Lineáris függvényegyenletek megoldási módszerei és t-konvex függvények stabilitása

Solving methods of linear functional equation and stability of t-convex functions

doktori (PhD) értekezés tézisei

Házy Attila

Debreceni Egyetem,
Debrecen, 2004

1 Bevezetés

Az értekezésünk két egymástól jól elválasztható részből áll.
Az első részben a

$$h_0(x,y)f_0(g_0(x,y)) + \ldots + h_n(x,y)f_n(g_n(x,y)) = F(x,y)$$

alakú lineáris, kétváltozós függvényegyenletekkel foglalkozunk. Felhasználva Páles eredményeit kapjuk, hogy létezik egy lineáris parciális differenciál operátor amely "megöl" minden tagot az egyenlet bal oldalában, kivéve az elsőt. Azaz kapunk egy differenciál-függvényegyenlet. A következő fejezetben a kapott differenciál-függvényegyenlettel foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett a kapott egyenlet átalakítható egy közönséges differenciálegyenletté, amelynek a megoldásai megegyeznek a differenciál-függvényegyenlet megoldásaival, és a rendje általában kisebb, mint az eredeti egyenlet rendje

Az értekezés második részében t-konvex függvények stabilitásával foglalkozunk. Az első ilyen típusú vizsgálatok Bernstein és Doetsch nevéhez fűződnek, akik 1913-ban megmutatták, hogy ha egy függvény Jensen-konvex és az értelmezési pontjának valamely pontjában korlátos, akkor konvex. Ezt az eredményt később többen általánosították (Ng és Nikodem 1993-ban, Páles 2000-ben, és Páles és Házy 2004-ben). Az általunk vizsgált függvények teljesítik az

$$f\left(tx + (1-t)y\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i |x-y|^{p_i}, \qquad (x, y \in D)$$

egyenlőtlenséget, ahol $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k) \in [0,\infty[^{k+1}$, $\boldsymbol{p} = (p_0, \ldots, p_k) \in [0,1[^{k+1}$ és $t \in [0,1]$ rögzített paraméterek.

Első lépésként ezen függvények regularitási tulajdonságaival foglalkoztunk. Megmutattuk, hogy ha egy f függvény az értelmezési tartományának egy pontjában lokálisan felülről korlátos és teljesíti az előző egyenlőtlenséget, akkor f lokálisan korlátos D-n. Ha $\boldsymbol{p}$ minden komponense pozitív, akkor kapjuk, hogy az f függvény folytonos.

Majd egy kevésbé általános esettel foglalkoztunk, amikor a hibatag csak két részből állhat. Ebben az esetben jobb eredményeket tudtunk elérni, a kapott konvexitási tulajdonság pontosabb lesz, mint az általános esetben.

Első rész

2 Lineáris függvényegyenletek megoldása számítógéppel

2.1 Lineáris kétváltozós függvényegyenlet redukciója differenciál-függvényegyenletre.

Legyenek adottak a $g_0, \dots, g_n, h_0, \dots, h_n, F \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ függvények úgy, hogy $\Omega_i = g_i(\Omega)$ nyílt minden $i = 0, \dots, n$-re, és $f_0 \in \mathcal{C}^k(\Omega_0), \dots, f_n \in \mathcal{C}^k(\Omega_n)$ ismeretlen függvények. Ebben a részben a

$$h_0(x,y)f_0(g_0(x,y)) + \cdots + h_n(x,y)f_n(g_n(x,y)) = F(x,y) \tag{2.1}$$

függvényegyenlettel foglalkozunk.

Páles Zsolt [Pál92]-ben megmutatta, hogy elegendően magas rendbeli differenciálhatóságot feltételezve létezik egy lineáris parciális differenciál operátor (változó együtthatókkal és k kisebb, mint $2n-1$ renddel) amely "megöl" minden tagot az egyenlet bal oldalában, kivéve az elsőt. Azaz a függvényegyenletből kapunk egy k-ad rendű lineáris differenciál-függvényegyenlet. Megmutatta továbbá, hogy a differenciálegyenlet együtthatói meghatározhatóak az adott g_i, h_i, F függvények ismeretében.

2.2 A differenciál-függvényegyenlet megoldása

Alkalmazva az előző fejezetben leírt eljárást a (2.1) típusú függvényegyenletekre egy inhomogén, lineáris differenciál-függvényegyenletet kapunk az f ismeretlen függvényre a következő alakban:

$$l_k(x,y)f^{(k)}(g(x,y)) + \ldots + l_0(x,y)f(g(x,y)) = L(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{2.2}$$

ahol $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ egy nyílt, összefüggő halmaz, $l_0, l_1, \dots, l_k, g, L$ adott valós függvények Ω-n és $g(\Omega)$ nyílt halmaz, továbbá $f : g(\Omega) \to \mathbb{R}$ egy k-szor differenciálható ismeretlen függvény.

A rövidség kedvéért (2.2)-t az alábbi alakban használjuk a továbbiakban:

$$l_k \cdot (f^{(k)} \circ g) + \ldots + l_0 \cdot (f \circ g) = L. \tag{2.3}$$

Az egyenletet *homogén*nak nevezzük, ha $L = 0$. Az egyenletet *k-ad rendű differenciál-függvényegyenlet*nek nevezzük, ha $l_k \neq 0$.

A megoldási módszer a következő: Tekintsünk egy k-ad rendű lineáris inhomogén differenciál-függvényegyenletet. Az *első lépés*ben konstruálunk egy újabb differenciál-függvényegyenletet, amelynek a rendje nem nagyobb, mint az eredeti egyenleté és a kapott egyenletrendszer megoldása megegyezik az eredeti egyenlet megoldásával. A *második lépés*ben pedig a kapott egyenletrendszerből előállítunk egy kisebb rendű differenciál-függvényegyenletet, amelynek a megoldása megegyezik az egyenletrendszer megoldásával. A kapott egyenletre pedig ismételjük az előző két lépést mindaddig, amíg a legutoljára kapott egyenlet együtthatói ki nem elégítenek egy parciális differenciálegyenlet-rendszert. Végül a $t = g(x, y)$ helyettesítéssel kapunk egy közönséges differenciálegyenletet.

A következő lemma garantálja, hogy mindig elő tudunk állítani egy differenciál-függvényegyenletet úgy, hogy az egyenlet rendje ne növekedjen.

1. LEMMA. ([Ház04b]) *Legyen $l_0, l_1, \ldots, l_k, g$ és L adott valós értékű differenciálható függvény Ω-n (úgy, hogy $g(\Omega)$ nyílt halmaz), továbbá legyen f egy $(k+1)$-szer differenciálható valós függvény $g(\Omega)$-n. Ekkor, alkalmazva a*

$$\mathbf{D_0} = \partial_y g \cdot \partial_x - \partial_x g \cdot \partial_y$$

differenciáloperátort a (2.2) egyenletre, az egyenlet rendje nem növekszik.

