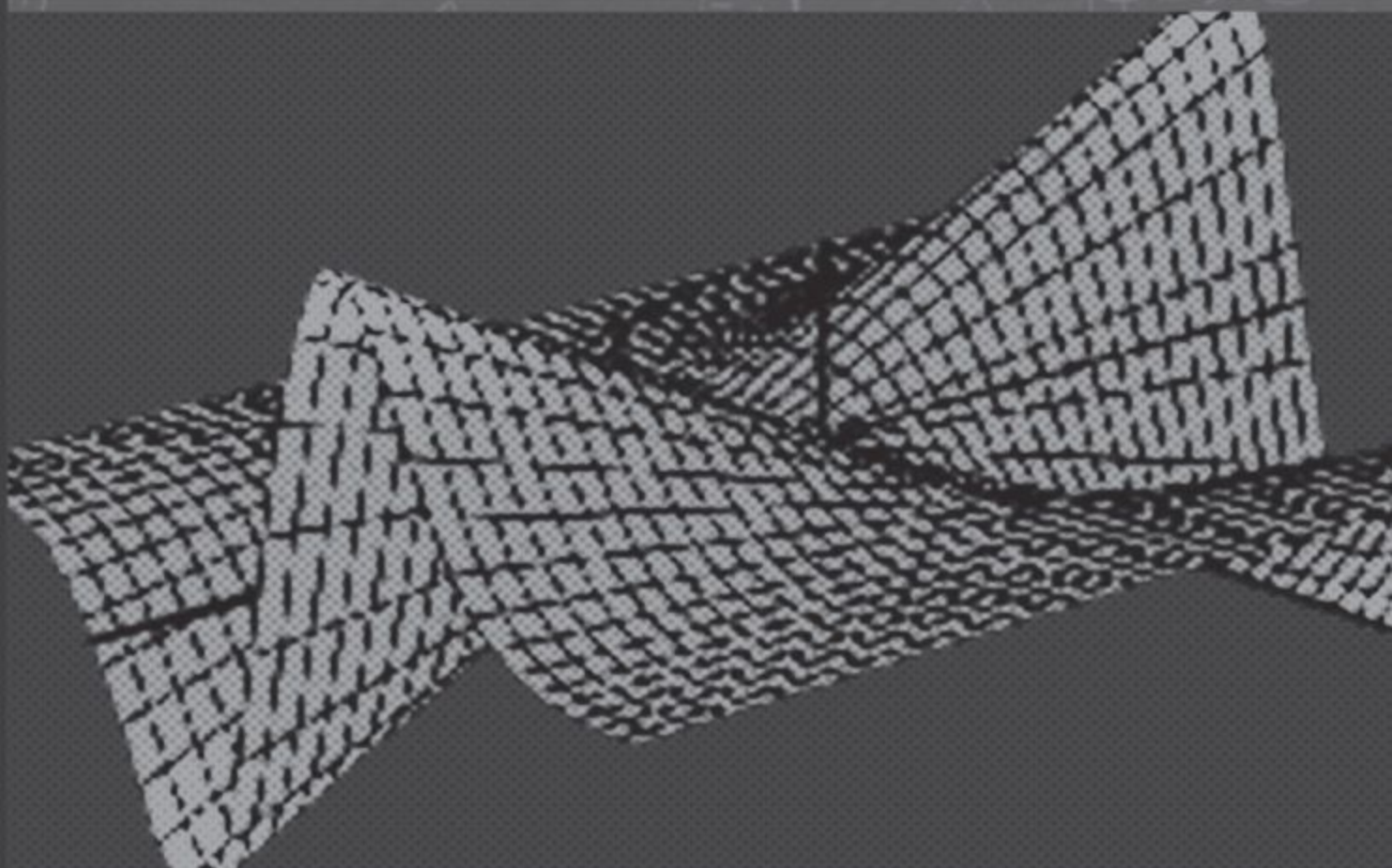


Dr. Kézi Csaba Gábor

Vektorváltozós és vektorértékű függvények analízise



Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

Dr. Kézi Csaba Gábor

Egyetemi docens

**Vektorváltozós és vektorértékű függvények
analízise**

1. fejezet

Többszörös valós értékű függvények analízise (skalármezők)

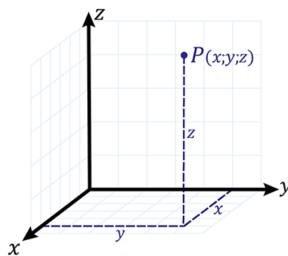
1.1. Bevezető fogalmak

1.1.1. Definíció. Tekintsük a $D \subset \mathbb{R}^n$ halmazt. Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt n -változós valós értékű függvénynek vagy skalármezőnek nevezzük.

1.1.2. Megjegyzés. Az előző definíció értelmében tehát a többváltozós valós értékű függvények (vagyis a skalármezők) olyan függvények, amelyek értelmezési tartománya \mathbb{R}^n valamely részhalmaza, értékkészletük \mathbb{R} vagy \mathbb{R} valamely részhalmaza.

1.1.3. Példa. Az $f(x; y; z) = x + xy + yz + z^2$ egy háromváltozós valós értékű függvény.

1.1.4. Megjegyzés. Ha speciálisan az f többváltozós függvény kétváltozós, akkor geometriai interpretációját a háromdimenziós Descartes-féle koordináta-rendszerben úgy kapjuk, hogy az xy síkban az $(x; y)$ koordinátájú ponthoz az f által hozzárendelt z értéket mérjük fel merőlegesen.



1.1.5. Definíció. Ha f egy n -változós, valós értékű f függvény, akkor az

$$\{(x_1; \dots; x_n; f(x_1; \dots; x_n)) \mid (x_1; \dots; x_n) \in D_f\}$$

halmazt az f függvény grafikonjának nevezzük.

1.1.6. Megjegyzés. Kétváltozós, valós értékű f függvény esetén az

$$\{(x; y; f(x; y)) \mid (x; y) \in D_f\}$$

halmaz az f függvény grafikonja.

1.1.7. Definíció. Az $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény c valós számhoz tartozó szintvonala az $f(x; y) = c$ egyenlet megoldásainak halmaza. Tehát a c értékhez tartozó szintvonal az

$$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x; y) = c\}$$

halmaz.

1.1.8. Példa. Az $f(x; y) = x^2 + y^2$ függvény $c \geq 0$ értékhez tartozó szintvonala azon pontok halmaza a síkon, amelyekre az $x^2 + y^2 = c$ egyenlet teljesül. Tehát a szintvonalak a \sqrt{c} sugarú körvonalak.

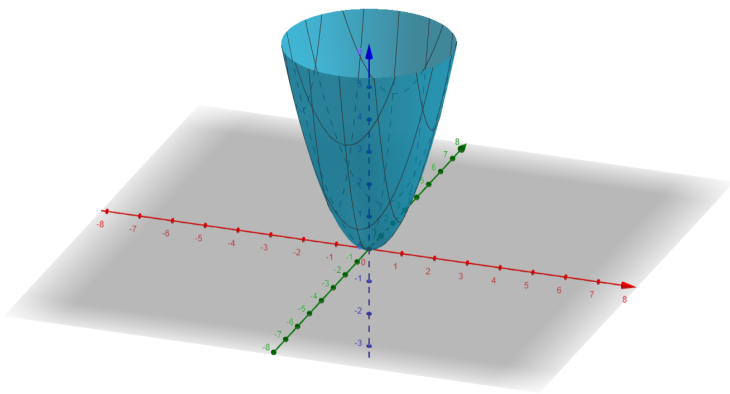
Például a $c = 1; 4; 9$ értékekhez tartozó szintvonalak az origó középpontú $1; 2; 3$ sugarú körvonalak.

1.1.9. Definíció. Kétváltozós függvény *paramétervonalai* a kétváltozós függvény egyik változójának rögzítésével kapott egyváltozós függvények.

1.1.10. Példa. Az $f(x; y) = x^2 + y^2$ függvénynek az y változó rögzítésével kapott paramétervonalai az $f(x; y_0) = x^2 + y_0^2$ egyváltozós függvények, amelyek grafikonjai parabolák. Az x változó rögzítésével kapott paramétervonalak az $f(x_0; y) = x_0^2 + y^2$ egyváltozós függvények, melyek grafikonjai szintén parabolák.

1.1.11. Megjegyzés. Az előbbieket alapján a szintvonalak a kétváltozós függvény grafikonjának a „vízszintes”, a paramétervonalak a kétváltozós függvények grafikonjának a „függőleges” síkkal való metszetei.

1.1.12. Példa. Az $f(x; y) = x^2 + y^2$ függvény grafikonja:



1.1.13. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(a_m) \subset \mathbb{R}^n$ vektorsorozat *konvergens*, ha minden koordinátasorozata konvergens. Ekkor a *határérték* az egyes koordináta sorozatok határértékeiből képzett vektor.

1.1.14. Példa. Az $(\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2})$ sorozat konvergens, határértéke: $(0; 0)$.

1.1.15. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *folytonos* az $x_0 \in D$ helyen, ha minden $(x_m) \subset D$, $x_m \rightarrow x_0$ sorozat esetén $f(x_m)$ az $f(x_0)$ -hoz konvergál.

1.1.16. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a D halmaz egy x_0 torlódási pontjában *létezik a határértéke* és az A -val egyenlő, ha minden $(x_m) \subset D'$, $x_m \rightarrow x_0$ sorozat esetén $f(x_m)$ az A -hoz konvergál.

1.1.17. Tétel. Egy függvény egy adott pontban pontosan akkor folytonos, ha ott létezik a határértéke és megegyezik a függvényértékkel.

1.1.18. Tétel. Ha egy függvénynek létezik határértéke egy adott helyen, akkor az egyértelműen meghatározott.

1.1.19. Megjegyzés. Az egyváltozós függvények körében megismert összeg-, különbség-, szorzat-, hányadosfüggvény folytonosságára és határértékére vonatkozó tételek a többváltozós függvények körében is érvényesek (természetesen a megfelelő általánosítással).

Kidolgozott feladatok

1. Feladat. Számoljuk ki az $f(x; y) = x^2 + 2y$ függvény helyettesítési értékét az $(1; -2)$ helyen!

Megoldás:

A helyettesítési érték:

$$f(1; -2) = 1^2 + 2 \cdot (-2) = -3.$$

2. Feladat. Egy fogyasztó két terméket fogyaszt. Az A termékből x darabot, a B termékből y darabot. Hasznossági függvénye az $U(x; y) = xy$ függvény. Milyen hasznossági szint tartozik ahhoz az esethez, amikor az A termékből 2 és a B termékből 6 darab terméket fogyaszt a fogyasztó?

Megoldás:

Ki kell számolnunk az U függvény helyettesítési értékét az $(2; 6)$ helyen:

$$U(2; 6) = 2 \cdot 6 = 12.$$

3. Feladat. A villanyszámlánk 3 tételből tevődik össze. Az alapdíj 500 forint, a nappali áram díja kWh -ként 30 forint, az éjszakai áram díja kWh -ként 20 forint. Ha x kWh nappali áramot és y kWh éjszakai áramot fogyasztunk, akkor mennyit kell fizetnünk?

Megoldás:

A fizetendő díj:

$$f(x; y) = 500 + 30x + 20y.$$

4. Feladat. Határozzuk meg az \mathbb{R}^2 síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x; y) = \ln(x + 1) + \ln y$$

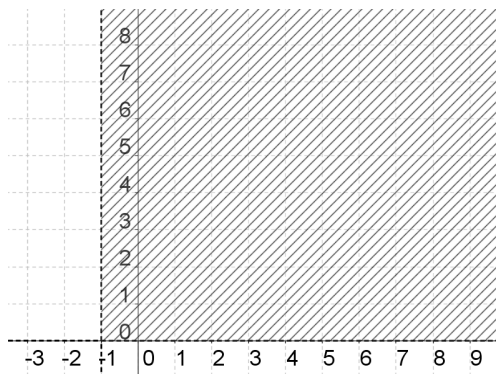
függvény értelmezve van! Ábrázoljuk a kapott halmazt!

Megoldás:

Az f függvény értelmezési tartománya azon pontok halmaza a síkon, amelyekre teljesül, hogy $x + 1 > 0$ és $y > 0$. Tehát az értelmezési tartomány:

$$D_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1 \text{ és } y > 0\}.$$

Az értelmezési tartomány ábrázolása:



5. Feladat. Határozzuk meg az \mathbb{R}^2 síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x; y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

függvény értelmezve van! Ábrázoljuk a kapott halmazt!

Megoldás:

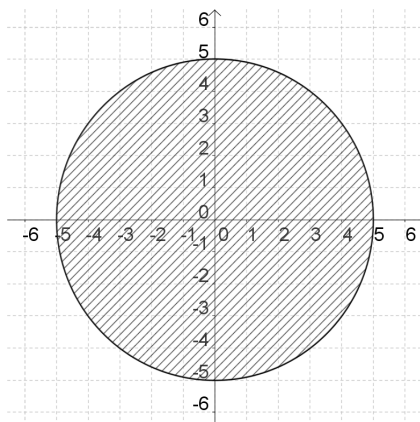
Az f függvény értelmezési tartománya azon pontok halmaza a síkon, amelyekre teljesül, hogy

$$25 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 25.$$

Tehát az értelmezési tartomány egy origó középpontú, 5 egység sugarú zárt körlemez:

$$D_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

Az értelmezési tartomány ábrázolása:



6. Feladat. Határozzuk meg az \mathbb{R}^2 síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x; y) = \ln(y - x)$$

függvény értelmezve van! Ábrázoljuk a kapott halmazt!

Megoldás:

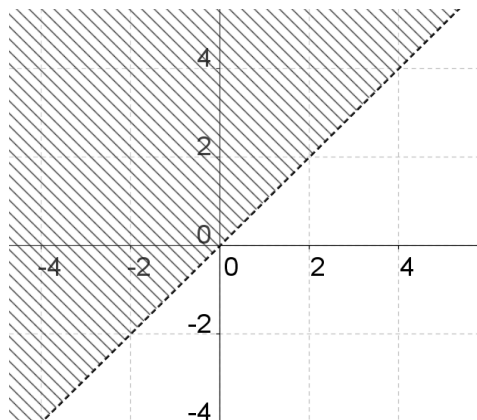
Az f függvény értelmezési tartománya azon pontok halmaza a síkon, amelyekre teljesül, hogy

$$y - x > 0 \quad \Rightarrow \quad y > x.$$

Tehát az értelmezési tartomány:

$$D_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}.$$

Az értelmezési tartomány ábrázolása:



7. Feladat. Határozzuk meg az \mathbb{R}^2 síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x; y) = \frac{x + 2y}{x^2 - 7x + 10}$$

függvény értelmezve van!

Megoldás:

Mivel az $x^2 - 7x + 10 = 0$ egyenlet megoldása:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2},$$

ezért $x \neq 2$, illetve $x \neq 5$. Tehát az értelmezési tartomány:

$$D_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 2; x \neq 5\}.$$

8. Feladat. Határozzuk meg az \mathbb{R}^2 síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x; y) = \arccos(x^2 + y^2 - 2)$$

függvény értelmezve van és ábrázoljuk a kapott halmazt!

Megoldás:

Az f függvény értelmezési tartománya azon pontok halmaza a síkon, amelyekre teljesül, hogy

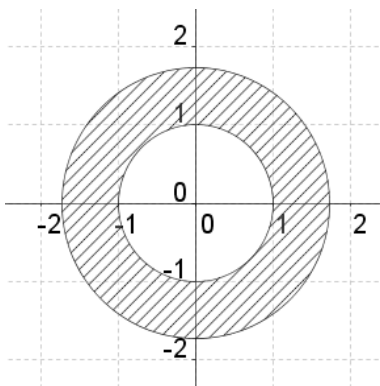
$$-1 \leq x^2 + y^2 - 2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3.$$

Tehát az értelmezési tartomány:

$$D_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Az értelmezési tartomány tehát egy origó középpontú 1 sugarú és egy origó középpontú $\sqrt{3}$ sugarú kör által határolt körgyűrű.

Az értelmezési tartomány ábrázolása:



9. Feladat. Tekintsük az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x; y) = 2x^2 + 2y^2$ függvényt!

- Határozzuk meg az \mathbb{R}^2 síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az f függvény értelmezve van!
- Számoljuk ki az $f(-1; 2)$ függvényértéket!
- Számoljuk ki az $f(2; -3)$ függvényértéket!
- Oldjuk meg az $f(x; 1) = 10$ egyenletet!

- e) Adjuk meg az f függvény értékkészletét!
 f) Határozzuk meg az f függvény $z = 8$ értékhez tartozó szintvonalát és ábrázoljuk a szintvonalat!
 g) Határozzuk meg az f függvény $z = c$ értékhez tartozó szintvonalát!
 h) Adjuk meg az $x = 2$ értékhez tartozó paramétervonalat!
 i) Adjuk meg az $y = 1$ értékhez tartozó paramétervonalat!
 j) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját!

Megoldás:

- a) Az f függvény értelmezési tartománya a teljes \mathbb{R}^2 sík.
 b) Behelyettesítve az f függvénybe az $x = -1$ és $y = 2$ értékeket azt kapjuk, hogy

$$f(-1; 2) = 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 2^2 = 10.$$

- c) Behelyettesítve az f függvénybe az $x = 2$ és $y = -3$ értékeket azt kapjuk, hogy

$$f(2; -3) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot (-3)^2 = 26.$$

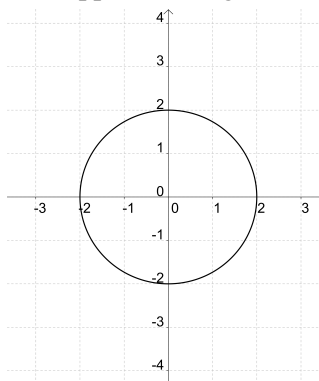
- d) Mivel $f(x; 1) = 2x^2 + 2$, ezért az $2x^2 + 2 = 10$ egyenletet kell megoldanunk, amiből azt kapjuk, hogy $x = \pm 2$.

- e) Mivel minden x, y valós szám esetén $x^2 \geq 0$ és $y^2 \geq 0$, ezért az f függvény értékkészlete: $f(x; y) \in [0; \infty[$.

- f) A $z = 8$ értékhez tartozó szintvonal azon $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ pontok halmaza, amelyekre

$$2x^2 + 2y^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4$$

teljesül, amely egy origó középpontú, 2 sugarú körvonal:



g) A szintvonalak a

$$2x^2 + 2y^2 = c \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{c}{2}$$

egyenlet megoldásai, vagyis az origó középpontú, $\sqrt{\frac{c}{2}}$ sugarú körvonalak.

h) Az $x = 2$ értékhez tartozó paramétervonal

$$f(2; y) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot y^2 = 8 + 2y^2,$$

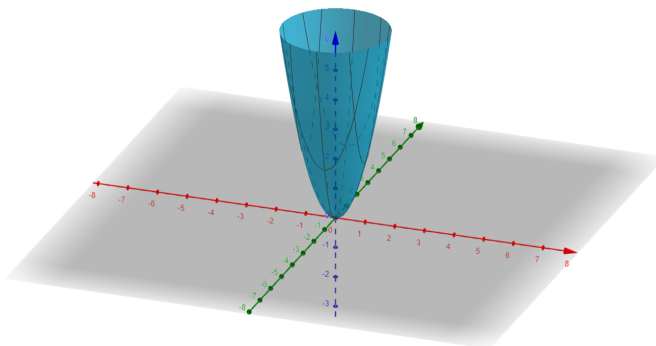
azaz egy parabola.

i) Az $y = 1$ értékhez tartozó paramétervonal

$$f(x; 1) = 2x^2 + 2,$$

azaz szintén egy parabolát kaptunk.

j) A függvény grafikonja:



10. Feladat. Tekintsük az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x; y) = \sqrt{y - x}$ függvényt!

- Határozzuk meg az \mathbb{R}^2 síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az f függvény értelmezve van!
- Számoljuk ki az $f(1; 2)$ függvényértéket!
- Oldjuk meg az $f(x; 1) = 3$ egyenletet!
- Határozzuk meg az f függvény $z = c$ értékhez tartozó szintvonalát!
- Határozzuk meg az f függvény $z = 2$ értékhez tartozó szintvonalát és ábrázoljuk a szintvonalat!
- Adjuk meg az $x = 2$ értékhez tartozó paramétervonalat!
- Adjuk meg az $y = 1$ értékhez tartozó paramétervonalat!

Megoldás:

a) Az f függvény értelmezési tartománya:

$$D_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x\}$$

b) Behelyettesítve az f függvénybe az $x = 1$ és $y = 2$ értékeket azt kapjuk, hogy

$$f(1; 2) = \sqrt{2-1} = 1.$$

c) Mivel $f(x; 1) = \sqrt{1-x}$, ezért a $\sqrt{1-x} = 3$ egyenletet kell megoldanunk, amiből azt kapjuk, hogy $x = -8$.

d) A $z = c$ értékhez tartozó szintvonal azon $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ pontok halmaza, amelyekre

$$\sqrt{y-x} = c \quad \Rightarrow \quad y = x + c^2$$

teljesül.

e) A $z = 2$ értékhez tartozó szintvonal: $y = x + 4$.

f) Az $x = 2$ értékhez tartozó paramétervonal:

$$f(2; y) = \sqrt{y-2}.$$

g) Az $y = 1$ értékhez tartozó paramétervonal:

$$f(x; 1) = \sqrt{1-x}.$$

11. Feladat. Határozzuk meg az

$$\left(\frac{(n+1)^2 - 2n}{3n^2}; \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n; \sqrt[n]{n} \right)$$

sorozat határértékét!

Megoldás:

Az első koordináta sorozat esetén

$$\frac{(n+1)^2 - 2n}{3n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 2n}{3n^2} = \frac{n^2 + 1}{3n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3n^2},$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - 2n}{3n^2} = \frac{1}{3}.$$

A második koordináta sorozat esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2.$$

A harmadik koordináta sorozat esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Tehát minden koordináta sorozat konvergens, és a vektorsorozat határértéke:

$$\left(\frac{1}{3}; e^2; 1 \right).$$

12. Feladat. Konvergens-e az

$$\left(\left(1 + \frac{5}{n} \right)^n; \sqrt[n]{3}; (-1)^n \right)$$

sorozat?

Megoldás:

Egy vektorsorozat akkor konvergens, ha minden koordinátasorozata konvergens.

Mivel a $(-1)^n$ sorozat nem konvergens, ezért a vektorsorozat nem konvergens.

13. Feladat. Konvergens-e az

$$\left(\left(1 + \frac{3}{n} \right)^n; \sqrt[n]{5}; 2^n \right)$$

sorozat?

Megoldás:

Mivel a 2^n sorozat nem konvergens, ezért a vektorsorozat nem konvergens.

14. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (1;2)} (x^2 + y^3)$$

határértékét!

Megoldás:

A határérték:

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (1;2)} (1^2 + 2^3) = 9.$$

15. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y}$$

határértékét!

Megoldás:

Mivel

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y} = \frac{(x + y)^2}{x + y} = x + y,$$

ezért

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y} = \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} (x + y) = 0 + 0 = 0.$$

16. Feladat. Határozzuk meg a

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2 - y^2}{2x - 2y}$$

határértékét!

Megoldás:

Mivel

$$\frac{x^2 - y^2}{2x - 2y} = \frac{(x - y) \cdot (x + y)}{2 \cdot (x - y)} = \frac{x + y}{2},$$

ezért

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x^2 - y^2}{2x - 2y} = \lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} \frac{x + y}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0.$$

17. Feladat. Létezik-e az

$$f(x; y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

függvénynek az origóban határértéke?

Megoldás:

Ha a függvénynek létezne az origóban határértéke, akkor teljesülne, hogy minden $(x_n; y_n) \rightarrow (0; 0)$ sorozat esetén az $f(x_n; y_n)$ függvényértékek sorozata ugyanahhoz a számhoz konvergál.

Azonban jelen esetben, ha tekintjük az $(\frac{1}{n}; \frac{1}{n})$ és az $(\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2})$ sorozatokat, akkor a függvényértékek sorozata nem ugyanahhoz a számhoz konvergál. Ugyanis egyrészt

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (\frac{1}{n}; \frac{1}{n})} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = 1,$$

másrészt

$$\lim_{(x;y) \rightarrow \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2}\right)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{n^2+1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4}{n^5 + n^3} = 0.$$

Tehát a függvénynek nem létezik a határértéke az origóban.

18. Feladat. Vizsgáljuk meg, hogy a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi \cdot x}{4x + y} \right)$$

és a

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi \cdot x}{4x + y} \right)$$

határérték megegyezik-e?

Megoldás:

Mivel

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi \cdot x}{4x + y} = \sin 0 = 0,$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi \cdot x}{4x + y} \right) = 0.$$

Mivel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi \cdot x}{4x + y} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ezért

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi \cdot x}{4x + y} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tehát a két határérték értéke nem egyezik meg.

19. Feladat. Határozzuk meg a g függvényt úgy, hogy a

$$\begin{cases} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}, & \text{ha } x - y \neq 0 \\ g(x; y), & \text{ha } x - y = 0 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen!

Megoldás:

Mivel a

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y}$$

az $x \mapsto \sin x$ függvény differenciáhányadosa, ezért

$$\lim_{x-y \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos x,$$

így ha $g(x; y) = \cos x$, akkor az f az origóban folytonos lesz, tehát minden pontban folytonos lesz.

20. Feladat. Folytonos-e az

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x; y) \neq (0; 0) \\ 5, & \text{ha } (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$

függvény az origóban?

Megoldás:

Az f függvény akkor lesz folytonos az origóban, ha minden $(x_n; y_n) \rightarrow (0; 0)$ sorozat esetén

$$f(x_n; y_n) \rightarrow f(0; 0) = 5.$$

Tekintsük az $(\frac{1}{n}; \frac{1}{n})$ sorozatot! Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq f(0; 0).$$

Tehát van olyan $(0; 0)$ -hoz konvergáló sorozat, amelyre a függvényértékek sorozata nem $f(0; 0)$ -hoz konvergál, így az f függvény nem folytonos az origóban.

1.2. Többváltozós függvények differenciálhatósága

1.2.1. Definíció. Tegyük fel, hogy $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz! Azt mondjuk, hogy az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható az $x_0 \in D$ helyen, és deriváltja az $a \in \mathbb{R}^n$ vektor, ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - a \cdot h}{|h|} = 0.$$

Az a vektort az f függvény x_0 helyen vett *gradiensének* vagy *gradiens vektorának* nevezzük. Az f függvény gradiens vektorára szokás a $\text{grad } f$ vagy a ∇f jelölést is használni.

1.2.2. Megjegyzés. Ha speciálisan f egyváltozós differenciálható függvény, akkor

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - a \cdot h}{h} = 0$$

azt jelenti, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{a \cdot h}{h} = 0,$$

azaz

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

1.2.3. Tétel. (a gradiens vektor tulajdonságai)

Ha f és g totálisan differenciálható függvények és $c \in \mathbb{R}$, akkor

- $\text{grad}(c \cdot f) = c \cdot \text{grad } f$;
- $\text{grad}(f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$;
- $\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad } f \cdot g + f \cdot \text{grad } g$;
- $\text{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\text{grad } f \cdot g - f \cdot \text{grad } g}{g^2}$.

1.2.4. Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz! Az f függvény pontosan akkor totálisan differenciálható az $x_0 \in D$ helyen, ha létezik olyan $a \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

1.2.5. Megjegyzés. Kétfváltozós függvény totális deriváltjának geometriai jelentése:

a $z = f(x; y)$ függvénynek az $(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ pontjába érintősíkk rajzolható, melynek egyenlete:

$$z = a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + f(x_0; y_0),$$

ahol $a = (a_1; a_2)$ az f függvény $(x_0; y_0)$ pontbeli deriváltvektora.

1.2.6. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz! Az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az i -edik változója szerint parciálisan differenciálhatónak nevezzük az $x_0 \in D$ helyen, ha létezik a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot e_i) - f(x_0)}{t}$$

határérték, ahol e_1, \dots, e_n az \mathbb{R}^n természetes bázisvektorát jelöli. Az előbbi határértéket az f függvény x_0 -beli i -edik változó szerinti parciális differenciálhányadosának, parciális deriváltfüggvényének vagy parciális deriváltjának nevezzük.

Az f függvény parciális deriváltjára az alábbi jelölések használatosak:

$$\partial_i f; \frac{\partial f}{\partial x_i}; D_i f; f'_{x_i}$$

1.2.7. Megjegyzés. Egy $(x; y) \mapsto f(x; y)$ függvény $(x_0; y_0)$ pontbeli x szerinti parciális deriváltjának geometriai jelentése rögzített $y = y_0$ esetén az $x \mapsto f(x; y_0)$ függvény x_0 -beli érintőegyenesének meredeksége.

Egy $(x; y) \mapsto f(x; y)$ függvény $(x_0; y_0)$ pontbeli y szerinti parciális deriváltjának geometriai jelentése rögzített $x = x_0$ esetén az $y \mapsto f(x_0; y)$ függvény y_0 -beli érintőegyenesének meredeksége.

1.2.8. Megjegyzés. Egy n -változós függvény valamely változó szerinti parciális deriváltját úgy számoljuk ki, hogy minden más változós konstansnak tekintünk a deriválás során.

1.2.9. Példa. Az $f(x; y; z) = x \cdot y + y \cdot z + z^2$ függvény x változó szerinti parciális deriváltfüggvénye:

$$f'_x(x; y; z) = y.$$

Az f függvény y változó szerinti parciális deriváltfüggvénye:

$$f'_y(x; y; z) = x + z.$$

Az f függvény z változó szerinti parciális deriváltfüggvénye:

$$f'_z(x; y; z) = y + 2z.$$

1.2.10. Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz! Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény totálisan differenciálható az $x_0 \in D$ helyen, akkor létezik minden változó szerinti parciális deriváltja és a deriváltfüggvény:

$$(\partial_1 f(x_0); \dots; \partial_n f(x_0)).$$

1.2.11. Példa. Az $f(x; y) = x^2 + y^2$ függvény esetén $f'_x(x; y) = 2x$ és $f'_y(x; y) = 2y$. A deriváltfüggvény az $(1; 2)$ pontban: $(2; 4)$.

1.2.12. Megjegyzés. Totálisan differenciálható függvény minden változó szerint parciálisan differenciálható és a gradiens vektor a parciális deriváltakból képzett vektor.

1.2.13. Tétel. Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz! Ha az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény parciálisan differenciálható az $x_0 \in D$ helyen és a parciális deriváltfüggvények folytonosak, akkor f totálisan differenciálható.

1.2.14. Megjegyzés. Minden totálisan differenciálható függvény parciálisan differenciálható minden változó szerint, azonban az állítás megfordítása nem igaz.

Attól, hogy egy függvénynek létezik minden változó szerint a parciális deriváltfüggvénye még nem biztos, hogy totálisan differenciálható.

Ha azonban a parciális deriváltfüggvények folytonosak is, akkor már totálisan differenciálható a függvény.

1.2.15. Definíció. Az $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $v \in \mathbb{R}^n$ iránymenti deriváltja az $x_0 \in D$ helyen:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot v) - f(x_0)}{t}.$$

Jelölés: $\partial_v f$; $\frac{\partial f}{\partial v}$; $D_v f$; f'_v

1.2.16. Megjegyzés. Egy függvény v iránymenti deriváltja szemléletesen azt fejezi ki, hogy az értelmezési tartomány egy adott pontjából a v irányban haladva mennyi a függvényértékek változási gyorsasága.

1.2.17. Megjegyzés. Egy skalármező gradiense egy pontban megadja a legnagyobb meredekség irányát és a legnagyobb meredekség nagyságát. Egy lokális minimumban, egy lokális maximumban vagy egy nyeregpontban a gradiens értéke nulla.

A gradiens segítségével tetszőleges irányú meredekség meghatározható. Ez a meredekség éppen az iránymenti derivált.

1.2.18. Tétel. Ha az f függvény totálisan differenciálható, akkor az iránymenti derivált a gradiens vektor és az adott irányba mutató egységvektor skaláris szorzata:

$$\text{grad } f \cdot \frac{v}{|v|}.$$

1.2.19. Definíció. Egy $(x; y) \mapsto f(x; y)$ kétváltozós, totálisan differenciálható függvény érintősíkjának egyenlete az $(x_0; y_0)$ helyen:

$$z = f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0).$$

1.2.20. Tétel. Egy $(x; y) \mapsto f(x; y)$ kétváltozós, totálisan differenciálható függvény érintősíkjának egyenlete az $(x_0; y_0)$ helyen:

$$z = f(x_0; y_0) + \text{grad } f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0).$$

1.2.21. Definíció. Egy $(x; y) \mapsto f(x; y)$ kétváltozós, totálisan differenciálható függvény *lineáris közelítése* az $(x_0; y_0)$ helyen:

$$f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + \text{grad } f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0).$$

1.2.22. Definíció. Többváltozós függvény *másodrendű parciális deriváltfüggvényei* az elsőrendű parciális deriváltfüggvények parciális deriváltfüggvényei.

Többváltozós függvény *m-edrendű parciális deriváltfüggvényei* az $m - 1$ -edrendű parciális deriváltfüggvények parciális deriváltfüggvényei.

A másodrendű parciális deriváltfüggvény jelölései:

$$\partial_i \partial_j f; \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}; D_i D_j f; f''_{x_i x_j}.$$

Az m -edrendű parciális deriváltfüggvény jelölései analóg módon történnek.

Az $f_{x_{i_1} \dots x_{i_m}}^{(m)}$ parciális deriváltfüggvényeket *tiszta m-edrendű parciális deriváltfüggvényeknek* mondjuk, ha $i_1 = \dots = i_m$. Ellenkező esetben *vegyes másodrendű parciális deriváltfüggvényekről* beszélünk.

1.2.23. Megjegyzés. Az $(x; y) \mapsto f(x; y)$ kétváltozós függvény *tiszta másodrendű deriváltfüggvényei* f''_{xx} és f''_{yy} , *vegyes parciális deriváltfüggvényei* f''_{xy} és f''_{yx} .

1.2.24. Tétel. (Young-tétel.)

Ha egy többváltozós függvény parciális deriváltfüggvényei folytonos függvények, akkor a vegyes másodrendű parciális deriváltfüggvényei egyenlőek, azaz

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}.$$

1.2.25. Következmény. Az $(x; y) \mapsto f(x; y)$ függvény esetén, ha f''_{xy} és f''_{yx} folytonos függvények, akkor

$$f''_{xy}(x; y) = f''_{yx}(x; y).$$

1.2.26. Definíció. Ha $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer parciálisan differenciálható függvény és

$$f''_{xx}(x; y) + f''_{yy}(x; y) = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvény eleget tesz a *kétdimenziós Laplace-egyenletnek*.

1.2.27. Definíció. Ha $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer parciálisan differenciálható függvény és

$$f''_{xx}(x; y; z) + f''_{yy}(x; y; z) + f''_{zz}(x; y; z) = 0,$$

akkor azt mondjuk, hogy az f függvény eleget tesz a *háromdimenziós Laplace-egyenletnek*.

1.2.28. Megjegyzés. A Laplace-egyenletet kielégítik például állandósult állapotú hőmérséklet-eloszlások a térben, a gravitációs potenciálfüggvények, és az elektrosztatikus potenciálfüggvények.

1.2.29. Példa. Az $f(x; y; z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ függvény eleget tesz a háromdimenziós Laplace-egyenletnek, ugyanis egyrészt

$$f'_x(x; y; z) = 2x \quad \Rightarrow \quad f''_{xx}(x; y; z) = 2,$$

másrészt

$$f'_y(x; y; z) = 2y \quad \Rightarrow \quad f''_{yy}(x; y; z) = 2,$$

harmadrészt

$$f'_z(x; y; z) = -4z \quad \Rightarrow \quad f''_{zz}(x; y; z) = -4,$$

így

$$f''_{xx}(x; y; z) + f''_{yy}(x; y; z) + f''_{zz}(x; y; z) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

1.2.30. Definíció. Ha $u: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer parciálisan differenciálható függvény és $c \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy teljesül az

$$u''_{tt}(t; x) = c^2 \cdot u''_{xx}(t; x)$$

egyenlet, akkor azt mondjuk, hogy az u függvény eleget tesz az *egydimenziós hullámeqyenletnek*.

1.2.31. Megjegyzés. Ha a vízben állunk, akkor a lábunkon érezhetjük a vízszint mozgását, ahogy a hullámok elhaladnak. Ilyenkor periodikus függőleges mozgást látunk az idő függvényében. Ezt a jelenséget a fizikában az egydimenziós hullámegyenlettel fejezik ki. Az u a vízfelszín magassága, x a távolság-változó, t az időváltozó, és c a sebesség, amivel a hullámok haladnak.

1.2.32. Példa. Az $u(t; x) = \sin(x + c \cdot t)$ függvény eleget tesz a hullámegyenletnek, ugyanis egyrészt

$$u'_t(t; x) = \cos(x + c \cdot t) \cdot c \quad \Rightarrow \quad u''_{tt}(t; x) = -\sin(x + c \cdot t) \cdot c^2,$$

másrészt

$$u'_x(t; x) = \cos(x + c \cdot t) \quad \Rightarrow \quad u''_{xx}(t; x) = -\sin(x + c \cdot t),$$

így

$$u''_{tt}(t; x) = c^2 \cdot u''_{xx}(t; x).$$

Kidolgozott feladatok

21. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = x^2 + 6xy + y^3$ függvény első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeit! Adjuk meg a deriváltfüggvények helyettesítési értékét az $(1; 0)$ helyen!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f'_x(x; y) &= 2x + 6y \\ f'_y(x; y) &= 6x + 3y^2. \end{aligned}$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 2 & f''_{xy}(x; y) &= 6 \\ f''_{yx}(x; y) &= 6 & f''_{yy}(x; y) &= 6y. \end{aligned}$$

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények helyettesítési értékei az $(1; 0)$ helyen:

$$\begin{aligned} f'_x(1; 0) &= 2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 2 \\ f'_y(1; 0) &= 6 \cdot 1 + 3 \cdot 0^2 = 6. \end{aligned}$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények helyettesítési értékei az $(1; 0)$ helyen:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(1; 0) &= 2 & f''_{xy}(1; 0) &= 6 \\ f''_{yx}(1; 0) &= 6 & f''_{yy}(1; 0) &= 6 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

22. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = \ln(x^2 + y^3)$ függvény első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeit! Számoljuk ki az $f''_{xx}(1; 1)$ értéket!

Megoldás:

A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \ln x & k'(x) &= \frac{1}{x} \\ b(x; y) &= x^2 + y^3 & b'_x(x; y) &= 2x \\ & & b'_y(x; y) &= 3y^2. \end{aligned}$$

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Tehát az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y) = \frac{1}{x^2 + y^3} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + y^3};$$

$$f'_y(x; y) = \frac{1}{x^2 + y^3} \cdot 3y^2 = \frac{3y^2}{x^2 + y^3}.$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények kiszámolásához a törtfüggvény deriválási szabályát kell alkalmaznunk:

$$f''_{xx}(x; y) = \frac{2 \cdot (x^2 + y^3) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^3)^2} = \frac{2y^3 - 2x^2}{(x^2 + y^3)^2};$$

$$f''_{xy}(x; y) = \frac{-3y^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^3)^2} = \frac{-6xy^2}{(x^2 + y^3)^2};$$

$$f''_{yx}(x; y) = \frac{-2x \cdot 3y^2}{(x^2 + y^3)^2} = \frac{-6xy^2}{(x^2 + y^3)^2};$$

$$f''_{yy}(x; y) = \frac{6y \cdot (x^2 + y^3) - 3y^2 \cdot 3y^2}{(x^2 + y^3)^2} = \frac{6x^2y - 3y^4}{(x^2 + y^3)^2}.$$

Az $f''_{xx}(1; 1)$ érték:

$$f''_{xx}(1; 1) = \frac{2 - 2}{2^2} = 0.$$

23. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = \sqrt{x + y^2}$ függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit!

Megoldás:

Az f függvény összetett. A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} & k'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \\ b(x; y) &= x + y^2 & b'_x(x; y) &= 1 \\ & & b'_y(x; y) &= 2y. \end{aligned}$$

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Tehát az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x + y^2}} \cdot 1 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x + y^2}};$$

$$f'_y(x; y) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x + y^2}} \cdot 2y = \frac{2y}{2 \cdot \sqrt{x + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x + y^2}}.$$

24. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = \sqrt{x^3 + 2xy + y^2}$ függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit!

Megoldás:

Az f függvény összetett. A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} & k'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \\ b(x; y) &= x^3 + 2xy + y^2 & b'_x(x; y) &= 3x^2 + 2y \\ & & b'_y(x; y) &= 2x + 2y. \end{aligned}$$

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Az x változó szerinti parciális deriváltfüggvény:

$$f'_x(x; y) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3 + 2xy + y^2}} \cdot (3x^2 + 2y) = \frac{3x^2 + 2y}{2 \cdot \sqrt{x^3 + 2xy + y^2}}.$$

Az y változó szerinti parciális deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned} f'_y(x; y) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3 + 2xy + y^2}} \cdot (2x + 2y) = \frac{2x + 2y}{2 \cdot \sqrt{x^3 + 2xy + y^2}} = \\ &= \frac{x + y}{\sqrt{x^3 + 2xy + y^2}}. \end{aligned}$$

25. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = e^{2xy}$ függvény első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, továbbá az $f''_{xx}(0; 1)$ értéket!

Megoldás:

Az f függvény összetett. A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai

az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= e^x & k'(x) &= e^x \\ b(x; y) &= 2xy & b'_x(x; y) &= 2y \\ & & b'_y(x; y) &= 2x. \end{aligned}$$

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Tehát az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f'_x(x; y) &= e^{2xy} \cdot 2y; \\ f'_y(x; y) &= e^{2xy} \cdot 2x. \end{aligned}$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények kiszámolásához a szorzatfüggvényre és a konstansszorzóra vonatkozó deriválási szabályt alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= e^{2xy} \cdot 4y^2; \\ f''_{xy}(x; y) &= e^{2xy} \cdot 4xy + e^{2xy} \cdot 2 = e^{2xy} \cdot (4xy + 2); \\ f''_{yx}(x; y) &= e^{2xy} \cdot 4xy + e^{2xy} \cdot 2 = e^{2xy} \cdot (4xy + 2); \\ f''_{yy}(x; y) &= e^{2xy} \cdot 4x^2. \end{aligned}$$

Az $f''_{xx}(0; 1)$ érték: $e^0 \cdot 4 \cdot 1^2 = 4$.

26. Feladat. Adjuk meg az $f(x; y) = \operatorname{tg}(x^2 + xy + y^2)$ függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit és az $f''_{xx}(x; y)$ másodrendű parciális deriváltfüggvényt!

Megoldás:

Az f függvény összetett. A külső függvény, a belső függvény és ezek deriváltjai az alábbiak:

$$\begin{aligned} k(x) &= \operatorname{tg} x & k'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ b(x; y) &= x^2 + xy + y^2 & b'_x(x; y) &= 2x + y \\ & & b'_y(x; y) &= 2y + x. \end{aligned}$$

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Tehát az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y) = \frac{1}{\cos^2(x^2 + xy + y^2)} \cdot (2x + y) = \frac{2x + y}{\cos^2(x^2 + xy + y^2)};$$

$$f'_y(x; y) = \frac{1}{\cos^2(x^2 + xy + y^2)} \cdot (2y + x) = \frac{2y + x}{\cos^2(x^2 + xy + y^2)}.$$

Az f''_{xx} parciális deriváltfüggvényt a hányadosfüggvény és az összetett függvény deriválási szabályával kapjuk:

$$f''_{xx}(x; y) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2 + xy + y^2)}{\cos^4(x^2 + xy + y^2)} - \frac{(2x + y) \cdot 2 \cdot \cos(x^2 + xy + y^2)}{\cos^4(x^2 + xy + y^2)} \cdot \frac{(-\sin(x^2 + xy + y^2)) \cdot (2x + y)}{\cos^4(x^2 + xy + y^2)}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= \frac{2 \cdot \cos(x^2 + xy + y^2)}{\cos^3(x^2 + xy + y^2)} - \\ &= \frac{(2x + y) \cdot 2 \cdot (-\sin(x^2 + xy + y^2)) \cdot 2x}{\cos^3(x^2 + xy + y^2)} = \\ &= \frac{2 \cos(x^2 + xy + y^2) + (8x^2 + 4xy) \cdot \sin(x^2 + y^2)}{\cos^3(x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

27. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x; y) = \frac{x^5 + xy}{(x + y)^3}$$

függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények kiszámolásához a hányadosfüggvény deriválási szabályát alkalmazzuk úgy, hogy a nevező összetett függvény:

$$f'_x(x; y) = \frac{(5x^4 + y) \cdot (x + y)^3 - (x^5 + xy) \cdot 3 \cdot (x + y)^2}{(x + y)^6}$$

$$f'_y(x; y) = \frac{x \cdot (x + y)^3 - (x^5 + xy) \cdot 3 \cdot (x + y)^2}{(x + y)^6}.$$

28. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x; y) = x^y + y^x$$

függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit!

Megoldás:

Felhasználjuk, hogy összeget tagonként differenciálunk, továbbá az x szerinti parciális deriváltfüggvény esetén az x^y függvény kitevője konstans, így a deriváltja $y \cdot x^{y-1}$, míg az y^x függvény esetében az alap a konstans, így a deriváltja $y^x \cdot \ln y$.

Az y szerinti deriváltat „fordított szereposztással” hasonlóan kapjuk. Tehát az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y) = y \cdot x^{y-1} + y^x \cdot \ln y$$

$$f'_y(x; y) = x^y \cdot \ln x + x \cdot y^{x-1}.$$

29. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y; z) = x^3 + xy + y^3 + y \cdot \sin x \cdot \cos z$ függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y; z) = 3x^2 + y + y \cdot \cos x \cdot \cos z;$$

$$f'_y(x; y; z) = x + 3y^2 + \sin x \cdot \cos z$$

$$f'_z(x; y; z) = -y \cdot \sin x \cdot \sin z.$$

30. Feladat. Tekintsük az $f(x; y; z) = \ln(x^2 + xyz + y^2)$ függvényt!

- Számoljuk ki az $f(1; 0; 0)$ értéket!
- Adjuk meg az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit!
- Határozzuk meg az(oka)t a ponto(ka)t, amely(ek)ben az f függvény valamennyi elsőrendű parciális deriváltfüggvénye zérus!
- Adjuk meg az f függvény tiszta másodrendű parciális deriváltfüggvényeit!
- Határozzuk meg az f''_{xy} parciális deriváltfüggvényt!
- Számoljuk ki az $f''_{xy}(1; 0; 1)$ értéket!

Megoldás:

- Az $f(1; 0; 0)$ érték: $f(1; 0; 0) = \ln(1 + 0 + 0) = 0$.

b) Az f függvény x változó szerinti parciális deriváltfüggvénye:

$$f'_x(x; y; z) = \frac{2x + yz}{x^2 + xyz + y^2}.$$

Az f függvény y változó szerinti parciális deriváltfüggvénye:

$$f'_y(x; y; z) = \frac{xz + 2y}{x^2 + xyz + y^2}.$$

Az f függvény z változó szerinti parciális deriváltfüggvénye:

$$f'_z(x; y; z) = \frac{xy}{x^2 + xyz + y^2}.$$

c) Meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} \frac{2x + yz}{x^2 + xyz + y^2} &= 0 \\ \frac{xz + 2y}{x^2 + xyz + y^2} &= 0 \\ \frac{xy}{x^2 + xyz + y^2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az utolsó egyenlet csak akkor teljesül, ha $x = 0$, vagy $y = 0$. Ha $x = 0$, akkor a második egyenletből $y = 0$ adódik. Ebben az esetben a z értéke tetszőleges. Ha $y = 0$, akkor az első egyenletből $x = 0$. Ebben az esetben is z tetszőleges. Tehát a $(0; 0; t)$ pontokban lesznek az elsőrendű parciális deriváltfüggvények nullák, ahol t tetszőleges valós szám.

d) Az f függvény x változó szerinti parciális deriváltfüggvényének az x változó szerinti parciális deriváltfüggvénye:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y; z) &= \frac{2 \cdot (x^2 + xyz + y^2) - (2x + yz) \cdot (2x + yz)}{(x^2 + xyz + y^2)^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 2xyz + 2y^2 - 4x^2 - 2xyz - 2xyz - y^2z^2}{(x^2 + xyz + y^2)^2} = \\ &= \frac{-2x^2 + 2y^2 - 2xyz - y^2z^2}{(x^2 + xyz + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Az f függvény y változó szerinti parciális deriváltfüggvényének y változó szerinti parciális deriváltfüggvénye:

$$\begin{aligned} f''_{yy}(x; y; z) &= \frac{2 \cdot (x^2 + xyz + y^2) - (xz + 2y) \cdot (xz + 2y)}{(x^2 + xyz + y^2)^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 2xyz + 2y^2 - x^2z^2 - 2xyz - 2xyz - 4y^2}{(x^2 + xyz + y^2)^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 2y^2 - 2xyz - x^2z^2}{(x^2 + xyz + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Az f függvény z változó szerinti parciális deriváltfüggvényének z változó szerinti parciálisderiváltfüggvénye:

$$f''_{zz}(x; y; z) = \frac{-x^2y^2}{(x^2 + xyz + y^2)^2}.$$

e) A keresett deriváltfüggvény:

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x; y; z) &= \frac{z \cdot (x^2 + xyz + y^2) - (2x + yz) \cdot (xz + 2y)}{(x^2 + xyz + y^2)^2} = \\ &= \frac{x^2z + xyz^2 + y^2z - 2x^2z - 4xy - xyz^2 - 2y^2z}{(x^2 + xyz + y^2)^2} = \\ &= \frac{-y^2z - x^2z - 4xy}{(x^2 + xyz + y^2)^2}. \end{aligned}$$

f) Az $f''_{xy}(1; 0; 1)$ érték:

$$f''_{xy}(1; 0; 1) = \frac{-1}{1^2} = -1.$$

31. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = x^2 + 5xy + y$ függvény $P = (2; -1)$ pontbeli gradiens vektorát!

Megoldás:

A függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei és azok helyettesítési értékei a P pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) = 2x + 5y &\quad \Rightarrow \quad f'_x(P) = 4 - 5 = -1 \\ f'_y(x, y) = 5x + 1 &\quad \Rightarrow \quad f'_y(P) = 10 + 1 = 11. \end{aligned}$$

A gradiens vektor: $\text{grad } f(P) = (-1; 11)$.

32. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y; z) = x^3 + 5xy^2 + y + z^2$ függvény $P = (2; -1; 0)$ pontbeli gradiens vektorát!

Megoldás:

A függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei és azok helyettesítési értékei a P pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y, z) &= 3x^2 + 5y^2 & \Rightarrow & f'_x(P) = 17 \\ f'_y(x, y, z) &= 10xy + 1 & \Rightarrow & f'_y(P) = -19 \\ f'_z(x, y, z) &= 2z & \Rightarrow & f'_z(P) = 0. \end{aligned}$$

A gradiens vektor: $\text{grad } f(P) = (17; -19; 0)$.

33. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = x^5 + y^2 - 4xy$ függvénynek a $P = (1; -2)$ pontbeli $v = (3; 4)$ iránymenti deriváltját!

Megoldás:

A függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei és azok helyettesítési értékei a P pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 5x^4 - 4y & \Rightarrow & f'_x(P) = 13 \\ f'_y(x, y) &= 2y - 4x & \Rightarrow & f'_y(P) = -8. \end{aligned}$$

A gradiens vektor $\text{grad } f(P) = (13; -8)$. Az irányvektorral egyező irányú egységvektor felírásához kiszámoljuk az irányvektor hosszát:

$$|v| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

így az irányvektorral egyező irányú egységvektor

$$v_0 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right).$$

Az iránymenti derivált:

$$f'_v(P) = \partial_v f(P) = \text{grad } f(P) \cdot v_0 = 13 \cdot \frac{3}{5} + (-8) \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5}.$$

34. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = \frac{x^3}{y^2} + e^{xy}$ függvény $P = (0; 1)$ pontbeli $v = (-5; 12)$ iránymenti deriváltját!

Megoldás:

A függvényt átírhatjuk $f(x; y) = x^3y^{-2} + e^{xy}$ alakra. Az elsőrendű parciális

deriváltfüggvények és azok helyettesítési értékei a P pontban:

$$f'_x(x, y) = 3x^2y^{-2} + e^{xy} \cdot y = \frac{3x^2}{y^2} + e^{xy} \cdot y \quad \Rightarrow \quad f'_x(P) = 1$$

$$f'_y(x, y) = -2x^3y^{-3} + e^{xy} \cdot x = -\frac{2x^3}{y^3} + e^{xy} \cdot x \quad \Rightarrow \quad f'_y(P) = 0.$$

A gradiens vektor: $\text{grad } f(P) = (1; 0)$. Az irányvektor hossza:

$$|v| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13,$$

így az irányvektorral egyező irányú egységvektor:

$$v_0 = \left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right).$$

Az iránymenti derivált:

$$f'_v(P) = \partial_v f(P) = \text{grad } f(P) \cdot v_0 = 1 \cdot \left(-\frac{5}{13} \right) + 0 \cdot \frac{12}{13} = -\frac{5}{13}.$$

35. Feladat. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyekben az $f(x; y) = x^2 + y^2$ függvény a $P = (1; 1)$ pontban leggyorsabban nő/leggyorsabban csökken/nem változik!

Megoldás:

Mivel

$$f'_v(P) = \text{grad } f(P) \cdot v_0 = |\text{grad } f(P)| \cdot |v_0| \cdot \cos \varphi = |\text{grad } f(P)| \cdot \cos \varphi,$$

ahol φ a gradiens vektor és az irányvektor által bezárt szög, ezért az f függvény akkor nő a leggyorsabban, ha $\cos \varphi = 1$, azaz ha v éppen a gradiens irányába mutat. Tehát az f értelmezési tartományának minden pontjában abban az irányban növekszik a leggyorsabban, amerre a P -beli gradiens mutat. Ebben az irányban az iránymenti derivált a gradiens hossza:

$$f'_v(P) = |\text{grad } f(P)|.$$

Hasonlóan, az f függvény $-\text{grad } f(P)$ irányban csökken a lehető leggyorsabban (azaz akkor, amikor $\cos \varphi = -1$, vagyis $\varphi = \pi$). Ebben az irányban az iránymenti derivált:

$$f'_v(P) = -|\text{grad } f(P)|.$$

A gradiensre merőleges irányban az iránymenti derivált 0, ekkor $\varphi = \pi/2$ és

$$f'_v(P) = 0.$$

Az $f(x; y) = x^2 + y^2$ függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei és azok helyettesítési értéke a P pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(x; y) = 2x &\quad \Rightarrow \quad f'_x(P) = 2 \cdot 1 = 2 \\ f'_y(x; y) = 2y &\quad \Rightarrow \quad f'_y(P) = 2 \cdot 1 = 2. \end{aligned}$$

A P -beli gradiens vektor: $\text{grad } f(P) = (2; 2)$, így a $v = (2; 2)$ irányban a leggyorsabb a növekedés, a $-v = (-2; -2)$ irányban a leggyorsabb a csökkenés, a „nulla változás” iránya merőleges a gradiensre, azaz $(-1; 1)$ és $(1; -1)$.

36. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = 8 - 4x^2 - 2y^2$ függvénnyel leírt domb legmeredekebb lejtőjének irányát az $P = (1; 1)$ pontban!

Megoldás:

Az $f(x; y) = 8 - 4x^2 - 2y^2$ függvény elsőrendű parciális deriváltjai

$$\begin{aligned} f'_x(x; y) = -8x &\quad \Rightarrow \quad f'_x(P) = -8 \cdot 1 = -8 \\ f'_y(x; y) = -4y &\quad \Rightarrow \quad f'_y(P) = -4 \cdot 1 = -4. \end{aligned}$$

A P pontbeli gradiens vektor $\text{grad } f(P) = (-8; -4)$, így a legmeredekebb lejtő iránya: $(8; 4)$.

37. Feladat. Az elektromos potenciál az $(x; y; z)$ pontban

$$f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}.$$

Milyen irányba kellene elindulni a $P = (2; 3; 4)$ pontból ahhoz, hogy az elektromos potenciál növekedése maximális legyen?

Megoldás:

A gyököt hatványalakban felírva

$$f(x; y; z) = (x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{\frac{1}{2}}$$

adódik. Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények és azok P pontbeli helyettesítési értéke:

$$\begin{aligned} f'_x(x; y; z) &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}} \\ f'_y(x; y; z) &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4y = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}} \\ f'_z(x; y; z) &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2y^2 + 3z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6z = \frac{3z}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}. \end{aligned}$$

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények helyettesítési értékei a P pontban:

$$f'_x(P) = \frac{2}{\sqrt{70}}; \quad f'_y(P) = \frac{6}{\sqrt{70}}; \quad f'_z(P) = \frac{12}{\sqrt{70}}.$$

A P pontbeli gradiens vektor:

$$\text{grad } f(P) = \left(\frac{2}{\sqrt{70}}; \frac{6}{\sqrt{70}}; \frac{12}{\sqrt{70}} \right).$$

Tehát az $(1; 3; 6)$ irányban lesz maximális a potenciál növekedése.

38. Feladat. Egy lejtő felületét az $f(x; y) = y^2 \cdot e^{-2x+1}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény grafikonja írja le. A $P = (\frac{1}{2}; 1)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk le. Milyen irányba fog elindulni a vízcsepp? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = y^2 \cdot e^{-2x+1} \cdot (-2)$$

$$f'_y(x; y) = 2y \cdot e^{-2x+1}.$$

A parciális deriváltfüggvény helyettesítési értékei a P pontban:

$$f'_x(P) = 1 \cdot (-2) = -2$$

$$f'_y(P) = 2.$$

Tehát a gradiens vektor: $\text{grad } f(P) = (-2; 2)$. A vízcsepp abba az irányba fog elindulni, amely irányban a lejtő a leginkább lejt, azaz amerre a legkisebb az iránymenti derivált értéke, vagy a gradienssel ellentétes irányba.

A vízcsepp a $(2; -2)$ irányba fog elindulni. A maximális meredekség a gradiens irányában van, értéke a gradiens vektor hossza:

$$\sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

39. Feladat. Van-e olyan v irány, amerre az $f(x; y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ függvény deriváltja a $P = (1; 2)$ pontban 14?

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 2x - 3y$$

$$f'_y(x; y) = -3x + 8y.$$

A parciális deriváltfüggvény helyettesítési értékei a P pontban:

$$f'_x(P) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -4$$

$$f'_y(P) = -3 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 13.$$

Tehát a gradiens vektor: $\text{grad } f(P) = (-4; 13)$. A változás maximális gyorsasága, vagyis gradiens vektor hossza:

$$\sqrt{(-4)^2 + 13^2} = \sqrt{16 + 169} = \sqrt{185} < 14,$$

ezért nem lehetséges, hogy az iránymenti derivált értéke 14 legyen.

40. Feladat. Írjuk fel az $f(x; y) = x^2 + y^3 - xy$ függvény $P = (-1; 2)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét!

Megoldás:

A függvényérték a P pontban: $f(P) = (-1)^2 + 2^3 - (-1) \cdot 2 = 11$.

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények és azok helyettesítési értékei a P pontban:

$$f'_x(x, y) = 2x - y \quad \Rightarrow \quad f'_x(P) = -4$$

$$f'_y(x, y) = 3y^2 - x \quad \Rightarrow \quad f'_y(P) = 13.$$

A P -beli gradiens vektor $\text{grad } f(P) = (-4; 13)$. Ha a P pont koordinátái $(x_0; y_0)$, akkor az érintősík egyenlete:

$$z = f(x_0; y_0) + \text{grad } f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0).$$

Behelyettesítve a megfelelő adatokat azt kapjuk, hogy

$$z = 11 + (-4; 13) \cdot (x + 1; y - 2).$$

A skaláris szorzat elvégzése után

$$z = 11 - 4x - 4 + 13y - 26$$

adódik. Összevonva az egyenemű tagokat és átrendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy a sík egyenlete:

$$-4x + 13y - z = 19.$$

41. Feladat. Írjuk fel az $f(x; y) = x^2 + y^2 - 9$ függvény $P = (1; 2)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét!

Megoldás:

A függvényérték a P pontban: $f(1; 2) = 1^2 + 2^2 - 9 = -4$.

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények és azok helyettesítési értékei a P pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) = 2x &\Rightarrow f'_x(P) = 2 \\ f'_y(x, y) = 2y &\Rightarrow f'_y(P) = 4. \end{aligned}$$

A P -beli gradiens vektor $\text{grad } f(P) = (2; 4)$. Ha a P pont koordinátái $(x_0; y_0)$, akkor az érintősík egyenlete:

$$z = f(x_0; y_0) + \text{grad } f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0).$$

Behelyettesítve a megfelelő adatokat azt kapjuk, hogy

$$z = -4 + (2; 4) \cdot (x - 1; y - 2).$$

A skaláris szorzat elvégzése után

$$z = -4 + 2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 2) = -4 + 2x - 2 + 4y - 8$$

adódik. Összevonva az egynemű tagokat és átrendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy a sík egyenlete:

$$2x + 4y - z = 14.$$

42. Feladat. Írjuk fel az $f(x; y) = x \cos y - ye^x$ függvény $P = (0; 0)$ pontbeli érintősíkjának az egyenletét!

Megoldás:

A függvényérték a P pontban:

$$f(0; 0) = 0 \cdot \cos 0 - 0 \cdot e^0 = 0.$$

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények és azok helyettesítési értékei a P pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) = \cos y - y \cdot e^x &\Rightarrow f'_x(P) = 1 \\ f'_y(x, y) = -x \cdot \sin y - e^x &\Rightarrow f'_y(P) = -1. \end{aligned}$$

A P -beli gradiens vektor $\text{grad } f(P) = (1; -1)$. Ha a P pont koordinátái $(x_0; y_0)$, akkor az érintősík egyenlete:

$$z = f(x_0; y_0) + \text{grad } f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0).$$

Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$z = 0 + (1; -1) \cdot (x - 0; y - 0).$$

A skaláris szorzat elvégzése után $z = x - y$ adódik.

43. Feladat. Megmérjük egy derékszögű háromszög befogóit: $a = 80$ m és $b = 80$ m. A mérés pontossága mindkét befogó esetén 1 m. Határozzuk meg az átfogó relatív és abszolút hibáját!

Megoldás:

Ha a derékszögű háromszög átfogója c , akkor a Pitagorasz-tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy $c^2 = a^2 + b^2$. Ebből c -t kifejezve

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

adódik. Tehát c egy kétváltozós függvény az a és a b függvényében. A parciális deriváltfüggvények:

$$c'_a(a; b) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2a = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$c'_b(a; b) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2b = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

A parciális deriváltfüggvények helyettesítési értékei:

$$c'_a(80; 80) = \frac{80}{80 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c'_b(80; 80) = \frac{80}{80 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Az abszolút hiba:

$$\Delta c = |c'_a(a; b) \cdot \Delta a| + |c'_b(a; b) \cdot \Delta b| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \right| + \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \right| = \sqrt{2} \text{ m.}$$

A relatív hiba:

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\sqrt{2}}{80 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{80}.$$

44. Feladat. Egy téglatest egy csúsból kiinduló éleit megmérve azt kapjuk, hogy $a = 50$ cm, $b = 30$ cm és $c = 40$ cm.

A mérés pontossága rendre 1 cm; 0,5 cm; 0,5 cm. Határozzuk meg a felszín relatív és abszolút hibáját!

