.

Mivel az előadások nagy része példákon, feladatokon keresztül közelíti meg a matematikai alkalmazásokat, értelemszerűen az ellenőrzés többnyire írásbeli (zárthelyi dolgozat, vizsgadolgozat) és inkább a feladatok megoldására irányul.

A megszerzett tudás felhasználhatóságát, alkalmazási készségét leegyszerűsítve, feladatmegoldó készségeket, képességeket ellenőrzünk. A hallgató a matematika megértése mögött ritkán találkozik azzal az igénnyel, hogy az ellenőrzés során a megszerzett tudás alkalmazási képességét vizsgáljuk. **Az ellenőrzésre szánt feladatsorok**, amint a tapasztalat mutatja, többnyire csak **formalizált, matematikai nyelven közelítenek a feladathoz** (*Oldja meg a következő egyenletrendszert..., Számítsa ki a következő határozott integrálokat..., határozza meg a szélsőértékeit a következő függvénynek..., Írja fel a sor konvengencia tartományát..., Számítsa ki a következő görbék által határolt területet..., Igazolja, hogy az integrál átalakítási tételben szereplő integrálok értéke megegyezik...*) és **ritkábban találkozunk olyan "alkalmazási feladattal", aminek a szövegéből kell a hallgatónak kihámozni azt a matematikai feladatot, aminek az ellenőrzésére törekszünk.** Igaz ugyan, hogy az alkalmazott matematikai feladatok, lévén a matematika alapozó tárgy, nehezen köthetők össze az adott mérnöki szakismeretekkel, hiszen a hallgató a matematikát a későbbiekben fogja a mérnöki tárgyak megértésében hasznosítani. Ugyanakkor, **ha nem törekszünk arra, hogy a lehetőségek szerint már az alapozó félévekben a matematika gyakorlati alkalmazhatóságát hangsúlyozzuk, akkor a hallgató motivációja nagyon alacsony szinten marad**, esetenként a matematikát csak kötelező súlyosbításként fogja fel, egy leküzdésre váró nehézségként, és minél hamarabb maga mögött szeretné tudni, esetleg minimális eredménnyel a matematika szigorlatot.

Tehát a matematika oktatásában is, de az ellenőrzés során is törekednünk kell olyan gyakorlati alkalmazások bemutatására, felhasználására, amelyek erősítik a hallgatóban azt a képet, hogy a matematika a mérnöki tudományok kifejezési nyelve.

A mérnökképzésben a matematika oktatása során kialakuló ellenőrzési módszerekben az utóbbi években **Mustoe** szerint **elmozdulás tapasztalható az oktató által irányított verseny-környezet** (**tutor-led competitive environment**) irányából **a hallgató központú együttműködés (student-led collaboration) fele,** és az előadás-tartalmi ellenőrzése helyett - "termék ellenőrzés" - **a tanulási folyamat ellenőrzése kezd kialakulni.**

Mustoe ezeknek az ellenőrzési formáknak az alkalmazhatóságát a következő követelményekhez fűzi:

- **legyenek gazdaságosak** az idő és a befektetett munka szempontjából

- legyenek **összhangban az adott tárgy oktatási és tanulási stratégiájával**

- az ellenőrzés **igazságos legyen** és ugyanakkor **alkalmas legyen** a hallgatók tudásszintjében tapasztalható **különbségek mérésére**

- nyerje el a **hallgatók beleegyezését, bizalmát**

- nyerje el **a felhasználók bizalmát**

- **fogja át az oktatás különböző formáit** (mérje a fogalmak megértését, a készségek kialakulását, a problémamegoldási készséget és ugyanakkor mérje a vizsgázónak azt a képességét, hogy összefüggő, beszámoló jellegű dolgozatban bizonyítsa, hogy képes a megszerzett tudást széles körben alkalmazni).

A SEFI szemináriumon a matematika oktatás ellenőrzésének, mérésének kérdése külön kerekasztal témája is volt, ahol felmerültek mindazok a lehetséges problémák, amelyek a mérnökoktatásban tapasztalhatók:

- **a hallgatók és az oktatók túlterhelése**

- **az oktatás mérésének a torlódása**, túl sok félévközi ellenőrzés (zárthelyi dolgozatok) esik egy időbe, egy-két hét leforgása alatt néha hat-nyolc tárgyból is zárthelyi írás van.

A Miskolci Egyetemen a zárthelyi időpontok egyeztetését a dékáni hivatalok tanulmányi osztálya igyekszik megoldani, visszajelezve, ha a különböző tanszékek túl nagy számú zárthelyit terveznek egyazon hétre.

- gyakran **kevesellik a hallgatók a zárthelyikben kitűzött feladatok** megoldására szánt időt

- a zárthelyi dolgozatokban elkövetett hibák, tévedések elemzésére, magyarázatára nagyon ritka esetben kerül sor, tehát **nem elégséges a visszajelzés**, amit a hallgatók a félévközi tudásukról szereznek

- **nagy eltéréseket tapasztalnak a különböző tárgyak követelményrendszerében**

- a **hallgatók teljesítményének a mérésére alkalmazott szempontok gyakran nem világosak**, a hallgató nem érti meg pontosan, hogy a dolgozatának értékelésekor mi az, amit elvártak volna tőle

- a **kitűzött feladatok megértésében** is nagy **eltérések tapasztalhatók.**

A matematika oktatásában leggyakrabban használt ellenőrzési formák

- egy-kettő órás félévközi írásbeli dolgozat
- egy-kettő órás vizsgadolgozat
- szóbeli vizsgáztatás
- szóbeli vizsgát megelőző írásbeli (beugró) teszt, rendszerint kizáró jelleggel, célja a felkészületlen hallgatók kiszűrése
- folyamatos ellenőrzés
- feladat beadás: közös vagy egyéni feladatsorok kiosztása, majd határidőre történő beadása
- egyéni vagy csoport projektek

10.1. Az ellenőrzési formák elemzése, összehasonlítása

10.1.1. A félévközi zárthelyi dolgozatok

Általában 5-6 hét előadás és gyakorlat elhangzása után, főként az **oktatók (de néha a hallgatók is) szükségét érzik annak, hogy az elhangzott anyag megértéséről és elsajátításáról visszajelzést kapjanak, hiszen az előadások anyaga piramis-szerűen egymásra épül,** és a további kérdések megértése az előzmények megtanulását feltételezi.

A félévközi (zárthelyi) dolgozat tehát **a hallgatók számára egy kényszerítő körülmény** és a megvalósulása is többnyire formális. Az időhiánnyal küzdve a félévközi zárthelyi dolgozatok a tanult anyagnak többnyire egy 5-8 feladatot tartalmazó részbeni ellenőrzését jelentik.

Az oktató ebben a kényszerhelyzetben **két rossz közül választhat**: **vagy több tucat apró, rövid kérdést tesz fel és így az anyagot mélységben egyáltalán nem tudja ellenőrizni**, **vagy** az említett 5-8 feladaton keresztül csak **az előadások anyagának egy részét ellenőrzi.** Arra már végképp nem jut idő és lehetőség, hogy átfogóbb jellegű gyakorlati, alkalmazás-jellegű kérdéseket ellenőrizzünk, hiszen ilyen kérdésekből néha egynek a megoldása is több órát igényel.

A félévközi zárthelyiknek az időpontja a matematika tárgyakból általában az 5-8. illetve 11-13. oktatási hétre esik és több, párhuzamosan oktatott tárgy esetén is ezek **a legzsúfoltabb hetek.**

Az időpontok kiválasztása önmagában is nehéz feladat, hiszen ennél korábbi hetek választása azt jelentené, hogy az első zárthelyire a hallgató még nem ismert meg kellő mennyiségű anyagot. A második zárthelyi előre hozása azzal járhat, hogy a hallgatók az utolsó 3-4 heti előadások anyagának megértését, a félév végi oktatási túlterhelés miatt, szinte teljesen elhanyagolják.

A zárthelyik számának a növelése a hallgatók jelentős túlterhelésével járna, csökkentése az ellenőrzés gyengítését eredményezné. Ha a zárthelyik számát nagyon megnöveljük, akkor egy más típusú, a folyamatos ellenőrzési módszerről beszélünk, ennek előnyeit, hátrányait lásd ott.

A félévközi írásbeli dolgozatok előnyei:

- **megvalósítja a visszajelzést** a hallgatók számára, a sikeres dolgozat fokozza a hallgató önbizalmát és javítja hozzáállását, motivációját

- az oktatók számára a dolgozatok eredménye **az anyag befogadásának mértékét jelzi** vissza

- a hallgatók **vizsgatapasztalatát növeli**, megkönnyíti a vizsgára való készülést

- megnöveli a tárgy súlyát, **fontosságát**, elfogadottságát

- más ellenőrzési formáknál megbízhatóbbnak, **objektívebbnek tartják** a hallgatók is

- az írásbeli alkalmas arra, hogy **a hallgatóknak a teljesítményét** "nyomás alatt" **mérje vizsgakörülmények között** (külföldi gyakorlatban a vállalati ösztöndíjas hallgatók félévközi eredményéről a vállalat tudomást szerezhet)

A félévközi írásbeli dolgozatok hátrányai:

- **a rendszeres tanulást nem** kifejezetten **támogatja**, a hallgatók többsége csak a zárthelyi előtti napokban (éjszaka) készül (hegy alatt abrakol)

- **nem alkalmas arra, hogy a tananyag távolabbi részeinek az összefüggő kérdéseit megerősítse** a hallgatókban, hiszen az első zárthelyiben ellenőrzött témákat a második zárthelyire a hallgatók már nem ismétlik át. Jellegzetes példa az analízis oktatásában az első zárthelyire a differenciálási, deriválási kérdések a jellemzőek, és ha a második zárthelyit az integrálási technikák megismerése után íratjuk, akkor kellemetlen meglepetésként értékelik a diákok egy bonyolultabb differenciálási lépés beiktatását ebben a második zárthelyiben ("Nem számítottunk arra, hogy még egyszer meg kell tanulni a deriválást...").

- **a hallgatókban az a téves kép alakulhat ki, hogy a félévközi zárthelyi elégséges teljesítése közel elegendő a sikeres vizsgához.** Ezek ugyanis az anyag kisebb részének az ellenőrzését jelentik és a zárthelyik pontozása is az általános gyakorlat szerint alatta marad a vizsgák szigorúságának. A vizsgára a hallgató az anyag egészét kell megtanulja és rendszerint sokkal magasabb követelményeknek kell megfeleljen, mint félév közben. Talán ez a mélyebb oka az első félév után tapasztalható nagyobb fokú lemorzsolódásnak.

A félévközi teljesítmény mérésének ugyanakkor egyoldalú eszköze a zárthelyik rendszere, mivel azok eredményét, kivéve a gyakorlati jeggyel záruló tárgyak esetén általában nem viszi tovább a hallgató a vizsgára. Ez azt is eredményezheti, hogy a vizsgák előfeltételeként megszerzett aláírás, mint követelmény csak a minimális tudásbeli igényt közvetíti a hallgató fele.

Az értekezés szerzője a Lineáris algebra tárgyak oktatásában a félévközi hallgatói munka egy lehetséges beszámítására egy olyan pontrendszert dolgozott ki (lásd a CD mellékletben), amelynek alkalmazása eredményesnek tűnik.

10.1.2. Vizsgadolgozatok

A félév lezárásának és értékelésének leggyakrabban használt, s talán legfontosabb eszköze. A félévközi zárthelyi dolgozatokkal szemben, ahol az ismeretek megértését és elsajátítását mérik, itt előtérbe kerül az ismeretanyag elmélyítése, alkalmazási képessége. **A vizsgadolgozat rendszerint az anyag összefüggéseinek megértési fokát és alkalmazásának képességét** ellenőrzi, esetleg a félévközi zárthelyiktől eltérő módon (ha a félévközi zárthelyi főleg a gyakorlatok anyagát ellenőrzi akkor a vizsga az előadás anyagának, az elméleti kérdéseknek a megértését is ellenőrzi).

A vizsgafeladatokon keresztül lehetőség van arra, hogy a tanultakat a megszokottól kissé eltérő módon, újszerűen ellenőrizzük, **a gyakorlati alkalmazások felől közelítve** a kérdéseket. Rendszerint ezek a vizsgafeladatok, amelyekben a tanult anyagnak egy addig ismeretlen, újszerű alkalmazását kérjük, a legnehezebb vizsgakérdéseknek számítanak, dacára annak, hogy a megoldásukhoz nem szükséges a tanultakon kívül más ismeret.

Az ilyen kérdésekre csak azok a hallgatók tudnak válaszolni, akik a tanultakat mélyebb összefüggéseiben is értik, esetleg tapasztalatot szereztek a matematikában tanultak alkalmazására. Az ilyen feladatokon keresztül **érvényesülhet a logikus gondolkodásra nevelés eredményessége**, ugyanakkor hogyha félév közben nem gyakoroltatjuk eleget erre a meglepetés-elemre való felkészülést, akkor a hallgatók nagy tömege képtelen a követelmények teljesítésére. Ilyen esetben az ellenőrzés csak nagyon kis részben éri el célját, hiszen nem a tanult ismeretanyag elsajátítását ellenőrizzük elsősorban, hanem annak alkalmazási képességét. Helytelen lenne tehát a vizsgasorok összeállításában túlsúllyal alkalmazni ezt a meglepetés-elemet, talán egy középutas megoldás a leghelyesebb.

Elégséges, közepes minősítést érhessen el a hallgató akkor is ha "csak" az előadásokon és gyakorlatokon elhangzottakat tudja maradéktalanul, de nyilván a jó és jeles minősítéshez szükség van egy-két ilyen fogós kérdésre is, amelyekben a tanultak alkalmazásának képességét is mérjük.

Az írásbeli vizsgák előnyei:

- **a tanult anyag nagy részének az ellenőrzésére alkalmas**

- **aránylag nagy számú hallgató tudásának egyidejű mérése,**

- **viszonylag objektív és igazságos,** ha az írásbeli alatt megfelelő a felügyelet és ha a javítás azonos pontozás szerint történik

- a hallgató a vizsgadolgozatba betekintést nyerve, **pontosabb visszajelzést kap**, tanulhat saját hibájából

- alkalmas a vizsgákkal kapcsolatos értékelés utólagos ellenőrzésére

Az írásbeli vizsgák hátrányai:

- **nem lehet az egész félév anyagát ellenőrizni ilyen módon**, a kiválasztott feladatok nyilván az előadó által fontosabbnak tartott fejezetek ellenőrzését jelentik és ez nem biztos, hogy egybeesik az oktatás során a továbbiakban fontosnak bizonyuló fejezetekkel

- egy része a hallgatóknak írásban nem tudja meggyőzően bizonyítani tudásának szintjét

- gyakori az időhiányra való hivatkozás

- az írásbeli dolgozat megoldásának a leírása nehezebben javítható, az áthúzásokkal tűzdelt dolgozat nehezen javítható, áttekinthetetlen

- **az írásbeli dolgozat értékelése, annak objektivitása dacára is, több kétséget ébreszthet**, az oktató felelőssége eldönteni, hogy egy esetleg elkövetett számolási hibát mennyire tart súlyosnak, nyilván egy 90%-ban hibátlan megoldás sokkal értékesebb, mint egy hiányzó vagy teljesen hibás megoldás, mégis egyes esetekben szűkmarkúan kell bánnunk a részpontokkal. **Az oktató**

érvényesítheti azt a szempontot, hogy egy mérnöknek a matematikai számítások során véletlenül sem szabad tévednie, hiszen munkájának eredménye (esetleg híd, alagút, felvonó, közlekedési jármű) nem lehet hibás akárcsak 1%-ban sem, **más szempont szerint, ha egy megoldás elvileg tökéletes, de tartalmaz egy-két számítási hibát, akkor teljes értékűnek tekinthető,** hiszen a gyakorlatban, egy-egy fontosabb alkalmazásnál, amúgy is többszörösen ellenőrzik a számításokat.

- az **írásbeli dolgozat gyakran nem a hallgató valódi tudását méri, hanem a tudás előhívásának reakcióidejét.** Egy 8-10 feladatot tartalmazó kétórás vizsgadolgozat során a hallgató valódi teljesítménye csak akkor érvényesülhet, ha megszokta a folyamatos, magasszintű koncentráción történő teljesítést, nincs idő lazításra, de rendszerint az eredmények ellenőrzésére sem. Az írásbeli vizsga a legkevésbé alkalmazkodik a hallgató egyéni munkatempójához.

10.1.3. A szóbeli vizsga

A szóbeli vizsga során az oktató választhat több lehetőség közül kijelölheti önkényesen vagy a hallgató előzetes teljesítményének ismeretében azokat a kérdéseket, amelyekre a hallgatónak felelnie kell, vagy a vizsgázónak választania kell egy tételsorból egy-két-három kérdést.

Ilyenkor a tételek szervezésében is lehetséges a kérdéseket egyesével leírni, ilyenkor több (több fajta) tételsorból húzhat a diák, például elméleti, gyakorlati kérdés, de gyakori a komplex tételek előállítása, amelyek eleve több kérdést tartalmaznak.

A szóbeli vizsgáztatás bármelyik változatát is tekintjük, a hallgatók és az oktatók kapcsolata itt sokkal személyesebb. **A vizsga során oktató és vizsgázó a tananyag szokásos kérdésein túl a metakommunikáció révén is kapcsolatba kerül.** Az ideges, türelmetlen vizsgáztató negatívan befolyásolhatja a vizsgázó teljesítményét, a nyugodt, feszültség mentes szóbeli vizsga ugyanakkor a hallgató teljesítményét fokozhatja. A metakommunikációs kölcsönhatás nyilván azt is eredményezheti, hogy a vizsgázó magatartása is befolyásolhatja az oktatót. A nagyobb pszichikai teher természetesen a hallgatón van és mivel ez a vizsgáztatási módszer kevésbé elterjedt a műszaki karokon az alaptárgyak oktatásában, a hallgatók gyakran idegenkednek tőle.

A szóbeli vizsga előnyei:

- a vizsgázó esetleges hibájára az oktató felhívhatja a figyelmet és így a hallgató könnyebben rádöbbenhet az elkövetett hibára, ha tudása hiánytalan, akkor képes a hibát kijavítani, bizonyítani felkészültségét.

- az eredményt azonnal a hallgató tudomására hozhatjuk

- a hallgató és előadó közötti kapcsolatot személyes ismeretség szintjére emelheti

- a szóbeli vizsga az egyetemi vizsgaszabályzat szerint nyilvános, ezért a vizsgán résztvevő hallgatók, esetleg oktatók a vizsgázónak feltett kérdésekből, a felelet tartalmából következtethetnek a vizsgakövetelmények szintjére

A szóbeli vizsga hátrányai:

- **a nagyobb pszichikai terhelés miatt a hallgatók kevésbé szívesen választják** (ha választható)

- a vizsga eredménye éppen annak személyes jellege miatt, a vizsgázó esetleges gátlásossága, vizsgadrukk, bizonytalanság, fáradtság miatt nem tükrözi a hallgató felkészültségét

- **a vizsgára várva a hallgatóknak nő a pszichikai terhelése**, fáradnak, nyilván előnyben van az, aki kevesebbet várakozik a vizsgára és **hátrányban az, akire később kerül sor**

- a hallgatók megítélésének objektivitása azáltal is sérül, hogy **nem egyforma a teljesítőképességük a különböző napszakokban**

- sokkal **kevesebb hallgató vizsgázhat** egy nap, megnő az oktató vizsgaterhelése

- ha ugyanabból a tárgyból **több oktató vizsgáztat, akkor még fokozottabban kialakulhatnak a szubjektív megítélések miatti egyenlőtlenségek** - egyik oktató szigorúbb, másik elnézőbb, az egyik türelmetlen, a másik nyugodtabb.

10.1.4. Az írásbeli vagy szóbeli vizsgát megelőző beugró kérdéssor - minimum teszt

Célja az "igényesebb" vizsgák esetén a felkészületlen hallgatók kiszűrése és rendszerint a vizsga követelményszintjeihez képest jóval kevesebbet, az alapfokú kérdéseket, fogalmakat ellenőrzi.

A beugró kérdéssor előnyei:

- a vizsgáztatót megkíméli a fölösleges időtöltéstől **a beugró sikertelensége esetén a vizsga tovább nem folytatható**, azaz az írásbeli többi részét rendszerint nem javítják vagy a vizsgázó nem állhat szóbeli vizsgára

- a minimál kérdések előzetes közlése **ráirányítja a figyelmet azokra az alapfogalmakra,** amelyeknek az ismeretét a vizsgáztató elsődlegesnek tartja és **a vizsga szempontjából alapvető fontosságúaknak ítél**

A beugró kérdéssor hátrányai:

- az esetleges **vizsgadrukk akadályozhatja a hallgatót** a rendszerint feszített körülmények között (rövid idő, pattogó ritmus) feltett kérdések megválaszolásában

- tulajdonképpen **megkettőzi az aláírás szerepét**, tehát ha egy félév nem elegendő ahhoz, hogy az oktató felmérje azt, hogy a hallgató képes-e vizsgára állni, akkor mit várhatunk el egy tízperces-félórás rövid beugrótól? Ha a félévközi ellenőrzés alapos volt, akkor meg fölöslegesen tesszük ki a hallgatót egy stressznek, nem érvényesül a megszerzett jog elve

- eleve bizalmatlanságot, rosszindulatot tételez fel a hallgatók részéről, hiszen **a vizsgára jelentkező nem elsősorban a beugró anyagából, hanem a vizsga anyagából készül**.

Ha pedig valaki csak a beugróra koncentrál, akkor mi lesz a beugró eredményével, sikeres minimál teszt továbbvihető-e a sikertelen vizsga esetén az ismételt vizsgára? Rendszerint nem, ugyanakkor például egy jogosítványért vizsgázva a részeredmények továbbvihetők.

10.2. A félévközi munka értékelése

10.2.1. Folyamatos ellenőrzés

A hallgatók folyamatos ellenőrzése, bár bizonyos esetekben kívánatos lenne, az egyetemi oktatási formától idegen, **megvalósítása a viszonylag magas hallgató/oktató arány miatt nehézkes.** Történnek próbálkozások még a matematika terén is, például minden héten zárthelyi íratásával. Ilyenkor követelmény lehet minden zárthelyi maradéktalan teljesítése, de elképzelhető az is, hogy a félév elismerésének feltételeként például tizennégyből tíz sikeres zárthelyit kell írjon egy hallgató.

A folyamatos ellenőrzés előnyei:

- a hallgatókat kényszeríti az előadás szorosabb követésére és a folyamatos tanulásra

- az oktatónak nagyobb segítséget nyújt a folyamatos visszajelzés

- főleg első éven, mivel közel áll a középiskolai munkastílushoz, könnyebbé teszi az átmenetet az egyetemi tanulási stílus kialakításához, ha fokozatosan megszűnik

A folyamatos ellenőrzés hátrányai:

- az egyéni munka kialakítását hátráltatja, amennyiben állandósul

- túlságosan töredezetté teszi a félévet, ha egyes sikertelen ellenőrzéseket a hallgató még pótolhat is, akkor lehet, hogy tizennégy hét alatt huszonnyolc mini zárthelyit is ír

- a hallgatók folyamatos ellenőrzése túl sok időt von el az oktatástól

10.2.2. Feladatok beadása

Az oktatás kiegészítéseként jól használható módszer a tanult anyaghoz fűződő feladatok, feladatsorok kiosztása és a megoldásuk határidőre történő beadása. A hallgatók a feladatsorok megoldásához az előadásokon és gyakorlatokon tanultakat át kell ismételjék és azok mintájára, azoknak ötleteit alkalmazva kell a feladatsorokat megoldaniuk.

Előfordul, hogy ugyanazt a feladatsort kapja minden hallgató és elvárjuk, hogy **egymástól függetlenül dolgozzanak, esetleg erről nyilatkozzanak.** Természetesen ilyenkor nehezen állapítható meg, hogy a hallgató valóban önállóan, saját erejéből dolgozott, vagy segítséget vett igénybe, esetleg csupán másolta a feladatok megoldását. Ha a hallgató nyilatkozik arról, hogy a feladatokat önállóan, saját erejéből oldotta meg, akkor **a vizsgáztató "mintegy felmentést kap", ha a hallgató a vizsgán nem tud hasonló feladatot megoldani, "arról a vizsgáztató már nem tehet".**

Ugyanezt a célt már sokkal jobban szolgálják az olyan feladatsorok, amelyekben minden hallgató más és más feladatokat kap. Erre a Valószínűségszámítás tárgy esetén a Miskolci Egyetemen **Fegyverneki Sándor és Raisz Péter dolgoztak ki egy olyan számítógépes programot, amely minden hallgatónak más-más bemenő adatokkal generálja a feladatsorokat.**

Ezzel a módszerrel fokozottan érvényesül a hallgató egyéni munkára kényszerítése, de itt sem zárható ki az "idegenkezűség", a hallgatóknak ebben az esetben sem árt nyilatkozniuk a munka önálló elvégzéséről, az előbb említett felmentés elv itt is érvényesül.

A feladatbeadás előírható kötelező feltételként is, de létezik a feladatbeadásnak választható módja is, ez esetben jutalompont, előnyök származhatnak belőle, mint a szerző által a Lineáris algebra tárgyak esetén alkalmazott pontrendszerben (lásd CD mellékletben).

A feladatbeadás előnyei:

- megnöveli a tantárgyra fordított effektív tanulási időt
- lehetőséget ad a tantárgy alkalmazásainak kifejtésére
- lehetőséget ad esetleges kiegészítő tanulmányokra
- fokozza az önálló munka, jegyzethasználat, könyvhasználat hatékonyságát
- nincs szorosan időhöz kötve, a lassabban dolgozó hallgató is sikerrel teljesítheti
- használható jutalmazásra, ösztönzésre is - ez esetben fokozhatja a hallgatók pozitív hozzáállását a tárgyhoz.

A feladatbeadás hátrányai:

- a hallgatói terhelés jelentős növekedése
- a külső segítség igénybevételének túl nagy a kísértése
- az oktatói terhelés, adminisztráció is lényegesen növekszik
- a feladatbeadás pótolhatóságának szabályozásával az előbbi hátrányok még csak növekednek
- a kötelező feladatbeadás elmulasztása büntető jellegű, fokozza a hallgatók elutasító hozzáállását az adott tárgyhoz.

10.2.3. Egyéni vagy csoport projektek

A projektek abban térnek el a feladatsorok kiadásától, hogy nem elsősorban az adott tárgy begyakorlásának eszközeként használjuk, hanem **az adott tárgy ismeretanyagának szélesebb körű felhasználhatóságát sugallják.** A projektek témája az oktatott tárgy kiegészítései egy-egy olyan irányba, amely a hallgatónak hasznos lehet, de nem tartozik a tárgy szorosan vett anyagához.

Ha a projekt egyéni, akkor fokozottan érvényesül az **egyéni munkamódszer, kutatói hajlam kialakulása, az önellenőrzés igénye.** A csoport projektek alkalmazásával a **teamwork, csoportmunka elve érvényesül fokozottan** és ez az adott tárgy ismeretkörének kiszélesítésén túl, másodlagos célként, a csoportmunkában kialakuló szerepkörök gyakorlására is lehetőséget nyújt.

Mindkét típusú projekt esetén lényeges az, hogy a hallgatók a kiadott témát önállóan járják körül, a kijelölt könyvészeti anyagon túl, más irányba is kutakodjanak, az adott ismeretanyagot rendszerezzék, feldolgozzák és egy beszámoló elkészítésével, valamint annak bemutatásával ismereteikről számot adjanak.

A projektmunka során fokozottan érvényesül a **learning by doin***g* elv, ugyanakkor a kisdolgozat elkészítése és annak igényes bemutatása már túllép ezen, nevezzük ezt a **better understanding by explaining** elvnek.

Ahhoz, hogy a projekt eredményeit a hallgató társainak bemutathassa, az anyag sokkal mélyebb fokú megértésére van szüksége, nem mechanikus reprodukció, hanem dinamikus expozíció következik be. A hallgató a projekt megvalósításával nyilván sok időt tölt el, és a projekt elmagyarázása, illetve az eredmények tömör bemutatása nagyon alapos felkészültséget tételez fel.

A társaik előtt bemutatott előadáshoz a jelenlévők hozzászólhatnak, és ez a hozzászólás - megbeszélés - minőségileg más, mint az oktatás nagy részében zajló, oktató-hallgató viszony. Itt **hallgató-hallgató viszony alakul ki**, Karinthy Frigyest parafrazálva nem az oktató emel fel fél kézzel "húszezer b betűvel kezdődő szót", hanem **az egyik hallgató bizonyítja a másiknak, hogy egy kis odafigyeléssel, egy vállalható és már elvégzett munkával többlettudáshoz juthat.** Gyakran fordul elő ugyanis az oktató-hallgató viszonyban az, hogy a hallgató nem érzi tudását összemérhetőnek a tárgy követelményeivel és ez a projektmódszer lehetőséget ad az egyéni értékek érvényesülésének.

Konkrét példaként említeném a Gépészmérnöki Karon egy matematikából közepesnél gyengébben teljesítő hallgató esetét, aki amikor a differenciál egyenletek fejezetnél szóba került a Wankel motorok kérdése, önként vállalt egy kiselőadást a bolygó-dugattyú történetéről és valóban igényes, alapos előadást is tartott ebből a témából, **majd utána látványosan javult a teljesítménye a matematika tanulásban,** "szégyellt kevesebbet tudni, felkészületlenül jönni a gyakorlatra".

A projektmódszer előnyei:

- a leghatásosabb az önálló munkavégzés megtanulásához

- hozzájárul a hallgató verbális képességeinek és készségeinek a kifejlődéséhez, ez fontos lehet, hiszen a mérnök, munkája során, bármikor kerülhet olyan helyzetbe, hogy eredményeiről kisebb-nagyobb közönség előtt beszámolót kell, hogy tartson

- a kiselőadás leírásához a hallgató gyakorolja a matematikai szövegszerkesztők használatát és ez később hasznosul a diplomamunkája során, az abban előforduló matematikai rész megírásakor

- gyakorolja a csoportmunkában a szerepmegosztást, esetleg a bemutató többszöri megismétlésénél a csapat felkészülhet szerepcserékre vagy esetleg hiányzó csapattag helyettesítésére

- a csoport projektek erősítik a közösségi szellem kialakulását, az elhúzódó csoport projektek résztvevői mikro- szociológiai szemmel bizonyos fokig elkülönülnek, összetartanak, különlegesnek érzik magukat.