Nyilvánvaló, hogy a (2.2) egyenletből és a kapott egyenletből álló egyenletrendszer megoldása megegyezik a (2.2) egyenlet megoldásával.

A következő lemmában megmutatjuk, hogy létezik egy differenciál-függvényegyenlet, amelynek a megoldása megegyezik az egyenletrendszer megoldásával, és a renje kisebb a (2.2) egyenlet rendjénél.

2. LEMMA. ([Ház04b]) *Tekintsük a következő két egyenletet:*

$$\sum_{i=0}^{k} h_i(x, y) \cdot f^{(i)}(g(x, y)) = H(x, y) \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=0}^{m} l_i(x, y) \cdot f^{(i)}(g(x, y)) = L(x, y) \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{2.5}$$

ahol a $h_0, h_1, \ldots, h_k, l_0, l_1, \ldots, l_m, g, H, L : \Omega \to \mathbb{R}$ adott analitikus függvények és $h_k, l_m \neq 0$ Ω-n. Tegyük fel, hogy $k \geq m$. Ekkor vagy nincs közös megoldása *ezeknek az egyenleteknek, vagy léteznek olyan analitikus* $w_0, w_1, \ldots, w_s, W : \Omega \to \mathbb{R}$ *függvények, (ahol* $s \leq m$*) úgy, hogy a* k*-szor differenciálható megoldása a*

$$\sum_{i=0}^{s} w_i(x,y) \cdot f^{(i)}(g(x,y)) = W(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega \tag{2.6}$$

egyenletnek megegyezik a (2.4), (2.5) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldásával.

Most már megfogalmazhatjuk ennek a résznek az egyik fő eredményét, amely azt mutatja, hogy bizonyos feltételek mellett tetszőleges differenciál-függvényegyenletet tekintve tudunk konstruálni egy olyan egyenletet, amelynek megoldásai megegyeznek az eredeti egyenlet megoldásaival, a rendje általában kisebb, mint az eredeti egyenlet rendje, és az együtthatói kielégítenek egy parciális differenciálegyenlet-rendszert:

3. Tétel. ([Ház04b]) *Tekintsük a*

$$l_k(x,y) f^{(k)}(g(x,y)) + \ldots + l_0(x,y) f(g(x,y)) = L(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{2.7}$$

egyenletet, ahol $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *egy nyílt, összefüggő halmaz,* $l_0, l_1, \ldots, l_k, g$ *és* L *adott valós értékű analitikus függvények* Ω*-n (úgy, hogy* $g(\Omega)$ *egy nyílt halmaz), továbbá* f *egy valós ismeretlen függvény* $g(\Omega)$*-n. Ekkor létezik egy differenciál-függvényegyenlet*

$$h_m(x,y) f^{(m)}(g(x,y)) + \ldots + h_0(x,y) f(g(x,y)) = H(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{2.8}$$

(ahol $m \leq k$*) melynek* $(k+1)$*-szer differenciálható megoldása egybeesik a* (2.7) egyenlet megoldásával és a $h_0, h_1, \ldots, h_m, H$ függvények kielégitik a következő egyenletrendszert:

$$\partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y h_i - h_i \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x h_i - h_i \cdot \partial_x h_m), \tag{2.9}$$

minden $i = 1, \ldots, m-1$ esetén és

$$\partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y H - H \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x H - H \cdot \partial_x h_m). \tag{2.10}$$

Tegyük fel, hogy $h_m \neq 0$ az Ω halmazon. Ekkor a (2.9) és (2.10) egyenleteket osztva h_m^2-mel kapjuk, hogy

$$\partial_x g \cdot \left(\frac{\partial_y h_i \cdot h_m - \partial_y h_m \cdot h_i}{h_m^2} \right) = \partial_y g \cdot \left(\frac{\partial_x h_i \cdot h_m - \partial_x h_m \cdot h_i}{h_m^2} \right)$$

minden $i = 0, \ldots, m-1$ esetén és

$$\partial_x g \cdot \left(\frac{\partial_y H \cdot h_m - \partial_y h_m \cdot H}{h_m^2} \right) = \partial_y g \cdot \left(\frac{\partial_x H \cdot h_m - \partial_x h_m \cdot H}{h_m^2} \right),$$

amelyből

$$\partial_x g \cdot \partial_y \left(\frac{h_i}{h_m} \right) = \partial_y g \cdot \partial_x \left(\frac{h_i}{h_m} \right) \tag{2.11}$$

adódik minden $i = 0, \ldots, m-1$ esetén és

$$\partial_x g \cdot \partial_y \left(\frac{H}{h_m} \right) = \partial_y g \cdot \partial_x \left(\frac{H}{h_m} \right). \tag{2.12}$$

Ezért $\mathbf{D_0} \left(\frac{h_i}{h_m} \right) = 0$ és $\mathbf{D_0} \left(\frac{H}{h_m} \right) = 0$. Ha léteznek olyan $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$, K differenciálható függvények úgy, hogy

$$\frac{h_i(x,y)}{h_m(x,y)} = K_i(g(x,y))$$

minden $i = 0, \ldots, m-1$ esetén és

$$\frac{H(x,y)}{h_m(x,y)} = K(g(x,y)),$$

akkor a (2.11) és (2.12) egyenletek nyilvánvalóan teljesülnek.

Ezért, most adunk egy elegendő feltételt a $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}, K$ függvények létezésére. Ehhez szükségünk lesz a következő definícióra:

Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ egy nyílt halmaz, $g : \Omega \to \mathbb{R}$. Ekkor Ω-t *(simán) g-összefüggőnek* nevezzük, ha minden olyan (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in \Omega$ esetén, amelyre $g(x_0, y_0) = g(x_1, y_1)$, létezik egy olyan $(x, y) : [0,1] \to \Omega$ differenciálható függvény, amelyre $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, $(x(1), y(1)) = (x_1, y_1)$ és a $t \mapsto g(x(t), y(t))$ függvény konstans.