Megoldás:

A téglatest felszíne: $A = 2ab + 2ac + 2bc$. Tehát A egy háromváltozós függvény az a , b és c függvényében. A parciális deriváltfüggvények és azok helyettesítési

értékei:

$$A'_a(a; b; c) = 2b + 2c \quad \Rightarrow \quad A'_a(50; 30; 40) = 2 \cdot 30 + 2 \cdot 40 = 140$$

$$A'_b(a; b; c) = 2a + 2c \quad \Rightarrow \quad A'_b(50; 30; 40) = 2 \cdot 50 + 2 \cdot 40 = 180$$

$$A'_c(a; b; c) = 2a + 2b \quad \Rightarrow \quad A'_c(50; 30; 40) = 2 \cdot 50 + 2 \cdot 30 = 160.$$

Ekkor az abszolút hiba:

$$\begin{aligned} \Delta A &= |A'_a(a; b; c) \cdot \Delta a| + |A'_b(a; b; c) \cdot \Delta b| + |A'_c(a; b; c) \cdot \Delta c| = \\ &= 140 \cdot 1 + 180 \cdot 0,5 + 160 \cdot 0,5 = 140 + 90 + 80 = 310 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

A felszín névleges értéke $A = 9400 \text{ cm}^2$, így a relatív hiba:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{310}{9400} = 0,033 = 3,3\%.$$

45. Feladat. Határozzuk meg az $f(x, y) = xy^2$ függvény lineáris közelítését a $P = (1; 2)$ helyen, majd annak segítségével adjuk meg $1,02 \cdot 2,03^2$ közelítő értékét!

Megoldás:

A függvényérték a P helyen:

$$f(1; 2) = 1 \cdot 2^2 = 4.$$

Az f függvény parciális deriváltfüggvényei és azok helyettesítési értékei:

$$f'_x(x; y) = y^2 \quad \Rightarrow \quad f'_x(P) = 2^2 = 4$$

$$f'_y(x; y) = 2xy \quad \Rightarrow \quad f'_y(P) = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4.$$

A P pontbeli gradiens vektor: $\text{grad } f(P) = (4; 4)$.

Ha a P pont koordinátái $(x_0; y_0)$, akkor a lineáris közelítés

$$f(x; y) \approx f(x_0; y_0) + \text{grad } f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0).$$

Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x; y) &\approx 4 + (4; 4) \cdot (x - 1; y - 2) = 4 + 4 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 2) = \\ &= 4 + 4x - 4 + 4y - 8 = 4x + 4y - 8. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$f(1,02; 2,03) \approx 4 \cdot 1,02 + 4 \cdot 2,03 - 8 = 4,08 + 8,12 - 8 = 4,2$$

adódik. (Megjegyezzük, hogy a pontos érték: 4,203318.)

46. Feladat. Tekintsük az $f(x; y) = x^2 \cdot y$ függvényt és legyen $x(t) = \sin t$ és $y(t) = \ln t$! Adjuk meg az $f(x(t); y(t))$ függvény deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Mivel

$$f(x(t); y(t)) = \sin^2 t \cdot \ln t,$$

ezért

$$f'(x(t); y(t)) = 2 \sin t \cdot \cos t \cdot \ln t + \sin^2 t \cdot \frac{1}{t} = \sin 2t \cdot \ln t + \frac{\sin^2 t}{t}.$$

47. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $f(x; y) = e^{-2y} \cdot \cos 2x$ függvény eleget tesz a kétdimenziós Laplace-egyenletnek!

Megoldás:

Mivel egyrészt

$$f'_x(x; y) = -2e^{-2y} \cdot \sin 2x \quad \Rightarrow \quad f''_{xx}(x; y) = -4e^{-2y} \cdot \cos 2x,$$

másrészt

$$f'_y(x; y) = -2e^{-2y} \cdot \cos 2x \quad \Rightarrow \quad f''_{yy}(x; y) = 4e^{-2y} \cdot \cos 2x,$$

ezért

$$f''_{xx}(x; y) + f''_{yy}(x; y) = -4e^{-2y} \cdot \cos 2x + 4e^{-2y} \cdot \cos 2x = 0.$$

48. Feladat. Mutassuk meg, hogy az $u(t; x) = \ln(2x + 2ct)$ függvény eleget tesz az egydimenziós hullámeqyenletnek!

Megoldás:

Mivel egyrészt

$$u'_t(t; x) = \frac{2c}{2x + 2ct} \quad \Rightarrow \quad u''_{tt}(t; x) = \frac{-2c \cdot 2c}{(2x + 2ct)^2},$$

másrészt

$$u'_x(t; x) = \frac{2}{2x + 2ct} \quad \Rightarrow \quad u''_{xx}(t; x) = \frac{-2 \cdot 2}{(2x + 2ct)^2},$$

ezért

$$u''_{tt}(t; x) = c^2 \cdot u''_{xx}(t; x).$$

1.3. Kétváltozós függvények Taylor-polinomja

1.3.1. Definíció. Tekintsük az $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontot! Legyen az f olyan kétváltozós függvény, amely legalább n -szer totálisan differenciálható az $(x_0; y_0)$ középpontú nyílt téglalapon, vagyis létezik olyan $r > 0$, amelyre f differenciálható az $]x_0 - r; x_0 + r[\times]y_0 - r; y_0 + r[$ halmazon! Ekkor az f függvény n -edrendű $(x_0; y_0)$ pont körüli *Taylor-polinomja*:

$$\begin{aligned} T(x; y) = & f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2!} \cdot (f''_{xx}(x_0; y_0) \cdot (x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \\ & + f''_{yy}(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)^2) + \\ & + \dots + \frac{1}{n!} \cdot (f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0))^n, \end{aligned}$$

ahol az utolsó tagban a deriváltra vonatkozó „hatványozás” az n -edrendű deriváltat jelenti.

Kidolgozott feladatok

49. Feladat. Tekintsük az $f(x; y) = e^{2x} \cdot \ln(1 + y)$ függvényt! Írjuk fel az f függvény $P = (0; 0)$ pont körüli másodrendű Taylor-polinomját, majd annak segítségével számoljuk ki a $\sqrt{e} \cdot \ln 1,1$ közelítő értékét!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = e^{2x} \cdot 2 \cdot \ln(1 + y);$$

$$f'_y(x; y) = e^{2x} \cdot \frac{1}{1 + y} = \frac{e^{2x}}{1 + y}.$$

Az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f''_{xx}(x; y) = e^{2x} \cdot 4 \cdot \ln(1 + y);$$

$$f''_{xy}(x; y) = e^{2x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{1 + y} = \frac{e^{2x} \cdot 2}{1 + y};$$

$$f''_{yy}(x; y) = e^{2x} \cdot \frac{-1}{(1 + y)^2} = -\frac{e^{2x}}{(1 + y)^2}.$$

Az f függvénynek, valamint az első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeinek a P pontbeli helyettesítési értékeit mutatja az alábbi táblázat:

$f(P)$	0
$f'_x(P)$	0
$f'_y(P)$	1
$f''_{xx}(P)$	0
$f''_{xy}(P)$	2
$f''_{yy}(P)$	-1

Az f függvény másodrendű Taylor-polinomja:

$$\begin{aligned} T(x; y) &= f(P) + f'_x(P) \cdot (x - x_0) + f'_y(P) \cdot (y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \cdot (f''_{xx}(P) \cdot (x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(P) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \\ &+ f''_{yy}(P) \cdot (y - y_0)^2). \end{aligned}$$

A megfelelő adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T(x; y) &= 0 + 0 + y + \frac{1}{2!} \cdot (0 + 2 \cdot 2 \cdot (x - 0) \cdot (y - 0) - 1 \cdot y^2) = \\ &= y + 2xy - \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

Mivel $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$, ezért

$$e^{\frac{1}{2}} = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}.$$

Mivel

$$\ln(1 + y) = \ln 1,1 \quad \Rightarrow \quad y = 0,1 = \frac{1}{10},$$

ezért

$$\begin{aligned} \sqrt{e} \cdot \ln 1,1 &= f\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{10}\right) \approx T\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{10}\right) = \\ &= \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{29}{200} = 0,145. \end{aligned}$$

A pontos érték négy tizedesjegy pontossággal: 0,1571

50. Feladat. Tekintsük az $f(x; y) = e^x \cdot \cos y$ függvényt! Írjuk fel az f függvény $P = (0; 0)$ pont körüli másodrendű Taylor-polinomját!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = e^x \cdot \cos y;$$

$$f'_y(x; y) = -e^x \cdot \sin y.$$

Az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f''_{xx}(x; y) = e^x \cdot \cos y;$$

$$f''_{xy}(x; y) = -e^x \cdot \sin y;$$

$$f''_{yy}(x; y) = -e^x \cdot \cos y.$$

Az f függvénynek, valamint az első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeknek a P pontbeli helyettesítési értékeit mutatja az alábbi táblázat:

$f(P)$	1
$f'_x(P)$	1
$f'_y(P)$	0
$f''_{xx}(P)$	1
$f''_{xy}(P)$	0
$f''_{yy}(P)$	-1

Az f függvény másodrendű Taylor-polinomja:

$$\begin{aligned} T(x; y) &= f(P) + f'_x(P) \cdot (x - x_0) + f'_y(P) \cdot (y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \cdot (f''_{xx}(P) \cdot (x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(P) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \\ &+ f''_{yy}(P) \cdot (y - y_0)^2). \end{aligned}$$

A megfelelő adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$T(x; y) = 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot (x^2 + 0 \cdot x \cdot y - y^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}.$$

51. Feladat. Tekintsük az $f(x; y) = \sqrt{x} \cdot e^y$ függvényt! Írjuk fel az f függvény $P = (4; 0)$ pont körüli másodrendű Taylor-polinomját!

Megoldás:

Az f függvényt átalakítva azt kapjuk, hogy $f(x; y) = x^{\frac{1}{2}} \cdot e^y$.

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^y;$$

$$f'_y(x; y) = \sqrt{x} \cdot e^y.$$

Az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f''_{xx}(x; y) = -\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \cdot e^y;$$

$$f''_{xy}(x; y) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^y;$$

$$f''_{yy}(x; y) = \sqrt{x} \cdot e^y.$$

Az f függvénynek, valamint az első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeinek a P pontbeli helyettesítési értékeit mutatja az alábbi táblázat:

$f(P)$	2
$f'_x(P)$	$\frac{1}{4}$
$f'_y(P)$	2
$f''_{xx}(P)$	$-\frac{1}{32}$
$f''_{xy}(P)$	$\frac{1}{4}$
$f''_{yy}(P)$	2

Az f függvény másodrendű Taylor-polinomja:

$$\begin{aligned} T(x; y) = & f(P) + f'_x(P) \cdot (x - x_0) + f'_y(P) \cdot (y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2!} \cdot (f''_{xx}(P) \cdot (x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(P) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \\ & + f''_{yy}(P) \cdot (y - y_0)^2). \end{aligned}$$

A megfelelő adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T(x; y) = & 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 4) + 2y + \\ & + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{1}{32} \cdot (x - 4)^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (x - 4) \cdot y + 2y^2 \right). \end{aligned}$$

Az összevonásokat elvégezve

$$T(x; y) = -\frac{x^2}{64} + y^2 + \frac{xy}{4} + \frac{3x}{8} + y + \frac{3}{4}$$

adódik.

52. Feladat. Tekintsük az $f(x; y) = x \cdot \ln y$ függvényt! Írjuk fel az f függvény $P = (2; 1)$ pont körüli másodrendű Taylor-polinomját! A kapott Taylor-polinom felhasználásával számoljuk ki $1,9 \cdot \ln 1,1$ közelítő értékét!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = \ln y \quad \text{és} \quad f'_y(x; y) = \frac{x}{y}.$$

Az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f''_{xx}(x; y) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xy}(x; y) = \frac{1}{y} \quad \text{és} \quad f''_{yy}(x; y) = -\frac{x}{y^2}.$$

Az f függvénynek, valamint az első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeinek a P pontbeli helyettesítési értékeit mutatja az alábbi táblázat:

$f(P)$	0
$f'_x(P)$	0
$f'_y(P)$	2
$f''_{xx}(P)$	0
$f''_{xy}(P)$	1
$f''_{yy}(P)$	-2

Az f függvény másodrendű Taylor-polinomja:

$$\begin{aligned} T(x; y) &= f(P) + f'_x(P) \cdot (x - x_0) + f'_y(P) \cdot (y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \cdot (f''_{xx}(P) \cdot (x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(P) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \\ &+ f''_{yy}(P) \cdot (y - y_0)^2). \end{aligned}$$

A megfelelő adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} T(x; y) &= 0 + 0 + 2 \cdot (y - 1) + \frac{1}{2!} \cdot (0 + 2 \cdot (x - 2) \cdot (y - 1) - \\ &- 2 \cdot (y - 1)^2) = 2y - 2 + \frac{1}{2} \cdot (2xy - 2x - 4y + 4 - 2y^2 + 4y - 2) = \\ &= 2y - 2 + xy - x - y^2 + 1 = -y^2 + xy - x + 2y - 1. \end{aligned}$$

Az $1,9 \cdot \ln 1,1$ kifejezés közelítő értéke:

$$T(1,9; 1,1) = -1,1^2 + 1,9 \cdot 1,1 - 1,9 + 2 \cdot 1,1 - 1 = 0,18.$$

53. Feladat. Tekintsük az $f(x; y) = \ln x \cdot \ln y$ függvényt! Írjuk fel az f függvény $P = (1; 1)$ pont körüli másodrendű Taylor-polinomját!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = \frac{1}{x} \cdot \ln y$$

$$f'_y(x; y) = \frac{1}{y} \cdot \ln x.$$

Az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f''_{xx}(x; y) = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln y;$$

$$f''_{xy}(x; y) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y};$$

$$f''_{yy}(x; y) = -\frac{1}{y^2} \cdot \ln x.$$

Az f függvénynek, valamint az első- és másodrendű parciális deriváltfüggvényeinek a P pontbeli helyettesítési értékeit mutatja az alábbi táblázat:

$f(P)$	0
$f'_x(P)$	0
$f'_y(P)$	0
$f''_{xx}(P)$	0
$f''_{xy}(P)$	1
$f''_{yy}(P)$	0

Az f függvény másodrendű Taylor-polinomja:

$$\begin{aligned} T(x; y) &= f(P) + f'_x(P) \cdot (x - x_0) + f'_y(P) \cdot (y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \cdot (f''_{xx}(P) \cdot (x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(P) \cdot (x - x_0) \cdot (y - y_0) + \\ &+ f''_{yy}(P) \cdot (y - y_0)^2). \end{aligned}$$

A megfelelő adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$T(x; y) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x - 1) \cdot (y - 1) = (x - 1) \cdot (y - 1) = xy - x - y + 1.$$

1.4. Mátrixok defínitsége

1.4.1. Defíníció. Legyen A egy $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix! Azt mondjuk, hogy A

- *pozitív defínit*, ha minden $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén $x^T \cdot A \cdot x > 0$;
- *pozitív szemidefínit*, ha minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $x^T \cdot A \cdot x \geq 0$;
- *negatív defínit*, ha minden $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ esetén $x^T \cdot A \cdot x < 0$;
- *negatív szemidefínit*, ha minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $x^T \cdot A \cdot x \leq 0$;
- *indefínit*, ha az előbbiek egyike sem teljesül.

1.4.2. Példa. Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix esetén ha

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

akkor

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2,$$

ami minden $(x_1; x_2) \neq (0; 0)$ esetén pozitív, ezért a mátrix pozitív defínit.

1.4.3. Megjegyzés. Mivel a defíníció szerint nehezen dönthető el egy mátrix defínitsége, ezért a következőkben megadunk két kritériumot, amely segítségével lényegesen könnyebben jutunk eredményre.

1.4.4. Defíníció. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

egy tetszőleges $n \times n$ típusú mátrix! A

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \det a_{11}; \\
 D_2 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \\
 D_3 &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \\
 &\vdots \\
 D_n &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

determinánsokat *bal felső sarok minor determinánsoknak* nevezzük.

1.4.5. Tétel. Legyen A egy $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix! Az A mátrix

- pontosan akkor pozitív definit, ha A minden bal felső sarok minor determinánsa pozitív;
- pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha A minden bal felső sarok minor determinánsa nemnegatív és legalább az egyik nulla;
- pontosan akkor negatív definit, ha A első bal felső sarok minor determinánsa negatív, és a sarok minor determinánsok váltakozó előjelűek;
- pontosan akkor negatív szemidefinit, ha A első bal felső sarok minor determinánsa negatív vagy nulla, és a sarok minor determinánsok váltakozó előjelűek úgy, hogy legalább az egyik nulla;
- pontosan akkor indefinit, ha az A mátrix bal felső sarok determinánsai között vannak pozitív és negatív előjelűek is, de a negatív definit esetben megadott feltételtől eltérő módon.

1.4.6. Példa. Az $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix esetén az első bal felső sarok minor determináns:

$$D_1 = \det(2) = 2.$$

A második bal felső sarok minor determináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1.$$

Tehát minden bal felső sarok determináns pozitív, így a mátrix pozitív definit.

1.4.7. Tétel. Legyen A egy $n \times n$ -es szimmetrikus mátrix! Az A mátrix

- pontosan akkor pozitív definit, ha A minden sajátértéke pozitív;
- pontosan akkor pozitív szemidefinit, ha A minden sajátértéke nem-negatív;
- pontosan akkor negatív definit, ha A minden sajátértéke negatív;
- pontosan akkor negatív szemidefinit, ha A minden sajátértéke nem-pozitív;
- pontosan akkor indefinit, ha az A mátrixnak van pozitív és negatív sajátértéke is.

1.4.8. Példa. Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixot! A sajátértékek a karakterisztikus egyenletének gyökei. A karakterisztikus egyenlet:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Mivel

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) - 4,$$

ezért a zárójelek felbontása és az összevonás után azt kapjuk, hogy a karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

adódik, így a sajátértékek:

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} > 0$$

és

$$\lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} < 0.$$

Azt kaptuk, hogy az A mátrixnak pozitív és negatív sajátértéke is van, ezért a mátrix indefinit.

Kidolgozott feladatok**54. Feladat.** Tekintsük a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot!

- Számoljuk ki az $x^T \cdot A \cdot x$ szorzatot!
- Adjuk meg az A mátrix sajátértékeit!
- Határozzuk meg a kvadratikus függvény bal felső sarok minor determinánsait!
- Határozzuk meg a mátrix defínitségét háromféleképpen: deiníció szerint, a sajátértékek segítségével, valamint a bal felső sarok minor determinánsok felhasználásával!

Megoldás:

- Vezessük be az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

jelölést. Ekkor

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2.$$

- A sajátértékek a karakterisztikus egyenlet gyökei, azaz a

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 2 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha kiszámoljuk a determinánst, akkor azt kapjuk, hogy

$$(2 - \lambda) \cdot (-1 - \lambda) - 4 = 0.$$

A zárójelek felbontása és az összevonás után

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2},$$

amiből $\lambda_1 = 3$, illetve $\lambda_2 = -2$ adódik.

c) A bal felső sarok minor determinánsok:

$$D_1 = \det(2) = 2,$$

illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -2 - 4 = -6.$$

d) Például (1; 1) esetén a

$$2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$$

kifejezés értéke:

$$2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - 1^2 = 5 > 0.$$

Például (0; 1) esetén a

$$2x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2$$

kifejezés értéke:

$$2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 1 - 1^2 = -1 < 0.$$

Tehát az A mátrix indefinit.

Mivel a mátrix bal felső sarok determinánsaira azt kaptuk, hogy D_1 pozitív és D_2 negatív, ezért a mátrix indefinit.

Mivel az A mátrixnak pozitív és negatív sajátértéke is van, ezért a mátrix indefinit.

55. Feladat. Adjuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrix definitiségét!

Megoldás:

Az A mátrix első bal felső sarok minor determinánsa:

$$D_1 = \det(-2) = -2.$$

A második sarok minor determináns:

$$D_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -9 \end{pmatrix} = 18 - 16 = 2.$$

A harmadik sarok minor determinánása:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4.$$

Mivel a kvadratikus függvény mátrixa bal felső sarok determinánásai negatív, pozitív, negatív előjelűek, ezért a mátrix negatív definit.

56. Feladat. Adjuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix defínitségét!

Megoldás:

Az A mátrix első bal felső sarok minor determinánása:

$$D_1 = \det(1) = 1.$$

A második sarok minor determinánás:

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 4 = -4.$$

A többi sarokdeterminánst nem szükséges megnézni. A mátrix indefinit.

57. Feladat. Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix defínitségét!

Megoldás:

Az A mátrix első bal felső sarok minor determinánása:

$$D_1 = \det(1) = 1.$$

A második sarok minor determinánás:

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 0 = 2.$$

A harmadik sarok minor determináns:

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 6.$$

A negyedik sarok minor determináns:

$$D_4 = \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 30.$$

Mivel minden sarok minor determináns pozitív, ezért a mátrix pozitív definit.

1.5. Kétváltozós függvények lokális szélsőértéke

1.5.1. Definíció. Az $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0; y_0) \in D$ pont *lokális maximumhelye*, ha van olyan $(x_0; y_0)$ középpontú nyílt körlap, amelyben minden $(x; y)$ számpárra $f(x; y) \leq f(x_0; y_0)$ teljesül.

Az $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0; y_0) \in D$ pont *lokális minimumhelye*, ha van olyan $(x_0; y_0)$ középpontú nyílt körlap, amelyben minden $(x; y)$ számpárra $f(x; y) \geq f(x_0; y_0)$ teljesül.

1.5.2. Tétel. (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele)

Ha az $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (totálisan) differenciálható függvénynek lokális szélsőértéke van az $(x_0; y_0) \in D$ pontban, akkor az $(x_0; y_0)$ pontban az elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák, azaz $f'_x(x_0; y_0) = 0$ és $f'_y(x_0; y_0) = 0$.

1.5.3. Definíció. Azon $(x_0; y_0) \in D$ pontokat, amelyekben az $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (totálisan) differenciálható függvény elsőrendű parciális deriváltjai nullák, *stacionárius pont*nak is nevezzük.

1.5.4. Példa. Az $f(x; y) = x^2 + y^2$ függvénynek a $(0; 0)$ pont stacionárius pontja, mert

$$f'_x(x; y) = 2x \quad \text{és} \quad f'_y(x; y) = 2y,$$

így $f'_x(0; 0) = 0$, és $f'_y(0; 0) = 0$.

1.5.5. Definíció. Az $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer (totálisan) differenciálható függvény *Hesse-mátrixa* az $(x_0; y_0) \in D$ pontban az

$$M(x_0; y_0) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{yx}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

mátrix.

1.5.6. Példa. Az $f(x; y) = x^2 + y^2$ függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 2x \quad \text{és} \quad f'_y(x; y) = 2y.$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 2 & f''_{xy}(x; y) &= 0 \\ f''_{yx}(x; y) &= 0 & f''_{yy}(x; y) &= 2. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva, a Hesse-mátrix:

$$M = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

1.5.7. Tétel. (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele)

Legyen $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az f függvénynek az $(x_0; y_0) \in D$ pontban az elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák. Tekintsük az f függvény másodrendű parciális deriváltjaiból képzett

$$M(x_0; y_0) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{yx}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-mátrixot. Legyen $D_1 = f''_{xx}(x_0; y_0)$ és $D_2 = \det(M(x_0; y_0))$.

Ha $D_1 > 0$ és $D_2 > 0$, akkor az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban lokális minimuma van.

Ha $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, akkor az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban lokális maximuma van.

Ha $D_2 < 0$, akkor az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban nincs szélsőértéke.

Ha $D_1 = 0$ és $D_2 = 0$ vagy $D_1 = 0$ és $D_2 > 0$ vagy $D_1 > 0$ és $D_2 = 0$ vagy $D_1 < 0$ és $D_2 = 0$, akkor a Hesse-mátrix vizsgálatával nem dönthető el, hogy az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban van-e szélsőértéke.

1.5.8. Példa. Az $f(x; y) = x^2 + y^2$ függvénynek a $(0; 0)$ pontban lokális minimumhelye van, ugyanis a $(0; 0)$ stacionárius pontja és a Hesse-mátrix bal felső sarokdeterminánsainak mindegyike pozitív.

1.5.9. Következmény. Legyen $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az f függvénynek az $(x_0; y_0) \in D$ pontban az elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák. Tekintsük az f függvény másodrendű parciális deriváltjaiból képzett

$$M(x_0; y_0) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{yx}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-mátrixot.

Ha $M(x_0; y_0)$ pozitív definit az $(x_0; y_0)$ pontban, akkor az f függvények az $(x_0; y_0)$ pontban lokális minimuma van.

Ha $M(x_0; y_0)$ negatív definit, akkor az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban lokális maximuma van.

Ha $M(x_0; y_0)$ indefinit, akkor az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban nincs szélsőértéke.

Ha $M(x_0; y_0)$ pozitív szemidefinit vagy negatív szemidefinit, akkor a Hesse-mátrix vizsgálatával nem dönthető el, hogy az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban van-e szélsőértéke.

1.5.10. Megjegyzés. Kétváltozós függvény lokális szélsőértékének meghatározása a gyakorlatban:

1. Kiszámoljuk az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit, vagyis az f'_x és f'_y deriváltakat.
2. Megoldjuk az

$$\left. \begin{aligned} f'_x(x; y) &= 0 \\ f'_y(x; y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az egyenletrendszer megoldásai a lehetséges szélsőértékek, más szóval stacionárius pontok.

3. Kiszámoljuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd azokból előállítjuk az

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-mátrixot.

4. Kiértékeljük a Hesse-mátrixot a stacionárius pontokban és alkalmazzuk a 1.5.7 tételt annak eldöntésére, hogy a stacionárius pontban van-e szélsőérték és ha igen, milyen típusú.

1.5.11. Megjegyzés. Tegyük fel, hogy az $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0; y_0) \in D$ pont stacionárius pontja! Legyen az f függvény Hesse-mátrixának $(x_0; y_0)$ pontbeli helyettesítési értéke $M(x_0; y_0)$! Legyen továbbá ezen mátrix első eleme D_1 , és determinánsa D_1 ! Ekkor elkészíthetjük az alábbi

táblázatot:

D_1 előjele	D_2 előjele	Hesse-mátrix definitisége	lok. szélsőérték
+	+	pozitív definit	lok. minimum
-	+	negatív definit	lok. maximum
0	-	indefinit	nincs
+	-	indefinit	nincs
-	-	indefinit	nincs
+	0	pozitív szemidefinit	nem eldönthető
-	0	negatív szemidefinit	nem eldönthető
0	+	pozitív szemidefinit	nem eldönthető
0	0	poz. és neg. szemidef.	nem eldönthető

Kidolgozott feladatok**58. Feladat.** Számoljuk ki az

$$f(x; y) = 2x^2 - 4x + 4y^2 - 8y.$$

függvény stacionárius pontjait!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y) = 4x - 4$$

$$f'_y(x; y) = 8y - 8.$$

A stacionárius pont a

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 4 = 0 \\ 8y - 8 = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása, azaz $P = (1; 1)$.**59. Feladat.** Számoljuk ki az

$$f(x; y) = x^2 - 4xy + 2y^2.$$

függvény stacionárius pontjait!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y) = 2x - 4y$$

$$f'_y(x; y) = -4x + 4y.$$

A stacionárius pont a

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása.

A két egyenletet összeadva azt kapjuk, hogy $-2x = 0$, így $x = 0$. Ezt behelyettesítve például az első egyenletbe $y = 0$ adódik.**60. Feladat.** Tekintsük az $f(x; y) = 2x^3 + 16y^3 - 24xy$ függvényt!

- Számoljuk ki az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit!
- Határozzuk meg az f függvény stacionárius pontjait!

- c) Adjuk meg az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit!
- d) Határozzuk meg az f függvény Hesse-mátrixát!
- e) Adjuk meg a Hesse-mátrix helyettesítési értékét a stacionárius pontokban!
- f) Számoljuk ki az előbbi Hesse-mátrixok bal felső sarokdeterminánsait, majd azokból következtessünk a mátrix definittségére és az f függvény lokális szélsőértékére! Eredményeinket foglaljuk táblázatba!
- g) Amennyiben az f függvénynek van lokális minimuma vagy maximuma, úgy számoljuk ki a lokális szélsőérték értékét!

Megoldás:

- a) Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 6x^2 - 24y$$

$$f'_y(x; y) = 48y^2 - 24x.$$

- b) A stacionárius pontok az

$$\left. \begin{aligned} 6x^2 - 24y &= 0 \\ 48y^2 - 24x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásai. Az első egyenlet osztható 6-tal, a második osztható 24-gyel, így az

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 4y &= 0 \\ 2y^2 - x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. A második egyenletből $x = 2y^2$ adódik, amit behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$4y^4 - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y^4 - y = 0.$$

Az egyenletből y -t kiemelve

$$y \cdot (y^3 - 1) = 0$$

adódik, így $y_1 = 0$ és $y_2 = 1$. A megfelelő x értékek $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$. Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0; 0)$ és $P_2 = (2; 1)$.

- c) Az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f''_{xx}(x; y) = 12x$$

$$f''_{xy}(x; y) = -24$$

$$f''_{yx}(x; y) = -24$$

$$f''_{yy}(x; y) = 96y.$$

d) A Hesse-mátrix:

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 12x & -24 \\ -24 & 96y \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

e) A Hesse-mátrix helyettesítési értéke a P_1 pontban:

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}.$$

A Hesse-mátrix helyettesítési értéke a P_2 pontban:

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 96 \end{pmatrix}.$$

f) Az $M(P_1)$ mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 576 = -576.$$

Mivel D_2 negatív, ezért az $M(P_1)$ mátrix indefinit, a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Az $M(P_2)$ mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 24$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 96 \end{pmatrix} = 24 \cdot 96 - (-24)^2 = 1728.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért az $M(P_2)$ mátrix pozitív definit, a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek.

Az alábbi táblázat mutatja a kapott eredményeket:

stac. pont	D_1	D_2	Hesse-mátrix def.	lok. sz. érték
$P_1 = (0; 0)$	0	–	indefinit	nincs
$P_2 = (2; 1)$	+	+	poz. definit	lok. min.

g) Az f függvény lokális minimumértéke:

$$f(2; 1) = 2 \cdot 2^3 + 16 \cdot 1^3 - 24 \cdot 2 \cdot 1 = -16.$$

61. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = x^3 + y^3 - 3xy + 2$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 3x^2 - 3y$$

$$f'_y(x; y) = 3y^2 - 3x.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Mindkét egyenlet osztható 3-mal, így az

$$\left. \begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenlethől $y = x^2$ adódik, amit behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(x^2)^2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - x = 0.$$

Az egyenletből x -et kiemelve

$$x \cdot (x^3 - 1) = 0$$

adódik, így $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. A megfelelő y értékek $y_1 = 0$ és $y_2 = 1$. Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0; 0)$ és $P_2 = (1; 1)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 6x & f''_{xy}(x; y) &= -3 \\ f''_{yx}(x; y) &= -3 & f''_{yy}(x; y) &= 6y, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ x & \begin{pmatrix} 6x & -3 \end{pmatrix} \\ y & \begin{pmatrix} -3 & 6y \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 9 = -9.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 6$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 36 - 9 = 27.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke:

$$f(1; 1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 = -1 + 2 = 1.$$

62. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = x^3 + y^2 - 6xy + 4$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 3x^2 - 6y$$

$$f'_y(x; y) = 2y - 6x.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 6y &= 0 \\ 2y - 6x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. A második egyenletből $y = 3x$ adódik, amit behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$3x^2 - 18x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x \cdot (x - 6) = 0,$$

így $x_1 = 0$ és $x_2 = 6$. A megfelelő y értékek $y_1 = 0$ és $y_2 = 18$. Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0; 0)$ és $P_2 = (6; 18)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{array}{c} x \quad y \\ x \left(\begin{array}{cc} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{array} \right) \\ y \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{ll} f''_{xx}(x; y) = 6x & f''_{xy}(x; y) = -6 \\ f''_{yx}(x; y) = -6 & f''_{yy}(x; y) = 2, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{array}{c} x \quad y \\ x \left(\begin{array}{cc} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{array} \right) \\ y \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = 0 - 36 = -36.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 36$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = 72 - 36 = 36.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke:

$$f(6; 18) = 6^3 + 18^2 - 6 \cdot 6 \cdot 18 + 4 = 216 + 324 - 648 + 4 = -104.$$

63. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = x^3 - 3x^2 + 6xy + y^2 + 10$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 3x^2 - 6x + 6y$$

$$f'_y(x; y) = 6x + 2y.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 6x + 6y &= 0 \\ 6x + 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenlet osztható 3-mal, a második egyenlet osztható 2-vel, így az

$$x^2 - 2x + 2y = 0$$

$$3x + y = 0$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletből $y = -3x$ adódik, amit behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 2x - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x - 8) = 0,$$

így $x_1 = 0$ és $x_2 = 8$. A megfelelő y értékek $y_1 = 0$ és $y_2 = -24$. Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0; 0)$ és $P_2 = (8; -24)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 6x - 6 & f''_{xy}(x; y) &= 6 \\ f''_{yx}(x; y) &= 6 & f''_{yy}(x; y) &= 2, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6x - 6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -6$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = -12 - 36 = -48.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 42 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 42$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 42 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = 84 - 36 = 48.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke:

$$\begin{aligned} f(8; -24) &= 8^3 - 3 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 \cdot (-24) + (-24)^2 + 10 = \\ &= 512 - 192 - 1152 + 576 + 10 = -246. \end{aligned}$$

64. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = x^3 - 75x + 2y^2 - 4y$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$\begin{aligned} f'_x(x; y) &= 3x^2 - 75 \\ f'_y(x; y) &= 4y - 4. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 75 &= 0 \\ 4y - 4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $3x^2 = 75$, amiből $x^2 = 25$ következik, tehát $x = \pm 5$. A második egyenletből $y = 1$ adódik.

Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (5; 1)$ és $P_2 = (-5; 1)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{array}{c} x \quad y \\ \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \\ y \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 6x & f''_{xy}(x; y) &= 0 \\ f''_{yx}(x; y) &= 0 & f''_{yy}(x; y) &= 4, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{array}{c} x \quad y \\ \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ y \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 30$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 120 - 0 = 120.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P_1 pontban lokális minimuma van az f függvénynek. Értéke:

$$f(5; 1) = 5^3 - 75 \cdot 5 + 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -252.$$

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -30$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = -120 - 0 = -120.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_2 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

65. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = (x - 3)^2 + (y + 5)^2 + 1$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 2 \cdot (x - 3)$$

$$f'_y(x; y) = 2 \cdot (y + 5).$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 2 \cdot (x - 3) &= 0 \\ 2 \cdot (y + 5) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 3$, $y = -5$.

Tehát az f függvénynek egy stacionárius pontja van: $P = (3; -5)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 2 & f''_{xy}(x; y) &= 0 \\ f''_{yx}(x; y) &= 0 & f''_{yy}(x; y) &= 2, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor azt kapjuk, hogy

$$M(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 2$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 0 = 4.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke:

$$f(3; -5) = (3 - 3)^2 + (-5 + 5)^2 + 1 = 1.$$

66. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = e^{2xy}$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = e^{2xy} \cdot 2y$$

$$f'_y(x; y) = e^{2xy} \cdot 2x.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{array}{l} e^{2xy} \cdot 2y = 0 \\ e^{2xy} \cdot 2x = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer. Mivel $e^{2xy} \neq 0$, ezért az első egyenletből azt kapjuk, hogy $y = 0$, míg a második egyenletből azt, hogy $x = 0$, így az egyetlen stacionárius pont $P = (0; 0)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az

azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= e^{2xy} \cdot 4y^2 & f''_{xy}(x; y) &= e^{2xy} \cdot 4xy + e^{2xy} \cdot 2 \\ f''_{yx}(x; y) &= e^{2xy} \cdot 4xy + e^{2xy} \cdot 2 & f''_{yy}(x; y) &= e^{2xy} \cdot 4x^2, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} e^{2xy} \cdot 4y^2 & e^{2xy} \cdot 4xy + e^{2xy} \cdot 2 \\ e^{2xy} \cdot 4xy + e^{2xy} \cdot 2 & e^{2xy} \cdot 4x^2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P pontban, akkor azt kapjuk, hogy

$$M(P) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 4 = -4.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

67. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = \frac{50}{x} + \frac{20}{y} + xy$ ($x > 0, y > 0$) függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = -\frac{50}{x^2} + y$$

$$f'_y(x; y) = -\frac{20}{y^2} + x.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} -\frac{50}{x^2} + y &= 0 \\ -\frac{20}{y^2} + x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$-\frac{50}{x^2} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{50}{x^2}.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-\frac{20}{\left(\frac{50}{x^2}\right)^2} + x = 0 \quad \Rightarrow \quad -20 \cdot \frac{x^4}{2500} + x = 0$$

adódik. Tehát

$$-\frac{x^4}{125} + x = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^4 + 125x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (-x^3 + 125) = 0.$$

Egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így azt kapjuk, hogy $x = 0$ vagy $x = 5$. Mivel $x > 0$, ezért az egyetlen megoldás $x = 5$. Ekkor $y = 2$. Tehát az egyetlen stacionárius pont $P = (5; 2)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= \frac{100}{x^3} & f''_{xy}(x; y) &= 1 \\ f''_{yx}(x; y) &= 1 & f''_{yy}(x; y) &= \frac{40}{y^3}, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ x & \left(\frac{100}{x^3} & 1 \right) \\ y & \left(1 & \frac{40}{y^3} \right) \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} \frac{100}{5^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{2^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = \frac{4}{5}$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek. Értéke

$$f(5; 2) = \frac{50}{5} + \frac{20}{2} + 2 \cdot 5 = 30.$$

68. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) + 5$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$f'_y(x; y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} &= 0 \\ \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 0$, míg a másodikból azt, hogy $y = 0$. Tehát az egyetlen stacionárius pont $P = (0; 0)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot.

A tiszta másodrendű parciális deriváltfüggvények

$$f''_{xx}(x; y) = \frac{2 \cdot (x^2 + y^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

és

$$f''_{yy}(x; y) = \frac{2 \cdot (x^2 + y^2 + 1) - 4y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

A vegyes másodrendű parciális deriváltfüggvények

$$f''_{yx}(x; y) = f''_{xy}(x; y) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Tehát a másodrendű parciális deriváltfüggvényekből képzett mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} & \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \\ \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2} & \frac{2x^2 - 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Ha a mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 1$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek. Értéke

$$f(0; 0) = \ln(0^2 + 0^2 + 1) + 5 = 5.$$

69. Feladat. Az $f(x; y) = x^2 + 3y^2 + 2xy + kx + ly + m$ függvénynek a $(3; 1)$ pontban lokális minimuma van, amelynek értéke 15. Számoljuk ki a k , l és m konstansok értékét!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 2x + 2y + k$$

$$f'_y(x; y) = 6y + 2x + l.$$

Mivel $(3; 1)$ lokális szélsőértéke az f függvénynek, ezért

$$\left. \begin{aligned} f'_x(3; 1) &= 0 \\ f'_y(3; 1) &= 0 \end{aligned} \right\},$$

azaz

$$\left. \begin{aligned} 6 + 2 + k &= 0 \\ 6 + 6 + l &= 0 \end{aligned} \right\},$$

így $k = -8$ és $l = -12$.

Mivel a szélsőérték értéke 15, ezért

$$f(3; 1) = 15 \quad \Rightarrow \quad 9 + 3 + 6 - 24 - 12 + m = 15,$$

tehát $m = 33$.

70. Feladat. Három szám összege 150. Határozzuk meg a számokat úgy, hogy a négyzetösszegük minimális legyen!

Megoldás:

Legyenek a keresett számok x , y és z ! Ekkor

$$x + y + z = 150.$$

A z ismeretlent kifejezve azt kapjuk, hogy

$$z = 150 - x - y.$$

Keressük az

$$f(x; y) = x^2 + y^2 + (150 - x - y)^2$$

függvény minimumát.

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 2x + 2 \cdot (150 - x - y) \cdot (-1) = 4x + 2y - 300$$

$$f'_y(x; y) = 2y + 2 \cdot (150 - x - y) \cdot (-1) = 2x + 4y - 300.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 4x + 2y - 300 &= 0 \\ 2x + 4y - 300 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Ha az első egyenletből kivonjuk a második egyenlet kétszeresét, akkor azt kapjuk, hogy $y = 50$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe $x = 50$ adódik. Tehát az egyetlen stacionárius pont $P = (50; 50)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot.

Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 4 & f''_{xy}(x; y) &= 2 \\ f''_{yx}(x; y) &= 2 & f''_{yy}(x; y) &= 4, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Ha a mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 4$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 16 - 4 = 12.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek. A z értéke:

$$z = 150 - 50 - 50 = 50.$$

A minimális négyzetösszeg:

$$50^2 + 50^2 + 50^2 = 7\,500.$$

71. Feladat. Egy felül nyitott téglatest alakú doboz térfogata 256 dm^3 . Határozzuk meg az éleit úgy, hogy a felszíne a lehető legkisebb legyen. Adjuk meg a minimális felszínt is!

Megoldás:

A téglatest egy csúcsból induló éleit jelölje: x , y és z , úgy, hogy az alapélek legyenek x és y ! Ekkor a térfogat:

$$x \cdot y \cdot z = 256 \quad (x > 0, y > 0, z > 0),$$

amiből például a z ismeretlent kifejezve azt kapjuk, hogy $z = \frac{256}{xy}$. A doboz felszíne:

$$A = xy + 2xz + 2yz = xy + 2x \cdot \frac{256}{xy} + 2y \cdot \frac{256}{xy} = xy + \frac{512}{y} + \frac{512}{x}.$$

A feladat tehát az

$$A(x; y) = xy + \frac{512}{y} + \frac{512}{x} = xy + 512 \cdot y^{-1} + 512 \cdot x^{-1}$$

kétváltozós függvény szélsőértékének meghatározása.

Az A függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$A'_x(x; y) = y - 512 \cdot x^{-2} = y - \frac{512}{x^2}$$

$$A'_y(x; y) = x - 512 \cdot y^{-2} = x - \frac{512}{y^2}.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} y - \frac{512}{x^2} &= 0 \\ x - \frac{512}{y^2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Az első egyenletből kifejezve az y ismeretlent azt kapjuk, hogy $y = \frac{512}{x^2}$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$x - \frac{512}{\left(\frac{512}{x^2}\right)^2} = 0$$

adódik. Az egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$x - \frac{512}{\frac{262144}{x^4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - \frac{x^4}{512} = 0,$$

így

$$512x - x^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (512 - x^3) = 0.$$

Mivel $x \neq 0$, ezért $512 = x^3$, tehát $x = 8$. Ezt az értéket behelyettesítve például az $y - \frac{512}{x^2} = 0$ egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y - \frac{512}{64} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 8.$$

Tehát az A függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (8; 8)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az A függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} A''_{xx}(x; y) & A''_{xy}(x; y) \\ A''_{yx}(x; y) & A''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} A''_{xx}(x; y) &= 1024x^{-3} & A''_{xy}(x; y) &= 1 \\ A''_{yx}(x; y) &= 1 & A''_{yy}(x; y) &= 1024y^{-3}, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1024}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{1024}{y^3} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a stacionárius pontban, akkor

$$M(x; y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 2$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív előjelű, ezért a P pontban lokális minimum van.

Mivel $x = y = 8$, ezért $z = \frac{256}{64} = 4$. Ekkor a felszín:

$$A = xy + 2xy + 2xz = 64 + 64 + 64 = 192 \text{ cm}^2.$$

72. Feladat. Egy téglatest egy csúcsból induló éleinek az összege 15 cm. Határozzuk meg az éleket úgy, hogy a térfogata maximális legyen! Adjuk meg a maximális térfogatot is!

Megoldás:

A téglatest egy csúcsból induló éleit jelölje: x , y és z ! Ekkor

$$x + y + z = 15 \quad (a > 0, b > 0, c > 0),$$

amiből például a z ismeretlent kifejezve azt kapjuk, hogy $z = 15 - x - y$. A téglatest térfogata

$$V = x \cdot y \cdot z = x \cdot y \cdot (15 - x - y) = 15xy - x^2y - xy^2.$$

A feladat tehát a

$$V(x; y) = 15xy - x^2y - xy^2$$

kétféltváltozós függvény szélsőértékének meghatározása.

A V függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$V'_x(x; y) = 15y - 2xy - y^2$$

$$V'_y(x; y) = 15x - x^2 - 2xy.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 15y - 2xy - y^2 &= 0 \\ 15x - x^2 - 2xy &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Mivel $y \neq 0$ és $x \neq 0$, ezért az első egyenletet oszthatjuk y -nal és a második egyenletet oszthatjuk x -szel. Ekkor az

$$15 - 2x - y = 0$$

$$15 - x - 2y = 0$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ha az első egyenlet kétszereséből kivonjuk a második egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy $15 - 3x = 0$, így $x = 5$. Ezt az értéket visszahelyettesítve például a $15 - 2x - y = 0$ egyenletbe azt kapjuk, hogy $y = 5$. Tehát a V függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (5; 5)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk a V függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} V''_{xx}(x; y) & V''_{xy}(x; y) \\ V''_{yx}(x; y) & V''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} V''_{xx}(x; y) &= -2y & V''_{xy}(x; y) &= 15 - 2x - 2y \\ V''_{yx}(x; y) &= 15 - 2x - 2y & V''_{yy}(x; y) &= -2x, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} -2y & 15 - 2x - 2y \\ 15 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a stacionárius pontban, akkor

$$M(x; y) = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -10$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} = 100 - 25 = 75.$$

Mivel D_1 negatív és D_2 pozitív előjelű, ezért a P pontban lokális maximum van.

Mivel $x = y = 5$, ezért $z = 15 - 5 - 5 = 5$ cm, ezért a téglatest térfogata $x = y = z = 5$ cm oldalak esetén lesz maximális. Ekkor a térfogat:

$$V = 5^3 \text{ cm}^3 = 125 \text{ cm}^3.$$

73. Feladat. Tekintsük az

$$f(K; L) = 15K^2 - K^3 + 12L^2 - L^3$$

termelési függvényt, ahol K a munkaeszközök darabszáma, L a munkások száma. Hogyan válasszuk meg a K és L értékeket ahhoz, hogy a termelt mennyiség a lehető legnagyobb legyen? Mennyi ekkor a termelt mennyiség? A termelt mennyiséget (egy hétre vonatkozóan) darabban értjük.

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_K(K; L) = 30K - 3K^2$$

$$f'_L(K; L) = 24L - 3L^2.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 30K - 3K^2 &= 0 \\ 24L - 3L^2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletben $3K$ -t kiemelve azt kapjuk, hogy

$$3K \cdot (10 - K) = 0,$$

így $K_1 = 0$, illetve $K_2 = 10$.

A második egyenletben $3L$ -et kiemelve azt kapjuk, hogy

$$3L \cdot (8 - L) = 0,$$

így $L_1 = 0$, illetve $L_2 = 8$.

Tehát a stacionárius pontok: $P_1 = (0; 0)$, $P_2 = (0; 8)$; $P_3 = (10; 0)$ és $P_4 = (10; 8)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához kiszámoljuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(K; L) = \begin{matrix} & K & L \\ \begin{matrix} K \\ L \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{KK}(K; L) & f''_{KL}(K; L) \\ f''_{LK}(K; L) & f''_{LL}(K; L) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{KK}(K; L) = 30 - 6K$$

$$f''_{KL}(K; L) = 0$$

$$f''_{LK}(K; L) = 0$$

$$f''_{LL}(K; L) = 24 - 6L,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(K; L) = \begin{matrix} & K & L \\ K & \begin{pmatrix} 30 - 6K & 0 \\ 0 & 24 - 6L \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 30$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} = 30 \cdot 24 - 0 = 720.$$

Mivel $D_1 > 0$ és $D_2 > 0$, ezért a P_1 pontban lokális minimuma van az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 30$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix} = -720.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_2 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_3 pontban, akkor

$$M(P_3) = \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -30$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} = -30 \cdot 24 - 0 = -720.$$

Mivel $D_2 < 0$, ezért a P_3 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_4 pontban, akkor

$$M(P_4) = \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -30$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix} = -30 \cdot (-24) = 720.$$

Mivel $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, ezért a P_4 pontban lokális maximuma van az f függvénynek. Ennek az értéke:

$$f(10; 8) = 15 \cdot 10^2 - 10^3 + 12 \cdot 8^2 - 8^3 = 756.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a 10 munkaeszköz és 8 munkás esetén tudjuk a lehető legnagyobb mennyiséget legyártani. Ekkor 756 darab termék gyártunk le egy hét alatt.

74. Feladat. Egy irodában kétféle számítógép működik, A és B . Az A számítógép a órát működik, a B számítógép b órát üzemel naponta. A napi teljesítményt az

$$f(a; b) = 18a + 20b - 2a^2 - 4b^2 - ab$$

függvény írja le, ami a naponta tesztelt programok számát jelenti. Tudjuk azt is, hogy egyik számítógép sem üzemelhet egy nap 6 óránál tovább. Határozzuk meg, hogy hány órát működjenek az egyes gépek optimális esetben, azaz, ha a lehető legnagyobb teljesítményt szeretnénk elérni!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_a(a; b) = 18 - 4a - b$$

$$f'_b(a; b) = 20 - 8b - a.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{array}{l} 18 - 4a - b = 0 \\ 20 - 8b - a = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer. A második egyenletből kifejezve az a ismeretlent azt kapjuk, hogy $a = 20 - 8b$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$18 - 80 + 32b - b = 0$$

adódik, így $b = 2$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$a = 20 - 8 \cdot 2 = 4.$$

Tehát az f függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (4; 2)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(a; b) = \begin{matrix} & a & b \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{aa}(a; b) & f''_{ab}(a; b) \\ f''_{ba}(a; b) & f''_{bb}(a; b) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{aa}(a; b) &= -4 & f''_{ab}(a; b) &= -1 \\ f''_{ba}(a; b) &= -1 & f''_{bb}(a; b) &= -8, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(a; b) = \begin{matrix} & a & b \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -4$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} = 32 - 1 = 31.$$

Mivel $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, ezért a P pontban lokális maximuma van az f függvénynek.

Tehát 4 órát kell az első számítógépnek és 2 órát a második számítógépnek üzemelni. Mivel

$$f(4; 2) = 72 + 40 - 32 - 16 - 8 = 56,$$

ezért napi 56 program tesztelése a maximális teljesítmény.

75. Feladat. Egy vállalat kétféle terméket forgalmaz. Az A termékből q_1 darabot, a B termékből q_2 darabot ad el naponta. Az A és B termékekhez tartozó inverz keresleti függvények rendre

$$f_1(q_1) = 200 - q_1$$

és

$$f_2(q_2) = 168 - q_2.$$

A termékek egységárait dollárban értjük.

A két termékhez tartozó együttes költségfüggvény:

$$C(q_1; q_2) = 600 + 4q_1 + 4q_2.$$

Határozzuk meg, hogy hány terméket forgalmazzon az egyes termékekből a vállalat ahhoz, hogy a nyeresége a lehető legnagyobb legyen! Mennyi ekkor a nyereség? Maximális nyereség esetén mennyi az egyes termékek egységára?

Megoldás:

A nyereségfüggvény a bevételi függvény és a költségfüggvény különbsége:

$$\begin{aligned} \Pi(q_1; q_2) &= q_1 \cdot (200 - q_1) + q_2 \cdot (168 - q_2) - 600 - 4q_1 - 4q_2 = \\ &= 200q_1 - q_1^2 + 168q_2 - q_2^2 - 600 - 4q_1 - 4q_2 = \\ &= -q_1^2 - q_2^2 + 196q_1 + 164q_2 - 600. \end{aligned}$$

A Π függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$\begin{aligned} \Pi'_{q_1}(q_1; q_2) &= -2q_1 + 196 \\ \Pi'_{q_2}(q_1; q_2) &= -2q_2 + 164. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} -2q_1 + 196 &= 0 \\ -2q_2 + 164 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $q_1 = 98$, a másodikból pedig azt, hogy $q_2 = 82$.

Tehát a Π függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (98; 82)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk a Π függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(q_1; q_2) = \begin{matrix} & q_1 & q_2 \\ \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \Pi''_{q_1 q_1}(q_1; q_2) & \Pi''_{q_1 q_2}(q_1; q_2) \\ \Pi''_{q_2 q_1}(q_1; q_2) & \Pi''_{q_2 q_2}(q_1; q_2) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned}\Pi''_{q_1 q_1}(q_1; q_2) &= -2 & \Pi''_{q_1 q_2}(q_1; q_2) &= 0 \\ \Pi''_{q_2 q_1}(q_1; q_2) &= 0 & \Pi''_{q_2 q_2}(q_1; q_2) &= -2,\end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(q_1; q_2) = \begin{matrix} & \begin{matrix} q_1 & q_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -2$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 - 0 = 4.$$

Mivel $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, ezért a P pontban lokális maximuma van a Π függvénynek.

Tehát az első termékből 98 darabot, a második termékből 82 darabot kell értékesíteni. Ekkor

$$\Pi(98; 82) = -98^2 - 82^2 + 196 \cdot 98 + 164 \cdot 82 - 600 = 15\,728.$$

Az első termék egységára ekkor $f_1(98) = 200 - 98 = 102$, a második termék egységára $f_2(82) = 168 - 82 = 86$ dollár.

76. Feladat. Egy kukoricatermesztéssel foglalkozó vállalat egy négyzetméter termőterületből származó bevételét (dollárban) az

$$R(T; x) = 10T \cdot (1 - e^{-x}),$$

függvény írja le, ahol T a fóliasátorban lévő hőmérséklet és x a négyzetméterenként felhasznált műtrágya mennyisége. Tudjuk, hogy a műtrágya négyzetméterenkénti költsége $20x$ dollár és a megfelelő hőmérséklet fenntartásának költsége $0,4T^2$ dollár négyzetméterenként.

- Írjuk fel a költségfüggvényt!
- Adjuk meg a nyereségfüggvényt!

- c) Milyen hőmérséklet és műtrágyafelhasználás esetén érjük el a lehető legnagyobb hasznot?

Megoldás:

a) A költségfüggvény: $C(T; x) = 20x + 0,4T^2$.

b) A nyereségfüggvény a bevételi függvény és a költségfüggvény különbsége:

$$\Pi(T; x) = 10T \cdot (1 - e^{-x}) - 20x - 0,4T^2.$$

c) A Π függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$\Pi'_T(T; x) = 10 \cdot (1 - e^{-x}) - 0,8T$$

$$\Pi'_x(T; x) = 10T \cdot e^{-x} - 20.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 10 \cdot (1 - e^{-x}) - 0,8T &= 0 \\ 10T \cdot e^{-x} - 20 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert.

A második egyenletből azt kapjuk, hogy

$$T = \frac{2}{e^{-x}}.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$10 - 10e^{-x} - \frac{1,6}{e^{-x}} = 0$$

adódik, amit átalakítva az

$$-10e^{-2x} + 10e^{-x} - 1,6 = 0$$

egyenlethez jutunk. Bevezetve az $e^{-x} = y$ jelölést a

$$-10y^2 + 10y - 1,6 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$y_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 64}}{-20} = \frac{-10 \pm 6}{-20}$$

adódik, így $y_1 = \frac{1}{5}$, illetve $y_2 = \frac{4}{5}$.

Mivel $y = e^{-x}$, ezért egyrészt

$$e^{-x} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad -x = \ln \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \ln 5,$$

másrészt

$$e^{-x} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad -x = \ln \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \ln \frac{5}{4}.$$

Mivel $x_1 = \ln 5$, ezért

$$T_1 = \frac{2}{\frac{1}{5}} = 10.$$

Mivel $x_2 = \ln \frac{5}{4}$, ezért

$$T_2 = \frac{2}{\frac{4}{5}} = 2,5.$$

Tehát a Π függvénynek két stacionárius pontja van, ezek $P_1 = (10; \ln 5)$ és $P_2 = (2,5; \ln \frac{5}{4})$.

A lokális szélsőérték létezése elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk a Π függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(T; x) = \begin{array}{c} T \quad x \\ \begin{pmatrix} \Pi''_{TT}(T; x) & \Pi''_{Tx}(T; x) \\ \Pi''_{xT}(T; x) & \Pi''_{xx}(T; x) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} \Pi''_{TT}(T; x) &= -0,8 & \Pi''_{Tx}(T; x) &= 10e^{-x} \\ \Pi''_{xT}(T; x) &= 10e^{-x} & \Pi''_{xx}(T; x) &= -10T \cdot e^{-x}, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(T; x) = \begin{array}{c} T \quad x \\ \begin{pmatrix} -0,8 & 10e^{-x} \\ 10e^{-x} & -10T \cdot e^{-x} \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} -0,8 & 2 \\ 2 & -20 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -0,8$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -0,8 & 2 \\ 2 & -20 \end{pmatrix} = 16 - 4 = 12.$$

Mivel $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, ezért a P_1 pontban lokális maximuma van a Π függvénynek.

Tehát 10°C hőmérsékletet kell biztosítani a fóliasátorban és $\ln 5 \approx 1,61$ egység műtrágyát kell négyzetméterenként felhasználni. Ekkor egy négyzetméter termőterületből a nyereség:

$$\Pi(10; \ln 5) = 100 \cdot \frac{4}{5} - 20 \ln 5 - 40 = 40 - 20 \ln 5 \approx 7,81 \text{ dollár.}$$

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} -0,8 & 8 \\ 8 & -20 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -0,8$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -0,8 & 8 \\ 8 & -20 \end{pmatrix} = 16 - 64 = -48.$$

Mivel $D_2 < 0$, ezért a P_2 pontban nincs szélsőértéke a Π függvénynek.

77. Feladat. Határozzuk meg az $x + y - z = 1$ sík azon pontját, amely a lehető legközelebb van a $P = (0; -3; 2)$ ponthoz!

Megoldás:

Legyen az $x + y - z = 1$ sík egy tetszőleges pontja $Q = (x; y; z)$. Ekkor a P és Q pontok távolsága:

$$d_{PQ} = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2}.$$

Mivel a Q pont illeszkedik a síkra, ezért

$$x + y - z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = x + y - 1,$$

így azt kapjuk, hogy

$$d_{PQ} = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2 + (x + y - 3)^2}.$$

A d_{PQ} függvénynek pontosan ott van szélsőérték helye, ahol a d_{PQ}^2 függvénynek, így az

$$f(x; y) = x^2 + (y + 3)^2 + (x + y - 3)^2$$

függvény minimumhelyét keressük.

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 2x + 2 \cdot (x + y - 3) = 4x + 2y - 6$$

$$f'_y(x; y) = 2 \cdot (y + 3) + 2 \cdot (x + y - 3) = 2x + 4y.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 4x + 2y - 6 &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 2, y = -1$.

Tehát az f függvénynek egy stacionárius pontja van: $S = (2; -1)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{xx}(x; y) = 4$$

$$f''_{xy}(x; y) = 2$$

$$f''_{yx}(x; y) = 2$$

$$f''_{yy}(x; y) = 4,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük az S stacionárius pontban, akkor azt kapjuk, hogy

$$M(S) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 4$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 16 - 4 = 12.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért az S pontban lokális minimuma van az f függvénynek. A keresett pont: $Q = (2; -1; 0)$. A minimális távolság:

$$d_{PQ} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12} = 2 \cdot \sqrt{3}.$$

1.6. Három- és többváltozós függvények lokális szélsőértéke

1.6.1. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy ebben a fejezetben a másodrendű parciális deriváltfüggvények esetén a függvény argumentumában a változókat nem mindig írjuk ki.

1.6.2. Definíció. Az $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $P \in D$ pont *lokális maximumhelye*, ha P -nek van olyan nyílt környezete, amelyben minden függvényérték legfeljebb $f(P)$.

Az $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a $P \in D$ pont *lokális minimumhelye*, ha P -nek van olyan nyílt környezete, amelyben minden függvényérték legalább $f(P)$.

1.6.3. Tétel. (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele)

Ha az $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek a $P \in D$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor az P pontban az elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák.

1.6.4. Példa. Az $f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$ függvénynek a $(0; 0; 0)$ pont stacionárius pontja, mert

$$f'_x(x; y; z) = 2x \quad \text{és} \quad f'_y(x; y; z) = 2y \quad \text{és} \quad f'_z(x; y; z) = 2z,$$

így $f'_x(0; 0; 0) = 0$, $f'_y(0; 0; 0) = 0$ és $f'_z(0; 0; 0) = 0$.

1.6.5. Definíció. Az $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény *Hesse-mátrixa* a $P \in D$ pontban az

$$M(P) = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(P) & f''_{x_1x_2}(P) & \dots & f''_{x_1x_n}(P) \\ f''_{x_2x_1}(P) & f''_{x_2x_2}(P) & \dots & f''_{x_2x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots \\ f''_{x_nx_1}(P) & f''_{x_nx_2}(P) & \dots & f''_{x_nx_n}(P) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

mátrix.

1.6.6. Példa. Az $f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$ függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y; z) = 2x \quad \text{és} \quad f'_y(x; y; z) = 2y \quad \text{és} \quad f'_z(x; y; z) = 2z.$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{array}{lll} f''_{xx}(x; y; z) = 2 & f''_{xy}(x; y; z) = 0 & f''_{xz}(x; y; z) = 0 \\ f''_{yx}(x; y; z) = 0 & f''_{yy}(x; y; z) = 2 & f''_{yz}(x; y; z) = 0 \\ f''_{zx}(x; y; z) = 0 & f''_{zy}(x; y; z) = 0 & f''_{zz}(x; y; z) = 2. \end{array}$$

Ezt felhasználva, a Hesse-mátrix:

$$M = \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ x \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ y \\ z \end{array}.$$

1.6.7. Tétel. (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele)

Legyen $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az f függvénynek a $P \in D$ pontban az elsőrendű parciális deriváltjai nullák. Ilyenkor a P pontot *stacionárius pont*nak is nevezzük. Tekintsük az f függvény másodrendű parciális deriváltjaiból képzett

$$M(P) = \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \\ x_1 \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(P) & f''_{x_1x_2}(P) & \dots & f''_{x_1x_n}(P) \\ f''_{x_2x_1}(P) & f''_{x_2x_2}(P) & \dots & f''_{x_2x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots \\ f''_{x_nx_1}(P) & f''_{x_nx_2}(P) & \dots & f''_{x_nx_n}(P) \end{pmatrix} \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}$$

Hesse-mátrixot.

Legyenek D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) az $M(P)$ mátrix bal felső sarokdeterminánsai, azaz legyen

$$D_1 = f''_{x_1x_1}(P),$$

legyen

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(P) & f''_{x_1x_2}(P) \\ f''_{x_2x_1}(P) & f''_{x_2x_2}(P) \end{pmatrix},$$

általánosan

$$D_i = \det \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(P) & f''_{x_1x_2}(P) & \cdots & f''_{x_1x_i}(P) \\ f''_{x_2x_1}(P) & f''_{x_2x_2}(P) & \cdots & f''_{x_2x_i}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_ix_1}(P) & f''_{x_ix_2}(P) & \cdots & f''_{x_ix_i}(P) \end{pmatrix}.$$

Ha $D_i > 0$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén, akkor az f függvénynek a P pontban lokális minimuma van.