A Miskolci Egyetemen működő **Matematikai Önképző Kör tagjai** (pl. az 1997-1998-as oktatási évben) rendszeresen az önképzőköri foglalkozások időpontjától függetlenül is összejártak és megünnepelték egymás születésnapját és névnapját. Tudtak egymás eredményeiről, gondjairól és évek múltán is tartották a kapcsolatot. A közösen elért eredmény tárgyiasulásának egy érdekes példája a következő: **a Potsdam-i Ifjúsági Matematikai Kongresszuson elért első helyezés** díjaként kapott közös számítógépet eladták, hogy a kapott pénzből a kör minden tagja egy nagy teljesítményű zsebszámológépet kaphasson.

A projektmódszer hátrányai:

- nem tehető kötelezővé, hiszen az adott tárgy alapkövetelményein túl mutató anyagrészt tartalmaz

- előkészítése és megvalósítása a hallgatónak és az oktatónak is egyaránt jelentős többletmunkát jelent

- a hallgatók nehezebben juthatnak sikerélményhez, hiszen nem minden hallgató képes önálló munkavégzésre

- értékelésük fokozottan szubjektív, az oktató érdeklődési területével kapcsolatos

- csoportprojekt hátránya lehet az, hogy csak bizonyos szerepköröket gyakorol, például az ügyeskezű rajzolóra mindig a rajzok elkészítése hárul, de nincs rálátása a bonyolultabb számításokra. Ha a bemutatás valamilyen idegen nyelven történik, akkor a csoportban például angolul tudó nyilván az előadás bemutatásakor kap fontos szerepet és lehet, hogy a projekt kivitelezésében kihúzza magát a közös munka alól vagy ha például a csoportból csak egy hallgató tudja a bemutatót Power Pointban elkészíteni, akkor a többiek nem is éreznek késztetést annak megtanulására.

Egyéni projektek között említhetném többek között **egy programozó matematikus főiskolás munkáját**, amelyben a maradék osztályok Z_p gyűrűjében végzett műveletek elvégzésére alkalmas programot írt, $3 \leq p \leq 21$ között.

Ugyanez a főiskolás **egy gráfelméleti alkalmazásként elkészítette egy rács-szerkezet kimerevítését modellező programot.** Ebben a gyakorlati témában arra a kérdésre keresett és kapott választ, hogy egy síkrács, amely a rácspontok körül szabadon elfordul, milyen feltételek között lesz merev, azaz hány négyzetbe és hova kell elhelyezni átló alakú merevítéseket ahhoz, hogy a kapott rács teljesen merev legyen.

Sikeres egyéni projektek voltak többek közt a Cardano képlet alkalmazására, a szimmetrikus polinomok tulajdonságaira, a periodikus függvények tanulmányozására, a determinánsok geometriai alkalmazásaira, a komplex számok és kvaterniók kapcsolatára, integrálok alkalmazására összegek kiszámítására, vagy a határozott integrálok közelítős számítására kiírt dolgozat-témák. Ezeknek több változatából leszűrt tapasztalatot és a kisdolgozatok részletezését az értekezés egy előző fejezete tartalmazta, megvalósult projektek címmel.

A csoport projekt megvalósításának egy igen szép példája az a tízszerzős **Theorems in the Geometry of the Triangle** című kötet, amin a Matematikai Önképző Kör tíz tagja mintegy félévet dolgozott.

A kötetben szereplő kérdések, fogalmak, tételekről előbb rendre szóbeli kiselőadást tartottak, a kiselőadás szövegét előbb magyarul írták le, megtanulva közben a Scientific WorkPlace és a Geometers' SketchPad című programcsomagok használatát.

Ezután a potsdami **Ifjúsági Matematikai Kongresszusra készülve, előadásaik szövegét angolra fordították,** azt többszörösen ellenőrizték, és egymásnak felmondták. Az Ifjúsági Kongresszuson történő bemutatóra készülve előadásaikhoz fóliákat készítettek, számítógépes kivetítésre is fel voltak készülve, de "ha minden kötél szakad alapon" a bemutatóhoz szükséges rajzokat - mintegy harmincat - A/0-ás méretben is elkészítették. Az előadásaik egybefűzött szövegével a kör két tagjának gondos utómunkáival készült el az a kiskötet, ami a kör munkáját abban az időben jellemezte.

11. Elhanyagolt tanulási- oktatási tapasztalatok felélesztése és új módszerek keresése

Meg vagyok győződve, hogy minden kollegának sok ilyen ötlete van, más kérdés, hogy alkalmazza-e azokat, megosztja-e a tapasztalatát másokkal? Ezért érzem fontosnak a matematikaoktatással kapcsolatos tanácskozásokat.

11.1. Aktív módszerek

Egyéni:

- Tanulás a közvetlen műveletvégzés, munka közben
- Learning by doing elv
- Önképzés
- Konstruktív módszer.

Csoportos (ugyanazok mellett):

- A tanultak mélyebb megértése másoknak újramagyarázva
- Deeper understanding by explaning elv

A projekt-módszer:

- A projekt témája komplex feladat, több tárgyhoz kötve
- Fő érv a felhasználhatóság

Előny: csoportmunka, egymás motiválása, önkontrol
Hátrány: A munkamegosztás mérése nehéz, óvatosan kell alkalmazni.

11.2. Az aktív oktatás egyik jellemzője a hasznossági elv

Olyan jelenség, műszaki kérdés köré csoportosítjuk az anyagot, aminek következménye egy újabb tudás megszerzése. Ennek a módszernek a szaktanszékek oktatói is nagy ellenzői, azt mondja: Ne a matematika alkalmazásait tanítsuk, mert akkor mit csinálnak majd ők? Ez azért is veszélyes, mert a matematika alapozó részének a súlya jelentősen csökkent már a számítógépek bevezetésekor is, és ez a tendencia nő.

Az aktív módszerek terén a 2000/2001-es oktatási évtől kezdve a Miskolci Egyetem Analízis Tanszékén egyes tárgyak oktatása során tapasztalatot szereztünk [38]. Az angol MacTutor projektek alkalmazása lehetőséget nyújtott például az idelátogató külföldi hallgatók programjának a kitöltésére.

A 2001/2002 évben ezeket a tapasztalatokat szélesebb körben is sikerült kipróbálni [39], és sikerült a Miskolci Egyetemen kívül még további tizenegy egyetemet is bevonni egy CEEPUS hálózat kiépítésébe [17], **CEEPUS Network H 0127** [90], aminek a témája **Active Methods in Teaching and Learning Mathematics** [41].

A hálózatban szerepet vállalt a hazai Szent István Egyetem Ybl Miklós Főiskolai Kara mellett, a Kassai Műegyetem Villamosmérnöki Kara, a Prágai Műszaki Egyetem Villamosmérnöki és Építőmérnöki Kara, a Hrádec Kralové-i Egyetem (Csehország), a Ljubljana-i Egyetem Építőmérnöki és Geodéziai Kara, a Lublini Műszaki Egyetem Környezetvédelmi- és Vízgazdálkodási Kara, a Nagybányai és a Marosvásárhelyi Egyetem, a Bukaresti Építőmérnöki Műegyetem, valamint a Russe-i Egyetem is.

A 2003., 2004. és 2005. évek nyarán **Computer Algebra Driving Licence** címmel Nyári egyetemet szerveztünk a Miskolci Egyetemen, 2005 áprilisában pedig egy intenzív kurzust, amelynek a programjában (lásd CD-melléklet) ezeket az aktív módszereket is hasznosítottuk.

A nyári egyetem hallgatóinak nyilvános beszámolója, a kiselőadások sorozata, a Magyarországi CEEPUS Iroda munkatársainak monitoring látogatása alatt zajlott, és értékelését egy hazai és külföldi oktatókból álló bizottság végezte.

11.3. A számítógép használatának előnyei és hátrányai a matematika oktatásában. Médiahasználat lehetőségei

A gépek használatának vannak tagadhatatlan előnyei, számítások gyorsasága, pontossága, adatok képi megjelenítése.

Ugyanakkor már a zsebszámológép is okozott visszafejlődést a matematikai gondolkodásban, valószínű hogy a számítógép széleskörű elterjedése is rejt néhány veszélyes buktatót.

A tennivaló a helyes egyensúly meghatározása, és a numerikus módszerek alapos ismerete, az eredmények tudatos értékelése.

Fontos a matematika oktatásának keretében konkrét, valószerű gyakorlati alkalmazások bemutatása, akár a fogalmak kialakításánál, akár az eredmények tárgyalásánál. Fontos, hogy ezek az alkalmazások, gyakorlati példák jól átgondoltan a megfelelő ismeretközegben jelenjenek meg, és megoldásukkal az adott elméleti kérdés felépítését, a fogalom mélyebb megértését segítsék elő.

A számítógépek számának és kapacitásának ugrásszerű növekedése elvezetett a számítógéppel segített oktatási formák szerepének rohamos növekedéséhez, megjelentek a távoktatás különböző formái, jelentősen befolyásolva a felsőoktatást, főleg a mérnöki egyetemeken, és ezen belül a matematika oktatását is.

Egyes szerzők szerint, Burton [87], James [126], a mérnökök egy része azon a véleményen van, hogy a számítógépes matematikai szoftverek képessé teszik a hallgatókat mindazoknak a műszaki feladatoknak a megoldására, amiért eddig a matematikát tanulni kellett, következésképpen, fölöslegessé vált a mérnökhallgatók matematikaoktatása. Ugyanakkor az idézett szerző arra is rámutat, hogy a számítógép "fekete dobozként" történő használatával a tapasztalt mérnökök és a mérnökképzés szereplői nemcsak, hogy nem értenek egyet, de nem győzik hangsúlyozni annak veszélyességét. **Fontos tehát, hogy a mérnökhallgatók rendelkezzenek azzal az alapos matematikai tudással, amely képessé teszi őket a számítógépes szoftverek tudatos alkalmazására, az eredmények helyes értelmezésére és ellenőrzésére.**

Ezirányú tapasztalatokkal szinte minden egyetemen rendelkeznek a kollegák, de a számítógépek alkalmazása az oktatásban meglehetősen sok módszertani és tartalmi kérdést is felvet. Ezeknek a **kutatása az utóbbi években fellendült,** elég csak a témában a Miskolci Egyetemen különböző tanácskozásokon elhangzó előadásokra gondolnunk [146], [186], [81], [163], [152], [72], [133], [165], [177], [129], [187], [164].

A téma **kutatása jelenleg is folyik többek** közt a Debreceni Egyetem Matematika és számítástudomány Doktori Iskola, Matematika- didaktika programjában [154].

A Miskolci Egyetemen **az Alkalmazott Matematikai Tanszék oktatói szinte kivétel nélkül használják a DERIVE-ot és a MATLAB-ot** az oktatás során, és a számítógéppel segített oktatásban meglehetősen nagy tapasztalatra tettek szert. A **szoftverek használatának megkönnyítésére készült** a hallgatók számára a [105] jegyzet**. Az Analízis Tanszéken** csak bizonyos tárgyak oktatása során, leginkább csak bemutató jelleggel történt számítógéphasználat, ennek az oka az, hogy a tanszék zömmel nagy létszámú hallgatóságot oktat, előadáson általában 200-300, gyakorlatokon 50-60 főt, és **nagyszámú hallgatóval nem megoldható a számítógép aktív használata**.

A Matematikai Intézet oktatói a számítógépes oktatási módszerek leírásában is közzétették tapasztalataikat lásd pl.: [108], [119], valamint a szerzőnek pl. [29], [33], [56] cikkei.

Az értekezés szerzője azt a következtetést vonta le a saját tapasztalatából, hogy a számítógéppel segített oktatási formák jó része az egyéni tanulásban illetve a kisebb létszámú hallgatócsoportok oktatásában alkalmazható aktív módszerekkel párosítva sokkal hatékonyabbak, mint a nagy létszámú hallgatóságnak tartott előadás esetén. Ennek értelmében a szerző ilyen irányú eredményeinek nagyobb részét egy előző pont, A hallgatók aktív részvétele, tartalmazza.

Tény, hogy a számítógép a szemléltetésben felülmúlhatatlan, de a szemléltetés az oktatásnak csak eszköze, nem célja. Ugyanakkor a távoktatásban a számítógép nélkülözhetetlen eszközzé válik a távoktatási anyagok elérhetőségében, és végső soron magának az oktatásnak a folyamatában.

A szerző véleményét (matematikai megfogalmazásban: létszám és hatékonyság szorzata állandó) alátámasztani látszik két következtetés:

- A Miskolci Egyetem Távoktatási Központjában a 2001 évi MicroCAD konferencián elhangzott az a vélemény, hogy hiába ül a számítógép előtt egyidőben az távoktatás két főszereplője, hallgató és tanár, a tapasztalat szerint 10-15 fő esetén lehet hatékony az oktatás.

- A számítógépes szoftverek alkalmazásának tapasztalata a matematikaoktatása terén is ezt igazolja, pl. Perjésiné Hámori Ildikónak a témába vágó kutatása [154]: "*...a **CAS rendszer** (CAS jelentése Computer Algebra Systems, számítógép-algebrai rendszerek, szerző megjegyzése) ...**elsajátítása**, csak **kisebb tanulócsoportoknál**, számítógépes környezetben lehetséges,...használatának eredményességét növeli, ha azt **egyszerű feladatok** tanári irányítással történő, **táblás-krétás** megoldása előzi meg,...alkalmazása nem a matematikai fogalmak, eljárások pontos megfogalmazása és alkalmazása helyett, hanem azok elősegítése érdekében kell történnie.*"

Megjegyzés. A fenti idézetben a kiemelések **is** Perjésiné Hámori Ildikótól származnak!

12. A nemzetközi együttműködés szerepe

Munkánkat nagyban segíti, ha más oktatók tapasztalatait meg tudjuk ismerni, az értekezés szerzője az utóbbi években a következő tanácskozásokon vett részt, mint előadó vagy szervező:

8th SEFI European Seminar on Mathematics for Engineers, Prága, 1995

9th SEFI European Seminar on Mathematics for Engineers, Helsinki, 1998

Matematika Oktatása Mérnököknek, Miskolc, 1999 június 2-5.

IGIP "Unique and Excellent", Biel, 2000.

10th SEFI European Seminar on Mathematics for Engineers, Miskolc., 2000 június 15-17.

2001. évben az említett matematika oktatási konferenciákon szerzett tapasztalat alapján megszerveztük a Rátz László Matematikatanári Vándorgyűlés Felsőoktatási szekcióját (ezt megelőzően hosszú éveken keresztül szünetelt), amely azóta is újra működik (2001 Miskolc, 2002 Győr, 2003 Békéscsaba).

11th SEFI European Seminar on Mathematics for Engineers, Götegorg, 2002 június 9-12.

12th SEFI European Seminar on Mathematics for Engineers, Vienna, 2004 június 14-17.

6th Junior Mathematical Congress, Stockholm, 2004, június 23-28.

10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen, Denmark, július 4-11, 2004.

Ezeknek a konferenciáknak a tanulságait az értekezés megírásakor is hasznosítottam.

Az **IGIP konferencián, Unique and Excellent, [141]** a szerző a MacTutor projektekről tartott előadást [16], és nagyon érdekes kérdést ismert meg F. Kath dolgozatában [130], a mérnökoktatás ú.n. PARADIGMA VÁLTÁSÁT, amely ráébresztette arra, hogy mindaz amivel mi kínlódunk, az más országokban sincs megoldva. Ennek a paradigma-váltásnak egyszerű az alapelve. Ha eddig a tanórák anyaga volt a központban, most a hallgató kerül oda, és ha szükséges, az egész oktatást át kell alakítani erre a szemléletmódra.

12.1. A matematika oktatásának kérdéseiről rendezett konferenciák

Tekintve, hogy a műszaki egyetemek végzettjei gyakran kerülnek kapcsolatba munkájuk során más országokban végzett műszaki értelmiségiekkel, fontos az, hogy a matematika oktatása különböző országok műszaki egyetemein nemcsak a matematikai eredmények fejlődésével tartson lépést, hanem mindazzal, ami a matematika oktatása terén a többi (európai) országban történik. **Európa szerte két fontosabb nemzetközi mérnök-szervezet fogja egybe általában a mérnök-oktatás problémáit az IGIP (Ingenieurpadagogik) és a SEFI (Société International pour la Formation des Ingénieurs).** Mindkét szervezet rendez nemzetközi tanácskozásokat a mérnök-oktatás területén, a SEFI-nek az egyik legaktívabb munkacsoportja éppen az MWG (Mathematics Working Group), a Matematika Munkacsoport. Ez utóbbi kétévenként rendez egy-

egy háromnapos európai szemináriumot, ahol a meghívott előadók és több más kollega osztja meg tapasztalatait a résztvevőkkel és az elhangzottakat kerekasztal megbeszéléseken vitatják meg. **A 10^{th} SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering**, a szeminárium-sorozat 10. kiadása 2000-ben a Miskolci Egyetemen került megrendezésre és ebben a munkában a helyi szervezőbizottság vezetője az értekezés szerzője volt. A szeminárium munkájában a Miskolci Egyetem oktatói közül néhányan előadás megtartásával vettünk részt és az itt megjelent mintegy 18 ország képviselőivel megosztottuk tapasztalatainkat. A szemináriumon elhangzó előadások hozzájárultak ahhoz, hogy felmérhessük azokat a nehézségeket, amelyekkel más országok műszaki egyetemein oktató matematikus kollegák eddig is találkoztak és alkalmunk volt arra, hogy a Miskolci Egyetemen oktatott matematika tárgyak tartalmát a SEFI által kidolgozott Core Curriculum, a műszaki egyetemeknek egységesen ajánlott matematikai törzsanyag tartalmához viszonyítsuk.

Az elmúlt két évben ebben a témában az intézetünk keretében rendezett tanácskozásokon a mi tapasztalatainkat egybe tudtuk vetni a magyarországi kollegák és Európa más országaiban oktatók tapasztalatával. Sok hasonlóság tapasztalható, az itt felvetett kérdések egy részéről igen alapos tanulmányok jelentek meg a két konferencia-kötetben, ezek a **Proceeding of the Teaching Mathematics for Engineering Students** [**59**], és a **Proceedings of the 10th SEFI -MWG European Seminar on Mathematics on Engineering Education** [**49**].

A SEFI szeminárium egy értékes anyaga az **CORE CURRICULUM** [92]. Ez SEFI Matematikai munkacsoportjának 1992-ben megjelent (szerkesztők L. Mustoe és D. Lawson) dokumentumának az átdolgozott kiadása, amely a munkacsoport 10 éves tevékenységét tükrözi.

Alapötlete egy olyan nemzetközileg elfogadható európai standard kialakítása, aminek két fő célja:

- **Az európai egyetemek hallgatói mobilitásának előfeltételét, az azonos követelményeket biztosítani,** mivel ez a dokumentum előírja, azt, hogy egy mérnök-hallgatónak mi a minimálisan elvárható ismereti szintje, és

- **Védelmet jelentsen a nagy egyetemi tantervmódosítások olyan irányzatai ellen, amelyek a matematika oktatását a számítógépi kapacitások növelésével párhuzamosan csökkenteni akarják**.

A CORE ZERO megadja mindazt amit egy diáktól elvárunk az egyetemre felvétele után, a többi rész meg azt írja le, hogy milyen közös képzési célok fogalmazhatók meg azon európai egyetemek végzőseinek, akik elfogadták mint irányadó dokumentumot.

12.2. A CEEPUS H-127 hálózat működéséről

A SEFI szemináriumon résztvevő kollegákkal nem szakadt meg az együttműködés egyrészt szakmai téren (több közös publikáció született a résztvevő kollegákkal), másrészt a matematika oktatás terén, ahol a publikációkon túl sikerült kiépítenünk egy széleskörű együttműködést, felhasználva a **CEEPUS, Central European**

Exchange Program for University Students [89], Közép-Európai Egyetemi Tanulmányi Csereprogram által nyújtott pályázati lehetőségeket.

A negyedik éve kiépített hálózatban jelenleg hét ország tizenkét egyeteméről, ill. egyetemi karáról vesznek részt kollegák, a hálózat koordinálását a Miskolci Egyetem Matematikai Intézete, és az értekezés szerzője végzi. A hálózat felépítésében nagy szerepet játszott a SEFI szeminárium megrendezésében szerzett tapasztalatunk és az a kapcsolatrendszer, ami a SEFI munkacsoportjában végzett munkának köszönhető. **A H-127 jelű CEEPUS hálózati tevékenység témája: Aktív módszerek a matematika oktatásában és tanulásában [90],** lehetőséget teremt arra, hogy a **CEEPUS** csereprogram [89] által biztosított pályázati lehetőséget felhasználjuk, dacára annak, hogy a matematika a műszaki oktatásban általában alapozó tárgy és mint ilyen, az első két ill. három félév során a matematika tárgyak oktatása nagyrészt befejeződik.

A hálózat munkája során sikerült a tizenkét partner hozzájárulásával olyan változatos lehetőségeket találnunk, amelyekben a matematika oktatásával és tanulásával szorosan összefüggésben tudtuk megvalósítani a hallgatók cseréjét. **A hallgató-cserének ugyanis az adott pályázati lehetőségben az egyik feltétele az, hogy minimum két eredményesen lezárt félév után a hallgatók a csereprogram keretében lehetőleg egy egész szemesztert a vendéglátó intézményben töltsenek, ott hallgassanak (lehetőleg) minden, az adott félévre vonatkozó tárgyat, ott teljesítsék a félévközi feltételeket, ott vizsgázzanak, majd a félév eredményes lezárása után a résztanulmányi eredményeiket a küldő egyetem elismerje.**

A mi hálózatunk témájához kötődően értelemszerűen nehéz volt ezt a feltételt teljesíteni, de végzős, diplomamunkájukat író hallgatók hathatós segítséget kaptak és rövid, intenzív kurzusok szervezésével sikerült a CEEPUS hálózat által megengedett rövidebb időszakokat is kihasználnunk.

A Miskolci Egyetemen és párhuzamosan a Nagybányai- és Marosvásárhelyi Egyetemen is szerveztünk 2003-2005 években, a nyári szünet alatt egy-egy intenzív kurzust, nyári egyetemet, aminek a címe Computer Algebra Driving Licence volt. A résztvevők megismerkedtek a legfontosabb matematikai szoftverekkel és elsajátították azok felhasználásának alapelveit. A nyári egyetemek hatvan órás intenzív előadás és gyakorlat-sorozatot jelentettek, számítógépes laboratóriumi munkával kombinálva.

A résztvevők a megismert szoftverekkel kapcsolatos ismereteikről gyakorlati vizsgán adtak számot és a hálózat alapvető témájának gondolatmenetét követve (Aktív Módszerek a Matematika Oktatásában és Tanulásában) dolgozatot írtak a megismert szoftverek egy kiválasztott alkalmazásáról. Az igényesen megírt dolgozatot eredményesen bemutatták és megvédték az oktatók, a nyári egyetem többi résztvevője és meghívott vendégek, jelenlétében.

A nagybányai és a marosvásárhelyi egyetemek által szervezett romániai nyári egyetemnek még az volt a különlegessége, hogy a résztvevők, akik zömmel gépészmérnök hallgatók, voltak ipari egységekben (Nagybányán) és egy modern gépgyártás- technológiai laboratóriumban (Marosvásárhely) is látogatást tettek, szakmai tapasztalatuk bővítése érdekében. A résztvevők munkájuk elismeréseként mindkét országban igazolást kaptak: **Computer Algebra Driving**

Licence - Basic Level címen.

Terveink szerint kiterjesztjük ennek az intenzív kurzusnak a tevékenységét a hálózat egészére, tervezzük az alapfokú szint mellett a középfokú és felsőfokú szintnek megfelelő formáját is kidolgozni és reméljük, hogy ez az együttműködő egyetemek a gyakorlatában idővel hivatalosan elismert, esetleg kredit pontokkal járó részképzéssé válik.

12.3. CEEPUS Computer Algebra Driving Licence nyári egyetem

A **CEEPUS** H-127 hálózat [90] programjában együttműködő egyetem hallgatóinak részére szervezett nyári egyetem fő célja a különböző egyetemeken ta-nuló hallgatók bevonása egy közös programba, közelebbről a matematika ta-nulása során használható fontosabb szoftverek alapfokú felhasználói ismereteinek elsajátítása. A hallgatók mintegy 20 óra előadáson ismerték meg azt az öt legfontosabb szoftvercsomagot, amiknek a felhasználását aztán közel 25 órán keresztül gyakorolták. Mindegyik szoftvercsomag megismerését egy-egy rövid teszt zárta, amelynek során a hallgatók alapfokú feladatok megoldásával bizonyították be, hogy rendelkeznek az adott szoftver alkalmazásához szükséges alapfokú felhasználói ismeretekkel, lásd CD melléklet.

A nyári tábor programjában szerepelt még mintegy 15 óra diák- előadás is, ezek hármas célt szolgáltak:

- a hallgatók a kiselőadás előkészítése során egy-két szoftver használatát élesben gyakorolták, elmélyítették,

- a kiselőadások leírásával tapasztalatot szereztek egy majdani diákköri dolgozat elkészítéséhez, megismerkedtek a matematikai szöveg szerkesztésével, a szoftverek segítségével kiszámított eredmények beillesztését is gyakorolták a szerkesztett szövegbe

- a kiselőadásaik közben a társaiknak elmagyarázott anyagot sokkal alaposabban meg kellett értsék (érvényesült a deeper understanding by explaining elv), ugyanakor gyakorlatot szereztek az előadáshoz szükséges eszközök - tábla, írásvetítő, projektor- használatában.

A nyári egyetem résztvevőinek a teljesítményét hazai és külföldi oktatók és szakemberek értékelték, a Miskolci Egyetemről Kwami Agbeko, Nagy Ferenc, Körtesi Péter, az Újvidéki Egyetemről Takácsi Árpád valamint a CEEPUS Magyarországi Irodájának vezetői Csernovitz Adél és Tóth Krisztina.

A hallgatók egy igazolást, (Certificate) kaptak a nyári egyetemen szerzett tudásuk elismeréseként, aminek a minősítése **Basic level Computer Algebra Driving Licence** - Alapfokú Komputer Algebra Felhasználói szint.

A CEEPUS hálózat közös munkájaként ki szeretnénk dolgozni ennek a miskolci nyári egyetemnek a folytatásaként az Intermediate level, és Advanced level fokozatait, ez utóbbi esetén speciális alkalmazásokat tervezünk.

13. Konklúziók

Amellett, hogy a középiskolai oktatás színvonala határozottan csökken, egyre **több olyan oktatási forma jelenik meg amelyekben a matematika hangsúlyosabb szerepet kap:**

- Átképzés, levelező oktatás felértékelődése
- Távoktatás, Open University, E-learning megjelenése
- Post- secondary képzés, a mérnök-asszisztens képzés

A számítógépes szoftverek egyre bonyolultabb számítások elvégzését teszik lehetővé, és ez a mérnöki alkalmazások szempontjából egy megnövekedett igényként jelentkezik a matematika terén is. **A számítógépek elterjedése egy meghatározó, de nem egyedüli kérdés.**

A hallgatók tanulási motivációja csökken, ezt az oktatási formák bővítésével lehet részben kezelni.

Európa, sőt az egész világ szerte elindult **egy standardizálási folyamat**, ez jól követhető a CORE CURRICULUM-ban is.

A jelenlegi helyzetben sokkszerűen gyors változásoknak vagyunk részben szenvedő tanúi ill. alanyai, mint oktatók ill. hallgatók. Mindaz ami a középiskolában változott az elmúlt 10-15 év alatt, fokozottan, de késleltetve érződik az egyetemi oktatásban.

Szakmák, szakirányok tűnnek el, mások meg gombamód szaporodva jelennek meg, a feltételrendszerek, elképzelések sokasága gyakran kidolgozatlan, átgondolatlan, összeegyeztethetetlen, következetlen. Gyakori a menet közben korrigálásra szoruló megoldás. **A piacorientáltság kiszolgáltatottá teszi az oktatást. Ennek a kérdésnek a kezelésére is alkalmas a Core Curriculum [92].**

A mérnökhallgatók **matematikaoktatásának főbb céljai levezethetők a mérnöki tárgyak oktatóinak, és az egyetem utáni alkalmazásoknak, a felhasználói oldalnak igényeiből**. Fontos az oktatás folyamatához szükséges a matematikai ismeretek koherens részhalmazának kiválasztása, elsősorban a megtaníthatóság szempontjából, az oktatás-tanulás alkalmazható módszereinek széleskörű ismerete és fontos az hallgatók képességeinek megismerése, **az előzetes tudásszint felmérése.** Ez utóbbi az egyetemi oktatásban gyakran mellőzött szempont, ellenérvként úgy hangzik, hogy az egyetemi szintet sok oktató szerint nem kialakítani, hanem tartani kell.

Fontos, hogy a hallgatók kialakíthassák **saját munkastílusukat**, és ehhez meg kell adnunk minden segítséget. **A hallgatóknak meg kell tanulniuk TANULNI.**

Az egyetemi tanulási stílus kialakításában is **jelentős lehet a projektmódszer alkalmazása, annak másodlagos hatása.**

Igen lényeges az oktatási folyamat felépítése, az egymásra épülő kérdések alapos ismerete. A fogalmak pontos megadása, a tételek világos, tömör megfogalmazása.

Néhány ilyen fontos fogalomkörnek a tanítását elemeztük részletesebben, a szokásosnál általánosabb, átfogóbb és egységesebb szemléletmódot javasolva a függvények, illetve a mátrixok fogalmának a bevezetésére és megerősítésére.

Annak érdekében, hogy az oktatásra fordítható időt jobban kihasználjuk, mindannyian valamilyen módszerrel igyekszünk a **tételek bizonyítása helyett legalább azok szemléltetését, megértetését, alkalmazhatóságát megmagyarázni,** erre adhat lehetőséget egyebek közt a **matematikatörténeti szempontok hangsúlyosabb érvényesítése**, **a számítógépes szemléltetés**, **a modellek, vagy az ellenpéldák**.

Nagyon fontos a matematika oktatásában keresni az adott műszaki tudományok főbb kutatási területén történő alkalmazások leírását, megismertetését.