4. LEMMA. ([Ház04b]) *Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ egy nyílt halmaz, g egy differenciálható valós értékű függvény Ω-n úgy, hogy $(\partial_x g, \partial_y g) \neq (0,0)$ Ω-n. Tegyük fel, hogy Ω simán g-összefüggő. Ha $\mathbf{D_0}\varphi = 0$ (ahol φ egy differenciálható függvény Ω-n), akkor létezik egy $\Phi : g(\Omega) \to \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy $\varphi(x,y) = \Phi(g(x,y))$. Továbbá, ha φ és g k-szor folytonosan differenciálható függvény, akkor Φ is az.*

Ezek után már megfogalmazhatjuk ennek a témakörnek a végső eredményét, amely azt mutatja, hogy bizonyos feltételek mellett minden differenciál-függvényegyenlet esetén létezik egy olyan közönséges differenciálegyenlet, amelynek megoldásai megegyeznek a differenciál-függvényegyenlet megoldásaival:

5. TÉTEL. ([Ház04b]) *Tekintsük a*

$$l_n(x,y)f^{(n)}(g(x,y)) + \ldots + l_0(x,y)f(g(x,y)) = F(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{2.13}$$

ahol $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *egy nyílt, simán g-összefüggő halmaz,* $l_0, l_1, \ldots, l_n, g$ *és* F *adott valós értékű analitikus függvények* Ω*-n (úgy, hogy* $g(\Omega)$ *egy nyílt halmaz, továbbá* $(\partial_x g, \partial_y g) \neq (0,0)$ Ω*-n), továbbá* f *egy valós függvény* $g(\Omega)$*-n. Ekkor létezik egy közönséges differenciálegyenlet*

$$f^{(m)}(t) + K_{m-1}(t)f^{(m-1)}(t) + \ldots + K_0(t)f(t) = K(t), \tag{2.14}$$

(ahol $m \leq n$*,* $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$ *és* K *differenciálható valós értékű függvények) amelynek* $(n+1)$*-szer differenciálható megoldása lokálisan megegyezik a* (2.13) megoldásával.

2.3 A *feqsolve* PROGRAM MŰKÖDÉSE

A *feqsolve* prorgam MAPLE[1] V, Release 4 nyelven készült, amely a (2.1) alakú egyenletek megoldására használható. A programot a következő utasítással indíthatjuk:

$$\textit{feqsolve}(h_0(x,y) * f_0(g_0(x,y)) + \cdots + h_n(x,y) * f_n(g_n(x,y)) = F(x,y),$$
$$[f_0, f_1, \ldots, f_n]);$$

ahol a *feqsolve* program első paramétere a függvényegyenlet, amelyet meg akarunk oldani, a második paramétere pedig az ismeretlen függvények listája. A program a függvényegyenletet a lista első elemére oldja meg.

A program forráskódja letölthető a következő weblapról:

www.uni-miskolc.hu/∼matha

[1]MAPLE is a registered trademark of Waterloo Maple software

Második rész

3 t-konvex függvények stabilitása

3.1 Az $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-konvex eset

Jelöljön a továbbiakban $(X, |\cdot|)$ egy normált teret, $D \subset X$ egy nemüres, konvex részhalmazát X-nek. Az f függvényt $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-konvexnek nevezzük, ha teljesíti az

(3.1)

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) + \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i |x-y|^{p_i}, \qquad (x, y \in D)$$

egyenlőtlenséget, ahol $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\boldsymbol{p} = (p_0, \ldots, p_k) \in [0, \infty[^{k+1}$ és $t \in [0, 1]$ rögzített paraméterek.

Első lépésként az $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-konvex függvények korlátossági és folytonossági tulajdonságaival foglalkozunk. Az első tételünkben megmutatjuk, hogy ha egy $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-konvex függvényről tudjuk az értelmezési tartományának egy pontjában lokálisan felülről korlátos, akkor a függvény lokálisan korlátos a teljes értelmezési tartományán. A szimmetriát felhasználva feltehetjük, hogy $0 < t \le 1/2$.

6. Tétel. ([HP]) *Legyen $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\boldsymbol{p} = (p_0, \ldots, p_k) \in [0, \infty[^{k+1}$ és $t \in]0, 1/2]$. Ha $f : D \to \mathbb{R}$ az értelmezési tartományának egy $w \in D$ pontjában lokálisan felülről korlátos $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-konvex függvény, akkor f lokálisan korlátos D-n.*

A következő tételek azt mutatják, hogy néha elegendő lényegesen gyengébb regularitási tulajdonságot feltételezni. Például, ha a függvény értelmezési tartománya véges dimenziós, akkor felhasználva a Steinhaus és Piccard tételeket (lásd [Ste20], [Pic42]) hasonló állítást kaphatunk, mint az előző tételben.

7. Tétel. ([HP]) *Legyen $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\boldsymbol{p} = (p_0, \ldots, p_k) \in [0, \infty[^{k+1}$ és $t \in]0, 1/2]$. Legyen továbbá D egy nyílt konvex részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek és legyen $f : D \to \mathbb{R}$ egy $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-konvex függvény. Tegyük fel, hogy létezik egy $S \subset D$ pozitív mértékű Lebesgue-mérhető halmaz (vagy egy második kategóriájú Baire-mérhető halmaz) és egy $g : S \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mérhető (illetőleg egy Baire-mérhető) függvény úgy, hogy $f \le g$ az S halmazon. Ekkor f lokálisan korlátos D-n.*

A következő eredmény azt mutatja, hogy ha a $\boldsymbol{p}$ minden komponense pozitív, akkor az $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-konvex függvények lokális felülről korlátosságából következik a folytonosságuk. A tétel bizonyítása analóg a [Kuc85]-ben leírtakkal.

8. Tétel. *Legyenek adottak $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\boldsymbol{p} = (p_0, \dots, p_k) \in]0, \infty[^{k+1}$, és $t \in]0, 1/2]$. Ha $f : D \to \mathbb{R}$ egy $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-konvex és lokálisan felülről korlátos D valamely pontjában, akkor folytonos.*

Legyen $\mathcal{B}(I)$ az $I := [0, 1]$ intervallumon értelmezett korlátos, valós értékű függvények tere ellátva a közönséges szuprémum normával. Egy rögzített $p \geq 0$ és $t \in]0, 1/2]$ esetén definiáljuk a $T_{p,t} : \mathcal{B}(I) \to \mathcal{B}(I)$ operátort a következőképpen:

$$(T_{p,t} f)(s) = \begin{cases} (1-t) f\left(\dfrac{s}{1-t}\right) + \left(\dfrac{s}{1-t}\right)^p, & \text{ha } 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2}, \\ (1-t) f\left(\dfrac{1-s}{1-t}\right) + \left(\dfrac{1-s}{1-t}\right)^p, & \text{ha } \dfrac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Először megmutatjuk, hogy a

$$\varphi(s) = (T_{p,t} \varphi)(s) \qquad (s \in [0, 1]) \tag{3.2}$$

egyenletnek létezik egyértelmű megoldása. Továbbá tekintve a

$$\Phi(s) \leq (T_{p,t} \Phi)(s) \qquad (s \in [0, 1]), \tag{3.3}$$

$$\Psi(s) \geq (T_{p,t} \Psi)(s) \qquad (s \in [0, 1]) \tag{3.4}$$

egyenlőtlenségeket vizsgáljuk ezek megoldásának kapcsolatát az egyenlet megoldásával.

9. Tétel. ([HP]) *A* (3.2) egyenletnek egyértelműen létezik egy $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos, nemnegatív, korlátos és 1/2-re szimmetrikus megoldása (azaz $\varphi(s) = \varphi(1 - s)$ minden $s \in [0, 1]$ esetén). Továbbá, ha $\Phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ egy korlátos megoldása a (3.3) egyenlőtlenségeknek és $\Psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ egy korlátos megoldása a (3.4) egyenlőtlenségeknek, akkor teljesül a

$$\Phi \leq \varphi \leq \Psi$$

egyenlőtlenség.