Ha $(-1)^i \cdot D_i > 0$, akkor az f függvénynek a P pontban lokális maximuma van.

Ha $D_i \geq 0$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén, továbbá létezik olyan i szám, melyre $D_i = 0$ (azaz minden bal felső sarokdetermináns nemnegatív és közülük legalább az egyik nulla), vagy $(-1)^i \cdot D_i \geq 0$ és létezik olyan i szám, melyre $D_i = 0$ (vagyis az első bal felső sarokdetermináns negatív, ezt követően váltakozó előjelűek a determinánsok, és legalább az egyik determináns ezek közül nulla), akkor a sarokdeterminánsok vizsgálatával nem dönthető el, hogy van-e szélsőértéke az f függvénynek a P pontban.

Ha a sarokdeterminánsok előjelére az előbb felsorolt esetek egyike sem teljesül, akkor az f függvénynek nincs szélsőértéke a P pontban.

1.6.8. Példa. Az $f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$ függvénynek a $(0; 0; 0)$ pontban lokális minimumhelye van, ugyanis a $(0; 0; 0)$ stacionárius pontja és a Hesse-mátrix bal felső sarokdeterminánsainak mindegyike pozitív.

1.6.9. Következmény. Legyen $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az f függvénynek a $P \in D$ pontban az elsőrendű parciális deriváltjai nullák. Tekintsük az f függvény másodrendű parciális deriváltjaiból képzett

$$M(P) = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(P) & f''_{x_1x_2}(P) & \cdots & f''_{x_1x_n}(P) \\ f''_{x_2x_1}(P) & f''_{x_2x_2}(P) & \cdots & f''_{x_2x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(P) & f''_{x_nx_2}(P) & \cdots & f''_{x_nx_n}(P) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-mátrixot.

Legyenek D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) az $M(P)$ mátrix bal felső sarokdeterminánsai, azaz legyen

$$D_1 = f''_{x_1x_1}(P),$$

legyen

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(P) & f''_{x_1x_2}(P) \\ f''_{x_2x_1}(P) & f''_{x_2x_2}(P) \end{pmatrix},$$

általánosan

$$D_i = \det \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(P) & f''_{x_1x_2}(P) & \dots & f''_{x_1x_i}(P) \\ f''_{x_2x_1}(P) & f''_{x_2x_2}(P) & \dots & f''_{x_2x_i}(P) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f''_{x_ix_1}(P) & f''_{x_ix_2}(P) & \dots & f''_{x_ix_i}(P) \end{pmatrix}.$$

Ha $M(P)$ pozitív definit, akkor az f függvénynek a P pontban lokális minimuma van.

Ha $M(P)$ negatív definit, akkor az f függvénynek a P pontban lokális maximuma van.

Ha $M(P)$ pozitív szemidefinit vagy negatív szemidefinit, akkor a sarokdeterminánsok vizsgálatával nem dönthető el, hogy létezik-e szélsőértéke az f függvénynek a P pontban.

Ha $M(P)$ indefinit, akkor az f függvénynek nincs szélsőértéke a P pontban.

1.6.10. Megjegyzés. Többváltozós függvény lokális szélsőértékének meghatározása a gyakorlatban:

1. Kiszámoljuk az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit.
2. Megoldjuk az

$$\left. \begin{aligned} f'_{x_1}(x_1; x_2; \dots; x_n) &= 0 \\ f'_{x_2}(x_1; x_2; \dots; x_n) &= 0 \\ &\dots \\ f'_{x_n}(x_1; x_2; \dots; x_n) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert.

Az egyenletrendszer megoldásai a lehetséges szélsőértékek, más szóval stationárius pontok.

3. Kiszámoljuk az f függvény másodrendű parciális deriváltjait, majd azokból előállítjuk az

$$M(x_1; x_2; \dots; x_n) = \begin{matrix} & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \dots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \dots & f''_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \dots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Hesse-mátrixot.

4. Kiértékeljük a Hesse-mátrixot a stacionárius pontokban és alkalmazzuk a 1.6.7 tételt annak eldöntésére, hogy a stacionárius pontban van-e szélsőérték és ha igen, milyen típusú.

Kidolgozott feladatok**78. Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x; y; z) = x^2 - xy + y^2 + z^2 - 2z + 5$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y; z) = 2x - y$$

$$f'_y(x; y; z) = -x + 2y$$

$$f'_z(x; y; z) = 2z - 2.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $y = 2x$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $x = 0$ adódik, így $y = 0$. A harmadik egyenletből $z = 1$ következik.Tehát az f függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (0; 0; 1)$.A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y; z) = \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{pmatrix} & x & y & z \\ f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} f''_{xx} = 2 & f''_{xy} = -1 & f''_{xz} = 0 \\ f''_{yx} = -1 & f''_{yy} = 2 & f''_{yz} = 0 \\ f''_{zx} = 0 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 2, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y; z) = \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ x \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ y \\ z \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánása: $D_1 = 2$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke:

$$f(0; 0; 1) = 0^2 - 0 \cdot 0 + 0^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4.$$

79. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x; y; z) = x^3 + y^3 - 3xy + z^2 - 4z + 2$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y; z) = 3x^2 - 3y$$

$$f'_y(x; y; z) = 3y^2 - 3x$$

$$f'_z(x; y; z) = 2z - 4.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0 \\ 2z - 4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $z = 2$. Az első és második egyenlet osztható 3-mal, így az

$$\left. \begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $y = x^2$ adódik, amit behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(x^2)^2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - x = 0.$$

Az egyenletből x -et kiemelve

$$x \cdot (x^3 - 1) = 0$$

adódik, így $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. A megfelelő y értékek $y_1 = 0$ és $y_2 = 1$. Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0; 0; 2)$ és $P_2 = (1; 1; 2)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y; z) = \begin{matrix} & x & y & z \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} f''_{xx} = 6x & f''_{xy} = -3 & f''_{xz} = 0 \\ f''_{yx} = -3 & f''_{yy} = 6y & f''_{yz} = 0 \\ f''_{zx} = 0 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 2, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y; z) = \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ x \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ y \\ z \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Az első bal felső sarokdetermináns: $D_1 = 0$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 9 = -9.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 6$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 36 - 9 = 27.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1)^6 \cdot (36 - 9) = 54.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke:

$$f(1; 1; 2) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = -3.$$

80. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x; y; z) = 2x^2 + xy + 4y^2 + xz + z^2 + 4$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y; z) = 4x + y + z$$

$$f'_y(x; y; z) = x + 8y$$

$$f'_z(x; y; z) = x + 2z.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y + z = 0 \\ x + 8y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszert. A második egyenletből kivonva a harmadikat azt kapjuk, hogy $z = 4y$. A második egyenletből $x = -8y$ adódik. Ezeket behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-32y + y + 4y = 0,$$

így $y = 0$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy $z = 0$ és $x = 0$.

Tehát az f függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (0; 0; 0)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y; z) = \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{pmatrix} & x & y & z \\ f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} f''_{xx} = 4 & f''_{xy} = 1 & f''_{xz} = 1 \\ f''_{yx} = 1 & f''_{yy} = 8 & f''_{yz} = 0 \\ f''_{zx} = 1 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 2, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y; z) = \begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ x \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ y \\ z \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 4$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = 32 - 1 = 31.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 64 - 8 - 2 = 54.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke:

$$f(0; 0; 0) = 4.$$

81. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x; y; z) = -x^2 + 2x - y^2 - 2y - 2z^2 - 4yz$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y; z) = -2x + 2$$

$$f'_y(x; y; z) = -2y - 2 - 4z$$

$$f'_z(x; y; z) = -4z - 4y.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} -2x + 2 &= 0 \\ -2y - 2 - 4z &= 0 \\ -4z - 4y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 1$. A harmadik egyenletből $y = -z$ adódik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$2z - 2 - 4z = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -1.$$

Ezt felhasználva $y = 1$ adódik. Tehát az f függvénynek egyetlen stacionárius pontja van: $P = (1; 1; -1)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y; z) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= -2 & f''_{xy} &= 0 & f''_{xz} &= 0 \\ f''_{yx} &= 0 & f''_{yy} &= -2 & f''_{yz} &= -4 \\ f''_{zx} &= 0 & f''_{zy} &= -4 & f''_{zz} &= -4, \end{aligned}$$

ezért a Hesse-mátrix:

$$M(x; y; z) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}. \end{matrix}$$

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = -2$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 - 0 = 4.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} = -2 \cdot ((-2) \cdot (-4) - (-4)^2) = 16.$$

Mivel $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ és $D_3 > 0$, ezért a P pontban nincs szélsőérték.

82. Feladat. Legyen $x > 0$, $y > 0$ és $z \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg az

$$f(x; y; z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy + z^2 - 2z + 1$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y; z) = -\frac{1}{x^2} + y$$

$$f'_y(x; y; z) = -\frac{1}{y^2} + x$$

$$f'_z(x; y; z) = 2z - 2.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{x^2} + y = 0 \\ -\frac{1}{y^2} + x = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

egyenletrendszer.

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $y = \frac{1}{x^2}$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} + x = 0$$

adódik, ami ekvivalens a

$$-x^4 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (-x^3 + 1) = 0$$

egyenlettel. Mivel $x \neq 0$, ezért azt kapjuk, hogy $x = 1$. Ezt felhasználva $y = 1$ adódik. A harmadik egyenletből azt kapjuk, hogy $z = 1$. Tehát az f függvény stacionárius pontja: $P = (1; 1; 1)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y; z) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= \frac{2}{x^3} & f''_{xy} &= 1 & f''_{xz} &= 0 \\ f''_{yx} &= 1 & f''_{yy} &= \frac{2}{y^3} & f''_{yz} &= 0 \\ f''_{zx} &= 0 & f''_{zy} &= 0 & f''_{zz} &= 2, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y; z) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{y^3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 2$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 8 - 2 = 6.$$

Mivel $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ és $D_3 > 0$, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke:

$$f(1; 1; 1) = 1 + 1 + 1 + 1 - 2 + 1 = 3.$$

83. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x; y; z) = x^3 - 48x + y^3 - 3y^2 + z^2 - 2z + 1$$

függvény lokális szélsőérték helyeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei

$$f'_x(x; y; z) = 3x^2 - 48$$

$$f'_y(x; y; z) = 3y^2 - 6y$$

$$f'_z(x; y; z) = 2z - 2.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 48 &= 0 \\ 3y^2 - 6y &= 0 \\ 2z - 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = \pm 4$, a második egyenletből azt, hogy $y = 0$, illetve $y = 2$, míg az utolsó egyenletből azt, hogy $z = 1$. Tehát az f függvénynek négy stacionárius pontja van. Ezek az alábbiak:

$$\begin{aligned} P_1 &= (4; 0; 1) & P_3 &= (-4; 0; 1) \\ P_2 &= (4; 2; 1) & P_4 &= (-4; 2; 1). \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y; z) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 6x & f''_{xy} &= 0 & f''_{xz} &= 0 \\ f''_{yx} &= 0 & f''_{yy} &= 6y - 6 & f''_{yz} &= 0 \\ f''_{zx} &= 0 & f''_{zy} &= 0 & f''_{zz} &= 2, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y; z) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y - 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 24$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = -144.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 24$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 144.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 144 \cdot 2 = 288.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_3 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_3) = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = -24$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = 144.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 288.$$

Tehát a P_3 pontban nincs szélsőérték.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_4 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_4) = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = -24$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = -144.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_4 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

84. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x; y; z; u) = x^2 + y^2 - 6x - xy + z^2 - 2z + 2u^2 - 4u$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y; z; u) = 2x - 6 - y$$

$$f'_y(x; y; z; u) = 2y - x$$

$$f'_z(x; y; z; u) = 2z - 2$$

$$f'_u(x; y; z; u) = 4u - 4.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 2x - 6 - y &= 0 \\ 2y - x &= 0 \\ 2z - 2 &= 0 \\ 4u - 4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $u = 1$, míg a harmadikból azt, hogy $z = 1$.

A második egyenletből $x = 2y$ adódik, amit behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $y = 2$.

Ezt felhasználva $x = 4$ adódik.

Tehát az f függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (4; 2; 1; 1)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az

azokból képzett

$$M(x; y; z; u) = \begin{matrix} & x & y & z & u \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ u \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & f''_{xu} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} & f''_{yu} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} & f''_{zu} \\ f''_{ux} & f''_{uy} & f''_{uz} & f''_{uu} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{cccc} f''_{xx} = 2 & f''_{xy} = -1 & f''_{xz} = 0 & f''_{xu} = 0 \\ f''_{yx} = -1 & f''_{yy} = 2 & f''_{yz} = 0 & f''_{yu} = 0 \\ f''_{zx} = 0 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 2 & f''_{zu} = 0 \\ f''_{ux} = 0 & f''_{uy} = 0 & f''_{uz} = 0 & f''_{uu} = 4 \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y; z; u) = \begin{matrix} & x & y & z & u \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ u \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 2$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6.$$

A negyedik bal felső sarokdetermináns:

$$D_4 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1)^8 \cdot 6 = 24.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke:

$$f(4; 2; 1; 1) = 4^2 + 2^2 - 6 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = -15.$$

85. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x; y; z; u) = x^3 + y^2 - 6xy + 2z^2 - 4z + u^2 - 6u + 3$$

függvény lokális szélsőérték helyeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y; z; u) = 3x^2 - 6y$$

$$f'_y(x; y; z; u) = 2y - 6x$$

$$f'_z(x; y; z; u) = 4z - 4$$

$$f'_u(x; y; z; u) = 2u - 6.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 6y &= 0 \\ 2y - 6x &= 0 \\ 4z - 4 &= 0 \\ 2u - 6 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $u = 3$, míg a harmadikból azt, hogy $z = 1$. A második egyenletből $y = 3x$ adódik, amit behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$3x^2 - 18x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x \cdot (x - 6) = 0.$$

Tehát $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 6$, így $y_1 = 0$, illetve $y_2 = 18$ adódik.

Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0; 0; 1; 3)$, illetve $P_2 = (6; 18; 1; 3)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y; z; u) = \begin{matrix} & x & y & z & u \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ u \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & f''_{xu} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} & f''_{yu} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} & f''_{zu} \\ f''_{ux} & f''_{uy} & f''_{uz} & f''_{uu} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{cccc} f''_{xx} = 6x & f''_{xy} = -6 & f''_{xz} = 0 & f''_{xu} = 0 \\ f''_{yx} = -6 & f''_{yy} = 2 & f''_{yz} = 0 & f''_{yu} = 0 \\ f''_{zx} = 0 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 4 & f''_{zu} = 0 \\ f''_{ux} = 0 & f''_{uy} = 0 & f''_{uz} = 0 & f''_{uu} = 2 \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y; z; u) = \begin{matrix} & x & y & z & u \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ u \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6x & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 0$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = -36.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 stacionárius pontban, akkor azt kapjuk, hogy

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 36 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 36$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = 36.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 36 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot 36 = 144.$$

A negyedik bal felső sarokdetermináns:

$$D_4 = \det \begin{pmatrix} 36 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 144 = 288.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek.

1.7. Kétváltozós függvények abszolút szélsőértéke

1.7.1. Definíció. Az $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0; y_0) \in D$ pont *abszolút maximumhelye*, ha minden $(x; y)$ számpárra $f(x; y) \leq f(x_0; y_0)$ teljesül.

Az $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0; y_0) \in D$ pont *abszolút minimumhelye*, ha minden $(x; y)$ számpárra $f(x; y) \geq f(x_0; y_0)$ teljesül.

1.7.2. Tétel. Korlátos és zárt halmazon értelmezett függvénynek van abszolút minimuma és abszolút maximuma.

1.7.3. Tétel. Az abszolút szélsőérték meghatározásának lépései:

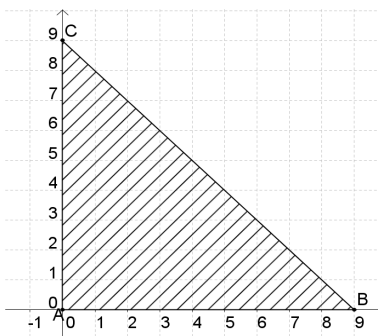
1. Soroljuk fel a tartomány belsejében azokat a pontokat, ahol a függvénynek lokális szélsőértéke lehet, és számoljuk ki a függvény helyettesítési értékeit ezekben a pontokban.
2. Soroljuk fel a tartomány határán azokat a pontokat, ahol a függvénynek lokális szélsőértéke lehet, és számoljuk ki a függvény helyettesítési értékeit ezekben a pontokban.
3. Válasszuk ki a helyettesítési értékek közül a legnagyobbat és a legkisebbet. Mivel az abszolút maximum és minimum lokális is, ezeknek elő kell fordulniuk a lokális szélsőértékek között, így a legnagyobb érték az abszolút maximum, a legkisebb érték az abszolút minimum.

Kidolgozott feladatok

86. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = 2x - x^2 + 2y - y^2 + 2$ függvény abszolút szélsőértékeit az $x = 0$, $y = 0$, $y = 9 - x$ egyenesek által meghatározott zárt háromszögtartományon!

Megoldás:

A háromszögtartomány az alábbi:



A tartomány belsejében a lehetséges szélsőérték helyek az $f'_x(x; y) = 0$ és $f'_y(x; y) = 0$ egyenletrendszer megoldásai.

Mivel $f'_x(x; y) = 2 - 2x$ és $f'_y(x; y) = 2 - 2y$, ezért a

$$\left. \begin{aligned} 2 - 2x &= 0 \\ 2 - 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása: $x = 1$, $y = 1$. Legyen $P_1 = (1; 1)$! Ez a pont benne van a háromszögtartományban. A függvényérték a P_1 helyen:

$$f(P_1) = 2 \cdot 1 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 1^2 + 2 = 4.$$

Ezután a tartomány határain kell vizsgálnunk.

Az egyik határ az $y = 0$ egyenletű egyenes azon szakasza, amelyre $0 < x < 9$. Ezen a halmazon

$$f(x; y) = f(x; 0) = 2x - x^2 + 2.$$

Ennek a deriváltfüggvénye: $f'(x) = 2 - 2x$. A $2 - 2x = 0$ egyenlet megoldása: $x = 1$. Legyen $P_2 = (1; 0)$! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(P_2) = 2 - 1 + 2 = 3.$$

A másik határ az $x = 0$ egyenletű egyenes azon szakasza, amelyre $0 < y < 9$. Ezen a halmazon

$$f(x; y) = f(0; y) = 2y - y^2 + 2.$$

Ennek a deriváltfüggvénye: $f'(y) = 2 - 2y$. A $2 - 2y = 0$ egyenlet megoldása: $y = 1$. Legyen $P_3 = (0; 1)$! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(P_3) = 2 - 1 + 2 = 3.$$

A harmadik határ az $y = 9 - x$ egyenletű egyenes azon szakasza, amelyre $0 < x < 9$. Ezen a halmazon

$$\begin{aligned} f(x; y) &= f(x; 9 - x) = 2x - x^2 + 2 \cdot (9 - x) - (9 - x)^2 + 2 = \\ &= 2x - x^2 + 18 - 2x - 81 + 18x - x^2 + 2 = \\ &= 18x - 2x^2 - 61. \end{aligned}$$

Ennek a deriváltfüggvénye: $f'(x) = 18 - 4x$. A $18 - 4x = 0$ egyenlet megoldása: $x = \frac{9}{2}$. Legyen $P_4 = (\frac{9}{2}; \frac{9}{2})$! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(P_4) = 18 \cdot \frac{9}{2} - 2 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 61 = -\frac{41}{2}.$$

A háromszögtartomány határai még a $(0; 0)$, $(9; 0)$ és $(0; 9)$ pontok. Legyen $P_5 = (0; 0)$, $P_6 = (9; 0)$ és $P_7 = (0; 9)$! Ekkor a P_5 pontban a helyettesítési érték:

$$f(P_5) = 2 \cdot 0 - 0^2 + 2 \cdot 0 - 0^2 + 2 = 2.$$

A P_6 pontban a helyettesítési érték:

$$f(P_6) = 2 \cdot 9 - 9^2 + 2 = -61.$$

A P_7 pontban a helyettesítési érték:

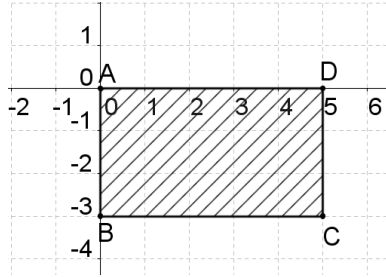
$$f(P_7) = 2 \cdot 9 - 9^2 + 2 = -61.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a függvény maximuma 4, amit a $P_1 = (1; 1)$ pontban vesz fel, minimuma -61 , amit a $P_6 = (9; 0)$ és $P_7 = (0; 9)$ pontokban vesz fel.

87. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ függvény abszolút szélsőértékeit az $[0; 5] \times [-3; 0]$ téglalapon!

Megoldás:

A téglalaptartomány az alábbi:



A tartomány belsejében a lehetséges szélsőérték helyek az $f'_x(x; y) = 0$ és $f'_y(x; y) = 0$ egyenletrendszer megoldásai.

Mivel $f'_x(x; y) = 2x + y - 6$ és $f'_y(x; y) = x + 2y$, ezért a

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - 6 &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása: $x = 4$, $y = -2$. Legyen $P_1 = (4; -2)$. A függvényérték a P_1 helyen:

$$f(P_1) = 16 - 8 + 4 - 24 + 2 = -10.$$

Ezután a tartomány határain kell vizsgálnunk.

Az egyik határ az $y = 0$ egyenletű egyenes azon szakasza, amelyre $0 < x < 5$. Ezen a halmazon

$$f(x; y) = f(x; 0) = x^2 - 6x + 2.$$

Ennek a deriváltfüggvénye: $f'(x) = 2x - 6$. A $2x - 6 = 0$ egyenlet megoldása: $x = 3$. Legyen $P_2 = (3; 0)$! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(P_2) = 9 - 18 + 2 = -7.$$

A másik határ az $y = -3$ egyenletű egyenes azon szakasza, amelyre $0 < x < 5$. Ezen a halmazon

$$f(x; y) = f(x; -3) = x^2 - 3x + 9 - 6x + 2 = x^2 - 9x + 11.$$

Ennek a deriváltfüggvénye: $f'(x) = 2x - 9$. A $2x - 9 = 0$ egyenlet megoldása: $x = \frac{9}{2}$. Legyen $P_3 = (\frac{9}{2}; -3)$! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(P_3) = \frac{81}{4} - \frac{81}{2} + 11 = -\frac{37}{4}.$$

A harmadik határ az $x = 0$ egyenletű egyenesnek azon szakasza, amelyre teljesül, hogy $-3 < y < 0$. Ezen a halmazon

$$f(x; y) = f(0; y) = y^2 + 2$$

Ennek a deriváltfüggvénye: $f'(y) = 2y$. A $2y = 0$ egyenlet megoldása: $y = 0$. Legyen $P_4 = (0; 0)$! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(P_4) = 0 + 0 + 2 = 2.$$

A negyedik határ az $x = 5$ egyenletű egyenesnek azon szakasza, amelyre teljesül, hogy $-3 < y < 0$. Ezen a halmazon

$$f(x; y) = f(5; y) = 25 + 5y + y^2 - 30 + 2 = y^2 + 5y - 3.$$

Ennek a deriváltfüggvénye: $f'(y) = 2y + 5$. A $2y + 5 = 0$ egyenlet megoldása: $y = -\frac{5}{2}$. Legyen $P_5 = (5; -\frac{5}{2})$! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$f(P_5) = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} - 3 = -\frac{37}{4}.$$

A téglalaptartomány határai még a $(0; -3)$, $(5; -3)$, $(5; 0)$ és $(0; 0)$ pontok, azonban a $(0; 0)$ már korábban szerepelt.

Legyen $P_6 = (0; -3)$, $P_7 = (5; -3)$ és $P_8 = (5; 0)$! Ekkor a P_6 pontban a helyettesítési érték:

$$f(P_6) = (-3)^2 + 2 = 11.$$

A P_7 pontban a helyettesítési érték:

$$f(P_7) = 25 - 15 + 9 - 30 + 2 = -9.$$

A P_8 pontban a helyettesítési érték:

$$f(P_8) = 25 - 30 + 2 = -3.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a függvény maximuma 11, amit a $P_6 = (0; -3)$ pontban vesz fel, minimuma -10 , amit a $P_1 = (4; -2)$ pontban vesz fel.

1.8. Feltételes szélsőérték

Elméleti összefoglaló

Feltételes szélsőérték meghatározásakor bizonyos értelmezési tartományra vonatkozó feltételeket is figyelembe veszünk a szélsőérték meghatározásához.

1.8.1. Definíció. Tekintsük az $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényt és a $g_i: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényeket, ahol $i = 1, \dots, m < n$. Ekkor az

$$\begin{aligned} L(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m; x_1; x_2; \dots; x_n) = & \lambda_1 \cdot g_1(x_1; x_2; \dots; x_n) + \\ & + \lambda_2 \cdot g_2(x_1; x_2; \dots; x_n) + \dots + \\ & + \lambda_m \cdot g_m(x_1; x_2; \dots; x_n) + \\ & + f(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{aligned}$$

függvényt *Lagrange-függvénynek* nevezzük.

1.8.2. Példa. Legyen $f(x; y) = x + 3y$ és tekintsük a $g(x; y) = x^2 + y$ feltételt! Ekkor a Lagrange-függvény:

$$L(\lambda; x; y) = \lambda \cdot (x^2 + y) + x + 3y = \lambda \cdot x^2 + \lambda \cdot y + x + 3y.$$

1.8.3. Tétel. (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele)

Tekintsük az $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, továbbá legyenek $g_i: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények, ahol $i = 1, \dots, m < n$.

Ha az f függvénynek a $P \in D$ pontban a

$$g_1(P) = 0, g_2(P) = 0, \dots, g_m(P) = 0$$

feltételek mellett lokális szélsőértéke van és a g_i „feltételek” ($i = 1, \dots, m$) egymástól függetlenek, azaz a

$$\begin{pmatrix} (g_1)'_{x_1}(P) & \dots & (g_1)'_{x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_m)'_{x_1}(P) & \dots & (g_m)'_{x_n}(P) \end{pmatrix}$$

mátrix rangja m , akkor létezik olyan $Q \in \mathbb{R}^m$ pont, hogy a Lagrange-függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei a $(Q; P) \in \mathbb{R}^m \times D$ pontban nullák.

1.8.4. Tétel. (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele)

Tekintsük az $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt és legyenek minden $i = 1, \dots, m < n$ esetén $g_i: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy a $(Q; P) \in \mathbb{R}^m \times D$ pontban a Lagrange-függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák valamint a

$$\begin{pmatrix} (g_1)'_{x_1}(P) & \dots & (g_1)'_{x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_m)'_{x_1}(P) & \dots & (g_m)'_{x_n}(P) \end{pmatrix}$$

mátrix rangja m . Tekintsük az L függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeiből képzett

$$M(Q; P) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda_1 \lambda_1}(Q; P) & \dots & L''_{\lambda_1 \lambda_m}(Q; P) & L''_{\lambda_1 x_1}(Q; P) & \dots & L''_{\lambda_1 x_n}(Q; P) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L''_{\lambda_m \lambda_1}(Q; P) & \dots & L''_{\lambda_m \lambda_m}(Q; P) & L''_{\lambda_m x_1}(Q; P) & \dots & L''_{\lambda_m x_n}(Q; P) \\ L''_{x_1 \lambda_1}(Q; P) & \dots & L''_{x_1 \lambda_m}(Q; P) & L''_{x_1 x_1}(Q; P) & \dots & L''_{x_1 x_n}(Q; P) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L''_{x_n \lambda_1}(Q; P) & \dots & L''_{x_n \lambda_m}(Q; P) & L''_{x_n x_1}(Q; P) & \dots & L''_{x_n x_n}(Q; P) \end{pmatrix}$$

mátrixot. Jelölje D_j az $M(Q; P)$ mátrix bal felső sarokdeterminánsait.

Ha $(-1)^m \cdot D_j > 0$ minden $j = 2m + 1, \dots, n + m$ esetén, akkor az f függvénynek a P pontban lokális minimuma van a megadott feltételek mellett.

Ha $(-1)^{m+j} \cdot D_j > 0$ minden $j = 2m + 1, \dots, n + m$ esetén, akkor az f függvénynek a P pontban lokális maximuma van a megadott feltételek mellett.

1.8.5. Megjegyzés. Feltételes szélsőérték meghatározása a gyakorlatban:

1. Meghatározzuk az 1.8.1 módon definiált Lagrange-függvényt.
2. Kiszámoljuk a Lagrange-függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit.
3. Az elsőrendű parciális derivált függvényeket egyenlővé tesszük nullával és megoldjuk a kapott $m + n$ darab ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer. Az egyenletrendszer megoldásvektorának utolsó n koordinátáiból képzett pontok az f függvény lehetséges szélsőértékei, más szóval stacionárius pontjai.
4. Megkonstruáljuk a Lagrange-függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeiből álló 1.8.4 tételben szereplő mátrixot, amit kiértékelünk azon stacionárius pontokban, amelyekben a 1.8.3 tételben szereplő mátrix rangja m

és alkalmazzuk a 1.8.4 tételt annak eldöntésére, hogy a stacionárius pontban van-e szélsőérték és ha igen, milyen típusú.

1.8.6. Megjegyzés. Tekintsük azt a speciális esetet, amikor az $(x; y) \mapsto f(x; y)$ függvény kétváltozós és egyetlen $g(x; y) = 0$ feltételünk van. Ekkor a (feltételes) szélsőérték meghatározása az alábbi módon történik:

1. Meghatározzuk az

$$L(\lambda; x; y) = \lambda \cdot g(x; y) + f(x; y)$$

Lagrange-függvényt.

2. Kiszámoljuk a Lagrange-függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit.
3. Az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket egyenlővé tesszük nullával, azaz megoldjuk a

$$\left. \begin{aligned} L'_\lambda(\lambda; x; y) &= 0 \\ L'_x(\lambda; x; y) &= 0 \\ L'_y(\lambda; x; y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer. Legyen az egyenletrendszer megoldása, azaz a stacionárius pont $(\lambda_0; x_0; y_0)$.

4. Megkonstruáljuk a Lagrange-függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeiből álló

$$M(\lambda; x; y) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{xx}(\lambda; x; y) & L''_{xy}(\lambda; x; y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{yx}(\lambda; x; y) & L''_{yy}(\lambda; x; y) \end{pmatrix}$$

mátrixot. Kiértékeljük a mátrixot a stacionárius pontokban. A 1.8.4 tételben $n = 2$ és $m = 1$, ezért $2m + 1 = 3$ és $n + m = 3$, tehát csak a

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda_0; x_0; y_0) & L''_{\lambda x}(\lambda_0; x_0; y_0) & L''_{\lambda y}(\lambda_0; x_0; y_0) \\ L''_{x\lambda}(\lambda_0; x_0; y_0) & L''_{xx}(\lambda_0; x_0; y_0) & L''_{xy}(\lambda_0; x_0; y_0) \\ L''_{y\lambda}(\lambda_0; x_0; y_0) & L''_{yx}(\lambda_0; x_0; y_0) & L''_{yy}(\lambda_0; x_0; y_0) \end{pmatrix}$$

determinánst kell tekintenünk.

Ha $(-1)^1 \cdot D_3 > 0$, azaz $D_3 < 0$, akkor az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban lokális minimuma van.

Ha $(-1)^{1+3} \cdot D_3 > 0$, azaz $D_3 > 0$, akkor az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban lokális maximuma van.

1.8.7. Példa. Határozzuk meg az $f(x; y) = x + y$ függvénynek az $x^2 + y^2 = 200$ feltétel mellett a lokális szélsőértékét!

Megoldás:

Legyen $g(x; y) = x^2 + y^2 - 200$. A Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned} L(\lambda; x; y) &= \lambda \cdot g(x; y) + f(x; y) = \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 200) + x + y = \\ &= \lambda \cdot x^2 + \lambda \cdot y^2 - 200\lambda + x + y. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$L'_\lambda(\lambda; x; y) = x^2 + y^2 - 200$$

$$L'_x(\lambda; x; y) = 2\lambda x + 1$$

$$L'_y(\lambda; x; y) = 2\lambda y + 1.$$

Tehát az

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 200 \\ 2\lambda x + 1 &= 0 \\ 2\lambda y + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második egyenletből $x = -\frac{1}{2\lambda}$, a harmadik egyenletből $y = -\frac{1}{2\lambda}$ adódik. Ezeket behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 200.$$

Tehát

$$\frac{1}{2\lambda^2} = 200 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{1}{400},$$

így $\lambda_1 = \frac{1}{20}$ és $\lambda_2 = -\frac{1}{20}$. Tehát $x_1 = -10$ és $y_1 = -10$, illetve $x_2 = 10$ és $y_2 = 10$ adódik.

Tehát a Lagrange-függvény stacionárius pontjai:

$$(Q_1; P_1) = \left(\frac{1}{20}; -10; -10 \right) \quad \text{és} \quad (Q_2; P_2) = \left(-\frac{1}{20}; 10; 10 \right).$$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az

azokból képzett

$$M(\lambda; x; y) = \begin{matrix} & \lambda & x & y \\ \begin{matrix} \lambda \\ x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{xx}(\lambda; x; y) & L''_{xy}(\lambda; x; y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{yx}(\lambda; x; y) & L''_{yy}(\lambda; x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) &= 0 & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) &= 2x & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) &= 2y \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) &= 2x & L''_{xx}(\lambda; x; y) &= 2\lambda & L''_{xy}(\lambda; x; y) &= 0 \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) &= 2y & L''_{yx}(\lambda; x; y) &= 0 & L''_{yy}(\lambda; x; y) &= 2\lambda, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda; x; y) = \begin{matrix} & \lambda & x & y \\ \begin{matrix} \lambda \\ x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q_1; P_1)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q_1; P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -20 & -20 \\ -20 & \frac{1}{10} & 0 \\ -20 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q_1; P_1)$ mátrix determinánsa

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & -20 & -20 \\ -20 & \frac{1}{10} & 0 \\ -20 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = -40 < 0,$$

ezért a 1.8.6 megjegyzés szerint az f függvénynek a $P_1 = (-10; -10)$ pontban minimuma van. A minimumérték:

$$f(-10; -10) = -20.$$

Ha az M mátrixot kiértékeljük a $(Q_2; P_2)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q_2; P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 \\ 20 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 20 & 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q_2; P_2)$ mátrix determinánása

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 \\ 20 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 20 & 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} = 80 > 0,$$

ezért a 1.8.6 megjegyzés szerint az f függvénynek a $P_2 = (10; 10)$ pontban minimuma van. A minimumérték:

$$f(10; 10) = 20.$$

Kidolgozott feladatok

88. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = x^2 + y$ függvénynek az $x - y = 0$ feltétel mellett a lokális szélsőértékét!

Megoldás:

Legyen $g(x; y) = x - y$! A Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned} L(\lambda; x; y) &= \lambda \cdot g(x; y) + f(x; y) = \lambda \cdot (x - y) + x^2 + y = \\ &= \lambda \cdot x - \lambda \cdot y + x^2 + y. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$L'_\lambda(\lambda; x; y) = x - y$$

$$L'_x(\lambda; x; y) = \lambda + 2x$$

$$L'_y(\lambda; x; y) = -\lambda + 1.$$

Tehát az

$$\left. \begin{aligned} x - y &= 0 \\ \lambda + 2x &= 0 \\ -\lambda + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A harmadik egyenletből $\lambda = 1$ adódik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $x = -\frac{1}{2}$. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $y = -\frac{1}{2}$.

Tehát a Lagrange-függvény stacionárius pontja: $(Q; P) = (1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda; x; y) = \begin{matrix} & \lambda & x & y \\ \lambda & \left(\begin{array}{ccc} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{xx}(\lambda; x; y) & L''_{xy}(\lambda; x; y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{yx}(\lambda; x; y) & L''_{yy}(\lambda; x; y) \end{array} \right) \\ x & & & \\ y & & & \end{matrix}$$

mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) &= 0 & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) &= 1 & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) &= -1 \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) &= 1 & L''_{xx}(\lambda; x; y) &= 2 & L''_{xy}(\lambda; x; y) &= 0 \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) &= -1 & L''_{yx}(\lambda; x; y) &= 0 & L''_{yy}(\lambda; x; y) &= 0, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda; x; y) = \begin{matrix} & \lambda & x & y \\ \lambda & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ x & & & \\ y & & & \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q; P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q; P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

adódik. Mivel az $M(Q; P)$ mátrix determinánsa

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2 < 0,$$

ezért az f függvénynek minimuma van a $P = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ pontban. A minimumérték:

$$f\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

89. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = x \cdot y$ függvénynek az $x + y = 200$ feltétel mellett a lokális szélsőértékét!

Megoldás:

A feladat feltétele szerint:

$$x + y = 200 \quad \Rightarrow \quad x + y - 200 = 0,$$

így legyen $g(x; y) = x + y - 200$.

A Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned} L(\lambda; x; y) &= \lambda \cdot g(x; y) + f(x; y) = \lambda \cdot (x + y - 200) + x \cdot y = \\ &= \lambda \cdot x + \lambda \cdot y - 200\lambda + x \cdot y. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$L'_\lambda(\lambda; x; y) = x + y - 200$$

$$L'_x(\lambda; x; y) = \lambda + y$$

$$L'_y(\lambda; x; y) = \lambda + x.$$

Tehát az

$$\left. \begin{aligned} x + y - 200 &= 0 \\ \lambda + y &= 0 \\ \lambda + x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második egyenletből kivonva a harmadik egyenletet azt kapjuk, hogy $y = x$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe $2x = 200$ adódik, így $x = 100$, ami azt jelenti, hogy $y = 100$ és $\lambda = -100$. Tehát a Lagrange-függvény stacionárius pontja: $(Q; P) = (-100; 100; 100)$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda; x; y) = \begin{matrix} & \lambda & x & y \\ \lambda & \left(\begin{array}{ccc} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{xx}(\lambda; x; y) & L''_{xy}(\lambda; x; y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{yx}(\lambda; x; y) & L''_{yy}(\lambda; x; y) \end{array} \right) \\ x & & & \\ y & & & \end{matrix}$$

mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) &= 0 & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) &= 1 & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) &= 1 \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) &= 1 & L''_{xx}(\lambda; x; y) &= 0 & L''_{xy}(\lambda; x; y) &= 1 \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) &= 1 & L''_{yx}(\lambda; x; y) &= 1 & L''_{yy}(\lambda; x; y) &= 0, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda; x; y) = \begin{matrix} & \lambda & x & y \\ \lambda & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ x & & & \\ y & & & \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q; P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q; P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q; P)$ mátrix determinánása

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

ezért az f függvénynek maximuma van a $P = (100; 100)$ pontban. A maximumérték: $f(100; 100) = 10\,000$.

90. Feladat. Egy téglatest térfogata 64 cm^3 . Határozzuk meg az éleit úgy, hogy a felszíne a lehető legkisebb legyen!

Megoldás:

Legyenek a téglatest élei x , y és z . Ekkor a térfogata:

$$V = x \cdot y \cdot z = 64.$$

Legyen $g(x; y; z) = x \cdot y \cdot z - 64$. A téglatest felszíne:

$$A(x; y; z) = 2 \cdot (x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z).$$

A Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned} L(\lambda; x; y; z) &= \lambda \cdot g(x; y; z) + A(x; y; z) = \\ &= \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 64) + 2 \cdot (x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z) = \\ &= \lambda \cdot x \cdot y \cdot z - 64\lambda + 2 \cdot (x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z). \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$L'_\lambda(\lambda; x; y; z) = x \cdot y \cdot z - 64$$

$$L'_x(\lambda; x; y; z) = \lambda \cdot y \cdot z + 2y + 2z$$

$$L'_y(\lambda; x; y; z) = \lambda \cdot x \cdot z + 2x + 2z$$

$$L'_z(\lambda; x; y; z) = \lambda \cdot x \cdot y + 2x + 2y.$$

Tehát az

$$\left. \begin{aligned} x \cdot y \cdot z - 64 &= 0 \\ \lambda \cdot y \cdot z + 2y + 2z &= 0 \\ \lambda \cdot x \cdot z + 2x + 2z &= 0 \\ \lambda \cdot x \cdot y + 2x + 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második egyenletből kivonva a harmadikat, azt kapjuk, hogy

$$\lambda \cdot z \cdot (y - x) + 2y - 2x = 0,$$

így

$$(y - x) \cdot (\lambda \cdot z + 2) = 0.$$

Ez csak úgy lehet, ha $y = x$ vagy $\lambda \cdot z + 2 = 0$, azonban ha $\lambda \cdot z + 2 = 0$, akkor a harmadik egyenletből $z = 0$ adódik, ami nem lehetséges.

A második egyenletből kivonva a negyediket, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lambda \cdot y \cdot (z - x) + 2z - 2x = 0,$$

így

$$(z - x) \cdot (\lambda \cdot y + 2) = 0.$$

Ez csak úgy lehet, ha $z = x$ vagy $\lambda \cdot y + 2 = 0$, azonban ha $\lambda \cdot y + 2 = 0$, akkor a negyedik egyenletből $y = 0$ adódik, ami nem lehetséges.

Tehát azt kaptuk, hogy $x = y = z$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$x^3 = 64 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

adódik, így $x = y = z = 4$. A második egyenletből azt kapjuk, hogy $\lambda = -1$. Tehát a Lagrange-függvény stacionárius pontja: $(Q; P) = (-1; 4; 4; 4)$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda; x; y; z) = \begin{matrix} & \lambda & x & y & z \\ \begin{matrix} \lambda \\ x \\ y \\ z \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y; z) & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y; z) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y; z) & L''_{\lambda z}(\lambda; x; y; z) \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y; z) & L''_{xx}(\lambda; x; y; z) & L''_{xy}(\lambda; x; y; z) & L''_{xz}(\lambda; x; y; z) \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y; z) & L''_{yx}(\lambda; x; y; z) & L''_{yy}(\lambda; x; y; z) & L''_{yz}(\lambda; x; y; z) \\ L''_{z\lambda}(\lambda; x; y; z) & L''_{zx}(\lambda; x; y; z) & L''_{zy}(\lambda; x; y; z) & L''_{zz}(\lambda; x; y; z) \end{array} \right) \end{matrix}$$

mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y; z) &= 0 & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y; z) &= y \cdot z \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y; z) &= y \cdot z & L''_{xx}(\lambda; x; y; z) &= 0 \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y; z) &= x \cdot z & L''_{yx}(\lambda; x; y; z) &= \lambda \cdot z + 2 \\ L''_{z\lambda}(\lambda; x; y; z) &= x \cdot y & L''_{zx}(\lambda; x; y; z) &= \lambda \cdot y + 2 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} L''_{\lambda y}(\lambda; x; y; z) &= x \cdot z & L''_{\lambda z}(\lambda; x; y; z) &= x \cdot y \\ L''_{xy}(\lambda; x; y; z) &= \lambda \cdot z + 2 & L''_{xz}(\lambda; x; y; z) &= \lambda \cdot y + 2 \\ L''_{yy}(\lambda; x; y; z) &= 0 & L''_{yz}(\lambda; x; y; z) &= \lambda \cdot x + 2 \\ L''_{zy}(\lambda; x; y; z) &= \lambda \cdot x + 2 & L''_{zz}(\lambda; x; y; z) &= 0, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda; x; y; z) = \begin{matrix} & \lambda & x & y & z \\ \lambda & \left(\begin{array}{cccc} 0 & y \cdot z & x \cdot z & x \cdot y \\ y \cdot z & 0 & \lambda \cdot z + 2 & \lambda \cdot y + 2 \\ x \cdot z & \lambda \cdot z + 2 & 0 & \lambda \cdot x + 2 \\ x \cdot y & \lambda \cdot y + 2 & \lambda \cdot x + 2 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q; P) = (-1; 4; 4; 4)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q; P) = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & -2 & -2 \\ 16 & -2 & 0 & -2 \\ 16 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A 1.8.4 tételben $m = 1$ és $n = 3$, ugyanis egy feltétel van és 3 változós a függvény, így a D_3 és D_4 sarokdeterminánsokat kell kiszámolnunk. A D_3 sarokdetermináns értéke:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & -2 \\ 16 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -512 - 512 = -1024.$$

A

$$D_4 = \det \begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & -2 & -2 \\ 16 & -2 & 0 & -2 \\ 16 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

determináns értékének kiszámolásához először a harmadik sorból vonjuk ki a második sort és a negyedik sorból vonjuk ki a második sort. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & -2 & -2 \\ 16 & -2 & 0 & -2 \\ 16 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott determinánst az első oszlopa szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$D_4 = \det \begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 16 \cdot (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -16 \cdot (64 + 64 + 64) = -3072.$$

Mivel $(-1)^1 \cdot D_3 = 1024$ és $(-1)^1 \cdot D_4 = 3072$, így $(-1)^1 \cdot D_3 > 0$ és $(-1)^1 \cdot D_4 > 0$, ezért az A függvénynek minimuma van a $P = (4; 4; 4)$ pontban. A minimumérték:

$$A(4; 4; 4) = 2 \cdot (16 + 16 + 16) = 96 \text{ cm}^2.$$

91. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x; y; z; u) = x^2 + 2y + z^2 + 6u$$

függvénynek a $2x + y - z = 20$ és $-y + u = 40$ feltételek mellett a lokális szélsőértékét!

Megoldás:

Legyen $g_1(x; y; z; u) = 2x + y - z - 20$ és $g_2(x; y; z; u) = -y + u - 40$. A Lagrange-függvény:

$$L(\lambda_1; \lambda_2; x; y; z; u) = \lambda_1 \cdot g_1(x; y; z; u) +$$

$$+ \lambda_2 \cdot g_2(x; y; z; u) + f(x; y; z; u) =$$

$$= \lambda_1 \cdot (2x + y - z - 20) + \lambda_2 \cdot (-y + u - 40) +$$

$$+ x^2 + 2y + z^2 + 6u.$$

A zárójeleket felbontva

$$L(\lambda_1; \lambda_2; x; y; z; u) = 2\lambda_1 \cdot x + \lambda_1 \cdot y - \lambda_1 \cdot z - 20\lambda_1 -$$

$$- \lambda_2 \cdot y + \lambda_2 \cdot u - 40\lambda_2 + x^2 + 2y + z^2 + 6u$$

adódik. Mivel az

$$\begin{pmatrix} (g_1)'_x & (g_1)'_y & (g_1)'_z & (g_1)'_u \\ (g_2)'_x & (g_2)'_y & (g_2)'_z & (g_2)'_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix rangja 2, ezért alkalmazható a 1.8.3 tétel.

Az L függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$L'_{\lambda_1}(\lambda_1; \lambda_2; x; y; z; u) = 2x + y - z - 20$$

$$L'_{\lambda_2}(\lambda_1; \lambda_2; x; y; z; u) = -y + u - 40$$

$$L'_x(\lambda_1; \lambda_2; x; y; z; u) = 2\lambda_1 + 2x$$

$$L'_y(\lambda_1; \lambda_2; x; y; z; u) = \lambda_1 - \lambda_2 + 2$$

$$L'_z(\lambda_1; \lambda_2; x; y; z; u) = -\lambda_1 + 2z$$

$$L'_u(\lambda_1; \lambda_2; x; y; z; u) = \lambda_2 + 6.$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele szerint az L függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeinek nullának kell lenni, így az

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - z - 20 &= 0 \\ -y + u - 40 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 2x &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2 &= 0 \\ -\lambda_1 + 2z &= 0 \\ \lambda_2 + 6 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

Az utolsó egyenletből $\lambda_2 = -6$ adódik. Ezt behelyettesítve a negyedik egyenletbe azt kapjuk, hogy $\lambda_1 = -8$. Ezt behelyettesítve az ötödik egyenletbe $z = -4$ adódik.

A harmadik egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 8$, az elsőből pedig azt, hogy $y = 0$, végül a második egyenletből azt, hogy $u = 40$.

Tehát $Q = (-8; -6)$ és $P = (8; 0; -4; 40)$, így a Lagrange-függvény stacionárius pontja: $(Q; P) = (-8; -6; 8; 0; -4; 40)$.

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az

azokból képzett

$$M(\lambda_1; \lambda_2; x; y; z; u) = \begin{matrix} & \lambda_1 & \lambda_2 & x & y & z & u \\ \lambda_1 & \left(\begin{array}{cccccc} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1\lambda_2} & L''_{\lambda_1x} & L''_{\lambda_1y} & L''_{\lambda_1z} & L''_{\lambda_1u} \\ L''_{\lambda_2\lambda_1} & L''_{\lambda_2\lambda_2} & L''_{\lambda_2x} & L''_{\lambda_2y} & L''_{\lambda_2z} & L''_{\lambda_2u} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{x\lambda_2} & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} & L''_{xu} \\ L''_{y\lambda_1} & L''_{y\lambda_2} & L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} & L''_{yu} \\ L''_{z\lambda_1} & L''_{z\lambda_2} & L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} & L''_{zu} \\ L''_{u\lambda_1} & L''_{u\lambda_2} & L''_{ux} & L''_{uy} & L''_{uz} & L''_{uu} \end{array} \right) \end{matrix}$$

mátrixot. A megfelelő deriváltakat kiszámolva az előbbi mátrix

$$M(\lambda_1; \lambda_2; x; y; z; u; v) = \begin{matrix} & \lambda_1 & \lambda_2 & x & y & z & u \\ \lambda_1 & \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q; P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q; P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

adódik. Mivel a 1.8.4 tételben most $n = 4$ és $m = 2$, ezért a D_5 és D_6 determinánsokat kell kiszámolnunk.

A

$$D_5 = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

determináns érték kiszámolását a második sor szerinti kifejtéssel végezzük:

$$D_5 = (-1) \cdot (-1)^6 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott determinánst a második oszlopa szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$D_5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix determinánsát Sarrus-szabállyal számolva:

$$D_5 = -1 \cdot (0 - 10) = 10.$$

A

$$D_6 = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinánst az utolsó sor szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$D_6 = (-1)^8 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott determinánst a negyedik sora szerint kifejtve

$$D_6 = (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

adódik. A kapott determinánst a harmadik sora szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$D_6 = (-1) \cdot 2 \cdot (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot (-2) = 4.$$

Mivel $(-1)^2 \cdot D_5 > 0$ és $(-1)^2 \cdot D_6 > 0$, ezért az f függvénynek minimuma van a $P = (8; 0; -4; 40)$ pontban. A minimumérték:

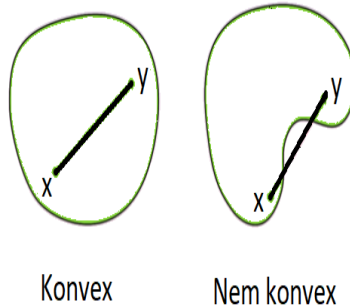
$$f(8; 0; -4; 40) = 8^2 + (-4)^2 + 6 \cdot 40 = 320.$$

1.9. Halmazok és többváltozós függvények konvexitása

1.9.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy \mathbb{R}^n egy S részhalmaza *konvex*, ha bármely két pontját összekötő szakasz teljes egészében a halmazban van, azaz bármely $x, y \in S$ esetén

$$\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in S \quad (x; y \in S).$$

1.9.2. Megjegyzés. Az alábbi ábrán egy konvex és egy nem konvex halmaz látható:



1.9.3. Példa. Az

$$S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^n \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

halmaz konvex.

1.9.4. Definíció. Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz! Az $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *konvex*, ha minden $x; y \in S$ esetén

$$f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) \leq \lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(y) \quad (\lambda \in [0; 1]).$$

Az f függvény *konkáv*, ha $-f$ konvex.

1.9.5. Tétel. Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz! Az $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor konvex, ha a másodrendű parciális deriváltakból képzett Hesse-mátrixa pozitív definit vagy pozitív szemidefinit.

1.9.6. Tétel. Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz! Az $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor konkáv, ha a másodrendű parciális deriváltakból képzett Hesse-mátrixa negatív definit vagy negatív szemidefinit.

Kidolgozott feladatok

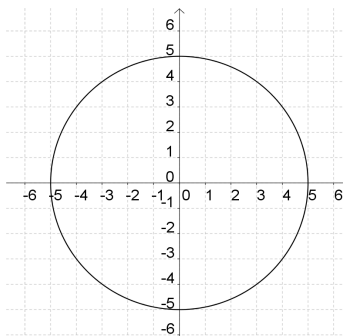
92. Feladat. Rajzoljuk fel a

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}$$

halmazt! Korlátos-e? Zárt-e? Konvex-e?

Megoldás:

A halmaz az origó középpontú, 5 egység sugarú körvonal:



A halmaz korlátos és zárt, de nem konvex.

93. Feladat. Rajzoljuk fel a

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x + 6y \leq 12\}$$

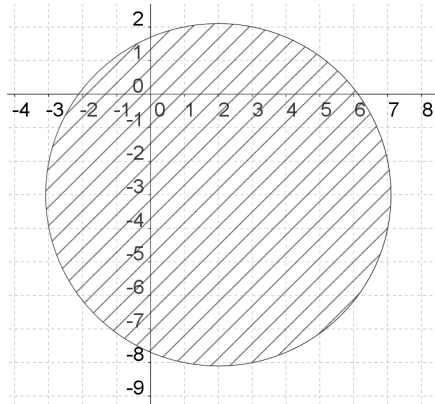
halmazt! Korlátos-e? Zárt-e? Konvex-e?

Megoldás:

Az egyenlőtlenséget átalakítva azt kapjuk, hogy

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 \leq 12 \quad \Rightarrow \quad (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 25.$$

A halmaz tehát a $(2; -3)$ középpontú, 5 egység sugarú körlemez:



A halmaz korlátos, zárt, és konvex.

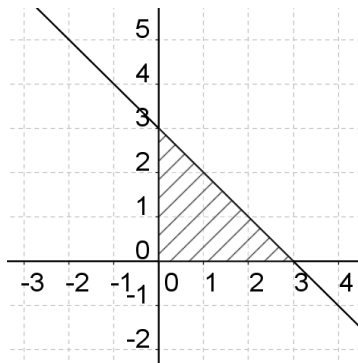
94. Feladat. Rajzoljuk fel a

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 3; x \geq 0; y \geq 0\}$$

halmazt! Korlátos-e? Zárt-e? Konvex-e?

Megoldás:

A halmaz egy háromszöglemez:



A halmaz korlátos, zárt, és konvex.

95. Feladat. Vizsgáljuk meg konvexitás szerint az

$$f(x; y) = 3x^3 - 2y^2$$

függvényt!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y) = 9x^2 \quad \text{és} \quad f'_y(x; y) = -4y.$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 18x & f''_{xy}(x; y) &= 0 \\ f''_{yx}(x; y) &= 0 & f''_{yy}(x; y) &= -4. \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix:

$$M(x; y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 18x & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

A mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 18x$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 18x & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 18x \cdot (-4) = -72x.$$

Ha $x \leq 0$, akkor $D_1 \leq 0$ és $D_2 \geq 0$, vagyis ebben az esetben az M mátrix negatív szemidefinit, így az f függvény konkáv.

Ha $x > 0$, akkor $D_1 > 0$ és $D_2 < 0$, vagyis ebben az esetben az M mátrix indefinit, így az f függvény nem konvex, nem konkáv.

Tehát azt kaptuk, hogy az f függvény konkáv a

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$$

halmazon.

96. Feladat. Vizsgáljuk meg konvexitás szerint az

$$f(x; y) = (x - 3)^3 + (y + 1)^2$$

függvényt!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y) = 3 \cdot (x - 3)^2 \quad \text{és} \quad f'_y(x; y) = 2 \cdot (y + 1).$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 6 \cdot (x - 3) & f''_{xy}(x; y) &= 0 \\ f''_{yx}(x; y) &= 0 & f''_{yy}(x; y) &= 2. \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix:

$$M(x; y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot (x - 3) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 6 \cdot (x - 3)$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 6 \cdot (x - 3) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 12 \cdot (x - 3).$$

Ha $x \geq 3$, akkor M pozitív szemidefinit, így ekkor az f függvény konvex.

Tehát azt kaptuk, hogy az f függvény konvex a

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 3\}$$

halmazon.

97. Feladat. Vizsgáljuk meg konvexitás szerint az

$$f(x; y) = (x - 3)^2 + y^4$$

függvényt!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y) = 2 \cdot (x - 3) \quad \text{és} \quad f'_y(x; y) = 4y^3.$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 2 & f''_{xy}(x; y) &= 0 \\ f''_{yx}(x; y) &= 0 & f''_{yy}(x; y) &= 12y^2. \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix:

$$M(x; y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

A mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 2$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} = 24y^2.$$

Tehát $D_1 > 0$ és $D_2 \geq 0$, ezért M pozitív szemidefinit, így a teljes \mathbb{R}^2 -n konvex az f függvény.

98. Feladat. Vizsgáljuk meg konvexitás szerint az

$$f(x; y) = \ln x + \ln y \quad (x; y > 0)$$

függvényt!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y) = \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad f'_y(x; y) = \frac{1}{y}.$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= -\frac{1}{x^2} & f''_{xy}(x; y) &= 0 \\ f''_{yx}(x; y) &= 0 & f''_{yy}(x; y) &= -\frac{1}{y^2}. \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix:

$$M(x; y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

A mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = -\frac{1}{x^2}$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 \cdot y^2}.$$

Tehát $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, ezért M negatív definit, így a teljes értelmezési tartományon, vagyis a

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0; y > 0\}$$

halmazon konkáv az f függvény.

99. Feladat. Vizsgáljuk meg konvexitás szerint az

$$f(x; y) = \ln y - e^x$$

függvényt!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y) = -e^x \quad \text{és} \quad f'_y(x; y) = \frac{1}{y}.$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= -e^x & f''_{xy}(x; y) &= 0 \\ f''_{yx}(x; y) &= 0 & f''_{yy}(x; y) &= -\frac{1}{y^2}. \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix:

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} -e^x & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}. \end{matrix}$$

A mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = -e^x$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -e^x & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{e^x}{y^2}.$$

Tehát $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, ezért M negatív definit, így a teljes \mathbb{R}^2 -n konkáv az f függvény.

100. Feladat. Vizsgáljuk meg konvexitás szerint az

$$f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^3$$

függvényt!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y; z) = 2x \quad \text{és} \quad f'_y(x; y; z) = 2y \quad \text{és} \quad f'_z(x; y; z) = 3z^2.$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y; z) &= 2 & f''_{xy}(x; y; z) &= 0 & f_{xz}(x; y; z) &= 0 \\ f''_{yx}(x; y; z) &= 0 & f''_{yy}(x; y; z) &= 2 & f_{yz}(x; y; z) &= 0 \\ f''_{zx}(x; y; z) &= 0 & f''_{zy}(x; y; z) &= 0 & f_{zz}(x; y; z) &= 6z \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix az

$$M(x; y; z) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y; z) & f''_{xy}(x; y; z) & f''_{xz}(x; y; z) \\ f''_{yx}(x; y; z) & f''_{yy}(x; y; z) & f''_{yz}(x; y; z) \\ f''_{zx}(x; y; z) & f''_{zy}(x; y; z) & f''_{zz}(x; y; z) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

mátrix. A adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$M(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix}.$$

A mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 2$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix} = 24z.$$

Ha $z \geq 0$, akkor M pozitív szemidefinit, így ekkor az f függvény konvex.

Tehát azt kaptuk, hogy az f függvény konvex a

$$D = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$$

halmazon.

101. Feladat. Vizsgáljuk meg konvexitás szerint az

$$f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 + yz$$

függvényt!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y; z) = 2x \quad \text{és} \quad f'_y(x; y; z) = 2y + z \quad \text{és} \quad f'_z(x; y; z) = 2z + y.$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{array}{lll} f''_{xx}(x; y; z) = 2 & f''_{xy}(x; y; z) = 0 & f''_{xz}(x; y; z) = 0 \\ f''_{yx}(x; y; z) = 0 & f''_{yy}(x; y; z) = 2 & f''_{yz}(x; y; z) = 1 \\ f''_{zx}(x; y; z) = 0 & f''_{zy}(x; y; z) = 1 & f''_{zz}(x; y; z) = 2 \end{array}$$

A Hesse-mátrix:

$$M(x; y; z) = \begin{array}{c} x & y & z \\ \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y; z) & f''_{xy}(x; y; z) & f''_{xz}(x; y; z) \\ f''_{yx}(x; y; z) & f''_{yy}(x; y; z) & f''_{yz}(x; y; z) \\ f''_{zx}(x; y; z) & f''_{zy}(x; y; z) & f''_{zz}(x; y; z) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Az adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$M(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = 2$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (4 - 1) = 6.$$

Az M mátrix pozitív definit, ezért az f függvény a teljes \mathbb{R}^3 halmazon konvex.

102. Feladat. Vizsgáljuk meg konvexitás szerint az

$$f(x; y; z) = e^x + y^2 + z^2$$

függvényt!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y; z) = e^x \quad \text{és} \quad f'_y(x; y; z) = 2y \quad \text{és} \quad f'_z(x; y; z) = 2z.$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{array}{lll} f''_{xx}(x; y; z) = e^x & f''_{xy}(x; y; z) = 0 & f''_{xz}(x; y; z) = 0 \\ f''_{yx}(x; y; z) = 0 & f''_{yy}(x; y; z) = 2 & f''_{yz}(x; y; z) = 0 \\ f''_{zx}(x; y; z) = 0 & f''_{zy}(x; y; z) = 0 & f''_{zz}(x; y; z) = 2 \end{array}$$

A Hesse-mátrix az alábbi:

$$M(x; y; z) = \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{ccc} x & y & z \\ \left(\begin{array}{ccc} f''_{xx}(x; y; z) & f''_{xy}(x; y; z) & f''_{xz}(x; y; z) \\ f''_{yx}(x; y; z) & f''_{yy}(x; y; z) & f''_{yz}(x; y; z) \\ f''_{zx}(x; y; z) & f''_{zy}(x; y; z) & f''_{zz}(x; y; z) \end{array} \right) \end{array}.$$

Az adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$M(x; y; z) = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = e^x$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2e^x.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4e^x.$$

Mivel $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ és $D_3 > 0$, ezért az M mátrix pozitív definit, így az f függvény a teljes \mathbb{R}^3 halmazon konvex.

1.10. Kettős integrál és alkalmazásai

1.10.1. Definíció. Legyenek a, b, c, d olyan valós számok, amelyekre $a < b$ és $c < d$! Ekkor a

$$T = [a; b] \times [c; d]$$

halmazt *téglalaptartomány*nak nevezzük.

1.10.2. Példa. A $T = [0; 1] \times [0; 3]$ halmaz egy téglalaptartomány.

1.10.3. Tétel. Legyenek a, b, c, d olyan valós számok, amelyekre $a < b$ és $c < d$! Ekkor a

$$T = [a; b] \times [c; d]$$

téglalaptartomány területe: $(b - a) \cdot (d - c)$.