A különböző fejezetek oktatásában a fogalmakat szerencsés dolog konkrét műszaki kérdés, kézzelfogható probléma megoldásaként bevezetni, és több példán keresztül bemutatni az adott eredmények, tételek alkalmazhatóságát, illetve az alkalmazások korlátjait. **Fontos az elméleti tételek és a számítások eredményeinek értelmezése. Nem csak a számítási technika begyakorlása, de a kapott eredmények helyes értékelése is hozzátartozik a tanulás-tanítás egységéhez.**

A hallgatók akkor tudják alkalmazni is a matematikában tanultakat, ha gyakran kerülnek olyan helyzetbe, hogy egy-egy műszaki kérdés megoldásra meg kell keressék a megfelelő matematikai eszközt, esetleg több megoldás közül ki kell válasszák e legeredményesebbet. **Napjainkban fontossá válik a módszerek pontossága mellett azok gyorsasága is.**

A hallgatók önálló munkára nevelése olyan szoftvert és számítógépes hátteret igényelne ami pillanatnyilag csak részben áll a hallgatók rendelkezésére. Egy erre a célra alkalmas programcsomag a Mathematical MacTutor, aminek korlátlan felhasználói jogával rendelkezik a Miskolci Egyetem Matematikai Intézete, és ehhez kapcsolódik, mint egy külön lehetőség, a magyar változat is ami szintén elérhető és alkalmazható.

A MacTutor projektek módszerét kiterjesztve a hallgatók számára kidolgozott aktív módszerek alkalmazásával, a kisdolgozatok megírásával, és bemutatásával a hallgatók mélyebben megérthetik az oktatott anyagot, és a tudásuk alkalmazhatóságáról is visszajelzést kaphatnak. A tapasztalat az, hogy a projektmódszernek a dolgozatban ismertetett formája jól alkalmazható a hallgatók aktivizálására, a tanulás folyamat ezáltal az oktató és hallgató együttműködésévé válik. Azáltal, hogy a hallgatók kisdolgozataikat bemutatják társaiknak, több hasznos célt is megvalósítanak. Alaposabban, mélyebben el kell sajátítaniuk a kérdéses fejezetet, és meg kell találniuk azt a módot, amivel társaiknak is érdekessé tehetik annak megértését. **Megnő a hallgatók motiváltsága, a kiselőadásra készülő hallgatóké és a többi hallgatóé egyaránt.** A hallgatótársak, amellett, hogy egy új szempontból látják az adott kérdéskört és annak alkalmazásait, szembesülnek azzal az érzéssel, hogy mindezt egyik hallgatótársuk mondja el, és ráébrednek arra, hogy ez nekik is sikerülhet. Fontos tehát az, hogy a kisdolgozataikat a hallgatók bemutassák, ezáltal a **verbális képességeik és készségeik fejlődnek.** Ha a dolgozatok leírva is hozzáférhetők a többi hallgatónak, akkor azok további hasznosítása is biztosítható, több projektötletet évről évre alaposabban kidolgoznak a hallgatók, egyre mélyebben megismerve az adott kérdéskört.

A módszer alkalmazásának nyomán nőtt azoknak a hallgatóknak a száma, akik szóbeli vizsgára jelentkeztek. Azokból a tárgyakból, amelyek oktatásában kipróbáltuk a projektmódszert, azelőtt is adott volt a lehetőség az írásbeli vizsga helyett szóban vizsgázni, vagy az írásbeli eredményének javítására szóbeli vizsgán, de a hallgatók nagyon ritkán, vagy egyáltalán nem éltek vele.

Csökkent az ismételt vizsgák száma az adott tárgyakból, különösen azokra vetítve akik kisdolgozatot adtak be.

A kisdolgozatot beadó hallgatók közt alacsonyabb volt a későbbi "pályaelhagyás", azaz azoknak a száma, akik tanulmányi okokból félévet ismételtek.

A kisdolgozatot beadók átlag eredménye jobb volt a vizsgán a többi hallgatóhoz viszonyítva, de ennek az értékeléséhez az is hozzátartozik, hogy a kisdolgozat megírására a hallgatók önkéntesen jelentkeztek.

A mérnökképzésben **a projektmódszer**, és különösen a kiscsoportos projektmódszer alkalmazása eredményesen készítheti fel a hallgatót a diplomamunkánál elvárható **önálló tanulásra, kutatásra,** és a "team work" **a csapatmunka módszereinek megismerésére**.

14. Köszönetnyilvánítás

A dolgozat megírásával kapcsolatban elsősorban a témavezetőmnek, dr. Horváth Jenő professzornak mondok köszönetet, aki a dolgozat témájára irányította figyelmemet, és tanácsaival segítette a munkámat.

Köszönettel tartozom hajdani tanáraimnak, a marosvásárhelyi iskolákban és a kolozsvári egyetemen eltöltött esztendők szellemisége sokat segített eddigi életem, munkám során, és remélem így lesz a továbbiakban is.

Köszönet illeti a volt és jelenlegi tanártársaimat és tanítványaimat, akikkel együtt dolgozva, tapasztalataim gyarapodtak, lemérhettem munkám hasznosságát, és akiknek visszajelzései további lendületet adtak.

Külön köszönet illeti azokat a kollegákat, akikkel közösen dolgoztunk az értekezésben leírt kérdések egy részében, vagy akik átolvasták a készülő kézirat egyes fejezeteit és értékes észrevételeikkel segítettek abban, hogy az ott található hibák száma csökkenjen.

Családomnak a nyugodt hátteret és biztatást köszönöm, valamint azt a segítséget, amit a változatos tevékenységek - konferenciák, kiadványok, külföldi utakmegszervezésében nyújtottak.

15. Az értekezés CD-mellékletének tartalma

CADL CEEPUS Summer University - Nyári egyetem programja

CEEPUS H 127 - hálózat dokumentumai

Jegyzetek - ME oktatóinak jegyzete

JMC - Ifjúsági Matematikai Kongresszusok anyaga

Kisdolgozatok - Hallgatók kisdolgozatai

MacTutor - A szoftver általában
MacTutor projects - A Mac Tutor projektlista
Más hivatkozások - Néhány nehezebben hozzáférhető cikk
Oktatás - a ME képzési ismertetője, oktatási szintek leírása
Önképzőkör - diákok dolgozatai
Publikálásra benyújtott dolgozatok
RLV Felsőoktatási ankét - programok
Saját eredmények - Néhány a szerző dolgozatai közül
SEFI -MWG - a SEFI szeminárium anyaga
- CORE CURRICULUM

Hivatkozások

[1] Körtesi P.; Szigeti J.: *On permanental polynomial identities over matrix rings*, Communications in Algebra vol. 22, No.1., (1994), 159-171

[2] Körtesi P.: *About some separation axioms in semitopological inverse semigroups*, Richerche di Matematica, vol. 45 (1995), 1, 11-17

[3] Körtesi P.: *Some separation axioms in topological inverse semigroups*, Topology Proceedings, vol. 22. -the Proceedings of the 12ths Summer Conference on General Topology and its Applications, 1997, North Bay, Canada.201-210

[4] Körtesi P.; Szigeti J.: *The adjacency matrix of a directed graph over the Grassmann algebra*, in: Huynh,D.V.(ed) et all., Algebra and its Applications, Proceedings of the international conference Athens, Ohio,USA, March 25-28., 1999, Providence, AMS Contemporary Mathematics 259., 319-321.

[5] Körtesi P.: *Some Applications of Integral Sums*, Creative Mathematics, (**12**) 2003, NUBM, 1-5.

[6] Körtesi P., Radeleczki S., Szilágyi Sz.: *An application of partial orders*, International Conference on Computer Science, MicroCAD, Miskolc University, March 2004, 65-69.

[7] Körtesi P., Radeleczki S., Szilágyi Sz.: *Congruences and isotone maps on partially ordered sets*, Mathematica Pannonica, **16**/1 (2005), 39-55.

[8] Körtesi P.: *Modelling Quaternions*, Creative Mathematics, közlés alatt **(14)** 2005, NUBM.

[9] Körtesi P., Szigeti J.: *An elementary approach of the Fitting lemma*, benyújtva Mathematica, London.

[10] Körtesi P.: *Parabola order 3 revisited*, Creative Mathematics, NUBM., közlésre elfogadva

[11] Körtesi P.: *Matrix representation of quaternions*, Octogon, közlésre elfogadva

MÁS HIVATKOZÁSOK SAJÁT EREDMÉNYEKRE DOLGOZATOK, ELŐADÁSOK, KIVONATOK, KÖTETEK

[12] Körtesi, P.: *Separation axioms in semitopological and topological inverse semigroups*, Publ. Univ. Miskolc, vol. 35., (1994), 109-118.

[13] Körtesi P.: *MacTutor in teaching Geometry*, Proceedings of the Special SEFI European Seminar on Geometry in Engineering Education, 1997 Smolenice, Slovak Republic, 103-104.

[14] Körtesi, P.: *Counter-examples in Teaching Mathematics*, Proceedings of the 9-th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, 15-17 June, 1998, Espoo, Finland, 75-79.

[15] Körtesi, P.: *Using Geometer's Sketchpad in Teaching*, Proceedings of MicroCAD'2000, International Computer Science Conference, February 23-24, 2000, Miskolc, Section I: Information Technology and Information Engineering, 97-101.

[16] Körtesi P.: *Project Work using Mathematical MacTutor*, Unique and Excellent, Ingenieurausbildung im 21.Jahrhundert, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpedagogik 2000", Leuchtturm Verlag, Biel, 2000., 735-738.

[17] Körtesi, P.: *Active Methods in Teaching Mathematics*, Abstracts of the 11-th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, 9-12 June, 2002, Chalmers, Gothenburgh, Sweden, 10-11.

[18] Körtesi, P.: *Teaching Basic Mathematical Notions*, 12-th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, 15-17 June, 2004, Technical University Vienna, Austria.

[19] Körtesi P.: *Self Made Mathematics*, előadás a 10th International Congress on Mathematical Education TSG4 szekciójában, Copenhagen, Denmark, július 4-11, 2004

[20] Körtesi P.: *Constructing Hamiltonian paths in graphs*, meghívott előadás a 6th Junior Mathematical Congress, Stockholm, 2004, június 23-28

[21] Körtesi, P.: *About some separation axioms in semitopological and topological inverse semigroups*, előadás, Colocviul National de Geometrie si Topologie, (1982), Cluj, Románia

[22] Körtesi, P.: *Order separation axioms in semitopological and topological inverse semigroups*, előadás, Colocviul National de Geometrie si Topologie, (1983), Brasov, Románia

[23] Körtesi, P.: *Separation axioms in semitopological groups, előadás*, Colocviul National Geometrie si Topologie, (1984), Cluj, Románia

[24] Körtesi, P.; Gergely, E.: *Bibligraphia Bolyaiana*, előadás, Colocviul National Geometrie si Topologie, (1984), Cluj, Románia

[25] Körtesi, P.: *Some order properties of inverse semigroups*, előadás, Simpozionul de Matematici si Aplicatii, (1985), Timisoara, Románia

[26] Körtesi, P.; Gergely, E: *Language and Mathematics at János Bolya*i, előadás, Simpozionul de Matematici si Aplicatii, (1985), Timisoara, Románia

[27] Körtesi, P.: *A method for the visualisation of space Geometry problems*, előadás, A XVI-a Conferinta National de Geometrie si Topologie, (1985), Calimanesti, Románia

[28] Körtesi, P.: *A theorem on permanental identities over matrix rings*, előadás Lucrarile Simpozionului de Matematica, (1993), Universitatea Petrosani, Románia

[29] Körtesi P.: *Using Mathematical MacTutor at Miskolc University*, előadás, Abstracts of 8-th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education,(1995), Prága,

[30] Körtesi, P.: *Junior Mathematical Congress-96 Miskolc*, Special English edition of KöMaL, 1996, Budapest.

[31] Körtesi, P.: Junior Mathematical Congress' 96 Miskolc-Hungary, Challenge for future mathematicians, plenáris előadás, Abstracts, 2-ndo Simposio Latinoamericano de ICASE, (1997), Mar del Plata, Argentina

[32] Körtesi, P.: *About teaching Elementary Geometry*, poszter, 9-th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, 15-17 June, 1998, Espoo, Finland.

[33] Körtesi, P.: *Individual and distance learning of Mathematics using the Internet*, poszter, 9-th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, 15-17 June, 1998, Espoo, Finland

[34] Körtesi P.: *Mathematical MacTutor in teaching and individual learning*, plenáris előadás, Junior Mathematical Congress' 98 Potsdam, August 17-22, 1998. Germany

[35] Körtesi, P.: *Junior Mathematical Congress - Challenge for Future Mathematicians*, poszter, International Congress of Mathematicians, Berlin, August 18-27, 1998., Abstracts, 360-361.

[36] Körtesi, P.: *Geometer's Sketchpad in Teaching Elementary Geometry*, előadás, Seminar on Computer Geometry, Kocovce, 1998 október 14-16, Szlovákia

[37] Körtesi P.: J*unior Mathematical Congress' 96 Miskolc,* meghívott előadás a Mathe ist TOP Konferenz, Duisburg, 2000. szepteber 25-27.

[38] Körtesi P.: *Active methods in Teaching and Learning Mathematics*, MicroCAD' 2001 International Scientific Conference, March 1-3, 2001, Miskolc

[39] Körtesi P.: *Aktív módszerek a matematikai oktatásában*, Rátz László Vándorgyűlés Felsőoktatási Szekcióján elhangzott előadás, 2002 július 3-4. Győr

[40] Körtesi P.: *MacTutor Project Teaching*, ICAM 3, 3rd International Conference on Applied Mathematics, October 10-13, 2002, Baia Mare and Borsa, Romania.

[41] Körtesi P.: *Active Methods in Teaching Mathematics* , The 7th Annual Conference of the Romanian Mathematical Society Bistrita, 22-25 May 2003, Romania.

[42] Körtesi, P.: *Axiome de separare in structuri topologice si semitopologice*, Államvizsga dolgozat, Kolozsvár, 1974

[43] Körtesi, P.: *Mátrixgyűrűk polinomazonosságairól*, Doktori értekezés, (1993), KLTE, Debrecen

[44] Körtesi, P.: *Az inverz félcsoportokról*, Matematikai Lapok, Kolozsvár, vol. LXXXVI, No.1. (1981), 17-19.

[45] Körtesi, P.: *A valós együtthatós harmadfokú egyenlet gyökeiről*, Matematikai Lapok, Kolozsvár, vol. LXXXVII, No.5. (1982), 202-204.

[46] Körtesi, P.: *A polinomiális tétel*, Matematikai Lapok, Kolozsvár, vol. LXXXVIII, No.10-11. (1983), 436-438.

[47] Körtesi, P.: *Az egész számok egy tulajdonsága*, Matematikai Lapok, Kolozsvár, vol. XCI, No.8. (1986), 283-288.

[48] Körtesi, P. (szerk): Miskolci Egyetem Matematikai Intézete 50 éve Miskolcon, Jubileumi kötet, Miskolc, 1999, 114p

[49] Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p.

[50] Körtesi, P.:*Theorems in the Geometry of the Triangle*, Contributed papers: P. Barcsánszky, Sz. Forgó, K.Kristóf, P. Miklós, G. Nagy, N. Nagy, P. Pataky, K. Raffay, Á. Sipos, I. Vitéz, Junior Mathematical Society Miskolc, 1998., Miskolc, 43p.

[51] Körtesi, P.(szerk.): *Proceedings of the Junior Mathematical Congress*, July 3-8, 2000 Miskolc, Hungary, University of Miskolc, 125p.

[52] Körtesi P.: *Matematika I., II., III.*- tantárgy tematika a Miskolci Egyetem által felügyelt Akkreditált Iskolarendszerű Felsőfokú Szakképzésben, Miskolci Egyetem, 1996.

[53] Körtesi, P.: *Elemi matematika oktatása* - Matematikatanárok továbbképzése 1., Akkreditált továbbképzési program, T300730-644/1999 alapítási engedély, XXV./2./25./2000 indítási engedély

[54] *Körtesi, P.: Válogatott fejezetek a matematikából*- Matematikatanárok továbbképzése 2., Akkreditált továbbképzési program, T300730-642/1999 alapítási engedély, T302460-1056/1999 indítási engedély

[55] Körtesi, P.: *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika* - Matematikatanárok továbbképzése 3. , Akkreditált továbbképzési program, T300730-643/1999 alapítási engedély, T302460-1057/1999 indítási engedély

[56] Körtesi, P.: *Matematikai szoftverek az oktatásban*- Matematikatanárok továbbképzése 4., Akkreditált továbbképzési program, T300730-641/1999 alapítási engedély, T302460-349/1999 indítási engedély, Miskolc Egyetem, 1998

[57] Körtesi P.: *Hungarian MacTutor*, *Mathematical MacTutor* c. oktatási szoftver magyar változata, 1994-96, School of Mathematics and Informatics, University of St- Andrews.

[58] Körtesi, P.: *Ifjúsági Matematikai Kongresszus '96,* Pi matematikai folyóírat, Miskolc, 1996-97/1., 2-4.

[59] Körtesi P. (szerk): *Proceedings of Teaching Mathematics for Engineering Students*, Miskolc, June 2-5. 1999.

[60] Körtesi, P.(szerk.): *Special English Issue* Edited for the Junior Mathematical Congress 2000, Pi matematikai folyóírat különszáma, 2000 Miskolc.

[61] Körtesi, P.: *Tételek a háromszögben,* előadás, Rátz László Matematikatanárok Vándorgyűlése, Miskolc, 2001.

[62] Körtesi P.: A *H 127 CEEPUS hálózat munkája, in:* Disszeminációs Kiadvány, TEMPUS Közalapítvány, CEEPUS Iroda, (megjelenés alatt).

MÁS HIVATKOZÁSOK

[63] 10th SEFI-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering, June, 14-16 , 2000, Miskolc,
http://www.uni-miskolc.hu/unidept/gepesz/matematika/sefi-seminar/

[64] *A Kar és Tanszékei tevékenysége*, a Nehézipari Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Karának 40. éves jubileumi tudományos ülésszaka, NME, Miskolc, 123 p.

[65] Ambrus, A.: *Bevezetés a Matematikadidaktikába*, Eötvös Lóránd Tudományegyetem Természettudományi Kar, Egyetemi Jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1995

[66] Andrásfai, B.: *Gráfelmélet*, Polygon, Szeged, 1994

[67] Archipova, N.V.; Medvedev, V.E.: *Active Methods in Engineering Pedagogy*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 309-312

[68] Ásványi, J.: *Harmonisation of EU and Hungarian Engineering Standards*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 319-322

[69] Atanasiu, G.: *Discipline Modules - A New Perspective for High Education*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 67-74

[70] Balázs Márton: *Megjegyzések egy egyetemi felvételi vizsgafeladattal kapcsolatban.* Matematikai Lapok, Kolozsvár, 1981/1.

[71] Balázs M.; Kolumbán J.: *Matematikai Analízis*, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1978, 195-198.;324-331.

[72] Barry, M.D.J, Sims Williams, J.H.: *Computer based tests on the WEB*, in Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p., 47-52.

[73] Bársony, J.: *Quality of Engineering Education and the Qualification of Professional Engineer*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 75-80

[74] Bencze, M.: *Erdélyi és Nemzetközi Magyar Matematikai Versenyek*, Fulgur Kiadó, Brassó, 2002

[75] Bernard, F.: *Das Curriculare Lernfeldkonzept in Der Dualen Berufsausbildung und Die Arbeit mit Projekten*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 2000., 705-70

[76] Bishop, A.J.: *Mathematical Enculturation*, A Cultural Perspective on Mathematics Education, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988

[77] Blank, A.: *Mathematical Induction* in Enrichment Mathematics for High School, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1963

[78] Bódi, B.: *Algebra, II. rész, A gyűrűelmélet alapjai*, Debreceni Egyetem Kossuth Egyetemi Kiadója, Debrecen, 2000

[79] Borbély S.: *A matematika oktatása a gépészmérnöki karon*, BME Ped. Közl.3.(1966), 30-45.

[80] Bordone, S.F.: *The Internationalization of the Engineering Undergraduates: Actions Taken and New Proposals*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 84-87

[81] Bölcskei, A.: *Constructive Geometry with Computer*, in Körtesi P. (szerk): *Proceedings of Teaching Mathematics for Engineering Students*, Miskolc, June 2-5. 1999., 15-21

[82] Brito, C.R.; Ciampi, M. ; Molina, R.C.: *Scientific and Technological Initiation Projects in the Consolidation of Engineering Education*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., Biel, 2000.,

[83] Bromme, R., Brophy J: *Teachers' CognitiveActivities* in Perspectives on Mathematics Education pp.99-141, Ed. Christiansen, B., Howson, A. G. Otte, M, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986

[84] Brousseau, G.; Davis, R.B.;Werner, T.: *Observing Students at Work* in Perspectives on Mathematics Education pp.205-243, Ed. Christiansen, B., Howson, A. G. Otte, M, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986

[85] Brown, G.; Bull. J.; Pendlebury, M.: *Assessing Student Learning in Higher Education*, Routledge, London, 1997

[86] Burton, L.; Cook, J.; Gallacher, J.; Jordison, R.; and Nickson, M.: *Access to Mathematics for Higher Education*, Report of a project sponsored by BP Glasgow's "Aiming for a College Education" Programme, Birmongham, University of Birmingham, University of Glasgow and Glasgow Polytechnic, 1992

[87] Burton, L.: *Encouraging learning in engineering mathematics*, 11th SEFI MWG European Seminar, Göteborg, Sweden, June 10-13, 2002

[88] Businger, W.; Fässler, A.: The Role of Mathematics in Modern Engineering, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 88-90

[89] Central European Exchange Programme for University Studies - CENTRAL CEEPUS OFFICE:
http://wwwc.oead.ac.at/

[90] Active Methods in Teaching Mathematics, H 0127 CEEPUS Network:
http://www.uni-miskolc.hu/ceepush127/

[91] O'Connor,J.: *MacTutor projects*, School of Mathematics, University of St Andrews, 1994

[92] Mustoe, L.; Lawson, D.(szerk.): *Mathematics for the European Engineer* - a Curriculum for the twenty-first century, Report by the SEFI - Mathematics Working Group, March 2002, SEFI HQ, Brussels, ISBN 2-87352-045-0
http://learn.lboro.ac.uk/mwg/core/latest/sefimarch2002.pdf

[93] Corejová, T.: *Changes of Environment - Changes of Curriculum*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 91-94

[94] Denkinger G. Gyúrkó L.: A*nalízis gyakorlatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999, 70-71, 265-267.

[95] Démidovitch M., and all.: Recueil d'exercices et de problemes d'analyse mathematique,Mir Moscou, 1968, 159.

[96] Draghicescu and all.: *Ghid de pregatire la matematica*, Scrisul Rominesc, Craiova, 1976, 195-196.

[97] Durst, L. K.: *Fractional Powers of Complex Numbers* in Enrichment Mathematics for High School, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1963

[98] *Engineering Criteria 2000* (1997) 3rd Edition, Accreditation Board for Engineering and Technology, Inc., 111Market Place, Suite 1050 Baltimore, MD21202-4012.

[99] Fábián, E.: *Apáczai Csere János,* Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1975

[100] Fried, E.: *Az oktatásról,* A természet világa, 2003 október, 437-439.

[101] Fine, N.J.: *Generating Functions* in Enrichment Mathematics for High School, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1963

[102] Fichtenholc: Differenciál és integrálszámítás kurzus, II. kötet, Moszkva-Leningrád, 1948, p.627.

[103] Fischbein, E.: *Intuition in Science and Mathematics*, An Educational Approach, Mathematics Education Library, Published by D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987

[104] Freud, R.: *Lineáris Algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, 1996, 1998, 2000

[105] Galántai, A. (szerk): *Matematikai Programkönyvtárak*, Matematikai Szoftverek, Miskolci Egyetem, 1994

[106] Galántai, A. and Jeney A.: *Numerikus módszerek*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1998

[107] Galántai, A.: *Alkalmazott Lineáris Algebra*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1999

[108] Galántai, A.: *Teaching of Numerical Analysis and Optimization*, in Körtesi P. (szerk): *Proceedings of Teaching Mathematics for Engineering Students*, Miskolc, June 2-5. 1999., 22-28

[109] Galántai A.: *Elsőéves hallgatók felméréséről*, előadás a Rátz László Matematikatanári Vándorgyűlés Felsőoktatási Ankétján, 2001, Miskolc

[110] Gáspár Gyula: *Mátrixszámítás műszaki alkalmazásokkal,* Műszaki Kiadó, Budapest, 1963., 358 p

[111] Gaston, W.: *Konsequenzen der "Bologna Declaration"für die Schweizer Fachhochschulen*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 61-66

[112] Gazda. I.(szerk.): *Egy hallhatatlan erdélyi tudós*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2002

[113] Gavalec, M.; Pirc, V.: *Two-cycle Education of Mathematics for Engineers*, in Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p., 103-106

[114] Gibson, Ivan S.: *Project-Based Teaching in Egineering Design*, in , Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 31-38

[115] Giurgiu I., Turtoiu F., : *Culegere de probleme de matematica*, Ed. Didactica si pedagogica, Bucuresti, 1981, 217-219.

[116] Hercog, D.: *A Curriculum Design Methodology*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 115-118

[117] Horváth Jenő, Csereháti Zoltán : *Walek Károly élete és munkássága*, Nyugatmagyarországi Egyetem Erdőmérnöki Kar, Sopron 2000., 22-27.

[118] Hosszú Miklós, Vincze Endre: *Műszaki fogalom - matematikai tükröződés,* Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei, Miskolc, 8, 1962, 223-248.

[119] Hujter, M.: *Use Computers to Teach Optimization methods*, in Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p., 80-89

[120] Huszthy, L.: *Műszaki Matematikai Példatár,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1990

[121] Huszthy, L.: *Műszaki Matematikai Példatár 2.,* Miskolci Egyetemi Kiadó, 1992

[122] Huszthy, L.: *Műszaki Matematikai Példák 3.,* Miskolci Egyetem, 1998

[123] Huszthy, L.: *Műszaki Matematikai Példák 4.,* Miskolci Egyetem, 1999

[124] Institute of Mathematics and its Applications (IMA): *Mathematics Matters in Engineering*, Report of a Working Group under the auspices of the Institute of Chemical Engineers, Institute of Civil Engineers, Institute of Electrical Engineers, Institute of Measurement and Control, Institute of Mechanical Engineers, London Mathematical Society and the Institute of Mathematics and its Applications, London, 1995

[125] Ionescu, D. V.: *Complemente de Matematici pentru licee*, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1978

[126] James, G.: *Implication of trends in Education on the Mathematical Content of Engineering Degree Courses*, IMA Conference on the Mathematical Education of Engineers, Loughborough University, 1994

[127] *Journée de Mathématique*, Dédié au Congrés de Mathematiques Junior, Paris, 1992, a Pi matematikai folyóirat különszáma, 1992

[128] Junior Mathematical Congress 2002, July 3-8, Miskolc: http://www.uni-miskolc.hu/unidept/gepesz/matematika/junior/

[129] Karsai, J; Képíró, I.; Rátz, É.: *Computer Labs to Improve the Visual Thinking and Intuition*, in Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p., 73-79

[130] Kath, F.: *Das "Arbeiten mit Projekten"führt zu einem Paradimenwechsel*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 730-734

[131] Kemény, J.G.: *Random Walks* in Enrichment Mathematics for High School, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1963

[132] Kiss, B.: *A Matematikai Intézet története,1949-1965*, kéziratban, Miskolci Egyetem Matematikai Intézetének Könyvtárában,

[133] Klincsik, M.; Perjésiné Hámori, I.: *Teaching Vectorcalculus via Internet*, in Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p., 53-61

[134] Komenda, S.; Zapletalova, J.: *Scientific Reasoning, Its Nature and Logic*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 134-139

[135] Lakoma, E.: *Hand held technology in mathematics teaching for future engineers*, in Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p., 130-138

[136] Mason. W.H.: *A Complete Engineer*, Prism, Americam Society of Engineering Education, October, 1994

[137] Mathematics Learning Support Centre:
http://info.lboro.ac.uk/departments/ma/mlsc

[138] Mathematical MacTutor - History of Mathematics:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

[139] Mathematician of the Day -MacTutor History of Mathematics:
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Day_files/Now.html

[140] Maurer, I.Gy.; Virág, I.: *A relációelmélet elemei*, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1972

[141] Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., Biel, 2000.

[142] Mellin-Olsen, S.: *The Politics of Mathematics Education*, Mathematics Education Library, Published by D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987

[143] Morris, R.; Arora M. S.: *Studies in Mathematics Education - Moving into the twenty-first century*, UNESCO, 1992

[144] Meyer, H.: *Complex Numbers and Quaternions as Matrices* in Enrichment Mathematics for High School, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1963

[145] Munkácsy, K.: *A nem matematika szakos felsőfokú oktatás matematika tanterve és a középiskolai matematikatanítás néhány kérdése*, Rátz László Vándorgyűlés Felsőoktatási Szekciója, Győr, 2002

[146] Mustoe, L.: *Should the use of computer algebra software affect the syllabus*, in Körtesi P. (szerk): *Proceedings of Teaching Mathematics for Engineering Students*, Miskolc, June 2-5. 1999., 1-14

[147] Mustoe, L.: *Assessing Assessment,* in Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p., 5-17

[148] Mathematics Working Group of SEFI:
http://www.learn.lboro.ac.uk/mwg/

[149] Nagy, F.: *Bevezetés a DERIVE 2.58 használatába*, Matematikai Szoftverek, Ed. Galántai, A., Miskolci Egyetem, 1994

[150] Nyéki, L.: *Exact Methods in Curriculum Development*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 168-171

[151] *Nulladik évfolyamos oktatás*, Együttműködési megállapodás, 1997/98 tanév, a Széchenyi István Főiskola koordinálásával

[152] Őri, I.; Kiss, G.: *Az Excell programcsomag alkalmazása a valószínűségszámítás és a statisztika tanításában*, in Körtesi P. (szerk): *Proceedings of Teaching Mathematics for Engineering Students*, Miskolc, June 2-5. 1999., 42-47

[153] Painold, Johann: *Projektarbeit an der HTL BULME, Graz*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 749-752

[154] Perjésiné Hámori, I.: *Az internet és a komputer algebrai rendszerek bevezetése gépészmérnökök matematika oktatásába*, Doktori értekezés tézisei, Debreceni Egyetem, 2003

[155] *Pi matematikai folyóírat különszáma,* 1996-ban a II. Európai Matematikai Kongresszus hivatalos kísérőkonferenciájaként Miskolcon megrendezett Ifjúsági Matematikai Kongresszus 96 Miskolc c. rendezvény dolgozataival.

[156] *Pi matematikai folyóírat különszáma, 2002-2003*, I-II, a Miskolci Egyetem és középiskolák együttműködése a tehetséggondozásban c. O.M. pályázat keretében. Miskolc, 2003

[157] Pi matematikai folyóírat különszáma - internetes változat, 2002-2003, I-II. http://www.uni-miskolc.hu/~matpi/

[158] *Programozó matematikus szak* - Akkreditácis anyag, Miskolci Egyetem, 1998.