Megjegyezzük, hogy a $\varphi_{p,t}$ értékeit nem könnyű meghatározni, mivel a kapott függvények "fraktál"-szerűek. Ahhoz, hogy $\varphi_{p,t}$-t becsülni tudjuk egy könnyebben számolható függvénnyel bevezetjük a $\phi_p : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$\phi_p(s) := (s(1-s))^p \tag{3.5}$$

Ha $0 \le p < 1$, akkor a ϕ_p és $\varphi_{p,t}$ függvények rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:

10. Tétel. ([HP]) *Ha $0 \le p < 1$, akkor*

$$\frac{\phi_p(s)}{\gamma_{p,t}(1/2)} \le \varphi_{p,t}(s) \le \frac{\phi_p(s)}{\gamma_{p,t}(0)} \qquad (s \in [0,1]). \tag{3.6}$$

Az $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-konvex függvényekre vonatkozó fő eredmények:

11. Tétel. ([HP]) *Legyenek adottak az $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$ és a $\boldsymbol{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, \infty[^{k+1}$ vektorok, és legyen továbbá $t \in]0, 1/2]$. Ha az $f : D \to \mathbb{R}$ egy $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-konvex, az értelmezési tartományának valamely pontjában felülről korlátos függvény, akkor*

$$f(sx + (1-s)y) \le sf(x) + (1-s)f(y) + \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i \varphi_{p_i,t}(s)|x-y|^{p_i} \tag{3.7}$$

teljesül minden $x, y \in D$ és $s \in [0,1]$ esetén, ahol a $\varphi_{p_i,t}$ függvények a $T_{p_i,t}$ operátorok fixpontjai.

Felhasználva a 10. Tétel jobboldali egyenlőtlenségét, ha mindegyik p_i paraméter kisebb mint 1, akkor azonnal kapjuk a következő eredményt:

12. Következmény. ([HP04]) *Legyenek adottak $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\boldsymbol{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, 1[^{k+1}$, és $t \in]0, 1/2]$. Ha az $f : D \to \mathbb{R}$ az értelmezési tartományának valamely pontjában felülről korlátos $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-konvex függvény, akkor*

$$f(sx + (1-s)y) \le sf(x) + (1-s)f(y) + \sum_{i=0}^{k} \frac{\varepsilon_i}{(1-t)^{p_i} - (1-t)} \big(s(1-s)|x-y|\big)^{p_i} \tag{3.8}$$

teljesül minden $x, y \in D$ és $s \in [0,1]$ esetén.

3.2 Az $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, p), t)$-konvex eset

Ebben a fejezetben azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor $k = 1$, $p_0 = 0$, és $t \in]0,1[$, azaz az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, p), t)$-konvex, vagyis teljesíti a következő egyenlőtlenséget:

$$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 |x-y|^p$$

minden $x, y \in D$ esetén, ahol $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ge 0, p > 0$ és $t \in]0,1[$.

Egy rögzített $p \ge 0$ és $t \in]0, 1/2]$ esetén bevezetjük a $S_{p,t}$ operátort a következőképpen:

$$(S_{p,t}f)(s) = \begin{cases} \min\left\{ \begin{array}{l} (1-t)f\left(\dfrac{s}{1-t}\right) + \left(\dfrac{s}{1-t}\right)^p \\ tf\left(\dfrac{s}{t}\right) + \left(\dfrac{s}{t}\right)^p \end{array} \right\}, & \text{ha } 0 \le s \le t, \\ \min\left\{ \begin{array}{l} (1-t)f\left(\dfrac{s}{1-t}\right) + \left(\dfrac{s}{1-t}\right)^p \\ (1-t)f\left(\dfrac{1-s}{1-t}\right) + \left(\dfrac{1-s}{1-t}\right)^p \end{array} \right\}, & \text{ha } t < s < 1-t, \\ \min\left\{ \begin{array}{l} tf\left(\dfrac{1-s}{t}\right) + \left(\dfrac{1-s}{t}\right)^p \\ (1-t)f\left(\dfrac{1-s}{1-t}\right) + \left(\dfrac{1-s}{1-t}\right)^p \end{array} \right\}, & \text{ha } 1-t \le s \le 1. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy $S_{p,t}(f) \le T_{p,t}(f)$ bármely f függvény esetén.

Ebben a részben a következő függvényegyenlettel foglalkozunk:

$$\varphi(s) = (S_{p,t}\varphi)(s) \qquad (s \in [0,1]). \tag{3.9}$$

Első eredményként itt is meghatározzuk a (3.9) függvényegyenlet nemnegatív, korlátos $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ megoldását. Ezt a megoldást a továbbiakban $\varphi^*_{p,t}$-gal fogjuk jelölni.

13. Állítás. *Legyen a* $(\varphi_n) : [0,1] \to \mathbb{R}$ *függvénysorozat a*

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= 0, \\ \varphi_{n+1}(s) &:= (S_{p,t}\varphi_n)(s) \end{aligned} \tag{3.10}$$

képlettel definiálva. Ekkor φ_n monoton növekvő, nemnegatív, folytonos függvények sorozata és az alábbi módon definiált φ függvény teljesíti a (3.9) egyenletet:

$$\varphi(s) := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) \qquad (s \in [0,1]), \tag{3.11}$$

Továbbá ez a függvény folytonos, nemnegatív és $s = 1/2$-re szimmetrikus a $[0,1]$ intervallumon, azaz $\varphi(s) = \varphi(1-s)$ minden $s \in [0,1]$ esetén.

Mivel $S_{p,t}(f) \le T_{p,t}(f)$ bármely f függvény esetén, ezért az $S_{p,t}$ operátor fixpontja nem haladhatja meg a $T_{p,t}$ operátor fixpontját.

Most vizsgáljuk a (3.9) egyenlethez kapcsolódó következő két függvényegyenlőtlenséget:

$$\Psi(s) \le (S_{p,t}\Psi)(s) \qquad (s \in [0,1]), \tag{3.12}$$

$$\Phi(s) \ge (S_{p,t}\Phi)(s) \qquad (s \in [0,1]). \tag{3.13}$$

14. Állítás. *Legyen $\Psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ egy felülről korlátos megoldása a* (3.12) függvényegyenletnek és $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ egy alulról korlátos megoldása a (3.13) egyenletnek. Ekkor $\Psi \le \varphi^*_{p,t} \le \Phi$, ahol a $\varphi^*_{p,t}$ függvény a (3.9) egyenlet egyértelmű megoldása.