1.10.4. Definíció. Legyenek $u_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $u_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, valamint a és b olyan valós számok, amelyekre $a < b$ teljesül! Ekkor az

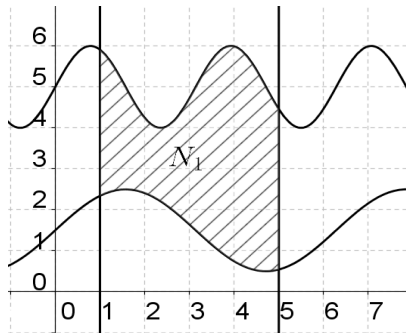
$$N_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ és } u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$$

halmazt *elsőfajú normáltartomány*nak nevezzük.

1.10.5. Példa. Ha $u_1(x) = \sin x + 1,5$ és $u_2(x) = \sin(2x) + 5$, akkor az

$$N_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 5 \text{ és } u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$$

halmazt *elsőfajú normáltartomány*nak nevezzük:



1.10.6. Definíció. Legyenek $v_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $v_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, valamint c és d olyan valós számok, amelyekre $c < d$ teljesül! Ekkor az

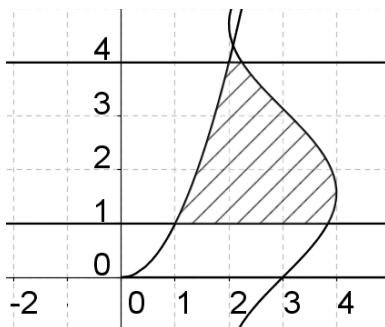
$$N_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ és } v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$$

halmazt *másodfajú normáltartomány*nak nevezzük.

1.10.7. Példa. Ha $v_1(y) = \sqrt{y}$ és $v_2(x) = \sin y + 3$, akkor az

$$N_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 4 \text{ és } v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$$

halmaz másodfajú normáltartomány:



1.10.8. Megjegyzés. Az előbbi definíciók alapján a téglalaptartományok mind az elsőfajú normáltartomány, mind a másodfajú normáltartomány definícióját kielégítik.

1.10.9. Definíció. Legyen D egy síkbeli normáltartomány! Legyen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ olyan korlátos függvény, amely a D majdnem minden pontjában folytonos. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges és tekintsük az $\frac{1}{n}$ oldalú négyzeteket! Legyen $\{K_1; \dots; K_m\}$ azon négyzetek halmaza az előbbi négyzetekből, melyeknek van közös pontja a D halmazzal! Ekkor az f függvény *Riemann-integrálja* a D normáltartományon:

$$\iint_D f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^n f(u_i) \quad (u_i \in K_i \cap D).$$

1.10.10. Megjegyzés. Kétváltozós függvény adott tartományra vonatkozó Riemann-integráljának geometriai jelentése a függvény grafikonjának az adott halmazzal bezárt előjeles térfogata.

1.10.11. Megjegyzés. Egy síkbeli tartomány területe az $f(x; y) = 1$ konstans függvény Riemann-integrálja.

1.10.12. Tétel. Tegyük fel, hogy az f és g kétváltozós valós értékű függvények a D normáltartományon Riemann-integrálhatóak! Ekkor

- $\iint_D \lambda \cdot f = \lambda \cdot \iint_D f$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén;
- $\iint_D (f + g) = \iint_D f + \iint_D g$;
- Ha $D = D_1 \cup D_2$ és $\text{Terület}(D_1 \cap D_2) = 0$, akkor $\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$.

1.10.13. Definíció. Egy halmaz *összefüggő*, ha nem áll elő két nem üres nyílt diszjunkt halmaz uniójaként.

1.10.14. Tétel. (az integrálszámítás középértéktétele)

Ha f folytonos valós értékű függvény a D összefüggő korlátos tartományon, akkor létezik $(u; v) \in D$ úgy, hogy

$$\iint_D f = \text{terület}(D) \cdot f(u; v).$$

1.10.15. Megjegyzés. Az előbbi tétel szerint folytonos kétváltozós valós értékű függvények esetén a D értelmezési tartománynak van olyan $(u; v)$ pontja, hogy a D alapú, $f(u; v)$ magasságú test térfogata éppen az $\iint_D f$ intergállal egyezik meg.

1.10.16. Tétel. (Fubini-tétel)

Ha $T = [a; b] \times [c; d]$ (vagyis T egy téglalaptartomány), akkor

$$\iint_T f(x; y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x; y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x; y) dx \right) dy.$$

1.10.17. Példa. Az $f(x; y) = 6xy$ függvény integrálja a $T = [0; 1] \times [0; 2]$ halmazon:

$$\begin{aligned} \iint_T 6xy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 6xy dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{6xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= \int_0^1 12x dx = [6x^2]_0^1 = 6. \end{aligned}$$

1.10.18. Tétel. Legyenek $u_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $u_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, valamint a és b olyan valós számok, amelyekre $a < b$ teljesül! Az

$$N_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ és } u_1(x) \leq y \leq u_2(x)\}$$

normáltartományon az f kétváltozós függvény integrálja:

$$\iint_{N_1} f(x; y) = \int_a^b \left(\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x; y) dy \right) dx.$$

1.10.19. Példa. Tekintsük az

$$N_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2; x^2 \leq y \leq x + 2\}$$

elsőfajú normáltartományt és az $f(x; y) = 2xy$ függvényt! Ekkor

$$\begin{aligned} \iint_{N_1} f(x; y) &= \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} 2xy \, dy \right) dx = \int_{-1}^2 \left[\frac{2xy^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=x+2} dx = \\ &= \int_{-1}^2 [xy^2]_{y=x^2}^{y=x+2} dx = \int_{-1}^2 x \cdot (x+2)^2 - x \cdot x^4 dx = \\ &= \int_{-1}^2 x \cdot (x^2 + 4x + 4) - x^5 dx = \\ &= \int_{-1}^2 x^3 + 4x^2 + 4x - x^5 dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + 2x^2 - \frac{x^6}{6} \right]_{-1}^2 = \frac{45}{4}. \end{aligned}$$

1.10.20. Tétel. Legyenek $v_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $v_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, valamint c és d olyan valós számok, amelyekre $c < d$ teljesül! Az

$$N_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ és } v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$$

normáltartományon az f kétváltozós függvény integrálja:

$$\iint_{N_2} f(x; y) = \int_c^d \left(\int_{v_1(y)}^{v_2(y)} f(x; y) \, dx \right) dy.$$

1.10.21. Tétel. (Integráltranszformáció.)

Ha az xy -sík minden $(x; y)$ koordinátájú pontjához hozzárendeljük az uv -síkból az $(x(u; v); y(u; v))$ pontot, vagyis az

$$f(x; y) = f(x(u; v); y(u; v))$$

helyettesítéssel élünk, és az xy -síkbeli D tartomány uv -síkbeli megfelelőjét a G tartomány jelöli, akkor

$$\iint_D f(x; y) \, dx \, dy = \iint_G f(x(u; v); y(u; v)) \cdot |\det J(u; v)| \, du \, dv,$$

ahol

$$J(u; v) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}$$

az úgynevezett Jacobi-mátrix.

1.10.22. Megjegyzés. Körszerű tartományok esetében úgynevezett polárkoordinátás helyettesítéssel élünk. Ilyenkor az

$$x(r; \varphi) = r \cdot \cos \varphi \quad y(r; \varphi) = r \cdot \sin \varphi$$

helyettesítést hajtuk végre. Ekkor a Jacobi-mátrix determinánása:

$$\begin{aligned} \det J(r; \varphi) &= \det \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= r \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r. \end{aligned}$$

Tehát ebben az esetben, ha K egy körszerű tartomány, akkor

$$\iint_K f(x; y) \, dx \, dy = \iint_G f(x(r; \varphi); y(r; \varphi)) \cdot r \, dr \, d\varphi.$$

1.10.23. Példa. Tekintsük az $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvényt és a

$$K = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4; y \geq 0\}$$

halmazt! Ez a K halmaz egy origó középpontú, 2 sugarú zárt felső félkör. Az f függvény K halmaz fölötti integrálja:

$$\begin{aligned} \iint_K f &= \int_0^\pi \left(\int_0^2 \sqrt{r^2 \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi} \cdot r \, dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^2 r^2 \, dr \right) d\varphi = \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \frac{8}{3} d\varphi = \frac{8}{3} \cdot \pi. \end{aligned}$$

1.10.24. Tétel. Az $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény átlagértéke a D halmazon:

$$\frac{1}{\text{Terület}(D)} \cdot \iint_D f$$

1.10.25. Példa. Kiszámoljuk a $[0; 1] \times [0; 2]$ halmazon az $f(x; y) = 6xy$ függvény átlagértékét. Mivel a $[0; 1] \times [0; 2]$ halmaz egy téglalap, melynek oldalai 1 és 2 egység hosszúságúak, ezért a területe: 2. Az átlagérték:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\int_0^2 6xy \, dy \right) dx &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 [3xy^2]_0^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 12x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [6x^2]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3. \end{aligned}$$

1.10.26. Tétel. Ha D egy változó sűrűségű vékony síklemez, melynek sűrűsége az $(x; y)$ koordinátájú pontban $\varrho(x; y)$, akkor a síklemez tömege:

$$M = \iint_D \varrho(x; y).$$

Az x tengelyre vonatkozó forgatónyomaték:

$$M_x = \iint_D y \cdot \varrho(x; y).$$

Az y tengelyre vonatkozó forgatónyomaték:

$$M_y = \iint_D x \cdot \varrho(x; y).$$

A tömegközéppont: $S = \left(\frac{M_y}{M}; \frac{M_x}{M} \right)$.

1.10.27. Megjegyzés. Amennyiben a sűrűség a síklemez minden pontjában állandó, vagyis a sűrűséget megadó függvény konstans (tehát a síklemez homogén eloszlású), akkor a tömegközéppontot súlypontnak mondjuk.

Kidolgozott feladatok

103. Feladat. Számoljuk ki az $f(x; y) = x + 2y$ függvény integrálját a

$$T = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$$

halmazon!

Megoldás:

Az integrál értéke:

$$\begin{aligned} \iint_T x + 2y &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 x + 2y \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= \int_{-1}^1 2x + 4 \, dx = [x^2 + 4x]_{-1}^1 = 5 - (-3) = 8. \end{aligned}$$

104. Feladat. Számoljuk ki az $f(x; y) = 3x^2 \cdot \sin y$ függvény integrálját a T halmazon, ha $T = [-1; 1] \times [0; \pi]$ halmazon!

Megoldás:

Az integrál értéke:

$$\begin{aligned} \iint_T 3x^2 \cdot \sin y &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^\pi 3x^2 \cdot \sin y \, dy \right) dx = \int_{-1}^1 [-3x^2 \cdot \cos y]_{y=0}^{y=\pi} dx = \\ &= \int_{-1}^1 3x^2 + 3x^2 \, dx = \int_{-1}^1 6x^2 \, dx = [2x^3]_{-1}^1 = 4. \end{aligned}$$

105. Feladat. Számoljuk ki az $f(x; y) = x \cdot e^{2y}$ függvény integrálját a T halmazon, ha $T = [0; 1] \times [0; 4]$ halmazon!

Megoldás:

Az integrál értéke:

$$\begin{aligned}\iint_T x \cdot e^{2y} &= \int_0^1 \left(\int_0^4 x \cdot e^{2y} \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^4 \left[\frac{x \cdot e^{2y}}{2} \right]_0^4 \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 x \cdot \frac{e^8}{2} - \frac{x}{2} \, dx = \left[x^2 \cdot \frac{e^8}{4} - \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{e^8}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^8 - 1}{4}.\end{aligned}$$

106. Feladat. Adjuk meg az $x + y + z = 4$ sík alatti térfogatot a $T = [0; 1] \times [0; 2]$ téglalap fölötti részen!

Megoldás:

A feladatunk az $f(x; y) = 4 - x - y$ függvény T halmaz fölötti integráljának kiszámolása. Az integrál értéke:

$$\begin{aligned}\iint_T 4 - x - y &= \int_0^1 \left(\int_0^2 4 - x - y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= \int_0^1 8 - 2x - 2 \, dx = \int_0^1 6 - 2x \, dx = [6x - x^2]_0^1 = 5.\end{aligned}$$

107. Feladat. Tekintsük a

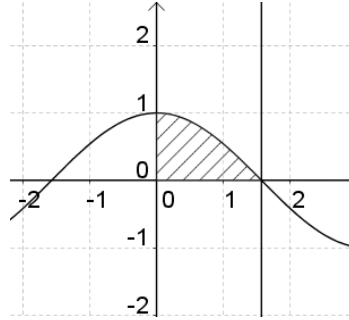
$$D = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \cos x \right\}$$

halmazt és az $f(x; y) = y \cdot \sin x$ függvényt!

- A D halmaz első- vagy másodfajú normáltartomány?
- Rajzoljuk fel a D halmazt!
- Határozzuk meg a D halmaz területét!
- Számoljuk ki az f függvény integrálját a D halmazon!
- Adjuk meg az f függvény átlagértékét a D halmazon!

Megoldás:

- A D halmaz elsőfajú normáltartomány, mert az x változó határai konstansok.
- A D halmaz:



c) A D halmaz területe:

$$\begin{aligned} \iint_D 1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos x} 1 \, dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y]_{y=0}^{y=\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \\ &= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

d) Az f függvény integrálja a D halmazon:

$$\begin{aligned} \iint_D y \cdot \sin x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos x} y \cdot \sin x \, dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{y^2 \cdot \sin x}{2} \right]_{y=0}^{y=\cos x} dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot \cos^2 x \cdot \sin x \, dx = \left[-\frac{1}{6} \cdot \cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

e) Az f függvény átlagértéke a D halmazon: $\frac{1}{6}$.

108. Feladat. Tekintsük a

$$D = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4; \frac{1}{2}x \leq y \leq \sqrt{x} \right\}$$

halmazt és az $f(x; y) = 2x + 2y$ függvényt!

- A D halmaz első- vagy másodfajú normáltartomány?
- Rajzoljuk fel a D halmazt!
- Határozzuk meg a D halmaz területét!
- Számoljuk ki az f függvény integrálját a D halmazon!
- Adjuk meg az f függvény átlagértékét a D halmazon!

Megoldás:

a) A D halmaz elsőfajú normáltartomány.

b) A D halmaz:



c) A D halmaz területe:

$$\iint_D 1 = \int_0^4 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} 1 \, dy \right) dx = \int_0^4 \sqrt{x} - \frac{1}{2}x \, dx = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4} \right]_0^4 = \frac{4}{3}.$$

d) Az f függvény integrálja a D halmazon:

$$\begin{aligned} \iint_D 2x + 2y &= \int_0^4 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} 2x + 2y \, dy \right) dx = \int_0^4 [2xy + y^2]_{y=\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^4 2x \cdot \sqrt{x} + x - x^2 - \frac{1}{4}x^2 \, dx = \int_0^4 2x^{\frac{3}{2}} + x - \frac{5}{4}x^2 \, dx = \\ &= \left[2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \left[\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \\ &= 25,6 + 8 - \frac{80}{3} = -\frac{38}{3}. \end{aligned}$$

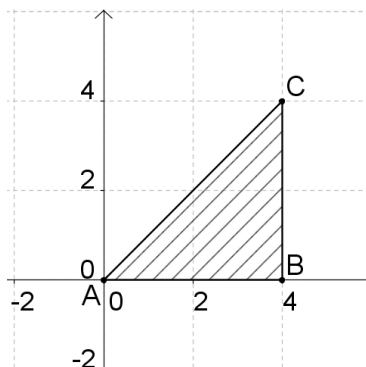
e) Az átlagérték: $-\frac{3}{4} \cdot \frac{38}{3} = -\frac{19}{2}$.

109. Feladat. Legyen a D halmaz az $A = (0; 0)$, $B = (4; 0)$, $C = (4; 4)$ pontok által meghatározott háromszögtartomány és tekintsük az $f(x; y) = 4xy$ függvényt!

- Ábrázoljuk a D tartományt!
- Írjuk fel a háromszögtartományt normáltartományként!
- Határozzuk meg a D tartomány területét!
- Számoljuk ki az f függvény integrálját a D halmazon!
- Adjuk meg az f függvény átlagértékét a D halmazon!

Megoldás:

- a) Az ABC háromszögtartomány ábrázolása:



- b) Normáltartományként felírva a háromszögtartományt azt kapjuk, hogy

$$N_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq x\}.$$

- c) A D tartomány területe: $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$.

- d) Az integrál értéke:

$$\begin{aligned} \iint_{N_1} 4xy &= \int_0^4 \left(\int_0^x 4xy \, dy \right) dx = \int_0^4 [2xy^2]_{y=0}^{y=x} dx = \\ &= \int_0^4 2x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{2} \right]_0^4 = 128. \end{aligned}$$

- e) Az f függvény átlagértéke a D halmazon: $\frac{128}{8} = 16$.

110. Feladat. Tekintsük a

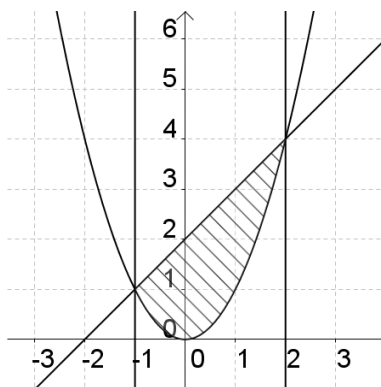
$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2; x^2 \leq y \leq x + 2\}$$

halmazt!

- a) Elsőfajú vagy másodfajú normáltartomány-e a D halmaz?
 b) Rajzoljuk fel a D halmzt!
 c) Számoljuk ki a D halmaz területét kettős integrál segítségével!

Megoldás:

- a) A D halmaz elsőfajú normáltartomány, mert az x változó határai rögzítettek.
 b) A D halmaz ábrázolása:



- c) A D halmaz területe:

$$\begin{aligned} \iint_D 1 &= \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} 1 \, dy \right) dx = \int_{-1}^2 [y]_{y=x^2}^{y=x+2} dx = \\ &= \int_{-1}^2 x + 2 - x^2 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \\ &= \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 4,5. \end{aligned}$$

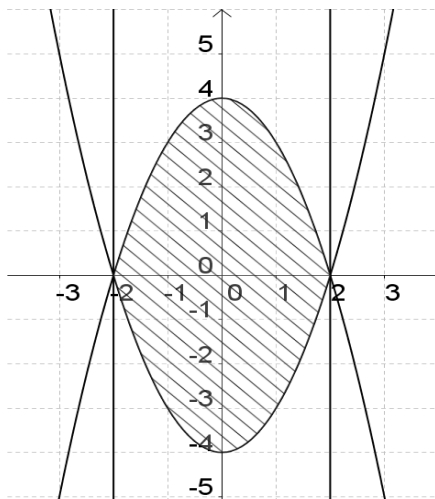
111. Feladat. Rajzoljuk fel a

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 2; x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

halmzt és számoljuk ki a területét kettős integrál segítségével!

Megoldás:

A D halmaz:



A halmaz területe:

$$\begin{aligned} \iint_D 1 &= \int_{-2}^2 \left(\int_{x^2-4}^{4-x^2} 1 \, dy \right) dx = \int_{-2}^2 \left[y \right]_{y=x^2-4}^{y=4-x^2} dx = \\ &= \int_{-2}^2 4 - x^2 - x^2 + 4 \, dx = \int_{-2}^2 8 - 2x^2 \, dx = \\ &= \left[8x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^2 = 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

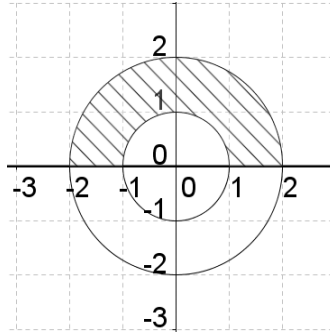
112. Feladat. Tekintsük az $f(x; y) = \ln(x^2 + y^2)$ függvényt és a

$$K = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4; y \geq 0\}$$

halmazt! Ábrázoljuk a K halmazt és a megfelelő integráltranszformáció felhasználásával számoljuk ki az f függvény K halmaz fölötti integrálját!

Megoldás:

A K halmaz:



Az integrál értéke:

$$\begin{aligned} \iint_K f &= \int_0^\pi \left(\int_1^2 \ln(r^2 \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot r \, dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \left(\int_1^2 r \cdot \ln(r^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)) \, dr \right) d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \left(\int_1^2 r \cdot \ln r^2 \, dr \right) d\varphi = \int_0^\pi \left(\int_1^2 2r \cdot \ln r \, dr \right) d\varphi. \end{aligned}$$

A parciális integrálás képletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int r \cdot \ln r \, dr = \frac{r^2}{2} \cdot \ln r - \int \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{r} \, dr = \frac{r^2}{2} \cdot \ln r - \int \frac{r}{2} \, dr = \frac{r^2}{2} \cdot \ln r - \frac{r^2}{4} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Ez alapján a keresett integrál értéke:

$$\begin{aligned} \iint_K f &= 2 \cdot \int_0^\pi \left(\int_1^2 r \cdot \ln r \, dr \right) d\varphi = 2 \cdot \int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2} \cdot \ln r - \frac{r^2}{4} \right]_1^2 d\varphi = \\ &= 2 \cdot \int_0^\pi \left(2 \ln 2 - 1 + \frac{1}{4} \right) d\varphi = 2 \cdot \int_0^\pi \left(2 \ln 2 - \frac{3}{4} \right) d\varphi = 2 \cdot \left(2 \ln 2 - \frac{3}{4} \right) \cdot \pi. \end{aligned}$$

113. Feladat. Tekintsük az

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; \sqrt{x} \leq y \leq 2 \cdot \sqrt{x}\}$$

és a

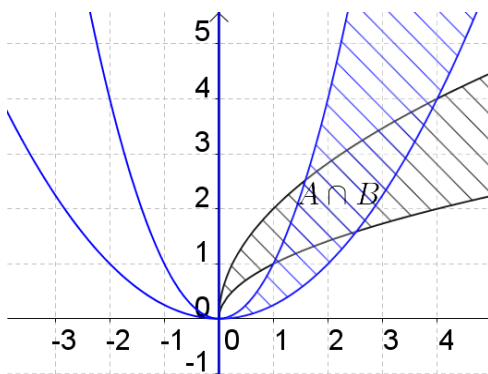
$$B = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; \frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2 \right\}$$

halmazt és legyen $D = A \cap B$! Tekintsük továbbá az $f(x; y) = xy$ függvényt!

- Rajzoljuk fel a D halmazt!
- Számoljuk ki az f függvény integrálját a D halmazon!

Megoldás:

- A D halmaz:



- Vezessük be az $u = \frac{y}{\sqrt{x}}$ és $v = \frac{y}{x^2}$ helyettesítést! Ekkor az első egyenletből azt kapjuk, hogy $y = u \cdot \sqrt{x}$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$v = \frac{u \cdot \sqrt{x}}{x^2} \Rightarrow v = \frac{u}{x^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow x = u^{\frac{2}{3}} \cdot v^{-\frac{2}{3}}$$

adódik, így

$$y = u \cdot u^{\frac{1}{3}} \cdot v^{-\frac{1}{3}} = u^{\frac{4}{3}} \cdot v^{-\frac{1}{3}}.$$

A Jacobi-mátrix determinánása:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}} \cdot v^{-\frac{2}{3}} & u^{\frac{2}{3}} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot v^{-\frac{5}{3}} \\ \frac{4}{3}u^{\frac{1}{3}} \cdot v^{-\frac{1}{3}} & u^{\frac{4}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot v^{-\frac{4}{3}} \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{2}{9}uv^{-2} + \frac{8}{9}uv^{-2} = \frac{2}{3}uv^2. \end{aligned}$$

Az új tartományon az u és v határai: $1 \leq u \leq 2$ és $\frac{1}{4} \leq v \leq 1$. Az f függvény integrálja a D halmazon:

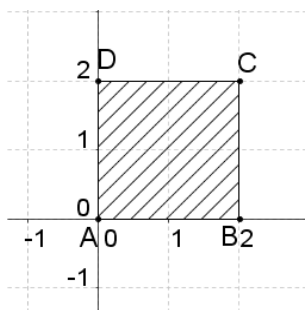
$$\begin{aligned} \iint_D f &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{4}}^1 \left(u^{\frac{2}{3}} \cdot v^{-\frac{2}{3}} \cdot u^{\frac{4}{3}} \cdot v^{-\frac{1}{3}} \right) \cdot \frac{2}{3} u \cdot v^{-2} dv \right) du = \\ &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{2}{3} \cdot u^3 \cdot v^{-3} dv \right) du = \int_0^2 \left[\frac{2}{3} u^3 \cdot \frac{v^{-2}}{-2} \right]_{v=\frac{1}{4}}^{v=1} du = \\ &= \int_0^2 -\frac{16}{3} u^3 + \frac{1}{3} u^3 du = \int_0^2 -5u^3 du = \int_0^2 \left[-\frac{5u^4}{4} \right]_0^2 = -20. \end{aligned}$$

114. Feladat. Tekintsük a $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2\}$ halmazt és az $f(x; y) = x^2 + y^2$ függvényt!

- Rajzoljuk fel a D halmazt!
- Határozzuk meg a D halmaz területét!
- Adjuk meg az f függvény integrálját a D halmazon!
- Számoljuk ki az f függvény átlagértékét D halmazon!

Megoldás:

- a) A D halmaz:



- b) A D halmaz egy négyzet, területe: 4.

c) Mivel

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_0^2 x^2 + y^2 \, dy \right) dx &= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^2 2x^2 + \frac{8}{3} dx = \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{8}{3}x \right]_0^2 = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}, \end{aligned}$$

ezért az f függvény integrálja a D halmazon: $\frac{32}{3}$.

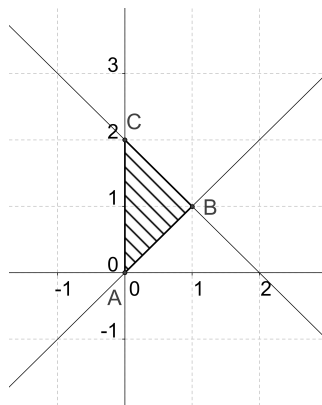
d) Az f függvény átlagértéke a D halmazon az f függvény integráljának és a halmaz területének a hányadosa, azaz

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{32}{3} = \frac{8}{3}.$$

115. Feladat. Határozzuk meg a tömegközéppontját annak a háromszög alakú vékony lemeznek, amelyet az $y = x$ és $y = 2 - x$ egyenletű egyenesek, valamint az y tengely határol, továbbá sűrűsége az $(x; y)$ koordinátájú pontban $\varrho(x; y) = 6x + 3y + 3$!

Megoldás:

A háromszögtartomány az alábbi:



A háromszögtartományt jelöljük D -vel! Ekkor

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq 2 - x\}.$$

A síklemez tömege:

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^1 \left(\int_x^{2-x} 6x + 3y + 3 \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[6xy + \frac{3y^2}{2} + 3y \right]_{y=x}^{y=2-x} dx = \\
 &= \int_0^1 6x \cdot (2-x) + 3 \cdot \frac{(2-x)^2}{2} + 3 \cdot (2-x) - 6x^2 - \frac{3}{2}x^2 - 3x \, dx = \\
 &= \int_0^1 12x - 6x^2 + 6 - 6x + \frac{3}{2}x^2 + 6 - 3x - 6x^2 - \frac{3}{2}x^2 - 3x \, dx = \\
 &= \int_0^1 -12x^2 + 12 \, dx = \left[-4x^3 + 12x \right]_0^1 = -4 + 12 = 8.
 \end{aligned}$$

Az x tengelyre vonatkozó nyomaték:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_D y \cdot \varrho = \int_0^1 \left(\int_x^{2-x} 6xy + 3y^2 + 3y \, dy \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left[3xy^2 + y^3 + \frac{3y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=2-x} dx = \\
 &= \int_0^1 3x \cdot (2-x)^2 + (2-x)^3 + 3 \cdot \frac{(2-x)^2}{2} - 3x^3 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 \, dx = \\
 &= \int_0^1 12x - 12x^2 + 3x^3 + 8 - 12x + 6x^2 - x^3 + 6 - 6x + \\
 &+ \frac{3}{2}x^2 - 3x^3 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 \, dx = \\
 &= \int_0^1 -2x^3 - 6x^2 - 6x + 14 \, dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 14x \right]_0^1 = \frac{17}{2}.
 \end{aligned}$$

Az y tengelyre vonatkozó nyomaték:

$$\begin{aligned}
 M_y &= \iint_D x \cdot \rho = \int_0^1 \left(\int_x^{2-x} 6x^2 + 3xy + 3x \, dy \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left[6x^2y + \frac{3xy^2}{2} + 3xy \right]_{y=x}^{y=2-x} dx = \\
 &= \int_0^1 6x^2 \cdot (2-x) + \frac{3x \cdot (2-x)^2}{2} + 3x \cdot (2-x) - 6x^3 - \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 dx = \\
 &= \int_0^1 12x^2 - 6x^3 + 6x - 6x^2 + \frac{3}{2}x^3 + 6x - 3x^2 - 6x^3 - \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 dx = \\
 &= \int_0^1 -12x^3 + 12x dx = \left[-3x^4 + 6x^2 \right]_0^1 = -3 + 6 = 3.
 \end{aligned}$$

A tömegközéppont:

$$S = \left(\frac{M_y}{M}; \frac{M_x}{M} \right) = \left(\frac{3}{8}; \frac{17}{16} \right).$$

1.11. Hármas integrál és alkalmazásai

1.11.1. Definíció. Legyenek a, b, c, d, e és f olyan valós számok, amelyekre teljesül, hogy $a < b$, $c < d$ és $e < f$! Ekkor a

$$T = [a; b] \times [c; d] \times [e; f]$$

halmazt *téglatesttartomány*nak nevezzük.

1.11.2. Tétel. Legyenek a, b, c, d, e, f olyan valós számok, amelyekre $a < b$, $c < d$ és $e < f$! Ekkor a

$$T = [a; b] \times [c; d] \times [e; f]$$

téglatest térfogata: $(b - a) \cdot (d - c) \cdot (f - e)$.

1.11.3. Definíció. Legyenek a és b olyan valós számok, amelyekre $a < b$, továbbá $u_1, u_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $v_1, v_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ szintén folytonos függvények! Ekkor az

$$N = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b \text{ és } u_1(x) \leq y \leq u_2(x) \text{ és} \\ v_1(x; y) \leq z \leq v_2(x; y)\}$$

halmazt *háromdimenziós normáltartomány*nak nevezzük.

1.11.4. Definíció. Legyen D egy térbeli normáltartomány és $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ olyan korlátos függvény, amely a D majdnem minden pontjában folytonos. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges és tekintsük az $\frac{1}{n}$ oldalú kockákat! Legyen $\{K_1; \dots; K_m\}$ azon kockák halmaza az előbbi kockákból, melyeknek van közös pontja a D halmazzal! Ekkor az f függvény *Riemann-integrálja* a D normáltartományon:

$$\iiint_D f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^n f(u_i) \quad (u_i \in K_i \cap D).$$

1.11.5. Megjegyzés. Egy térbeli tartomány térfogata az $f(x; y; z) = 1$ konstans függvény Riemann-integrálja.

1.11.6. Tétel. Tegyük fel, hogy az f és g háromváltozós valós értékű függvények a D normáltartományon Riemann-integrálhatóak! Ekkor

- $\iiint_D \lambda \cdot f = \lambda \cdot \iiint_D f$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén;
- $\iiint_D (f + g) = \iiint_D f + \iiint_D g$;
- Ha $D = D_1 \cup D_2$, és $\text{Térfogat}(D_1 \cap D_2) = 0$, akkor teljesül, hogy

$$\iiint_D f = \iiint_{D_1} f + \iiint_{D_2} f.$$

1.11.7. Tétel. (az integrálszámítás középértéktétele)

Ha f folytonos valós értékű függvény a D összefüggő korlátos tartományon, akkor létezik $(u; v; w) \in D$ úgy, hogy

$$\iiint_D f = \text{térfogat}(D) \cdot f(u; v; w).$$

1.11.8. Megjegyzés. Az előbbi tétel szerint folytonos háromváltozós valós értékű függvények esetén a D értelmezési tartománynak van olyan $(u; v; w)$ pontja, hogy a D alapú, $f(u; v; w)$ magasságú „test” térfogata éppen az $\iiint_D f$ intergállal egyezik meg.

1.11.9. Tétel. (Fubini-tétel)

Ha $T = [a; b] \times [c; d] \times [e; f]$ (vagyis T egy téglatesttartomány), akkor

$$\iiint_T f(x; y; z) = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x; y; z) dz \right) dy \right) dx.$$

1.11.10. Példa. Kiszámoljuk az $f(x; y; z) = 6xyz$ függvény integrálját a T halmazon, ahol $T = [0; 1] \times [0; 2] \times [0; 3]$ halmazon:

$$\begin{aligned} \iiint_T 6xyz &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 6xyz dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^2 [3xyz^2]_{z=0}^{z=3} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^2 27xy dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{27xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 54x dx = [27x^2]_0^1 = 27. \end{aligned}$$

1.11.11. Tétel. Legyenek a és b olyan valós számok, amelyekre $a < b$, továbbá $u_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $u_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, valamint $v_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ és $v_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények! Ekkor az

$$N = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b \text{ és } u_1(x) \leq y \leq u_2(x) \text{ és } v_1(x; y) \leq z \leq v_2(x; y)\}$$

háromdimenziós normáltartományon az f háromváltozós függvény integrálja:

$$\iiint_N f(x; y; z) = \int_a^b \left(\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} \left(\int_{v_1(x; y)}^{v_2(x; y)} f(x; y; z) dz \right) dy \right) dx.$$

1.11.12. Példa. Tekintsük az

$$N = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x; 0 \leq z \leq 1 - x - y\}$$

normáltartományt és az $f(x; y; z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3}$ függvényt! Ekkor

$$\begin{aligned} \iiint_N f(x; y; z) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\frac{(1+x+y+z)^{-2}}{-2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{2^{-2}}{-2} - \frac{(1+x+y)^{-2}}{-2} dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} -\frac{1}{8} + \frac{(1+x+y)^{-2}}{2} dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{8}y + \frac{(1+x+y)^{-1}}{-2} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{8} \cdot (1-x) + \frac{1}{-2 \cdot 2} - \frac{1}{-2 \cdot (1+x)} dx = \\ &= \left[-\frac{1}{8}x + \frac{x^2}{16} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \cdot \ln|1+x| \right]_0^1 = \\ &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

1.11.13. Tétel. (Integráltranszformáció.)

Ha az xyz -tér minden $(x; y; z)$ koordinátájú ponthoz hozzárendeljük az az uvw -térből az $(x(u; v; w); y(u; v; w); z(u; v; w))$ pontot, vagyis az

$$f(x; y; z) = f(x(u; v; w); y(u; v; w); z(u; v; w))$$

helyettesítéssel élünk, és az xyz -térbeli D tartomány uvw -térbeli megfelelőjét a G tartomány jelöli, akkor

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \iiint_G f(x(u; v; w); y(u; v; w); z(u; v; w)) \cdot |\det J(u; v; w)| \, du \, dv \, dw, \end{aligned}$$

ahol

$$J(u; v; w) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{pmatrix}$$

az úgynevezett Jacobi-mátrix.

1.11.14. Megjegyzés. Gyakori az úgynevezett hengerkoordinátás helyettesítés. Ilyenkor az

$$x(r; \varphi; h) = r \cdot \cos \varphi; \quad y(r; \varphi; h) = r \cdot \sin \varphi; \quad z(r; \varphi; h) = h$$

helyettesítést hajtjuk végre. Ekkor a Jacobi mátrix determinánsa:

$$\begin{aligned} \det J(r; \varphi; h) &= \det \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_h \\ y'_r & y'_\varphi & y'_h \\ z'_r & z'_\varphi & z'_h \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r. \end{aligned}$$

Tehát ebben az esetben, ha az eredeti D tartományra végrehajtva a transzformációt a G tartományt kapjuk, akkor

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \iiint_G f(x(r; \varphi; z); y(r; \varphi; z); z(r; \varphi; z)) \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz. \end{aligned}$$

1.11.15. Megjegyzés. Szintén gyakori az úgynevezett gömbkoordinátás helyettesítés. Ilyenkor az

$$x(r; u; v) = r \cdot \cos u \cdot \sin v; \quad y(r; u; v) = r \cdot \sin u \cdot \sin v; \quad z(r; u; v) = r \cdot \cos u$$

helyettesítést hajtjuk végre. Ekkor a Jacobi mátrix determinánsa:

$$\begin{aligned} \det J(r; u; v) &= \det \begin{pmatrix} x'_r & x'_u & x'_v \\ y'_r & y'_u & y'_v \\ z'_r & z'_u & z'_v \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} \sin u \cdot \cos v & r \cdot \cos u \cdot \cos v & -r \cdot \sin u \cdot \sin v \\ \sin u \cdot \sin v & r \cdot \cos u \cdot \sin v & r \cdot \sin u \cdot \cos v \\ \cos u & -r \cdot \sin u & 0 \end{pmatrix} = \\ &= r^2 \cdot \sin u. \end{aligned}$$

Tehát ebben az esetben, ha az eredeti D tartományra végrehajtva a transzformációt a G tartományt kapjuk, akkor

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x; y; z) \, dx \, dy \, dz &= \\ &= \iiint_G f(x(r; u; v); y(r; u; v); z(r; u; v)) \cdot r^2 \cdot \sin u \, dr \, du \, dv. \end{aligned}$$

1.11.16. Tétel. Az $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény átlagértéke a D halmazon:

$$\frac{1}{\text{Térfogat}(D)} \cdot \iiint_D f$$

1.11.17. Tétel. Ha $\varrho(x; y; z)$ a sűrűsége egy olyan testnek, amely a tér egy D tartományát tölti ki, akkor a test tömege:

$$M = \iiint_D \varrho(x; y; z).$$

Az yz síkra vonatkozó nyomaték:

$$M_{yz} = \iiint_D x \cdot \varrho(x; y; z).$$

Az xz síkra vonatkozó nyomaték:

$$M_{xz} = \iiint_D y \cdot \varrho(x; y; z).$$

Az xy síkra vonatkozó nyomaték:

$$M_{xy} = \iiint_D z \cdot \rho(x; y; z).$$

A tömegközéppont:

$$S = \left(\frac{M_{yz}}{M}; \frac{M_{xz}}{M}; \frac{M_{xy}}{M} \right).$$

1.11.18. Megjegyzés. Amennyiben a sűrűség a síklemez minden pontjában állandó, vagyis a sűrűséget megadó függvény konstans (tehát a síklemez homogén eloszlású), akkor a tömegközéppontot súlypontnak mondjuk.

Kidolgozott feladatok**116. Feladat.** Tekintsük a

$$N = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 0; 0 \leq z \leq y^2\}$$

halmazt és az $f(x; y; z) = 2x$ függvényt!

- a) Határozzuk meg az N halmaz térfogatát!
 b) Számoljuk ki az f függvény integrálját az N halmazon!
 c) Adjuk meg az f függvény átlagértékét az N halmazon!

Megoldás:a) Az N halmaz térfogata:

$$\begin{aligned} \iiint_N 1 &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \left(\int_0^{y^2} 1 \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 [z]_{z=0}^{z=y^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 y^2 dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=-1}^{y=0} dx = \int_0^1 \frac{1}{3} dx = \left[\frac{1}{3}x \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

b) Az f függvény integrálja az N halmazon:

$$\begin{aligned} \iiint_N 2x &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 \left(\int_0^{y^2} 2x \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 [2xz]_{z=0}^{z=y^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{-1}^0 2xy^2 dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2xy^3}{3} \right]_{y=-1}^{y=0} dx = \int_0^1 \frac{2x}{3} dx = \left[\frac{x^2}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

c) Az f függvény átlagértéke az N halmazon: 1.

117. Feladat. Tekintsük a $T = [0; 1] \times [0; 2] \times [0; 3]$ halmazt és az

$$f(x; y; z) = 2x + 4y + 6z$$

függvényt!

- Határozzuk meg a T halmaz térfogatát!
- Számoljuk ki az f függvény integrálját a T halmazon!
- Adjuk meg az f függvény átlagértékét a T halmazon!

Megoldás:

a) A T halmaz térfogata: $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

b) Az f függvény integrálja a T halmazon:

$$\begin{aligned} \iiint_T 2x + 4y + 6z &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 2x + 4y + 6z \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^2 [2xz + 4yz + 3z^2]_{z=0}^{z=3} dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^2 6x + 12y + 27 dy \right) dx = \int_0^1 [6xy + 6y^2 + 27y]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= \int_0^1 12x + 24 + 54 dx = [6x^2 + 78x]_0^1 = 84. \end{aligned}$$

c) Az f függvény átlagértéke a T halmazon: $\frac{84}{6} = 14$.

118. Feladat. Tekintsük a $T = [-1; 0] \times [0; 1] \times [0; 2]$ tartományt, valamint az $f(x; y; z) = 36xyz$ függvényt!

- Határozzuk meg a T halmaz térfogatát!
- Számoljuk ki az f függvény integrálját a T halmazon!
- Adjuk meg az f függvény átlagértékét a T halmazon!

Megoldás:

a) A T halmaz térfogata: $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$.

b) Az f függvény integrálja a T halmazon:

$$\begin{aligned} \iiint_T 36xyz &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 36xyz \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^1 [18xyz^2]_{z=0}^{z=2} dy \right) dx = \int_{-1}^0 \left(\int_0^1 72xy \, dy \right) dx = \\ &= \int_{-1}^0 [36xy^2]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{-1}^0 36x \, dx = [18x^2]_{-1}^0 = -18. \end{aligned}$$

c) Az f függvény átlagértéke a T halmazon: $-\frac{18}{2} = -9$.

119. Feladat. Adjuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ egyenletű gömb és a $z = x^2 + y^2$ egyenletű paraboloid által határolt test térfogatát!

Megoldás:

Mivel $x^2 + y^2 = z$ és $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, ezért

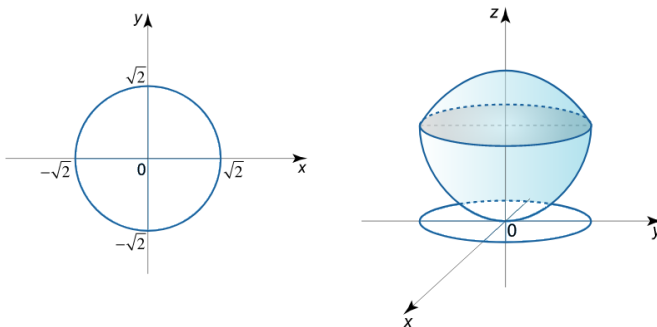
$$z + z^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad z^2 + z - 6 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2},$$

így $z_1 = 2$ és $z_2 = -3$. Mivel $x^2 + y^2 = z$ és $x^2 + y^2 \geq 0$, ezért $z \geq 0$, tehát csak $z = 2$ lehetséges.

Mivel $x^2 + y^2 = 2$ és $z = 2$, ezért $x^2 + y^2 = 2$, ami egy 2 sugarú körvonal egyenlete.



Tehát a

$$H = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \text{ és } -\sqrt{2-x^2} \leq y \leq \sqrt{2-x^2} \text{ és } x^2 + y^2 \leq z \leq x^2 + y^2 \right\}$$

halmaz térfogatát keressük.

A H halmaz térfogata:

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{6-x^2-y^2}}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} 1 \, dz \right) dy \right) dx.$$

Tekintük a hengerkoordinátás helyettesítést, azaz legyen

$$x(r; \varphi; h) = r \cdot \cos \varphi; \quad y(r; \varphi; h) = r \cdot \sin \varphi; \quad z(r; \varphi; h) = h!$$

Ekkor a Jacobi mátrix determinánása:

$$\begin{aligned} \det J(r; \varphi; h) &= \det \begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_h \\ y'_r & y'_\varphi & y'_h \\ z'_r & z'_\varphi & z'_h \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva a H halmaz térfogata:

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} r \, dh \right) dr \right) d\varphi.$$

Mivel

$$\int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} r \, dh = r \cdot (\sqrt{6-r^2} - r^2) = r \cdot \sqrt{6-r^2} - r^3,$$

ezért

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r \cdot \sqrt{6-r^2} - r^3 \, dr \right) d\varphi.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} r \cdot \sqrt{6-r^2} - r^4 \, dr &= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{2}} -2r \cdot (6-r^2)^{\frac{1}{2}} \, dr - \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \, dr = \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(6-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = \left[-\frac{(6-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = \\ &= -\frac{8}{3} - 1 + \frac{6\sqrt{6}}{3} = -\frac{11}{3} + \frac{6\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Tehát a test térfogata:

$$V = \int_0^{2\pi} -\frac{11}{3} + \frac{6\sqrt{6}}{3} \, d\varphi = \frac{6\sqrt{6} - 11}{3} \cdot 2\pi.$$

1.12. Összefoglaló feladatok az első fejezethez

120. Feladat. Írjuk fel az

$$f(x; y) = x^2 \cdot y^3 - 3y + 4$$

függvény $P = (2; 1)$ pontbeli és a

$$g(x; y) = 3x^2 + e^y$$

függvény $Q = (1; 0)$ pontbeli érintősíkjá metszéspontjának paraméteres és paramétermentes egyenletrendszerét!

Megoldás:

Az f függvény értéke a P pontban:

$$f(P) = 4 - 3 + 4 = 5.$$

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények és azok helyettesítési értékei a P pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2xy^3 & \Rightarrow & f'_x(P) = 4 \\ f'_y(x, y) &= 3x^2y^2 - 3 & \Rightarrow & f'_y(P) = 9. \end{aligned}$$

A P -beli gradiens vektor $\text{grad } f(P) = (4; 9)$. Ha a P pont koordinátái $(x_0; y_0)$, akkor az érintő sík egyenlete:

$$z = f(x_0; y_0) + \text{grad } f(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0).$$

Behelyettesítve a megfelelő adatokat azt kapjuk, hogy

$$z = 5 + (4; 9) \cdot (x - 2; y - 1).$$

A skaláris szorzat elvégzése után

$$z = 5 + 4x - 8 + 9y - 9$$

adódik. Összevonva és átrendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy a sík egyenlete:

$$4x + 9y - z = 12.$$

A g függvény értéke a Q pontban:

$$g(Q) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4.$$

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények és azok helyettesítési értékei a Q pontban:

$$\begin{aligned} g'_x(x, y) &= 6x & \Rightarrow & g'_x(Q) = 6 \\ g'_y(x, y) &= e^y & \Rightarrow & g'_y(Q) = 1. \end{aligned}$$

A Q pontbeli gradiens vektor $\text{grad } g(Q) = (6; 1)$. Ha a Q pont koordinátái $(x_0; y_0)$, akkor az érintősík egyenlete:

$$z = g(x_0; y_0) + \text{grad } g(x_0; y_0) \cdot (x - x_0; y - y_0).$$

Behelyettesítve a megfelelő adatokat azt kapjuk, hogy

$$z = 4 + (6; 1) \cdot (x - 1; y - 0).$$

A skaláris szorzat elvégzése után

$$z = 4 + 6x - 6 + y$$

adódik. Összevonva és átrendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy a sík egyenlete:

$$6x + y - z = 2.$$

Az érintősíkok metszésvonalát az

$$\left. \begin{aligned} 4x + 9y - z &= 12 \\ 6x + y - z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az első egyenlet -3 -szorosát hozzáadva a második egyenlet 2 -szereséhez azt kapjuk, hogy

$$-25y + z = -32.$$

Ha $y = t$, ahol t tetszőleges valós szám, akkor

$$z = 25t - 32.$$

Ezt felhasználva

$$x = \frac{12 + z - 9y}{4} = \frac{12 + 25t - 32 - 9t}{4} = 4t - 5.$$

adódik. Tehát a paraméteres egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} x &= 4t - 5 \\ y &= t \\ z &= 25t - 32 \end{aligned} \right\}.$$

A paramétermentes egyenletrendszer:

$$\frac{x + 5}{4} = y = \frac{z + 32}{25}.$$

121. Feladat. Hány darab stacionárius pontja van az

$$f(x; y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$$

függvénynek?

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y) = 4x^3 - 4x$$

$$f'_y(x; y) = 3y^2 - 3.$$

A stacionárius pontok a

$$\left. \begin{aligned} 4x^3 - 4x &= 0 \\ 3y^2 - 3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásai.

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$4x \cdot (x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x = 0 \quad \text{vagy} \quad x^2 - 1 = 0,$$

így $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ és $x_3 = -1$.

A második egyenletből azt kapjuk, hogy

$$3y^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1,$$

így $y_1 = 1$ és $y_2 = -1$.

A stacionárius pontok:

$$P_1 = (0; 1)$$

$$P_2 = (0; -1)$$

$$P_3 = (1; 1)$$

$$P_4 = (1; -1)$$

$$P_5 = (-1; 1)$$

$$P_6 = (-1; -1).$$

122. Feladat. Hány darab stacionárius pontja van az

$$f(x; y; z) = x^3 - 3x + y^3 - 3y + z^3 - 3z$$

függvénynek?

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y; z) = 3x^2 - 3$$

$$f'_y(x; y; z) = 3y^2 - 3$$

$$f'_z(x; y; z) = 3z^2 - 3.$$

A stacionárius pontok a

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3y^2 - 3 &= 0 \\ 3z^2 - 3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer megoldásai.

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1,$$

így $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$.

Hasonlóan $y = \pm 1$ és $z = \pm 1$.

A stacionárius pontok:

$$\begin{aligned} P_1 &= (1; 1; 1) & P_2 &= (1; 1; -1) & P_3 &= (1; -1; 1) \\ P_4 &= (1; -1; -1) & P_5 &= (-1; 1; 1) & P_6 &= (-1; 1; -1) \\ P_7 &= (-1; -1; 1) & P_8 &= (-1; -1; -1). \end{aligned}$$

123. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = 2x + y$ függvénynek az $x^2 + y = 3$ feltétel mellett a lokális szélsőértékét!

Megoldás:

Legyen $g(x; y) = x^2 + y - 3$! A Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned} L(\lambda; x; y) &= \lambda \cdot g(x; y) + f(x; y) = \lambda \cdot (x^2 + y - 3) + 2x + y = \\ &= \lambda \cdot x^2 + \lambda \cdot y - 3\lambda + 2x + y. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$L'_\lambda(\lambda; x; y) = x^2 + y - 3$$

$$L'_x(\lambda; x; y) = 2\lambda x + 2$$

$$L'_y(\lambda; x; y) = \lambda + 1.$$

Tehát az

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y &= 3 \\ 2\lambda x + 2 &= 0 \\ \lambda + 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A harmadik egyenletből $\lambda = -1$ adódik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $x = 1$. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $y = 2$.

Tehát a Lagrange-függvény stacionárius pontja: $(Q; P) = (-1; 1; 2)$.

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda; x; y) = \begin{matrix} & \lambda & x & y \\ \lambda & \left(\begin{matrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{xx}(\lambda; x; y) & L''_{xy}(\lambda; x; y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{yx}(\lambda; x; y) & L''_{yy}(\lambda; x; y) \end{matrix} \right) \\ x & & & \\ y & & & \end{matrix}$$

mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) &= 0 & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) &= 2x & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) &= 1 \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) &= 2x & L''_{xx}(\lambda; x; y) &= 2\lambda & L''_{xy}(\lambda; x; y) &= 0 \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) &= 1 & L''_{yx}(\lambda; x; y) &= 0 & L''_{yy}(\lambda; x; y) &= 0, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda; x; y) = \begin{matrix} & \lambda & x & y \\ \lambda & \left(\begin{matrix} 0 & 2x & 1 \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right) \\ x & & & \\ y & & & \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q; P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q; P) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

adódik. Mivel az $M(Q; P)$ mátrix determinánusa

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 > 0,$$

ezért az f függvénynek maximuma van a $P = (1; 2)$ pontban.

A maximumérték:

$$f(1; 2) = 2 \cdot 1 + 2 = 4.$$

124. Feladat. Tekintsük a

$$D = \{(x; y) \mid -2 \leq x \leq 2 \text{ és } x^2 \leq y \leq 0,5x^2 + 2\}$$

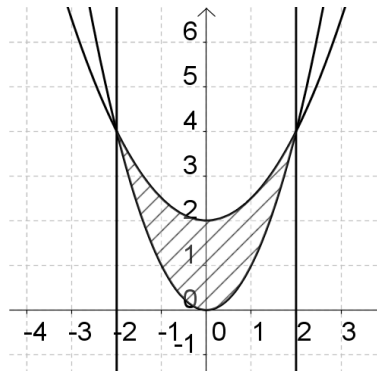
halmazt!

a) Konvex vagy konkáv-e a D halmaz?

b) Számoljuk ki a D halmaz területét!

Megoldás:

a) Először ábrázoljuk a halmazt:



A halmaz konkáv, mert például az

$$\left(-\frac{3}{2}; 3\right) \text{ és } \left(\frac{3}{2}; 3\right)$$

pontokat összekötő szakasznak nem minden pontja van benne a D halmazban.

b) A D halmaz területe:

$$\begin{aligned} \iint_D 1 &= \int_{-2}^2 \left(\int_{x^2}^{0,5x^2+2} 1 \, dy \right) dx = \int_{-2}^2 [y]_{y=x^2}^{y=0,5x^2+2} dx = \\ &= \int_{-2}^2 0,5x^2 + 2 - x^2 dx = \left[2x - \frac{x^3}{6} \right]_{-2}^2 = 4 - \frac{8}{6} + 4 - \frac{8}{6} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

125. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x; y; z) = y \cdot \sin x + e^{4z}$$

függvény $P = (0; 1; 0)$ pontbeli gradiens vektorát!

Megoldás:

A függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei és azok helyettesítési értékei a P pontban:

$$f'_x(x, y; z) = y \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad f'_x(P) = 1$$

$$f'_y(x, y; z) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'_y(P) = 0$$

$$f'_z(x, y; z) = 4e^{4z} \quad \Rightarrow \quad f'_z(P) = 4.$$

A gradiens vektor: $\text{grad } f(P) = (1; 0; 4)$.

126. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x; y; z) = \ln(x^2 + xy + y^3 + z)$$

függvény $P = (0; 1; 0)$ pontbeli gradiens vektorát, majd az f függvény P pontbeli $v = (3; 4; 0)$ iránymenti deriváltját!

Megoldás:

A függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei és azok helyettesítési értékei a P pontban:

$$f'_x(x, y; z) = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^3 + z} \quad \Rightarrow \quad f'_x(P) = 1$$

$$f'_y(x, y; z) = \frac{x + 3y^2}{x^2 + xy + y^3 + z} \quad \Rightarrow \quad f'_y(P) = 3$$

$$f'_z(x, y; z) = \frac{1}{x^2 + xy + y^3 + z} \quad \Rightarrow \quad f'_z(P) = 1.$$

A gradiens vektor: $\text{grad } f(P) = (1; 3; 1)$.

Az irányvektor hossza: $|v| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy az irányvektorral egyező irányú egységvektor:

$$v_0 = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0 \right).$$

Az iránymenti derivált: $f'_v(P) = \text{grad } f(P) \cdot v_0 = 1 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5} = 3$.

127. Feladat. Tekintsük az

$$f(x; y; z) = x^2 \cdot \cos(2y) + z$$

függvényt!

- Adjuk meg az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit és azok helyettesítési értékeit a $P = (2; \frac{\pi}{2}; 1)$ pontban!
- Határozzuk meg az f függvény P pontbeli gradiens vektorát!
- Számoljuk ki az f függvény P pontbeli $v = (-3; 4; 0)$ iránymenti deriváltját!
- Adjuk meg az $f''_{yy}(x; y; z)$ másodrendű parciális deriváltfüggvényt!
- Adjuk meg az $f''_{zz}(x; y; z)$ másodrendű parciális deriváltfüggvényt!

Megoldás:

- A függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei és azok helyettesítési értékei a P pontban:

$$f'_x(x, y; z) = 2x \cdot \cos(2y) \quad \Rightarrow \quad f'_x(P) = -4$$

$$f'_y(x, y; z) = -2x^2 \cdot \sin(2y) \quad \Rightarrow \quad f'_y(P) = 0$$

$$f'_z(x, y; z) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'_z(P) = 1.$$

- A gradiens vektor: $\text{grad } f(P) = (-4; 0; 1)$.
- Az irányvektorral egyező irányú egységvektor felírásához kiszámoljuk az irányvektor hosszát:

$$|v| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy az irányvektorral egyező irányú egységvektor:

$$v_0 = \left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 0 \right).$$

Az iránymenti derivált: $f'_v(P) = \text{grad } f(P) \cdot v_0 = \frac{12}{5}$.

- Az $f''_{yy}(x; y; z)$ másodrendű parciális deriváltfüggvény:

$$f''_{yy}(x; y; z) = -4x^2 \cdot \cos(2y).$$

- Az $f''_{zz}(x; y; z)$ másodrendű parciális deriváltfüggvény: $f''_{zz}(x; y; z) = 0$.

128. Feladat. Számoljuk ki az $f(x; y) = 10x \cdot \cos y$ függvény integrálját a T halmazon, ha $T = [0; 2] \times [0; \frac{\pi}{2}]$!

Megoldás:

Az integrál értéke:

$$\begin{aligned} \iint_T 10x \cdot \cos y &= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 10x \cdot \cos y \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[10x \cdot \sin y \right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx = \\ &= \int_0^2 10x \, dx = [5x^2]_0^2 = 20. \end{aligned}$$

129. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = x + 2y$ függvénynek az $x - y^2 = 1$ feltétel mellett a lokális szélsőértékét!

Megoldás:

Legyen $g(x; y) = x - y^2 - 1$! A Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned} L(\lambda; x; y) &= \lambda \cdot g(x; y) + f(x; y) = \lambda \cdot (x - y^2 - 1) + x + 2y = \\ &= \lambda \cdot x - \lambda \cdot y^2 - \lambda + x + 2y. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$L'_\lambda(\lambda; x; y) = x - y^2 - 1$$

$$L'_x(\lambda; x; y) = \lambda + 1$$

$$L'_y(\lambda; x; y) = -2\lambda y + 2.$$

Tehát az

$$\left. \begin{aligned} x - y^2 &= 1 \\ \lambda + 1 &= 0 \\ -2\lambda y + 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második egyenletből $\lambda = -1$ adódik. Ezt behelyettesítve a harmadik egyenletbe azt kapjuk, hogy $y = -1$. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 2$.

Tehát a Lagrange-függvény stacionárius pontja: $(Q; P) = (-1; 2; -1)$.

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az

azokból képzett

$$M(\lambda; x; y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \lambda & x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} \lambda \\ x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{xx}(\lambda; x; y) & L''_{xy}(\lambda; x; y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{yx}(\lambda; x; y) & L''_{yy}(\lambda; x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

mátrixot. Mivel

$$L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) = 0 \quad L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) = 1 \quad L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) = -2y$$

$$L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) = 1 \quad L''_{xx}(\lambda; x; y) = 0 \quad L''_{xy}(\lambda; x; y) = 0$$

$$L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) = -2y \quad L''_{yx}(\lambda; x; y) = 0 \quad L''_{yy}(\lambda; x; y) = -2\lambda,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda; x; y) = \begin{matrix} & \begin{matrix} \lambda & x & y \end{matrix} \\ \begin{matrix} \lambda \\ x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2y \\ 1 & 0 & 0 \\ -2y & 0 & -2\lambda \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q; P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q; P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

adódik. Mivel az $M(Q; P)$ mátrix determinánusa

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2 < 0,$$

ezért az f függvénynek lokális minimuma van a $P = (2; -1)$ pontban.

A minimumérték:

$$f(1; 2) = 2 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

130. Feladat. Vizsgáljuk meg konvexitás szerint az

$$f(x; y; z) = \ln x + \ln y + \ln z \quad (x; y; z > 0)$$

függvényt!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y; z) = \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad f'_y(x; y; z) = \frac{1}{y} \quad \text{és} \quad f'_z(x; y; z) = \frac{1}{z}.$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f''_{xx}(x; y; z) = -\frac{1}{x^2} \quad f''_{xy}(x; y; z) = 0 \quad f_{xz}(x; y; z) = 0$$

$$f''_{yx}(x; y; z) = 0 \quad f''_{yy}(x; y; z) = -\frac{1}{y^2} \quad f_{yz}(x; y; z) = 0$$

$$f''_{zx}(x; y; z) = 0 \quad f''_{zy}(x; y; z) = 0 \quad f''_{zz}(x; y; z) = -\frac{1}{z^2}$$

A Hesse-mátrix az

$$M(x; y; z) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y; z) & f''_{xy}(x; y; z) & f''_{xz}(x; y; z) \\ f''_{yx}(x; y; z) & f''_{yy}(x; y; z) & f''_{yz}(x; y; z) \\ f''_{zx}(x; y; z) & f''_{zy}(x; y; z) & f''_{zz}(x; y; z) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

mátrix. A adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$M(x; y; z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z^2} \end{pmatrix}.$$

A mátrix első bal felső sarokdeterminánsa: $D_1 = -\frac{1}{x^2}$.

A második bal felső sarokdetermináns:

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 \cdot y^2}.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns:

$$D_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}.$$

Tehát $D_1 \leq 0$, $D_2 \geq 0$ és $D_3 \leq 0$, vagyis a Hesse-mátrix negatív szemidefinit, ezért az f függvény értelmezési tartományának minden pontjában konkáv.

131. Feladat. Határozzuk meg az

$$f(x; y; z; u) = x^2 + y \cdot z + z \cdot u^2 + x \cdot \sin(2y)$$

függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltfüggvények:

$$f'_x(x; y; z; u) = 2x + \sin(2y)$$

$$f'_y(x; y; z; u) = z + x \cdot \cos(2y) \cdot 2$$

$$f'_z(x; y; z; u) = y + u^2$$

$$f'_u(x; y; z; u) = 2zu.$$

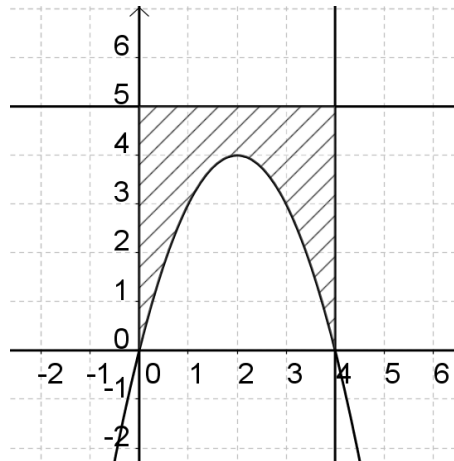
132. Feladat. Rajzoljuk fel a

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ és } 0 \leq y \leq 5 \text{ és } y \geq 4x - x^2\}$$

halmazt! Konvex-e a halmaz?

Megoldás:

A halmazt koordináta-rendszerben ábrázolva az alábbi ábrát kapjuk:



A halmaz konkáv, mert például az

$$\left(1; \frac{7}{2}\right) \quad \text{és} \quad \left(3; \frac{7}{2}\right)$$

pontokat összekötő szakasznak nem minden pontja van benne a D halmazban.

133. Feladat. Az $f(x; y; z) = x^3 + xy + y^2 - z^2 + 6z$ függvény P pontbeli gradiens vektora:

$$\text{grad } f(P) = (5; 5; 4).$$

Határozzuk meg a P pontot!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y; z) = 3x^2 + y$$

$$f'_y(x; y; z) = x + 2y$$

$$f'_z(x; y; z) = -2z + 6.$$

Mivel $\text{grad } f(P) = (5; 5; 4)$, ezért meg kell oldanunk az

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 + y &= 5 \\ x + 2y &= 5 \\ -2z + 6 &= 4 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer.