[159] Publications of the University of Miskolc, Series D., Mathematics, volume **39**.,1999.

[160] Rodgers, M.: *Mathematics: Pleasure or Pain?* in Gender and Mathematics, An International Perspective, Edited by Leone Burton, Singapore, 1990

[161] Ruhland, Wernhild and Porzig, Frank: *Ein Projekt zum Erlernen von Projektarbeit*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 753-756

[162] Salánki, J.: *Megemlékezés Dr. Hosszú Miklós professzorról, a matematikai tudományok doktoráról*, Miskolci Egyetem Közleményei, IV. Sorozat, Természettudomány, **27**. kötet, 3. füzet, Miskolc, 1996, 49-97

[163] Sárvári, Cs.: *Matematika-oktatás Maple felhasználásával*, in Körtesi P. (szerk): *Proceedings of Teaching Mathematics for Engineering Students*, Miskolc, June 2-5. 1999., 34-41

[164] Sárvári, Cs.: *Syllabus and Coputer Algebraic Systems in Higher Mathematics*, in Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p., 107-109

[165] Schwenk, A.: *Intuitive Approach to Theoretical Subjects by Multi-media - an Example with Mathematica*, in Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p., 62-66

[166] Société Européenne pour la Formation des Ingénieurs: http://www.ntb.ch/SEFI/Index.html#Index

[167] Sierpinski, W.: *Ce stim si ce nu stim despre numerele prime*, Ed. Stiintifica, Bucuresti, 1966.

[168] Slobodyanyuk, A.A.; Marigodov, V.K.: *Educational System as a Technological Complex of the Engineering Training*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 402-403

[169] Special Curves- MacTutor:
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html

[170] Sutherland, R,; Pozzi, S.: *The changing Mathematical Background of Undergraduate Engineers*, The Engineering Council, London, 1995

[171] Szabó P. G.: *Egy térpakolási feladat a Tentamenben*, in Gazda. I.(szerk.): *Egy hallhatatlan erdélyi tudós*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2002, 384-387

[172] Szakály, D.: *Csoportmunka*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1998

[173] Szarka, Z.: *Megemlékezés Dr. Gáspár Gyula professzorról, a matematikai tudományok kandidátusáról*, Miskolci Egyetem Közleményei, IV. Sorozat, Természettudomány, **27**. kötet, 3. füzet, Miskolc, 1996, 31-48

[174] Szarka, Z.: *Klasszikus és lineáris algabra elemei*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1993

[175] Szász Pál: *A differenciál és integrálszámítás elemei*, 1. kötet, Typotex Kiadó, 2000, 132-133.

[176] Szele Tibor: *Bevezetés az algebrába*, 1964, Debrecen.

[177] Ratkó, I.; Szelezsán, J.: *Mathematics Lectures Aided with Computer Projector*, in Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p., 67-72

[178] Szilágyi, Sz.: *Matematika a természetben*, in *Journée de Mathématique*, Dédié au Congrés de Mathematiques Junior, Paris, 1992, a Pi matematikai folyóirat különszáma, 1992, 29-31

[179] Targamadze, Vilija: *The Assessment of Study Results in Lithuanian Technical Universities*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000", Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 217-222

[180] Teaching Mathematics for Engineering Students, Matematika Oktatása Mérnökhallgatóknak, June 2-5,1999, Miskolc:
http://www.uni-miskolc.hu/unidept/gepesz/matematika/matokt.html

[181] H. Temesvári, Á.; Vermes, I.: *Fodor László élete és munkássága*, Nyugat-magyarországi Egyetem Erdőmérnöki Kar, Sopron 2000

[182] Terplán, Z.: *Megemlékezés Dr.H.C.Dr.-Ing Borbély Samu akadémikus professzorról*, Miskolci Egyetem Közleményei, IV. Sorozat, Természettudomány, **27**. kötet, 3. füzet, Miskolc, 1996, 5-30

[183] Test and Learn - internet based testing system - http://www.tal.bris.ac.uk

[184] The Engineering Council: *The Standard and Routes to Registration,* SARTOR 3rd Edition, The Engineering Council, London, 1997

[185] *Trophy Room* - External Awards - MacTutor History of Mathematics: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/External/awards.html

[186] Velichova, D.: *Geometry as the Computer Language of Mathematics*, in Körtesi P. (szerk): *Proceedings of Teaching Mathematics for Engineering Students*, Miskolc, June 2-5. 1999. , 9-15

[187] Vetier, A.: *Probability Laws Visualised by DERIVE*, in Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p., 90-92

[188] Weszely T.: *Bolyai Farkas pedagógiai nézetei és felfogása a matematika tanításáról* in Gazda. I.(szerk.): *Egy hallhatatlan erdélyi tudós*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2002,343-348

Függelék

Megvalósult projektek, kisdolgozatok

Az I-IX. részben ismertetünk néhányat azok közül a projekt- ötletek közül, amelyeket az oktatásban többször alkalmaztunk, és amelyek a leghatásosabbnak bizonyultak. A következő leírások egy- egy projekt- ötletnek a feldolgozása során lettek egyre összetettebbek, ugyanis ezeknek a felhasználáskor a hallgatók támaszkodhatnak az előző években megtanult projektek anyagára, egy ötlet fejlődik, alakul. A felhasználás során a hallgatók az ötlet és a matematikai tartalom megértése után a rendelkezésükre álló szakirodalomból, azt saját munkájukkal kiegészítve alkalmazásokat, példákat keresnek és az anyagból készülő kisdolgozatban részletezik azokat is. A dolgozat bemutatásakor egyrészt magát a módszert, eljárást, ötletet ismertetik, majd annak általuk legjobban megértett alkalmazását.

Modellezés

A X. rész a mátrixok alkalmazását mutatja be a komplex számok és a kvaterniók modellezésére.

I. A harmadfokú polinom gyökeiről

A projektötlet célja.

A középiskolából ismert másodfokú polinom függvény érdekes szimmetria tulajdonságait általában ismerik a hallgatók. Ezeknek a tudatosítása, ismétlése után a harmadfokú polinom függvény esetén hasonló tulajdonságokat kereshetünk és találhatunk, és ezeknek a megismerésével, alkalmazásával a hallgatók a tengelyes szimmetria és pont szerinti szimmetria geometriából megismert fogalmához társítani tudják a páros, illetve páratlan függvények általánosabb értelmezéseként az adott függvénytulajdonságokat. Begyakorolhatják a deriváltak alkalmazását, és a Cardano képlet alkalmazásáról is többet tudnak majd. Ezt a projektötletet megelőzően az első félév elején szó került a Cardano képletről, amiről minden évben több hallgató írt kisdolgozatot.

A projektötlet leírása

Ismert, hogy a másodfokú polinom által értelmezett

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$$

függvény, röviden másodfokú függvény képe egy parabola és már középiskolás ismeretek alapján a hallgatók többsége ismeri a parabola szimmetria tulajdonságainak következményeit [70]: a parabolának szimmetria tengelye lesz az

$$x = -\frac{b}{2a},$$

azaz:

$$f(-\frac{b}{2a} - x) = f(-\frac{b}{2a} + x),$$

bármely x-re teljesülni fog, és például a gyökök is szimmetrikusan helyezkednek el ehhez az értékhez képest.

Az a kérdés, hogy a harmadfokú polinom által értelmezett

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

röviden harmadfokú függvény rendelkezik-e valamilyen hasonló szimmetria tulajdonsággal? A válasz az, hogy valóban létezik egy pontszerinti szimmetria, ennek a felfedezése és tárgyalása szintén alkalmas egy egyéni vagy csoport projekt témájának

Ennek a két alapvető szimmetria tulajdonságnak jól ismertek a legegyszerűbb esetei, az ordinátatengelyre szimmetrikus függvényeket páros, az origóra szimmetrikus függvényeket páratlan függvényeknek nevezzük. Gyakran függvénytulajdonságként is kiemeljük őket, a páros és páratlan függvényeknek a szerepe több fejezetben is fontos. A periodikus függvényekre felírható Fourrier sorok együtthatói páros és páratlan függvények esetén részben eltűnnek, az origóra szimmetrikus intervallumon a páratlan függvények határozott integrálja eltűnik, a páros függvények integrálja a fél (pl. nemnegatív) intervallumon számított határozott integrál kétszeresével egyenlő. A két adott szimmetria tulajdonság általánosabban is ismert, és adott, az ordináta tengellyel párhuzamos egyenes szerint szimmetrikus, vagy adott, az origótól különböző pont szerint szimmetrikus függvényeknek az integrálszámítással kapcsolatos tulajdonságainak a tanulmányozása és leírása is alkalmas egyéni és csoport projekt témának. További alkalmazás annak a tárgyalása, hogy milyen a másodfokú polinom gyökeinek természete és helyzete egy vagy két valós számhoz viszonyítva (mindkét gyök nagyobb, mint egy adott szám, illetve kisebb, mint egy adott szám, vagy egy adott szám a gyökök között van vagy a gyökök két adott szám közé esnek, stb.).

Az

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

valós együtthatós harmadfokú polinom esetén a gyökök természetének vizsgálata nem ilyen egyszerű. A függvényábrázolás segítségével mégis tárgyalható a gyökök természete.

Az f polinomhoz rendelt

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

függvény elsőrendű deriváltja

$$f\prime(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Jelöljük az elsőrendű derivált gyökeit α-val és β-val. Az f polinom gyökei akkor és csakis akkor valósak és egymástól különbözők, ha $f(\alpha)f(\beta) < 0$ (a függvény szélső értékei ellentétes előjelűek). Ha $f(\alpha)f(\beta) = 0$, akkor kétszeres gyöke, ha pedig $f(\alpha)f(\beta) > 0$, akkor egy valós és két konjugált komplex gyöke van az f polinomnak.

A $H = f(\alpha)f(\beta)$ kifejezés szimmetrikus α-ra és β-ra nézve

$$\begin{aligned} H &= (a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d)(a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d) = \\ &= a^2\alpha^3\beta^3 + ab\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta) + ac\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) + ad(\alpha^3+\beta^3) + \\ &\quad + b^2(\alpha^2+\beta^2) + bc\alpha\beta(\alpha+\beta) + bd(\alpha^2+\beta^2) + c^2\alpha\beta + cd(\alpha+\beta) + d^2, \end{aligned}$$

tehát kifejezhető az α és β összegének és szorzatának segítségével

$$\alpha + \beta = -\frac{2b}{3a}$$

és

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{3a}.$$

A számítások elvégzése után a

$$H = \frac{4ac^3 - b^2c^2 + 4b^3d - 18abcd + 27a^2d^2}{27a^2}$$

kifejezéshez jutunk, ami a következő alakban is felírható

$$H = \frac{3(bc - 3ad)^2 + 4(ac^3 - b^2c^2 + b^3d)}{27a^2}.$$

Megállapítás.

Az

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

polinomnak tehát:

(a) H<0 esetén három különböző valós gyöke van;

(b) H=0 esetén van egy kétszeres valós gyöke is;

(c) H>0 esetén egy valós és két komplex gyöke van.

Megjegyzés. A harmadfokú egyenlet megoldására ismert képlet [176] feltételezi az egyenlet $x^3 + px + q = 0$ alakú felírását és akkor a megoldások:

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v \\ x_2 &= \varepsilon u + \varepsilon^2 v \\ x_3 &= \varepsilon^2 u + \varepsilon v \end{aligned}$$

alakúak, ahol

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

és

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}, \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}}.$$

A megfelelő helyettesítéssel a H kifejezés:

$$H = \frac{4p^3 + 27q^2}{27}$$

vagy

$$H = 4(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2$$

alakú, és bebizonyított, hogy az egyenlet gyökei csak akkor valósak, ha $H < 0$, csak akkor van egybeeső valós gyöke, ha $H = 0$ és két komplex gyöke csak $H > 0$ esetén van. Ez a bizonyítás csak algebrai úton történik, de a gyökök komplex felírása miatt nagyon hosszadalmas.

A másodfokú

$$f = ax^2 + bx + c$$

polinom szimmetria tengelye az

$$x = -\frac{b}{2a}$$

egyenes. A harmadfokú

$$f = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

polinom nem tengelyesen szimmetrikus, hanem szimmetria középponttal rendelkezik.

Megállapítás [10].

Az

$$f = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

valós együtthatós polinomhoz rendelt függvény grafikus képe szimmetrikus az

$$S = (\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$$

pontra nézve.

Bizonyítás: Elégséges belátni, hogy bármilyen valós x esetén:

$$f(-\frac{b}{3a}) - f(-\frac{b}{3a} - x) = f(-\frac{b}{3a} + x) - f(-\frac{b}{3a}),$$

vagyis

$$2f(-\frac{b}{3a}) = f(-\frac{b}{3a} + x) + f(-\frac{b}{3a} - x)$$

$$f(-\frac{b}{3a}) = a(-\frac{b}{3a})^3 + b(-\frac{b}{3a})^2 + c(-\frac{b}{3a}) + d$$

$$f(-\frac{b}{3a} + x) = a(-\frac{b}{3a} + x)^3 + b(-\frac{b}{3a} + x)^2 + c(-\frac{b}{3a} + x) + d$$

$$f(-\frac{b}{3a} - x) = a(-\frac{b}{3a} - x)^3 + b(-\frac{b}{3a} - x)^2 + c(-\frac{b}{3a} - x) + d,$$

vagyis

$$f(-\frac{b}{3a}) = -a\frac{b^3}{27a^3} + b\frac{b^2}{9a^2} - c\frac{b}{3a} + d$$

$$\begin{aligned} f(-\frac{b}{3a} + x) &= -a\frac{b^3}{27a^3} + 3a\frac{b^2}{9a^2}x - 3a\frac{b}{3a}x^2 + ax^3 + \\ &\quad + b\frac{b^2}{9a^2} - 2b\frac{b}{3a}x + bx^2 - c\frac{b}{3a} + cx + d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-\frac{b}{3a} - x) &= -a\frac{b^3}{27a^3} - 3a\frac{b^2}{9a^2}x - 3a\frac{b}{3a}x^2 - ax^3 + \\ &\quad + b\frac{b^2}{9a^2} + 2b\frac{b}{3a}x + bx^2 - c\frac{b}{3a} - cx + d, \end{aligned}$$

tehát

$$f(-\frac{b}{3a} + x) + f(-\frac{b}{3a} - x) =$$

$$= -2a\frac{b^3}{27a^3} + 2\frac{b^3}{9a^2} - 2\frac{bc}{3a} + 2d = 2f(-\frac{b}{3a}).$$

Alkalmazás.

A harmadfokú polinom gyökeinek helyzetét egy vagy több valós számhoz viszonyítva, az előbbi megállapításra támaszkodva, néhány esetben megvizsgálhatjuk [45]:

1. eset:

$$\begin{aligned}(x_1 &> m) \wedge (x_2 > m) \wedge (x_3 > m) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (H \le 0) \wedge (-\frac{b}{3a} > m) \wedge \left[(af(m) < 0) \vee (af'(m) > 0)\right].\end{aligned}$$

2. eset:

$$\begin{aligned}(x_1 &< m) \wedge (x_2 < m) \wedge (x_3 < m) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (H \le 0) \wedge (-\frac{b}{3a} < m) \wedge \left[(af(m) > 0) \vee (af'(m) < 0)\right].\end{aligned}$$

3. eset:

$$\begin{aligned}(x_1 &< m) \wedge (x_2 > m) \wedge (x_3 > m) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (H \le 0) \wedge (af(m) > 0) \wedge \left[(m < -\frac{b}{3a}) \vee (af'(m) < 0)\right].\end{aligned}$$

4. eset:

$$\begin{aligned}(x_1 &< m) \wedge (m < x_2 < n) \wedge (n < x_3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (af(m) > 0) \wedge (af(n) < 0).\end{aligned}$$

5. eset:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3 &\in [m, n]) \Leftrightarrow \\ (H &\le 0) \wedge (af(m) < 0) \wedge (af(n) > 0) \wedge \\ \wedge(m &< -\frac{b}{3a} < n) \wedge (f'(m) \cdot f'(n) > 0).\end{aligned}$$

6. eset:

$$(x_2 - x_1 > x_3 - x_2) \Leftrightarrow (a \cdot f(-\frac{b}{3a}) > 0) \wedge (H < 0)$$

7. eset:

$$(x_2 - x_1 < x_3 - x_2) \Leftrightarrow (a \cdot f(-\frac{b}{3a}) < 0) \wedge (H < 0),$$

ahol $\wedge$ az ”és”, $\vee$ pedig a ”vagy” szót jelöli.

A felsorolt esetek nem merítik ki az összes lehetőségeket.

II. Integrál összegek alkalmazása

A projektötlet célja. A határozott integrál helyes értelmezése az integrál számítás egyik alapvető kérdése, ennek a fogalomnak a megerősítését, mélyebb megértését egészíti ki ez a projektötlet. A különböző integrál összegek meghatározása a hallgatók számára néha mesterkéltnek tűnnek, de a következő néhány példa jól szemlélteti azt, hogy miként lehet a határozott integrál definíciója mellett az integrál összegeknek néhány konkrét alkalmazását is bemutatni. Az adott összegek határértékének és a határozott integrál fogalmának összekapcsolásával a hallgatók maguk is "gyárthattak" példát olyan összegek határértékének a kiszámítására, ami más módszerrel jóval nehezebben oldható meg.

A projektötlet leírása

Elméleti háttere

A határozott integrál értelmezése során különböző integrál-összegekkel találkoz-

hatunk. Nyilvánvaló, hogy a határozott integrál pontosan akkor létezik, ha ezek az integrál-összegek konvergensek. Ez azt is jelenti, hogy ha egy határozott integrál létezik, mert pl. van primitív függvénye az adott intervallumon, vagy az intervallumon folytonos függvény integrálját tekintjük, akkor ez a határozott integrál egyben mindenfajta, sajátos formában felírt integrál-összegnek a határértéke is [5] .

Ha az f Riemann integrálható az elmélet szerint a $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi_k^n)$ [125] Riemann integrál összeg határértéke az $\int\limits_a^b f(x)dx$, ahol Δ_n a felosztásokat, ξ_k^n az adott felosztásnak megfelelő k. intervallumhoz tartozó független változót jelöli.

Ha tehát adott egy integrálható $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény és az $[a, b]$ intervallumnak egy egyenlő közű felosztása mégpedig a $\frac{b-a}{n}$ hosszúságú részintervallumokra, akkor az $[a, b]$ intervallum osztópontjainak halmaza:

$$\left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, ..., a + (n-1)\frac{b-a}{n}, a + n\frac{b-a}{n}\right\}$$

Ehhez képezzük a

$$\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

integrálösszeget, ahol

$$f(a + k\frac{b-a}{n})$$

rendre az f függvénynek az

$$\left[a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}\right]$$

részintervallumok jobboldali végpontjában felvett értékei, ekkor az előbbiek értelmében:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)dx$$

Alkalmazása

Ha bizonyos összegek határértékének a kiszámítása [94] a célunk, akkor már csak azt kell felismernünk, hogy milyen függvényhez és milyen intervallumhoz tartozó integrál- összeg írható fel.

1. Példa.

Számítsuk ki a következő összeg határértékét:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}})$$

Az adott összeg rendre átalakítható:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}) =$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\frac{1}{n}) =$$

$$\lim_{n\to\infty}((\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}+...+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}})\frac{1}{n}) =$$

$$\lim_{n\to\infty}((\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+...+\sqrt{\frac{n}{n}})\frac{1}{n}) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{1}{n})\frac{1}{n}, ahol\ f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x},$$

ez viszont egy integrálható függvény, és ismert, hogy:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Tehát felírható:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}) = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

A vázolt módszer nyilván más módosításokkal is alkalmazható, pl. ha az integrál-összeget nem a részintervallumok felső, hanem az alsó végpontjában, vagy akár egy köztes pontjában (felezőpont) írjuk fel, vagy ha az intervallum felosztása nem n, hanem pl. $2n$, 2^n részre történik. Ezekben az esetekben a megfelelő módosítások után hasonlóan számítható ki az adott összegek határértéke.

2. Példa.

Számítsuk ki a következő összeg határértékét:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}}{n}\right).$$

Az adott összeg rendre átalakítható:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left((1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n})\frac{1}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(0+(k-1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{n})\frac{1}{n}\ \textit{ahol}\ f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x,$$

ez viszont egy integrálható függvény, és ismert, hogy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

Tehát felírható:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}}{n}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

Az elv alkalmazható a határozott integrál helyett például az improprius integrálok esetén is, bizonyos megszorításokkal. Elégséges például ha az integrandusz függvény pozitív és monoton csökkenő lásd pl.:[102].

3. példa.

Számítsuk ki a következő összeg határértékét:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{\frac{n}{2}}+\sqrt{\frac{n}{3}}+...+1}{n}\right)$$

Az adott összeg rendre átalakítható:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{\frac{n}{2}}+\sqrt{\frac{n}{3}}+...+1}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{n}}}+...+\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}}\right)\frac{1}{n}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{1}{n})\frac{1}{n}$$

ahol

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

ez viszont egy improprius integrálhoz vezet, és ismert, hogy

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to 0+0}\int_a^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to 0+0}2\sqrt{x}\Big|_a^1=2.$$

Tehát felírható:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{\frac{n}{2}}+\sqrt{\frac{n}{3}}+...+1}{n})=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=$$

$$\lim_{a\to 0+0}\int_a^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{a\to 0+0}2\sqrt{x}\Big|_a^1=2$$

Bizonyos esetekben az adott összeg csak egy felső korlátját tudjuk meghatározni, de ez is fontos, hiszen a felülről korlátos pozitív tagú összegek egy monoton növekvő sorozatot alkotnak, tehát az összegek-sorozata (sor) monoton nő és felülről korlátos akkor konvergens a sorozat (a sor konvergens). Tehát ez a módszer alkalmas bizonyos sorok konvergenciájának a vizsgálatára is.

4. Példa.

Igazoljuk, hogy az

$$s_n=1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

egy konvergens sor részösszege.

Az adott sor felülről korlátozható az $\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ improprius integrál egy lehetséges integrál összegének határértékével, csak például elengedjük azt a kikötést, hogy a részintervallumok hossza csökkenő kell legyen.

Felírhatjuk:

$$s_n\le 1+\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n}})1\le 1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx=3,$$

mivel az $[1,\infty)$ intervallum egy lehetséges felosztása az $\{1,2,3,...,n,...\}$, és ekkor a részintervallumok hossza 1, ez ugyan nem csökken a 0-hoz, de alkalmas arra, hogy alulról korlátozza az integrál értékét. Tehát maga az összeg is határértékben az adott improprius integrálnak egy alsó korlátja. Ugyanakkor:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\int_1^{b} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \right) = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{b}} + \frac{2}{\sqrt{1}} \right) = 2.$$

Tehát

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{n\sqrt{n}} \le 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = 3,$$

azaz a sor felülről korlátos és emellett a sor pozitív tagú, tehát monoton növekvő, és így konvergens.

5. Példa.

Legyen $f : [0,1] \to R$ Egy Riemann-értelemben integrálható függvény. Az $(a_n)_{n\ge 1}$ szigorúan pozitív tagú sorozat a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max(a_1, a_2, ..., a_n)}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = 0$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$a) \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{a_1 + a_2 + ... + a_n}\right) \frac{a_k}{a_1 + a_2 + ... + a_n} = \int_0^1 f(x)dx;$$

$$b) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k f\left(\frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx$$

Megoldás:

a) Vegyük a $(\triangle_n)_{n\ge 1}$ felosztások sorozatát, ahol

$$\triangle_n = \left\{ 0, \frac{a_1}{a_1 + a_2 + ... + a_n}, \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}, ..., \frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{a_1 + a_2 + ... + a_n}, ..., 1 \right\};$$

és amelyre a felosztás normája

$$\|\triangle_n\| = \frac{\max(a_1, a_2, ..., a_n)}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \to 0.$$

Ha a függvényértékeket pontosan a felosztási pontokban vesszük, azaz

$$\xi_k^n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{a_1 + a_2 + ... + a_n}, k = 1, 2, ...n$$

rögtön belátható, hogy az egyes felosztásokhoz tartozó Riemann-féle összeg

$$\sigma_{\triangle_n}(f, \xi_k^n) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k}{a_1 + a_2 + ... + a_n}\right) \frac{a_k}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$$

és így ezen összegek sorozatának határértéke (mivel a felosztások normája tart nullához), éppen $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

b) Tekintsük a

$$\triangle_n = \left\{0, \frac{1^2}{n^2}, \frac{2^2}{n^2}, ..., \frac{k^2}{n^2}, ..., 1\right\}$$

felosztásokat, amelyekre az osztópontok

$$x_k^n = \frac{k^2}{n^2}, k = 1, 2, ..., n.$$

Észrevehető, hogy $x_k^n - x_{k-1}^n = \frac{2k-1}{n^2} \leq \frac{2n-1}{n^2}$ s ezért $\|\triangle_n'\| \to 0$.

Az egyes közbeeső pontokat újból a felosztási pontokba választva,

$$\xi_k^n \in \left[x_{k-1}^n, x_k^n\right], \xi_k^n = x_k^n = \frac{k^2}{n^2}(k = 1, 2, ..., n);$$

$$\sigma_{\Delta_n'}(f, \xi_k^n) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{n^2} f(\frac{k^2}{n^2}) =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f(\frac{k^2}{n^2}) - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k^2}{n^2}),$$

ahonnan:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k f(\frac{k^2}{n^2}) = \frac{1}{2}\sigma_{\Delta_n'}(f, \xi_k^n) + \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k^2}{n^2}). \qquad (1)$$

Mivel az f függvény integrálható, így korlátos is, tehát létezik olyan $M > 0$, amelyre $|f(x)| \leq M$, bármely $x \in [0, 1]$ értékre. Ennek alapján

$$\left|\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k^2}{n^2})\right| \leq \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} \left|f(\frac{k^2}{n^2})\right| \leq \frac{nM}{2n^2} \to 0,$$

vagyis az (1)-es összefüggés jobboldalán a második tag határértéke nulla.

Az (1) összefüggésben határértékre térve kapjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k f(\frac{k^2}{n^2}) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx.$$

III. Integrálok közelítő kiszámításának két különböző módszere

A projektötlet célja. A határozott integrálszámítás alapvető kérdéseinek elsajátítása után merül fel annak az igénye, hogy az olyan függvények határozott integrálját is kiszámítsuk (a műszaki alkalmazások nagy része ilyen), amelyeknek nem ismert a primitív függvénye. A projekt megvalósítása során a hallgató megismeri az integrálok numerikus számításának több lehetőségét, és tapasztalni fogja a különböző módszerek előnyeit, hátrányait, összehasonlíthatja az eredmények pontosságát, az elvégzendő műveletek mennyiségét. Adott esetben a műszaki alkalmazás során választani tud a rendelkezésére álló módszerek közül, kritikus szemmel nézve a kapott eredményeket.

Ugyanakkor a téglalap módszeren keresztül a határozott integrálok fogalmát is mélyebben megérti, a másik módszer megismerése alkalmas a Taylor polinommal való közelítés lényegének megértésére, új környezetbe helyezve azt.

A projektötlet leírása

Az alkalmazás alapelve

Gyakran találkozunk olyan függvény határozott integráljának kiszámításával, aminek nincs primitív függvénye vagy nagyon körülményes azt megkeresni. Ilyen esetekben a számítás elvégzése, még ha csak közelítő értékre is jutunk, lényeges lehet a gyakorlati alkalmazásokban. Ennek érdekében több módszer is ismeretes, most két ilyen eljárást tanulmányozunk és a különböző esetekben összehasonlítjuk a pontosságukat. Ez a két eljárás merőben különböző, mivel az egyikben a függvényt helyettesítjük az adott intervallumon egy jól közelítő polinommal, a másikban numerikus módszerek egyikét, a téglalap módszert alkalmazzuk.

A két módszer lényege
Taylor, MacLaurin polinomok

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, az adott intervallumon legalább (n+1)-szer deriválható függvénynek az $x_0 \in [a, b]$ pontban felírt n-ed fokú Taylor polinomja a következő:

$$\begin{aligned} T_n [f \mid x] \quad &= \quad f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \\ &\quad \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

rövidebben:

$$T_n [f \mid x] = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Az elkövetett hibának felső határa a maradéktag maximuma:

$$R_n\left[f \mid x\right] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^k, \left|\xi - x_0\right| \leq \left|x-x_0\right|,$$

a maradéktag,

$$R_n\left[f \mid x\right] \leq \underset{|\xi-x_0|\leq|x-x_0|}{max} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^k.$$

Ha a képletben $x_0 = 0$, akkor a polinomot MacLaurin polinomnak nevezzük és jele $M_n\left[f \mid x\right]$.

1. Példa.

Tekintsük az $f(x) = sinx$ függvényt a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, és írjuk fel a 5. fokú Taylor polinomját az $x_0 = \frac{\pi}{2}$ pontban, illetve a MacLaurin polinomját és hasonlítjuk össze a hibát az $x = \frac{\pi}{4}$ pontban.

$$\begin{aligned} T_5\left[\sin \mid x\right] &= \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{1!}(x-\frac{\pi}{2}) + \\ &+ \frac{-\sin(\frac{\pi}{2})}{2!}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{-\cos(\frac{\pi}{2})}{3!}(x-\frac{\pi}{2})^3 + \\ &+ \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4 + \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{5!}(x-\frac{\pi}{2})^5, \end{aligned}$$

azaz:

$$T_5\left[\sin \mid x\right] = 1 - \frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{2})^4.$$

Hasonlóan:

$$\begin{aligned} M_5\left[\sin \mid x\right] &= \sin 0 + \frac{\cos(0)}{1!}(x-0) + \frac{-\sin(0)}{2!}(x-0)^2 + \\ & \frac{-\cos(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{\sin(0)}{4!}(x-0)^4 + \frac{\cos(0)}{5!}(x-0)^5, \end{aligned}$$

azaz:

$$M_5\left[\sin \mid x\right] = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5.$$

Az elkövetett hibát most közvetlenül a pontos értékkel vethetjük össze:

$$T_5\left[\sin \mid \frac{\pi}{4}\right] = 1 - \frac{1}{2!}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})^4 = .707\,43,$$

$$M_5\left[\sin \mid \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3!}\frac{\pi}{4}^3 + \frac{1}{5!}\frac{\pi}{4}^5 = 707\,14,$$

míg a pontos érték $\sin(\frac{\pi}{4}) = .707\,11$ (öt tizedes pontossággal).

Látható, hogy mindkét közelítés elég jó, ahhoz képest, hogy csak 5. fokú polinommal közelítettünk. Nyilván a nagyobb fokú polinom még jobb közelítést ad.