A következő állításunkban össze fogjuk hasonlítani a (3.9) egyenlet megoldásaként kapott $\varphi^*_{p,t}$ függvényt az általános esetben is használt $\phi_p : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvénnyel:

$$\phi_p(s) := (s(1-s))^p$$

Ha $0 \le p \le 1$, akkor a ϕ_p és $\varphi^*_{p,t}$ függvények rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

15. Állítás. *Ha $0 < t \le 1/2$ és $0 < p < 1$, akkor*

$$\frac{1}{(t(1-t))^p}\phi_p(s) \le \varphi^*_{p,t}(s) \tag{3.14}$$

$$\le \max\left\{\frac{1}{t^p - t}; \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2-t)^p}\right\}\phi_p(s)$$

minden $s \in [0,1]$ esetén.

Most már minden eszközünk adott ahhoz, hogy kimondhassuk ehhez az esethez kapcsolódó legfőbb eredményeinket:

16. TÉTEL. *Legyen D egy nyílt konvex részhalmaza az $(X, |\cdot|)$ normált térnek. Legyenek ε_0, ε_1, p nemnegatív konstansok és legyen $t \in]0, 1/2]$ rögzített. Ha az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, p), t)$-konvex és lokálisan felülről korlátos az értelmezési tartományának valamely pontjában, akkor*

$$f(sx + (1-s)y) \le sf(x) + (1-s)f(y) + \varepsilon_0/t + \varepsilon_1 \varphi^*_{p,t}(s)|x-y|^p \tag{3.15}$$

teljesül minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén, ahol a $\varphi^*_{p,t}$ függvény a (3.9) *egyenlet egyértelmű megoldása.*

Felhasználva az előző tételünket és a 15. Állítást azonnal kapjuk a következő eredményt:

17. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen D egy nyílt konvex részhalmaza az $(X, |\cdot|)$ normált térnek. Legyenek ε_0, ε_1, p, t nemnegatív konstansok, ahol $t \in]0, 1/2]$ és $0 \le p < 1$. Ha $f : D \to \mathbb{R}$ egy $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, p), t)$-konvex függvény, amely lokálisan felülről korlátos az értelmezési tartományának valamely pontjában, akkor*

$$f(sx + (1-s)y) \le sf(x) + (1-s)f(y) + \varepsilon_0/t$$

$$+\varepsilon_1 \max\left\{\frac{1}{t^p - t}; \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2-t)^p}\right\} (s(1-s))^p |x-y|^p$$

minden $x, y \in D$ és $s \in [0, 1]$ esetén.

3.3 Záró megjegyzések

Ha $0 \le p < 1$, akkor a $T_{p,t}$ illetve az $S_{p,t}$ operátorok $\varphi_{p,t}$ és $\varphi^*_{p,t}$ fixpontjait nagyságrendileg a $\phi_p(s) = (s(1-s))^p$ függvény jól közelíti.

A $p = 1$ esetben ($t = 1/2$ esetén) a

$$\begin{aligned}\phi(s) &:= \max\bigl(-s\log_2 s,\ -(1-s)\log_2(1-s)\bigr)\\ &= \begin{cases} -s\log_2 s & 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ -(1-s)\log_2(1-s) & \frac{1}{2} \le s \le 1, \end{cases}\end{aligned}$$

függvény ad jó nagyságrendi becslést.

Nem ismert azonban, hogy $p > 1$ esetén milyen egyszerűen értelmezhető függvény ad pontos nagyságrendi közelítést $\varphi_{p,t}$-re illetve $\varphi^*_{p,t}$-ra

4 ANGOL NYELVŰ TÉZISEK

This PhD dissertation contains new results in the theory of functional equations. It consists of two parts, which are different from each other.

In the first part of our dissertation we deal with the linear two variable functional equation

$$h_0(x,y)f_0(g_0(x,y)) + \cdots + h_n(x,y)f_n(g_n(x,y)) = F(x,y) \tag{4.1}$$

where n is a positive integer, $g_0, g_1, \ldots, g_n, h_0, h_1, \ldots, h_n$, and F are given real valued analytic functions on an open set $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, furthermore $f_0, f_1 \ldots,$ f_n are unknown functions.

Applying the results of Páles [Pál92] we get recursively an inhomogeneous linear differential-functional equation in one of unknown functions for $f_1, f_2, \ldots, f_n$, respectively.

One of our main results states that the solutions of the differential-functional equation obtained are the same as that of an ordinary differential equation (under some assumptions), whose order is usually much smaller than the order of the differential-functional equation.

According to the results of Zsolt Páles, it can be shown that, assuming sufficiently high-order differentiability, there exists a linear partial differential operator (with variable coefficients and order k less than $2n-1$) which "kills" all of the members in the left hand side of the equation (4.1), except the first one. That is, applying the differential operator to the equation (4.1), it yields

$$\mathbf{D}[h_0(x,y)f_0(g_0(x,y))] = \mathbf{D}F(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega,$$

which is a linear differential-functional equation of order at most k. We recall the algorithm employed to the construction of the program. Using the algorithm of Páles for the functional-equation of type (4.1), we get an inhomogeneous linear differential-functional equation for f, of the form:

$$l_k(x,y)f^{(k)}(g(x,y)) + \ldots + l_0(x,y)f(g(x,y)) = L(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{4.2}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is an open, connected set and $l_0, l_1, \ldots, l_k, g$ and L are given real functions on Ω, $g(\Omega)$ is an open set and $f : g(\Omega) \to \mathbb{R}$ is a k-times differentiable unknown function.

For brevity, we write (4.2) in the form

$$l_k \cdot (f^{(k)} \circ g) + \ldots + l_0 \cdot (f \circ g) = L. \tag{4.3}$$

We call this equation a homogeneous equation, if $L = 0$. This equation is called a k-th order differential-functional equation if $l_k \neq 0$.
The solving method is the following. Consider the k-th order inhomogeneous linear differential-functional equation. In the first step we construct another differential-functional equation, whose order is not greater than the order of the original equation and the solutions of the system of these both equations are the same as that of the original equation. In the second step, we create a smaller order differential-functional equation whose solutions are the same as that of the system of equations. We repeat this two steps until getting such differential-functional equation whose coefficients satisfy a certain system of partial differential equations. Finally, with substitution $t = g(x, y)$, we get an ordinary differential equation.

The next lemma enables us to produce a new differential-functional equation from (2.2) without increasing the order of equation.

1. Lemma. *Let $l_0, l_1, \ldots, l_k, g$ and L be given real valued, differentiable functions on Ω (such that $g(\Omega)$ is an open set), furthermore f be a $(k+1)$-times differentiable real function on $g(\Omega)$. Then, applying the differential operator*

$$\mathbf{D_0} = \partial_y g \cdot \partial_x - \partial_x g \cdot \partial_y$$

to the equation (4.1), the order of the resulting equation does not increase.

Applying the differential operator $\mathbf{D_0}$ to a k-th order differential-functional equation we get an m-th $(m \leq k)$ order equation. In the next lemma we prove that there exists a smaller order differential-functional equation, whose solutions are the same as that of the system of these equations.