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $z = 1$.

A második egyenletből $x = 5 - 2y$ adódik.

Behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$3 \cdot (5 - 2y)^2 + y = 5 \quad \Rightarrow \quad 12y^2 - 59y + 70 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével

$$y_{1,2} = \frac{59 \pm \sqrt{121}}{24} = \frac{59 \pm 11}{24}$$

adódik, így $y_1 = 2$ és $y_2 = \frac{35}{12}$.

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy $x_1 = 1$ és $x_2 = 5 - \frac{35}{6} = -\frac{5}{6}$.

Tehát két lehetséges pont van:

$$P_1 = (1; 2; 1) \quad \text{és} \quad P_2 = \left(-\frac{5}{6}; \frac{35}{12}; 1\right).$$

134. Feladat. Határozzuk meg az A paraméter értékét úgy, hogy

$$\int_0^1 \left(\int_0^2 A \cdot x \cdot y \, dy \right) dx = 2$$

teljesüljön!

Megoldás:

Mivel

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^2 A \cdot x \cdot y \, dy \right) dx &= A \cdot \int_0^1 \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= A \cdot \int_0^1 2x \, dx = A \cdot [x^2]_0^1 = A, \end{aligned}$$

ezért $A = 2$.**135. Feladat.** Számoljuk ki az $f(x; y) = y \cdot \sin(x + y)$ függvény integrálját az

$$N = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; y \leq x \leq 3y\}$$

halmazon!

Megoldás:

Az integrál értéke:

$$\begin{aligned} \iint_N y \cdot \sin(x + y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_y^{3y} y \cdot \sin(x + y) \, dx \right) dy = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-y \cdot \cos(x + y)]_{x=y}^{x=3y} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -y \cdot \cos(4y) + y \cdot \cos(2y) \, dy. \end{aligned}$$

Mivel egyrészt

$$\int y \cdot \cos(4y) \, dy = y \cdot \frac{\sin(4y)}{4} - \int \frac{\sin(4y)}{4} \, dy = y \cdot \frac{\sin(4y)}{4} + \frac{\cos(4y)}{16} + c_1,$$

másrészt

$$\int y \cdot \cos(2y) \, dy = y \cdot \frac{\sin(2y)}{2} - \int \frac{\sin(2y)}{2} \, dy = y \cdot \frac{\sin(2y)}{2} + \frac{\cos(2y)}{4} + c_2,$$

ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, ezért

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} -y \cdot \cos(4y) + y \cdot \cos(2y) dy = \\ & = \left[-y \cdot \frac{\sin(4y)}{4} - \frac{\cos(4y)}{16} + y \cdot \frac{\sin(2y)}{2} + \frac{\cos(2y)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ & = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin 2\pi}{4} - \frac{\cos 2\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \pi}{2} + \frac{\cos \pi}{4} + \frac{\cos 0}{16} - \frac{\cos 0}{4} = \\ & = -\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

136. Feladat. Határozzuk meg az $f(x; y) = (x \cdot y)^{x \cdot y}$ függvény x változó szerinti parciális deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Vegyük mindkét oldal természetes alapú logaritmusát! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\ln f(x; y) = \ln(x \cdot y)^{x \cdot y}.$$

A logaritmus megfelelő azonosságának alkalmazásával

$$\ln f(x; y) = (x \cdot y) \cdot \ln(x \cdot y)$$

adódik. Mindkét oldalt az x változó szerint deriválva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{f(x; y)} \cdot f'_x(x; y) = y \cdot \ln(x \cdot y) + x \cdot y \cdot \frac{1}{x \cdot y} \cdot y.$$

Ebből

$$f'_x(x; y) = f(x; y) \cdot \left(y \cdot \ln(x \cdot y) + x \cdot y \cdot \frac{1}{x \cdot y} \cdot y \right)$$

adódik, így az x változó szerinti parciális deriváltfüggvényre azt kapjuk, hogy

$$f'_x(x; y) = (x \cdot y)^{x \cdot y} \cdot y \cdot (\ln(x \cdot y) + 1).$$

137. Feladat. Legyen a H halmaz az $A = (-4; 0)$, $B = (4; 0)$ és $C = (0; 4)$ pontok által meghatározott zárt háromszögtartomány és tekintsük az

$$f(x; y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6x$$

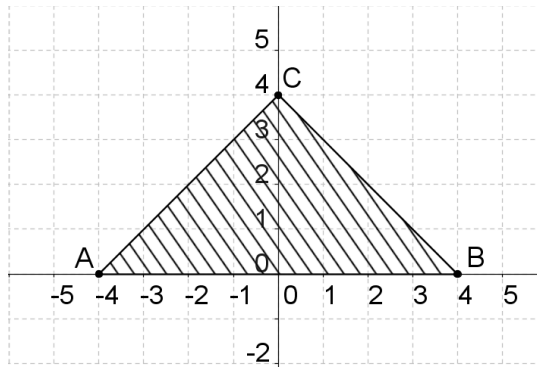
függvényt!

- Ábrázoljuk a H halmazt!
- Számoljuk ki a H halmaz területét!

- c) Írjuk fel a H halmazt két normáltartomány uniójaként!
 d) Kettős integrál segítségével adjuk meg a H halmaz területét!
 e) Számoljuk ki az f függvény integrálját a H halmaz fölött!
 f) Adjuk meg az f függvény átlagértékét a H halmazon!
 g) Számoljuk ki az f függvény lokális szélsőértékeit!
 h) Határozzuk meg az f függvény abszolút szélsőértékeit a H halmazon!

Megoldás:

- a) A
- H
- halmaz képe:



- b) A
- H
- halmaz területe:

$$T = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16.$$

- c) Legyen

$$H_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4 \text{ és } 0 \leq y \leq 4 - x\},$$

és

$$H_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq x \leq 0 \text{ és } 0 \leq y \leq x + 4\}.$$

- d) A
- H_1
- halmaz területe:

$$\begin{aligned} \iint_{H_1} 1 &= \int_0^4 \left(\int_0^{4-x} 1 \, dy \right) dx = \int_0^4 \left[y \right]_{y=0}^{y=4-x} dx = \\ &= \int_0^4 4 - x \, dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 16 - 8 = 8. \end{aligned}$$

A H_2 halmaz területe:

$$\begin{aligned} \iint_{H_2} 1 &= \int_{-4}^0 \left(\int_0^{x+4} 1 \, dy \right) dx = \int_{-4}^0 [y]_{y=0}^{y=x+4} dx = \\ &= \int_{-4}^0 x + 4 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 4x \right]_{-4}^0 = -8 + 16 = 8. \end{aligned}$$

A H halmaz területe:

$$\text{Terület}(H) = \iint_H 1 = \iint_{H_1} 1 + \iint_{H_2} 1 = 16.$$

e) Az f függvény integrálja a H_1 halmaz fölött:

$$\begin{aligned} \iint_{H_1} f &= \int_0^4 \left(\int_0^{4-x} x^2 - 4xy + y^2 + 6x \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^4 \left[x^2 y - 2xy^2 + \frac{y^3}{3} + 6xy \right]_{y=0}^{y=4-x} dx = \\ &= \int_0^4 x^2 \cdot (4-x) - 2x \cdot (4-x)^2 + \frac{(4-x)^3}{3} + 6x \cdot (4-x) \, dx = \\ &= \int_0^4 4x^2 - x^3 - 2x \cdot (16 - 8x + x^2) + \frac{64 - 48x + 12x^2 - x^3}{3} + \\ &+ 24x - 6x^2 \, dx = \int_0^4 -10 \cdot \frac{x^3}{3} + 18x^2 - 24x + \frac{64}{3} \, dx = \\ &= \left[-5 \cdot \frac{x^4}{6} + 6x^3 - 12x^2 + \frac{64}{3}x \right]_0^4 = 64. \end{aligned}$$

Az f függvény integrálja a H_2 halmaz fölött:

$$\begin{aligned}
 \iint_{H_2} f &= \int_{-4}^0 \left(\int_0^{x+4} x^2 - 4xy + y^2 + 6x \, dy \right) dx = \\
 &= \int_{-4}^0 \left[x^2y - 2xy^2 + \frac{y^3}{3} + 6xy \right]_{y=0}^{y=x+4} dx = \\
 &= \int_0^4 x^2 \cdot (x+4) - 2x \cdot (x+4)^2 + \frac{(x+4)^3}{3} + 6x \cdot (x+4) dx = \\
 &= \int_0^4 x^3 + 4x^2 - 2x \cdot (x^2 + 8x + 16) + \frac{x^3 + 12x^2 + 48x + 64}{3} + \\
 &+ 6x^2 + 24x dx = \int_0^4 -2 \cdot \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 8x + \frac{64}{3} dx = \\
 &= \left[-\frac{x^4}{6} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + 4x^2 + \frac{64}{3}x \right]_0^4 = \frac{64}{3}.
 \end{aligned}$$

Az f függvény integrálja a H halmaz fölött:

$$\iint_H f = \iint_{H_1} f + \iint_{H_2} f = 64 + \frac{64}{3} = \frac{256}{3}.$$

f) Az f függvény átlagértéke a H halmazon:

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{256}{3} = \frac{16}{3}.$$

g) Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x(x; y) = 2x - 4y + 6$$

$$f'_y(x; y) = -4x + 2y.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk

a

$$\left. \begin{aligned} 2x - 4y + 6 &= 0 \\ -4x + 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. A második egyenletből azt kapjuk, hogy $y = 2x$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$2x - 8x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

adódik, így $y = 2$. A stacionárius pont: $P = (1; 2)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához először meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x; y) & f''_{xy}(x; y) \\ f''_{yx}(x; y) & f''_{yy}(x; y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 2 & f''_{xy}(x; y) &= -4 \\ f''_{yx}(x; y) &= -4 & f''_{yy}(x; y) &= 2, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 2$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 16 = -12.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

h) Tekintsük először azt a határt, amikor $y = 0$ és $-4 < x < 4$! Ekkor

$$f(x) = f(x; 0) = x^2 + 6x.$$

Ebben az esetben $f'(x) = 2x + 6$, amelynek zérushelye $x = -3$.

Legyen $P_1 = (-3; 0)$! A P_1 pontban az f függvény helyettesítési értéke:

$$f(P_1) = (-3)^2 + 6 \cdot 3 = 27.$$

Tekintsük most azt a határt, amikor $y = x + 4$ és $-4 < x < 0$! Ekkor

$$f(x; x + 4) = x^2 - 4x \cdot (x + 4) + (x + 4)^2 + 6x = -2x^2 - 2x + 16.$$

Ebben az esetben $f'(x) = -4x - 2$, amelynek zérushelye $x = -\frac{1}{2}$.

Legyen $P_2 = (-\frac{1}{2}; \frac{7}{2})$! A P_2 pontban az f függvény helyettesítési értéke:

$$f(P_2) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{7}{2} + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{33}{2}.$$

Tekintsük most azt a határt, amikor $y = 4 - x$ és $0 < x < 4$! Ekkor

$$f(x; 4 - x) = x^2 - 4x \cdot (4 - x) + (4 - x)^2 + 6x = 6x^2 - 18x + 16.$$

Ebben az esetben $f'(x) = 12x - 18$, amelynek zérushelye $x = \frac{3}{2}$.

Legyen $P_3 = (\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$! A P_3 pontban az f függvény helyettesítési értéke:

$$f(P_3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{2}.$$

A helyettesítési érték a $P_4 = (-4; 0)$ pontban:

$$f(P_4) = 16 - 24 = -8.$$

A helyettesítési érték a $P_5 = (4; 0)$ pontban:

$$f(P_5) = 16 + 24 = 40.$$

A helyettesítési érték a $P_6 = (0; 4)$ pontban:

$$f(P_6) = 16.$$

Az abszolút minimum: -8 , amelyet a $(-4; 0)$ pontban vesz fel a függvény.

Az abszolút maximum: 40 , amelyet a $(4; 0)$ pontban vesz fel a függvény.

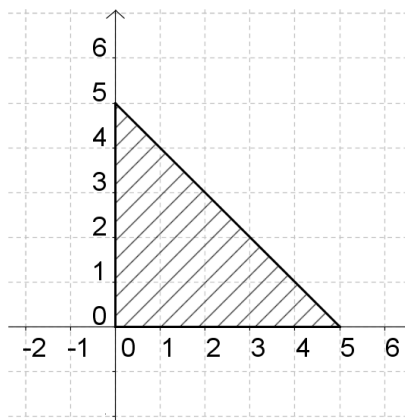
138. Feladat. Az

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 5; 0 \leq y \leq 5 - x\}$$

halmaz konvex-e?

Megoldás:

A halmazt ábrázolva egy zárt háromszögletet kapunk, ami konvex halmaz:



139. Feladat. Tekintsük a $T = [0; 1] \times [0; 2] \times [-1; 1]$ halmazt és az

$$f(x; y; z) = x + 2y + 3z$$

függvényt! Számoljuk ki az f függvény integrálját a T halmaz fölött!

Megoldás:

Az f függvény integrálja a T halmaz fölött:

$$\begin{aligned} \iiint_T x + 2y + 3z &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_{-1}^1 x + 2y + 3z \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left[xz + 2yz + \frac{3z^2}{2} \right]_{z=-1}^{z=1} dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^2 2x + 4y \, dy \right) dx = \int_0^1 [2xy + 2y^2]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= \int_0^1 4x + 8 \, dx = [2x^2 + 8x]_0^1 = 10. \end{aligned}$$

140. Feladat. Tekintsük a $T = [0; 1] \times [0; 1] \times [0; 1]$ halmazt és az

$$f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$$

függvényt!

- a) Határozzuk meg a T halmaz térfogatát!
 b) Számoljuk ki az f függvény integrálját a T halmazon!
 c) Adjuk meg az f függvény átlagértékét a T halmazon!

Megoldás:

a) A T halmaz térfogata: $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

b) Az f függvény integrálja a T halmazon:

$$\begin{aligned} \iiint_T x^2 + y^2 + z^2 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 + y^2 + z^2 \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=1} dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 x^2 + y^2 + \frac{1}{3} dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} + \frac{1}{3} y \right]_{y=0}^{y=1} dx = \\ &= \int_0^1 x^2 + \frac{2}{3} dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} x \right]_0^1 = 1. \end{aligned}$$

c) Az f függvény átlagértéke a T halmazon: 1.

141. Feladat. Egy fogyasztó két terméket fogyaszt, ezek X és Y ; az X termékből x , az Y termékből y darabot. A fogyasztó ezen két termékhez tartozó hasznossági függvénye:

$$U(x; y) = 2 \ln x + 2y.$$

Az X termék egységára 20 forint, az Y termék egységára 100 forint. A fogyasztó pontosan 3 000 forintot szeretne költeni a két termékre. Határozzuk meg, hogy melyik termékből hány darabot vásároljon, ha azt szeretné, hogy a haszna a lehető legnagyobb legyen!

Megoldás:

A feladat feltétele szerint $20x + 100y = 3\,000$.

Az U függvény szélsőértékét keressük a $20x + 100y = 3\,000$ feltétel mellett.

Legyen $g(x; y) = 20x + 100y - 3\,000$.

A Lagrange-függvény:

$$L(\lambda; x; y) = \lambda \cdot g(x; y) + U(x; y) = \lambda \cdot (20x + 100y - 3000) + 2 \ln x + 2y = 20\lambda x + 100\lambda y - 3000\lambda + 2 \ln x + 2y.$$

Az L függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$L'_\lambda(\lambda; x; y) = 20x + 100y - 3000$$

$$L'_x(\lambda; x; y) = 20\lambda + \frac{2}{x}$$

$$L'_y(\lambda; x; y) = 100\lambda + 2.$$

Ezt felhasználva az

$$\left. \begin{aligned} 20x + 100y - 3000 &= 0 \\ 20\lambda + \frac{2}{x} &= 0 \\ 100\lambda + 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A harmadik egyenletből azt kapjuk, hogy $\lambda = -\frac{1}{50}$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{2}{x} - \frac{2}{5} = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 - 2x = 0,$$

így $x = 5$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$100 + 100y = 3000 \quad \Rightarrow \quad y = 29$$

adódik. Tehát a stacionárius pont $(Q; P) = \left(-\frac{1}{50}; 5; 29\right)$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda; x; y) = \begin{matrix} & \lambda & x & y \\ \lambda & \left(\begin{array}{ccc} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{xx}(\lambda; x; y) & L''_{xy}(\lambda; x; y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{yx}(\lambda; x; y) & L''_{yy}(\lambda; x; y) \end{array} \right) \\ x & & & \\ y & & & \end{matrix}$$

mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) = 0 & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) = 20 & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) = 100 \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) = 20 & L''_{xx}(\lambda; x; y) = -\frac{2}{x^2} & L''_{xy}(\lambda; x; y) = 0 \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) = 100 & L''_{yx}(\lambda; x; y) = 0 & L''_{yy}(\lambda; x; y) = 0 \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda; x; y) = \begin{array}{c} \lambda \\ x \\ y \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 20 & 100 \\ 20 & -\frac{2}{x^2} & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q; P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q; P) = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 100 \\ 20 & -\frac{2}{25} & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q; P)$ mátrix determinánusa

$$\begin{vmatrix} 0 & 20 & 100 \\ 20 & -\frac{2}{25} & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 800 > 0,$$

ezért az U függvénynek maximuma van a P pontban. Tehát az X termékből 5 darabot, az Y termékből 29 terméket kell fogyasztanunk ahhoz, hogy a hasznosság a lehető legnagyobb legyen.

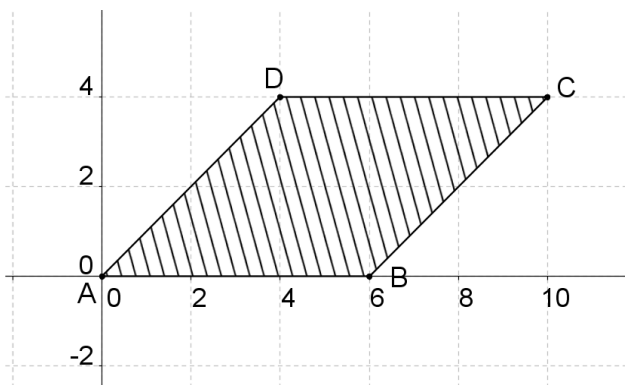
142. Feladat. Legyen a H halmaz az $A = (0; 0)$, $B = (6; 0)$, $C = (10; 4)$ és $D = (4; 4)$ pontok által meghatározott zárt paralelogramma tartományt és tekintsük az $f(x; y) = 2xy$ függvényt!

- Rajzoljuk fel a halmazt!
- Írjuk fel a H halmazt elsőfajú normáltartományok uniójaként!
- Írjuk fel a H halmazt másodfajú normáltartományként!
- Adjuk meg a H halmaz területét!
- Számoljuk ki az f függvény integrálját a H halmaz fölött úgy, hogy a H halmazt elsőfajú normáltartományok uniójaként tekintjük!

- f) Számoljuk ki az f függvény integrálját a H halmaz fölött úgy, hogy a H halmazt másodfajú normáltartományként tekintjük!
- g) Adjuk meg az f függvény átlagértékét a H halmazon!

Megoldás:

- a) A H halmaz:



- b) A H halmaz elsőfajú normáltartományok uniójaként:

$$H = H_1 \cup H_2 \cup H_3,$$

ahol a H_1 halmaz

$$H_1 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\},$$

a H_2 halmaz

$$H_2 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 4\},$$

és a H_3 halmaz

$$H_3 = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6 \leq x \leq 10, x - 6 \leq y \leq 4\}.$$

- c) A H halmaz másodfajú normáltartományként:

$$H = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4, y \leq x \leq y + 6\}.$$

d) A H halmaz területe:

$$\begin{aligned} \iint_H 1 &= \int_0^4 \left(\int_y^{y+6} 1 \, dx \right) dy = \int_0^4 [x]_{x=y}^{x=y+6} dy = \\ &= \int_0^4 y + 6 - y \, dy = [6y]_0^4 = 24. \end{aligned}$$

e) Az f függvény integrálja a H_1 halmaz fölött:

$$\begin{aligned} \iint_{H_1} f &= \int_0^4 \left(\int_0^x 2xy \, dy \right) dx = \int_0^4 [xy^2]_{y=0}^{y=x} dx = \\ &= \int_0^4 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 = 64. \end{aligned}$$

Az f függvény integrálja a H_2 halmaz fölött:

$$\begin{aligned} \iint_{H_2} f &= \int_4^6 \left(\int_0^4 2xy \, dy \right) dx = \int_4^6 [xy^2]_{y=0}^{y=4} dx = \\ &= \int_4^6 16x \, dx = [8x^2]_4^6 = 160. \end{aligned}$$

Az f függvény integrálja a H_3 halmaz fölött:

$$\begin{aligned} \iint_{H_3} f &= \int_6^{10} \left(\int_{x-6}^4 2xy \, dy \right) dx = \int_6^{10} [xy^2]_{y=x-6}^{y=4} dx = \\ &= \int_6^{10} 16x - x \cdot (x-6)^2 \, dx = \int_6^{10} -x^3 + 12x^2 - 20x \, dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + 4x^3 - 10x^2 \right]_6^{10} = 320. \end{aligned}$$

Mivel $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$, ezért

$$\iint_H f = \iint_{H_1} f + \iint_{H_2} f + \iint_{H_3} f = 64 + 160 + 320 = 416.$$

f) Az f függvény integrálja a H halmaz fölött:

$$\begin{aligned} \iint_H f &= \int_0^4 \left(\int_y^{y+6} 2xy \, dx \right) dy = \int_0^4 [x^2 y]_{x=y}^{x=y+6} dy = \\ &= \int_0^4 (y+6)^2 \cdot y - y^3 \, dy = \int_0^4 12y^2 + 36y \, dy = \\ &= [4y^3 + 18y^2]_0^4 = 544. \end{aligned}$$

g) Az f függvény átlagértéke a H halmazon:

$$\frac{544}{24} = \frac{68}{3}.$$

143. Feladat. Az $f(x; y) = x^2 + pxy + y^2$ függvénynek a $P = (0; 0)$ pontban milyen p paraméter esetén lesz lokális minimuma?

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$\begin{aligned} f'_x(x; y) &= 2x + py \\ f'_y(x; y) &= 2y + px. \end{aligned}$$

A másodrendű parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x; y) &= 2 & f''_{xy}(x; y) &= p \\ f''_{yx}(x; y) &= p & f''_{yy}(x; y) &= 2. \end{aligned}$$

A Hesse-mátrix:

$$M(x; y) = \begin{matrix} & x & y \\ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & p \\ p & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

A Hesse-mátrix determinánása: $D_2 = 4 - p^2$.

A mátrix pontosan akkor pozitív definit, azaz pontosan akkor van lokális minimuma az f függvénynek, ha $4 - p^2 > 0$, vagyis ha $p \in] - 2; 2[$.

144. Feladat. Számoljuk ki az $f(x; y) = x^3 - xy + y^{10} + e^{2x}$ függvény $f'''_{xxy}(x; y)$ harmadrendű parciális deriváltfüggvényét!

Megoldás:

Mivel $f'_x(x; y) = 3x^2 - y + e^{2x} \cdot 2$ és $f''_{xx}(x; y) = 6x + e^{2x} \cdot 4$, ezért

$$f'''_{xxy}(x; y) = 0.$$

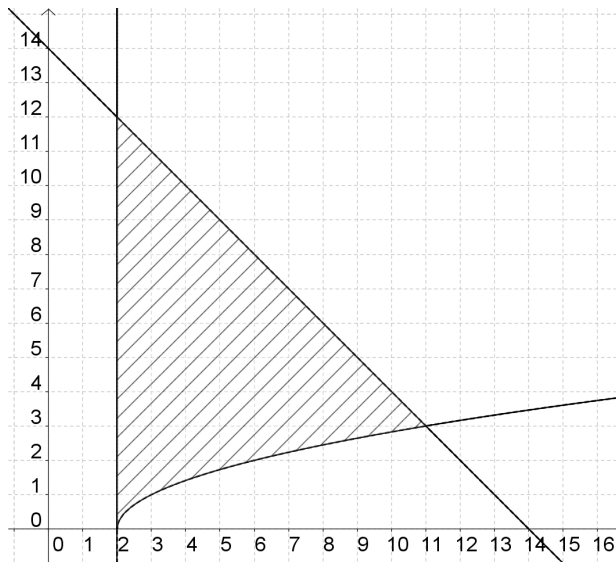
145. Feladat. Konvex vagy konkáv-e a

$$H = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 2 \text{ és } \sqrt{x-2} \geq y \geq 14-x\}$$

halmaz?

Megoldás:

A halmazt ábrázolva



látható, hogy a halmaz konkáv.

146. Feladat. Egy téglatest felszíne 8 cm^2 . Határozzuk meg az éleit úgy, hogy a térfogata a lehető legnagyobb legyen! A feladatot a Lagrange-függvény alkalmazásával oldjuk meg!

Megoldás:

Legyenek a téglatest élei x , y és z . Ekkor a felszíne:

$$A = 2xy + 2xz + 2yz = 24 \quad \Rightarrow \quad xy + xz + yz - 12 = 0.$$

Legyen $g(x; y; z) = xy + xz + yz$. A téglatest térfogata:

$$V(x; y; z) = xyz.$$

A Lagrange-függvény:

$$\begin{aligned} L(\lambda; x; y; z) &= \lambda \cdot g(x; y; z) + V(x; y; z) = \\ &= \lambda \cdot (xy + xz + yz - 12) + xyz = \\ &= \lambda xy + \lambda xz + \lambda yz - 12\lambda + xyz. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$L'_\lambda(\lambda; x; y; z) = xy + xz + yz - 12$$

$$L'_x(\lambda; x; y; z) = \lambda y + \lambda z + yz$$

$$L'_y(\lambda; x; y; z) = \lambda x + \lambda z + xz$$

$$L'_z(\lambda; x; y; z) = \lambda x + \lambda y + xy.$$

Tehát az

$$\left. \begin{aligned} xy + xz + yz &= 12 \\ \lambda y + \lambda z + yz &= 0 \\ \lambda x + \lambda z + xz &= 0 \\ \lambda x + \lambda y + xy &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második egyenletből kivonva a harmadikat, azt kapjuk, hogy

$$\lambda \cdot (y - x) + (y - x) \cdot z = 0,$$

így

$$(y - x) \cdot (\lambda + z) = 0.$$

Ez csak úgy lehet, ha $y = x$ vagy $\lambda + z = 0$, azonban ha $\lambda + z = 0$, akkor a harmadik egyenletből $z = 0$ adódik, ami nem lehetséges.

A második egyenletből kivonva a negyediket, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lambda \cdot (z - x) + (z - x) \cdot y = 0,$$

így

$$(z - x) \cdot (\lambda + y) = 0.$$

Ez csak úgy lehet, ha $z = x$ vagy $\lambda + y = 0$, azonban ha $\lambda + y = 0$, akkor a negyedik egyenletből $y = 0$ adódik, ami nem lehetséges.

Tehát azt kaptuk, hogy $x = y = z$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$6x^2 = 24 \quad \Rightarrow x = \pm 2$$

adódik. A geometriai tartalom miatt $x = 2$, így $x = y = z = 2$. A második egyenletből azt kapjuk, hogy $\lambda = -1$. Tehát a Lagrange-függvény stacionárius pontja: $(Q; P) = (-1; 2; 2; 2)$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda; x; y; z) = \begin{matrix} & \lambda & x & y & z \\ \begin{matrix} \lambda \\ x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y; z) & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y; z) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y; z) & L''_{\lambda z}(\lambda; x; y; z) \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y; z) & L''_{xx}(\lambda; x; y; z) & L''_{xy}(\lambda; x; y; z) & L''_{xz}(\lambda; x; y; z) \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y; z) & L''_{yx}(\lambda; x; y; z) & L''_{yy}(\lambda; x; y; z) & L''_{yz}(\lambda; x; y; z) \\ L''_{z\lambda}(\lambda; x; y; z) & L''_{zx}(\lambda; x; y; z) & L''_{zy}(\lambda; x; y; z) & L''_{zz}(\lambda; x; y; z) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y; z) &= 0 & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y; z) &= y + z \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y; z) &= y + z & L''_{xx}(\lambda; x; y; z) &= 0 \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y; z) &= x + z & L''_{yx}(\lambda; x; y; z) &= z + \lambda \\ L''_{z\lambda}(\lambda; x; y; z) &= x + y & L''_{zx}(\lambda; x; y; z) &= y + \lambda \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} L''_{\lambda y}(\lambda; x; y; z) &= x \cdot x + z & L''_{\lambda z}(\lambda; x; y; z) &= x + y \\ L''_{xy}(\lambda; x; y; z) &= z + \lambda & L''_{xz}(\lambda; x; y; z) &= y + \lambda \\ L''_{yy}(\lambda; x; y; z) &= 0 & L''_{yz}(\lambda; x; y; z) &= x + \lambda \\ L''_{zy}(\lambda; x; y; z) &= x + \lambda & L''_{zz}(\lambda; x; y; z) &= 0, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda; x; y; z) = \begin{matrix} & \lambda & x & y & z \\ \lambda & \begin{pmatrix} 0 & y+z & x+z & x+y \\ y+z & 0 & z+\lambda & y+\lambda \\ x+z & z+\lambda & 0 & x+\lambda \\ x+y & y+\lambda & x+\lambda & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q; P) = (-1; 2; 2; 2)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q; P) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A 1.8.4 tételben $m = 1$ és $n = 3$, ugyanis egy feltétel van és 3 változós a függvény, így a D_3 és D_4 sarokdeterminánsokat kell kiszámolnunk. A D_3 sarokdetermináns értéke:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 16 + 16 = 32.$$

A

$$D_4 = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

determináns értékének kiszámolásához először a harmadik sorból vonjuk ki a második sort és a negyedik sorból vonjuk ki a második sort. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A kapott determinánst az első oszlopa szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D_4 &= \det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= -4 \cdot (4 + 4 + 4) = -48. \end{aligned}$$

Mivel $(-1)^{1+3} \cdot D_3 = 32$ és $(-1)^{1+4} \cdot D_4 = 48$, így $(-1)^{1+3} \cdot D_3 > 0$ és $(-1)^{1+4} \cdot D_4 > 0$, ezért az A függvénynek maximuma van a $P = (2; 2; 2)$ pontban. A maximumérték:

$$V(2; 2; 2) = 8 \text{ cm}^3.$$

2. fejezet

Síkgörbék, térgörbék, felületek

2.1. Síkgörbék megadása, differenciálása, érintőegyenese

2.1.1. Definíció. Az $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ típusú függvényeket *síkgörbéknek* nevezzük. Amennyiben

$$r(t) = (x(t); y(t)),$$

akkor az x és y egyváltozós, valós értékű függvényeket a síkgörbe *koordinátafüggvényeinek* hívjuk.

A koordinátafüggvényeket sorvektorként és oszlopvektorként is szokás írni.

2.1.2. Példa. Az

$$r(t) = r_0 + t \cdot v, \quad t \in \mathbb{R}$$

síkgörbe grafikonja a v irányvektorú, r_0 ponton áthaladó egyenes.

Ha $r_0 = (x_0; y_0)$ és $v = (v_1; v_2)$, akkor

$$r(t) = (x_0; y_0) + t \cdot (v_1; v_2),$$

így

$$r(t) = (x_0 + t \cdot v_1; y_0 + t \cdot v_2).$$

Ebből megkapjuk a már korábban tanult paraméteres egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_0 + t \cdot v_1 \\ y(t) &= y_0 + t \cdot v_2 \end{aligned} \right\}.$$

2.1.3. Megjegyzés. Minden olyan síkgörbe esetén, melynek koordinátafüggvényei polinomok vagy racionális törtfüggvények (az ilyen görbéket algebrai görbéknek nevezzük) létezik olyan $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy a síkgörbe megadható $f(x; y) = 0$, y -ra nézve *implicit* alakban. Bizonyos esetekben a síkgörbe grafikonja leírható egyváltozós függvény segítségével, ekkor a síkgörbe megadható $y = g(x)$ *explicit* alakban valamely $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény segítségével.

A kétféle alak közötti konverzió két különböző iránya két eltérő nehézségű problémát takar. Az algebrai görbék esetén bármely paraméteres alakban megadott alakzat átírható implicit formába, bár gyakorlatilag adódhatnak számítási nehézségek. Egy implicit formában megadott síkgörbének azonban nem biztos, hogy létezik paraméteres alakja, és ha létezik is, annak felírására nincs általánosan hatékony és egyszerű számítási módszer.

2.1.4. Példa. Az $r: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $r(t) = (\cos t; \sin t)$ függvény grafikonja az origó körüli egységnyi sugarú körvonal, amely megadható az

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

implicit egyenlettel is. Ebben az esetben $y = g(x)$ alakban nem adható meg a síkgörbe.

Az $r: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $r(t) = (t; t^2)$ függvény grafikonja egy parabolaív a $[0; 1]$ intervallumon, amely megadható

$$y = x^2$$

explicit alakban.

2.1.5. Definíció. Legyenek a és b olyan valós számok, melyekre $a < b$ teljesül! Azt mondjuk, hogy az

$$r:]a; b[\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad r(t) = (x(t); y(t))$$

síkgörbe differenciálható a $t_0 \in]a; b[$ helyen, ha a koordinátafüggvényei differenciálhatóak a t_0 helyen.

Ha a síkgörbe differenciálható a t_0 helyen, akkor a deriváltja

$$r'(t_0) = (x'(t_0); y'(t_0)).$$

A koordinátafüggvények deriváltjait szokás $\frac{dx}{dt}$, illetve $\frac{dy}{dt}$ módon is jelölni.

2.1.6. Példa. Tekintsük az

$$r(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 3t + e^{2t} \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

síkgörbét! Ekkor

$$r'(t) = \begin{pmatrix} 2t + 3 + 2e^{2t} \\ -2 \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

2.1.7. Megjegyzés. Ha r egy differenciálható síkgörbe, akkor fizikában az idő szerinti deriváltat vessző helyett ponttal is szokás jelölni.

2.1.8. Példa. Egy mozgó pont hely-idő függvénye:

$$r(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t^2 + 3t + 1} \\ e^{t^2 - 5t + 2} \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t + 3}{2 \cdot \sqrt{t^2 + 3t + 1}} \\ e^{t^2 - 5t + 2} \cdot (2t - 5) \end{pmatrix}.$$

2.1.9. Megjegyzés. Egy síkgörbe adott pontbeli differenciálhányadosának geometriai jelentése a síkgörbe adott pontbeli érintővektora.

Ha $t \mapsto r(t)$ egy mozgó pont hely-idő függvénye, akkor a differenciálhányadosa egy adott pontbeli értékének fizikai jelentése az adott időpontban a pillanatnyi sebesség.

2.1.10. Definíció. A $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t))$, ahol $t \in [a; b]$ síkgörbe *sima*, ha a koordinátafüggvényei differenciálhatóak az $]a; b[-$ on és az $]a; b[-$ on nincs olyan t_0 paraméter, amelyre $x'(t_0)$ és $y'(t_0)$ egyszerre zérus.

2.1.11. Megjegyzés. Az, hogy egy síkgörbe *sima* azt jelenti, hogy nincs éles csúcspontja.

2.1.12. Definíció. Az r síkgörbe *érintőegyenese* a t_0 paraméterű pontban:

$$e(t) = r(t_0) + r'(t_0) \cdot (t - t_0) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2.1.13. Példa. Megadjuk az $r(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2t \\ 3t - 5 \end{pmatrix}$ síkgörbe érintőegyenését a $t_0 = 1$ helyen!

Mivel $r'(t) = \begin{pmatrix} 2t + 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ezért $r(t_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ és $r'(t_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy az érintőegyenese:

$$e(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (t - 1) = \begin{pmatrix} -1 + 4t \\ -5 + 3t \end{pmatrix},$$

ahol $t \in \mathbb{R}$. Az $x = -1 + 4t$ egyenletből a t paramétert kifejezve azt kapjuk, hogy $t = \frac{x+1}{4}$. Ezt behelyettesítve az $y = -5 + 3t$ egyenletbe

$$y = -5 + \frac{3 \cdot (x + 1)}{4} = \frac{-20 + 3x + 3}{4} = \frac{3}{4}x - \frac{17}{4}$$

adódik.

2.1.14. Megjegyzés. A $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t))$ síkgörbe érintőegyenésének meredeksége: $\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$.

2.1.15. Megjegyzés. Legyen $t \in [a; b]$! Az $r(t) = (x(t); y(t))$ síkgörbének a t_0 paraméterű $(x(t_0); y(t_0))$ pontjában vízszintes érintője van, ha $y'(t_0) = 0$ és $x'(t_0) \neq 0$.

2.1.16. Megjegyzés. Legyen $t \in [a; b]$! Az $r(t) = (x(t); y(t))$ síkgörbének a t_0 paraméterű $(x(t_0); y(t_0))$ pontjában függőleges érintője van, ha $x'(t_0) = 0$ és $y'(t_0) \neq 0$.

Kidolgozott feladatok

147. Feladat. Készítsünk értéktáblázatot, amely tartalmazza az

$$r(t) = (t^2; t^3) \quad (t \in [-2; 2])$$

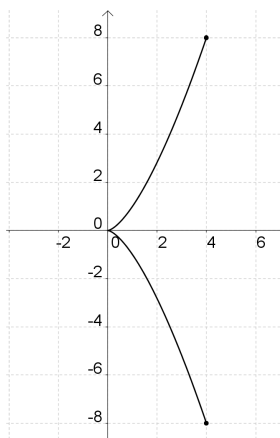
síkgörbe $t = -2; -1; 0; 1; 2$ paraméterű értékeit, majd vázoljuk fel a síkgörbe grafikonját!

Megoldás:

A $t = -2; -1; 0; 1; 2$ értékek esetén az $r(t)$ értékei:

t	-2	-1	0	1	2
$r(t)$	(4; -8)	(1; -1)	(0; 0)	(1; 1)	(4; 8)

A síkgörbe grafikonja:



148. Feladat. Tekintsük az

$$r(t) = (t - 1; t^2) \quad (t \in [0; 3])$$

síkgörbét!

- Adjuk meg a síkgörbe koordinátafüggvényeit!
- Készítsünk értéktáblázatot, amely tartalmazza az $r(t)$ síkgörbe

$$t = 0; 1; 2; 3$$

paraméterű értékeit!

- c) Vázoljuk fel a síkgörbe grafikonját!
 d) Határozzuk meg a $t \mapsto r'(t)$ deriváltfüggvényt!
 e) Írjuk fel a síkgörbét implicit egyenletként, amennyiben lehetséges, adjuk meg explicit módon, azaz egyváltozós, valós értékű függvényként!

Megoldás:

- a) A koordinátafüggvények:

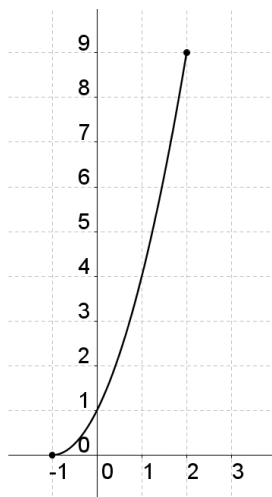
$$x(t) = t - 1$$

$$y(t) = t^2.$$

- b) A
- $t = 0; 1; 2; 3$
- értékek esetén az
- $r(t)$
- értékei:

t	0	1	2	3
$r(t)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 4)$	$(2; 9)$

- c) A síkgörbe grafikonja:



- d) A deriváltfüggvény:

$$r'(t) = (x'(t); y'(t)) = (1; 2t).$$

- e) Mivel
- $x = t - 1$
- és
- $y = t^2$
- , ezért az első egyenletből a
- t
- paramétert kifejezve azt kapjuk, hogy
- $t = x + 1$
- . Ezt behelyettesítve az
- $y = t^2$
- egyenletbe azt

kapjuk, hogy $y = (x + 1)^2$. Mivel $t \in [0; 3]$ és $x = t - 1$, ezért $x \in [-1; 2]$.
Tehát az explicit alak:

$$y = (x + 1)^2 \quad (x \in [-1; 2]).$$

149. Feladat. Adjuk meg az $r(t) = (2t + 1; t^3 - t^2 + 1)$ síkgörbét explicit alakban, azaz $y = f(x)$ módon!

Megoldás:

Az $x = 2t + 1$ egyenletből a t paramétert kifejezve azt kapjuk, hogy

$$t = \frac{x - 1}{2}.$$

Ezt behelyettesítve az $y = t^3 - t^2 + 1$ egyenletbe

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{x-1}{2}\right)^3 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1 = \\ &= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{8} - \frac{x^2 - 2x + 1}{4} + 1 = \\ &= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 2x^2 + 4x - 2 + 8}{8} = \frac{x^3 - 5x^2 + 7x + 5}{8} \end{aligned}$$

adódik.

150. Feladat. Tekintsük az

$$r(t) = (4 \cos t; 4 \sin t) \quad \left(t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]\right)$$

síkgörbét!

- Adjuk meg a síkgörbe koordinátafüggvényeit!
- Készítsünk értéktáblázatot, amely tartalmazza az $r(t)$ síkgörbe $t = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi$ paraméterű értékeit!
- Vázoljuk fel a síkgörbe grafikonját!
- Határozzuk meg a $t \mapsto r'(t)$ deriváltfüggvényt!

Megoldás:

a) A koordinátafüggvények:

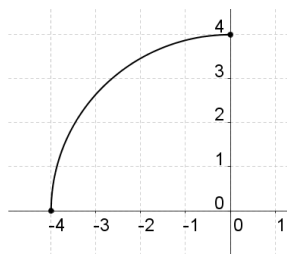
$$x(t) = 4 \cos t$$

$$y(t) = 4 \sin t.$$

b) A $t = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi$ értékek esetén az $r(t)$ értékei:

t	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$r(t)$	$(0; 4)$	$(-2 \cdot \sqrt{2}; 2 \cdot \sqrt{2})$	$(-4; 0)$

c) A síkgörbe grafikonja:



d) A deriváltfüggvény:

$$r'(t) = (x'(t); y'(t)) = (-4 \sin t; 4 \cos t).$$

151. Feladat. Tekintsük az

$$r(t) = (2 + 3 \cos t; 3 + 3 \sin t) \quad (t \in [0; 2\pi])$$

síkgörbét!

- Adjuk meg a síkgörbe koordinátafüggvényeit!
- Készítsünk olyan értéktáblázatot, amely tartalmazza az $r(t)$ síkgörbe

$$t = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$$

paraméterű értékeit!

- Vázoljuk fel a síkgörbe grafikonját!
- Határozzuk meg a $t \mapsto r'(t)$ deriváltfüggvényt!

Megoldás:

a) A koordinátafüggvények:

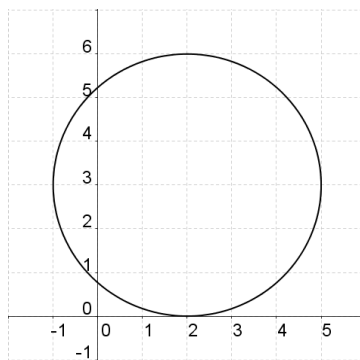
$$x(t) = 2 + 3 \cos t$$

$$y(t) = 3 + 3 \sin t.$$

b) A $t = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$ értékek esetén az $r(t)$ értékei:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$r(t)$	(5; 3)	(2; 6)	(-1; 3)	(2; 0)	(5; 3)

c) A síkgörbe grafikonja:



A grafikon a (2; 3) középpontú, 3 sugarú körvonal.

d) A deriváltfüggvény:

$$r'(t) = (x'(t); y'(t)) = (-3 \sin t; 3 \cos t).$$

152. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$r_1(t) = (t; t^2) \quad t \in [0; 3]$$

és az

$$r_2(t) = (\sqrt{t}; t) \quad t \in [0; 9]$$

ugyanazon síkgörbe két különböző paraméteres előállítását!

Megoldás:

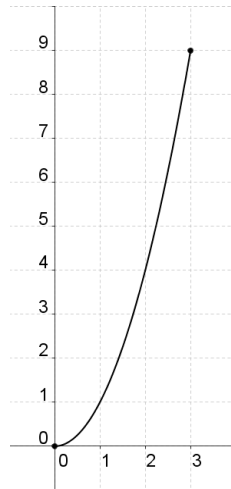
A $t = 0; 1; 2; 3$ értékek esetén az $r_1(t)$ értékei:

t	0	1	2	3
$r_1(t)$	(0; 0)	(1; 1)	(2; 4)	(3; 9)

A $t = 0; 1; 4; 9$ értékek esetén az $r_2(t)$ értékei:

t	0	1	4	9
$r_2(t)$	(0; 0)	(1; 1)	(2; 4)	(3; 9)

Az $r_1(t)$ és az $r_2(t)$ görbék grafikonja ugyanaz:



153. Feladat. Tekintsük a $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t))$ síkgörbét, ahol

$$r(t) = (4t - 2; 2t^2) \quad (t \in [0; 2]).$$

- Adjuk meg a síkgörbe koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a koordinátafüggvények deriváltfüggvényeit!
- Adjuk meg a $t \mapsto r'(t)$ függvényt!
- Határozzuk meg a koordinátafüggvények másodrendű deriváltfüggvényeit!
- Adjuk meg az $y'(x(t))$ deriváltfüggvényt!

Megoldás:

- A koordinátafüggvények:

$$x(t) = 4t - 2$$

$$y(t) = 2t^2.$$

b) A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 4$$

$$y'(t) = 4t.$$

c) A $t \mapsto r'(t)$ függvény:

$$r'(t) = (4; 4t).$$

d) A koordinátafüggvények másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = 0$$

$$y''(t) = 4.$$

e) Az $y'(x)$ deriváltfüggvény:

$$y'(x(t)) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4t}{4} = t.$$

154. Feladat. Tekintsük a $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t))$ síkgörbét, ahol

$$r(t) = \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 8}; \frac{2t}{t^2 - 8} \right)$$

és tekintsük a $t_0 = 3$ paraméterű pontot!

a) Adjuk meg a síkgörbe koordinátafüggvényeit!

b) Határozzuk meg a koordinátafüggvények deriváltfüggvényeit a t_0 helyen!

c) Adjuk meg az $r'(t_0)$ értéket!

Megoldás:

a) A koordinátafüggvények:

$$x(t) = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 8}$$

$$y(t) = \frac{2t}{t^2 - 8}.$$

b) A $t \mapsto x(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{2t \cdot (t^2 - 8) - (t^2 + 1) \cdot 2t}{(t^2 - 8)^2} = \frac{2t^3 - 16t - 2t^3 - 2t}{(t^2 - 8)^2} = \\ &= \frac{-18t}{(t^2 - 8)^2}. \end{aligned}$$

A $t \mapsto y(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye:

$$y'(t) = \frac{2 \cdot (t^2 - 8) - 2t \cdot 2t}{(t^2 - 8)^2} = \frac{-2t^2 - 16}{(t^2 - 8)^2}.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei a $t_0 = 3$ paraméterű helyen:

$$x'(t_0) = \frac{-18 \cdot 3}{(9 - 8)^2} = -54$$

$$y'(t_0) = \frac{-2 \cdot 9 - 16}{(9 - 8)^2} = -34.$$

c) A $t \mapsto r'(t)$ függvény helyettesítési értéke a $t_0 = 3$ helyen:

$$r'(t_0) = (-54; -34).$$

155. Feladat. Tekintsük a $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t))$ síkgörbét, ahol

$$r(t) = (2^{\sin t}; \operatorname{tg}^2 t)$$

és tekintsük a $t_0 = 0$ paraméterű pontot!

- Adjuk meg a síkgörbe koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a koordinátafüggvények deriváltfüggvényeit a t_0 helyen!
- Adjuk meg az $r'(t_0)$ értéket!

Megoldás:

a) A koordinátafüggvények:

$$x(t) = 2^{\sin t}$$

$$y(t) = \operatorname{tg}^2 t.$$

b) A $t \mapsto x(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye:

$$x'(t) = 2^{\sin t} \cdot \ln 2 \cdot \cos t.$$

A $t \mapsto y(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye:

$$y'(t) = 2 \operatorname{tg} t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{2 \operatorname{tg} t}{\cos^2 t}.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei a $t_0 = 0$ paraméterű helyen:

$$x'(t_0) = \ln 2$$

$$y'(t_0) = 0.$$

c) A $t \mapsto r'(t)$ függvény helyettesítési értéke a $t_0 = 0$ helyen:

$$r'(t_0) = (\ln 2; 0).$$

156. Feladat. Írjuk fel az

$$r(t) = (2t + 1; t^3 - t^2 + 1) \quad (t \in [0; 2])$$

síkgörbe érintőegyenésének egyenletét a $t_0 = 1$ paraméterű helyen!

Megoldás:

Mivel $r'(t) = (2; 3t^2 - 2t)$, ezért $r'(t_0) = (2; 1)$.

Az érintőegyenese egyenlete:

$$e(t) = r(t_0) + r'(t_0) \cdot (t - t_0).$$

Mivel $r(t_0) = (3; 1)$, ezért az érintőegyenese egyenlete:

$$e(t) = (3; 1) + (2; 1) \cdot (t - 1) \Rightarrow e(t) = (3; 1) + (2t - 2; t - 1),$$

azaz

$$e(t) = (2t + 1; t).$$

Tehát $x = 2t + 1$ és $y = t$. Az első egyenletből az t -t kifejezve azt kapjuk, hogy $t = \frac{x-1}{2}$. Ezt behelyettesítve az $y = t$ egyenletbe

$$y = \frac{x-1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

adódik.

157. Feladat. Írjuk fel az

$$r(t) = (e^t; 2e^{-t} - 1)$$

síkgörbe érintőegyenésének egyenletét a $t_0 = 0$ paraméterű helyen!

Megoldás:

Mivel $r'(t) = (e^t; -2e^{-t})$, ezért $r'(t_0) = (1; -2)$.

Az érintőegyenese egyenlete: $e(t) = r(t_0) + r'(t_0) \cdot (t - t_0)$.

Mivel $r(t_0) = (1; 1)$, ezért az érintőegyenese egyenlete:

$$e(t) = (1; 1) + (1; -2) \cdot (t - 0) \Rightarrow e(t) = (1; 1) + (t; -2t),$$

azaz

$$e(t) = (1 + t; 1 - 2t).$$

Tehát $x = 1 + t$ és $y = 1 - 2t$. Az első egyenletből az t -t kifejezve azt kapjuk, hogy $t = x - 1$. Ezt behelyettesítve az $y = 1 - 2t$ egyenletbe

$$y = 1 - 2 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 3 - 2x$$

adódik.

158. Feladat. Az $r(t) = (2t - 1; t^3)$ síkgörbe érintőegyenésének meredeksége a t_0 paraméterű helyen: $m = \frac{3}{2}$. Adjuk meg a t_0 értékét!

Megoldás:

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = 2t - 1 \quad \text{és} \quad y(t) = t^3.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 2 \quad \text{és} \quad y'(t) = 3t^2.$$

Az érintőegyenés meredeksége:

$$m = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{3t_0^2}{2}.$$

Mivel $m = \frac{3}{2}$, ezért

$$\frac{3t_0^2}{2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad t_0^2 = 1,$$

így $t_0 = \pm 1$.

159. Feladat. Az $r(t) = (t^3; t^2 + t)$ síkgörbe érintőegyenésének meredeksége a t_0 paraméterű helyen: $m = 1$. Adjuk meg a t_0 értékét!

Megoldás:

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t^3 \quad \text{és} \quad y(t) = t^2 + t.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 3t^2 \quad \text{és} \quad y'(t) = 2t + 1.$$

Az érintőegyenés meredeksége:

$$m = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{2t_0 + 1}{3t_0^2}.$$

Mivel $m = 1$, ezért

$$\frac{2t_0 + 1}{3t_0^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2t_0 + 1 = 3t_0^2,$$

tehát $3t_0^2 - 2t_0 - 1 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$t_0 = \frac{2 \pm 4}{6} \quad \Rightarrow \quad t_0 = -\frac{1}{3} \quad \text{és} \quad t_0 = 1.$$

160. Feladat. Legyen $t \in [-2; 2]$! Az $r(t) = (t^2 - 5; t^3 - 3t + 1)$ görbe mely pontjában lesz az érintőegyenese vízszintes, illetve mely pontjában lesz függőleges?

Megoldás:

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t^2 - 5 \quad \text{és} \quad y(t) = t^3 - 3t + 1.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 2t \quad \text{és} \quad y'(t) = 3t^2 - 3.$$

Ezt felhasználva:

$$y'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2 - 3}{2t}.$$

A görbe érintője vízszintes a $] - 2; 2[$ intervallum azon t paraméterű pontjában, melyre $3t^2 - 3 = 0$, azaz $t = \pm 1$ esetén. Ezen t értékek esetén $2t \neq 0$.

A $t = 1$ paraméterérték esetén a görbe pontja: $P_1 = (-4; -1)$.

A $t = -1$ paraméterérték esetén a görbe pontja: $P_2 = (-4; 3)$.

A görbe érintője függőleges a $] - 2; 2[$ intervallum azon t paraméterű pontjában, melyre $2t = 0$. Ekkor $t = 0$. Ezen t esetén $3t^2 - 3 \neq 0$.

A $t = 0$ paraméterérték esetén a görbe pontja: $Q = (-5; 1)$.

161. Feladat. Az

$$r(t) = (2t^3 - 12t^2 + 18t + 3; 2t^3 - 9t^2 + 12t + 2) \quad (t \in [-5; 5])$$

görbe mely pontjában lesz az érintőegyenese vízszintes, illetve mely pontjában lesz függőleges?

Megoldás:

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = 2t^3 - 12t^2 + 18t + 3 \quad \text{és} \quad y(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 2.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 6t^2 - 24t + 18 \quad \text{és} \quad y'(t) = 6t^2 - 18t + 12.$$

Ezt felhasználva:

$$y'(x(t)) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{6t^2 - 18t + 12}{6t^2 - 24t + 18}.$$

A görbe érintőegyenese vízszintes a $] - 5; 5[$ intervallum azon t paraméterű pontjában, melyre

$$6t^2 - 18t + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 3t + 2 = 0$$

teljesül. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2},$$

azaz $t_1 = 1$, illetve $t_2 = 2$. Ezen paraméterértékek esetén x' értéke:

$$x'(1) = 6 - 24 + 18 = 0 \quad \text{és} \quad x'(2) = 24 - 48 + 18 = -6 \neq 0.$$

Tehát a $t_2 = 2$ paraméter esetén vízszintes az érintő. Ekkor a görbe pontja:

$$P = (16 - 48 + 36 + 3; 16 - 36 + 24 + 2) = (7; 6).$$

A görbe érintőegyenese függőleges a $] - 5; 5[$ intervallum azon t paraméterű pontjában, melyre

$$6t^2 - 24t + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

teljesül. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

azaz $t_1 = 1$, illetve $t_2 = 3$. Ezen paraméterértékek esetén y' értéke:

$$y'(1) = 6 - 18 + 12 = 0 \quad \text{és} \quad y'(3) = 54 - 54 + 12 = 12 \neq 0.$$

Tehát a $t_2 = 3$ paraméter esetén függőleges az érintő. Ekkor a görbe pontja:

$$Q = (54 - 108 + 54 + 3; 54 - 81 + 36 + 2) = (3; 11).$$

162. Feladat. Legyen $t \in \mathbb{R}$! Adjuk meg az $r(t) = (2 + t; 1 - 2t)$ síkgörbét explicit alakban, azaz $y = f(x)$ módon!

Megoldás:

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = 2 + t \quad \text{és} \quad y(t) = 1 - 2t.$$

Mivel $x = 2 + t$, ezért $t = x - 2$. Ezt behelyettesítve az $y = 1 - 2t$ összefüggésbe azt kapjuk, hogy

$$y = 1 - 2t = 1 - 2 \cdot (x - 2) = 1 - 2x + 4 = 5 - 2x.$$

163. Feladat. Legyen $t \in [0; 2\pi]$! Adjuk meg az $r(t) = (5 \cos t; 5 \sin t)$ síkgörbét implicit alakban, azaz $f(x; y) = 0$ módon!

Megoldás:

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = 5 \cos t \quad \text{és} \quad y(t) = 5 \sin t.$$

Mivel

$$x^2 + y^2 = 25 \cos^2 t + 25 \sin^2 t = 25 \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) = 25,$$

így azt kapjuk, hogy

$$x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

164. Feladat. Határozzuk meg az

$$r(t) = (1 + t + t^2; 2 - t)$$

síkgörbe $t = 1$ és $t = 2$ paraméterű pontjaiba mutató vektorok hajlásszögét!

Megoldás:

Ha $t = 1$, akkor

$$r(1) = (3; 1).$$

Ha $t = 2$, akkor

$$r(2) = (7; 0).$$

A két vektor által bezárt szög koszinusza:

$$\cos \alpha = \frac{r(1) \cdot r(2)}{|r(1)| \cdot |r(2)|}.$$

Mivel

$$r(1) \cdot r(2) = 21,$$

továbbá

$$|r(1)| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} \quad \text{és} \quad |r(2)| = 7,$$

ezért

$$\cos \alpha = \frac{21}{7 \cdot \sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18,43^\circ.$$

2.2. Síkgörbék görbülete, ívhossza, fizikai alkalmazásai

2.2.1. Definíció. Az $r(t) = (x(t); y(t))$ síkgörbe görbületi függvénye:

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t) \cdot y''(t) - y'(t) \cdot x''(t)|}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

A $t \rightarrow \kappa(t)$ függvény t_0 helyen vett helyettesítési értékét a síkgörbe t_0 paraméterbeli pontjához tartozó görbületének mondjuk.

2.2.2. Megjegyzés. Az $r(t) = (x(t); y(t))$ síkgörbe görbületi függvénye:

$$\kappa(t) = \frac{\left| \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} \right|}{|r'(t)|^3}.$$

2.2.3. Megjegyzés. Szemléletesen egy síkgörbe görbülete azt mutatja meg, hogy az egyeneshez képest a síkgörbe grafikonja „mennyire görbül”. Az egyenes görbülete 0.

2.2.4. Példa. Legyen $t \in [0; 2\pi]$ és $R > 0$! Tekintsük az

$$r(t) = (R \cdot \cos t; R \cdot \sin t)$$

síkgörbét! Ekkor a koordinátafüggvények:

$$x(t) = R \cdot \cos t \quad \text{és} \quad y(t) = R \cdot \sin t.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = -R \cdot \sin t \quad \text{és} \quad y'(t) = R \cdot \cos t.$$

A koordinátafüggvények másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = -R \cdot \cos t \quad \text{és} \quad y''(t) = -R \cdot \sin t.$$

A görbület:

$$\kappa(t) = \frac{R^2 \cdot \sin^2 t + R^2 \cdot \cos^2 t}{(R^2 \cdot \sin^2 t + R^2 \cdot \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R^2}{(R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R}.$$

Azt kaptuk, hogy az R sugarú kör görbülete: $\frac{1}{R}$.

2.2.5. Definíció. Legyen $t \in [a; b]$! Ha a $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t))$ síkgörbe sima, és a $t = a$ és $t = b$ paraméterű pontokon kívül nem metszi önmagát, akkor az *ív*hossza:

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

2.2.6. Példa. Az $r(t) = (1 + t; 2t - 3)$ görbe ívhossza a $[0; 2]$ intervallumon:

$$\int_0^2 \sqrt{1^2 + 2^2} dt = [\sqrt{5} \cdot t]_0^2 = 2 \cdot \sqrt{5}.$$

2.2.7. Definíció. Ha kiválasztunk egy $P(t_0)$ kezdőpontot a $t \mapsto r(t)$ sima görbén, akkor t értékéhez hozzárendelhetjük a görbe $P(t) = (x(t); y(t))$ pontját, és a $P(t_0)$ és $P(t)$ közötti irányított távolságot:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |r'(\tau)| d\tau.$$

Ha $t > t_0$, akkor $s(t)$ értéke a $P(t_0)$ és $P(t)$ közötti távolság.

Ha $t < t_0$, akkor a távolság negatív előjellel.

Az s előjeles távolság minden értéke meghatározza az r görbe egy pontját, így s paraméterezi a síkgörbét. Ennek a paraméterezésnek *ív*hosszal való paraméterezés a neve.

2.2.8. Megjegyzés. Látható, hogy t növekedési irányában s is növekszik, illetve t csökkenési irányában s értéke is csökken. A görbe bizonyos, a fizikában is használt vizsgálatához az ívhosszal való paraméterezés jobban használható.

Például ívhosszal való paraméterezés esetén a síkgörbe görbülete kiszámolható úgy, hogy $\kappa(s) = |r''(s)|$.

2.2.9. Példa. Legyen $t \geq 0$! Az $r(t) = (t + 2; t + 4)$ síkgörbe esetén

$$r'(t) = (1; 1) \quad \Rightarrow \quad |r'(t)| = \sqrt{2}.$$

Ezt felhasználva:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2} d\tau = [\sqrt{2} \cdot \tau]_0^t = \sqrt{2} \cdot t.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$s = \sqrt{2} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{\sqrt{2}}.$$

Az ívhosszal való paraméterezés:

$$r(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 2; \frac{s}{\sqrt{2}} + 4 \right).$$

2.2.10. Definíció. Az xy síkban fekvő, explicit alakban megadható $y = f(x)$ függvény grafikonjának úgynevezett *természetes paraméterezése* az

$$r(t) = (t; f(t))$$

módon definiált síkgörbe.

2.2.11. Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjának természetes paraméterezése:

$$r(t) = (t; t^2).$$

2.2.12. Megjegyzés. Tekintsük az $y = f(x)$ függvény grafikonjának az

$$r(t) = (t; f(t))$$

természetes paraméterezését! Ekkor a görbületet megadó függvény:

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{\left(1 + (f'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ezen képletből következik például az, hogy inflexiós pontban a görbület nulla (hiszen inflexiós pontban a függvény másodrendű deriváltjának értéke nulla).

2.2.13. Definíció. Az r síkgörbe *érintő egységvektora*:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}.$$

2.2.14. Megjegyzés. Adott síkgörbének tetszőleges számú előállítására létezik $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ típusú függvény segítségével.

A különböző előállításokban általában különbözik egy adott ponthoz tartozó érintővektor hossza.

Ez egy mozgó pont hely-idő függvénye esetén ugyanazon pálya különböző sebességgel való befutásának felel meg a fizikában.

Megmutatható, hogy differenciálható síkgörbe ívhosszparaméteres előállításánál az érintővektor hossza bármely pontban egységnyi.

2.2.15. Definíció. A $t \mapsto r(t)$ síkgörbe *normálisa* az érintőre merőleges.

A normális vektor irányába mutató egységvektor az úgynevezett *normális egységvektor*.

2.2.16. Megjegyzés. A $t \mapsto r(t)$ hely-idő függvény normálisa a gyorsulásvektor, vagyis a $t \mapsto r(t)$ hely-idő függvény másodrendű deriváltfüggvénye a gyorsulásvektor.

2.2.17. Megjegyzés. Egy lövedék mozgását leíró síkgörbe meghatározásához feltesszük, hogy a lövedék úgy viselkedik, mint egy függőleges síkban mozgó tömegpont, amelyre az útja során csak egyetlen erő, az időben állandó, lefelé mutató gravitációs erő hat.

A gyakorlatban azonban egyéb korrekciókat is figyelembe kell venni, például a lövedék anyagát, a légellenállást, és egyéb tulajdonságokat. Ezekről most eltekintünk.