2. példa.

Az előbbi eredményt felhasználva ki lehet számítani pl. a $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx$ értékét. Vegyük most a MacLaurin polinomot, ekkor a közelítő integrál

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5}{x} dx = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120})dx = (x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600})\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} =$$

$$= (\frac{3\pi}{4} - \frac{(\frac{3\pi}{4})^3}{18} + \frac{(\frac{3\pi}{4})^5}{600}) - (\frac{\pi}{4} - \frac{(\frac{\pi}{4})^3}{18} + \frac{(\frac{\pi}{4})^5}{600}) = .991\,54.$$

Elvben nagyobb pontosságot ad, ha a 6. fokú MacLaurin polinomot használjuk, ekkor az integrál közelítését az előbbiek alapján:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7}{x} dx &= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040})dx = \\
(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \frac{x7}{42280})\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} &=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\frac{3\pi}{4} - \frac{(\frac{3\pi}{4})^3}{18} + \frac{(\frac{3\pi}{4})^5}{600} - \frac{(\frac{3\pi}{4})^7}{42280}) - (\frac{\pi}{4} - \frac{(\frac{\pi}{4})^3}{18} + \frac{(\frac{\pi}{4})^5}{600} - \frac{(\frac{3\pi}{4})^7}{42280}) \\
&= .991\,54.
\end{aligned}$$

Látható, hogy mégsem kaptunk nagyobb pontosságot, vagyis az előző eredmény már kellő pontosságú.

A téglalap módszer, és más módszerek

Ha adott egy integrálható $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény és az $[a, b]$ intervallumnak egy egyenlő közű felosztása mégpedig a $\frac{b-a}{n}$ hosszúságú részintervallumokra, akkor az $[a, b]$ intervallum osztópontjainak halmaza:

$$\left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, ..., a + (n-1)\frac{b-a}{n}, a + n\frac{b-a}{n}\right\},$$

és ehhez képezzük a

$$\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

összeget, akkor az

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n},$$

egy közelítését kapjuk (felső végpont szerinti téglalapok területe).

Hasonlóan járhatunk el az alsó végpontok szerinti téglalapok összegének felírásával, ekkor a közelítést a

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n}$$

összeg adja.

Vehetjük még a részintervallumok középpontja szerinti téglalapok összegét is, ekkor a közelítést a

$$\sum_{k=1}^{n} f(a+(2k+1)\frac{b-a}{2n})\frac{b-a}{n}$$

összeg adja.

3. példa.

Vegyük ugyanazt az integrált, hogy össze lehessen hasonlítani az eredményeket, és legyen $n=10$ a részintervallumok száma. Ekkor az $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx$ közelítő értékét a következő összeg adja:

$$\frac{\pi}{20}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{20}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{20}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{20}}\right)+$$
$$\frac{\pi}{20}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{20}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{20}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{20}}\right)+$$
$$\frac{\pi}{20}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{20}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{20}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{20}}\right)+$$
$$\frac{\pi}{20}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{10\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{10\pi}{20}}=.933\,26$$

Látható, hogy a módszer egy tizedes pontossággal adja az eredményt.

Pontosabb a számítás, ha a részintervallumok közepe szerinti téglalapokat vesszük, ekkor:

$$\frac{\pi}{20}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{40}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{40}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{40}}\right)+$$
$$\frac{\pi}{20}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{40}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{40}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{11\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{11\pi}{40}}\right)+$$
$$\frac{\pi}{20}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{13\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{13\pi}{40}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{15\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{15\pi}{40}}+\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{17\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{17\pi}{40}}\right)+$$
$$\frac{\pi}{20}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{19\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{19\pi}{40}}=.971\,46.$$

A számítás pontossága úgy is növelhető, ha a részintervallumok számát növeljük, pl. $n = 20$-ra, vagy $n = 40$-re.

Megjegyzés.

Az előbbi példában szereplő $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx$ közelítő értékét más módszerekkel, a trapézmódszerrel, vagy a Simpson módszerrel is kiszámíthatjuk, és így lehetőség van ezeknek az eredményeknek az összehasonlítására.

A trapéz módszer.

A trapéz módszer [71] még nagyobb pontosságot ad, már $n = 10$-re is:

$$\frac{\pi}{40}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} + 2\frac{\pi}{40}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{20}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{20}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{20}}\right) +$$

$$2\frac{\pi}{40}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{20}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{20}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{20}}\right) +$$

$$2\frac{\pi}{40}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{20}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{20}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{20}}\right) +$$

$$\frac{\pi}{40}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{10\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{10\pi}{20}} = .980\,4.$$

A Simpson módszer.

Hasonlóan nagyobb lesz ez a pontosság a Simpson módszerrel [71]:

$$\frac{\pi}{120}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} +$$

$$2\frac{\pi}{120}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{20}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{20}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{20}}\right) +$$

$$2\frac{\pi}{120}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{20}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{20}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{20}}\right) +$$

$$2\frac{\pi}{120}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{20}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{8\pi}{20}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{20}}\right) +$$

$$4\frac{\pi}{120}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{40}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{40}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{40}}\right) +$$

$$4\frac{\pi}{120}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{40}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{9\pi}{40}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{11\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{11\pi}{40}}\right) +$$

$$4\frac{\pi}{120}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{13\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{13\pi}{40}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{15\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{15\pi}{40}} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{17\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{17\pi}{40}}\right) +$$

$$4\frac{\pi}{120}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{19\pi}{40})}{\frac{\pi}{4}+\frac{19\pi}{40}}+\frac{\pi}{120}\frac{\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{10\pi}{20})}{\frac{\pi}{4}+\frac{10\pi}{20}}=.974\,44.$$

Ezeknek a módszereknek a leírására lásd pl. [71] .
A trapéz módszerben használható képlet:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a)}{2n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}))$$

a Simpson képlet pedig:

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)dx \quad &\approx \quad \frac{b-a)}{6n}(f(a)+f(b)+ \\ &\qquad 4\sum_{k=0}^{n-1} f(a+(2k+1)\frac{b-a}{2n})+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}))\end{aligned}$$

Az adott képletek pontossága függ az n értékétől is de a függvénytől és az intervallumtól is.

IV. Szélsőértékszámítás egy gyakorlati alkalmazása

A projektötlet célja. A szélsőértékszámítást a hallgató külön- külön megtanulja az egyváltozós valós függvények, és a többváltozós függvények esetén is. A vázolt ötlet arra alkalmas, hogy egy olyan műszaki kérdés megoldására késztesse a hallgatót, amelynek egyszerűsített formája egyváltozós, de a valósághoz közelebb álló megfogalmazása során többváltozós szélsőértékproblémához vezet.

A projektötlet leírása

1. Példa. Az a feladat [121], hogy vízszintes helyzetben át kell vinni egy hosszú rúdat (pl. létrát) egy derékszögben megtört folyosón. Legfeljebb mekkora lehet a rúd hossza, ha a folyosók a, és b szélessége méterben kifejezve $a = 2, b = 3$?

Megoldás: A folyosók külső falát tekintsük egy koordinátarendszer tengelyeinek olyan helyzetben, hogy a folyosók belső falainak találkozása (sarka) az $S(a, b)$ pont legyen. Az S ponton áthaladó m iránytényezőjű egyenes egyenlete:

$$y - b = m(x - a)$$

Ez az egyenes a koordinátatengelyeket (a folyosó külső falait) az

$$x_0 = \frac{-b + ma}{m}$$

és az

$$y_0 = b - ma$$

pontokban metszi, ezek d távolságának a négyzete:

$$d^2 = \left(\frac{-b + ma}{m}\right)^2 + (b - ma)^2$$

A feladat tehát megkeresni a rúd hosszának maximumát, ami egybeesik jelen esetben az adott d távolság minimumával. Igazából könnyebb a d^2 kifejezés minimumát megkeresni, tehát a

$$f(m) = d^2 = \left(\frac{-b + ma}{m}\right)^2 + (b - ma)^2 = (-b + ma)^2 \, \frac{1 + m^2}{m^2}$$

kifejezés szélsőértékei közt egy lokális minimumot keresünk. Az m változójú $m \mapsto f(m)$ függvény m szerinti deriváltja

$$f\prime(m) = 2a\,(-b + ma)\,(\frac{1 + m^2}{m^2}) + (-b + ma)^2 \,\frac{2m^3 - 2m(1 + m^2)}{m^4}$$

$$f\prime(m) = 2\frac{-b + ma}{m^3}\left(b + am^3\right)$$

aminek a gyökeit akár matematikai szoftver alkalmazásával is számíthatjuk:

$$m_1 = \frac{b}{a}, m_2 = \frac{1}{a}\sqrt[3]{(-ba^2)},$$

$$m_3 = -\frac{1}{2a}\sqrt[3]{(-ba^2)} - \frac{1}{2}i\frac{\sqrt{3}}{a}\sqrt[3]{(-ba^2)}$$

$$m_4 = -\frac{1}{2a}\sqrt[3]{(-ba^2)} + \frac{1}{2}i\frac{\sqrt{3}}{a}\sqrt[3]{(-ba^2)}$$

Ha most a konkrét számadatokkal, $a = 2, b = 3$, dolgozunk, az

$$f\prime(m) = 2\frac{2m-3}{m^3}\left(3 + 2m^3\right)$$

gyökei

$$m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{12},$$

$$m_3 = \frac{1}{4}\sqrt[3]{12} - \frac{1}{4}i\sqrt{3}\sqrt[3]{12},$$

$$m_4 = \frac{1}{4}\sqrt[3]{12} + \frac{1}{4}i\sqrt{3}\sqrt[3]{12}$$

a feladat megoldásához az

$$m_2 = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{12} \approx (-1.\,144\,7)$$

vezet, és ez rúd hosszára

$$d = \sqrt{\left(\frac{-b+ma}{m}\right)^2 + (b - ma)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{-3 + 2\,(-1.\,144\,7)}{(-1.\,144\,7)}\right)^2 + (3 - 2\,(-1.\,144\,7))^2} \approx 7.\,023\,5$$

azaz kerekítve a 7 méter értéket adja.

2. Példa. Ha most a feladatnak egy összetettebb változataként, egy derékszögben megtört a és b szélességű folyosón egy c szélességű, l hosszúságú téglalap alakú tárgyat tekintünk, akkor az előbbi feladat jelentheti egy parkolóházban, vagy szűk útkereszteződésben befordulni képes (adott c szélességű) gépkocsi maximális l hosszának a megkeresését. Megjegyezhető, hogy pl. az autóbuszok gyártásában az ún. csuklósbuszok két részének a külön mozgása lehetővé teszi egy nagyobb méretű autóbusz áthaladását egy viszonylag szűkebb helyen.

Ugyanez a feladat a raktárhelységek tervezésénél gyakran előfordul, hiszen ott az egyik lehetséges fő szempont a raktározó felület maximálissá tétele, amit nyilván a folyosók méretének szűkítésével is érvényesíthetnek.

Egy lehetséges megoldás egy vázlata

Az összetettebb feladat matematikailag többféleképpen megfogalmazható, ezek egyike a következő: tekintsük ismét a folyosó külső falait a rendszer koordinátatengelyeinek, és legyen a belső oldalak metszéspontja ismét $S(a, b)$.

Most viszont nem az S ponton áthaladó egyenest, hanem az S középpontú, c sugarú kört érintő egyeneseket írjuk fel. Az S középpontú c sugarú kör egyenlete:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$$

A kör egy (m,n) pontjában a kör érintőjének egyenlete:

$$(x-a)(m-a)+(y-b)(n-b)=c^2$$

és ez az érintő a tengelyeket rendre az:

$x_0=\frac{ma-a^2+bn-b^2+c^2}{m-a}$és az $y_0=-\frac{ma-a^2+bn-b^2+c^2}{-n+b}$ pontokban metszi.

Az előbbi metszéspontok d távolságának a minimuma alapján határozható meg a keresett maximális l értéke, ahol

$$d^2=\left(\frac{ma-a^2+bn-b^2+c^2}{m-a}\right)^2+\left(-\frac{ma-a^2+bn-b^2+c^2}{-n+b}\right)^2$$

Az egyszerűség kedvéért megint a d^2 minimumát keressük, legyen

$$(m,n)\to f(m,n)$$

tehát a következő függvény (feltételes) minimumát kell megkeresni:

$$d^2=f(m,n)=\left(\frac{ma-a^2+bn-b^2+c^2}{m-a}\right)^2+\left(-\frac{ma-a^2+bn-b^2+c^2}{-n+b}\right)^2$$

vagyis az

$$f(m,n)=\left(ma-a^2+bn-b^2+c^2\right)^2\frac{n^2-2bn+b^2+m^2-2ma+a^2}{(m-a)^2(-n+b)^2}$$

függvény szélsőértékeit keressük az

$$(m-a)^2+(n-b)^2=c^2$$

feltétel mellett.

A matematikai probléma tehát egy kétváltozós függvény feltételes szélsőértékének(szélsőértékeinek) a megtalálása.

A feltételes szélsőérték meghatározása és az idevágó számítások elvégzése után az keresett l hosszúság:

$$l=d-c\left(\frac{b-n}{a-m}+\frac{a-m}{b-n}\right)$$

Konkrét példának vegyük az előbbi példa adatai szerinti $a=2m$ és $b=3m$ méretű folyosókon áthaladó $c=1.05m$ szélességű járművet.

$$f(m,n) = \left(2m - 4 + 3n - 9 + (1.05)^2\right)^2 \frac{n^2 - 6n + 9 + m^2 - 4m + 4}{(m-2)^2 (-n+3)^2}$$

szélsőértékét (maximumát) kell számítani az

$$(m-2)^2 + (n-3)^2 = (1.05)^2$$

feltétel mellett.

Ez a szélsőérték kérdés megoldható a változók számának csökkentésével, vagy a Lagrange módszerrel, mindkét esetben a számítógépes matematikai szoftverek alkalmazása indokolt.

Megjegyzés. A feladat az egyszerűbb változatban megoldható úgy is, hogy az m paraméter(az egyenes iránytényezője helyett, az egyenes és az abszcisszatengely közti φ szöget tekintjük változónak. Ebben az esetben az $m = tg\varphi$ miatt így sem lesz sokkal egyszerűbb a számítás, de a bonyolultabb feladatot ugyanígy tekintve, eleve egyváltozós függvény szélsőértékéhez juthatunk.

V. Homorú reflektortükör meridiángörbéje

A projektötlet célja. Mérnökhallgatók számára érdekes technikatörténeti adalék lehet az, hogy a bolygódugattyus motor elve sokkal régebbi, mint a pontos műszaki megvalósítása és ennek egyik oka az volt, hogy nem tudták azt, hogy milyen a legmegfelelőbb felület. Végül az tette lehetővé a műszaki kivitelezést, hogy az 1940-es évek végén sikerült megoldani azt a differenciálegyenletrendszert, ami a dugattyúház és a dugattyú felületét írja le. Tehát a műszaki elképzelés matematikai megfogalmazása, a matematikai kérdés megoldása, és végül a számítások útján nyert eredmény felhasználása vezetett eredményre, a jó műszaki megoldáshoz. Az alábbi példán keresztül megvilágítható ez az út.

A projektötlet leírása. A hallgatók ismerik a parabola geometriai tulajdonságát, mégis érdekes az adott feltételt kielégítő differenciálegyenlet felállításán és megoldásán keresztül végigkövetni azt, ahogy a műszaki tulajdonság matematikai megfogalmazásán keresztül megtaláljuk a választ a problémára.

Felvethető a kérdés[121]: Milyen görbét kell az x-tengely körül megforgatni, hogy olyan homorú tükör felületét kapjuk, amely az x-tengellyel párhuzamosan beeső fénysugarakat az origóban veri vissza?

A mellékelt ábrán az x-tengellyel párhuzamosan beeső fénysugár a P pontban éri el a tükör felületét, a rajz szerint a feltételezett meridiángörbét.

A P pontbeli beesési merőleges és az adott pontbeli érintő merőlegesek, tehát a fényvisszaverődés törvénye szerint a sugármenet az előbbi ábra szerint alakul, ahol az AOP háromszög egyenlő szárú, mivel a P csúcsnál lévő β szöge megegyezik az A csúcsnál lévő szöggel, ez utóbbi ugyanis párhuzamos szárú szögként egyenlő a beérkező fénysugár és a meridángörbe érintője közt jelölt szöggel, ami szintén β a fényvisszaverődés törvénye alapján.

Tehát az AOP egyenlőszárú háromszög O pontnál lévő külső szöge a $\gamma = 2\beta$. Továbbá a meridiángörbét leíró függvény deriváltja a P pontban az $y' = tg\beta$, így ott felírható: $\frac{y}{x} = tg2\beta$, majd az ismert képlet szerint: $\frac{y}{x} = \frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta}$, azaz eljutunk a keresett differenciálegyenlethez:

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-(y')^2}, x \neq 0, y' \neq \pm 1.$$

A kapott egyenlet a következő alakban írható:

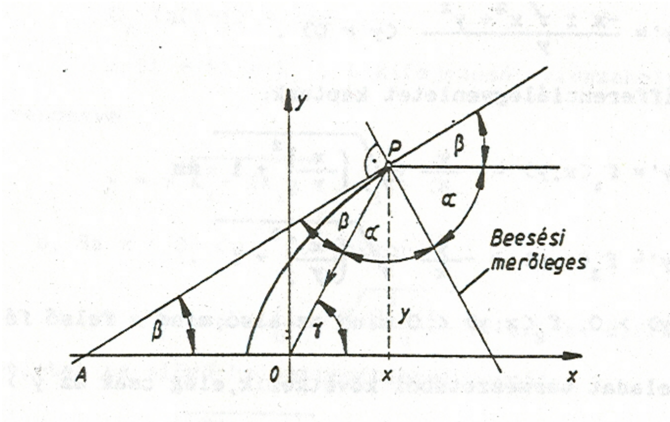
$$\frac{y}{x}(y')^2 + 2y' - \frac{y}{x} = 0, x \neq 0, y' \neq \pm 1.$$

Ebből

$$y' = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}, x \neq 0, y' \neq \pm 1,\ y \neq 0.$$

Rendezve:

$$y' = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}, x \neq 0, y' \neq \pm 1, y \neq 0.$$



2. ábra. Homorú reflektortükör meridiángörbéje

A megoldáshoz ez a két differenciál egyenlet vezet el. A szimmetria miatt feltételezhetjük azt, hogy csak a felső félsíkban keresünk megoldást, ahol feltehető $y > 0$, sőt $y' > 0$.

Ezért tekintsük az

$$y' = -\frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}, x \neq 0, y' \neq \pm 1, y \neq 0$$

egyenletet, ami az $\frac{y}{x} = u, y' = u'x + u$ helyettesítéssel a következő alakban írható:

$$u'x + u = -\frac{1}{u} + \sqrt{\left(\frac{1}{u}\right)^2 + 1}, x \neq 0, u \neq 0,$$

vagyis :

$$u'x + u = -\frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1+u^2}}{|u|}, x \neq 0, u \neq 0.$$

1. eset. Ha $x > 0$, azaz $u > 0$ ($y > 0$), akkor:

$$u'x + u = \frac{\sqrt{1+u^2} - 1}{u}, x \neq 0, u \neq 0,$$

rendezve:

$$\frac{udu}{\sqrt{1+u^2} - (1+u^2)} = \frac{dx}{x}, x \neq 0, u \neq 0,$$

ami a $t = \sqrt{1+u^2} > 1$, helyettesítéssel, figyelembe véve azt, hogy $tdt = udu$, rendre a következőkhöz vezet:

$$\int \frac{tdt}{t-t^2} = \int \frac{dx}{x}, \int \frac{dt}{1-t} = \int \frac{dx}{x}, lnC - ln(t-1) = lnx, (C>0)$$

vagyis:

$$x(t-1) = C, x\left(\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - 1\right) = C,$$

amit a következőképpen írhatunk:

$$x\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} - 1\right) = C, \sqrt{x^2+y^2} - x = C, \text{ majd } y^2 = (C+x)^2 - x^2,$$

és rendre

$$y^2 = C^2 + 2Cx, y = \sqrt{C^2+2Cx}, x>0, C>0.$$

2. eset. Ha $x<0$, azaz $u<0$ ($y>0$), akkor az:

$$u'x + u = -\frac{1}{u} - \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}, x \neq 0, u \neq 0,$$

egyenlethez jutunk, amit szintén az előző helyettesítéssel oldunk meg.

Vegyük az:

$$u'x + u = \frac{-\sqrt{1+u^2} - 1}{u}, x \neq 0, u \neq 0,$$

vagyis

$$\frac{udu}{\sqrt{1+u^2} + (1+u^2)} = -\frac{dx}{x}, x \neq 0, u \neq 0,$$

egyenletet, ami a $t = \sqrt{1+u^2} > 1$, helyettesítést és a $tdt = -udu$ $(u<0)$összefüggést figyelembe véve, elvezet az:

$$\int \frac{tdt}{t+t^2} = \int \frac{dx}{x}, \int \frac{dt}{1+t} = \int \frac{dx}{x}, x<0,$$

aminek a megoldása:

$$\ln(t+1) = -\ln(-x) + \ln K, x<0, K>0$$

azaz rendre:

$$K = -x(t+1), K = -x\left(\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + 1\right), \text{és mivel } x<0:$$

$$K = -x\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right), K = -x + \sqrt{x^2+y^2},$$

majd:

$$\sqrt{x^2+y^2} = x + K, x^2+y^2 = (x+K)^2,$$

és végül:

$$y^2 = 2Kx + K^2, y = \sqrt{2Kx+K^2}, K > 0, -\frac{K}{2} \leq x < 0.$$

Láthatólag a két megoldás egyforma alakú.

Válasszuk most ki azt a görbét, amire $y(-\frac{1}{2}) = 0$, ekkor a második megoldás szerint

$0 = \sqrt{K^2 - K}$, ennek megoldásai $K = 0, K = 1$.

Tehát ezen az intervallumon a keresett megoldás:

$$y = \sqrt{2x+1}, 0 > x \geqq -\frac{1}{2}.$$

Ha folytonos görbülettel illesztjük a másik intervallumon ($x > 0$) található megoldáshoz, akkor ott az $y(0) = 1, y\prime(0) = 1$ feltételeket kell vennünk, így a $\sqrt{C^2} = 1$ mellett az: $y' = \frac{2C}{2\sqrt{C^2+2Cx}}$ -ből, a $\frac{C}{\sqrt{C^2}} = 1$, azaz $C = 1$ adódik, tehát a keresett megoldás:

$$y = \sqrt{2x+1}, x \geqq -\frac{1}{2}$$

azaz mint várható volt, egy parabola két, egymáshoz illeszkedő íve.

A reflektortükör meridiángörbéje tehát ebben az esetben a szimmetriát is figyelembe véve

$$y = \pm\sqrt{2x+1}, x \geqq -\frac{1}{2}.$$

Az általános esetben, ha az előzőek szerinti folytonos görbülettel csatlakozunk az $x = 0$-ban akkor az

$$y = \pm\sqrt{2Cx + C^2}, x \geqq -\frac{C}{2},$$

azaz az $x = -\frac{C}{2}$ vezéregyenesű $\left(\frac{C}{2}, 0\right)$ fókuszpontú parabola lesz a megoldás.

VI. Résztörtekre bontás egy gyorsabb módszere

A projektötlet célja. A határozott integrálok oktatása során gyakran találkozunk olyan integrálszámítási feladattal, amit pl. változócserével törtek integrálásra vezetünk vissza (gondolhatunk irracionális függvényeket, szögfüggvényeket, vagy hiperbolikus függvényeket tartalmazó példákra). Ezért a törtek integrálása hangsúlyosabb szerepet kap. A résztörtekre bontás amúgy algebrai feladatát az oktatók tapasztalata szerint a hallgatók nehezebben sajátítják el. A résztörtekre bontásnak ez a módszere, főleg az egyszerűbb feladatok megoldása során, lényegesen lerövidíti a számításokat, és így ez a módszer, bár a megtanulása bizonyos fokú többletmunkára épül, mégis népszerű a hallgatók között. Többször tapasztaltuk, hogy azok a hallgatók, akik ezt a módszert alaposan elsajátították, valóságos "szakértőivé" váltak a fejezetnek. A módszer elsajátítása törtekkel végzett műveletek gyakorlása mellett még a függvényeknek a pontosabb tanulmányozását is eredményezi, főként az értelmezési tartományuk végpontjaiban.

A projektötlet leírása

Maga a leírás az általános esetben sokkal bonyolultabbnak tűnhet mint a módszer alkalmazása, főleg az egyszerű esetekben.

Tekintve, hogy a valós polinomok a valós számok felett felbonthatók első és másodfokú valós polinomok (irreducibilis tényezők) szorzatára, az $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ alakú törtfüggvények (ahol $P(x)$ és $Q(x)$ valós együtthatójú polinomok) egyértelműen résztörtek összegeként írhatók fel [125].

Legyenek $x_1, x_2, ..., x_k$ a $Q(x)$ polinom valós gyökei és jelöljük rendre $\alpha_1, \alpha_2,$ ... $, \alpha_k$-val ezeknek a gyököknek a többszörösségi fokát. Legyenek továbbá az $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$,..., $a_j + ib_j$ a $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_j$ többszörösségi fokú komplex gyökök, illetve az azonos többszörösségű konjugált komplex gyökök $a_1 - ib_1$, $a_2 - ib_2$,..., $a_j - ib_j$. Ezeket a konjugált komplex gyökpárokat tartalmazzák rendre az $x^2 + 2p_1x + q_1$, $x^2 + 2p_2x + q_2$,..., $x^2 + 2p_jx + q_j$ valós másodfokú tényezők az adott többszörösségi foknak megfelelő hatványokon. A $Q(x)$ polinom felírható tehát a következő alakban (ahol $Q_0 \in \mathbb{R}$):

$$Q_0(x - x_1)^{\alpha_1} ...(x - x_k)^{\alpha_k} .(x^2+2p_1x + q_1)^{\beta_1} (x^2+2p_2x + q_2)^{\beta_2} ...(x^2+2p_jx + q_j)^{\beta_j}$$

$$\frac{P(x)}{Q_0(x-x_1)^{\alpha_1}...(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+2p_1x+q_1)^{\beta_1}...(x^2+2p_jx+q_j)^{\beta_j}}$$

felbontása tehát

$$C(x)+\frac{A_{11}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_{12}}{(x-x_1)^{\alpha_1-1}}+...+\frac{A_{1\alpha_1}}{x-x_1}+...+$$

$$\frac{A_{k1}}{(x-x_k)^{\alpha_k}}+\frac{A_{k2}}{(x-x_k)^{\alpha_k-1}}+\frac{A_{k\alpha_k}}{x-x_k}+$$

$$\frac{M_{11}x+N_{11}}{(x^2+2p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\frac{M_{12}x+N_{12}}{(x^2+2p_1x+q_1)^{\beta_1-1}}+...+\frac{M_{1\beta_1}x+N_{1\beta_1}}{x^2+2p_1x+q_1}+...+$$

$$\frac{M_{j1}x+N_{j1}}{(x^2+2p_jx+q_j)^{\beta_j}}+\frac{M_{j2}x+N_{j2}}{(x^2+2p_jx+q_j)^{\beta_j-1}}+...+\frac{M_{j\beta_j}x+N_{j\beta_j}}{x^2+2p_jx+q_j}$$

Megkaptuk tehát a $\frac{P(x)}{Q(x)}$ felbontását $\frac{A}{(x-x_h)^\alpha}$ és $\frac{Mx+N}{(x^2+2px+q)^\beta}$ alakú résztörtek összegére. Az adott A_{ik}, M_{ik}, N_{ik} együtthatók meghatározását a megfelelő műveletek elvégzése után két polinom azonos együtthatóiként szokás meghatározni, de ez a módszer meglehetősen nehéz, aránylag egyszerű esetekben is.

Példa.
Bontsuk fel a

$$\frac{8(x-2)}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)}$$

tört függvényt résztörtek összegére!
A megoldás során az előbbi felbontási képlet szerint felírhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\frac{8(x-2)}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)} &= \frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B_1}{(x+1)^2}+ \\ &\quad +\frac{B_2}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\end{aligned}$$

Ahol meg kell határozni az A_1, A_2, B_1, B_2, M és N együtthatókat. Szorozzuk be mindkét oldalt az
$(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)$ kifejezéssel, a kapott polinom-azonosság:

$$\begin{aligned}8(x-2) &= A_1(x+1)^2(x^2+1)+A_2(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)+ \\ &\quad B_1(x-1)^2(x^2+1)+B_2(x+1)(x-1)^2(x^2+1)+ \\ &\quad +(Mx+N)(x-1)^2(x+1)^2\end{aligned}$$

amit átrendezhetünk a következők szerint:

$$\begin{aligned} 8(x-2) &= A_1(x^4+2x^3+2x^2+2x+1)+ \\ &A_2(x^5+x^4-x-1)+B_1(x^4-2x^3-2x^2-2x+1)+ \\ &+B_2(x^5-x^4-x+1)+M(x^5-2x^3+x)+N(x^4-2x^3+1) \end{aligned}$$

A két polinom megegyező fokszámú tagjainak együtthatóit azonosítva a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} A_2+B_2+M &= 0 \\ A_1+A_2+B_1-B_2+N &= 0 \\ A_1-B_1-M &= 0 \\ A_1+B_1-N &= 0 \\ 2A_1-A_2-2B_1-B_2+M &= 8 \\ A_1-A_2+B_1+B_2+N &= -16 \end{aligned}$$

Az A_1, A_2, B_1, B_2, M és N ismeretlenekre.
A megoldáshoz a harmadik és negyedik egyenletből:

$$A_1 = \frac{M+N}{2}, B_1 = \frac{N-M}{2}$$

Majd az első és második egyenletet átírhatjuk a következő formába:

$$A_2+B_2 = -M, A_2-B_2 = -2N$$

ahonnan:

$$A_2 = -\frac{M+2N}{2}, B_2 = \frac{2N-M}{2}$$

Végül A_1, A_2, B_1,és B_2-t az ötödik, hatodik egyenletbe helyettesítve:

$$4M = 8, 4N = 16$$

és tehát

$$M = 2, N = -4$$

Ezek után

$$A_1 = -1, A_2 = 3, B_1 = -3, B_2 = -5$$

Az adott tört felbontása így:

$$\begin{aligned} \frac{8(x-2)}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)} &= -\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-\frac{3}{(x+1)^2}+ \\ &-\frac{5}{x+1}+\frac{2(x-2)}{x^2+1} \end{aligned}$$

Ugyanezeket az együtthatókat másképpen, bizonyos esetekben sokkal rövidebben is meghatározhatjuk. Tekintsük ismét az adott felbontást:

$$\begin{aligned}\frac{8(x-2)}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)} &= \frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\\ &\quad \frac{B_1}{(x+1)^2}+\frac{B_2}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\end{aligned}$$

Szorozzuk most mindkét oldalát $(x-1)^2$-nel:

$$\begin{aligned}\frac{8(x-2)}{(x+1)^2(x^2+1)} &= A_1+A_2(x-1)+\\ &\quad (x-1)^2\left[\frac{B_1}{(x+1)^2}+\frac{B_2}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\right]\end{aligned}$$

Ha most ez utóbbi azonosságba $x=1$-et "behelyettesítjük", az $A_1=-1$-hez jutunk, ami természetesen megegyezik az előzőekben kapott eredménnyel.