2. Lemma. *Consider the following two equations*

$$\sum_{i=0}^{k} h_i(x, y) \cdot f^{(i)}(g(x, y)) = H(x, y) \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=0}^{m} l_i(x, y) \cdot f^{(i)}(g(x, y)) = L(x, y) \qquad (x, y) \in \Omega, \tag{4.5}$$

where the functions $h_0, h_1, \ldots, h_k, l_0, l_1, \ldots, l_m, g, H, L : \Omega \to \mathbb{R}$ are analytic and $h_k, l_m \neq 0$ on Ω. Assume that $k \geq m$.

Then either there is no common solution of these equations, or there exist analytic functions $w_0, w_1, \dots, w_s, W : \Omega \to \mathbb{R}$ (where $s \le m$) such that the k-times differentiable solutions of the equation

$$\sum_{i=0}^{s} w_i(x,y) \cdot f^{(i)}(g(x,y)) = W(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega \tag{4.6}$$

are the same as that of the system of equations (4.4), (4.5).

Now, we can formulate one of our main result.

3. Tétel. *Consider the equation*

$$l_k(x,y) f^{(k)}(g(x,y)) + \ldots + l_0(x,y) f(g(x,y)) = L(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{4.7}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is an open, connected set and $l_0, l_1, \dots, l_k, g$ and L are given real valued, analytic functions on Ω (such that $g(\Omega)$ is an open set), furthermore f is an unknown real function on $g(\Omega)$. Then there exists a functional-differential equation

$$h_m(x,y) f^{(m)}(g(x,y)) + \ldots + h_0(x,y) f(g(x,y)) = H(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{4.8}$$

(where $m \le k$) whose $(k+1)$-times differentiable solutions coincide with that of (4.7) such that $h_0, h_1, \dots, h_m, H$ satisfy the following system of equations

$$\partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y h_i - h_i \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x h_i - h_i \cdot \partial_x h_m) \tag{4.9}$$

for all $i = 1, \dots, m-1$ and

$$\partial_x g \cdot (h_m \cdot \partial_y H - H \cdot \partial_y h_m) = \partial_y g \cdot (h_m \cdot \partial_x H - H \cdot \partial_x h_m). \tag{4.10}$$

Assume that $h_m \neq 0$ on Ω. Then dividing (4.9) and (4.10) by h_m^2, we get

$$\mathbf{D_0}\left(\frac{h_i}{h_m}\right) = 0 \tag{4.11}$$

and

$$\mathbf{D_0}\left(\frac{H}{h_m}\right) = 0. \tag{4.12}$$

If there exist differentiable functions $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}, K$ such that

$$\frac{h_i(x,y)}{h_m(x,y)} = K_i(g(x,y))$$

for all $i = 0, \ldots, m-1$ and

$$\frac{H(x,y)}{h_m(x,y)} = K(g(x,y))$$

then (4.11) and (4.12) are obviously valid.

Now, we give a sufficient condition for the existence of $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$, K. We need the following definition:

Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ be an open set, $g : \Omega \to \mathbb{R}$. We say that Ω is *(smoothly) g-connected* if for all (x_0, y_0), $(x_1, y_1) \in \Omega$ such that $g(x_0, y_0) = g(x_1, y_1)$, there exists a differentiable function $(x, y) : [0, 1] \to \Omega$ such that $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, $(x(1), y(1)) = (x_1, y_1)$ and $t \mapsto g(x(t), y(t))$ is constant.

4. LEMMA. *Let Ω be an open set, g be a differentiable, real valued function on Ω such that $(\partial_x g, \partial_y g) \neq (0,0)$ on Ω. Assume that Ω is smoothly g-connected. If $\mathbf{D_0}\varphi = 0$ (where φ is a differentiable function on Ω), then there exists a function $\Phi : g(\Omega) \to \mathbb{R}$ such that $\varphi(x,y) = \Phi(g(x,y))$. Moreover, if φ and g are k-times continuously differentiable functions, then Φ is also a k-times continuously differentiable function.*

Now, we are able to formulate the final result of the first part of our dissertation:

5. TÉTEL. *Consider the equation*

(4.13)
$$l_k(x,y) f^{(k)}(g(x,y)) + \ldots + l_0(x,y) f(g(x,y)) = L(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega,$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is an open, smoothly g-connected set and $l_0, l_1, \ldots, l_k, g$ and L are given real valued, analytic functions on Ω (such that $g(\Omega)$ is an open set, $(\partial_x g, \partial_y g) \neq (0,0)$ on Ω), furthermore f is an unknown real function on $g(\Omega)$. Then there exists an ordinary differential equation

$$f^{(m)}(t) + K_{m-1}(t) f^{(m-1)}(t) + \ldots + K_0(t) f(t) = K(t). \tag{4.14}$$

(where $m \leq k$ and $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$ and K are differentiable real valued functions) whose $(k+1)$-times differentiable solutions locally coincide with that of (4.13).

The computer-program *feqsolve* is written in the Computeralgebra-System MAPLE V, Release 4. It can be used for solving functional-equations of type (4.1). The program can be started with the command:

$$\mathit{feqsolve}(h_0(x,y)*f_0(g_0(x,y))+\cdots+h_n(x,y)*f_n(g_n(x,y))=F(x,y),$$
$$[f_0,f_1,\ldots,f_n]);$$

where the first parameter of *feqsolve* is the functional-equation to be solved and the second parameter is the list of unknown functions in the functional-equation. The program solves the functional-equation for the first element of the list.

The source code of the program can be downloaded from the webpage

www.uni-miskolc.hu/ ∼ matha

or please send your request to the e-mail address:

matha@uni-miskolc.hu

In the second part of our dissertation we deal with approximately t-convex functions. More precisely we investigated the generalization of the results of Bernstein and Doetsch [BD15], Nikodem and Ng [NN93] and Páles [Pál00].

Let $(X,|\cdot|)$ be a normed space and $D\subset X$ be a nonempty open convex set.

A real valued function f defined on an open convex set D is called $(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{p},t)$-convex if it satisfies the inequality

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\le tf(x)+(1-t)f(y)+\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i|x-y|^{p_i}\qquad\text{for}\quad x,y\in D,$$

where $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_k)\in[0,\infty[^{k+1}$, $\boldsymbol{p}=(p_0,\ldots,p_k)\in[0,\infty[^{k+1}$ and $t\in[0,1]$ are fixed parameters.

We intend to find functions $\phi_{p_i,t}:[0,1]\to\mathbb{R}$ $(i=0,1,\ldots,k)$ so that

$$f\big(sx+(1-s)y\big)\le sf(x)+(1-s)f(y)+\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i\phi_{p_i,t}(s)|x-y|^{p_i}\tag{4.15}$$

hold for all $x,y\in D$ and all $s\in[0,1]$.

First we show some regularity properties of $(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{p},t)$-convex functions (6. Tétel).