Ha α egy lövedék kilövési szöge (emelkedési szöge), v_0 a lövedék kezdősebessége, akkor a mozgás pályáját az

$$r(t) = \left(v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t; v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right)$$

síkgörbe grafikonja írja le.

2.2.18. Példa. Egy origóban elsütött ágyú $500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel, 60° -os emelkedési szöggel lövi ki a lövedéket. Ekkor 10 másodperccel később a lövedék az

$$r(10) = \left(500 \cdot \cos 60^\circ \cdot 10; 500 \cdot \sin 60^\circ \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot 10^2 \right) \approx (2\,500; 3\,840)$$

helyen lesz, vagyis 3 840 méter magasan, az ágyútól vízszintesen 2 500 méter távolságra lesz a lövedék.

Kidolgozott feladatok

165. Feladat. Egy anyagi pont pályáját az $r(t) = (t^3; 3t + 2)$ síkgörbe írja le. Adjuk meg a sebességvektort és a gyorsulásvektort!

Megoldás:

A sebességvektor:

$$v(t) = r'(t) = (3t^2; 3).$$

A gyorsulásvektor:

$$a(t) = r''(t) = (6t; 0).$$

166. Feladat. Tekintsük az

$$r(t) = (t; t^2) \quad (t \in [0; 9])$$

síkgörbét!

- Határozzuk meg a görbületet megadó függvényt!
- Számoljuk ki a görbületet a $t = 1$ paraméterű pontban!
- Melyik pontban lesz a görbület maximális?

Megoldás:

a) A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t \quad \text{és} \quad y(t) = t^2.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 1 \quad \text{és} \quad y'(t) = 2t.$$

A koordinátafüggvények másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = 0 \quad \text{és} \quad y''(t) = 2.$$

A görbületi függvény:

$$\kappa(t) = \frac{|2 - 0|}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

b) A görbület a $t = 1$ paraméterű pontban:

$$\kappa(1) = \frac{2}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{125}} \frac{2}{5 \cdot \sqrt{5}}.$$

- c) A $\kappa(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}$ görbületet megadó függvény értéke akkor legnagyobb, amikor a nevező a legkisebb, vagyis ha $t = 0$. Tehát a $P = (0; 0)$ pontban maximális a görbület.

167. Feladat. Tekintsük az

$$r(t) = (t; \ln(\sin t)) \quad (t \in]0; \pi[)$$

síkgörbét!

- Határozzuk meg a görbületet megadó függvényt!
- Számoljuk ki a görbületet a $t = \frac{\pi}{4}$ paraméterű pontban!
- Melyik pontban lesz a görbület maximális?

Megoldás:

- a) A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t \quad \text{és} \quad y(t) = \ln(\sin t).$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 1 \quad \text{és} \quad y'(t) = \frac{1}{\sin t} \cdot \cos t = \operatorname{ctg} t.$$

A koordinátafüggvények másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = 0 \quad \text{és} \quad y''(t) = -\frac{1}{\sin^2 t}.$$

A görbület:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\left| -\frac{1}{\sin^2 t} \right|}{(1 + \operatorname{ctg}^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\left| -\frac{1}{\sin^2 t} \right|}{\left(\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} \right)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\left| -\frac{1}{\sin^2 t} \right|}{\left(\frac{1}{\sin^2 t} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{\frac{1}{\sin^3 t}} = \sin t. \end{aligned}$$

- b) A görbület a $t = \frac{\pi}{4}$ paraméterű pontban:

$$\kappa\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- c) A görbület a $t = \frac{\pi}{2}$ paraméterű pontban, vagyis a $(\frac{\pi}{2}; 0)$ lesz legnagyobb. A görbület maximális értéke: 1.

168. Feladat. Számoljuk ki az $r(t) = (t^2 + 1; 2t^2 - 3)$ görbe ívhosszát a $[0; 2]$ intervallumon!

Megoldás:

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t^2 + 1 \quad \text{és} \quad y(t) = 2t^2 - 3.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 2t \quad \text{és} \quad y'(t) = 4t.$$

Mivel

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4t^2 + 16t^2 = 20t^2,$$

ezért az ívhossz:

$$L = \int_0^2 \sqrt{20t^2} dt = \int_0^2 t \cdot \sqrt{20} dt = \left[\sqrt{20} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 2 \cdot \sqrt{20} = 4 \cdot \sqrt{5}.$$

169. Feladat. Számoljuk ki az $r(t) = (t^2; t^3)$ görbe ívhosszát a $[0; 1]$ intervallumon!

Megoldás:

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t^2 \quad \text{és} \quad y(t) = t^3.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 2t \quad \text{és} \quad y'(t) = 3t^2.$$

Mivel

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4t^2 + 9t^4,$$

ezért az ívhossz:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{4 + 9t^2} dt = \frac{1}{18} \cdot \int_0^1 18t \cdot \sqrt{4 + 9t^2} dt = \\ &= \frac{1}{18} \cdot \left[\frac{(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{27} \cdot (\sqrt{13})^3 - \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

170. Feladat. Számoljuk ki az

$$r(t) = (t - \sin t; 1 - \cos t)$$

görbe ívhosszát a $[0; 2\pi]$ intervallumon!

Megoldás:

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t - \sin t \quad \text{és} \quad y(t) = 1 - \cos t.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 1 - \cos t \quad \text{és} \quad y'(t) = \sin t.$$

Mivel

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1^2 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2 \cos t,$$

ezért az ívhossz:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt.$$

Mivel

$$\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right) = 1 \quad \text{és} \quad \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) = \cos t,$$

ezért

$$2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) = 1 - \cos t,$$

így

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)} dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) dt = \\ &= \left[-4 \cos \left(\frac{t}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = 4 \cdot (1 + 1) = 8. \end{aligned}$$

171. Feladat. Egy részecske pályáját az

$$r(t) = (t + 1; t^2 - 1)$$

síkgörbe grafikonja írja le. Adjuk meg sebességvektorát és a gyorsulásvektorát a $t = 1$ időpillanatban!

Megoldás:

A sebességvektor:

$$v(t) = r'(t) = (1; 2t).$$

A sebességvektor a $t = 1$ időpillanatban:

$$v(1) = r'(1) = (1; 2).$$

A gyorsulásvektor:

$$a(t) = v'(t) = r''(t) = (0; 2).$$

A gyorsulásvektor a $t = 1$ időpillanatban:

$$a(1) = v'(1) = r''(1) = (0; 2).$$

172. Feladat. Egy részecske pályáját az

$$r(t) = (e^t; e^{2t})$$

síkgörbe grafikonja írja le. Adjuk meg sebességvektorát és a gyorsulásvektorát a $t = \ln 3$ időpillanatban!

Megoldás:

A sebességvektor:

$$v(t) = r'(t) = (e^t; 2e^{2t}).$$

A sebességvektor a $t = \ln 3$ időpillanatban:

$$v(\ln 3) = r'(\ln 3) = (e^{\ln 3}; 2e^{2\ln 3}) = (3; 2 \cdot 9) = (3; 18).$$

A gyorsulásvektor:

$$a(t) = v'(t) = r''(t) = (e^t; 4e^{2t}).$$

A gyorsulásvektor a $t = \ln 3$ időpillanatban:

$$a(\ln 3) = v'(\ln 3) = r''(\ln 3) = (e^{\ln 3}; 4e^{2\ln 3}) = (3; 4 \cdot 9) = (3; 36).$$

173. Feladat. Egy részecske pályáját az

$$r(t) = (t - \sin t; 1 - \cos t)$$

síkgörbe grafikonja írja le. Adjuk meg sebességvektorát és a gyorsulásvektorát a $t = \pi$ időpillanatban!

Megoldás:

A sebességvektor:

$$v(t) = r'(t) = (1 - \cos t; \sin t).$$

A sebességvektor a $t = \pi$ időpillanatban:

$$v(\pi) = r'(\pi) = (1 - \cos \pi; \sin \pi) = (2; 0).$$

A gyorsulásvektor:

$$a(t) = v'(t) = r''(t) = (\sin t; \cos t).$$

A gyorsulásvektor a $t = \pi$ időpillanatban:

$$a(\pi) = v'(\pi) = r''(\pi) = (\sin \pi; \cos \pi) = (0; -1).$$

174. Feladat. Egy részecske pályáját az

$$r(t) = (t - \sin t; 1 - \cos t) \quad t \in [0; 2\pi]$$

síkgörbe grafikonja írja le. Adjuk meg sebességvektor nagyságának maximumát!

Megoldás:

A sebességvektor:

$$v(t) = r'(t) = (1 - \cos t; \sin t).$$

A sebességvektor nagysága:

$$|v| = \sqrt{1^2 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t}.$$

Mivel

$$\sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right) = 1 \quad \text{és} \quad \cos^2 \left(\frac{t}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) = \cos t,$$

ezért

$$2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) = 1 - \cos t,$$

így

$$|v| = \sqrt{2 - 2 \cos t} = \sqrt{4 \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right)} = 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right),$$

aminek a maximális értéke 2.

175. Feladat. Tekintjük az

$$r(t) = (t; \sin t) \quad (t \in [0; 2\pi])$$

síkgörbét!

- Adjuk meg a síkgörbe koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a síkgörbe koordinátafüggvényeinek deriváltfüggvényeit!
- Adjuk meg a síkgörbe koordinátafüggvényeinek másodrendű deriváltfüggvényeit!
- Adjuk meg az érintő egységvektort és a normális egységvektort a $t_0 = \pi$ paraméterű pontban!
- Írjuk fel az érintőegyenes egyenletét a $t_0 = 0$ paraméterű pontban!

f) Számoljuk ki a görbületet a $t_0 = \pi$ paraméterű pontban!

Megoldás:

a) A síkgörbe koordinátafüggvényei:

$$x(t) = t \quad \text{és} \quad y(t) = \sin t.$$

b) A síkgörbe koordinátafüggvényeinek deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 1 \quad \text{és} \quad y'(t) = \cos t.$$

c) A síkgörbe koordinátafüggvényeinek másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = 0 \quad \text{és} \quad y''(t) = -\sin t.$$

d) Mivel $|r'(t)| = \sqrt{1 + \cos^2 t}$, ezért az érintő egységvektor:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}; \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \right).$$

Az érintő egységvektor a $t = \pi$ paraméterű pontban:

$$T(\pi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

A normális egységvektor a $t = \pi$ paraméterű pontban:

$$N(\pi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

e) Az érintőegyenes egyenlete a $t_0 = 0$ paraméterű pontban:

$$e(t) = (0; 0) + (1; 1) \cdot (t - t_0) \quad \Rightarrow \quad e(t) = (t; t),$$

így $x = t$ és $y = t$, tehát $y = x$.

f) Mivel a görbületi függvény

$$\kappa(t) = \left| \frac{-\sin t - 0}{(1 + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} \right|,$$

ezért

$$\kappa(\pi) = 0.$$

176. Feladat. A koordinátarendszer kezdőpontjából a vízszinteshez képest α szögben fellőtt agyaggalamb kezdősebességének nagysága v_0 . A léghellenállástól eltekintünk. Tudjuk, hogy $\alpha = 45^\circ$ és $v_0 = 20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$.

- a) Adjuk meg azt a síkgörbét, amely leírja az agyaggalamb mozgását!
- b) Határozzuk meg a síkgörbét explicit alakban!
- c) A koordinátarendszer kezdőpontjából, a vízszinteshez képest 30° -os szögben egy puskával az agyaggalambra lövünk és el is találjuk azt. A lövedék pályája egyenesnek tekinthető. Határozzuk meg azt a pontot, ahol eltaláljuk az agyaggalambot!
- d) Ha nem lőttük volna le, akkor hol ért volna földet az agyaggalamb, és mekkora lett volna a maximális magasság, amit elér?

Megoldás:

- a) Mivel

$$v_0 \cdot \cos \alpha = 20 \cdot \cos 45^\circ \approx 14,14$$

és

$$20 \cdot \sin 45^\circ \approx 14,14,$$

ezért

$$x(t) = 14,14 \cdot t$$

$$y(t) = 14,14 \cdot t - \frac{9,81}{2} \cdot t^2.$$

Tehát a keresett síkgörbe:

$$r(t) = (14,14 \cdot t; 14,14 \cdot t - 4,905 \cdot t^2).$$

- b) Az $x = 14,14 \cdot t$ egyenletből a t paramétert kifejezve azt kapjuk, hogy

$$t = \frac{x}{14,14}.$$

Ezt behelyettesítve az $y = 14,14 \cdot t - 4,905t^2$ egyenletbe

$$y = 14,14 \cdot \frac{x}{14,14} - 4,905 \cdot \frac{x^2}{200} = x - 0,024525x^2$$

adódik. Azt kaptuk tehát, hogy az agyaggalamb pályája parabola, melynek explicit egyenlete:

$$y = x - 0,024525x^2.$$

- c) A lövedék pályája egyenes, amelynek egyenlete az alábbi:

$$y = \operatorname{tg} 30^\circ \cdot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x.$$

A találati pont koordinátáinak meghatározásához meg kell oldanunk az

$$\left. \begin{aligned} y &= x - 0,024525x^2 \\ y &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Mivel

$$x - 0,024525x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x,$$

ezért az

$$0,4226x - 0,024525x^2 = 0$$

egyenlethez jutunk, így

$$x \cdot (0,4226 - 0,024525x) = 0$$

amiből $x \neq 0$ miatt $x = 17,23$ adódik. Ekkor $y = 9,95$.

d) A földet érés helyének kiszámolásához meg kell oldanunk az

$$x - 0,024525x^2 = 0$$

egyenletet. Mivel $x \neq 0$, ezért azt kapjuk, hogy $x = 40,77$ adódik. Tehát a fellövés helyétől 40,77 méterre ért volna földet az agyaggalamb. Mivel

$$\begin{aligned} x - 0,024525x^2 &= -0,024525 \cdot (x^2 - 40,77x) = \\ &= -0,024525 \left[(x - 20,385)^2 - 415,55 \right] = \\ &= -0,024525 \cdot (x - 20,385)^2 + 10,19. \end{aligned}$$

Tehát a fellövés helytől 20,385 méterre érte volna el az agyaggalamb a maximális magasságot. A maximális magasság, amit elért volna 10,19 méter.

2.3. Néhány nevezetes síkgörbe

2.3.1. Példa. Origó középpontú R sugarú kör:

$$r(t) = (R \cdot \cos t; R \cdot \sin t) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

Implicit egyenlettel:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

2.3.2. Példa. Az $(x_0; y_0)$ középpontú $R > 0$ sugarú kör:

$$r(t) = (x_0 + R \cdot \cos t; y_0 + R \cdot \sin t) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

Implicit egyenlettel:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

2.3.3. Példa. Origó középpontú $a > 0$ nagy féltengelyű, $b > 0$ kis féltengelyű ellipszis:

$$r(t) = (a \cdot \cos t; b \cdot \sin t) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

Implicit egyenlettel:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

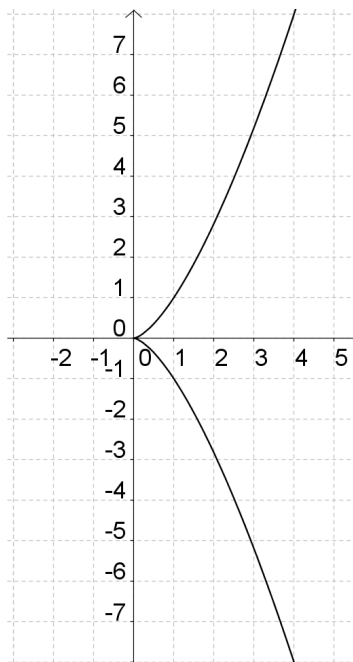
2.3.4. Példa. Niel parabola:

$$r(t) = (t^2; a \cdot t^3) \quad (t \in] - \infty; \infty[).$$

Implicit egyenlettel:

$$y^2 = a^2 \cdot x^3.$$

Például az $r(t) = (t^2; t^3)$ síkgörbe grafikonja:



2.3.5. Példa. Ciklois:

$$r(t) = (R \cdot (t - \sin t); R \cdot (1 - \cos t)) \quad (t \in] - \infty; \infty[),$$

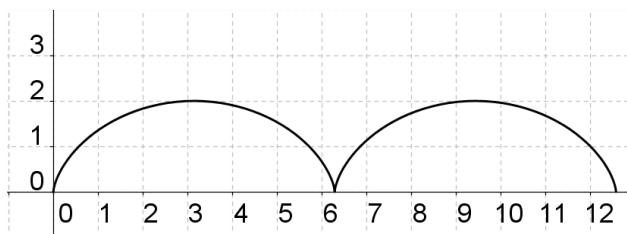
ahol $R > 0$. Implicit alakkal:

$$x = R \cdot \arccos\left(1 - \frac{y}{r}\right) - \sqrt{y \cdot (2R - y)}.$$

Például a $t \in [0; 4\pi]$ intervallumon az

$$r(t) = (t - \sin t; 1 - \cos t)$$

síkgörbe grafikonja:



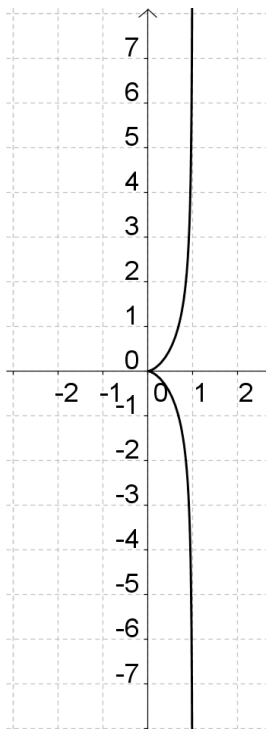
2.3.6. Példa. Dioklész-féle cisszoid:

$$r(t) = \left(\frac{a \cdot t^2}{1 + t^2}; \frac{a \cdot t^3}{1 + t^2} \right) \quad (t \in] - \infty; \infty[),$$

ahol $a > 0$. Implicit alakkal:

$$(x^2 + y^2) \cdot x = 2a \cdot y^2.$$

Például az $r(t) = \left(\frac{t^2}{1+t^2}; \frac{t^3}{1+t^2} \right)$ síkgörbe grafikonja:



2.3.7. Példa. Lemniskáta:

$$r(t) = \left(c \cdot \frac{t \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + t^2)}{1 + t^4}; c \cdot \frac{t \cdot \sqrt{2} \cdot (1 - t^2)}{1 + t^4} \right) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

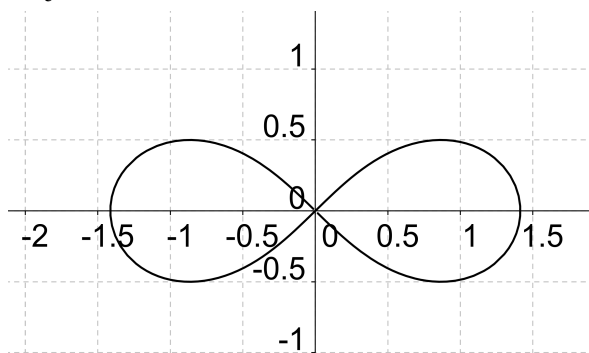
ahol $c > 0$. Implicit alakkal:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2 \cdot (x^2 - y^2) = 0.$$

Például az

$$r(t) = \left(\frac{t \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + t^2)}{1 + t^4}; \frac{t \cdot \sqrt{2} \cdot (1 - t^2)}{1 + t^4} \right) \quad (t \in \mathbb{R})$$

síkgörbe grafikonja:



2.3.8. Példa. Kardiod vagy szívgörbe:

$$r(t) = (2a \cdot (\cos t - \cos^2 t); 2a \cdot (\sin t - \sin t \cdot \cos t)) \quad (t \in [0; 2\pi]),$$

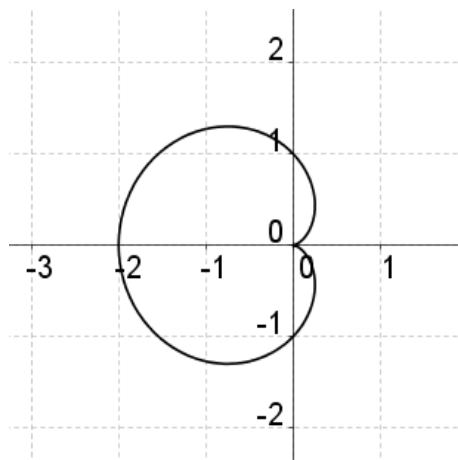
ahol $a > 0$. Implicit alakkal:

$$(x^2 + y^2)^2 + 4ax \cdot (x^2 + y^2) - 4a^2 \cdot y^2 = 0.$$

Például az

$$r(t) = (\cos t - \cos^2 t; \sin t - \sin t \cdot \cos t) \quad (t \in [0; 2\pi])$$

síkgörbe grafikonja:



2.3.9. Példa. Asztroid vagy asztrois:

$$r(t) = \left(a \cdot \cos^3 \frac{t}{4}; a \cdot \sin^3 \frac{t}{4} \right) \quad (t \in [0; 8\pi]),$$

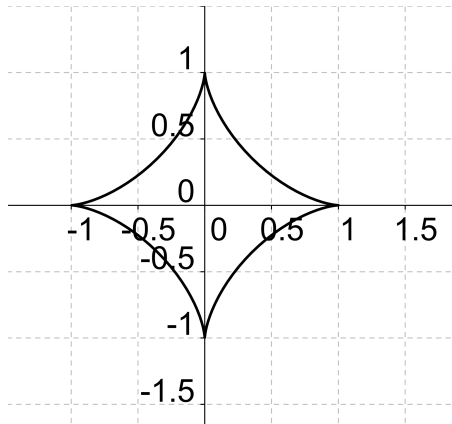
ahol $a > 0$. Implicit alakkal:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Például az

$$r(t) = \left(\cos^3 \frac{t}{4}; \sin^3 \frac{t}{4} \right) \quad (t \in [0; 8\pi]).$$

síkgörbe grafikonja:



Kidolgozott feladatok

177. Feladat. Számoljuk ki az a paraméterű aszteroid területét!

Megoldás:

Az

$$r(t) = \left(a \cdot \cos^3 \frac{t}{4}; a \cdot \sin^3 \frac{t}{4} \right) \quad (t \in [0; 8\pi]).$$

síkgörbe ívhosszát szimmetriaokok miatt úgy számoljuk ki, hogy először kiszámoljuk az

$$r(t) = \left(a \cdot \cos^3 \frac{t}{4}; a \cdot \sin^3 \frac{t}{4} \right) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

síkgörbe ívhosszát, majd azt megszorozzuk 4-gyel. A koordinátafüggvények:

$$x(t) = a \cdot \cos^3 \frac{t}{4} \quad \text{és} \quad y(t) = a \cdot \sin^3 \frac{t}{4}.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = -3a \cdot \cos^2 \frac{t}{4} \cdot \sin \frac{t}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$y'(t) = 3a \cdot \sin^2 \frac{t}{4} \cdot \cos \frac{t}{4} \cdot \frac{1}{4}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} (x'(t))^2 + (y'(t))^2 &= \frac{9}{16}a^2 \cdot \cos^4 \frac{t}{4} \cdot \sin^2 \frac{t}{4} + \frac{9}{16}a^2 \cdot \sin^4 \frac{t}{4} \cdot \cos^2 \frac{t}{4} = \\ &= \frac{9}{16}a^2 \cdot \sin^2 \frac{t}{4} \cdot \cos^2 \frac{t}{4} \cdot \left(\cos^2 \frac{t}{4} + \sin^2 \frac{t}{4} \right) = \\ &= \frac{9}{16}a^2 \cdot \sin^2 \frac{t}{4} \cdot \cos^2 \frac{t}{4}, \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} &= \sqrt{\frac{9}{16}a^2 \cdot \sin^2 \frac{t}{4} \cdot \cos^2 \frac{t}{4}} = \frac{3}{4}a \cdot \sin \frac{t}{4} \cdot \cos \frac{t}{4} = \\ &= \frac{3}{4}a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{t}{4} \cdot \cos \frac{t}{4} = \frac{3}{8}a \cdot \sin \frac{t}{2}, \end{aligned}$$

így az ívhossz a $t \in [0; 2\pi]$ intervallumon:

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} a \cdot \sin \frac{t}{2} dt = \left[\frac{3}{8} a \cdot \frac{-\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{2\pi} = \frac{3}{4} a \cdot (-\cos \pi) + \frac{3}{4} a \cdot \cos 0 = \frac{3}{2} a.$$

Az asztroid kerülete: $K = 4 \cdot \frac{3}{2} a = 6a$.

178. Feladat. Számoljuk ki az a és b hosszúságú féltengelyekkel rendelkező ellipszis által határolt zárt síkidom területét!

Megoldás:

Ha az ellipszis által határolt tartomány E , akkor az előző fejezetben tanult ismereteket alkalmazva a terület:

$$\iint_E 1.$$

Tekintsük azt az integráltranszformációt, amelyre

$$x(t; s) = a \cdot s \cdot \cos t \quad \text{és} \quad y(t; s) = b \cdot s \cdot \sin t,$$

ahol $t \in [0; 2\pi]$ és $s \in [0; 1]$. Ekkor a Jacobi-mátrix determinánsa:

$$\begin{aligned} \det J(t; s) &= \det \begin{pmatrix} x'_t & x'_s \\ y'_t & y'_s \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -a \cdot s \cdot \sin t & a \cdot \cos t \\ b \cdot s \cdot \cos t & b \cdot \sin t \end{pmatrix} = \\ &= -abs \sin^2 t - abs \cos^2 t = -abs \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) = -abs. \end{aligned}$$

A Jacobi-mátrix determinánsának abszolútértéke: abs , így

$$\begin{aligned} T &= \iint_E 1 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 1 \cdot abs \, ds \right) dt = \int_0^{2\pi} \left[ab \cdot \frac{s^2}{2} \right]_0^1 dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ab}{2} dt = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi = a \cdot b \cdot \pi. \end{aligned}$$

Tehát a terület: $T = a \cdot b \cdot \pi$.

2.4. Térgörbék megadása, differenciálása, érintőegyenese

2.4.1. Definíció. Az $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ típusú függvényeket *térgörbéknek* nevezzük. Amennyiben

$$r(t) = (x(t); y(t); z(t)),$$

akkor az x , y és z egyváltozós, valós értékű függvényeket a térgörbe *koordináta-függvényeinek* hívjuk.

A koordinátafüggvényeket sorvektorként és oszlopvektorként is szokás írni.

2.4.2. Példa. Az

$$r(t) = r_0 + t \cdot v, \quad t \in \mathbb{R}$$

térgörbe grafikonja a v irányvektorú, r_0 ponton áthaladó egyenes.

Ha $r_0 = (x_0; y_0; z_0)$ és $v = (v_1; v_2; v_3)$, akkor

$$r(t) = (x_0; y_0; z_0) + t \cdot (v_1; v_2; v_3),$$

így

$$r(t) = (x_0 + t \cdot v_1; y_0 + t \cdot v_2; z_0 + t \cdot v_3).$$

Ebből megkapjuk a már korábban tanult paraméteres egyenletrendszert:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_0 + t \cdot v_1 \\ y(t) &= y_0 + t \cdot v_2 \\ z(t) &= z_0 + t \cdot v_3 \end{aligned} \right\}.$$

2.4.3. Megjegyzés. Minden térgörbe esetén léteznek olyan $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvények úgy, hogy a térgörbe megadható az $f(x; y; z) = 0$ és a $g(x; y; z) = 0$ egyenletrendszer megoldásaként.

2.4.4. Definíció. Legyenek a és b olyan valós számok, melyekre $a < b$ teljesül! Azt mondjuk, hogy az

$$r:]a; b[\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(t) = (x(t); y(t); z(t))$$

térgörbe *differenciálható* a $t_0 \in]a; b[$ helyen, ha a koordinátafüggvényei differenciálhatóak a t_0 helyen.

Ha a térgörbe differenciálható a t_0 helyen, akkor a deriváltja

$$r'(t_0) = (x'(t_0); y'(t_0); z'(t_0)).$$

A koordinátafüggvények deriváltjait szokás $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, illetve $\frac{dz}{dt}$ módon is jelölni.

2.4.5. Példa. Tekintsük az

$$r(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 3t + e^{2t} \\ \cos(2t) \\ t \end{pmatrix}$$

térgörbét! Ekkor

$$r'(t) = \begin{pmatrix} 2t + 3 + 2e^{2t} \\ -2 \sin(2t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.4.6. Megjegyzés. Ha r egy differenciálható térgörbe, akkor fizikában az idő szerinti deriváltat vessző helyett ponttal is szokás jelölni.

2.4.7. Megjegyzés. Egy térgörbe adott pontbeli differenciálhányadosának geometriai jelentése a térgörbe adott pontbeli érintővektora.

Ha $t \mapsto r(t)$ egy mozgó pont hely-idő függvénye, akkor a differenciálhányadosa egy adott pontbeli értékének fizikai jelentése az adott időpontban a pillanatnyi sebesség.

2.4.8. Definíció. A $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t); z(t))$, ahol $t \in [a; b]$ térgörbe *sima*, ha a koordinátafüggvényei differenciálhatóak az $]a; b[-$ on és az $]a; b[-$ on nincs olyan t_0 paraméter, amelyre $x'(t_0)$, $y'(t_0)$ és $z'(t_0)$ egyszerre zérus.

2.4.9. Definíció. Az r térgörbe érintőegyenese:

$$e(t) = r(t_0) + r'(t_0) \cdot (t - t_0) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2.4.10. Példa. Megadjuk az $r(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 2t \\ 3t - 5 \\ t \end{pmatrix}$ térgörbe érintőegyenését a

$t_0 = 1$ helyen.

Mivel $r'(t) = \begin{pmatrix} 2t + 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, ezért $r(t_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $r'(t_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ezt

felhasználva azt kapjuk, hogy az érintőegyenese:

$$e(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (t - 1) = \begin{pmatrix} -1 + 4t \\ -5 + 3t \\ t \end{pmatrix},$$

ahol $t \in \mathbb{R}$. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$$\left. \begin{aligned} x &= -1 + 4t \\ y &= -5 + 3t \\ z &= t \end{aligned} \right\}.$$

A paramétermentes egyenletrendszer:

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y+5}{3} = z.$$

Kidolgozott feladatok**179. Feladat.** Tekintsük az

$$r(t) = (\cos t; \sin t; t) \quad (t \in [0; 4\pi])$$

térgörbét!

- a) Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeit!
 b) Készítsünk értéktáblázatot, amely tartalmazza az $r(t)$ térgörbe

$$t = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi; 4\pi$$

paraméterű értékeit!

- c) Vázoljuk fel a térgörbe grafikonját!
 d) Határozzuk meg a $t \mapsto r'(t)$ deriváltfüggvényt!

Megoldás:

a) A koordinátafüggvények:

$$x(t) = \cos t$$

$$y(t) = \sin t$$

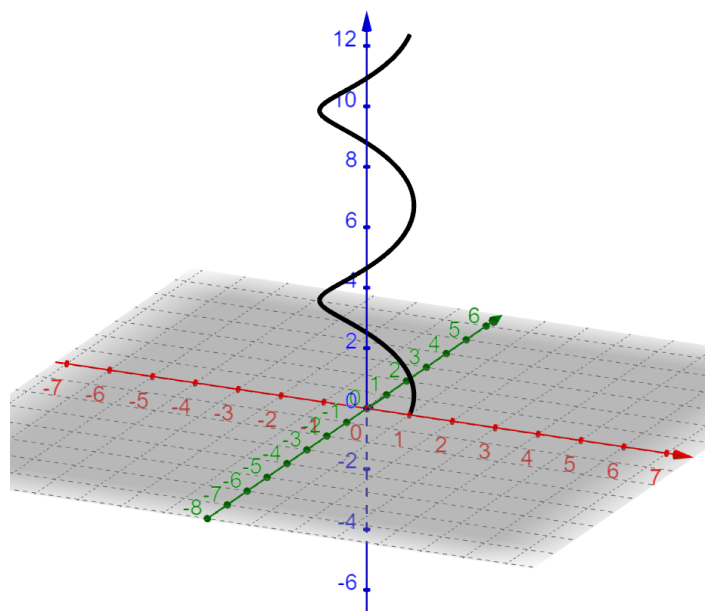
$$z(t) = t.$$

b) A $t = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi; 4\pi$ értékek esetén az $r(t)$ értékei:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$r(t)$	(1; 0; 0)	(0; 1; $\frac{\pi}{2}$)	(-1; 0; π)	(0; -1; $\frac{3\pi}{2}$)

t	2π	4π
$r(t)$	(1; 0; 2π)	(1; 0; 4π)

c) A térgörbe grafikonja:



d) A deriváltfüggvény:

$$r'(t) = (x'(t); y'(t); z'(t)) = (-\sin t; \cos t; 1).$$

180. Feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$r_1(t) = (t; t^2; 1) \quad t \in [0; 3]$$

és az

$$r_2(t) = (\sqrt{t}; t; 1) \quad t \in [0; 9]$$

ugyanazon térgörbe két különböző paraméteres előállítás!

Megoldás:

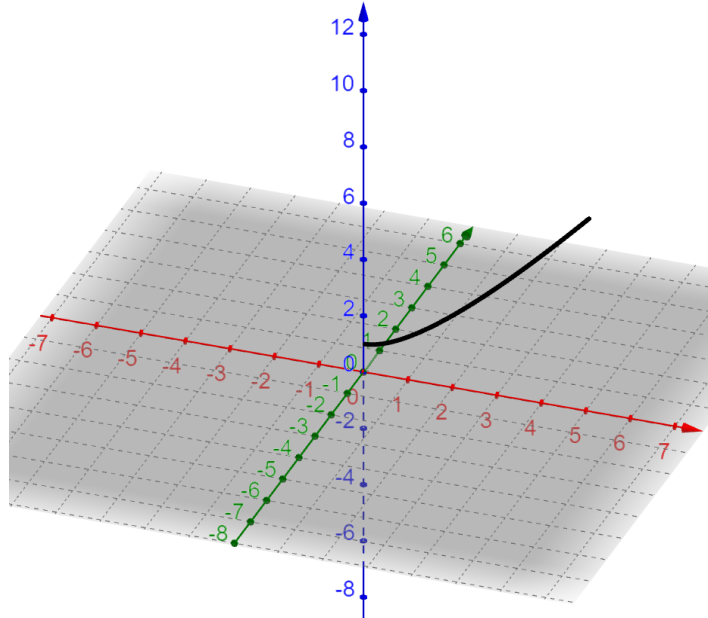
A $t = 0; 1; 2; 3$ értékek esetén az $r_1(t)$ értékei:

t	0	1	2	3
$r_1(t)$	(0; 0; 1)	(1; 1; 1)	(2; 4; 1)	(3; 9; 1)

A $t = 0; 1; 4; 9$ értékek esetén az $r_2(t)$ értékei:

t	0	1	4	9
$r_2(t)$	(0; 0; 1)	(1; 1; 1)	(2; 4; 1)	(3; 9; 1)

Az $r_1(t)$ és az $r_2(t)$ görbék grafikonja ugyanaz:



181. Feladat. Tekintsük a $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t); z(t))$ térgörbét, ahol

$$r(t) = (4t - 2; 2t^2; t) \quad (t \in [0; 2]).$$

- Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a koordinátafüggvények deriváltfüggvényeit!
- Adjuk meg a $t \mapsto r'(t)$ függvényt!
- Határozzuk meg a koordinátafüggvények másodrendű deriváltfüggvényeit!

Megoldás:

a) A koordinátafüggvények:

$$x(t) = 4t - 2$$

$$y(t) = 2t^2$$

$$z(t) = t.$$

b) A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 4$$

$$y'(t) = 4t$$

$$z'(t) = 1.$$

c) A $t \mapsto r'(t)$ függvény:

$$r'(t) = (4; 4t; 1).$$

d) A koordinátafüggvények másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = 0$$

$$y''(t) = 4$$

$$z''(t) = 0.$$

182. Feladat. Tekintsük a $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t); z(t))$ térgörbét, ahol

$$r(t) = \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 8}; \frac{2t}{t^2 - 8}; t^2 \right)$$

és tekintsük a $t_0 = 3$ paraméterű pontot!

a) Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeit!

b) Határozzuk meg a koordinátafüggvények deriváltfüggvényeit a t_0 helyen!

c) Adjuk meg az $r'(t_0)$ értéket!

Megoldás:

a) A koordinátafüggvények:

$$x(t) = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 8}$$

$$y(t) = \frac{2t}{t^2 - 8}$$

$$z(t) = t^2.$$

b) A $t \mapsto x(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{2t \cdot (t^2 - 8) - (t^2 + 1) \cdot 2t}{(t^2 - 8)^2} = \frac{2t^3 - 16t - 2t^3 - 2t}{(t^2 - 8)^2} = \\ &= \frac{-18t}{(t^2 - 8)^2}. \end{aligned}$$

A $t \mapsto y(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye:

$$y'(t) = \frac{2 \cdot (t^2 - 8) - 2t \cdot 2t}{(t^2 - 8)^2} = \frac{-2t^2 - 16}{(t^2 - 8)^2}.$$

A $t \mapsto z(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye: $z'(t) = 2t$.

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei a $t_0 = 3$ paraméterű helyen:

$$x'(t_0) = \frac{-18 \cdot 3}{(9 - 8)^2} = -54$$

$$y'(t_0) = \frac{-2 \cdot 9 - 16}{(9 - 8)^2} = -34$$

$$z'(t_0) = 2 \cdot 3 = 6.$$

c) A $t \mapsto r'(t)$ függvény helyettesítési értéke a $t_0 = 3$ helyen:

$$r'(t_0) = (-54; -34; 6).$$

183. Feladat. Tekintsük a $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t); z(t))$ térgörbét, ahol

$$r(t) = (2^{\sin t}; \operatorname{tg}^2 t; e^t)$$

és tekintsük a $t_0 = 0$ paraméterű pontot!

- Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a koordinátafüggvények deriváltfüggvényeit a t_0 helyen!
- Adjuk meg az $r'(t_0)$ értéket!

Megoldás:

a) A koordinátafüggvények:

$$x(t) = 2^{\sin t}$$

$$y(t) = \operatorname{tg}^2 t$$

$$z(t) = e^t.$$

b) A $t \mapsto x(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye:

$$x'(t) = 2^{\sin t} \cdot \ln 2 \cdot \cos t.$$

A $t \mapsto y(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye:

$$y'(t) = 2 \operatorname{tg} t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{2 \operatorname{tg} t}{\cos^2 t}.$$

A $t \mapsto z(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye: $z'(t) = e^t$.

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei a $t_0 = 0$ paraméterű helyen:

$$x'(t_0) = \ln 2$$

$$y'(t_0) = 0$$

$$z'(t_0) = 1.$$

c) A $t \mapsto r'(t)$ függvény helyettesítési értéke a $t_0 = 0$ helyen:

$$r'(t_0) = (\ln 2; 0; 1).$$

184. Feladat. Írjuk fel az

$$r(t) = (2t + 1; t^3 - t^2 + 1; t) \quad (t \in [0; 2])$$

térgörbe érintőegyenésének egyenletét a $t_0 = 1$ paraméterű helyen!

Megoldás:

Mivel $r'(t) = (2; 3t^2 - 2t; 1)$, ezért $r'(t_0) = (2; 1; 1)$.

Az érintőegyenese egyenlete:

$$e(t) = r(t_0) + r'(t_0) \cdot (t - t_0).$$

Mivel $r(t_0) = (3; 1; 1)$, ezért az érintőegyenese egyenlete:

$$e(t) = (3; 1; 1) + (2; 1; 1) \cdot (t - 1) \Rightarrow y = (3; 1; 1) + (2t - 2; t - 1; t - 1),$$

azaz

$$e(t) = (2t + 1; t; t).$$

A paraméteres egyenletrendszer:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2t + 1 \\ y = t \\ z = t \end{array} \right\}.$$

A paramétermentes egyenletrendszer:

$$\frac{x - 1}{2} = y = z.$$

185. Feladat. Írjuk fel az

$$r(t) = (e^t; 2e^{-t} - 1; t^2)$$

térgörbe érintőegyenésének egyenletét a $t_0 = 0$ paraméterű helyen!

Megoldás:

Mivel $r'(t) = (e^t; -2e^{-t}; 2t)$, ezért $r'(t_0) = (1; -2; 0)$.

Az érintőegyenese egyenlete:

$$e(t) = r(t_0) + r'(t_0) \cdot (t - t_0).$$

Mivel $r(t_0) = (1; 1; 0)$, ezért az érintőegyenese egyenlete:

$$e(t) = (1; 1; 0) + (1; -2; 0) \cdot (t - 0) \Rightarrow y = (1; 1; 0) + (t; -2t; 0),$$

azaz

$$e(t) = (1 + t; 1 - 2t; 0).$$

A paraméteres egyenletrendszer:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 0 \end{array} \right\}.$$

A paramétermentes egyenletrendszer:

$$x - 1 = \frac{1 - y}{2}; \quad z = 0.$$

2.5. Térgörbék görbülete, torziója, ívhossza, fizikai alkalmazásai

2.5.1. Definíció. Az $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ térgörbe görbületi függvénye:

$$\kappa(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}.$$

A $t \rightarrow \kappa(t)$ függvény t_0 helyen vett helyettesítési értékét a térgörbe t_0 paraméterbeli pontjához tartozó görbületének mondjuk.

2.5.2. Megjegyzés. A görbület megmutatja, hogy az egyeneshez képest mennyire „görbe” egy térgörbe grafikonja.

Az egyenes görbülete nulla.

2.5.3. Példa. Legyen $t \in [0; 2\pi]$ és $R > 0$! Tekintsük az

$$r(t) = (R \cdot \cos t; R \cdot \sin t; 1)$$

térgörbét! Ekkor a koordinátafüggvények:

$$x(t) = R \cdot \cos t \quad \text{és} \quad y(t) = R \cdot \sin t \quad \text{és} \quad z(t) = 1.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = -R \cdot \sin t \quad \text{és} \quad y'(t) = R \cdot \cos t \quad \text{és} \quad z'(t) = 0.$$

A koordinátafüggvények másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = -R \cdot \cos t \quad \text{és} \quad y''(t) = -R \cdot \sin t \quad \text{és} \quad z''(t) = 0.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$r'(t) = (-R \cdot \sin t; R \cdot \cos t; 0)$$

és

$$r''(t) = (-R \cdot \cos t; -R \cdot \sin t; 0).$$

Az $r'(t) \times r''(t)$ vektor:

$$\begin{aligned} r'(t) \times r''(t) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R \cdot \sin t & R \cdot \cos t & 0 \\ -R \cdot \cos t & -R \cdot \sin t & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (0; 0; R^2 \cdot \sin^2 t + R^2 \cdot \cos^2 t) = (0; 0; R^2). \end{aligned}$$

A $r'(t)$ vektor hossza:

$$|r'(t)| = \sqrt{R^2 \cdot \sin^2 t + R^2 \cdot \cos^2 t} = R.$$

A görbület:

$$\kappa(t) = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R}.$$

2.5.4. Definíció. Az $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ térgörbe *torziója* vagy *csavarodása*:

$$\tau(t) = \frac{(r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|^2} = \frac{r'(t) \cdot r''(t) \cdot r'''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|^2}.$$

2.5.5. Példa. Legyen $t \in [0; 2\pi]$ és $R > 0$! Tekintsük az

$$r(t) = (R \cdot \cos t; R \cdot \sin t; t)$$

térgörbét! Ekkor a koordinátafüggvények:

$$x(t) = R \cdot \cos t \quad \text{és} \quad y(t) = R \cdot \sin t \quad \text{és} \quad z(t) = t.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = -R \cdot \sin t \quad \text{és} \quad y'(t) = R \cdot \cos t \quad \text{és} \quad z'(t) = 1.$$

A koordinátafüggvények másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = -R \cdot \cos t \quad \text{és} \quad y''(t) = -R \cdot \sin t \quad \text{és} \quad z''(t) = 0.$$

A koordinátafüggvények harmadrendű deriváltfüggvényei:

$$x'''(t) = R \cdot \sin t \quad \text{és} \quad y'''(t) = -R \cdot \cos t \quad \text{és} \quad z'''(t) = 0.$$

Az $r'(t) \times r''(t)$ vektor:

$$\begin{aligned} r'(t) \times r''(t) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R \cdot \sin t & R \cdot \cos t & 1 \\ -R \cdot \cos t & -R \cdot \sin t & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (R \cdot \sin t; -R \cdot \cos t; R^2 \cdot \sin^2 t + R^2 \cdot \cos^2 t) = \\ &= (R \cdot \sin t; -R \cdot \cos t; R^2). \end{aligned}$$

A $r'(t) \times r''(t)$ vektor hossza:

$$|r'(t) \times r''(t)|^2 = R^2 \cdot \sin^2 t + R^2 \cdot \cos^2 t + R^4 = R^2 + R^4.$$

Az $r'(t) \cdot r''(t) \cdot r'''(t)$ vegyes szorzat:

$$\begin{vmatrix} -R \cdot \sin t & R \cdot \cos t & 1 \\ -R \cdot \cos t & -R \cdot \sin t & 0 \\ R \cdot \sin t & -R \cdot \cos t & 0 \end{vmatrix} = R^2 \cdot \cos^2 t + R^2 \cdot \sin^2 t = R^2.$$

A torzió:

$$\tau(t) = \frac{R^2}{R^2 + R^4} = \frac{R^2}{R^2 \cdot (1 + R^2)} = \frac{1}{1 + R^2}.$$

2.5.6. Definíció. Az előbbi feladatban szereplő térgörbét *hengeres csavarvonalnak* nevezzük.

2.5.7. Definíció. Legyen $t \in [a; b]$! Ha a $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t); z(t))$ térgörbe sima, és a $t = a$ és $t = b$ paraméterű pontokon kívül nem metszi önmagát, akkor az *ívhossza*:

$$L = \int_a^b |r'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

2.5.8. Példa. Az $r(t) = (1 + t; 2t - 3; 1)$ görbe ívhossza a $[0; 2]$ intervallumon:

$$\int_0^2 \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} dt = [\sqrt{5} \cdot t]_0^2 = 2 \cdot \sqrt{5}.$$

2.5.9. Definíció. Ha kiválasztunk egy $P(t_0)$ kezdőpontot a $t \mapsto r(t)$ sima görbén, akkor t értékéhez hozzárendelhetjük a görbe $P(t) = (x(t); y(t); z(t))$ pontját, és a $P(t_0)$ és $P(t)$ közötti irányított távolságot:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |r'(\tau)| d\tau.$$

Ha $t > t_0$, akkor $s(t)$ értéke a $P(t_0)$ és $P(t)$ közötti távolság.

Ha $t < t_0$, akkor a távolság negatív előjellel.

Az s előjeles távolság minden értéke meghatározza az r görbe egy pontját, így s paraméterezi a térgörbét. Ennek a paraméterezésnek *ívhosszal való paraméterezés* a neve.

2.5.10. Példa. Legyen $t \geq 0$! Az $r(t) = (t + 2; t + 4; 1)$ térgörbe esetén

$$r'(t) = (1; 1; 0) \quad \Rightarrow \quad |r'(t)| = \sqrt{2}.$$

Ezt felhasználva:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2} d\tau = [\sqrt{2} \cdot \tau]_0^t = \sqrt{2} \cdot t.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$s = \sqrt{2} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{\sqrt{2}}.$$

Az ívhosszal való paraméterezés:

$$r(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + 2; \frac{s}{\sqrt{2}} + 4; \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

2.5.11. Definíció. Az r térgörbe érintő egységvektora:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}.$$

2.5.12. Példa. Az $r(t) = (t; t^2; t^3)$ görbe esetén

$$r'(t) = (1; 2t; 3t^2).$$

Például a $t_0 = 1$ paraméter pontban $r'(t_0) = (1; 2; 3)$, így

$$|r'(t_0)| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}.$$

Ezt felhasználva az érintő egységvektor:

$$T(t_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{2}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}} \right).$$

2.5.13. Megjegyzés. Adott térgörbének tetszőleges számú előállítására létezik $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ típusú függvény segítségével.

A különböző előállításokban általában különbözik egy adott ponthoz tartozó érintővektor hossza.

Ez egy mozgó pont hely-idő függvénye esetén ugyanazon pálya különböző sebességgel való befutásának felel meg a fizikában.

Megmutatható, hogy differenciálható térgörbe ívhosszparaméteres előállításánál az érintővektor hossza bármely pontban egységségi.

2.5.14. Definíció. A

$$B(t) = \frac{r'(t) \times r''(t)}{|r'(t) \times r''(t)|}$$

vektort *binormális egységvektornak* nevezzük.

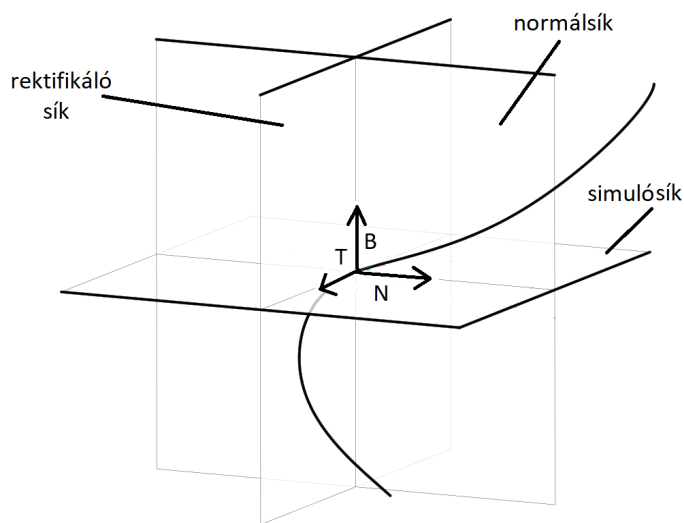
A binormális egységvektor és érintő egységvektor vektoriális szorzata az úgynevezett *főnormális egységvektor*. Jele: N .

2.5.15. Definíció. Az érintő egységvektor és főnormális egységvektor által kifeszített sík az úgynevezett *simulósík*.

Az érintő egységvektor és binormális egységvektor által meghatározott síkot *rektifikáló síknak* mondjuk.

A főnormális és a binormális egységvektor által meghatározott síkot *normálsíknak* nevezzük.

A $(T; N; B)$ vektorok egymásra merőleges egységvektorok. Ezt a vektorhármast *kísérő triédernek* vagy *kísérő háromél mezőnek* hívjuk.



2.5.16. Megjegyzés. A simulósík egy normálvektora: B .

A rektifikáló sík egy normálvektora: N .

A normálsík egy normálvektora: T .

2.5.17. Megjegyzés. A $t \mapsto r(t)$ hely-idő függvény normálisa a gyorsulásvektor.

Kidolgozott feladatok

186. Feladat. Egy anyagi pont pályáját az $r(t) = (t^3; 3t + 2; \sin t)$ térgörbe írja le! Adjuk meg a sebességvektort és a gyorsulásvektort!

Megoldás:

A sebességvektor:

$$v(t) = r'(t) = (3t^2; 3; \cos t).$$

A gyorsulásvektor:

$$a(t) = r''(t) = (6t; 0; -\sin t).$$

187. Feladat. Tekintsük az

$$r(t) = (t; t^2; t^3) \quad (t \in [0; 9])$$

térgörbét!

- Határozzuk meg a görbületet megadó függvényt!
- Számoljuk ki a görbületet a $t = 1$ paraméterű pontban!

Megoldás:

a) A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t \quad \text{és} \quad y(t) = t^2 \quad \text{és} \quad z(t) = t^3.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 1 \quad \text{és} \quad y'(t) = 2t \quad \text{és} \quad z'(t) = 3t^2.$$

A koordinátafüggvények másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = 0 \quad \text{és} \quad y''(t) = 2 \quad \text{és} \quad z''(t) = 6t.$$

Az $r'(t) = (1; 2t; 3t^2)$ és $r''(t) = (0; 2; 6t)$ vektorok vektoriális szorzata:

$$\begin{aligned} r'(t) \times r''(t) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = \\ &= (12t^2 - 6t^2; -6t; 2) = (6t^2; -6t; 2). \end{aligned}$$

Az $r'(t) \times r''(t)$ vektor hossza:

$$|r'(t) \times r''(t)| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}.$$

A $r'(t)$ vektor hossza:

$$|r'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}.$$

A görbületi függvény:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}}{\sqrt{(1 + 4t^2 + 9t^4)^3}}.$$

b) A görbület a $t = 1$ paraméterű pontban:

$$\kappa(1) = \frac{|r'(1) \times r''(1)|}{|r'(1)|^3} = \frac{\sqrt{76}}{\sqrt{14^3}}.$$

188. Feladat. Számoljuk ki az $r(t) = (t^2 + 1; 2t^2 - 3; 2)$ görbe ívhosszát a $[0; 2]$ intervallumon!

Megoldás:

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t^2 + 1 \quad \text{és} \quad y(t) = 2t^2 - 3 \quad \text{és} \quad z(t) = 2.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 2t \quad \text{és} \quad y'(t) = 4t \quad \text{és} \quad z'(t) = 0.$$

Mivel

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = 4t^2 + 16t^2 = 20t^2,$$

ezért az ívhossz:

$$L = \int_0^2 \sqrt{20t^2} dt = \int_0^2 t \cdot \sqrt{20} dt = \left[\sqrt{20} \cdot \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 2 \cdot \sqrt{20} = 4 \cdot \sqrt{5}.$$

189. Feladat. Számoljuk ki az $r(t) = (t^2; t^3; 5)$ görbe ívhosszát a $[0; 1]$ intervallumon!

Megoldás:

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = t^2 \quad \text{és} \quad y(t) = t^3 \quad \text{és} \quad z(t) = 5.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 2t \quad \text{és} \quad y'(t) = 3t^2 \quad \text{és} \quad z'(t) = 0.$$

Mivel

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = 4t^2 + 9t^4,$$

ezért az ívhossz:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{4 + 9t^2} dt = \frac{1}{18} \cdot \int_0^1 18t \cdot \sqrt{4 + 9t^2} dt = \\ &= \frac{1}{18} \cdot \left[\frac{(4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{27} \cdot (\sqrt{13})^3 - \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

190. Feladat. Egy részecske pályáját az

$$r(t) = (t + 1; t^2 - 1; \ln(2t))$$

térgörbe grafikonja írja le. Adjuk meg sebességvektorát és a gyorsulásvektorát a $t = 1$ időpillanatban!

Megoldás:

A sebességvektor:

$$v(t) = r'(t) = \left(1; 2t; \frac{1}{t} \right).$$

A sebességvektor a $t = 1$ időpillanatban:

$$v(1) = r'(1) = (1; 2; 1).$$

A gyorsulásvektor:

$$a(t) = v'(t) = r''(t) = \left(0; 2; -\frac{1}{t^2} \right).$$

A gyorsulásvektor a $t = 1$ időpillanatban:

$$a(1) = v'(1) = r''(1) = (0; 2; -1).$$

191. Feladat. Tekintjük az

$$r(t) = (t; \sin t; t) \quad (t \in [0; 2\pi])$$

térgörbét!

- Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeinek deriváltfüggvényeit!
- Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeinek másodrendű deriváltfüggvényeit!
- Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeinek harmadrendű deriváltfüggvényeit!
- Határozzuk meg az érintő egységvektort a $t_0 = \pi$ paraméterű pontban!

- f) Írjuk fel az érintőegyenes egyenletét a $t_0 = 0$ paraméterű pontban!
 g) Számoljuk ki a görbületet a $t_0 = \pi$ paraméterű pontban!
 h) Számoljuk ki a torziót a $t_0 = \pi$ paraméterű pontban!

Megoldás:

- a) A térgörbe koordinátafüggvényei:

$$x(t) = t \quad \text{és} \quad y(t) = \sin t \quad \text{és} \quad z(t) = t.$$

- b) A térgörbe koordinátafüggvényeinek deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 1 \quad \text{és} \quad y'(t) = \cos t \quad \text{és} \quad z'(t) = 1.$$

- c) A térgörbe koordinátafüggvényeinek másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = 0 \quad \text{és} \quad y''(t) = -\sin t \quad \text{és} \quad z''(t) = 0.$$

- d) A térgörbe koordinátafüggvényeinek harmadrendű deriváltfüggvényei:

$$x'''(t) = 0 \quad \text{és} \quad y'''(t) = -\cos t \quad \text{és} \quad z'''(t) = 0.$$

- e) Mivel
- $|r'(t)| = \sqrt{1 + \cos^2 t + 1}$
- , ezért az érintő egységvektor:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2 + \cos^2 t}}; \frac{\cos t}{\sqrt{2 + \cos^2 t}}; \frac{1}{\sqrt{2 + \cos^2 t}} \right).$$

Az érintő egységvektor a $t = \pi$ paraméterű pontban:

$$T(\pi) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

- f) Az érintőegyenes egyenlete a
- $t_0 = 0$
- paraméterű pontban:

$$e(t) = (0; 0; 0) + (1; 1; 1) \cdot (t - t_0) \quad \Rightarrow \quad e(t) = (t; t; t),$$

így $x = t$, $y = t$ és $z = t$.

- g) Az
- $r'(t) = (1; \cos t; 1)$
- és
- $r''(t) = (0; -\sin t; 0)$
- vektorok vektoriális szorzata:

$$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = (\sin t; 0; -\sin t).$$

Az $r'(t) \times r''(t)$ vektor hossza:

$$|r'(t) \times r''(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2 \sin^2 t}.$$

A $r'(t)$ vektor hossza:

$$|r'(t)| = \sqrt{2 + \cos^2 t}.$$

A görbületi függvény:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{2 \sin^2 t}}{\sqrt{(2 + \cos^2 t)^3}}.$$

A görbület a $t = \pi$ paraméterű pontban:

$$\kappa(\pi) = \frac{\sqrt{2 \sin^2 \pi}}{\sqrt{(2 + \cos^2 \pi)^3}} = 0.$$

h) Az $r'(t) \cdot r''(t) \cdot r'''(t)$ vegyes szorzat:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t & 0 \\ 0 & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

A torzió: $\tau(t) = 0$.

192. Feladat. Tekintjük az

$$r(t) = (t^2 - 1; t + 2; t^3 - t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

térgörbét és a $t_0 = 1$ paramétert!

- Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeinek deriváltfüggvényeit!
- Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeinek másodrendű deriváltfüggvényeit!
- Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeinek harmadrendű deriváltfüggvényeit!
- Számoljuk ki a térgörbe értékét, valamint az elsőrendű, másodrendű és harmadrendű deriváltfüggvények értékét a $t_0 = 1$ paraméterű pontban!
- Adjuk meg az érintő egységvektort a $t_0 = 1$ paraméterű pontban!
- Adjuk meg a binormális egységvektort a $t_0 = 1$ paraméterű pontban!
- Adjuk meg a főnormális egységvektort a $t_0 = 1$ paraméterű pontban!
- Írjuk fel az érintőegyenes egyenletét a $t_0 = 1$ paraméterű pontban!
- Számoljuk ki a görbületet a $t_0 = 1$ paraméterű pontban!
- Számoljuk ki a torziót a $t_0 = 1$ paraméterű pontban!
- Írjuk fel a simulósík egyenletét!

m) Határozzuk meg a normálsík egyenletét!

n) Adjuk meg a rektifikáló sík egyenletét!

Megoldás:

a) A térgörbe koordinátafüggvényei:

$$x(t) = t^2 - 1 \quad \text{és} \quad y(t) = t + 2 \quad \text{és} \quad z(t) = t^3 - t.$$

b) A térgörbe koordinátafüggvényeinek deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = 2t \quad \text{és} \quad y'(t) = 1 \quad \text{és} \quad z'(t) = 3t^2 - 1.$$

c) A térgörbe koordinátafüggvényeinek másodrendű deriváltfüggvényei:

$$x''(t) = 2 \quad \text{és} \quad y''(t) = 0 \quad \text{és} \quad z''(t) = 6t.$$

d) A térgörbe koordinátafüggvényeinek harmadrendű deriváltfüggvényei:

$$x'''(t) = 0 \quad \text{és} \quad y'''(t) = 0 \quad \text{és} \quad z'''(t) = 6.$$

e) A térgörbe értéke a $t_0 = 1$ paraméterű pontban:

$$r(t_0) = (0; 3; 0).$$

A térgörbe deriváltfüggvényének értéke a $t_0 = 1$ paraméterű pontban:

$$r'(t_0) = (2; 1; 2).$$

A térgörbe másodrendű deriváltfüggvényének értéke a $t_0 = 1$ paraméterű pontban:

$$r''(t_0) = (2; 0; 6).$$

A térgörbe harmadrendű deriváltfüggvényének értéke a $t_0 = 1$ paraméterű pontban:

$$r'''(t_0) = (0; 0; 6).$$

f) Mivel $|r'(t_0)| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$, ezért az érintő egységvektor:

$$T(t_0) = \frac{r'(t_0)}{|r'(t_0)|} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

g) Mivel az $r'(t_0)$ és $r''(t_0)$ vektorok vektoriális szorzata:

$$r'(t_0) \times r''(t_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (6; -8; -2)$$

és az $r'(t_0) \times r''(t_0)$ vektor hossza:

$$|r'(t_0) \times r''(t_0)| = \sqrt{36 + 64 + 4} = \sqrt{104} = 2 \cdot \sqrt{26},$$

ezért a binormális egységvektor:

$$B = \frac{r'(t_0) \times r''(t_0)}{|r'(t_0) \times r''(t_0)|} = \left(\frac{3}{\sqrt{26}}; -\frac{4}{\sqrt{26}}; -\frac{1}{\sqrt{26}} \right).$$

h) A főnormális egységvektor a binormális és érintő egységvektorok vektoriális szorzata, így

$$N = B \times T = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{26}} \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{26}} \cdot (-7; -8; 11).$$

i) Az érintőegyenest egyenlete a $t_0 = 1$ paraméterű pontban:

$$e(t) = (0; 3; 0) + (2; 1; 2) \cdot (t - 1).$$

Elvégezve az összeadást és a szorzást, azt kapjuk, hogy

$$e(t) = (2t - 2; 2 + t; 2t - 2),$$

így $x = 2t - 2$, $y = 2 + t$ és $z = 2t - 2$.

j) Mivel $|r'(t_0) \times r''(t_0)| = 2 \cdot \sqrt{26}$ és $|r'(t_0)| = 3$, ezért a görbület:

$$\kappa(t_0) = \frac{|r'(t_0) \times r''(t_0)|}{|r'(t_0)|^3} = \frac{2 \cdot \sqrt{26}}{3^3}.$$

k) Az $r'(t_0) \cdot r''(t_0) \cdot r'''(t_0)$ vegyes szorzat:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-2) = -12.$$

A torzió:

$$\tau(t_0) = \frac{r'(t_0) \cdot r''(t_0) \cdot r'''(t_0)}{|r'(t_0) \times r''(t_0)|^2} = \frac{-12}{4 \cdot 26} = -\frac{3}{26}.$$

- l) A simulósíkot T és N feszíti ki, ezért B -re merőleges, így egy normálvektora:

$$n_{Sim} = (3; -4; -1).$$

A sík egy pontja: $r_0 = (0; 3; 0)$, így a sík egyenlete:

$$3x - 4y - z = -12.$$

- m) A normálsíkot N és B feszíti ki, ezért T -re merőleges, így egy normálvektora:

$$n_{Norm} = (2; 1; 2).$$

A sík egy pontja: $r_0 = (0; 3; 0)$, így a sík egyenlete:

$$2x + y + 2z = 3.$$

- n) A rektifikáló síkot T és B feszíti ki, ezért N -re merőleges, így egy normálvektora:

$$n_{Rekt} = (-7; -8; 11).$$

A sík egy pontja: $r_0 = (0; 3; 0)$, így a sík egyenlete:

$$-7x - 8y + 11z = -24.$$

2.6. Felületek megadása

2.6.1. Definíció. Az $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ leképezéseket *felületeknek* nevezzük. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy az r függvény a felület egy *paraméterezése* vagy *paraméteres előállítás*.