Itt felhívhatjuk a hallgatók figyelmét arra, hogy a két előbbi azonosság nem teljesen egyenértékű, hiszen míg az elsőnek nincs értelme $x=1$ és $x=-1$-re, a másodiknak már $x=1$-ben van értelme. A hallgatók még pontosabban megérthetik ennek a módszernek a lényegét, ha az utóbbi egyenlőségben az $x=1$ behelyettesítése helyett a kifejezések határértékéről beszélünk, ha $x\to 1$. Hasonló módon határozzuk meg a B_1 együtthatót, az eredeti azonosságot ezúttal $(x+1)^2$-nel szorozva:

$$\begin{aligned}\frac{8(x-2)}{(x-1)^2(x^2+1)} &= B_1+B_2(x+1)+\\ &\quad (x+1)^2\left[\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\right]\end{aligned}$$

Mindkét oldal határértékét véve, ha $x\to -1$-hez, $B_1=-3$-hoz jutunk. Az eredeti azonosságba helyettesítsük be a már meghatározott A_1 és B_1-et:

$$\begin{aligned}\frac{8(x-2)}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)} &= \frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}+\\ &\quad \frac{A_2}{x-1}+\frac{B_2}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\end{aligned}$$

Az ismeretlen együtthatós tagokat jobboldalon hagyva a következő azonosságot kapjuk:

$$\frac{8(x-2)+(x+1)^2(x^2+1)+3(x-1)^2(x^2+1)}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)}=$$

$$\frac{A_2}{x-1}+\frac{B_2}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

A baloldal számlálója osztható lesz $(x-1)(x+1)$-el. A számítás a következő:

$$4x^4-4x^3+8x^2+4x-12=4(x-1)(x+1)(x^2-x+3)$$

Majd a baloldal egyszerűsítése után azt kapjuk, hogy

$$\frac{4(x^2-x+3)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A_2}{x-1}+\frac{B_2}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

és az előzőekben leírt módszerrel meg tudjuk határozni az A_2, B_2 értékeit. Rendre $(x-1)$-el megszorozva mindkét oldalt és 1-et behelyettesítve $A_2=3$-at illetve $(x+1)$-el történő szorzás és $x=-1$ behelyettesítése után $B_2=-5$-öt kapunk. Ezeket az értékeket az előbbi alakba visszahelyettesítve:

$$\frac{4(x^2-x+3)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{3}{x-1}-\frac{5}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

A jobboldalon hagyva az ismeretlen együtthatókat

$$\frac{4(x^2-x+3)-3(x+1)(x^2+1)+5(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

és a baloldalt $(x-1)(x+1)$-gyel egyszerűsítve a kívánt

$$\frac{2x-4}{x^2+1}=\frac{Mx+N}{x^2+1}$$

azonossághoz jutunk, tehát $M=2$, $N=-4$.

A kapott eredményeket összesítve a kapott felbontás megegyezik az előző felbontással.

Megjegyzés.

Az M és N együtthatók az előbbiektől eltérően, már elsődlegesen is meghatározhatók az eredeti alakból azt az (x^2+1)-el végigszorozva :

$$\begin{aligned}\frac{8(x-2)}{(x-1)^2(x+1)^2} &= Mx+N+\\ &+(x^2+1)\left[\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B_1}{(x+1)^2}+\frac{B_2}{x+1}\right]\end{aligned}$$

és az $x=i$-t behelyettesítve az (x^2+1) tűnik el, és az azonosságból az következik, hogy:

$$\frac{8(i-2)}{(i-1)^2(i+1)^2}=Mi+N$$

vagyis

$$\frac{8(i-2)}{(i^2-1)^2} = Mi + N$$

és így:

$$\frac{8(i-2)}{4} = 2(i-1) = Mi + N$$

vagyis $M = 2$, $N = -4$.

VII. Az egész számok néhány tulajdonsága

A projektötlet célja. A projekt módszer alkalmazása ebben az esetben arra vezethet, hogy egy-két hallgató vagy egy kisebb hallgatócsoport tanulását katalizálja. A tanult anyagrészhez kapcsolódó, de a tanultakat kicsit más szempontok szerint összefogó kérdések arra ösztönzik a hallgatót (hallgatókat), hogy a tanultakat mélyebben megértsék, azok alkalmazásának feltételeit pontosabban megismerjék és alkalmazni tudják a szokatlanabb feladat-helyzetekben. A megvalósítása során a hallgató az intuitív gondolkodásmód kialakítására kaphat mintát [103], arra, hogy egy egyszerűnek tűnő számítási feladat továbbgondolása mire vezethet . Erre a következetes, logikus gondolkodásmódra feltétlen szüksége van a mérnökhallgatónak. Ennek az induktív útnak egy jó példája ez a kisdolgozat, ami az egész számok egy tulajdonságáról szól.

Története

A kisdolgozat (egyéni projekt) megvalósulásának 1980-as évekre visszanyúló története a matematikai indukció tanítása során a következő példa megoldása után kezdődött:

Példa: *Igazolja, hogy* $n^5 - n$ *mindig osztható* 30*-al, ha* $n \geq 1, n \in N$.

A diákoknak az volt a tennivalója, hogy néhány egyszerű esetben közvetlen számítással ellenőrizzék az adott állítást, és ha igaznak bizonyul, akkor általánosan is igazolják

Ez a feladat annak a szemléltetésére is alkalmas, hogy az induktív úton kapott sejtés a matematikai indukcióval történő bizonyítás mellett gyakran közvetlenül is belátható.

A feladat megoldását követő órán Nemes Attila szakközépiskolás, aki ma kitűnő mérnök, egy kérdést tett fel, amiben az egész számoknak egy nagyon egyszerű, általa észrevett tulajdonságával foglalkozott. Észrevette ugyanis, hogy két egymást követő egész szám harmadik hatványainak a különbsége hárommal osztva mindig 1-et ad maradékul. Ezt a tulajdonságot több tucat esetben ellenőrizte a zsebszámológépével és a nagy számú példa kiszámítása után azt állította, hogy ez mindig így következik be.

Nemes Attila szavaival élve "egy kis felfedezést tett a matematikában" és megfogalmazott egy sejtést, egy tételt. Azt kérte, hogy mondjak véleményt, hogy ez a megállapítás újdonságot tartalmaz-e vagy sem, mivel mindenképpen a saját eredményének érezte a tulajdonság észrevételét, és szerette volna tudni, hogy mennyire van igaza. A jelzett tulajdonság hivatalos bizonyítását aránylag könnyen belátta, de szerencsére nem veszített érdeklődéséből. Tanácsomra elméleti úton is, meg a zsebszámológéppel is próbálkozott az adott tulajdonság további ellenőrzésével, a tulajdonság kapcsán megfogalmazódó további állításokkal.

A következő hetekben szinte minden alkalommal, amikor találkoztunk **a tulajdonság újabb** és újabb változataival, esetenként **általánosításával** jelentkezett. A tulajdonságok egyre összetettebb alakjának bizonyítása közben, tulajdonképpen a tanult anyag egy tekintélyes része rendre szóba került, hiszen a matematikai indukció mellett polinomok gyökeiről, polinomok oszthatóságáról, Bézout tételéről, komplex számok algebrai, majd trigonometriai alakjának felírásáról, alkalmazásáról is szóltak ezek a bizonyítások.

Nemes Attila az általa felvetett kérdés egyre pontosabb, szélesebb körű megoldása révén észrevétlenül megtanulta a matematika fent említett fejezeteit, sőt azokat alkalmazni kényszerült. Tehát akarva-akaratlanul ennek a néhány tulajdonságnak és a tulajdonság következményeinek köszönhetően a tanult anyag jelentős részét nagyon alaposan megtanulta, sőt alkalmazni is tudta nem egyszerű begyakorló példákon, hanem "élesben" egy elméleti bizonyítás során. Az általa felvetett egyszerű feladat motiválta abban, hogy jónéhány előadáson keresztül feszülten figyeljen, közbevetett kérdéseivel a tanultak alkalmazhatóságának határát, lehetőségét igyekezett felfedezni és mire ezt a kisdolgozatot megírta, már nem csak azt tartotta fontosnak, hogy zsebszámológéppel, sok-sok példán keresztül felismerjen valamilyen szabályszerűséget, hanem azt is, hogy a tanult elméleti tételek alapján, esetleg elméleti úton próbálja felfedezni, megfogalmazni a még lehetséges tulajdonságokat. Ez a folyamatosan visszacsatolásokkal tarkított közös munka mintegy 8 hétig tartott és eredményeképp született meg egy közös dolgozatunk [47].

A dolgozat felépítése pontosan nyomon követi a projekt során kialakuló apróbb lépéseket, és tükrözi azt a sorrendet, amint az adott tulajdonságokat "felfedeztük" és bebizonyítottuk. Ennek a projektnek külön érdekessége az, amint Nemes Attilának a matematika tanulással szembeni magatartása megváltozott. Fegyelmezett, jóindulatú, szemlélődő, többnyire passzív emberből egy szenvedélyesen vitatkozó, nagyon aktív, a matematikát nagy becsben tartó diák lett, később egyetemet végzett és jelenleg egy sikeres mérnöki iroda vezetője.

Idézzük fel ennek a dolgozatnak a részleteit, nyomon követve azt, hogy milyen matematikai ismeretek meglétét, alkalmazási képességét tételezi fel és a dolgozat hogy egészül ki egyre összetettebb matematikai eszközökkel. A dolgozat nyomán az utóbbi években a Miskolci Egyetemen is több kisdolgozat született.

Az egész számok néhány tulajdonsága

Észrevehető, hogy két egymás utáni egész szám harmadik hatványainak különbsége hárommal osztva 1-et ad maradékul, azaz:

$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot M_3 + 1,\ M_3 \in \mathbb{Z},\ \text{ahol } M_3 = n(n+1) \in \mathbb{Z}.$$

Ezt a tulajdonságot magasabb kitevőkre is általánosíthatjuk. A negyedik hatványra nem érvényes a hasonló tulajdonság, tehát a páros számokat elvetjük, az ötödik és hetedik hatványra ismét érvényes egy hasonló tulajdonság, de a kilencedik hatvány esetén nem, tehát a páratlan számokra sem mindig igaz.

Felötlik tehát az a gondolat hogy csak prímszámkitevőkre érvényes a következő:

1. Tulajdonság. *Tetszőleges $p \geq 3$ prímszám és bármely n egész szám esetén:*

$$(n+1)^p - n^p = p \cdot M_p + 1,\ ahol\ n(n+1) \mid M_p\ és\ M_p \in \mathbb{Z}.$$

továbbá:

$$Ha\ p \geq 5,\ akkor\ még\ \left(n^2+n+1\right) \mid M_p.$$

Bizonyítás:
Legyen $p \geq 3$ prímszám és n egy tetszőleges egész szám. Felírhatjuk, hogy:

$$(n+1)^p - n^p = \binom{p}{0}n^p + \binom{p}{1}n^{p-1} + ... + \binom{p}{p-1}n + \binom{p}{p} - n^p,$$

vagyis

$$(n+1)^p - n^p = \binom{p}{2}n^{p-1} + \binom{p}{2}n^{p-2} + ... + \binom{p}{p-1}n + 1. \quad (1)$$

Belátható, hogy:

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-k+1)}{k(k-1)(k-2)...3.2.1} = p \cdot L_k, \quad 1 \leq k < p,$$

ahol L_k egy egész szám, mivel a $\binom{p}{k}$kombinációs együtthatók egész számok, tehát a nevezőben lévő tényezőkkel lehet egyszerűsíteni s az egyszerűsítés nem érinti p-t, mert p prímszám és $1 \leq k < p$.

Tehát:
$\binom{p}{k} = p \cdot L_k$, $1 \leq k < p$ *és* $L_k \in \mathbb{Z}$.
Vezessük be az $L_k n^{p-k} = L'_k \in \mathbb{Z}$ jelölést. Behelyettesítve az (1) összefüggésbe:

$$\begin{aligned} (n+1)^p - n^p &= pL'_1 + pL'_2 + ... + pL'_{p-1} + 1 \\ &= p(L'_1 + L'_2 + ... + L'_{p-1}) + 1, \end{aligned}$$

tehát

$$(n+1)^p - n^p = p \cdot M_p + 1,$$

ahol

$$M_p = L'_1 + L'_2 + ... + L'_{p-1} \in \mathbb{Z}. \qquad (2)$$

Még azt kell bizonyítani, hogy

$$n(n+1) \mid M_p$$

illetve ha $p \geq 5$, akkor

$$\left(n^2 + n + 1\right) \mid M_p.$$

a) Az (1) eredmény alapján belátható, hogy $n \mid M_p$. (3)
b) A (2) alapján belátható, hogy

$$(n+1)^p - n^p = p \cdot M_p + 1,$$

innen kifejezve a $p \cdot M_p$-t:

$$p \cdot M_p = (n+1)^p - n^p - 1,$$

vagyis $p \cdot M_p$ egy polinom n-ben.

Vezessük be a következő jelölést:

$$p \cdot M_p = f(n) = (n+1)^p - n^p - 1.$$

Bézout tétele alapján bebizonyítjuk, hogy $(n+1) \mid f(n)$.

Valóban,

$$f(-1) = 0p - (-1) = 0 \quad (p = 2k+1).$$

Tehát

$$(n+1) \mid f(n),$$

azaz

$$(n+1) \mid p \cdot M_p$$

és mivel p prímszám, következik

$$(n+1) \mid M_p. \qquad (4)$$

c) Ha $p \geq 5$, akkor még igazolnunk kell, hogy

$$\left(n^2 + n + 1\right) \mid M_p.$$

Vegyük ismét az előző b) pontban bevezetett $f(n)$ polinomot, és szintén Bézout tételére támaszkodva igazoljuk, hogy:

$$\left(n^2 + n + 1\right) \mid f(n).$$

Megmutatjuk, hogy

$$(n - n_1) \mid f(n)$$

és

$$(n - n_2) \mid f(n),$$

ahol n_1 és n_2 az $n^2 + n + 1$ polinom gyökei , vagyis

$$n_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$n_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Megjegyzés.

A $p \geq 5$ prímszám a 6-tal való oszthatóság szempontjából csak a $6k+1$ és $6k+5$ maradékosztályok valamelyikébe sorolható, mivel a többi esetben a $6k$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ alakú számok összetettek, 2-vel, vagy 3-mal oszthatók ($k = 0$ esetén a 2, ill. 3 prímszám de 5-nél kisebbek). Ennek megfelelően két esetet tárgyalunk:

c$_1$) Feltételezzük, hogy a $p \geq 5$ prímszám $6k+1$ alakú, $k \in \mathbb{Z}$ akkor:

$$f(n_1) = (n_1 + 1)^{6k+1} - n_1^{6k+1} - 1$$

és tudjuk, hogy:

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ n_1 + 1 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Tehát:

$$f(n_1) = \cos\frac{(6k+1)\pi}{3} + i\sin\frac{(6k+1)\pi}{3} - \cos\frac{(6k+1)2\pi}{3} - i\sin\frac{(6k+1)2\pi}{3} - 1$$

vagyis:

$$f(n_1) = \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(4k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) - i\sin\left(4k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) - 1$$

$$f(n_1) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} - 1$$

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 0$$

$f(n_1) = 0$, tehát

$$(n - n_1) \mid f(n). \qquad (5)$$

Hasonlóan az n_2 esetén:

$$\begin{aligned} n_2 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \\ n_2 + 1 &= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$f(n_2) = \cos\frac{(6k+1)5\pi}{3} + i\sin\frac{(6k+1)5\pi}{3} - \cos\frac{(6k+1)4\pi}{3} - i\sin\frac{(6k+1)4\pi}{3} - 1$$

$$= \cos\left(10k\pi + \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(10k\pi + \frac{5\pi}{3}\right) - \cos\left(8k\pi + \frac{4\pi}{3}\right) - i\sin\left(8k\pi + \frac{4\pi}{3}\right) - 1$$

$$= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} - \cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3} - 1$$

$$f(n_2) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 0,$$

azaz $f(n_2) = 0$, tehát

$$(n - n_2) \mid f(n). \qquad (6)$$

c_2) Feltételezzük, hogy a p prímszám $6k+5$ alakú, $k \in \mathbb{Z}$.
Ekkor

$$f(n_2) = (n_2+1)^{6k+5} - n_2^{6k+5} - 1$$

és tudjuk, hogy

$$n_2 = cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3},\ n_2+1 = cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}.$$

Tehát:

$$f(n_2) = \cos\frac{(6k+5)5\pi}{3} + i\sin\frac{(6k+5)5\pi}{3} - \cos\frac{(6k+5)4\pi}{3} - i\sin\frac{(6k+5)4\pi}{3} - 1,$$

vagyis:

$$= \cos\left(10k\pi + \frac{25\pi}{3}\right) + i\sin\left(10k\pi + \frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(8k\pi + \frac{20\pi}{3}\right) - i\sin\left(8k\pi + \frac{20\pi}{3}\right) - 1,$$

$$f(n_2) = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} - 1 = 0,$$

$f(n_2) = 0$, tehát

$$(n-n_2) \mid f(n). \qquad (6')$$

Hasonlóan:

$$f(n_1) = \cos\frac{(6k+5)\pi}{3} + i\sin\frac{(6k+5)\pi}{3} - \cos\frac{(6k+5)2\pi}{3} - i\sin\frac{(6k+5)2\pi}{3} - 1,$$

$$= \cos\left(2k\pi + \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(2k\pi + \frac{5\pi}{3}\right) - \cos\left(4k\pi + \frac{10\pi}{3}\right) - i\sin\left(4k\pi + \frac{10\pi}{3}\right) - 1$$

$$f(n_1) = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} - \cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3} - 1 = 0$$

$f(n_1) = 0$, tehát

$$(n-n_1) \mid f(n). \qquad (5')$$

Az (5), (6), illetve (5'), (6') alapján következik, hogy:

$$\left(n^2+n+1\right) \mid f(n). \qquad (7)$$

Az adott tulajdonság általánosítható, ha $n+1$ helyett $n+k$-t veszünk:

2. Tulajdonság. *Ha p egy háromnál nagyobb prímszám és n valamint k tetszőleges egész számok, akkor:*

$$(n+k)^p - n^p = p \cdot n \cdot k \cdot (n+k) \cdot M + k^p,$$

ahol $M \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás: Legyen $p \geq 3$ egy prímszám és n, k két tetszőleges egész szám. Felírhatjuk, hogy

$$(n+k)^p - n^p = \binom{p}{0}n^p + \binom{p}{1}n^{p-1}k + \binom{p}{2}n^{p-2}k^2 + ... + \binom{p}{p}k^p - n^p,$$

$$(n+k)^p - n^p = \binom{p}{1}n^{p-1}k + \binom{p}{2}n^{p-2}k^2 + ... + k^p. \qquad (8)$$

Az előző tulajdonság bizonyításából tudjuk, hogy

$$\binom{p}{k} = p \cdot L_k, \text{és } L'_k = L_k n^{p-k}.$$

Ugyanakkor:

$$(n+k)^p - n^p = pL_1^*k + pL_2^*k^2 + ... + pL_{p-1}^*k^{p-1} + k^p$$

tehát:

$$(n+k)^p - n^p = p \cdot \overline{M}_p + k^p,$$

ahol

$$\overline{M}_p = L_1^*k + L_2^*k^2 + ... + L_{p-1}^*k^{p-1} \in \mathbb{Z}.$$

Bizonyítani kell még, hogy
a) $n \mid \overline{M}_p$,
b) $(n+k) \mid \overline{M}_p$,
c) $k \mid \overline{M}_p$.
A (8) alapján:

$$(n+k)^p - n^p = \binom{p}{1}n^{p-1}k + \binom{p}{2}n^{p-2}k^2 + ... + \binom{p}{p-1}nk^{p-1} + k^p,$$

azaz:

$$(n+k)^p - n^p = p \cdot \overline{M}_p + k^p$$

és mivel p prímszám, azonnal következik, hogy

$$n \mid \overline{M}_p$$

és

$$k \mid \overline{M}_p. \qquad (9)$$

b) Legyen

$$p \cdot \overline{M}_p = \overline{f}(n) = (n+k)^p - n^p - k^p.$$

Bézout tétele alapján

$$\overline{f}(-k) = 0 - (-k)^p - k^p = 0$$

tehát

$$(n+k) \mid \overline{f}(n),$$

azaz

$$(n+k) \mid \overline{M}_p. \qquad (10)$$

Az 1. Tulajdonság egy másik általánosítása a következő:

3. Tulajdonság.

Ha $p \geq 3$ egy prímszám és n valamint $k \geq 0$ egész számok, akkor:

$$(n+k)^p - n^p = p \cdot \overline{\overline{M}}_p + k,$$

ahol $\overline{\overline{M}}_p \in \mathbb{Z}$.

Bizonyítás:

Az 1. Tulajdonságot alkalmazzuk rendre az $n, n+1$,..., $n+k-1, n+k$ egész számokra, azaz:

$$(n+1)^p - n^p = p \cdot M_{p,1} + 1,$$

$$(n+2)^p - (n+1)^p = p \cdot M_{p,2} + 1,$$

$$(n+3)^p - (n+2)^p = p \cdot M_{p,3} + 1,$$

....

$$(n+k-1)^p - (n+k-2)^p = p \cdot M_{p,k-1} + 1,$$

$$(n+k)^p - (n+k-1)^p = p \cdot M_{p,k} + 1$$

Összeadva ezeket:

$$(n+k)^p - n^p = p(M_{p,1} + M_{p,2} + M_{p,3} + ... + M_{p,k-1} + M_{p,k}) + k, \qquad (11)$$

azaz:

$$(n+k)^p - n^p = p \cdot \overline{\overline{M}}_p + k. \qquad (12)$$

Alkalmazások.

1. A 3. Tulajdonságból egyszerű helyettesítéssel bizonyítható az ún. kis Fermat tétel:

Ha $n = 0$ és $k = a$, akkor (12) alapján:

$$a^p - 0 = p \cdot \overline{\overline{M}}_p + a$$

vagyis

$$a^p - a = p \cdot \overline{\overline{M}}_p$$

ez Fermat kis tételének egyik alakja.

2. A 2. és 3. Tulajdonság alapján másképp is bebizonyíthatjuk a kis Fermat tételt:

A 2.Tulajdonság alapján:

$$(n+a)^p - n^p = p \cdot \overline{M}_p + a^p \qquad (k = a)$$

A 3. Tulajdonság alapján:

$$(n+a)^p - n^p = p \cdot \overline{\overline{M}}_p + a.$$

A fenti két sor különbsége:

$$0 = p \cdot \left(\overline{M}_p - \overline{\overline{M}}_p \right) + a^p - a$$

tehát

$$a^p - a = p \cdot M^* (M^* = \overline{M}_p - \overline{\overline{M}}_p \in \mathbb{Z}).$$

Feltevődik a kérdés, hogy a talált tulajdonság nem jellemzi-e a prímszámokat, vagyis abból, hogy:

$$(n+k)^p - n^p = p \cdot \overline{M}_p + k^p$$

igaz bármely n és k-ra, következik-e, hogy p prímszám.

Ez a kérdés nyitott marad, és külön érdekessége az, hogy a kis Fermat tétel megfordítására ellenpélda adható [167]:

Ellenpélda. A említett tétel fordított tétele az lenne, hogy ha bármely egész a számra

$$a^p - a = p \cdot M,$$

akkor p prímszám. Viszont az $a = 2$, és $p = 341$ esetén

$$2^{341} - 2 = 341 \cdot M_1$$

és mégis

$$341 = 31 \cdot 11$$

VIII. Gráfok alkalmazásai

A projektötlet célja. Bár a gráfok tanítása nem mindig képezi részét a műszaki felsőoktatásnak, tekintve a gráfok sokoldalú műszaki alkalmazásait valószínű, hogy előbb-utóbb kötelező részévé válik a gráfelmélet a mérnöki egyetemek matematikaoktatásának.

Két alapvető gráfelméleti kérdés az Euler-gráfok és a Hamilton-gráfok kérdése nyilván megkerülhetetlen, például logisztikai tervezések, útvonalak, szállítás, információ áramlat. Az Euler-gráfok jelentősége abban áll, hogy egy adott gráf éleinek olyan bejárását jelentik, amelyekben minden élet pontosan egyszer járunk be. Ilyen például egy műszaki objektum őrzése során a biztonsági bejárási útvonal, de Euler utak szerepelnek például áramkörök tervezésénél is. A műszaki informatikus vagy programozó matematikus hallgatóknak, de talán **a logisztikai szakirányon tanuló gépészmérnök hallgatóknak sem érdektelen feladat egy-egy ilyen Euler útvonal tervezése**.

Euler utak
A projektötlet leírása

Legyen egy véges irányított Γ gráf csúcsainak halmaza $A = \{1, 2, ..., k\}$ valamint $\alpha : A \times A \to N \cup \{0\}$, ahol $\alpha(i, j) \geq 0$ az i csúcsból a j csúcsba mutató élek számát jelenti (többszörös élek és hurokélek is megengedettek). Jelölje továbbá $\Phi_+(i)$ és $\Phi_-(i)$ rendre az i-edik csúcspontból kiinduló illetve beérkező élek számát valamint $\gamma(i) = \max\{\Phi_+(i), \Phi_-(i)\}$. A γ gráf éleinek egy számozása legyen $e_1, e_2, ..., e_n$, és jelölje egy e él kezdő pontját $\sigma(e)$, végpontját $\tau(e)$, azaz az e él a $\sigma(e)$ csúcsból a $\tau(e)$ csúcsba mutat.

Egy véges összefüggő Γ gráf akkor Euler gráf, ha az alábbi feltételek egyike teljesül:
(a) $\Phi_+(i) = \Phi_-(i)$ minden $i \in A$
(b) van olyan $p, q \in A$, amelyre

$$\Phi_+(p) = 1 + \Phi_-(p) \textit{és } \Phi_-(q) = 1 + \Phi_+(q)$$

$$\textit{különben } \Phi_+(i) = \Phi_-(i) \textit{ minden } i \in A \setminus \{p, q\} \textit{ esetén.}$$

Egy Γ gráf Euler útjának (minden élet egyszeresen lefedő útnak) nevezzük a gráf éleinek egy π permutációját, amelyre $\tau(e_{\pi(r)}) = \sigma(e_{\pi(r+1)})$ minden $1 \leq r \leq n-1$ és $\bigcup_{r=1}^{n} \{\sigma(e_r), \tau(e_r)\} = A$.

A gráfelmélet egy alapvető tétele szerint egy véges irányított gráfnak akkor van Euler útja, ha a gráf maga is Euler gráf. Ha az előbbi feltételek közül (b) teljesül, akkor Euler útról beszélünk, melynek kezdőpontja p, végpontja q. Ha pedig (a) teljesül, akkor Euler körről beszélünk, amely a gráf bármely csúcspontjában kezdődhet. A két esetet együtt is tekinthetjük, csak Euler utak esetén p és q különböznek (páratlan Euler gráf) és Euler körök esetén p egybeesik q-val (páros Euler gráf).

Amennyiben Γ egy Euler gráf (és rögzítettnek tekintjük az előbb említett p és q pontokat), akkor a Γ gráf Euler útjainak halmazát $E(\Gamma)$ jelöli,

$$E(\Gamma) \subset Sym(n)$$

, ahol $Sym(n)$ az élek $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ halmazának permutációit jelöli.
A Γ Euler útjainak $|E(\Gamma)|$ számát a következőképpen számíthatjuk [1]:

$$|E(\Gamma)| = (\Phi_+(q)! \prod_{i \in A \setminus \{q\}} (\Phi_+(i) - 1)!) \det G$$

Ha $p \neq q$, akkor $G = G^*$, ahol $G^* = [g_{ij}]$ az a $k \times k$ típusú mátrix, amelyre
$g_{ij} = \begin{cases} -\alpha(i,j), \ ha \ i \neq j \\ \gamma(i) - \alpha(i,i), \ ha \ i = j \end{cases}$,
ha $p = q$, akkor G egy $(k-1) \times (k-1)$ típusú mátrix az előbbi G^* mátrix főátlóján lévő g_{ii} tetszőlegesen választott elem minormátrixa (a $\det G$ értéke független az i megválasztásától).

1. Példa.
Legyen a Γ gráf csúcspontjainak A halmaza:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

A gráf éleinek számát a következőképpen adjuk meg:

$$\begin{aligned} \alpha(i, i+1) &= \alpha(4,1) = 2 (1 \leq i \leq 3), \\ \alpha(i,5) &= \alpha(5,i) = 1 (1 \leq i \leq 4) \text{ és} \\ \alpha(i,j) &= 0 \ \textit{a többi esetben.} \end{aligned}$$

Tekintve, hogy a gráf minden csúcsára igaz az, hogy a bemenő élek száma és a kimenő élek száma megegyezik, ez egy páros Euler gráf. Az Euler utak számának kiszámításához felírhatjuk a következő 5×5-ös G^* gráfot:

$$G^* = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vegyük a G^*-ban a g_{55} elem G minormátrixát

$$G = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

és számítsuk ki annak determinánsát, $detG = 65$.
A gráf Euler útjainak száma tehát pl. $q = 5$-et választva:

$$|E(\Gamma)| = (4! \, (2!)^4) 65 = 24\,960$$

Összehasonlításul a gráf 16 élének megfelel

$$16! = 20\,922\,789\,888\,000$$

számú lehetséges sorrend, ezek között 24 960 az Euler utak száma, arányuk

$$\frac{16!}{24\,960} = 838\,252\,800$$

2. Példa.
Legyen a Γ gráf csúcspontjainak A halmaza:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

A gráf éleinek számát a következőképpen adjuk meg:

$$\begin{aligned} \alpha(i, i+1) &= \alpha(8, 1) = 2 (1 \leq i \leq 7), \\ \alpha(i, 9) &= \alpha(9, i) = 1 (1 \leq i \leq 8) \ \textit{és} \\ \alpha(i, j) &= 0 \ \textit{a többi esetben}. \end{aligned}$$

Tekintve, hogy a gráf minden csúcsára igaz az, hogy a bemenő élek száma és a kimenő élek száma megegyezik, ez egy páros Euler gráf. Az Euler utak számának kiszámításához felírhatjuk a következő 9×9-es G^* gráfot:

$$G^* = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vegyük a G^*-ban a g_{99} elem G minormátrixát

$$G = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

és számítsuk ki annak determinánsát, $detG = 6305$.
A gráf Euler útjainak száma tehát pl. $q = 9$-et választva:

$$|E(\Gamma)| = (8!\,(2!)^8)6305 = 65\,079\,705\,600$$

Összehasonlításul a gráf 32 élének megfelel

$$32! = 263\,130\,836\,933\,693\,530\,167\,218\,012\,160\,000\,000$$

számú lehetséges sorrend, ezek között „mindössze” 65 079 705 600 Euler út.