6. TÉTEL. *Let D be an open convex subset of a real normed space $(X, |\cdot|)$. Let where $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $\boldsymbol{p} = (p_0, \dots, p_k) \in [0, \infty[^{k+1}$ and $t \in]0, 1/2]$ be fixed parameters. If $f : D \to \mathbb{R}$ is $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-convex and locally bounded from above at a point $s \in D$, then f is locally bounded on D.*

The next theorem essentially weakens the local boundedness assumption if the underlying space is of finite dimension. It can be derived from 6. Tétel adopting the argument followed in [HP04] (that is based on Steinhaus' and Piccard's theorems (cf. [Ste20], [Pic42])).

7. TÉTEL. *Let $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $p = (p_0, \dots, p_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, and $t \in]0, 1/2]$. Let D be an open convex subset of $\mathbb{R}^n$ and $f : D \to \mathbb{R}$ be an (ε, p, t)-convex function. Assume that there exists Lebesgue-measurable set of positive measure (or a Baire-measurable set of second category) $S \subset D$ and a Lebesgue-measurable (resp. Baire-measurable) function $g : S \to \mathbb{R}$ such that $f \le g$ on S. Then f is locally bounded on D.*

The next result states that if all the components of p are positive then the local upper boundedness of an $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{p}, t)$-convex function yields its continuity as well.

8. TÉTEL. *Let $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_k) \in [0, \infty[^{k+1}$, $p = (p_0, \dots, p_k) \in]0, \infty[^{k+1}$, and $t \in]0, 1/2]$. If $f : D \to \mathbb{R}$ is (ε, p, t)-convex and locally bounded from above at a point of D, then it is continuous.*

In our investigation we need to introduce the operator $T_{p,t} : \mathcal{B}(I) \to \mathcal{B}(I)$ (where $\mathcal{B}(I)$ is the space of bounded real-valued functions defined on $I := [0, 1]$ equipped with the usual supremum norm and $p \ge 0$ and $t \in]0, 1/2]$ are fixed) by

$$(T_{p,t}\varphi)(s) = \begin{cases} (1-t)\varphi\left(\dfrac{s}{1-t}\right) + \left(\dfrac{s}{1-t}\right)^p & 0 \le s \le \dfrac{1}{2}, \\ (1-t)\varphi\left(\dfrac{1-s}{1-t}\right) + \left(\dfrac{1-s}{1-t}\right)^p & \dfrac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

Our first result concerns the solution of the functional equation

$$\varphi(s) = (T_{p,t}\varphi)(s) \qquad (s \in [0, 1]) \tag{4.16}$$

and the corresponding functional inequalities

$$\Phi(s) \le (T_{p,t}\Phi)(s) \qquad (s \in [0, 1]), \tag{4.17}$$

$$\Psi(s) \geq (T_{p,t}\Psi)(s) \qquad (s \in [0,1]). \tag{4.18}$$

9. TÉTEL. *There exists a unique bounded function* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *such that* (4.16) holds. Furthermore, φ is continuous, nonnegative and is symmetric with respect to $s = 1/2$, i.e., $\varphi(s) = \varphi(1-s)$ for all $s \in [0,1]$. In addition, if $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ and $\Psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ are bounded solution of (4.17) and (4.18), then $\Phi \leq \varphi \leq \Psi$ holds.

In order to compare $\varphi_{p,t}$ with a function that is defined in more computable terms, introduce the function $\phi_p : [0,1] \to \mathbb{R}$ by the following formula:

$$\phi_p(s) := (s(1-s))^p \tag{4.19}$$

The functions ϕ_p and $\varphi_{p,t}$ have the following property:

10. TÉTEL. *If* $0 \leq p < 1$, *then*

$$\frac{\phi_p(s)}{\gamma_{p,t}(1/2)} \leq \varphi_{p,t}(s) \leq \frac{\phi_p(s)}{\gamma_{p,t}(0)} \qquad \text{for } s \in [0,1]. \tag{4.20}$$

The following result offers a generalization of the theorems of Bernstein and Doetsch [BD15], Ng and Nikodem [NN93] and the results of Páles [Pál00] and Házy and Páles [HP04].

11. TÉTEL. *Let* $\varepsilon = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k) \in [0,\infty[^{k+1}$, $p = (p_0, \ldots, p_k) \in [0,\infty[^{k+1}$, *and* $t \in]0,1/2]$ *If* $f : D \to \mathbb{R}$ *is* (ε, p, t)*-convex and locally bounded from above at a point of* D*, then*

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i \varphi_{p_i,t}(s)|x-y|^{p_i} \tag{4.21}$$

for all $x, y \in D$ *and* $s \in [0,1]$, *(where* $\varphi_{p_i,t}$ *is the fixed point of the operator* $T_{p_i,t}$*.)*

Applying the right hand side inequality of 10. Tétel, if the parameters p_i are smaller than 1, we immediately get the following result.

12. KÖVETKEZMÉNY. *Let* $\varepsilon = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_k) \in [0,\infty[^{k+1}$, $p = (p_0, \ldots, p_k) \in [0,1[^{k+1}$, *and* $t \in]0,1/2]$. *If* $f : D \to \mathbb{R}$ *is* (ε, p, t)*-convex and locally bounded from above at a point of* D*, then*

$$f(sx + (1-s)y) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \sum_{i=0}^{k} \frac{\varepsilon_i}{(1-t)^{p_i} - (1-t)} \big(s(1-s)|x-y|\big)^{p_i} \tag{4.22}$$

for all $x, y \in D$ and $s \in [0,1]$.

Finally, we deal with the special case, when $k = 1$ and $p_0 = 1$

13. TÉTEL. *Let D be an open convex subset of a real normed space $(X, |\cdot|)$. Let $\varepsilon_0, \varepsilon_1, p$ be nonnegative constants and $t \in]0, 1/2]$ fixed. If $f : D \to \mathbb{R}$ is locally bounded above at a point of D and $((\varepsilon_0, \varepsilon_1), (0, p), t)$-convex function, then*

$$f\left(sx + (1-s)y\right) \leq sf(x) + (1-s)f(y) + \varepsilon_0/t + \varepsilon_1 \varphi^*_{p_i,t}(s)|x-y|^p$$

for all $x, y \in D$ and $\lambda \in [0,1]$, where $\varphi^*_{p_i,t}$ is the fixed point of the operator $S_{p,t}$.

If $0 \leq p < 1$, then

$$\varphi^*_{p_i,t}(s) \leq \max\left\{\frac{1}{t^p - t}; \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2-t)^p}\right\}(s(1-s))^p.$$

Applying this inequality, we immediately get the following result.

14. KÖVETKEZMÉNY. *Let D be an open, convex subset of real normed space $(X, |\cdot|)$. Let ε, δ be nonnegative constants, $0 \leq p < 1$. If $f : D \to \mathbb{R}$ is $(\varepsilon, \delta, p, t)$-convex (where $t \in]0, 1/2]$)and locally bounded from above at a point of D, then*

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + \delta/t$$

$$+\varepsilon \max\left\{\frac{1}{t^p - t}; \frac{1}{(1/2 - t/2)^p - (1-t)^{1-p}(1/2-t)^p)}\right\}(\lambda(1-\lambda))^p |x-y|^p$$

for all $x, y \in D$ and $\lambda \in [0,1]$.