2.6.2. Példa. Ha a és b lineárisan független vektorok a térben (vagyis nem esnek egy egyenesre), akkor az

$$r(u; v) = P + u \cdot a + v \cdot b$$

a P ponton áthaladó, a és b vektorok által kifeszített sík paraméteres előállítás.

Ha $P = (x_0; y_0; z_0)$, $a = (a_1; a_2; a_3)$ és $b = (b_1; b_2; b_3)$, akkor

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} x_0 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1 \\ y_0 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2 \\ z_0 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3 \end{pmatrix},$$

ahol $u, v \in \mathbb{R}$.

2.6.3. Tétel. Megmutatható, hogy minden $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ felület esetén létezik olyan $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy a felület megadható $g(x; y; z) = 0$ implicit alakban.

Bizonyos esetekben a felület megadható egy $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonjaként, vagyis $z = f(x; y)$ alakban.

Ha egy felület egy $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény grafikonja, akkor az implicit egyenlete:

$$g(x; y; z) = f(x; y) - z = 0.$$

2.6.4. Példa. Az

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u + v \end{pmatrix}$$

sík esetén $x = u$, $y = v$, $z = u + v$, így az explicit egyenlet

$$z = u + v = x + y,$$

vagyis az előbbi tételben szereplő f függvény

$$f(x; y) = x + y.$$

Az implicit egyenlet $x + y - z = 0$, így az előbbi tételben szereplő g függvény:

$$g(x; y; z) = x + y - z.$$

2.6.5. Példa. Az $(x_0; y_0; z_0)$ középpontú, R sugarú gömb implicit egyenlete:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Ebben az esetben explicit egyenlet nem adható meg.

2.6.6. Definíció. Ha egy felületet az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonjaként adunk meg, akkor az $x = u, y = v, z = f(u; v)$ paraméterezést, vagyis az

$$r(u; v) = (u; v; f(u; v))$$

leképezést a felület *Euler-Monge-féle paraméteres előállításának* vagy *Euler-Monge-féle paraméterezésének* nevezzük.

2.6.7. Példa. Az $f(x; y) = x \cdot y$ felület Euler-Monge-féle paraméterezése:

$$r(u; v) = (u; v; u \cdot v).$$

2.6.8. Példa. Az origó középpontú, R sugarú gömb implicit megadása:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Az origó középpontú, R sugarú gömb egy paraméteres előállítása:

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} R \cdot \sin u \cdot \cos v \\ R \cdot \sin u \cdot \sin v \\ R \cdot \cos u \end{pmatrix} \quad (u \in]0; \pi[, v \in [0; 2\pi]).$$

2.6.9. Megjegyzés. Természetesen ugyanazon felületnek többféle paraméteres előállítása is létezik. Például általánosan igaz az, hogy ha a z koordinátatengely körül megforgatjuk az xz síkban fekvő $(x(u); z(u))$ síkgörbe grafikonját, akkor a keletkezett forgásfelület paraméteres előállítása:

$$r(u; v) = (x(u) \cdot \cos v; x(u) \cdot \sin v; z(u)) \quad (u \in I, v \in [0; 2\pi]).$$

Ezt felhasználva, az R sugarú gömb megkapható az $(R \cdot \cos u; R \cdot \sin u)$ kör megforgatásával, így egy paraméterezése az alábbi is:

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos u \cdot \cos v \\ R \cdot \cos u \cdot \sin v \\ R \cdot \sin u \end{pmatrix} \quad \left(u \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, v \in [0; 2\pi]\right).$$

2.6.10. Definíció. Legyen $(u; v) \in \mathbb{R}^2$! Az $r(u; v) = (u; v; u^2 + v^2)$ felület az úgynevezett *forgásparaboloid*.

2.6.11. Megjegyzés. A forgásparaboloid implicit egyenlete:

$$x^2 + y^2 - z = 0.$$

2.6.12. Példa. A hengerfelület paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = (R \cdot \cos u; R \cdot \sin u; v).$$

2.6.13. Példa. A kúppalást paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = (u \cdot \cos v; u \cdot \sin v; A \cdot u).$$

2.6.14. Tétel. Ha két felület implicit egyenlete

$$g_1(x; y; z) = 0 \quad \text{és} \quad g_2(x; y; z) = 0,$$

akkor bizonyos esetekben x és y kifejezhető z függvényeként, vagyis ilyenkor léteznek olyan $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények, hogy

$$x = a(z) \quad \text{és} \quad y = b(z).$$

Ekkor a metszésvonal egy térgörbe, melynek a paraméteres megadása:

$$x = a(t) \quad \text{és} \quad y = b(t) \quad \text{és} \quad z = t,$$

azaz

$$r(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Kidolgozott feladatok

193. Feladat. Adjuk meg az

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} 2 + u + v \\ 3 - 2u - v \\ 4 - 3u + 2v \end{pmatrix} \quad (u; v \in \mathbb{R})$$

síkot implicit alakban, vagyis határozzuk meg az $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy a felület $g(x; y; z) = 0$ alakú egyenlettel legyen leírva!

Megoldás:

Az

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 + u + v \\ y &= 3 - 2u - v \\ z &= 4 - 3u + 2v \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszer második egyenletét 2-vel szorozva azt kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 + u + v \\ 2y &= 6 - 4u - 2v \\ z &= 4 - 3u + 2v \end{aligned} \right\}.$$

A második és a harmadik egyenletet összeadva

$$2y + z = 10 - 7u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{10 - 2y - z}{7}$$

adódik. Ezt behelyettesítve az eredeti egyenletrendszer második egyenletébe azt kapjuk, hogy

$$y = 3 - \frac{20 - 4y - 2z}{7} - v \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1 - 3y + 2z}{7}.$$

Az első egyenletből

$$x = 2 + \frac{10 - 2y - z}{7} + \frac{1 - 3y + 2z}{7}$$

adódik. Az egyenletet 7-tel szorozva azt kapjuk, hogy

$$7x = 14 + 10 - 2y - z + 1 - 3y + 2z,$$

így $7x + 5y - z - 25 = 0$ adódik, tehát a keresett g függvény:

$$g(x; y; z) = 7x + 5y - z - 25.$$

A síkot megadhatjuk explicit alakban is:

$$z = 7x + 5y - 25.$$

Ez azt jelenti, hogy az $f(x; y) = 7x + 5y - 25$ függvény grafikonjaként adjuk meg a síkot.

194. Feladat. Adjuk meg az $f(x; y) = x^2 + y^2$ felület Euler-Monge-féle paraméterezését!

Megoldás:

Az Euler-Monge-féle paraméterezés:

$$r(u; v) = (u; v; u^2 + v^2).$$

195. Feladat. Mutassuk meg, hogy az origó középpontú, R sugarú gömb egy paraméteres előállítására:

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos u \cdot \cos v \\ R \cdot \cos u \cdot \sin v \\ R \cdot \sin u \end{pmatrix} \quad \left(u \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, v \in [0; 2\pi[\right)!$$

Megoldás:

Mivel

$$x = R \cdot \cos u \cdot \cos v$$

$$y = R \cdot \cos u \cdot \sin v$$

$$z = R \cdot \sin u,$$

ezért

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \cdot \cos^2 u \cdot \cos^2 v + R^2 \cdot \cos^2 u \cdot \sin^2 v + \\ &+ R^2 \cdot \sin^2 u = R^2 \cdot \cos^2 u \cdot (\cos^2 v + \sin^2 v) + \\ &+ R^2 \cdot \sin^2 u = R^2 \cdot \cos^2 u + R^2 \cdot \sin^2 u = \\ &= R^2 \cdot (\sin^2 u + \cos^2 u) = R^2, \end{aligned}$$

tehát $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ami valóban az origó középpontú, R sugarú gömb egyenlete.

196. Feladat. Igazoljuk, hogy az

$$r(t) = (2 \cos t \cdot \sin t; 2 \sin^2 t; 2 \cos t)$$

térgörbe rajta van egy origó középpontú gömbfelületen!

Megoldás:

A görbe koordinátafüggvényei:

$$x(t) = 2 \cos t \cdot \sin t$$

$$y(t) = 2 \sin^2 t$$

$$z(t) = 2 \cos t.$$

Ezt felhasználva:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \cos^2 t \cdot \sin^2 t + 4 \sin^4 t + 4 \cos^2 t = \\ &= 4 \sin^2 t \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) + 4 \cos^2 t = 4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t = \\ &= 4 \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) = 4. \end{aligned}$$

Tehát a térgörbe koordinátafüggvényei kielégítik az

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

egyenletet, ami az origó középpontú, $R = 2$ sugarú gömb egyenlete.

197. Feladat. Adjuk meg az $x + y - z = 1$ és a $2x - y + z = 2$ felületek metszetgörbét!

Megoldás:

A két felület egyenletéből álló egyenletrendszer kell megoldanunk. Az első egyenletből

$$z = x + y - 1$$

adódik, amit behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$2x - y + x + y - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad 3x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Ezt felhasználva $z = y$ adódik. A metszetgörbe:

$$r(t) = (1; t; t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2.7. Felületek deriváltja, normálisa, érintősíkja

2.7.1. Definíció. Ha az $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ felület esetén

$$r(u; v) = (x(u; v); y(u; v); z(u; v)),$$

akkor az $x, y, z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket a felület *koordinátafüggvényeinek* nevezzük.

2.7.2. Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy akárcsak a sígörbék és térgörbék esetében, a felületek esetén is szokásos mind a sorvektorként, mind az oszlopvektorként való írásmód.

2.7.3. Definíció. Az $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ felület *differenciálható* az $(u_0; v_0)$ helyen, ha a koordinátafüggvényei differenciálhatóak az $(u_0; v_0)$ helyen.

2.7.4. Definíció. Az $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(u; v) = (x(u; v); y(u; v); z(u; v))$ differenciálható függvény *differenciálhányados függvénye*:

$$r'(u; v) = \begin{pmatrix} x'_u(u; v) & x'_v(u; v) \\ y'_u(u; v) & y'_v(u; v) \\ z'_u(u; v) & z'_v(u; v) \end{pmatrix}.$$

2.7.5. Megjegyzés. Felület deriváltfüggvénye 3×2 típusú mátrix.

2.7.6. Példa. Az

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} u^2 + 2uv \\ v^2 + u^2 \\ \sin u \end{pmatrix}$$

felület deriváltfüggvénye:

$$r'(u; v) = \begin{pmatrix} 2u + 2v & 2u \\ 2u & 2v \\ \cos u & 0 \end{pmatrix}.$$

2.7.7. Definíció. Az $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ felület $(u_0; v_0)$ helyen vett *felületi normálisa* az

$$n(u_0; v_0) = r'_u(u_0; v_0) \times r'_v(u_0; v_0).$$

A felületi normális irányába mutató egységvektor a *felületi főnormális*.

2.7.8. Példa. Kiszámoljuk az $r(u; v) = (u; v; u^2 + v)$ felületnek a felületi normálisát az $(u_0; v_0) = (1; 2)$ helyen.

Az $r(u; v) = (u; v; u^2 + v)$ felület esetén

$$r'_u(u; v) = (1; 0; 2u) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (0; 1; 1).$$

A deriváltvektorok az $(u_0; v_0) = (1; 2)$ helyen:

$$r'_u(u_0; v_0) = (1; 0; 2) \quad \text{és} \quad r'_v(u_0; v_0) = (0; 1; 1).$$

A felületi normális:

$$n = r'_u(u_0; v_0) \times r'_v(u_0; v_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2; -1; 1).$$

2.7.9. Definíció. Az $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ felület érintősíkja az $(u_0; v_0)$ helyen:

$$e(u; v) = r(u_0; v_0) + u \cdot r'_u(u_0; v_0) + v \cdot r'_v(u_0; v_0).$$

2.7.10. Tétel. Az $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ felület érintősíkjának egyenlete az $(u_0; v_0)$ helyen:

$$(r'_u(u_0; v_0) \times r'_v(u_0; v_0)) \cdot ((x; y; z) - r(u_0; v_0)) = 0.$$

Kidolgozott feladatok

198. Feladat. Tekintsük az $r(u; v) = (u; u \cdot v; v - u^2)$ felületet!

- Számoljuk ki a függvényértéket az $(u_0; v_0) = (2; -1)$ helyen!
- Adjuk meg a felület koordinátafüggvényeit!
- Adjuk meg a felület koordinátafüggvényeinek parciális deriváltfüggvényeit!
- Határozzuk meg a felület deriváltfüggvényét!
- Határozzuk meg a felület deriváltfüggvényének az $(u_0; v_0) = (2; -1)$ helyen vett helyettesítési értékét!
- Adjuk meg az $(u_0; v_0) = (2; -1)$ helyen a felületi normális!
- Írjuk fel az $(u_0; v_0) = (2; -1)$ helyen az érintő sík egyenletét!

Megoldás:

- a) A függvényérték az $(u_0; v_0) = (2; -1)$ helyen:

$$r(u_0; v_0) = (2; 2 \cdot (-1); -1 - 2^2) = (2; -2; -5).$$

- b) A felület koordinátafüggvényei:

$$x(u; v) = u \quad \text{és} \quad y(u; v) = u \cdot v \quad \text{és} \quad z(u; v) = v - u^2.$$

- c) A koordinátafüggvények u változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_u(u; v) = 1 \quad \text{és} \quad y'_u(u; v) = v \quad \text{és} \quad z'_u(u; v) = -2u.$$

A koordinátafüggvények v változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_v(u; v) = 0 \quad \text{és} \quad y'_v(u; v) = u \quad \text{és} \quad z'_v(u; v) = 1.$$

- d) A felület deriváltfüggvénye:

$$r'(u; v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \\ -2u & 1 \end{pmatrix}.$$

- e) A felület deriváltfüggvényének helyettesítési értéke az $(u_0; v_0) = (2; -1)$ helyen:

$$r'(u_0; v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) A felületi normális:

$$n = r'_u(u_0; v_0) \times r'_v(u_0; v_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (7; -1; 2).$$

g) Az $(u_0; v_0) = (2; -1)$ helyen az érintő sík egyenlete:

$$(7; -1; 2) \cdot ((x; y; z) - (2; -2; -5)) = 0,$$

vagyis

$$(7; -1; 2) \cdot (x - 2; y + 2; z + 5) = 0.$$

A skaláris szorzatot elvégezve azt kapjuk, hogy

$$7 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y + 2) + 2 \cdot (z + 5) = 0.$$

A zárójeleket felbontva és elvégezve az összevonást

$$7x - y + 2z - 14 - 2 + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 7x - y + 2z = 6$$

adódik.

199. Feladat. Tekintsük az $r(u; v) = (\sin u; \cos v; v)$ felületet!

- Számoljuk ki a függvényértéket az $(u_0; v_0) = (\pi; 0)$ helyen!
- Adjuk meg a felület koordinátafüggvényeit!
- Adjuk meg a felület koordinátafüggvényeinek parciális deriváltfüggvényeit!
- Határozzuk meg a felület deriváltfüggvényét!
- Határozzuk meg a felület deriváltfüggvényének az $(u_0; v_0) = (\pi; 0)$ helyen vett helyettesítési értékét!
- Adjuk meg az $(u_0; v_0) = (\pi; 0)$ helyen a felületi normális!
- Írjuk fel az $(u_0; v_0) = (\pi; 0)$ helyen az érintő sík egyenletét!

Megoldás:

a) A függvényérték az $(u_0; v_0) = (\pi; 0)$ helyen:

$$r(u_0; v_0) = (\sin \pi; \cos 0; 0) = (0; 1; 0).$$

b) A felület koordinátafüggvényei:

$$x(u; v) = \sin u \quad \text{és} \quad y(u; v) = \cos v \quad \text{és} \quad z(u; v) = v.$$

c) A koordinátafüggvények u változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_u(u; v) = \cos u \quad \text{és} \quad y'_u(u; v) = 0 \quad \text{és} \quad z'_u(u; v) = 0.$$

A koordinátafüggvények v változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_v(u; v) = 0 \quad \text{és} \quad y'_v(u; v) = -\sin v \quad \text{és} \quad z'_v(u; v) = 1.$$

d) A felület deriváltfüggvénye:

$$r'(u; v) = \begin{pmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & -\sin v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) A felület deriváltfüggvényének helyettesítési értéke az $(u_0; v_0) = (\pi; 0)$ helyen:

$$r'(u_0; v_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) A felületi normális:

$$n = r'_u(u_0; v_0) \times r'_v(u_0; v_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0; 1; 0).$$

g) Az $(u_0; v_0) = (\pi; 0)$ helyen az érintő sík egyenlete:

$$(0; 1; 0) \cdot ((x; y; z) - (0; 1; 0)) = 0,$$

vagyis

$$(0; 1; 0) \cdot (x; y - 1; z) = 0.$$

A skaláris szorzatot elvégezve azt kapjuk, hogy $y = 1$.

2.8. Felületdarab felszíne

2.8.1. Definíció. Az $r(u; v)$ paraméterezésű F felület D tartomány fölötti részének *felszíne*:

$$\iint_D |r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)| \, du \, dv.$$

2.8.2. Megjegyzés. Egy felületdarab felszínének kiszámolásának lépései:

1. Amennyiben a felület nem paraméteresen van megadva, úgy paraméterezzük.
2. Kiszámoljuk az $r'_u(u; v)$ deriváltvektort.
3. Kiszámoljuk az $r'_v(u; v)$ deriváltvektort.
4. Meghatározzuk az $r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektoriális szorzatot.
5. Kiszámoljuk az $r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor hosszát.
6. A megfelelő határok között integráljuk az $|r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)|$ függvényt.

200. Feladat. Adjuk meg az

$$r(u; v) = (u; \cos v; \sin v) \quad (0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq \pi)$$

felületdarab felszínét!

Megoldás:

A felület koordinátafüggvényei:

$$x(u; v) = u \quad \text{és} \quad y(u; v) = \cos v \quad \text{és} \quad z(u; v) = \sin v.$$

A koordinátafüggvények u változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_u(u; v) = 1 \quad \text{és} \quad y'_u(u; v) = 0 \quad \text{és} \quad z'_u(u; v) = 0.$$

A koordinátafüggvények v változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_v(u; v) = 0 \quad \text{és} \quad y'_v(u; v) = -\sin v \quad \text{és} \quad z'_v(u; v) = \cos v.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$r'_u(u; v) = (1; 0; 0) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (0; -\sin v; \cos v).$$

Az $r'_u(u; v)$ és $r'_v(u; v)$ vektorok vektoriális szorzata:

$$\begin{aligned} r'_u(u; v) \times r'_v(u; v) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{vmatrix} = \\ &= (0; -\cos v; -\sin v). \end{aligned}$$

Az $r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor hossza:

$$|r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)| = \sqrt{\cos^2 v + \sin^2 v} = \sqrt{1} = 1.$$

A felületdarab felszíne:

$$\int_0^2 \left(\int_0^\pi 1 \, dv \right) du = \int_0^2 [v]_0^\pi du = \int_0^2 \pi \, du = [\pi \cdot u]_0^2 = 2\pi.$$

Kidolgozott feladatok**201. Feladat.** Adjuk meg az

$$r(u; v) = (u; 3 \cos v; 3 \sin v) \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi)$$

felületdarab felszínét!

Megoldás:

A felület koordinátafüggvényei:

$$x(u; v) = u \quad \text{és} \quad y(u; v) = 3 \cos v \quad \text{és} \quad z(u; v) = 3 \sin v.$$

A koordinátafüggvények u változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_u(u; v) = 1 \quad \text{és} \quad y'_u(u; v) = 0 \quad \text{és} \quad z'_u(u; v) = 0.$$

A koordinátafüggvények v változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_v(u; v) = 0 \quad \text{és} \quad y'_v(u; v) = -3 \sin v \quad \text{és} \quad z'_v(u; v) = 3 \cos v.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$r'_u(u; v) = (1; 0; 0) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (0; -3 \sin v; 3 \cos v).$$

Az $r'_u(u; v)$ és $r'_v(u; v)$ vektorok vektoriális szorzata:

$$\begin{aligned} r'_u(u; v) \times r'_v(u; v) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 \sin v & 3 \cos v \end{vmatrix} = \\ &= (0; -3 \cos v; -3 \sin v). \end{aligned}$$

Az $r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor hossza:

$$|r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)| = \sqrt{9 \sin^2 v + 9 \cos^2 v} = \sqrt{9} = 3.$$

A felületdarab felszíne:

$$\int_0^1 \left(\int_0^\pi 3 \, dv \right) du = \int_0^1 [3v]_0^\pi du = \int_0^1 3\pi \, du = [3\pi \cdot u]_0^1 = 3\pi.$$

202. Feladat. Adjuk meg az

$$r(u; v) = (u + v; u - v; v) \quad (0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq \pi)$$

felületdarab felszínét!

Megoldás:

A felület koordinátafüggvényei:

$$x(u; v) = u + v \quad \text{és} \quad y(u; v) = u - v \quad \text{és} \quad z(u; v) = v.$$

A koordinátafüggvények u változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_u(u; v) = 1 \quad \text{és} \quad y'_u(u; v) = 1 \quad \text{és} \quad z'_u(u; v) = 0.$$

A koordinátafüggvények v változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_v(u; v) = 1 \quad \text{és} \quad y'_v(u; v) = -1 \quad \text{és} \quad z'_v(u; v) = 1.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$r'_u(u; v) = (1; 1; 0) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (1; -1; 1).$$

Az $r'_u(u; v)$ és $r'_v(u; v)$ vektorok vektoriális szorzata:

$$r'_u(u; v) \times r'_v(u; v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1; -1; -2).$$

Az $r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor hossza:

$$|r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

A felületdarab felszíne:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_0^\pi \sqrt{6} \, dv \right) du &= \int_0^2 [\sqrt{6} \cdot v]_0^\pi du = \int_0^2 \sqrt{6} \cdot \pi \, du = \\ &= [\sqrt{6} \cdot \pi \cdot u]_0^2 = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \pi. \end{aligned}$$

203. Feladat. Adjuk meg az

$$r(u; v) = (u; u \cos v; u \sin v) \quad (0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq \pi)$$

felületdarab felszínét!

Megoldás:

A felület koordinátafüggvényei:

$$x(u; v) = u \quad \text{és} \quad y(u; v) = u \cos v \quad \text{és} \quad z(u; v) = u \sin v.$$

A koordinátafüggvények u változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_u(u; v) = 1 \quad \text{és} \quad y'_u(u; v) = \cos v \quad \text{és} \quad z'_u(u; v) = \sin v.$$

A koordinátafüggvények v változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_v(u; v) = 0 \quad \text{és} \quad y'_v(u; v) = -u \sin v \quad \text{és} \quad z'_v(u; v) = u \cos v.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$r'_u(u; v) = (1; \cos v; \sin v) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (0; -u \sin v; u \cos v).$$

Az $r'_u(u; v)$ és $r'_v(u; v)$ vektorok vektoriális szorzata:

$$r'_u(u; v) \times r'_v(u; v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \cos v & \sin v \\ 0 & -u \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = (u; -u \cos v; -u \sin v).$$

Az $r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor hossza:

$$|r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)| = \sqrt{u^2 + u^2 \cdot (\cos^2 v + \sin^2 v)} = \sqrt{2u^2} = u \cdot \sqrt{2}.$$

A felületdarab felszíne:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_0^\pi u \cdot \sqrt{2} \, dv \right) du &= \int_0^2 [\sqrt{2} \cdot uv]_{v=0}^{v=\pi} du = \int_0^2 \sqrt{2} \cdot u \cdot \pi \, du = \\ &= \left[\sqrt{2} \cdot \pi \cdot \frac{u^2}{2} \right]_0^2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi. \end{aligned}$$

2.9. Felületek görbülete

2.9.1. Definíció. Az $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható felületnek az *első alapmennyiségei*:

$$E = r'_u(u; v) \cdot r'_u(u; v) = |r'_u(u; v)|^2$$

$$F = r'_u(u; v) \cdot r'_v(u; v)$$

$$G = r'_v(u; v) \cdot r'_v(u; v) = |r'_v(u; v)|^2.$$

2.9.2. Példa. Tekintsük az $r(u; v) = (\cos u; \sin u; v)$ felület esetén egyrészt

$$r'_u(u; v) = (-\sin u; \cos u; 0),$$

másrészt

$$r'_v(u; v) = (0; 0; 1).$$

Az első alapmennyiségek:

$$E = |r'_u(u; v)|^2 = \sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

$$F = r'_u(u; v) \cdot r'_v(u; v) = 0$$

$$G = |r'_v(u; v)|^2 = 1.$$

2.9.3. Definíció. Az előbbi jelölésekkel élve, az *első alapmennyiségek mátrixának* nevezzük az

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

mátrixot.

2.9.4. Tétel. Az első alapmennyiségekből képzett mátrix determinánsa pozitív.

2.9.5. Tétel. Egy T területtel rendelkező felületdarab felszíne kiszámolható az első alapmennyiségek segítségével az alábbi módon:

$$\iint_T \sqrt{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}}.$$

2.9.6. Definíció. Az $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ kétszer differenciálható felület *második alaplmenntiségei*:

$$L = r''_{uu}(u; v) \cdot n^*$$

$$M = r''_{uv}(u; v) \cdot n^*$$

$$N = r''_{vv}(u; v) \cdot n^*,$$

ahol n^* a felületi főnormális.

2.9.7. Definíció. Az előbbi jelöléseket megtartva, az

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

mátrixot a *második alaplmenntiségek mátrixának* nevezzük.

2.9.8. Példa. Az $r(u; v) = (\cos u; \sin u; v)$ felület esetén az u és v változó szerinti parciális deriváltfüggvények:

$$r'_u(u; v) = (-\sin u; \cos u; 0) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (0; 0; 1).$$

A felületi normális:

$$n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u; \sin u; 0).$$

Mivel $|n| = 1$, ezért $n = n^*$.

Az r másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$r''_{uu}(u; v) = (-\cos u; -\sin u; 0)$$

$$r''_{uv}(u; v) = (0; 0; 0)$$

$$r''_{vv}(u; v) = (0; 0; 0).$$

A második alaplmenntiségek:

$$L = r''_{uu}(u; v) \cdot n^* = -\cos^2 u - \sin^2 u = -1$$

$$M = r''_{uv}(u; v) \cdot n^* = 0$$

$$N = r''_{vv}(u; v) \cdot n^* = 0.$$

2.9.9. Definíció. Kétszer differenciálható felület *Gauss-görbülete* vagy *szorzatgörbülete* a második alaplmenntiségek mátrixa determinánsának és az első

alpmennyiségek determinánsa mátrixának hányadosa, vagyis

$$K = \frac{\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = \frac{L \cdot N - M^2}{E \cdot G - F^2}.$$

2.9.10. Tétel. A síkok Gauss-görbülete nulla.

Bizonyítás: Legyenek $a = (a_1; a_2; a_3)$ és $b = (b_1; b_2; b_3)$ lineárisan független vektorok! Ekkor az $(x_0; y_0; z_0)$ ponton áthaladó, a és b vektorok által kifeszített sík paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} x_0 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1 \\ y_0 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2 \\ z_0 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3 \end{pmatrix}.$$

Az u és v változó szerinti parciális deriváltfüggvények:

$$r'_u(u; v) = (a_1; a_2; a_3) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (b_1; b_2; b_3).$$

Az első alpmennyiségek:

$$E = r'_u(u; v) \cdot r'_u(u; v) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$F = r'_u(u; v) \cdot r'_v(u; v) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$G = r'_v(u; v) \cdot r'_v(u; v) = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2.$$

A felületi normális:

$$\begin{aligned} n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= (a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3; -a_1 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_1; a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1). \end{aligned}$$

Az r másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$r''_{uu}(u; v) = (0; 0; 0)$$

$$r''_{uv}(u; v) = (0; 0; 0)$$

$$r''_{vv}(u; v) = (0; 0; 0).$$

A második alapmennyiségek:

$$L = 0$$

$$M = 0$$

$$N = 0.$$

A Gauss-görbület:

$$K = \frac{\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = 0.$$

Ezzel megkaptuk, hogy a sík Gauss-görbülete valóban nulla. ■

2.9.11. Tétel. Az R sugarú gömb Gauss-görbülete: $\frac{1}{R^2}$.

2.9.12. Tétel. (Theorema egregium)

A Gauss-görbület csak az első alapmennyiségektől függ, vagyis a második alapmennyiségek kifejezhetők az első alapmennyiségek segítségével.

2.9.13. Definíció. Egy felületi pont *elliptikus*, ha a Gauss-görbület az adott pontban pozitív.

Egy felületi pont *parabolikus*, ha a Gauss-görbület az adott pontban nulla.

Egy felületi pont *hiperbolikus*, ha a Gauss-görbület az adott pontban negatív.

2.9.14. Tétel. Két felület között csak akkor létezik távolságtartó leképezés, ha a két felület Gauss-görbülete pontonként megegyezik.

2.9.15. Következmény. Kiterítésnél az egyik felület a sík, melynek a Gauss-görbülete nulla, ezért a „síkbba fejthető felületek” a minden pontban parabolikus felületek.

2.9.16. Megjegyzés. A gömb konstans pozitív Gauss-görbületű felület, míg a sík Gauss-görbülete minden pontban zérus. Így a két felület nem képezhető le egymásra távolságtartó módon (izometrikusan), azaz nem készíthető távolságtartó (léptéktartó) térkép a Földről. Készíthető viszont szögtartó térkép, melyet a légi és vízi közlekedésben használnak.

Kidolgozott feladatok**204. Feladat.** Tekintsük az

$$r(u; v) = (u; v; u \cdot v)$$

felületet!

- Adjuk meg az r'_u és r'_v deriváltfüggvényeket!
- Adjuk meg az r''_{uu} , r''_{uv} és r''_{vv} másodrendű deriváltfüggvényét!
- Számoljuk ki az első alapmennyiségeket!
- Adjuk meg a felületi főnormálist!
- Számoljuk ki a második alapmennyiségeket!
- Határozzuk meg a Gauss-görbületet!

Megoldás:a) Az u és v változó szerinti parciális deriváltfüggvények:

$$r'_u(u; v) = (1; 0; v)$$

$$r'_v(u; v) = (0; 1; u).$$

b) Az r másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$r''_{uu}(u; v) = (0; 0; 0)$$

$$r''_{uv}(u; v) = (0; 0; 1)$$

$$r''_{vv}(u; v) = (0; 0; 0).$$

c) Az első alapmennyiségek:

$$E = r'_u(u; v) \cdot r'_u(u; v) = 1 + v^2$$

$$F = r'_u(u; v) \cdot r'_v(u; v) = u \cdot v$$

$$G = r'_v(u; v) \cdot r'_v(u; v) = 1 + u^2.$$

d) A felületi normális:

$$n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = (-v; -u; 1).$$

A felületi normális hossza:

$$|n| = \sqrt{v^2 + u^2 + 1}.$$

A felületi főnormális:

$$n^* = \frac{n}{|n|} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + u^2 + 1}} \cdot (-v; -u; 1).$$

e) Az L alapmennyiség:

$$L = r''_{uu}(u; v) \cdot n^* = 0.$$

Az M alapmennyiség:

$$M = r''_{uv}(u; v) \cdot n^* = \frac{1}{\sqrt{v^2 + u^2 + 1}}.$$

Az N alapmennyiség:

$$N = r''_{vv}(u; v) \cdot n^* = 0.$$

f) Mivel

$$\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{v^2+u^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{v^2+u^2+1}} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v^2 + u^2 + 1}$$

és

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 + v^2 & u \cdot v \\ u \cdot v & 1 + u^2 \end{pmatrix} = \\ &= (1 + u^2) \cdot (1 + v^2) - u^2 \cdot v^2 = \\ &= 1 + u^2 + v^2 + u^2 \cdot v^2 - u^2 \cdot v^2 = \\ &= 1 + u^2 + v^2, \end{aligned}$$

ezért a Gauss-görbület:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = -\frac{1}{(v^2 + u^2 + 1) \cdot (1 + u^2 + v^2)} = \\ &= -\frac{1}{(1 + u^2 + v^2)^2}. \end{aligned}$$

2.10. Néhány nevezetes felület

2.10.1. Példa. Legyenek $a = (a_1; a_2; a_3)$ és $b = (b_1; b_2; b_3)$ lineárisan független vektorok! Ekkor az $(x_0; y_0; z_0)$ ponton áthaladó, a és b vektorok által kifeszített sík paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} x_0 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1 \\ y_0 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2 \\ z_0 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3 \end{pmatrix}.$$

Az implicit egyenlet:

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0,$$

ahol $n = a \times b$.

2.10.2. Példa. Az origó középpontú, R sugarú gömb paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} R \cdot \sin u \cdot \cos v \\ R \cdot \sin u \cdot \sin v \\ R \cdot \cos u \end{pmatrix} \quad (0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi).$$

Az implicit egyenlet:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

2.10.3. Példa. Az $(x_0; y_0; z_0)$ középpontú, R sugarú gömb paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} x_0 + R \cdot \sin u \cdot \cos v \\ y_0 + R \cdot \sin u \cdot \sin v \\ z_0 + R \cdot \cos u \end{pmatrix} \quad (0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi).$$

Az implicit egyenlet:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

2.10.4. Példa. Az origó középpontú ellipszoid vagy más szóval szferoid paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} a \cdot \sin u \cdot \cos v \\ b \cdot \sin u \cdot \sin v \\ c \cdot \cos u \end{pmatrix} \quad (0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi).$$

Az implicit egyenlet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ha a , b és c közül kettő egyenlő, akkor az ellipszoidot *szferoid*nak nevezzük. Az ellipszoid alakjától függően beszélhetünk *lapos*, vagy *lencseszferoid*ról, illetve *hosszúkás*, vagy *orsószferoid*ról.

Megjegyezzük, hogy az ellipszoidok síkmetszetei ellipszisek vagy körök.

A Föld esetében a Föld matematikai alakját, az úgynevezett geoidot globálisan jól lehet közelíteni egy szferoiddal, az eltérés a legjobban illeszkedő szferoid és a geoid között nem haladja meg a 150 métert.

2.10.5. Példa. Az $(x_0; y_0; z_0)$ középpontú *ellipszoid* vagy más szóval *szferoid* paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} x_0 + a \cdot \sin u \cdot \cos v \\ y_0 + b \cdot \sin u \cdot \sin v \\ z_0 + c \cdot \cos u \end{pmatrix} \quad (0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi).$$

Az implicit egyenlet:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Ha a , b és c közül kettő egyenlő, akkor az ellipszoidot *szferoid*nak nevezzük. Az ellipszoid alakjától függően beszélhetünk *lapos*, vagy *lencseszferoid*ról, illetve *hosszúkás*, vagy *orsószferoid*ról.

2.10.6. Példa. A *kúp* paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ A \cdot u \end{pmatrix}.$$

Az implicit egyenlet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

2.10.7. Példa. Az R sugarú *henger* paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos v \\ R \cdot \sin v \\ u \end{pmatrix} \quad (v \in [0; 2\pi], 0 \leq u \leq h).$$

Az implicit egyenlet:

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad 0 \leq z \leq h.$$

2.10.8. Példa. A *forgásparaboloid* paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = \left(u; v; \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right).$$

Az implicit egyenlet:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

2.10.9. Példa. A *hiperbolikus paraboloid* paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = (u; v; u \cdot v).$$

Az implicit egyenlet: $z = x \cdot y$.

2.10.10. Példa. Az *elliptikus paraboloid* paraméteres előállítás:

$$r(u; v) = \left(u; v; \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} \right).$$

Az implicit egyenlet:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Kidolgozott feladatok

205. Feladat. Tekintsük az

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} 1 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1 \\ 2 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2 \\ 3 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3 \end{pmatrix}$$

síkot!

- Írjuk fel a koordinátafüggvényeket!
- Adjuk meg a koordinátafüggvények elsőrendű parciális deriváltfüggvényeit és a felület elsőrendű deriváltfüggvényét!
- Adjuk meg a felület másodrendű deriváltfüggvényét!
- Számoljuk ki az első alapmennyiségeket!
- Adjuk meg a felületi főnormálist!
- Számoljuk ki a második alapmennyiségeket!
- Határozzuk meg a Gauss-görbületet!

Megoldás:

- a) A koordinátafüggvények:

$$x(u; v) = 1 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1$$

$$y(u; v) = 2 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2$$

$$z(u; v) = 3 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3.$$

- b) A koordinátafüggvények u változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_u(u; v) = a_1$$

$$y'_u(u; v) = a_2$$

$$z'_u(u; v) = a_3.$$

A koordinátafüggvények v változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_v(u; v) = b_1$$

$$y'_v(u; v) = b_2$$

$$z'_v(u; v) = b_3.$$

Az u és v változó szerinti parciális deriváltfüggvények:

$$r'_u(u; v) = (a_1; a_2; a_3) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (b_1; b_2; b_3).$$

c) Az r másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$r''_{uu}(u; v) = (0; 0; 0)$$

$$r''_{uv}(u; v) = (0; 0; 0)$$

$$r''_{vv}(u; v) = (0; 0; 0).$$

d) Az első alaplmenyiségek:

$$E = r'_u(u; v) \cdot r'_u(u; v) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$F = r'_u(u; v) \cdot r'_v(u; v) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$G = r'_v(u; v) \cdot r'_v(u; v) = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2.$$

e) A felületi normális:

$$n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3; -a_1 \cdot b_3 + a_3 \cdot b_1; a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1).$$

f) A második alaplmenyiségek:

$$L = 0$$

$$M = 0$$

$$N = 0.$$

g) A Gauss-görcbület:

$$K = \frac{\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = 0.$$

206. Feladat. Tekintsük az

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ A \cdot u \end{pmatrix}$$

kúpot!

- Adjuk meg a felület elsőrendű deriváltfüggvényét!
- Adjuk meg a felület másodrendű deriváltfüggvényét!
- Számoljuk ki az első alapmennyiségeket!
- Adjuk meg a felületi főnormálist!
- Számoljuk ki a második alapmennyiségeket!
- Határozzuk meg a Gauss-görbületet!

Megoldás:

- a) Az u és v változó szerinti parciális deriváltfüggvények:

$$\begin{aligned} r'_u(u; v) &= (\cos v; \sin v; A) \\ r'_v(u; v) &= (-u \cdot \sin v; u \cdot \cos v; 0). \end{aligned}$$

- b) Az r másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$\begin{aligned} r''_{uu}(u; v) &= (0; 0; 0) \\ r''_{uv}(u; v) &= (-\sin v; \cos v; 0) \\ r''_{vv}(u; v) &= (-u \cdot \cos v; -u \cdot \sin v; 0). \end{aligned}$$

- c) Az első alapmennyiségek:

$$\begin{aligned} E &= r'_u(u; v) \cdot r'_u(u; v) = 1 + A^2 \\ F &= r'_u(u; v) \cdot r'_v(u; v) = -u \cdot \sin v \cdot \cos v + u \cdot \sin v \cdot \cos v = 0 \\ G &= r'_v(u; v) \cdot r'_v(u; v) = u^2. \end{aligned}$$

- d) A felületi normális:

$$\begin{aligned} n &= r'_u(u; v) \times r'_v(u; v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & A \\ -u \cdot \sin v & u \cdot \cos v & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (-A \cdot u \cdot \cos v; -A \cdot u \cdot \sin v; u \cdot \cos^2 v + u \cdot \sin^2 v) = \\ &= (-A \cdot u \cdot \cos v; -A \cdot u \cdot \sin v; u). \end{aligned}$$

A felületi normális hossza:

$$\begin{aligned} |n| &= \sqrt{A^2 \cdot u^2 \cdot \cos^2 v + A^2 \cdot u^2 \cdot \sin^2 v + u^2} = \\ &= \sqrt{A^2 \cdot u^2 \cdot (\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2} = \sqrt{A^2 \cdot u^2 + u^2} = \\ &= \sqrt{u^2 \cdot (A^2 + 1)} = u \cdot \sqrt{A^2 + 1}. \end{aligned}$$

A felületi főnormális:

$$\begin{aligned} n^* &= \frac{n}{|n|} = \left(-\frac{A \cdot \cos v}{\sqrt{A^2 + 1}}; -\frac{A \cdot \sin v}{\sqrt{A^2 + 1}}; \frac{1}{\sqrt{A^2 + 1}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + 1}} \cdot (-A \cdot \cos v; -A \cdot \sin v; 1). \end{aligned}$$

e) Az L alaplmenység:

$$L = r''_{uu}(u; v) \cdot n^* = 0.$$

Az M alaplmenység:

$$\begin{aligned} M &= r''_{uv}(u; v) \cdot n^* = \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + 1}} \cdot (-A \cdot u \cdot \cos v \cdot \sin v + A \cdot u \cdot \sin v \cdot \cos v) = 0. \end{aligned}$$

Az N alaplmenység:

$$\begin{aligned} N &= r''_{vv}(u; v) \cdot n^* = \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + 1}} \cdot (u \cdot A \cdot \cos^2 v + u \cdot A \cdot \sin^2 v) = \\ &= \frac{A \cdot u}{\sqrt{A^2 + 1}}. \end{aligned}$$

f) Mivel

$$\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{A \cdot u}{\sqrt{A^2 + 1}} \end{pmatrix} = 0$$

és

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 + A^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} = u^2 \cdot (1 + A^2),$$

ezért a Gauss-görbület:

$$K = \frac{\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = 0.$$

207. Feladat. Tekintsük az

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos v \\ R \cdot \sin v \\ u \end{pmatrix}$$

hengert!

- Adjuk meg a felület elsőrendű deriváltfüggvényét!
- Adjuk meg a felület másodrendű deriváltfüggvényét!
- Számoljuk ki az első alapmennyiségeket!
- Adjuk meg a felületi főnormálist!
- Számoljuk ki a második alapmennyiségeket!
- Határozzuk meg a Gauss-görbületet!

Megoldás:

- a) Az u és v változó szerinti parciális deriváltfüggvények:

$$r'_u(u; v) = (0; 0; 1)$$

$$r'_v(u; v) = (-R \cdot \sin v; R \cdot \cos v; 0).$$

- b) Az r másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$r''_{uu}(u; v) = (0; 0; 0)$$

$$r''_{uv}(u; v) = (0; 0; 0)$$

$$r''_{vv}(u; v) = (-R \cdot \cos v; -R \cdot \sin v; 0).$$

- c) Az első alapmennyiségek:

$$E = r'_u(u; v) \cdot r'_u(u; v) = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$$

$$F = r'_u(u; v) \cdot r'_v(u; v) = -R \cdot 0 \cdot \sin v + 0 \cdot R \cdot \cos v + 1 \cdot 0 = 0$$

$$G = r'_v(u; v) \cdot r'_v(u; v) = R^2 \cdot \sin^2 v + R^2 \cdot \cos^2 v = R^2.$$

d) A felületi normális:

$$n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -R \cdot \sin v & R \cdot \cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-R \cdot \cos v; -R \cdot \sin v; 0).$$

A felületi normális hossza:

$$|n| = \sqrt{R^2 \cdot \cos^2 v + R^2 \cdot \sin^2 v} = R.$$

A felületi főnormális:

$$n^* = \frac{n}{|n|} = (-\cos v; -\sin v; 0).$$

e) Az L alapmennyiség:

$$L = r''_{uu}(u; v) \cdot n^* = 0.$$

Az M alapmennyiség:

$$M = r''_{uv}(u; v) \cdot n^* = 0.$$

Az N alapmennyiség:

$$N = r''_{vv}(u; v) \cdot n^* = R \cdot \cos^2 v + R \cdot \sin^2 v = R.$$

f) Mivel

$$\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = 0$$

és

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} = R^2,$$

ezért a Gauss-görcbület:

$$K = \frac{\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = 0.$$

208. Feladat. Határozzuk meg az $(a; 0; 0)$ középpontú, b sugarú kör y tengely körüli megforgatásával keletkezett felület paraméteres előállítását!

Megoldás:

Az $(a; 0; 0)$ középpontú xy síkban fekvő, b sugarú kör paraméteres előállítás:

$$r(u) = (a + b \cdot \cos u; b \cdot \sin u; 0).$$

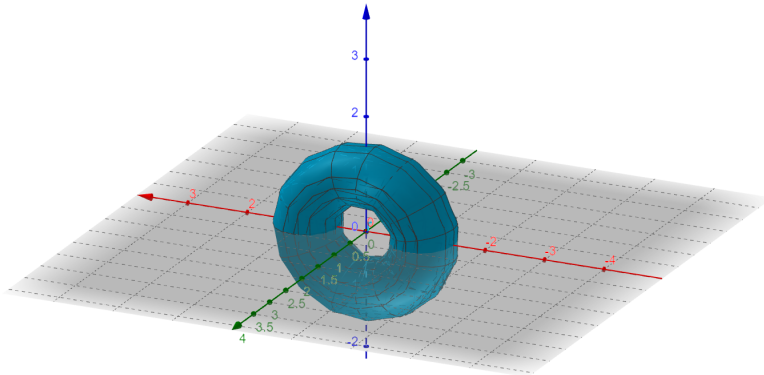
Az y tengely körüli forgatás mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \cos v & 0 & \sin v \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin v & 0 & \cos v \end{pmatrix},$$

ezért a felület paraméteres előállítás:

$$\begin{pmatrix} \cos v & 0 & \sin v \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin v & 0 & \cos v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + b \cdot \cos u \\ b \cdot \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + b \cdot \cos u) \cdot \cos v \\ b \cdot \sin u \\ -(a + b \cdot \cos u) \cdot \sin v \end{pmatrix}.$$

Megjegyezzük, hogy a kapott alakzatot *tórusznak* nevezzük.



2.11. Összefoglaló feladatok a második fejezethez

209. Feladat. Adjuk meg annak a körnek a paraméteres előállítását, amely áthalad az origón és a középpontja a $K = (3; 4)$ pont!

Megoldás:

A kör egyenlete:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = R^2.$$

Mivel a kör áthalad az origón, ezért

$$(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad R = 5.$$

Tehát a kör egyenlete:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Az $(x_0; y_0)$ középpontú, R sugarú kör paraméteres előállítása:

$$r(t) = (x_0 + R \cdot \cos t; y_0 + R \cdot \sin t) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

Mivel $(x_0; y_0) = (3; 4)$ és $R = 5$, ezért a paraméteres előállítás:

$$r(t) = (3 + 5 \cdot \cos t; 4 + 5 \cdot \sin t) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

210. Feladat. Legyen $t \in [0; 2\pi]$. Adjuk meg az $r(t) = (2 + \cos t; 3 + \sin t)$ síkgörbét implicit alakban!

Megoldás:

A síkgörbe grafikonja egy körvonal, melynek a középpontja $(2; 3)$, sugara 1 egység, így az implicit egyenlet:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1.$$

211. Feladat. Adjuk meg az

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$$

ellipszis paraméteres előállítását!

Megoldás:

Mivel az általános alakban

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ezért jelen esetben $a = 5$ és $b = 7$.

A paraméteres előállítás:

$$r(t) = (a \cdot \cos t; b \cdot \sin t) = (5 \cos t; 7 \sin t) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

Az ellipszis területe:

$$T = a \cdot b \cdot \pi = 5 \cdot 7 \cdot \pi = 35\pi.$$

212. Feladat. Legyen $t \in [-2; 3]$! Adjuk meg $y = f(x)$ alakban az

$$r(t) = (t + 1; t^2 + 3)$$

függvényt!

Megoldás:

Mivel a koordinátafüggvények $x(t) = t + 1$ és $y(t) = t^2 + 3$, ezért az első összefüggésből a t paraméter kifejezve $t = x - 1$ adódik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$y = (x - 1)^2 + 3 = x^2 - 2x + 4 \quad x \in [-1; 4].$$

213. Feladat. Tekintsük az $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 8$ implicit egyenlettel megadott síkgörbét!

- Mutassuk meg, hogy a síkgörbe grafikonja egy körvonal!
- Adjuk meg a kör középpontját és sugarát!
- Határozzuk meg a síkgörbe görbületét!
- Írjuk fel a síkgörbe paraméteres előállítását!
- Adjuk meg a síkgörbe által határolt zárt síkidom területét!

Megoldás:

- Mivel az egyenlet átalakítható úgy, hogy

$$(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 49,$$

ezért az alakzat valóban egy körvonal.

- A kör középpontja $(5; -4)$, sugara 7.
- Egy kör görbülete a kör sugarának reciproka, így a görbület:

$$\kappa = \frac{1}{7}.$$

- A síkgörbe egy lehetséges paraméteres előállítása:

$$r(t) = (5 + 7 \cos t; -4 + 7 \sin t) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

- A síkgörbe által határolt zárt síkidom területe: 49π .

214. Feladat. Tekintsük a $t \mapsto r(t) = (x(t); y(t); z(t))$ térgörbét, ahol

$$r(t) = (\cos(t^2 + 2t); \operatorname{tg}^3 t; \sqrt{t + 1})$$

és tekintsük a $t_0 = 0$ paraméterű pontot!

- Adjuk meg a térgörbe koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a koordinátafüggvények deriváltfüggvényeit a t_0 helyen!
- Adjuk meg az $r'(t_0)$ értéket!

Megoldás:

a) A koordinátafüggvények:

$$x(t) = \cos(t^2 + 2t)$$

$$y(t) = \operatorname{tg}^3 t$$

$$z(t) = \sqrt{t + 1}.$$

b) A $t \mapsto x(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye:

$$x'(t) = -(2t + 2) \cdot \sin(t^2 + 2t).$$

A $t \mapsto y(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye:

$$y'(t) = 3 \operatorname{tg}^2 t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{3 \operatorname{tg}^2 t}{\cos^2 t}.$$

A $t \mapsto z(t)$ koordinátafüggvény deriváltfüggvénye:

$$z'(t) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{t + 1}}.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei a $t_0 = 0$ paraméterű helyen:

$$x'(t_0) = -2 \cdot \sin 0 = 0$$

$$y'(t_0) = \frac{3 \operatorname{tg}^2 0}{\cos^2 0} = 0$$

$$z'(t_0) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{0 + 1}} = \frac{1}{2}.$$

c) A $t \mapsto r'(t)$ függvény helyettesítési értéke a $t_0 = 0$ helyen:

$$r'(t_0) = \left(0; 0; \frac{1}{2} \right).$$

215. Feladat. Tekintsük az $r(u; v) = (\sin u; \cos v; v)$ felületet!

- a) Számoljuk ki a függvényértéket az $(u_0; v_0) = (0; 0)$ helyen!
 b) Adjuk meg a felület koordinátafüggvényeit!
 c) Adjuk meg a felület koordinátafüggvényeinek parciális deriváltfüggvényeit!
 d) Határozzuk meg a felület deriváltfüggvényét!
 e) Határozzuk meg a felület deriváltfüggvényének az $(u_0; v_0) = (0; 0)$ helyen vett helyettesítési értékét!
 f) Adjuk meg az $(u_0; v_0) = (0; 0)$ helyen a felületi normálist!
 g) Írjuk fel az $(u_0; v_0) = (0; 0)$ helyen az érintősík egyenletét!
 h) Számoljuk ki az $r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor hosszát!

Megoldás:

- a) A függvényérték az $(u_0; v_0) = (0; 0)$ helyen:

$$r(u_0; v_0) = (\sin 0; \cos 0; 0) = (0; 1; 0).$$

- b) A felület koordinátafüggvényei:

$$x(u; v) = \sin u \quad \text{és} \quad y(u; v) = \cos v \quad \text{és} \quad z(u; v) = v.$$

- c) A koordinátafüggvények u változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_u(u; v) = \cos u \quad \text{és} \quad y'_u(u; v) = 0 \quad \text{és} \quad z'_u(u; v) = 0.$$

A koordinátafüggvények v változó szerinti parciális deriváltfüggvényei:

$$x'_v(u; v) = 0 \quad \text{és} \quad y'_v(u; v) = -\sin v \quad \text{és} \quad z'_v(u; v) = 1.$$

- d) A felület deriváltfüggvénye:

$$r'(u; v) = \begin{pmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & -\sin v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- e) A felület deriváltfüggvényének helyettesítési értéke az $(u_0; v_0) = (0; 0)$ helyen:

$$r'(u_0; v_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

f) A felületi normális:

$$n = r'_u(u_0; v_0) \times r'_v(u_0; v_0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0; -1; 0).$$

g) Az $(u_0; v_0) = (0; 0)$ helyen az érintősík egyenlete:

$$(0; -1; 0) \cdot ((x; y; z) - (0; 1; 0)) = 0,$$

vagyis

$$(0; -1; 0) \cdot (x; y - 1; z) = 0.$$

A skaláris szorzatot elvégezve azt kapjuk, hogy $-y + 1 = 0$, vagyis $y = 1$.

h) Mivel

$$\begin{aligned} r'_u(u; v) \times r'_v(u; v) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos u & 0 & 0 \\ 0 & -\sin v & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (0; -\cos u; -\cos u \cdot \sin v), \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned} |r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)| &= \sqrt{\cos^2 u + \cos^2 u \cdot \sin^2 v} = \\ &= \sqrt{\cos^2 u \cdot (1 + \sin^2 v)} = |\cos u| \cdot \sqrt{1 + \sin^2 v}. \end{aligned}$$

216. Feladat. Adjuk meg az

$$r(u; v) = \begin{pmatrix} 1 + 2u + 3v \\ 2 - 1u - 2v \\ 3 + 3u + 4v \end{pmatrix} \quad (u; v \in \mathbb{R})$$

sík egy pontját és a sík egy normálvektorát!

Megoldás:

A sík egy pontja: $(1; 2; 3)$.

A sík egy normálvektora az $a = (2; -1; 3)$ és a $b = (3; -2; 4)$ vektorok vektoriális szorzata:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = (2; 1; -1).$$

217. Feladat. Adjuk meg az $r(u; v) = (u^2; u \cdot v; u+v)$ felület Gauss-görcbületét az $(1; 2)$ paraméterű pontban!

Megoldás:

Az u és v változó szerinti parciális deriváltfüggvények:

$$r'_u(u; v) = (2u; v; 1) \quad \Rightarrow \quad r'_u(1; 2) = (2; 2; 1)$$

$$r'_v(u; v) = (0; u; 1) \quad \Rightarrow \quad r'_v(1; 2) = (0; 1; 1).$$

Az r másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$r''_{uu}(u; v) = (2; 0; 0) \quad \Rightarrow \quad r''_{uu}(1; 2) = (2; 0; 0)$$

$$r''_{uv}(u; v) = (0; 1; 0) \quad \Rightarrow \quad r''_{uv}(1; 2) = (0; 1; 0)$$

$$r''_{vv}(u; v) = (0; 0; 0) \quad \Rightarrow \quad r''_{vv}(1; 2) = (0; 0; 0).$$

Az első alaplmenyiség:

$$E = r'_u(1; 2) \cdot r'_u(1; 2) = 4 + 4 + 1 = 9$$

$$F = r'_u(1; 2) \cdot r'_v(1; 2) = 0 + 2 + 1 = 3$$

$$G = r'_v(1; 2) \cdot r'_v(1; 2) = 0 + 1 + 1 = 2.$$

A felületi normális:

$$n = r'_u(1; 2) \times r'_v(1; 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1; -2; 2).$$

A felületi normális hossza:

$$|n| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

A felületi főnormális:

$$n^* = \frac{n}{|n|} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

Az L alaplmenyiség:

$$L = r''_{uu}(1; 2) \cdot n^* = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Az M alaplmenyiség:

$$M = r''_{uv}(1; 2) \cdot n^* = -\frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{2}{3}.$$

Az N alaplennység:

$$N = r''_{vv}(1; 2) \cdot n^* = 0.$$

Mivel

$$\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{4}{9}$$

és

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 9,$$

ezért a Gauss-görbület:

$$K = \frac{\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = -\frac{\frac{4}{9}}{9} = -\frac{4}{81}.$$

Mivel a Gauss-görbület negatív, ezért a felületi pont hiperbolikus.

218. Feladat. Adjuk meg paraméteres alakban az

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$$

implicit egyenlettel definiált síkgörbét!

Megoldás:

Átalakítva az egyenletet azt kapjuk, hogy

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25,$$

ami a $(2; -3)$ középpontú, 5 sugarú körvonal egyenlete. Ennek egy paraméteres előállítás:

$$r(t) = (2 + 5 \cos t; -3 + 5 \sin t) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

219. Feladat. Adjuk meg az $r_1(t) = (t^2; 2t + 3)$ síkgörbe $t_0 = 1$ paraméterű pontjához tartozó és az $r_2(t) = \left(\frac{1}{t}; e^{t-1}\right)$ síkgörbe $t_0 = 1$ paraméterű pontjához tartozó érintőegyeneseinek metszéspontját!

Megoldás:

Mivel $r'_1(t) = (2t; 2)$, ezért $r'_1(t_0) = (2; 2)$. Másrészt $r_1(t_0) = (1; 5)$. Az érintőegyenes:

$$e_1(t) = (1; 5) + (2; 2) \cdot (t - 1) \quad \Rightarrow \quad e_1(t) = (2t - 1; 2t + 3).$$

Tehát $x = 2t - 1$ és $y = 2t + 3$. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$t = \frac{x + 1}{2}.$$

Ezt a második egyenletbe behelyettesítve

$$y = x + 1 + 3 = x + 4$$

adódik.

Mivel $r'_2(t) = (-\frac{1}{t^2}; e^t)$, ezért $r'_2(t_0) = (-1; 1)$. Másrészt $r_2(t_0) = (1; 1)$. Az érintőegyenes:

$$e_2(t) = (1; 1) + (-1; 1) \cdot (t - 1) \Rightarrow e_1(t) = (2 - t; t).$$

Tehát $x = 2 - t$ és $y = t$. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $t = 2 - x$.

Ezt a második egyenletbe behelyettesítve $y = 2 - x$ adódik.

Az $y = x + 4$ és $y = 2 - x$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása, így a keresett metszéspont: $(-1; 3)$.

220. Feladat. Adjuk meg az $r(u; v) = (u^2; u \cdot v; u + v)$ felület Gauss-görcsületét az $(1; 2)$ pontban!

Megoldás:

Az u és v változó szerinti parciális deriváltfüggvények:

$$r'_u(u; v) = (2u; v; 1) \Rightarrow r'_u(1; 2) = (2; 2; 1)$$

$$r'_v(u; v) = (0; u; 1) \Rightarrow r'_v(1; 2) = (0; 1; 1).$$

Az r másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$r''_{uu}(u; v) = (2; 0; 0) \Rightarrow r''_{uu}(1; 2) = (2; 0; 0)$$

$$r''_{uv}(u; v) = (0; 1; 0) \Rightarrow r''_{uv}(1; 2) = (0; 1; 0)$$

$$r''_{vv}(u; v) = (0; 0; 0) \Rightarrow r''_{vv}(1; 2) = (0; 0; 0).$$

Az első alaplennységek:

$$E = r'_u(1; 2) \cdot r'_u(1; 2) = 4 + 4 + 1 = 9$$

$$F = r'_u(1; 2) \cdot r'_v(1; 2) = 0 + 2 + 1 = 3$$

$$G = r'_v(1; 2) \cdot r'_v(1; 2) = 0 + 1 + 1 = 2.$$

A felületi normális:

$$n = r'_u(1; 2) \times r'_v(1; 2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1; -2; 2).$$

A felületi normális hossza:

$$|n| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

A felületi főnormális:

$$n^* = \frac{n}{|n|} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

Az L alapmennyiség:

$$L = r''_{uu}(1; 2) \cdot n^* = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Az M alapmennyiség:

$$M = r''_{uv}(1; 2) \cdot n^* = -\frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{2}{3}.$$

Az N alapmennyiség:

$$N = r''_{vv}(1; 2) \cdot n^* = 0.$$

Mivel

$$\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{4}{9}$$

és

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 9,$$

ezért a Gauss-görbület:

$$K = \frac{\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = -\frac{\frac{4}{9}}{9} = -\frac{4}{81}.$$

Mivel a Gauss-görbület negatív, ezért a felületi pont hiperbolikus.

221. Feladat. Határozzuk meg az $r(u; v) = (v^3; u^2; u + v)$ felület mely pontja vagy pontjai parabolikusak?

Megoldás:

Az u és v változó szerinti parciális deriváltfüggvények:

$$r'_u(u; v) = (0; 2u; 1)$$

$$r'_v(u; v) = (3v^2; 0; 1).$$

Az r másodrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$r''_{uu}(u; v) = (0; 2; 0)$$

$$r''_{uv}(u; v) = (0; 0; 0)$$

$$r''_{vv}(u; v) = (6v; 0; 0).$$

Az első alapmennyiségek:

$$E = r'_u(u; v) \cdot r'_u(u; v) = 1 + 4u^2$$

$$F = r'_u(u; v) \cdot r'_v(u; v) = 1$$

$$G = r'_v(u; v) \cdot r'_v(u; v) = 1 + 9v^4.$$

A felületi normális:

$$n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2u & 1 \\ 3v^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2u; 3v^2; -6uv^2).$$

A felületi normális hossza:

$$|n| = \sqrt{4u^2 + 9v^4 + 36u^2v^4}.$$

A felületi főnormális:

$$n^* = \frac{n}{|n|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2 + 9v^4 + 36u^2v^4}} \cdot (2u; 3v^2; -6uv^2).$$

Az L alapmennyiség:

$$L = r''_{uu}(u; v) \cdot n^* = \frac{6v^2}{\sqrt{4u^2 + 9v^4 + 36u^2v^4}}.$$

Az M alapmennyiség:

$$M = r''_{uv}(u; v) \cdot n^* = 0.$$

Az N alaplmenység:

$$N = r''_{uv}(u; v) \cdot n^* = \frac{12uv}{\sqrt{4u^2 + 9v^4 + 36u^2v^4}}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \frac{6v^2}{\sqrt{4u^2+9v^4+36u^2v^4}} & 0 \\ 0 & \frac{12uv}{\sqrt{4u^2+9v^4+36u^2v^4}} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{72uv^3}{4u^2 + 9v^4 + 36u^2v^4} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 4u^2 + 1 & 1 \\ 1 & 9v^4 + 1 \end{pmatrix} = (4u^2 + 1) \cdot (9v^4 + 1) - 1 = \\ &= 36u^2v^4 + 4u^2 + 9v^4, \end{aligned}$$

ezért a Gauss-görbület:

$$K = \frac{\det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = \frac{72uv^3}{(4u^2 + 9v^4 + 36u^2v^4)^2}.$$

A görbület pontosan akkor zérus, ha $72uv^3 = 0$, azaz ha $u = 0$ vagy $v = 0$.

222. Feladat. Adjuk meg az $f(x; y) = x \cdot y$ szélsőértékét az $r(t) = (2t; t + 1)$ görbe mentén!

Megoldás:

Mivel $x = 2t$ és $y = t + 1$, ezért az

$$f(2t; t + 1) = 2t \cdot (t + 1) = 2t^2 + 2t$$

függvény szélsőértékét keressük.