Hamilton utak

Projektötlet leírása

Egy adott gráf Hamilton útjának, ha létezik, a gráfnak egy olyan bejárását mondjuk, amely a gráf minden csúcspontján egyszer halad át. Ez a Hamilton út záródó, ha az utolsó csúcsból van él az első csúcsba, és nyitott, ha az utolsó csúcs és az első közt nincs éle a gráfnak.

Tekintsük a $\Gamma : E \to V^2, (V^2 = V \times V, |V| = k \geq 3)$ irányított gráfot, ahol $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ a gráf éleinek halmazát, és $V = \{v_1, v_2, v_3, ...v_k\}$ a gráf pontjainak halmazát jelöli. A gyakorlatban szokás a gráf $e \in E$ élének megfelelő képet $\Gamma(e) = (v_i, v_j)$ helyett a $v_i v_j$ szorzattal jelölni, ez esetben nem kommutatív "szorzatra" gondolunk, tehát $v_i v_j \neq v_j v_i$. Rendeljük hozzá a gráfhoz két mátrixot, a szomszédsági mátrixnak egy olyan H_2-vel jelölt változatát, ahol az éleket a két végpontjuk jellemzi, majd ennek egy részét tartalmazó G mátrixot amivel a Hamilton utakat elő fogjuk állítani. Megjegyzés, ha a módszert irányítatlan gráfokra alkalmazzuk, akkor az alkalmazás érdekében minden élet két oda-vissza irányított élpárral lehet helyettesíteni.

Az egyszerűség kedvéért zárjuk ki a többszörös éleket, és a hurokéleket, bár a végeredmény szempontjából teljesen mindegy, hogy van-e többszörös él, hurokél. Csak abban az esetben kell figyelembe venni a többszörös élek számát, ha meg kell különböztetni két Hamilton utat aszerint, hogy két adott pont között a többszörös élek közül melyiket választjuk.

Ha a gráfban van v_i-ből v_j-be mutató él, akkor az h_{ij} elem a H_2−ben a $v_i v_j$ "nemkommutatív" szorzat, és g_{ij} elem a G-ben v_j, különben H_2 és a G többi eleme 0, tehát

$$H_2 = [h_{ij}]\,, \text{ ahol } h_{ij} = \begin{cases} v_i v_j & \textit{ha} \quad \textit{van él } v_i\textit{-ből } v_j\textit{-be} \\ 0 & \qquad\qquad \textit{különben} \end{cases}, i = 1..k \textit{ és } j = 1..k$$

$$G = [g_{ij}]\,, \text{ ahol } g_{ij} = \begin{cases} v_j & \textit{ha} \quad \textit{van él } v_i\textit{-ből } v_j\textit{-be} \\ 0 & \qquad\qquad \textit{különben} \end{cases}, i = 1..k \textit{ és } j = 1..k$$

A továbbiakban a gráf esetén Hamilton ösvénynek nevezzük bármely Hamilton út részét.

Állítás. *Belátható, hogy a* $H_r = H_{r-1} \cdot G$ *rekurzív összefüggés előállítja a gráf r hosszúságú Hamilton ösvényeit, amennyiben ezt "szorzást" a következő szabályok betartásával végezzük:*

(i) a 0 *és bármely elem szorzata* 0*,*

(ii) a szorzás "nem kommutatív", de a kapott szorzatok "összege" eltérő Hamilton ösvényekként értelmezhető,

(iii) a szorzatra érvényesül a jobboldali disztibutivitás,
(iv) a szorzat 0 *ha két azonos tényezőt tartalmaz.*

Az eljárás alkalmas arra, hogy eldöntse, hogy van-e Hamilton út egy adott gráfban, konstruktív módon meg is adja az összes Hamilton utat, mint pontok rendezett sorozatát, és ennek alapján, a gráf adatai szerint minden esetben eldönthető az, hogy záródó, vagy nyitott-e az adott Hamilton út. Ha a rekurzív úton kiszámított H_k minden elem 0, akkor nincs Hamilton út a gráfban, a nullától különböző elemek egy-egy Hamilton útat jellemző pontsorozatot jelentenek, és végül egy ilyen út záródó, ha van a gráfnak az utolsó pontból az elsőbe mutató éle.

Példa.
Legyenek a következő H_2,és G mátrixok, amelyek az előző leírás szerint egy adott gráfhoz tartoznak, amelynek pontjai x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. (Az adott H_2 mátrix ismerete elegendő ahhoz, hogy a gráfot teljes egészében ismerjük, az x_i pontból az x_j pontba mutató irányított élet ez esetben szokás $x_i x_j$-vel jelölni).

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & x_1x_2 & x_1x_3 & 0 & x_1x_5 \\ 0 & 0 & x_2x_3 & 0 & x_2x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_3x_4 & 0 \\ 0 & x_4x_2 & 0 & 0 & x_4x_5 \\ x_5x_1 & x_5x_2 & x_5x_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & x_2 & x_3 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & x_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & x_1x_5x_2 & x_1x_2x_3 + x_1x_5x_3 & x_1x_3x_4 & x_1x_2x_5 \\ x_2x_5x_1 & 0 & x_2x_5x_3 & x_2x_3x_4 & 0 \\ 0 & x_3x_4x_2 & 0 & 0 & x_3x_4x_5 \\ x_4x_5x_1 & x_4x_5x_2 & x_4x_2x_3 + x_4x_5x_3 & 0 & x_4x_2x_5 \\ 0 & x_5x_1x_2 & x_5x_1x_3 + x_5x_2x_3 & x_5x_3x_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0 & x_1x_3x_4x_2 & \begin{matrix} x_1x_5x_2x_3+ \\ x_1x_2x_5x_3 \end{matrix} & \begin{matrix} x_1x_2x_3x_4+ \\ x_1x_5x_3x_4 \end{matrix} & x_1x_3x_4x_5 \\ 0 & 0 & x_2x_5x_1x_3 & x_2x_5x_3x_4 & x_2x_3x_4x_5 \\ x_3x_4x_5x_1 & x_3x_4x_5x_2 & 0 & 0 & x_3x_4x_2x_5 \\ x_4x_2x_5x_1 & x_4x_5x_1x_2 & \begin{matrix} x_4x_5x_1x_3+ \\ x_4x_5x_2x_3+ \\ x_4x_2x_5x_3 \end{matrix} & 0 & 0 \\ 0 & x_5x_3x_4x_2 & x_5x_1x_2x_3 & \begin{matrix} x_5x_1x_3x_4+ \\ x_5x_2x_3x_4 \end{matrix} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & \begin{matrix} x_1x_5x_3x_4x_2 \\ + \\ x_1x_3x_4x_5x_2 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} x_1x_5x_2x_3x_4 \\ + \\ x_1x_2x_5x_3x_4 \end{matrix} & \begin{matrix} x_1x_3x_4x_2x_5 \\ + \\ x_1x_2x_3x_4x_5 \end{matrix} \\
x_2x_3x_4x_5x_1 & 0 & 0 & x_2x_5x_1x_3x_4 & 0 \\
x_3x_4x_2x_5x_1 & x_3x_4x_5x_1x_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \begin{matrix} x_4x_2x_5x_1x_3 \\ + \\ x_4x_5x_1x_2x_3 \end{matrix} & 0 & 0 \\
0 & x_5x_1x_3x_4x_2 & 0 & x_5x_1x_2x_3x_4 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & \begin{matrix} x_1x_5x_3x_4x_2 \\ + \\ x_1x_3x_4x_5x_2 \end{matrix} & 0 & \begin{matrix} x_1x_5x_2x_3x_4 \\ + \\ x_1x_2x_5x_3x_4 \end{matrix} & \begin{matrix} \overleftarrow{x_1x_3x_4x_2x_5} \\ + \\ \overleftarrow{x_1x_2x_3x_4x_5} \end{matrix} \\
\overleftarrow{x_2x_3x_4x_5x_1} & 0 & 0 & \overleftarrow{x_2x_5x_1x_3x_4} & 0 \\
\overleftarrow{x_3x_4x_2x_5x_1} & \overleftarrow{x_3x_4x_5x_1x_2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \begin{matrix} \overleftarrow{x_4x_2x_5x_1x_3} \\ + \\ \overleftarrow{x_4x_5x_1x_2x_3} \end{matrix} & 0 & 0 \\
0 & \overleftarrow{x_5x_1x_3x_4x_2} & 0 & \overleftarrow{x_5x_1x_2x_3x_4} & 0
\end{bmatrix}$$

Megállapíthatjuk, hogy az adott gráfnak pl. $x_1x_5x_3x_4x_2$ egy nem záródó (nyílt) Hamilton útja, ugyanakkor $\overleftarrow{x_5x_1x_3x_4x_2}$ záródó Hamilton út (ezt jelöltük a fölé írt nyíllal).

IX. Az inverz félcsoportokról

A projektötlet célja. A műszaki egyetemek oktatásában nem közvetlen feladat az algebrai struktúrák oktatása. Mégis a hallgató találkozik olyan fogalommal, mint az inverz létezése, lásd mátrixok, vagy függvények inverze. Az inverz elem fogalmának a bevezetésére többnyire a semleges elem létezése mellett, azt követően kerül sor. A projektben kihasználható az inverz fogalmának az általánosabb értelmezése, és egy ilyen értelmezés logikus továbbgondolása. A módszer arra is alkalmas, hogy a hallgató figyelmét magára az inverz keresésére irányítsa, annak tulajdonságainak ismeretében.

Ugyanakkor a projektötlet a matematikai egy olyan fejezetére példa, aminek az műszaki matematikaoktatásba is lehet szerepe, gondoljunk a parciális transzformációk invertálhatóságára.

A projektötlet leírása

A csoport fogalmának a bevezetésekor megismerkedünk a félcsoport és a monoid fogalmával is.

Ha egy $G \times G \to G$ művelet asszociatív, azaz:

$$(\forall)a, b, c : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

(a művelet jele "$\cdot$"), akkor $(G, \cdot)$ félcsoportot alkot.

Amennyiben a félcsoportban semleges elem is létezik, azaz:

$(\exists)e \in G$ úgy, hogy

$$(\forall)x \in G : x \cdot e = e \cdot x = x,$$

akkor $(G, \cdot)$ monoid.

Egy olyan monoidot, amelyben minden elemnek létezik szimmetrikusa, azaz $(\forall)x \in G, (\exists)x^{-1}$, amelyre: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$, csoportnak nevezzük.

Ebben a sorrendben logikusnak látszik, hogy a szimmetrikus elem fogalmát csak a semleges elem fogalma után vezetjük be. Mégis kimutatható, hogy a szimmetrikus elem fogalma bevezethető a semleges elem létezésétől függetlenül [44].

Meghatározás. *Egy olyan $(G, \cdot)$ félcsoportot, amelyben teljesül a következő két feltétel:*

(i) $(\forall)a \in G, (\exists)b \in G : a \cdot b \cdot a = a$ és $b \cdot a \cdot b = b$,

(ii) a G idempotens elemei egymásközt felcserélhetők, (egy a elemet idempotensnek nevezünk, ha $a^2 = a$) inverz félcsoportnak nevezünk.

A továbbiakban kiderül, hogy az ily módon meghatározott elem az inverz elem tulajdonságai közül nagyon sokat teljesít, tehát jogos az elnevezése [2].

1. Tulajdonság. *Ha a és b egy G inverz félcsoport olyan elemei, melyre:*

$$a \cdot b \cdot a = a$$

és

$$b \cdot a \cdot b = b,$$

akkor $a \cdot b$ és $b \cdot a$ idempotens elemek.

Bizonyítás:

$$(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b \cdot a) \cdot b = a \cdot b$$

és

$$(b \cdot a) \cdot (b \cdot a) = (b \cdot a \cdot b) \cdot a = b \cdot a.$$

Jelölés.

Egy G inverz félcsoport idempotens elemeinek halmazát E_G-vel jelöljük.

2. Tulajdonság. *Ha $(G, \cdot)$ egy inverz félcsoport, akkor a meghatározás (i) feltétele alapján minden elemhez rendelt b egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás:

Legyen $a \in G$ egy tetszőleges elem és legyen b és c két olyan eleme G-nek, amelyre teljesül:

$$a \cdot b \cdot a = a \quad \text{és} \quad b \cdot a \cdot b = b,$$

valamint

$$a \cdot c \cdot a = a \quad \text{és} \quad c \cdot a \cdot c = c.$$

Akkor az 1. Tulajdonság alapján $a \cdot b$, $b \cdot a$, $a \cdot c$, $c \cdot a$ idempotens elemek, tehát az (ii) feltétel alapján felcserélhetők egymás között. Így tehát:

$$\begin{aligned} a \cdot c &= (a \cdot b \cdot a) \cdot c = (a \cdot b) \cdot (a \cdot c) = \\ (a \cdot c) \cdot (a \cdot b) &= (a \cdot c \cdot a) \cdot b = a \cdot b \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} b \cdot a &= b \cdot (a \cdot c \cdot a) = (b \cdot a) \cdot (c \cdot a) = \\ (c \cdot a) \cdot (b \cdot a) &= c \cdot (a \cdot b \cdot a) = c \cdot a \end{aligned}$$

vagyis

$$a \cdot c = a \cdot b \quad \text{és} \quad b \cdot a = c \cdot a$$

ezután az elsőt balról c-vel, a másodikat jobbról b-vel megszorozva:

$$c \cdot a \cdot c = c \cdot a \cdot b \quad \text{és} \quad b \cdot a \cdot b = c \cdot a \cdot b,$$

tehát

$$c \cdot a \cdot c = b \cdot a \cdot b, \quad \text{vagyis} \quad c = c \cdot a \cdot c = b \cdot a \cdot b = b$$

és így $c = b$.

Tehát az inverz félcsoport bármely eleméhez egyértelműen hozzárendelhetünk egy **"inverz elemet"**, jelöljük a^{-1}-nel.

3. Tulajdonság. *Egy inverz félcsoportban $a^3 = a$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $a^{-1} = a$.*

Bizonyítás:

Ha

$$a^3 = a \cdot a \cdot a = a$$

akkor a teljesíti a meghatározás (i) feltételét, tehát

$$a^{-1} = a.$$

Fordítva, ha

$$a^{-1} = a,$$

akkor az (i) feltétel alapján $a = a \cdot a^{-1} \cdot a = a \cdot a \cdot a = a^3$.

4. Tulajdonság. *Egy inverz félcsoport bármely idempotens eleme önmagának inverze.*

Bizonyítás:

Ha $e \in E_G$ akkor

$$e^3 = e \cdot e \cdot e = (e \cdot e) \cdot e = e \cdot e = e$$

tehát a 4. tulajdonság alapján

$$e^{-1} = e.$$

5. Tulajdonság. *Egy G inverz félcsoportban, bármely a elemre:*

$$(a^{-1})^{-1} = a.$$

Bizonyítás:

Azonnal belátható az inverz elem egyértelműsége, valamint az (i) feltétel szimmetriája alapján.

6. Tulajdonság. *Ha G egy inverz félcsoport, akkor egy szorzat inverze egyenlő az inverzek fordított sorrendű szorzatával.*

Bizonyítás:

Igazolnunk kell, hogy

$$(\forall) a, b \in G \in: (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}.$$

Ellenőriznünk kell, hogy az ily módon adott $b^{-1} \cdot a^{-1}$ teljesíti-e az adott (i) és (ii) feltételeket?

$$\begin{aligned}
(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) \cdot (a \cdot b) &= \\
a \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot b &= \\
a \cdot (a^{-1} \cdot a) \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot b &= \\
a \cdot a^{-1} \cdot a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot b &= a \cdot b
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}(b^{-1}\cdot a^{-1})\cdot(a\cdot b)\cdot(b^{-1}\cdot a^{-1}) &=\\ b^{-1}\cdot(a^{-1}\cdot a)\cdot(b\cdot b^{-1})\cdot a^{-1} &=\\ b^{-1}\cdot(b\cdot b^{-1})\cdot(a^{-1}\cdot a)\cdot a^{-1} &=\\ (b^{-1}\cdot b\cdot b^{-1})\cdot(a^{-1}\cdot a\cdot a^{-1}) &= b^{-1}\cdot a^{-1}.\end{aligned}$$

Tehát $b^{-1}\cdot a^{-1}$ teljesíti az (i) feltételeket, és így az a·b inverze, vagyis:

$$(a\cdot b)^{-1}=b^{-1}\cdot a^{-1}.$$

7. Tulajdonság. *Egy G inverz félcsoport bármely két idempotens elemének a szorzata is idempotens, vagyis:*

$$(\forall)e,f\in E_G\Longrightarrow e\cdot f\in E_G.$$

Bizonyítás:

Legyen e és f két tetszőleges idempotens elem a G inverz félcsoportnak, számítsuk ki az $(e\cdot f)\cdot(e\cdot f)$-et:

$$(e\cdot f)\cdot(e\cdot f)=e\cdot(f\cdot e)\cdot f=e\cdot e\cdot f\cdot f=(e\cdot e)\cdot(f\cdot f)=e\cdot f$$

tehát $e\cdot f$ szintén idempotens, vagyis $e\cdot f\in E_G$.

Következmény.

Egy G inverz félcsoport idempotens elemeinek halmaza, E_G stabil részhalmaz a műveletre nézve, tehát $(E_G,\cdot)$ rész-inverz félcsoportja G-nek.

8. Tulajdonság. *Egy G inverz félcsoport akkor és csakis akkor csoport, ha az idempotenseinek halmaza egyelemű, vagyis $E=\{e\}$.*

Bizonyítás:

Ha $E_G=\{e\}$, akkor bármely $a\in G$ esetén $a\cdot a^{-1}$ idempotens, vagyis $a\cdot a^{-1}=e$, hasonlóan $a^{-1}\cdot a=e$, tehát létezik egy semleges elem is, továbbá minden elemnek egy és csak egy inverze létezik, tehát G csoport.

Fordítva nyilvánvaló, mert minden csoportban egyetlen semleges elem létezik.

Érdekes megjegyezni, hogy az inverz félcsoportokra egyik legegyszerűbb példát úgy kaphatjuk, hogy egy adott H halmaz esetén tekintjük az $f:A\to H$ injektív részleképzések $F(H)$ halmazát, ahol az $A\subseteq H$. Az $F(H)$ a függvény összetételre nézve szimmetrikus inverz félcsoportnak nevezett inverz félcsoportot képez. A Preston-Clifford tétel szerint bármely H inverz félcsoport részinverz félcsoportja az $F(H)$ szimmetrikus inverz félcsoportnak, azaz beágyazható a H felett képezett szimmetrikus inverz félcsoportba. Ennek a tételnek az egyik legfontosabb következménye az, hogy tetszőleges S szimmetrikus inverz félcsoporton rendezés értelmezhető [3].

Definíció.

Az S szimmetrikus inverz félcsoportban $x\leq y$ pontosan akkor, ha az alábbi hat ekvivalens feltétel egyike teljesül:

(α) $xy^{-1}=xx^{-1}$

(β) $x^{-1}y = x^{-1}x$
(γ) $yx^{-1} = xx^{-1}$
(δ) $y^{-1}x = x^{-1}x$
(ε) $xy^{-1}x = x$
(ζ) $x^{-1}yx^{-1} = x^{-1}$

A kisdolgozat elmélyítéseként tanulmányozhatjuk a rendezés néhány egyszerű tulajdonságát is [25].

X. A mátrixok alkalmazása a komplex számok és a kvaterniók modellezésére

A komplex számok bevezetésekor az összeadás és a szorzás definíciója az algebrai alak segítségével könnyen megoldható, ugyanakkor gyakran felmerül az igény arra, hogy a sík pontjai és a komplex számok halmaza között kapcsolatot teremtsünk. Jól ismert tény, hogy ha a síkon rögzítünk egy XOY koordinátarendszert, és az $a+bi$ komplex számot azonosítjuk a sík (a,b) pontjával, akkor a sík pontjainak, illetve az elempároknak az

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

és

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+c)$$

egyenlőségekkel definiálható az összeadása és a szorzása.

E műveletekre nézve a sík pontjai testet alkotnak. Az OX koordinátatengelyen ezek a műveletek a valós számokon definiált összeadást és a szorzást indukálják, tehát a sík pontjain definiált műveleteket úgy is lehet tekinteni, mint az OX tengelyen definiált műveletek kiterjesztését.

A komplex számokkal végzett műveleteket egy jól ismert módon a 2×2-es mátrixokkal is leírhatjuk. Valóban, ha az $a+bi$-t, vagy a (a,b) pontot az

$$a+bi\mapsto\begin{bmatrix} a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$$

mátrix-szal azonosítjuk, akkor a szokásos mátrix műveletek pontosan tükrözik a komplex számokon végzett műveleteket, azaz a $(\mathbf{C},+,\cdot)$ és a $(M_2,+,\cdot)$ halmazok között izomorfizmus létesíthető, ahol

$$M_2=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ -b & a\end{bmatrix}\middle|\, a,b\in R\right\}.$$

Valóban, az $a+bi\mapsto\begin{bmatrix} a & b\\ -b & a\end{bmatrix}$ hozzárendelés bijektív leképezés és művelettartó, hiszen

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$

valamint

$$\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2\\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2\\ -b_2 & a_2\end{bmatrix}$$

tehát

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)\mapsto\begin{bmatrix} a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2\\ -b_2 & a_2\end{bmatrix},$$

és hasonlóan igaz, hogy

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) \mapsto \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

mert

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i)$$

$$(a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i) \mapsto \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ -(a_1b_2 + a_2b_1) & a_1a_2 - b_1b_2 \end{bmatrix},$$

és valóban

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ -b_1a_2 - a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix}.$$

Tehát az $a + bi \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ műveletettartó leképzés. Az, hogy a leképzés bijektív egyszerű gyakorlatként belátható.

Injektív, mert egyenlő képekhez egyenlő őselem tartozik, ha

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

akkor $a_1 = a_2$ és $b_1 = b_2$, tehát $a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$.

Szürjektív, mert minden M_2-beli $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ mátrix képe egy komplex számnak, pl az $a + bi$ -nek.

Azt is mondhatjuk, hogy M_2-beli mátrixok modellezik a komplex számokat.

Legyen OXYZ a térben kiválasztott koordinátarendszer. Felmerül a kérdés, nem lehet-e olyan műveleteket definiálni a háromdimenziós tér pontjain, hogy ezek a műveletek az XOY és XOZ koordinátasíkokon a komplex számok műveleteit indukálják, azaz a tér pontjain a műveletek az XOY és XOZ síkokon definiált műveletek kiterjesztései legyenek. Az alábbiakban belátjuk, hogy ez lehetetlen [78].

Tegyük fel, hogy az összeadásnak és szorzásnak van ilyen kiterjesztése. Jelöljük $a + bi + cj$-vel a tér azon pontját, amelynek (a, b, c) a koordinátái. Ekkor e műveletek az $a + bi$ pontokon, továbbá az $a + cj$ pontokon egybeesnének a komplex számokon definiált műveletekkel. Legyen továbbá az i és j pontok szorzata

$$ij = a_1 + b_1i + c_1j.$$

Ha ezt az egyenlőséget beszorozzuk balról i-vel, akkor az asszociativitás alapján

$$-j = i(ij) = i(a_1 + b_1i + c_1j) = a_1i - b_1 + c_1ij =$$

$$= a_1 i - b_1 + c_1(a_1 + b_1 i + c_1 j) = (c_1 a_1 - b_1) + (a_1 + c_1 b_1)i + c_1^2 j.$$

Az egyenlőség következménye az, hogy $c_1^2 = -1$, ami ellentmondás a valós számtestben.

Legyen OXYZK a négydimenziós térben kiválasztott koordinátarendszer. W. Hamilton 1843-ban fedezte fel, hogy lehet olyan összeadást és szorzást értelmezni a négydimenziós tér pontjain, melyek az XOY, XOZ, illetve XOK koordinátasíkokra a komplex számokon definiált összeadást és szorzást indukálják. Ez volt az első példa nem kommutatív gyűrűre, ami nagy hatást gyakorolt a matematika és fizika fejlődésére.

Ezt a gyűrűt **Hamilton-kvaternió ferdetestnek**, elemeit kvaternióknak nevezzük, és e ferdetestet H-val jelöljük.

Legyen $1, i, j, k$ a H vektortér bázisa. H-ban a báziselemek szorzása a következőképpen van megadva:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j.$$

E relációk alapján definiáljuk két elem szorzatát a következőképpen:

$$(a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk) =$$

$$\begin{aligned} &(ae - bf - cg - dh) + (af + be + ch - dg)i + \\ &+(ag + ce - bh + df)j + (ah + de + bg - cf)k. \end{aligned}$$

Így H asszociatív gyűrű lesz [78], és $1 + 0i + 0j + 0k$ a gyűrű egységeleme, amelyet 1-gyel jelölünk. A szorzat definíciója alapján látható, hogy ha $a + b + c + d \neq 0$, akkor az $x = a + bi + cj + dk$ kvaterniónak van inverze, azaz egység, mivel

$$x^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Hasonlóan, mint a komplex számok esetén az $\overline{x} = a - bi - cj - dk$ kvaterniót az $x = a + bi + cj + dk$ konjugáltjának nevezzük. E fogalom jelentősége abban áll, hogy egy kvaterniónak és konjugáltjának az összege is és a szorzata is mindig valós szám.

A komplex számokhoz hasonlóan a Hamilton-kvaternókkal végzett műveleteket is modellezhetjük a mátrixokkal [11]. Tekintsük az

$$a + bi + cj + dk \mapsto \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

bijekciót a $(H, +, \cdot)$ és $(M_4, +, \cdot)$ között, ahol

$$M_4 = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{array} \right] \middle| \, a,b,c,d \in R \right\}.$$

Az adott leképezés bijekció és műveletartó. Valóban, azonnal belátható, hogy a hozzárendelés szürjektív és injektív, valamint az, hogy a kvaterniók összegének képe a képmátrixok összege.

Az alábbi rövid számítással a szorzásra is igazolható, hogy a kvaterniók szorzatának képe is a képmátrixok szorzatával egyenlő.

Ehhez vegyük az $a+bi+cj+dk$ és az $e+fi+gj+hk$ kvaternióknak rendre megfelelő:

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{array} \right] \text{ és a } B = \left[\begin{array}{cccc} e & f & g & h \\ -f & e & -h & g \\ -g & h & e & -f \\ -h & -g & f & e \end{array} \right] \text{ mátrixokat.}$$

Az adott mátrixok AB szorzata a következő:

$$\left[\begin{array}{cccc} ae-bf-cg-dh & af+be+ch-dg & ag-bh+ce+df & ah+bg-cf+de \\ -be-af+dg-ch & ae-bf-cg-dh & -bg-ah-de+cf & ag-bh+ce+df \\ -ce-df-ag+bh & ah+bg-cf+de & ae-bf-cg-dh & -be-af+dg-ch \\ -bg-ah-de+cf & -ce-df-ag+bh & af+be+ch-dg & ae-bf-cg-dh \end{array} \right]$$

azaz az adott kvaterniók

$$(a+bi+cj+dk)(e+fi+gj+hk)$$

szorzatának, az

$$\begin{gathered} (ae-bf-cg-dh)+(af+be+ch-dg)i+ \\ +(ag+ce-bh+df)j+(ah+de+bg-cf)k \end{gathered}$$

kvaterniónak a képe.

A mátrixokkal történő modellezés mind a komplex számok, mind a kvaterniók esetén további előnyt jelent, hiszen az adott testekben az elemek inverzének a képe a modellezés (megfeleltetés) során az adott elem képének mátrix inverze.

Valóban, az $a+bi$ komplex szám képének, az $\left[\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right]$ mátrixnak az inverze az $\frac{1}{a^2+b^2} \left[\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array} \right]$, azaz az $a+bi$ komplex szám inverzének, az $\frac{1}{a^2+b^2}(a-bi)$ komplex számnak a képe.

Hasonlóan az $a+bi+cj+dk$ kvaternió képének, az

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{array} \right]$$

mátrixnak az inverze az

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} & -\frac{b}{a^2+b^2+c^2+d^2} & -\frac{c}{a^2+b^2+c^2+d^2} & -\frac{d}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2+c^2+d^2} & \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} & \frac{d}{a^2+b^2+c^2+d^2} & -\frac{c}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{c}{a^2+b^2+c^2+d^2} & -\frac{d}{a^2+b^2+c^2+d^2} & \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} & \frac{b}{a^2+b^2+c^2+d^2} \\ \frac{d}{a^2+b^2+c^2+d^2} & \frac{c}{a^2+b^2+c^2+d^2} & -\frac{b}{a^2+b^2+c^2+d^2} & \frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} \end{bmatrix},$$

azaz a $x=a+bi+cj+dk$ kvaternió inverzének, az

$$x^{-1}=\frac{a-bi-cj-dk}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

kvaterniónak a képe.

Az is könnyebben érthetővé válik a hallgatók számára, hogy bár az M_2-ben a szorzás kommutatív, az M_4-ben már nem az és így még jobban megértik, hogy a komplex számok kommutatív testet és a Hamilton kvaterniók ferdetestet képeznek az összeadás és szorzás műveletére.

Valóban

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & a_1b_2+a_2b_1 \\ -b_1a_2-a_1b_2 & -b_1b_2+a_1a_2 \end{bmatrix}$$

és

$$\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & a_1b_2+a_2b_1 \\ -b_1a_2-a_1b_2 & -b_1b_2+a_1a_2 \end{bmatrix},$$

tehát az ilyen típusú 2×2-es négyzetes mátrixok szorzása kommutatív (a valós számok szorzásának a kommutativitása következtében), ugyanakkor a kvaterniók esetén elegendő egy ellenpéldát adnunk annak az igazolására, hogy a kvaterniók szorzatában a tényezők sorrendje nem mindig cserélhető fel.