Irodalomjegyzék

[Acz66] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 19, Academic Press, New York–London, 1966. MR 34 #8020

[BD15] F. Bernstein and G. Doetsch, *Zur Theorie der konvexen Funktionen*, Math. Annalen **76** (1915), 514–526.

[Cho84] P. W. Cholewa, *Remarks on the stability of functional equations*, Aequationes Math. **27** (1984), 76–86.

[CP93] E. Casini and P. L. Papini, *A counterexample to the infinity version of the Hyers-Ulam stability theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 885–890.

[Ger94] R. Ger, *Stability aspects of delta-convexity*, Stability of mappings of Hyers-Ulam type, Hadronic Press, Palm Harbor, FL, 1994, pp. 99–109.

[Gil98] A. Gilányi, *Solving linear functional equations with computer*, Math. Pannon. **9** (1998), no. 1, 57–70. MR 99b:39033

[Gre52] J. W. Green, *Approximately convex functions*, Duke Math. J. **19** (1952), 499–504.

[Ház] A. Házy, *On approximate t-convexity*, Math. Ineq. and Appl., accepted.

[Ház04a] ———, *Solving functional equation with computer*, microCAD 2004 International Scientific Conference, vol. Section E, Miskolci Egyetem, Miskolc, 2004, pp. 35–39.

[Ház04b] ———, *Solving linear two variable functional equation with computer*, Aequationes Mathematicae **67** (2004), 47–62.

[HIR98] D. H. Hyers, G. Isac, and Th. M. Rassias, *Stability of Functional Equations in Several Variables*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications 34, vol. 27, Birkhäuser Verlag, Basel–Boston, 1998.

[HP] A. Házy and Zs. Páles, *On approximately t-convex functions*, Publ. Math., accepted.

[HP04] ______, *On approximately midconvex functions*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), 339–350.

[HU52] D. H. Hyers and S. M. Ulam, *Approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 821–828.

[Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

[Lac99] M. Laczkovich, *The local stability of convexity, affinity and of the Jensen equation*, Aequationes Math. **58** (1999), 135–142.

[Mro01] J. Mrowiec, *Remark on approximately Jensen-convex functions*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **23** (2001), no. 1, 16–21.

[NN93] C. T. Ng and K. Nikodem, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), no. 1, 103–108.

[Pál92] Zs. Páles, *On reduction of linear two variable functional equations to differential equations without substitutions*, Aequationes Math. **43** (1992), no. 2-3, 236–247. MR 93f:39016

[Pál00] ______, *Bernstein–Doetsch-type results for general functional inequalities*, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. **17** (2000), 197–206, Dedicated to Professor Zenon Moszner on the occasion of his seventieth birthday. MR 2001k:26015

[Pál01] ______, *Separation by approximately convex functions*, Contributions to the theory of functional equations, III (Graz, 2000) (D. Gronau and L. Reich, eds.), Grazer Math. Ber., vol. 344, Karl-Franzens-Univ. Graz, Graz, 2001, pp. 43–50.

[Pál03] ______, *On approximately convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 1, 243–252. MR 2003h:26015

[Pic42] S. Piccard, *Sur les ensembles parfaits*, Mém. Univ. Neuchâtel, vol. 16, Secrétariat de l'Université Neuchâtel, 1942.

[Ste20] H. Steinhaus, *Sur les distance des points des ensembles de mesure positif*, Fund. Math. **1** (1920), 99–104.

[Szék82] L. Székelyhidi, *On a class of linear functional equations*, Publ. Math. Debrecen **29** (1982), no. 1-2, 19–28. MR 84j:39013

Házy Attila Publikációi:

Publikációk

[1] A. Házy and Zs. Páles, *Approximately midconvex functions*, Bulletin London Math. Soc. **36** (2004) 339–350.

[2] A. Házy, *Solving linear two variable functional equation with computer*, Aequationes Mathematicae **67** (2004) 47–62.

[3] A. Házy, *Solving functional equation with computer*, microCAD 2004 International Scientific Conference, vol. Section E, Miskolci Egyetem, Miskolc, 2004, pp 35–39.

[4] A. Házy and Zs. Páles, *On approximately t-convex functions*, Publicationes Math. *accepted*

[5] A. Házy, *On approximately t-convexity*, Math. Ineq. and Appl. *accepted*

Előadások

[1] A. Házy, *Lineáris, kétváltozós függvényegyenletek megoldása a Maple V. programcsomag segítségével (Solving linear two variable functional equation with computer)* (in Hungarian), OTDK, Debrecen, Hungary, 1999, March 31 - April 2.

[2] A. Házy, *Solving linear functional equation by computer*, 38th International Symposium on Functional Equations, Noszvaj, Hungary, 2000, June 11 - 18.

[3] A. Házy, *On approximately convex functions*, The 1st Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations, Cieszyn, Poland, 2001, February 7 - 10.

[4] A. Házy, *Differenciál függvényegyenletek (Differential-functional equations)* (in Hungarian), VIII. Síkfőkúti Analízis Szeminárium, Sikfőkút, Hungary, 2001, June 15 - 17.

[5] A. Házy, *On approximately Jensen-convex functions*, 8th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Muszyna-Złockie, Poland, 2001, September 10 - 15.

[6] A. Házy, *Reduction of differential functional equations to differential equations*, The 2nd Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations, Hajdúszoboszló, Hungary, 2002, January 30 - February 2.

[7] A. Házy, *Reduction of differential functional equations to differential equations*, 40th International Symposium on Functional Equations, Gronów, Poland, 2002, August 25 - September 1.

[8] A. Házy, *On approximately midconvex functions*, General Inequalities 8, Noszvaj, Hungary, 2002, September 15 - 21.

[9] A. Házy, *On approximately t-convex functions*, The 3rd Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations, Bedlewo, Poland, 2003, January 29 - February 1.

[10] A. Házy, *On approximately t-convex functions*, 41st International Symposium on Functional Equations, Noszvaj, Hungary, 2003, June 9 - 15.

[11] A. Házy, *On approximately* t*-convexity*, 9th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Muszyna-Złockie, Poland, 2003, September 7 - 13.

[12] A. Házy, *On approximately* t*-convexity*, 4th Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations, Mátraháza, Hungary, 2004, February 4 - 7.

[13] A. Házy, *Solving functional equation with computer*, microCAD 2004 International Scientific Conference, Miskolc, Hungary, 2004, March 18 - 19.

[14] A. Házy, *t-konvex függvények stabilitása (Stability of t-convexity)* (in Hungarian), Magyar Tudományos Akadémia, Osztályülés, Budapest, Hungary, 2004, May 12.

[15] A. Házy, *Approximately t-convexity*, 42nd International Symposium on Functional Equations, Opava, Czech Republic, 2004, June 21 - June 26.