Ellenpélda.

$$\text{Legyen } A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{és a } B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

és látható, hogy $A \cdot B \neq B \cdot A$, tehát az $1+i$ kvaternió és a $j+k$ kvaterniók szorzata nem cserélhető fel

$$(1+i)(j+k) \neq (j+k)(1+i)$$

Ha ugyanezt a kvaternió szorzat alapján ellenőrizzük, akkor az eredmény a "formális algebrai" számításban váratlan:

$$(1+i)(j+k) \neq (j+k)(1+i)$$

hiszen
$(1+i)(j+k) =$
$= (0-0-0-0) + (0+0+0-0)i + (1+0-1+0)j + (1+0+1-0)k =$
$= 0 + 2k$
és
$(j+k)(1+i) =$
$= (0-0-0-0) + (0+0+0-0)i + (0+1-0+1)j + (0+1+0-1)k =$
$= 0 + 2j$

Megjegyzés.

A kvaterniók további tulajdonságainak tanulmányozását jelentősen megkönnyíti ez a mátrix modell [8].

A komplex számok konjugáltjához hasonlóan a kvaternióknak is bevezethető a konjugáltja, az

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

konjugáltja az

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

A konjugált kvaterniók, illetve mátrix képeik, tulajdonságait tanulmányozva belátható, hogy $\overline{\overline{A}} = A$, $\left(\overline{A}\right)^{-1} = \overline{A^{-1}}$, $A + \overline{A}$ és $A \cdot \overline{A}$ valósak, tehát a komplex számok egy sor tulajdonsága "öröklődik" , de $\overline{A \cdot B} = \overline{B} \cdot \overline{A}$.

Hivatkozások

[1] Körtesi P.; Szigeti J.: *On permanental polynomial identities over matrix rings*, Communications in Algebra vol. 22, No.1., (1994), 159-171

[2] Körtesi P.: *About some separation axioms in semitopological inverse semigroups*, Richerche di Matematica, vol. 45 (1995), 1, 11-17

[3] Körtesi P.: *Some separation axioms in topological inverse semigroups*, Topology Proceedings, vol. 22. -the Proceedings of the 12ths Summer Conference on General Topology and its Applications, 1997, North Bay, Canada.201-210

[4] Körtesi P.; Szigeti J.: *The adjacency matrix of a directed graph over the Grassmann algebra*, in: Huynh,D.V.(ed) et all., Algebra and its Applications, Proceedings of the international conference Athens, Ohio,USA, March 25-28., 1999, Providence, AMS Contemporary Mathematics 259., 319-321.

[5] Körtesi P.: *Some Applications of Integral Sums*, Creative Mathematics, (**12**) 2003, NUBM, 1-5.

[6] Körtesi P., Radeleczki S., Szilágyi Sz.: *An application of partial orders*, International Conference on Computer Science, MicroCAD, Miskolc University, March 2004, 65-69.

[7] Körtesi P., Radeleczki S., Szilágyi Sz.: *Congruences and isotone maps on partially ordered sets*, Mathematica Pannonica, **16**/1 (2005), 39-55.

[8] Körtesi P.: *Modelling Quaternions*, Creative Mathematics, közlés alatt **(14)** 2005, NUBM.

[9] Körtesi P., Szigeti J.: An elementary approach of the Fitting lemma, benyújtva Mathematica, London.

[10] Körtesi P.: *Parabola order 3 revisited*, Creative Mathematics, NUBM., közlésre elfogadva

[11] Körtesi P.: *Matrix representation of quaternions*, Octogon, közlésre elfogadva

MÁS HIVATKOZÁSOK SAJÁT EREDMÉNYEKRE DOLGOZATOK, ELŐADÁSOK, KIVONATOK, KÖTETEK

[12] Körtesi, P.: *Separation axioms in semitopological and topological inverse semigroups*, Publ. Univ. Miskolc, vol. 35., (1994), 109-118.

[13] Körtesi P.: *MacTutor in teaching Geometry*, Proceedings of the Special SEFI European Seminar on Geometry in Engineering Education, 1997 Smolenice, Slovak Republic, 103-104.

[14] Körtesi, P.: *Counter-examples in Teaching Mathematics*, Proceedings of the 9-th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, 15-17 June, 1998, Espoo, Finland, 75-79.

[15] Körtesi, P.: Using Geometer's Sketchpad in Teaching, Proceedings of MicroCAD'2000, International Computer Science Conference, February 23-24, 2000, Miskolc, Section I: Information Technology and Information Engineering, 97-101.

[16] Körtesi P.: *Project Work using Mathematical MacTutor*, Unique and Excellent, Ingenieurausbildung im 21.Jahrhundert, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpedagogik 2000", Leuchtturm Verlag, Biel, 2000., 735-738.

[17] Körtesi, P.: *Active Methods in Teaching Mathematics*, Abstracts of the 11-th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, 9-12 June, 2002, Chalmers, Gothenburgh, Sweden, 10-11.

[18] Körtesi, P.: *Teaching Basic Mathematical Notions*, 12-th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, 15-17 June, 2004, Technical University Vienna, Austria.

[19] Körtesi P.: *Self Made Mathematics*, előadás a 10th International Congress on Mathematical Education TSG4 szekciójában, Copenhagen, Denmark, július 4-11, 2004

[20] Körtesi P.: *Constructing Hamiltonian paths in graphs*, meghívott előadás a 6th Junior Mathematical Congress, Stockholm, 2004, június 23-28

[21] Körtesi, P.: *About some separation axioms in semitopological and topological inverse semigroups*, előadás, Colocviul National de Geometrie si Topologie, (1982), Cluj, Románia

[22] Körtesi, P.: *Order separation axioms in semitopological and topological inverse semigroups*, előadás, Colocviul National de Geometrie si Topologie, (1983), Brasov, Románia

[23] Körtesi, P.: *Separation axioms in semitopological groups, előadás*, Colocviul National Geometrie si Topologie, (1984), Cluj, Románia

[24] Körtesi, P.; Gergely, E.: *Bibligraphia Bolyaiana*, előadás, Colocviul National Geometrie si Topologie, (1984), Cluj, Románia

[25] Körtesi, P.: *Some order properties of inverse semigroups*, előadás, Simpozionul de Matematici si Aplicatii, (1985), Timisoara, Románia

[26] Körtesi, P.; Gergely, E: *Language and Mathematics at János Bolya*i, előadás, Simpozionul de Matematici si Aplicatii, (1985), Timisoara, Románia

[27] Körtesi, P.: *A method for the visualisation of space Geometry problems*, előadás, A XVI-a Conferinta National de Geometrie si Topologie, (1985), Calimanesti, Románia

[28] Körtesi, P.: *A theorem on permanental identities over matrix rings*, előadás Lucrarile Simpozionului de Matematica, (1993), Universitatea Petrosani, Románia

[29] Körtesi P.: *Using Mathematical MacTutor at Miskolc University*, előadás, Abstracts of 8-th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education,(1995), Prága,

[30] Körtesi, P.: *Junior Mathematical Congress-96 Miskolc*, Special English edition of KöMaL, 1996, Budapest.

[31] Körtesi, P.: Junior Mathematical Congress' 96 Miskolc - Hungary, Challenge for future mathematicians, plenáris előadás, Abstracts, 2-ndo Simposio Latinoamericano de ICASE, (1997), Mar del Plata, Argentina

[32] Körtesi, P.: *About teaching Elementary Geometry*, poszter, 9-th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, 15-17 June, 1998, Espoo, Finland.

[33] Körtesi, P.: *Individual and distance learning of Mathematics using the Internet*, poszter, 9-th SEFI European Seminar on Mathematics in Engineering Education, 15-17 June, 1998, Espoo, Finland

[34] Körtesi P.: *Mathematical MacTutor in teaching and individual learning*, plenáris előadás, Junior Mathematical Congress' 98 Potsdam, August 17-22, 1998. Germany

[35] Körtesi, P.: *Junior Mathematical Congress - Challenge for Future Mathematicians*, poszter, International Congress of Mathematicians, Berlin, August 18-27, 1998., Abstracts, 360-361.

[36] Körtesi, P.: *Geometer's Sketchpad in Teaching Elementary Geometry*, előadás, Seminar on Computer Geometry, Kocovce, 1998 október 14-16, Szlovákia

[37] Körtesi P.: Junior Mathematical Congress' 96 Miskolc, meghívott előadás a Mathe ist TOP Konferenz, Duisburg, 2000. szepteber 25-27.

[38] Körtesi P.: *Active methods in Teaching and Learning Mathematics*, MicroCAD' 2001 International Scientific Conference, March 1-3, 2001, Miskolc

[39] Körtesi P.: *Aktív módszerek a matematikai oktatásában*, Rátz László Vándorgyűlés Felsőoktatási Szekcióján elhangzott előadás, 2002 július 3-4. Győr

[40] Körtesi P.: *MacTutor Project Teaching*, ICAM 3, 3rd International Conference on Applied Mathematics, October 10-13, 2002, Baia Mare and Borsa, Romania.

[41] Körtesi P.: *Active Methods in Teaching Mathematics* , The 7th Annual Conference of the Romanian Mathematical Society Bistrita, 22-25 May 2003, Romania.

[42] Körtesi, P.: *Axiome de separare in structuri topologice si semitopologice*, Államvizsga dolgozat, Kolozsvár, 1974

[43] Körtesi, P.: *Mátrixgyűrűk polinomazonosságairól*, Doktori értekezés, (1993), KLTE, Debrecen

[44] Körtesi, P.: *Az inverz félcsoportokról*, Matematikai Lapok, Kolozsvár, vol. LXXXVI, No.1. (1981), 17-19.

[45] Körtesi, P.: *A valós együtthatós harmadfokú egyenlet gyökeiről*, Matematikai Lapok, Kolozsvár, vol. LXXXVII, No.5. (1982), 202-204.

[46] Körtesi, P.: *A polinomiális tétel*, Matematikai Lapok, Kolozsvár, vol. LXXXVIII, No.10-11. (1983), 436-438.

[47] Körtesi, P.: *Az egész számok egy tulajdonsága*, Matematikai Lapok, Kolozsvár, vol. XCI, No.8. (1986), 283-288.

[48] Körtesi, P. (szerk): Miskolci Egyetem Matematikai Intézete 50 éve Miskolcon, Jubileumi kötet, Miskolc, 1999, 114p.

[49] Körtesi P. (szerk.): *Proceedings of the 10th Sefi-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering Education*, June 14-16, 2000 Miskolc, 139p.

[50] Körtesi, P.:*Theorems in the Geometry of the Triangle*, Contributed papers: P. Barcsánszky, Sz. Forgó, K.Kristóf, P. Miklós, G. Nagy, N. Nagy, P. Pataky, K. Raffay, Á. Sipos, I. Vitéz, Junior Mathematical Society Miskolc, 1998., Miskolc, 43p.

[51] Körtesi, P.(szerk.): *Proceedings of the Junior Mathematical Congress*, July 3-8, 2000 Miskolc, Hungary, University of Miskolc, 125p.

[52] Körtesi P.: *Matematika I., II., III.*- tantárgy tematika a Miskolci Egyetem által felügyelt Akkreditált Iskolarendszerű Felsőfokú Szakképzésben, Miskolci Egyetem, 1996.

[53] Körtesi, P.: *Elemi matematika oktatása* - Matematikatanárok továbbképzése 1., Akkreditált továbbképzési program, T300730-644/1999 alapítási engedély, XXV./2./25./2000 indítási engedély

[54] *Körtesi, P.: Válogatott fejezetek a matematikából*- Matematikatanárok továbbképzése 2., Akkreditált továbbképzési program, T300730-642/1999 alapítási engedély, T302460-1056/1999 indítási engedély

[55] Körtesi, P.: *Valószínűségszámítás és matematikai statisztika* - Matematikatanárok továbbképzése 3. , Akkreditált továbbképzési program, T300730-643/1999 alapítási engedély, T302460-1057/1999 indítási engedély

[56] Körtesi, P.: *Matematikai szoftverek az oktatásban-* Matematikatanárok továbbképzése 4., Akkreditált továbbképzési program, T300730-641/1999 alapítási engedély, T302460-349/1999 indítási engedély, Miskolc Egyetem, 1998

[57] Körtesi P.: *Hungarian MacTutor*, *Mathematical MacTutor* c. oktatási szoftver magyar változata, 1994-96, School of Mathematics and Informatics, University of St- Andrews.

[58] Körtesi, P.: *Ifjúsági Matematikai Kongresszus '96,* Pi matematikai folyóírat, Miskolc, 1996-97/1., 2-4.

[59] Körtesi P. (szerk):*Proceedings of Teaching Mathematics for Engineering Students*, Miskolc, June 2-5. 1999.

[60] Körtesi, P.(szerk.): *Special English Issue* Edited for the Junior Mathematical Congress 2000, Pi matematikai folyóírat különszáma, 2000 Miskolc.

[61] Körtesi, P.: *Tételek a háromszögben,* előadás, Rátz László Matematikatanárok Vándorgyűlése, Miskolc, 2001.

[62] Körtesi P.: A *H 127 CEEPUS hálózat munkája, in:* Disszeminációs Kiadvány, TEMPUS Közalapítvány, CEEPUS Iroda, (megjelenés alatt).

MÁS HIVATKOZÁSOK

[63] 10th SEFI-MWG European Seminar on Mathematics in Engineering, June, 14-16 , 2000, Miskolc,
http://www.uni-miskolc.hu/unidept/gepesz/matematika/sefi-seminar/

[64] *A Kar és Tanszékei tevékenysége*, a Nehézipari Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Karának 40. éves jubileumi tudományos ülésszaka, NME, Miskolc, 123 p.

[65] Ambrus, A.: *Bevezetés a Matematikadidaktikába*, Eötvös Lóránd Tudományegyetem Természettudományi Kar, Egyetemi Jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, 1995

[66] Andrásfai, B.: *Gráfelmélet*, Polygon, Szeged, 1994

[67] Archipova, N.V.; Medvedev, V.E.: *Active Methods in Engineering Pedagogy*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 309-312

[68] Ásványi, J.: *Harmonisation of EU and Hungarian Engineering Standards*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 319-322

[69] Atanasiu, G.: *Discipline Modules - A New Perspective for High Education*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 67-74

[70] Balázs Márton: *Megjegyzések egy egyetemi felvételi vizsgafeladattal kapcsolatban.* Matematikai Lapok, Kolozsvár, 1981/1.

[71] Balázs M.; Kolumbán J.: *Matematikai Analízis*, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1978, 195-198.;324-331.

[72] Barry, M.D.J, Sims Williams, J.H.: *Computer based tests on the WEB*, in [49], 47-52.

[73] Bársony, J.: *Quality of Engineering Education and the Qualification of Professional Engineer*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 75-80

[74] Bencze, M.: *Erdélyi és Nemzetközi Magyar Matematikai Versenyek*, Fulgur Kiadó, Brassó, 2002

[75] Bernard, F.: *Das Curriculare Lernfeldkonzept in Der Dualen Berufsausbildung und Die Arbeit mit Projekten*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 705-70

[76] Bishop, A.J.: *Mathematical Enculturation*, A Cultural Perspective on Mathematics Education, Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988

[77] Blank, A.: *Mathematical Induction* in Enrichment Mathematics for High School, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1963

[78] Bódi, B.: *Algebra, II. rész, A gyűrűelmélet alapjai*, Debreceni Egyetem Kossuth Egyetemi Kiadója, Debrecen, 2000

[79] Borbély S.: *A matematika oktatása a gépészmérnöki karon*, BME Ped. Közl.3.(1966), 30-45.

[80] Bordone, S.F.: *The Internationalization of the Engineering Undergraduates: Actions Taken and New Proposals*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 84-87

[81] Bölcskei, A.: *Constructive Geometry with Computer*, in [59], 15-21

[82] Brito, C.R.; Ciampi, M. ; Molina, R.C.: *Scientific and Technological Initiation Projects in the Consolidation of Engineering Education*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000.,

[83] Bromme, R., Brophy J: *Teachers' CognitiveActivities* in Perspectives on Mathematics Education pp.99-141, Ed. Christiansen, B., Howson, A. G. Otte, M, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986

[84] Brousseau, G.; Davis, R.B.;Werner, T.: *Observing Students at Work* in Perspectives on Mathematics Education pp.205-243, Ed. Christiansen, B., Howson, A. G. Otte, M, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986

[85] Brown, G.; Bull. J.; Pendlebury, M.: *Assessing Student Learning in Higher Education*, Routledge, London, 1997

[86] Burton, L.; Cook, J.; Gallacher, J.; Jordison, R.; and Nickson, M.: *Access to Mathematics for Higher Education*, Report of a project sponsored by BP Glasgow's "Aiming for a College Education" Programme, Birmongham, University of Birmingham, University of Glasgow and Glasgow Polytechnic, 1992

[87] Burton, L.: *Encouraging learning in engineering mathematics*, 11th SEFI MWG European Seminar, Göteborg, Sweden, June 10-13, 2002

[88] Businger, W.; Fässler, A.: The Role of Mathematics in Modern Engineering, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 88-90

[89] Central European Exchange Programme for University Studies - CENTRAL CEEPUS OFFICE:
http://wwwc.oead.ac.at/

[90] Active Methods in Teaching Mathematics, H 0127 CEEPUS Network:
http://www.uni-miskolc.hu/ceepush127/

[91] O'Connor,J.:*MacTutor projects*, School of Mathematics, University of St Andrews, 1994

[92] Mustoe, L.; Lawson, D.(szerk.): *Mathematics for the European Engineer* - a Curriculum for the twenty-first century, Report by the SEFI - Mathematics Working Group, March 2002, SEFI HQ, Brussels, ISBN 2-87352-045-0 http://learn.lboro.ac.uk/mwg/core/latest/sefimarch2002.pdf

[93] Corejová, T.: *Changes of Environment - Changes of Curriculum*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 91-94

[94] Denkinger G. Gyúrkó L.: A*nalízis gyakorlatok*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999, 70-71, 265-267.

[95] Démidovitch M., and all.: *Recueil d' exercices et de problemes d'analyse mathematique,* Mir Moscou, 1968, 159.

[96] Draghicescu and all.: *Ghid de pregatire la matematica*, Scrisul Rominesc, Craiova, 1976, 195-196.

[97] Durst, L. K.: *Fractional Powers of Complex Numbers* in Enrichment Mathematics for High School, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1963

[98] *Engineering Criteria 2000* (1997) 3rd Edition, Accreditation Board for Engineering and Technology, Inc., 111Market Place, Suite 1050 Baltimore, MD21202-4012.

[99] Fábián, E.: *Apáczai Csere János,* Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1975

[100] Fried, E.: *Az oktatásról,* A természet világa, 2003 október, 437-439.

[101] Fine, N.J.: *Generating Functions* in Enrichment Mathematics for High School, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1963

[102] Fichtenholc: Differenciál és integrálszámítás kurzus, II. kötet, Moszkva-Leningrád, 1948, p.627.

[103] Fischbein, E.: *Intuition in Science and Mathematics*, An Educational Approach, Mathematics Education Library, Published by D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987

[104] Freud, R.: *Lineáris Algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, 1996, 1998, 2000

[105] Galántai, A. (szerk): *Matematikai Programkönyvtárak*, Matematikai Szoftverek, Miskolci Egyetem, 1994

[106] Galántai, A. and Jeney A.: *Numerikus módszerek*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1998

[107] Galántai, A.: *Alkalmazott Lineáris Algebra*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1999

[108] Galántai, A.: *Teaching of Numerical Analysis and Optimization*, in [59], 22-28

[109] Galántai A.: *Elsőéves hallgatók felméréséről*, előadás a Rátz László Matematikatanári Vándorgyűlés Felsőoktatási Ankétján, 2001, Miskolc

[110] Gáspár Gyula: *Mátrixszámítás műszaki alkalmazásokkal,* Műszaki Kiadó, Budapest, 1963., 358 p

[111] Gaston, W.: *Konsequenzen der "Bologna Declaration"für die Schweizer Fachhochschulen*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 61-66

[112] Gazda. I.(szerk.): *Egy hallhatatlan erdélyi tudós*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2002

[113] Gavalec, M.; Pirc, V.: *Two-cycle Education of Mathematics for Engineers*, in [49], 103-106

[114] Gibson, Ivan S.: *Project-Based Teaching in Egineering Design*, in , Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 31-38

[115] Giurgiu I., Turtoiu F., : *Culegere de probleme de matematica*, Ed. Didactica si pedagogica, Bucuresti, 1981, 217-219.

[116] Hercog, D.: *A Curriculum Design Methodology*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 115-118

[117] Horváth Jenő, Csereháti Zoltán : *Walek Károly élete és munkássága*, Nyugatmagyarországi Egyetem Erdőmérnöki Kar, Sopron 2000., 22-27.

[118] Hosszú Miklós, Vincze Endre: *Műszaki fogalom - matematikai tükröződés,* Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei, Miskolc, 8, 1962, 223-248.

[119] Hujter, M.: *Use Computers to Teach Optimization methods*, in [49], 80-89

[120] Huszthy, L.: *Műszaki Matematikai Példatár,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1990

[121] Huszthy, L.: *Műszaki Matematikai Példatár 2.,* Miskolci Egyetemi Kiadó, 1992

[122] Huszthy, L.: *Műszaki Matematikai Példák 3.,* Miskolci Egyetem, 1998

[123] Huszthy, L.: *Műszaki Matematikai Példák 4.,* Miskolci Egyetem, 1999

[124] Institute of Mathematics and its Applications (IMA): *Mathematics Matters in Engineering*, Report of a Working Group under the auspices of the Institute of Chemical Engineers, Institute of Civil Engineers, Institute of Electrical Engineers, Institute of Measurement and Control, Institute of Mechanical Engineers, London Mathematical Society and the Institute of Mathematics and its Applications, London, 1995

[125] Ionescu, D. V.: *Complemente de Matematici pentru licee*, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1978

[126] James, G.: *Implication of trends in Education on the Mathematical Content of Engineering Degree Courses*, IMA Conference on the Mathematical Education of Engineers, Loughborough University, 1994

[127] *Journée de Mathématique*, Dédié au Congrés de Mathematiques Junior, Paris, 1992, a Pi matematikai folyóirat különszáma, 1992

[128] Junior Mathematical Congress 2002, July 3-8, Miskolc: http://www.uni-miskolc.hu/unidept/gepesz/matematika/junior/

[129] Karsai, J; Képíró, I.; Rátz, É.: *Computer Labs to Improve the Visual Thinking and Intuition*, in [49], 73-79

[130] Kath, F.: *Das "Arbeiten mit Projekten"führt zu einem Paradimenwechsel*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 730-734

[131] Kemény, J.G.: *Random Walks* in Enrichment Mathematics for High School, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1963

[132] Kiss, B.: *A Matematikai Intézet története,1949-1965*, kéziratban, Miskolci Egyetem Matematikai Intézetének Könyvtárában,

[133] Klincsik, M.; Perjésiné Hámori, I.: Teaching Vectorcalculus via Internet, in [49], 53-61

[134] Komenda, S.; Zapletalova, J.: *Scientific Reasoning, Its Nature and Logic*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 134-139

[135] Lakoma, E.: *Hand held technology in mathematics teaching for future engineers*, in [49], 130-138

[136] Mason. W.H.: *A Complete Engineer*, Prism, Americam Society of Engineering Education, October, 1994

[137] Mathematics Learning Support Centre: http://info.lboro.ac.uk/departments/ma/mlsc

[138] Mathematical MacTutor - History of Mathematics:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/

[139] Mathematician of the Day -MacTutor History of Mathematics:
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Day_files/Now.html

[140] Maurer, I.Gy.; Virág, I.: *A relációelmélet elemei*, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1972

[141] Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000.

[142] Mellin-Olsen, S.: *The Politics of Mathematics Education*, Mathematics Education Library, Published by D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987

[143] Morris, R.; Arora M. S.: *Studies in Mathematics Education - Moving into the twenty-first century*, UNESCO, 1992

[144] Meyer, H.: *Complex Numbers and Quaternions as Matrices* in Enrichment Mathematics for High School, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., 1963

[145] Munkácsy, K.: *A nem matematika szakos felsőfokú oktatás matematika tanterve és a középiskolai matematikatanítás néhány kérdése*, Rátz László Vándorgyűlés Felsőoktatási Szekciója, Győr, 2002

[146] Mustoe, L.: *Should the use of computer algebra software affect the syllabus*, in [59], 1-14

[147] Mustoe, L.: *Assessing Assessment,* in [49], 5-17

[148] Mathematics Working Group of SEFI:
http://www.learn.lboro.ac.uk/mwg/

[149] Nagy, F.: *Bevezetés a DERIVE 2.58 használatába*, Matematikai Szoftverek, Ed. Galántai, A., Miskolci Egyetem, 1994

[150] Nyéki, L.: *Exact Methods in Curriculum Development*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 168-171

[151] *Nulladik évfolyamos oktatás*, Együttműködési megállapodás, 1997/98 tanév, a Széchenyi István Főiskola koordinálásával

[152] Őri, I.; Kiss, G.: *Az Excell programcsomag alkalmazása a valószínűségszámítás és a statisztika tanításában*, in [59], 42-47

[153] Painold, Johann: *Projektarbeit an der HTL BULME, Graz*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 749-752

[154] Perjésiné Hámori, I.: *Az internet és a komputer algebrai rendszerek bevezetése gépészmérnökök matematika oktatásába*, Doktori értekezés tézisei, Debreceni Egyetem, 2003

[155] *Pi matematikai folyóírat különszáma,* 1996-ban a II. Európai Matematikai Kongresszus hivatalos kísérőkonferenciájaként Miskolcon megrendezett Ifjúsági Matematikai Kongresszus' 96 Miskolc c. rendezvény dolgozataival.

[156] *Pi matematikai folyóírat különszáma, 2002-2003*, I-II, a Miskolci Egyetem és középiskolák együttműködése a tehetséggondozásban c. O.M. pályázat keretében. Miskolc, 2003

[157] Pi matematikai folyóírat különszáma - internetes változat, 2002-2003, I-II. http://www.uni-miskolc.hu/~matpi/

[158] *Programozó matematikus szak* - Akkreditácis anyag, Miskolci Egyetem, 1998.

[159] Publications of the University of Miskolc, Series D., Mathematics, volume **39**.,1999.

[160] Rodgers, M.: *Mathematics: Pleasure or Pain?* in Gender and Mathematics, An International Perspective, Edited by Leone Burton, Singapore, 1990

[161] Ruhland, Wernhild and Porzig, Frank: *Ein Projekt zum Erlernen von Projektarbeit*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 753-756

[162] Salánki, J.: *Megemlékezés Dr. Hosszú Miklós professzorról, a matematikai tudományok doktoráról*, Miskolci Egyetem Közleményei, IV. Sorozat, Természettudomány, **27**. kötet, 3. füzet, Miskolc, 1996, 49-97

[163] Sárvári, Cs.: Matematika-oktatás Maple felhasználásával, in [59], 34-41

[164] Sárvári, Cs.: *Syllabus and Coputer Algebraic Systems in Higher Mathematics*, in [49], 107-109

[165] Schwenk, A.: *Intuitive Approach to Theoretical Subjects by Multi-media - an Example with Mathematica*, in [49], 62-66

[166] Société Européenne pour la Formation des Ingénieurs: http://www.ntb.ch/SEFI/Index.html#Index

[167] Sierpinski, W.: *Ce stim si ce nu stim despre numerele prime*, Ed. Stiintifica, Bucuresti, 1966.

[168] Slobodyanyuk, A.A.; Marigodov, V.K.: *Educational System as a Technological Complex of the Engineering Training*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 402-403

[169] Special Curves- MacTutor:
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html

[170] Sutherland, R,; Pozzi, S.: *The changing Mathematical Background of Undergraduate Engineers*, The Engineering Council, London, 1995

[171] Szabó P. G.: *Egy térpakolási feladat a Tentamenben*, in [112], 384-387

[172] Szakály, D.: *Csoportmunka*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1998

[173] Szarka, Z.: *Megemlékezés Dr. Gáspár Gyula professzorról, a matematikai tudományok kandidátusáról*, Miskolci Egyetem Közleményei, IV. Sorozat, Természettudomány, **27**. kötet, 3. füzet, Miskolc, 1996, 31-48

[174] Szarka, Z.: *Klasszikus és lineáris algabra elemei*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1993

[175] Szász Pál: *A differenciál és integrálszámítás elemei*, 1. kötet, Typotex Kiadó, 2000, 132-133.

[176] Szele Tibor: *Bevezetés az algebrába*, 1964, Debrecen.

[177] Ratkó, I.; Szelezsán, J.: *Mathematics Lectures Aided with Computer Projector*, in [49], 67-72

[178] Szilágyi, Sz.: Matematika a természetben, in [127], 29-31

[179] Targamadze, Vilija: *The Assessment of Study Results in Lithuanian Technical Universities*, in Melezinek A.; Ruprecht R. (ed.): *Unique and Excellent - Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert*, Referate des 29. Internationalen Symposiums "Ingenieurpadagogik 2000', Edited by Leuchtturm-Verlag, Biel, 2000., 217-222

[180] Teaching Mathematics for Engineering Students, Matematika Oktatása Mérnökhallgatóknak, June 2-5,1999, Miskolc:
http://www.uni-miskolc.hu/unidept/gepesz/matematika/matokt.html

[181] H. Temesvári, Á.; Vermes, I.: *Fodor László élete és munkássága*, Nyugat-magyarországi Egyetem Erdőmérnöki Kar, Sopron 2000

[182] Terplán, Z.: *Megemlékezés Dr.H.C.Dr.-Ing Borbély Samu akadémikus professzorról*, Miskolci Egyetem Közleményei, IV. Sorozat, Természettudomány, **27**. kötet, 3. füzet, Miskolc, 1996, 5-30

[183] Test and Learn - internet based testing system - http://www.tal.bris.ac.uk

[184] The Engineering Council: *The Standard and Routes to Registration,* SARTOR 3rd Edition, The Engineering Council, London, 1997

[185] *Trophy Room* - External Awards - MacTutor History of Mathematics: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/External/awards.html

[186] Velichova, D.: *Geometry as the Computer Language of Mathematics*, in [59] , 9-15

[187] Vetier, A.: *Probability Laws Visualised by DERIVE*, in [49], 90-92

[188] Weszely T.: Bolyai Farkas pedagógiai nézetei és felfogása a matematika tanításáról in [112],343-348