Mivel $f'(t) = 4t + 2$, amelynek zérushelye $t = -\frac{1}{2}$ és $f''(t) = 4 > 0$, ezért az f függvénynek a

$$\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right); -\frac{1}{2} + 1 \right) = \left(-1; \frac{1}{2} \right)$$

pontban van minimuma.

223. Feladat. Számoljuk ki az $r: [0; \ln 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $r(t) = (e^t; 1; 2)$ térgörbe ívhosszát!

Megoldás:

A koordinátafüggvények:

$$x(t) = e^t \quad \text{és} \quad y(t) = 1 \quad \text{és} \quad z(t) = 2.$$

A koordinátafüggvények deriváltfüggvényei:

$$x'(t) = e^t \quad \text{és} \quad y'(t) = 0 \quad \text{és} \quad z'(t) = 0.$$

Mivel

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 = e^t,$$

ezért az ívhossz:

$$L = \int_0^{\ln 2} e^t \, dt = \left[e^t \right]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1.$$

3. fejezet

Vektormezők

3.1. Vektormezők fogalma, deriváltja

3.1.1. Definíció. A $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ típusú függvényeket *vektormezők*nek nevezük.

3.1.2. Definíció. A

$$v(x; y; z) = \begin{pmatrix} v_1(x; y; z) \\ v_2(x; y; z) \\ v_3(x; y; z) \end{pmatrix}$$

vektormező *koordinátafüggvényei* a $v_1, v_2, v_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ háromváltozós, valós értékű függvények.

3.1.3. Definíció. Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmaz! A $v: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező *differenciálható* a $P \in D$ helyen, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}^3$ vektor, hogy

$$v(P) - v(P_0) = k \cdot (P - P_0) + h \cdot (P - P_0),$$

ahol

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{|h \cdot (P - P_0)|}{|P - P_0|} = 0.$$

3.1.4. Megjegyzés. Differenciálható vektormező deriváltfüggvénye egy 3×3 típusú mátrix, vagyis a

$$v(x; y; z) = \begin{pmatrix} v_1(x; y; z) \\ v_2(x; y; z) \\ v_3(x; y; z) \end{pmatrix}$$

vektormező deriváltfüggvénye:

$$v'(x; y; z) = \begin{pmatrix} (v_1)'_x & (v_1)'_y & (v_1)'_z \\ (v_2)'_x & (v_2)'_y & (v_2)'_z \\ (v_3)'_x & (v_3)'_y & (v_3)'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x v_1 & \partial_y v_1 & \partial_z v_1 \\ \partial_x v_2 & \partial_y v_2 & \partial_z v_2 \\ \partial_x v_3 & \partial_y v_3 & \partial_z v_3 \end{pmatrix}.$$

3.1.5. Példa. A

$$v(x; y; z) = \begin{pmatrix} x^2 y \\ x + 2y \\ \sin z \end{pmatrix}$$

vektormező deriváltfüggvénye:

$$v'(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cos z \end{pmatrix}.$$

Kidolgozott feladatok**224. Feladat.** Adjuk meg a

$$v(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 \\ x \cdot \cos y \\ x + y + z^2 \end{pmatrix}$$

vektormező deriváltfüggvényét, majd a deriváltját a $P = (1; 0; 1)$ helyen!**Megoldás:**

A deriváltmátrix:

$$v'(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y & 0 \\ \cos y & -x \cdot \sin y & 0 \\ 1 & 1 & 2z \end{pmatrix}.$$

A deriváltmátrix a $P = (1; 0; 1)$ helyen:

$$v'(1; 0; 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

225. Feladat. Tekintsük a

$$v(x; y; z) = \begin{pmatrix} x^2 + e^{4y} \\ xyz + \frac{1}{x^2} \\ \sin(4y) \end{pmatrix}$$

vektormezőt és a $P = (1; 0; 2)$ pontot!

- Határozzuk meg a v vektormező deriváltmátrixát!
- Adjuk meg a v vektormező deriváltmátrixának értékét a P pontban!
- Számoljuk ki a v vektormező P pontbeli deriváltmátrixának determinánsát!
- Invertálható-e a v vektormező P pontbeli deriváltmátrixa?
- Adjuk meg a v vektormező P pontbeli deriváltmátrixának transzponáltját!

Megoldás:

a) A v vektormező deriváltmátrixa:

$$v'(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2x & e^{4y} \cdot 4 & 0 \\ yz - \frac{2}{x^3} & xz & xy \\ 0 & 4 \cos(4y) & 0 \end{pmatrix}.$$

b) A v vektormező deriváltmátrixának értéke a $P = (1; 0; 2)$ pontban:

$$v'(P) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) Mivel a mátrixnak van egy olyan oszlopa, amelynek minden eleme nulla, ezért a determináns értéke nulla!
- d) A mátrix nem invertálható, mert a determinánsa nulla.
- e) A mátrix transzponáltja:

$$(v'(P))^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2. Vektormezők divergenciája és rotációja

3.2.1. Definíció. A $v(x; y; z) = (v_1(x; y; z); v_2(x; y; z); v_3(x; y; z))$ vektormező *divergenciája* a P pontban:

$$\operatorname{div} v(P) = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3.$$

3.2.2. Megjegyzés. Vektormező divergenciája a deriváltmátrixának nyoma, azaz a főátlóbeli elemeinek összege.

3.2.3. Példa. A $v(x; y; z) = (x; y \cdot z; z^2)$ vektormező esetén

$$\operatorname{div} v(x; y; z) = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3 = 1 + z + 2z = 1 + 3z.$$

3.2.4. Definíció. Egy vektormező *forrásmentes*, ha a divergenciája zérus.

3.2.5. Megjegyzés. Az áramlástanban a divergencia azt mutatja meg, hogy egy kis térfogatból mennyi folyadék áramlik ki. Ha a térfogatban folyadékforrás van, akkor a divergencia pozitív, ha nyelő, akkor negatív, ha a folyadék csak keresztüláramlik a vizsgált térfogatrészen, akkor a divergencia nulla. Mindezek miatt a divergenciát forráserősségnek is nevezhetjük.

3.2.6. Definíció. A $v(x; y; z) = (v_1(x; y; z); v_2(x; y; z); v_3(x; y; z))$ vektormező *rotációja* a P pontban:

$$\operatorname{rot} v(P) = \begin{pmatrix} \partial_y v_3(P) - \partial_z v_2(P) \\ -\partial_x v_3(P) + \partial_z v_1(P) \\ \partial_x v_2(P) - \partial_y v_1(P) \end{pmatrix}.$$

3.2.7. Megjegyzés. A könnyebb megjegyezhetőség kedvéért formálisan a

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsát az első sora szerint kifejtve éppen a rotáció képletét kapjuk.

3.2.8. Példa. A $v(x; y; z) = (y; x; z^2)$ vektormező esetén

$$\operatorname{rot} v(x; y; z) = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ -\partial_x v_3 + \partial_z v_1 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = (0 - 0; -0 + 0; 1 - 1) = (0; 0; 0).$$

3.2.9. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy vektormező *örvénymentes*, ha a rotációja zérusvektor.

3.2.10. Megjegyzés. Ha egy vektormező deriváltmátrixa szimmetrikus, akkor a vektormező *örvénymentes*.

3.2.11. Megjegyzés. A rotáció az áramlástanban azt mutatja meg, hogyan *örvénylik* a folyadék egy kis térfogatban.

3.2.12. Megjegyzés. A divergencia és a rotáció formálisan kifejezhető az úgynevezett

$$\nabla = (\partial_x; \partial_y; \partial_z)$$

operátor segítségével:

$$\operatorname{div} v = \nabla \cdot v \quad \text{és} \quad \operatorname{rot} v = \nabla \times v.$$

Kidolgozott feladatok

226. Feladat. Tekintsük a

$$v(x; y; z) = \begin{pmatrix} x^2 + e^{2y} \\ xyz + \frac{1}{x} \\ \sin(2y) \end{pmatrix}$$

vektormezőt és a $P = (1; 0; 2)$ pontot!

- Határozzuk meg a v vektormező deriváltmátrixát!
- Adjuk meg a v vektormező deriváltmátrixának értékét a P pontban!
- Számoljuk ki a v vektormező P pontbeli deriváltmátrixának determinánsát!
- Határozzuk meg a v vektormező divergenciáját!
- Forrásmentes-e a vektormező?
- Határozzuk meg a v vektormező divergenciáját a P pontban!
- Határozzuk meg a v vektormező rotációját!
- Örvénymentes-e a vektormező?
- Határozzuk meg a v vektormező rotációját a P pontban!

Megoldás:

a) A v vektormező deriváltmátrixa:

$$v'(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2x & e^{2y} \cdot 2 & 0 \\ yz - \frac{1}{x^2} & xz & xy \\ 0 & 2 \cos(2y) & 0 \end{pmatrix}.$$

b) A v vektormező deriváltmátrixának értéke a $P = (1; 0; 2)$ pontban:

$$v'(P) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Mivel a mátrixnak van egy olyan oszlopa, amelynek minden eleme nulla, ezért a determináns értéke nulla!
- A v vektormező divergenciája:

$$\operatorname{div} v(x; y; z) = 2x + xz + 0 = 2x + xz.$$

e) Nem forrásmentes, mert a divergenciája nem nulla.

f) A v vektormező divergenciája a $P = (1; 0; 2)$ pontban:

$$\operatorname{div} v(P) = 2 + 2 = 4.$$

g) A v vektormező rotációja:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} v(x; y; z) &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ -\partial_x v_3 + \partial_z v_1 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cos(2y) - xy \\ -0 + 0 \\ yz - \frac{1}{x^2} - 2e^{2y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

h) Nem örvénymentes, mert a rotációja nem zérusvektor.

i) A vektormező rotációja a $P = (1; 0; 2)$ pontban:

$$\operatorname{rot} v(P) = (2; 0; -3).$$

3.3. Vektormezők potenciálfüggvénye

3.3.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a φ skalármező a v vektormező *potenciálfüggvénye* a $D \subset \mathbb{R}^3$ tartomány fölött, ha minden $(x; y; z) \in D$ esetén

$$v(x; y; z) = \text{grad } \varphi(x; y; z).$$

Amennyiben ilyen φ skalármező létezik, úgy azt mondjuk, hogy a vektormező *potenciálos* vagy más szóval *konzervatív*.

3.3.2. Tétel. A v vektormezőnek pontosan akkor létezik potenciálfüggvénye a D tartományon, ha örvénymentes, vagyis a D tartomány minden pontjában a vektormező rotációja zérusvektor.

3.3.3. Példa. A $v(x; y; z) = (x^2; y^2; z^2)$ vektormező koordinátafüggvényei:

$$v_1(x; y; z) = x^2$$

$$v_2(x; y; z) = y^2$$

$$v_3(x; y; z) = z^2.$$

A v vektormező rotációja:

$$\text{rot } v(x; y; z) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ -\partial_x v_3 + \partial_z v_1 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A vektormező örvénymentes, mert a rotációja zérusvektor, ezért létezik potenciálfüggvénye.

A potenciálfüggvény az a $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (skalármező), melyre

$$\text{grad } \varphi(x; y; z) = v(x; y; z),$$

ami azt jelenti, hogy

$$(\varphi'_x(x; y; z); \varphi'_y(x; y; z); \varphi'_z(x; y; z)) = (v_1(x; y; z); v_2(x; y; z); v_3(x; y; z))$$

teljesül, azaz

$$\varphi'_x(x; y; z) = v_1(x; y; z)$$

$$\varphi'_y(x; y; z) = v_2(x; y; z)$$

$$\varphi'_z(x; y; z) = v_3(x; y; z).$$

Behelyettesítve a koordinátafüggvényeket azt kapjuk, hogy

$$\varphi'_x(x; y; z) = x^2$$

$$\varphi'_y(x; y; z) = y^2$$

$$\varphi'_z(x; y; z) = z^2.$$

Mivel $\varphi'_x(x; y; z) = x^2$, ezért

$$\varphi(x; y; z) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c(y; z).$$

A kapott függvényt az y változó szerint deriválva

$$\varphi'_y(x; y; z) = c'_y(y; z)$$

adódik. Ugyanakkor tudjuk, hogy $\varphi'_y(x; y; z) = y^2$, ezért

$$y^2 = c'_y(y; z) \Rightarrow c(y; z) = \frac{y^3}{3} + c(z),$$

így

$$\varphi(x; y; z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + c(z).$$

A kapott függvényt a z változó szerint deriválva

$$\varphi'_z(x; y; z) = c'(z)$$

adódik. Ugyanakkor tudjuk, hogy $\varphi'_z(x; y; z) = z^2$, ezért

$$c'(z) = z^2 \Rightarrow c(z) = \frac{z^3}{3} + c.$$

Tehát a potenciálfüggvény:

$$\varphi(x; y; z) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^3}{3} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

Kidolgozott feladatok

227. Feladat. Tekintsük a $v(x; y; z) = (2xy - z; x^2 + z; y - x)$ vektormezőt!

- Adjuk meg a vektormező koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a rotációt!
- Örvénymentes-e a vektormező?
- Létezik-e a v vektormezőnek potenciálfüggvénye?
- Ha létezik potenciálfüggvény, adjuk meg a potenciálfüggvényt!

Megoldás:

- a) A vektormező koordinátafüggvényei:

$$v_1(x; y; z) = 2xy - z$$

$$v_2(x; y; z) = x^2 + z$$

$$v_3(x; y; z) = y - x.$$

- b) A v vektormező rotációja:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} v(x; y; z) &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ -\partial_x v_3 + \partial_z v_1 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 - 1 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Örvénymentes, mert a rotációja zérusvektor.
- Létezik potenciálfüggvény, mert örvénymentes.
- A potenciálfüggvény az a $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (skalármező), melyre

$$\operatorname{grad} \varphi(x; y; z) = v(x; y; z)$$

teljesül, azaz

$$\varphi'_x(x; y; z) = v_1(x; y; z)$$

$$\varphi'_y(x; y; z) = v_2(x; y; z)$$

$$\varphi'_z(x; y; z) = v_3(x; y; z).$$

Behelyettesítve a koordinátafüggvényeket azt kapjuk, hogy

$$\varphi'_x(x; y; z) = 2xy - z$$

$$\varphi'_y(x; y; z) = x^2 + z$$

$$\varphi'_z(x; y; z) = y - x.$$

Mivel $\varphi'_x(x; y; z) = 2xy - z$, ezért

$$\varphi(x; y; z) = \int 2xy - z \, dx = x^2y - xz + c(y; z).$$

A kapott függvényt az y változó szerint deriválva

$$\varphi'_y(x; y; z) = x^2 + c'_y(y; z)$$

adódik. Ugyanakkor tudjuk, hogy $\varphi'_y(x; y; z) = x^2 + z$, ezért

$$x^2 + z = x^2 + c'_y(y; z) \Rightarrow c'_y(y; z) = z,$$

így

$$c(y; z) = \int z \, dy = yz + c(z).$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\varphi(x; y; z) = x^2y - xz + yz + c(z).$$

A kapott függvényt a z változó szerint deriválva

$$\varphi'_z(x; y; z) = -x + y + c'(z)$$

adódik. Ugyanakkor tudjuk, hogy $\varphi'_z(x; y; z) = y - x$, ezért

$$-x + y + c'(z) = y - x \Rightarrow c'(z) = 0 \Rightarrow c(z) = c.$$

Tehát a potenciálfüggvény:

$$\varphi(x; y; z) = x^2y - xz + yz + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

228. Feladat. Tekintsük a $v(x; y; z) = (3x^2y - 2yz^3; x^3 - 2xz^3; -6xyz^2)$ vektormezőt!

- Adjuk meg a vektormező koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a rotációt!
- Örvénymentes-e a vektormező?
- Létezik-e a v vektormezőnek potenciálfüggvénye?
- Ha létezik potenciálfüggvény, adjuk meg a potenciálfüggvényt!

Megoldás:

a) A vektormező koordinátafüggvényei:

$$v_1(x; y; z) = 3x^2y - 2yz^3$$

$$v_2(x; y; z) = x^3 - 2xz^3$$

$$v_3(x; y; z) = -6xyz^2.$$

b) A v vektormező rotációja:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} v(x; y; z) &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ -\partial_x v_3 + \partial_z v_1 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -6xz^2 + 6xz^2 \\ 6yz^2 - 6yz^2 \\ 3x^2 - 2z^3 - 3x^2 + 2z^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Örvénymentes, mert a rotációja zérusvektor.

d) Létezik potenciálfüggvény, mert örvénymentes.

e) A potenciálfüggvény az a $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (skalármező), melyre

$$\operatorname{grad} \varphi(x; y; z) = v(x; y; z)$$

teljesül, azaz

$$\varphi'_x(x; y; z) = v_1(x; y; z)$$

$$\varphi'_y(x; y; z) = v_2(x; y; z)$$

$$\varphi'_z(x; y; z) = v_3(x; y; z).$$

Behelyettesítve a koordinátafüggvényeket azt kapjuk, hogy

$$\varphi'_x(x; y; z) = 3x^2y - 2yz^3$$

$$\varphi'_y(x; y; z) = x^3 - 2xz^3$$

$$\varphi'_z(x; y; z) = -6xyz^2.$$

Mivel $\varphi'_x(x; y; z) = 3x^2y - 2yz^3$, ezért

$$\varphi(x; y; z) = \int 3x^2y - 2yz^3 dx = x^3y - 2xyz^3 + c(y; z).$$

A kapott függvényt az y változó szerint deriválva

$$\varphi'_y(x; y; z) = x^3 - 2xz^3 + c'_y(y; z)$$

adódik. Ugyanakkor tudjuk, hogy $\varphi'_y(x; y; z) = x^3 - 2xz^3$, ezért

$$x^3 - 2xz^3 = x^3 - 2xz^3 + c'_y(y; z) \Rightarrow c'_y(y; z) = 0,$$

így

$$c(y; z) = \int 0 \, dy = c(z).$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\varphi(x; y; z) = x^3y - 2xyz^3 + c(z).$$

A kapott függvényt a z változó szerint deriválva

$$\varphi'_z(x; y; z) = -6xyz^2 + c'(z)$$

adódik. Ugyanakkor tudjuk, hogy $\varphi'_z(x; y; z) = -6xyz^2$, ezért

$$-6xyz^2 + c'(z) = -6xyz^2 \Rightarrow c'(z) = 0 \Rightarrow c(z) = c.$$

Tehát a potenciálfüggvény:

$$\varphi(x; y; z) = x^3y - 2xyz^3 + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

3.4. Vektormezők görbementi integrálja

3.4.1. Definíció. Tegyük fel, hogy a γ görbe paraméteres alakja $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ekkor a $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező görbementi integrálja a γ görbe $[a; b]$ intervallumhoz tartozó szakasza mentén:

$$\int_{\gamma} v = \int_a^b v(r(t)) \cdot r'(t) dt.$$

Ha a γ görbe zárt, akkor a vektormező γ görbe mentén számolt görbementi integráljának értékét *cirkulációnak* nevezzük.

3.4.2. Megjegyzés. A görbementi integrál kiszámolásának lépései:

1. Paraméterezzük a γ görbét!
2. Számoljuk ki $t \mapsto r(t)$ görbe $r'(t)$ deriváltfüggvényét!
3. Adjuk meg a $v(r(t))$ összetett függvényt!
4. Határozzuk meg a $v(r(t)) \cdot r'(t)$ skaláris szorzatot!
5. Számoljuk ki az $\int_a^b v(r(t)) \cdot r'(t) dt$ egyváltozós Riemann-integrált!

3.4.3. Példa. Tekintsük az $r(t) = (1; t; t^2)$ görbét a $t \in [0; 1]$ intervallumon és a $v(x; y; z) = (xy; z^2; y)$ vektormezőt! Ekkor az r térgörbe deriváltfüggvénye:

$$r'(t) = (0; 1; 2t).$$

A $v(r(t))$ összetett függvény:

$$v(r(t)) = v(1; t; t^2) = (1 \cdot t; (t^2)^2; t) = (t; t^4; t).$$

A $v(r(t)) \cdot r'(t)$ skaláris szorzat:

$$v(r(t)) \cdot r'(t) = t \cdot 0 + t^4 \cdot 1 + t \cdot 2t = t^4 + 2t^2.$$

A görbementi integrál értéke:

$$\int_0^1 v(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^1 t^4 + 2t^2 dt = \left[\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{13}{15}.$$

3.4.4. Tétel. Ha a v vektormezőnek létezik potenciálfüggvénye, vagyis potenciális és a potenciálfüggvénye φ , és a γ görbe paraméterezése $r(t)$, akkor a

vektormezőnek a γ görbe $r(t)$ paraméterezésének $[a; b]$ szakaszán számolt görbementi integrálja:

$$\int_{\gamma} v = \varphi(r(b)) - \varphi(r(a)).$$

3.4.5. Következmény. Ha a v vektormező potenciális és a γ görbe zárt, vagyis a görbe $t \mapsto r(t)$ paraméterezése esetén $r(a) = r(b)$, akkor

$$\varphi(r(b)) = \varphi(r(a)) \quad \Rightarrow \quad \varphi(r(b)) - \varphi(r(a)) = 0,$$

így az előző tétel szerint azt kapjuk, hogy

$$\int_{\gamma} v = \varphi(r(b)) - \varphi(r(a)) = 0.$$

Tehát potenciális vektormező zárt görbe mentén vett görbementi integrálja nulla.

3.4.6. Megjegyzés. Az F erőter, mint vektormező által végzett munka az $r(t)$ görbe $t \in [a; b]$ szakaszán éppen az F vektormező $r(t)$ görbe $t \in [a; b]$ szakaszához tartozó görbementi integrálja.

Kidolgozott feladatok

229. Feladat. Tekintsük az $r(t) = (t + 2; t^2 + 1; 2t)$ görbét a $t \in [-1; 1]$ intervallumon és a $v(x; y; z) = (x + y; x^2; xz)$ vektormezőt! Számoljuk ki a v vektormezőnek az r görbe $[-1; 1]$ szakaszához tartozó görbementi integrálját!

Megoldás:

Az r térgörbe deriváltfüggvénye:

$$r'(t) = (1; 2t; 2).$$

A $v(r(t))$ összetett függvény:

$$v(r(t)) = v(t + 2; t^2 + 1; 2t) = (t^2 + t + 3; t^2 + 4t + 4; 2t^2 + 4t).$$

A $v(r(t)) \cdot r'(t)$ skaláris szorzat:

$$\begin{aligned} v(r(t)) \cdot r'(t) &= t^2 + t + 3 + 2t^3 + 8t^2 + 8t + 4t^2 + 8t = \\ &= 2t^3 + 13t^2 + 17t + 3. \end{aligned}$$

A görbementi integrál értéke:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 v(r(t)) \cdot r'(t) dt &= \int_{-1}^1 (2t^3 + 13t^2 + 17t + 3) dt = \\ &= \left[\frac{t^4}{2} + \frac{13t^3}{3} + \frac{17t^2}{2} + 3t \right]_{-1}^1 = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{13}{3} + \frac{17}{2} + 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{3} + \frac{17}{2} - 3 \right) = \frac{26}{3} + 6 = \frac{44}{3}. \end{aligned}$$

230. Feladat. Számoljuk ki a $v(x; y; z) = (y + z; x + z; x + y)$ vektormezőnek az AB szakaszon a görbementi integrálját, ha $A = (1; -2; 3)$ és $B = (2; 1; 4)$!

Megoldás:

Az AB szakasz paraméterezése:

$$r(t) = A + t \cdot (B - A) = (1; -2; 3) + t \cdot (1; 3; 1) = (1 + t; -2 + 3t; 3 + t),$$

ahol $t \in [0; 1]$.

Az r térgörbe deriváltfüggvénye:

$$r'(t) = (1; 3; 1).$$

A $v(r(t))$ összetett függvény:

$$\begin{aligned} v(r(t)) &= v(1+t; -2+3t; 3+t) = \\ &= (-2+3t+3+t; 1+t+3+t; 1+t-2+3t) = \\ &= (4t+1; 2t+4; 4t-1). \end{aligned}$$

A $v(r(t)) \cdot r'(t)$ skaláris szorzat:

$$v(r(t)) \cdot r'(t) = 4t + 1 + 3 \cdot (2t + 4) + 4t - 1 = 14t + 12.$$

A görbementi integrál értéke:

$$\int_0^1 v(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^1 14t + 12 dt = [7t^2 + 12t]_0^1 = 7 + 12 = 19.$$

231. Feladat. Számoljuk ki a $v(x; y; z) = (2xy - z; x^2 + z; y - x)$ vektormezőnek az

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, z = 3$$

egyenletrendszerrel megadott ellipszis mentén vett görbementi integrálját!

Megoldás:

A v vektormező rotációja:

$$\begin{aligned} \text{rot } v(x; y; z) &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ -\partial_x v_3 + \partial_z v_1 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ -1 + 1 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A vektormező potenciális, mert a rotációja zérusvektor, a görbe zárt, így a görbementi integrál értéke 0.

232. Feladat. Számoljuk ki a

$$v(x; y; z) = (y - z; 2x + y - 3z; x + y + z)$$

vektormezőnek az ABC háromszög vonal mentén vett görbementi integrálját, ha $A = (3; 0; 0)$, $B = (0; 3; 0)$ és $C = (0; 0; 3)$.

Megoldás:

Legyen a háromszög vonal a γ görbe. Ekkor

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3,$$

ahol γ_1 az AB szakasz, γ_2 a BC szakasz és γ_3 a CA szakasz. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_{\gamma} v = \int_{\gamma_1} v + \int_{\gamma_2} v + \int_{\gamma_3} v.$$

A γ_1 görbe paraméteres előállítás:

$$r_1(t) = A + (B - A) \cdot t = (3; 0; 0) + (-3; 3; 0)t = (3 - 3t; 3t; 0),$$

ahol $t \in [a; b]$.

A γ_2 görbe paraméteres előállítás:

$$r_2(t) = B + (C - B) \cdot t = (0; 3; 0) + (0; -3; 3)t = (0; 3 - 3t; 3t),$$

ahol $t \in [a; b]$.

A γ_3 görbe paraméteres előállítás:

$$r_3(t) = C + (A - C) \cdot t = (0; 0; 3) + (3; 0; -3)t = (3t; 0; 3 - 3t),$$

ahol $t \in [a; b]$.

Az r_1 térgörbe deriváltfüggvénye:

$$r_1'(t) = (-3; 3; 0).$$

A $v(r_1(t))$ összetett függvény:

$$\begin{aligned} v(r_1(t)) &= v(3 - 3t; 3t; 0) = \\ &= (3t; 6 - 6t + 3t; 3 - 3t + 3t) = (3t; 6 - 3t; 3). \end{aligned}$$

A $v(r_1(t)) \cdot r_1'(t)$ skaláris szorzat:

$$v(r_1(t)) \cdot r_1'(t) = -9t + 18 - 9t = -18t + 18.$$

A görbementi integrál értéke a γ_1 görbe mentén:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} v &= \int_0^1 v(r_1(t)) \cdot r_1'(t) dt = \int_0^1 -18t + 18 dt = \\ &= [-9t^2 + 18t]_0^1 = -9 + 18 = 9. \end{aligned}$$

Az r_2 térgörbe deriváltfüggvénye:

$$r_2'(t) = (0; -3; 3).$$

A $v(r_2(t))$ összetett függvény:

$$\begin{aligned} v(r_2(t)) &= v(0; 3 - 3t; 3t) = \\ &= (3 - 3t - 3t; 3 - 3t - 9t; 3 - 3t + 3t) = (3 - 6t; 3 - 12t; 3). \end{aligned}$$

A $v(r_2(t)) \cdot r_2'(t)$ skaláris szorzat:

$$v(r_2(t)) \cdot r_2'(t) = -9 + 36t + 9 = 36t.$$

A görbementi integrál értéke a γ_2 görbe mentén:

$$\int_{\gamma_2} v = \int_0^1 v(r_2(t)) \cdot r_2'(t) dt = \int_0^1 36t dt = [18t^2]_0^1 = 18.$$

Az r_3 térgörbe deriváltfüggvénye:

$$r_3'(t) = (3; 0; -3).$$

A $v(r_3(t))$ összetett függvény:

$$\begin{aligned} v(r_3(t)) &= v(3t; 0; 3 - 3t) = \\ &= (-3 + 3t; 6t - 9 + 9t; 3 - 3t + 3t) = (-3 + 3t; 15t - 9; 3). \end{aligned}$$

A $v(r_3(t)) \cdot r_3'(t)$ skaláris szorzat:

$$v(r_3(t)) \cdot r_3'(t) = -9 + 9t - 9 = 9t - 18.$$

A görbementi integrál értéke a γ_3 görbe mentén:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} v &= \int_0^1 v(r_3(t)) \cdot r_3'(t) dt = \int_0^1 9t - 18 dt = \\ &= \left[\frac{9}{2}t^2 - 18t \right]_0^1 = \frac{9}{2} - 18 = -\frac{27}{2}. \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\int_{\gamma} v = \int_{\gamma_1} v + \int_{\gamma_2} v + \int_{\gamma_3} v = 9 + 18 - \frac{27}{2} = \frac{27}{2}.$$

233. Feladat. Tekintsük a

$$v(x; y; z) = (2xy + z^2; 2yz + x^2; 2xz + y^2)$$

vektormezőt és az AB szakaszt, ahol $A = (1; 2; 0)$ és $B = (4; 1; 1)$!

a) Adjuk meg az AB szakasz paraméteres előállítását!

- b) Határozzuk meg a v vektormező koordinátfüggvényeit!
- c) Adjuk meg a v vektormező deriváltmátrixát!
- d) Számoljuk ki a v vektormező rotációját!
- e) Örvénymentes-e a v vektormező?
- f) Potenciálos-e a v vektormező?
- g) Amennyiben v potenciálos, adjuk meg a potenciálfüggvényt!
- h) Számoljuk ki a v vektormező görbementi integrálját az AB szakaszon a potenciálfüggvény felhasználásával!
- i) Számoljuk ki a v vektormező görbementi integrálját az AB szakaszon a görbementi integrál definíciójának felhasználásával!

Megoldás:

- a) Az AB szakasz paraméteres előállítás:

$$r(t) = A + t \cdot (B - A) = (1; 2; 0) + t \cdot (3; -1; 1) = (1 + 3t; 2 - t; t),$$

ahol $t \in [0; 1]$.

- b) A vektormező koordinátfüggvényei:

$$v_1(x; y; z) = 2xy + z^2$$

$$v_2(x; y; z) = 2yz + x^2$$

$$v_3(x; y; z) = 2xz + y^2.$$

- c) A vektormező deriváltmátrixa:

$$v'(x; y; z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 2z \\ 2x & 2z & 2y \\ 2z & 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

- d) A vektormező rotációja zérusvektor, mert a deriváltmátrix szimmetrikus.
- e) Örvénymentes, mert a rotációja zérusvektor.
- f) Potenciálos, mert örvénymentes.
- g) A potenciálfüggvény az a $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (skalármező), melyre

$$\text{grad } \varphi(x; y; z) = v(x; y; z)$$

teljesül, azaz

$$\varphi'_x(x; y; z) = v_1(x; y; z)$$

$$\varphi'_y(x; y; z) = v_2(x; y; z)$$

$$\varphi'_z(x; y; z) = v_3(x; y; z).$$

Behelyettesítve a koordinátafüggvényeket azt kapjuk, hogy

$$\varphi'_x(x; y; z) = 2xy + z^2$$

$$\varphi'_y(x; y; z) = 2yz + x^2$$

$$\varphi'_z(x; y; z) = 2xz + y^2.$$

Mivel $\varphi'_x(x; y; z) = 2xy + z^2$, ezért

$$\varphi(x; y; z) = \int 2xy + z^2 dx = x^2y + xz^2 + c(y; z).$$

A kapott függvényt az y változó szerint deriválva

$$\varphi'_y(x; y; z) = x^2 + c'_y(y; z)$$

adódik. Ugyanakkor tudjuk, hogy $\varphi'_y(x; y; z) = 2yz + x^2$, ezért

$$2yz + x^2 = x^2 + c'_y(y; z) \Rightarrow c'_y(y; z) = 2yz,$$

így

$$c(y; z) = \int 2yz dy = y^2z + c(z).$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\varphi(x; y; z) = x^2y + xz^2 + y^2z + c(z).$$

A kapott függvényt a z változó szerint deriválva

$$\varphi'_z(x; y; z) = 2xz + y^2 + c'(z)$$

adódik. Ugyanakkor tudjuk, hogy $\varphi'_z(x; y; z) = 2xz + y^2$, ezért

$$2xz + y^2 + c'(z) = 2xz + y^2 \Rightarrow c'(z) = 0 \Rightarrow c(z) = c.$$

Tehát a potenciálfüggvény:

$$\varphi(x; y; z) = x^2y + xz^2 + y^2z + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

h) A v vektormező γ görbe mentén vett integrálja:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} v &= \varphi(r(1)) - \varphi(r(0)) = \\ &= \varphi(B) - \varphi(A) = 16 + 4 + 1 - (2 + 0 + 0) = 19. \end{aligned}$$

i) Az r térgörbe deriváltfüggvénye:

$$r'(t) = (3; -1; 1).$$

A $v(r(t))$ összetett függvény:

$$\begin{aligned} v(r(t)) &= v(1 + 3t; 2 - t; t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (1 + 3t) \cdot (2 - t) + t^2 \\ 4t - 2t^2 + (1 + 3t)^2 \\ 2t + 6t^2 + (2 - t)^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -5t^2 + 10t + 4 \\ 7t^2 + 10t + 1 \\ 7t^2 - 2t + 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A $v(r(t)) \cdot r'(t)$ skaláris szorzat:

$$\begin{aligned} v(r(t)) \cdot r'(t) &= -15t^2 + 30t + 12 - 7t^2 - 10t - 1 + 7t^2 - 2t + 4 = \\ &= -15t^2 + 18t + 15. \end{aligned}$$

A görbementi integrál értéke:

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(r(t)) \cdot r'(t) dt &= \int_0^1 -15t^2 + 18t + 15 dt = \\ &= \left[-15 \cdot \frac{t^3}{3} + 18 \cdot \frac{t^2}{2} + 15t \right]_0^1 = \\ &= [-5t^3 + 9t^2 + 15t]_0^1 = -5 + 9 + 15 = 19. \end{aligned}$$

234. Feladat. Mekkora munkát végez az

$$F(x; y; z) = (y - x^2; z - y^2; x - z^2)$$

erőtér az $r(t) = (t; t^2; t^3)$ görbe mentén az $A = (0; 0; 0)$ ponttól a $B = (1; 1; 1)$ pontig?

Megoldás:

Az r térgörbe deriváltfüggvénye:

$$r'(t) = (1; 2t; 3t^2).$$

Az $F(r(t))$ összetett függvény:

$$\begin{aligned} F(r(t)) &= F(t; t^2; t^3) = (t^2 - t^2; t^3 - t^4; t - t^6) = \\ &= (0; t^3 - t^4; t - t^6). \end{aligned}$$

Az $F(r(t)) \cdot r'(t)$ skaláris szorzat:

$$\begin{aligned} F(r(t)) \cdot r'(t) &= 2t \cdot (t^3 - t^4) + 3t^2 \cdot (t - t^6) = \\ &= 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8. \end{aligned}$$

A görbementi integrál értéke, vagyis a végzett munka:

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t) dt &= \int_0^1 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8 dt = \\ &= \left[2 \cdot \frac{t^5}{5} - 2 \cdot \frac{t^6}{6} + 3 \cdot \frac{t^4}{4} - 3 \cdot \frac{t^9}{9} \right]_0^1 = \frac{29}{60}. \end{aligned}$$

3.5. Vektormezők felületmenti integrálja

3.5.1. Definíció. Egy vektormező *felületmenti integrálja* más szóval *fluxusa* a vektormező és a felületi normális irányába mutató vektor skaláris szorzatának integrálja, vagyis a w vektormező esetén az $r(u; v)$ paraméterezésű F felületnek az $(u; v) \subset D$ paramétertartomány által meghatározott darabjára vonatkozó felületmenti integrálja (fluxusa):

$$\iint_F w = \int_F w(r) \cdot n = \iint_D w(r(u; v)) \cdot (\pm r'_u(u; v) \times r'_v(u; v))$$

3.5.2. Megjegyzés. A felületmenti integrál kiszámolásának lépései:

1. Paraméterezzük az F felületet!
2. Számoljuk ki $r'_u(u; v)$ és $r'_v(u; v)$ deriváltfüggvényeket!
3. Adjuk meg az $n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektoriális szorzatot, vagyis a felületi normálist!
4. Határozzuk meg a $w(r(u; v))$ összetett függvényt!
5. Adjuk meg a $w(r(u; v)) \cdot n$ skaláris szorzatot!
6. Számoljuk ki az $\iint w(r(u; v)) \cdot n$ kettős integrált!

3.5.3. Példa. Tekintsük a $w(x; y; z) = (xy; z^2; y)$ vektormezőt és az $r(u; v) = (1; u; u \cdot v)$ felületet az $(u; v) \in [0; 1] \times [0; 2]$ tartományon! Ekkor az r felület deriváltfüggvényei:

$$r'_u(u; v) = (0; 1; v) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (0; 0; u).$$

Az $n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & u \end{vmatrix} = (u; 0; 0).$$

A $w(r(u; v))$ összetett függvény:

$$w(r(u; v)) = w(1; u; u \cdot v) = (u; u^2 \cdot v^2; u).$$

A $w(r(u; v)) \cdot n$ skaláris szorzat:

$$w(r(u; v)) \cdot n = u^2.$$

A felületmenti integrál értéke:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^2 w(r(u;v)) \cdot n \, dv \right) du &= \int_0^1 \left(\int_0^2 u^2 \, dv \right) du = \\ &= \int_0^1 \left[u^2 v \right]_{v=0}^{v=2} du = \int_0^1 2u^2 \, du = \left[\frac{2}{3} u^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Kidolgozott feladatok

235. Feladat. Tekintsük a $w(x; y; z) = (x^2; xz; y)$ vektormezőt és az $r(u; v) = (u; v; u \cdot v)$ felületet az $(u; v) \in [0; 1] \times [0; 2]$ tartományon! Számoljuk ki a w vektormező $r(u; v)$ felületmenti integrálját!

Megoldás:

Az $r(u; v)$ deriváltfüggvényei:

$$r'_u(u; v) = (1; 0; v) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (0; 1; u).$$

Az $n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = (-v; -u; 1).$$

A $w(r(u; v))$ összetett függvény:

$$w(r(u; v)) = w(u; v; u \cdot v) = (u^2; u^2 \cdot v; v).$$

A $w(r(u; v)) \cdot n$ skaláris szorzat:

$$w(r(u; v)) \cdot n = -u^2 \cdot v - u^3 \cdot v + v.$$

A felületmenti integrál értéke:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^2 w(r(u; v)) \cdot n \, dv \right) du &= \int_0^1 \left(\int_0^2 -u^2 \cdot v - u^3 \cdot v + v \, dv \right) du = \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{u^2 \cdot v^2}{2} - \frac{u^3 \cdot v^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right]_{v=0}^{v=2} du = \int_0^1 -2u^2 - 2u^3 + 2 \, du = \\ &= \left[-\frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^4 + 2u \right]_0^1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

236. Feladat. Számoljuk ki a $w(x; y; z) = (y; z^2; x)$ vektormezőnek az

$$A = (0; 0; 0), \quad B = (0; 1; 0), \quad C = (1; 0; 0), \quad D = (1; 1; 0)$$

pontok által meghatározott négyzet mentén vett felületi integrálját!

Megoldás:

A felület egy lehetséges paraméterezése $r(u; v) = (u; v; 0)$, ahol $u \in [0; 1]$ és $v \in [0; 1]$. Ekkor

$$r'_u(u; v) = (1; 0; 0) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (0; 1; 0).$$

Az $n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; 1).$$

A $w(r(u; v))$ összetett függvény:

$$w(r(u; v)) = w(u; v; 0) = (v; 0; u).$$

A $w(r(u; v)) \cdot n$ skaláris szorzat:

$$w(r(u; v)) \cdot n = u.$$

A felületmenti integrál értéke:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 w(r(u; v)) \cdot n \, dv \right) du &= \int_0^1 \left(\int_0^1 u \, dv \right) du = \\ &= \int_0^1 [u \cdot v]_{v=0}^{v=1} du = \int_0^1 u \, du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

237. Feladat. Számoljuk ki a $w(x; y; z) = (y; z^2; x)$ vektormezőnek az

$$A = (0; 0; 0), \quad B = (1; 0; 0), \quad C = (0; 1; 0)$$

pontok által meghatározott háromszöglemez mentén vett felületi integrálját!

Megoldás:

A felület egy lehetséges paraméterezése $r(u; v) = (u; v; 0)$, ahol $u \in [0; 1]$ és $v \in [0; 1 - u]$. Ekkor

$$r'_u(u; v) = (1; 0; 0) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (0; 1; 0).$$

Az $n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; 1).$$

A $w(r(u; v))$ összetett függvény:

$$w(r(u; v)) = w(u; v; 0) = (v; 0; u).$$

A $w(r(u; v)) \cdot n$ skaláris szorzat:

$$w(r(u; v)) \cdot n = u.$$

A felületmenti integrál értéke:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} w(r(u; v)) \cdot n \, dv \right) du &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} u \, dv \right) du = \\ &= \int_0^1 [u \cdot v]_{v=0}^{v=1-u} du = \int_0^1 u \cdot (1-u) du = \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3.6. Integrálátalakító tételek

3.6.1. Tétel. (Stokes tétel)

Ha F egy egyszeresen összefüggő, vagyis „nem lyukas” felület és w egy folytonosan differenciálható vektormező, amely értelmezve van a felületen és γ a felület határgörbéje, továbbá F és γ olyan irányítású, hogy a felület külső oldaláról nézve a görbe az óramutató járásával ellentétesen haladjon körbe, akkor

$$\int_{\gamma} w = \iint_F \operatorname{rot} w.$$

3.6.2. Példa. Kiszámoljuk a $w(x; y; z) = (xy; xz; yz)$ vektormező rotációjának felületmenti integrálját az origó középpontú, 2 egység sugarú, felső félgömbön, felfelé mutató normális esetén.

Legyen a gömbfelület F , és a gömb egy γ határoló görbéje az xy síkban fekvő, origó középpontú 2 egység sugarú kör, melynek egy paraméteres előállítás:

$$r(t) = (2 \cos t; 2 \sin t; 0) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

A Stokes tétel szerint:

$$\iint_F \operatorname{rot} w = \int_{\gamma} w.$$

Az r térgörbe deriváltfüggvénye:

$$r'(t) = (-2 \sin t; 2 \cos t; 0).$$

A $w(r(t))$ összetett függvény:

$$w(r(t)) = w(2 \cos t; 2 \sin t; 0) = (4 \sin t \cdot \cos t; 0; 0).$$

A $w(r(t)) \cdot r'(t)$ skaláris szorzat:

$$w(r(t)) \cdot r'(t) = -8 \sin^2 t \cdot \cos t.$$

A görbementi integrál értéke:

$$\int_0^{2\pi} w(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} -8 \sin^2 t \cdot \cos t dt = \left[-\frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

3.6.3. Megjegyzés. A Stokes tétel szerint egy vektormező örvénylése egy zárt görbén úgy is kiszámolható, ha valamely, a görbe által határolt felületen integráljuk a vektormező rotációját.

3.6.4. Tétel. (Gauss-Osztrogradszkij tétel)

Legyen $D \subset \mathbb{R}^3$ zárt tartomány és w a D minden pontjában folytonosan differenciálható vektormező. A D tartomány ∂D határfelülete legyen kifelé irányított. Ekkor

$$\iint_{\partial D} w = \iiint_D \operatorname{div} w.$$

3.6.5. Példa. A Gauss-Osztrogradszkij tétel felhasználásával kiszámoljuk a

$$w(x; y; z) = (x + 2y; y - z^2; xy)$$

vektormező felületmenti integrálját az

$$A = (0; 0; 0), B = (1; 0; 0), C = (1; 1; 0), D = (0; 1; 0)$$

$$E = (0; 0; 1), F = (1; 0; 1), G = (1; 1; 1), H = (1; 1; 0)$$

pontok által meghatározott kocka felszínén.

A vektormező divergenciája:

$$\operatorname{div} w = 1 + 1 + 0 = 2.$$

Tekintsük a

$$D = \{(x; y; z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

halmazt!

A Gauss-Osztrogradszkij tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy a felületmenti integrál:

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div} w &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 2 \, dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 [2z]_{z=0}^{z=1} dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 2 \, dy \right) dx = \int_0^1 [2y]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 2 \, dx = [2x]_0^1 = 2. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a Gauss-Osztrogradszkij tétel nélkül 6 darab felületmenti integrált kellett volna kiszámolnunk.

3.6.6. Megjegyzés. A Gauss-Osztrogradszkij tétel szerint egy vektormező integrálja a kifelé irányított F zárt felületen egyenlő a divergencia integráljával a felület által határolt D tartományon.

3.6.7. Megjegyzés. A Stokes tétel és a Gauss-Osztrogradszkij tétel azon speciális esetét, amikor $w: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ úgynevezett síkbeli vektormező ($w_1; w_2$)

koordinátafüggvényekkel és a γ görbe síkgörbe, Green tételnek nevezzük.

A Green tétel egyik alakja (későbbi hivatkozás miatt nevezzük első Green tételnek) azt mondja, hogy egy egyszerű, zárt görbe mentén, az óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkulációja egy vektormezőnek számítható úgy, hogy a rotáció k komponensét integráljuk a zárt görbe által határolt tartományon.

Tehát a $w(x; y) = (w_1(x; y); w_2(x; y))$ vektormező óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkulációja egy egyszerű, zárt γ görbe mentén egyenlő $\text{rot}(w_1; w_2; 0) \cdot k$ integráljával a zárt görbe által határolt F tartományon. Képlettel:

$$\int_{\gamma} w = \iint_F (\partial_x w_2 - \partial_y w_1).$$

A Green tétel másik alakja (későbbi hivatkozás miatt nevezzük második Green tételnek), a Green-féle divergenciatétel azt mondja, hogy bizonyos feltételek mellett a sík egyszerű, zárt görbéjén számított fluxust (amit mi kifelé mutató normálvektorral definiáltunk) úgy is kiszámíthatjuk, hogy a zárt görbe által határolt tartományon integráljuk a vektormező divergenciáját.

A $w(x; y) = (w_1(x; y); w_2(x; y))$ vektormező (kifelé mutató normálvektorral számított) fluxusa egy egyszerű, zárt γ görbén egyenlő w vektormező divergenciájának integráljával azon a D tartományon, amit a γ görbe határol. Képlettel:

$$\int_{\partial D} w = \iint_D (\partial_x w_1 + \partial_y w_2).$$

3.6.8. Példa. Meghatározzuk meg az óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkulációt és fluxust kifelé mutató normálissal a

$$w(x; y) = (x + y; 2x - 2y)$$

síkbeli vektormezőre az $y = x^2$ és $y = 2x$ görbék által határolt tartomány határán.

Az $y = x^2$ és $y = 2x$ görbék metszéspontjai x koordinátái az

$$x^2 = 2x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (x - 2) = 0$$

egyenlet megoldásai, azaz $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$.

Legyen a D tartomány az $y = x^2$ és az $y = 2x$ görbék által határolt tartomány:

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

Az első Green tétel szerint a cirkuláció:

$$\begin{aligned}\iint_D \partial_x w_2 - \partial_y w_1 &= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} 2 - 1 \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[y \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \\ &= \int_0^2 2x - x^2 \, dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

A második Green tétel szerint a fluxus:

$$\begin{aligned}\iint_D \partial_x w_1 + \partial_y w_2 &= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} 1 - 2 \, dy \right) dx = \int_0^2 \left[-y \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx = \\ &= \int_0^2 -2x + x^2 \, dx = \left[-x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = -4 + \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

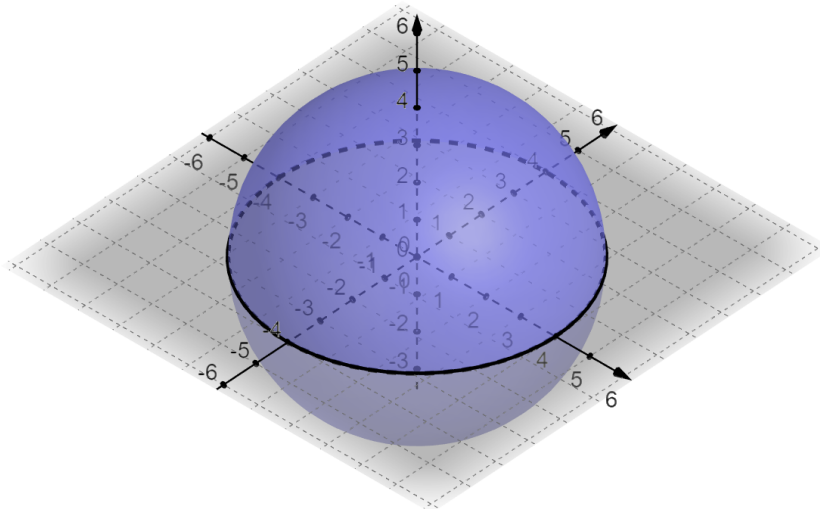
Kidolgozott feladatok

238. Feladat. Számoljuk ki a $w(x; y; z) = (y; -x; x^3y)$ vektormező rotációjának felületmenti integrálját az origó középpontú, 4 egység sugarú, felső félgömbön, felfelé mutató normális esetén!

Megoldás:

Legyen a gömbfelület F , és a gömb egy γ határoló görbéje az xy síkban fekvő, origó középpontú 4 egység sugarú kör, melynek egy paraméteres előállítását:

$$r(t) = (4 \cos t; 4 \sin t; 0) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$



A Stokes tétel szerint:

$$\iint_F \operatorname{rot} w = \int_{\gamma} w.$$

Az r térgörbe deriváltfüggvénye:

$$r'(t) = (-4 \sin t; 4 \cos t; 0).$$

A $w(r(t))$ összetett függvény:

$$w(r(t)) = w(4 \cos t; 4 \sin t; 0) = (4 \sin t; -4 \cos t; -256 \cos t \cdot \sin t).$$

A $w(r(t)) \cdot r'(t)$ skaláris szorzat:

$$\begin{aligned} w(r(t)) \cdot r'(t) &= -16 \sin^2 t - 16 \cos^2 t = \\ &= -16 \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) = -16. \end{aligned}$$

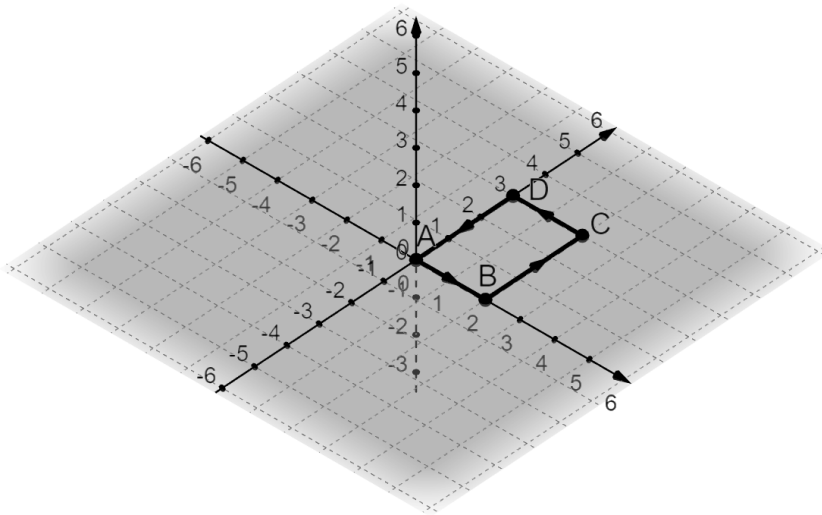
A görbementi integrál értéke:

$$\int_0^{2\pi} w(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} -16 dt = -32\pi.$$

239. Feladat. Tekintsük a $w(x; y; z) = (y; xy; z)$ vektormezőt és legyen az F felület a $z = 0$ sík azon darabja, melyre $0 \leq x \leq 2$ és $0 \leq y \leq 3$! Számoljuk ki a Stokes tételben szereplő mindkét integrált!

Megoldás:

Legyen $A = (0; 0; 0)$, $B = (2; 0; 0)$, $C(2; 3; 0)$ és $D = (0; 3; 0)$. Az F felület határoló görbéje az $ABCD$ téglalap. Ezt a görbét jelölje γ !



Legyen γ_1 az A és B pontokat összekötő szakasz! Ennek egy paraméteres előállítás:

$$r_1(t) = A + (B - A) \cdot t = t \cdot (2; 0; 0) = (2t; 0; 0) \quad (t \in [0; 1]).$$

Legyen γ_2 a B és C pontokat összekötő szakasz! Ennek egy paraméteres előállítás:

$$r_2(t) = B + (C - B) \cdot t = (2; 0; 0) + (0; 3; 0) \cdot t = (2; 3t; 0) \quad (t \in [0; 1]).$$

Legyen γ_3 a C és D pontokat összekötő szakasz! Ennek egy paraméteres előállítás:

$$r_3(t) = C + (D - C) \cdot t = (2; 3; 0) + (-2; 0; 0) \cdot t = (2 - 2t; 3; 0) \quad (t \in [0; 1]).$$

Legyen γ_4 a D és A pontokat összekötő szakasz! Ennek egy paraméteres előállítás:

$$r_4(t) = D + (A - D) \cdot t = (0; 3; 0) + (0; -3; 0) \cdot t = (0; 3 - 3t; 0) \quad (t \in [0; 1]).$$

Az egyes görbék deriváltfüggvényei:

$$\begin{aligned} r_1'(t) &= (2; 0; 0) & r_3'(t) &= (-2; 0; 0) \\ r_2'(t) &= (0; 3; 0) & r_4'(t) &= (0; -3; 0). \end{aligned}$$

A w vektormező görbementi integrálja a γ_1 görbe mentén:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} w &= \int_0^1 w(r_1(t)) \cdot r_1'(t) dt = \int_0^1 w(2t; 0; 0) \cdot (2; 0; 0) dt = \\ &= \int_0^1 (0; 0; 0) \cdot (2; 0; 0) dt = 0. \end{aligned}$$

A w vektormező görbementi integrálja a γ_2 görbe mentén:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} w &= \int_0^1 w(r_2(t)) \cdot r_2'(t) dt = \int_0^1 w(2; 3t; 0) \cdot (0; 3; 0) dt = \\ &= \int_0^1 (3t; 6t; 0) \cdot (0; 6t; 0) dt = \int_0^1 18t dt = \left[9t^2 \right]_0^1 = 9. \end{aligned}$$

A w vektormező görbementi integrálja a γ_3 görbe mentén:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} w &= \int_0^1 w(r_3(t)) \cdot r_3'(t) dt = \int_0^1 w(2 - 2t; 3; 0) \cdot (-2; 0; 0) dt = \\ &= \int_0^1 (3; 6 - 6t; 0) \cdot (-2; 0; 0) dt = \int_0^1 -6 dt = \left[-6t \right]_0^1 = -6.\end{aligned}$$

A w vektormező görbementi integrálja a γ_4 görbe mentén:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_4} w &= \int_0^1 w(r_4(t)) \cdot r_4'(t) dt = \int_0^1 w(0; 3 - 3t; 0) \cdot (0; -3; 0) dt = \\ &= \int_0^1 (3 - 3t; 0; 0) \cdot (0; -3; 0) dt = 0.\end{aligned}$$

A w vektormező görbementi integrálja a γ görbe mentén:

$$\int_{\gamma} w = \int_{\gamma_1} w + \int_{\gamma_2} w + \int_{\gamma_3} w + \int_{\gamma_4} w = 9 - 6 = 3.$$

Tehát azt kaptuk, hogy a w vektormező görbementi integrálja az F felületet határoló görbe mentén: 3.

A Stokes tételben szereplő felületmenti integrál kiszámolásához tekintsük az F felület egy paraméteres előállítását:

$$r(u; v) = (u; v; 0) \quad (u \in [0; 2], v \in [0; 3]).$$

Ekkor az r felület deriváltfüggvényei:

$$r'_u(u; v) = (1; 0; 0) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (0; 1; 0).$$

Az $n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0; 0; 1).$$

A w vektormező rotációja:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} w(x; y; z) &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y w_3 - \partial_z w_2 \\ -\partial_x w_3 + \partial_z w_1 \\ \partial_x w_2 - \partial_y w_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ y - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A rot $(w(r(u; v)))$ összetett függvény:

$$\operatorname{rot} (w(r(u; v))) = \operatorname{rot} w(u; v; 0) = (0; 0; v - 1).$$

A rot $w((r(u; v))) \cdot n$ skaláris szorzat:

$$(0; 0; v - 1) \cdot (0; 0; 1) = v - 1.$$

A w vektormező rotációjának felületmenti integrálja:

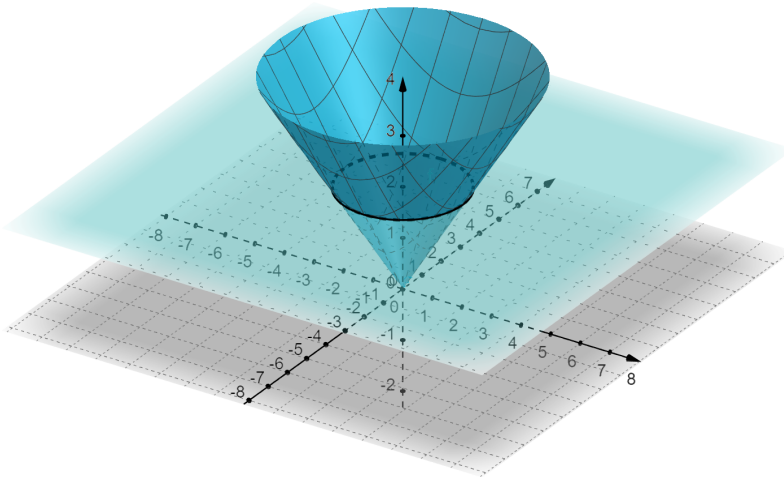
$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\int_0^3 \operatorname{rot} w((r(u; v))) \cdot n \, dv \right) du &= \int_0^2 \left(\int_0^3 v - 1 \, dv \right) du = \\ &= \int_0^2 \left[\frac{v^2}{2} - v \right]_{v=0}^{v=3} du = \int_0^2 \left(\frac{9}{2} - 3 \right) du = \int_0^2 \frac{3}{2} du = 3. \end{aligned}$$

Tehát a Stokes tételben szereplő mindkét integrál értékére 3 adódott.

240. Feladat. Számoljuk ki a $w(x; y; z) = (x^2 - y; 4z; x^2)$ vektormező cirkulációját a $z = 2$ sík és a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp metszetgörbéje mentén, felülről nézve, óramutató járásával ellentétes irányítású körüljárással.

Megoldás:

A kúp és metszetgörbe az alábbi ábrán látható:



A metszetgörbe egy 2 egység sugarú kör a $z = 2$ magasságban. Ennek egy paraméterezése:

$$r(t) = (2 \cos t; 2 \sin t; 2) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

A kúpfelületet jelölje F , a határoló görbét jelölje γ ! A Stokes tétel szerint:

$$\iint_F \operatorname{rot} w = \int_{\gamma} w.$$

Az r térgörbe deriváltfüggvénye:

$$r'(t) = (-2 \sin t; 2 \cos t; 0).$$

A $w(r(t))$ összetett függvény:

$$w(r(t)) = w(2 \cos t; 2 \sin t; 2) = (4 \cos^2 t - 2 \sin t; 8; 4 \cos^2 t).$$

A $w(r(t)) \cdot r'(t)$ skaláris szorzat:

$$w(r(t)) \cdot r'(t) = -8 \cos^2 t \cdot \sin t + 4 \sin^2 t + 16 \cos t.$$

A görbementi integrál értéke:

$$\int_0^{2\pi} w(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} -8 \cos^2 t \cdot \sin t + 4 \sin^2 t + 16 \cos t dt.$$

Mivel $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$ és $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, ezért

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2} \quad \Rightarrow \quad 4 \sin^2 t = 2 - 2 \cos(2t).$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy a cirkuláció

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} w(r(t)) \cdot r'(t) dt &= \int_0^{2\pi} -8 \cos^2 t \cdot \sin t + 2 - 2 \cos(2t) + 16 \cos t dt = \\ &= \left[\frac{8 \cos^3 t}{3} + 2t - \sin(2t) + 16 \sin t \right]_0^{2\pi} = 4\pi. \end{aligned}$$

241. Feladat. Számoljuk ki a $w(x; y; z) = (xz; xy; 3xz)$ vektormező görbe menti integrálját a $2x + y + z = 2$ sík első tényolcádba eső részének határoló görbéjén, felülről nézve óramutató járásával ellentétes normálissal!

Megoldás:

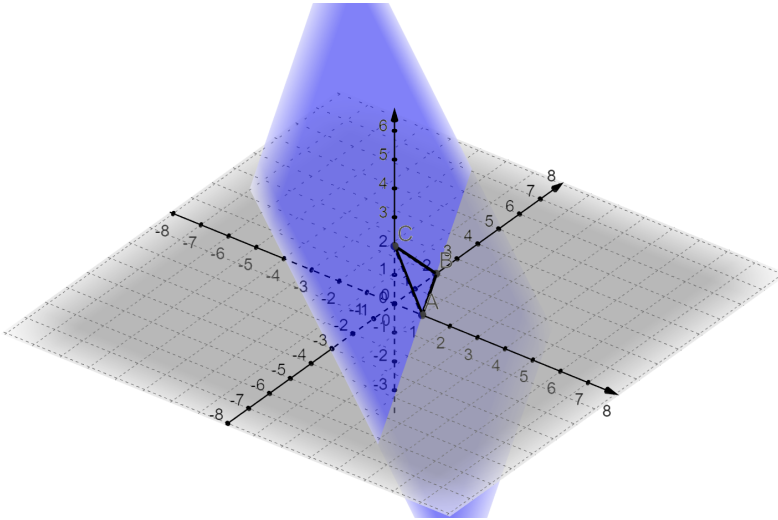
A Stokes tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\iint_F \operatorname{rot} w = \int_{\gamma} w,$$

ahol F a síkfelület, γ pedig a határoló görbe.

A sík a koordinátatengelyeket az alábbi pontokban metszi:

$$A = (1; 0; 0), \quad B = (0; 2; 0), \quad C = (0; 0; 2).$$



Az A és B pontokat összekötő egyenes egyenlete az xy síkban:

$$2x + y = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - 2x.$$

Az F felület egy paraméteres előállítása:

$$r(u; v) = (u; v; 2 - 2u - v) \quad (u \in [0; 1], v \in [0; 2 - 2u]).$$

Ekkor az r felület deriváltfüggvényei:

$$r'_u(u; v) = (1; 0; -2) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (0; 1; -1).$$

Az $n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (2; 1; 1).$$

A w vektormező rotációja:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} w(x; y; z) &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y w_3 - \partial_z w_2 \\ -\partial_x w_3 + \partial_z w_1 \\ \partial_x w_2 - \partial_y w_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -3z + x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A $\operatorname{rot} (w(r(u; v)))$ összetett függvény:

$$\operatorname{rot} (w(r(u; v))) = \operatorname{rot} w(u; v; 2 - 2u - v) = (0; -6 + 6u + 3v + u; v).$$

A $\operatorname{rot} w(r(u; v)) \cdot n$ skaláris szorzat:

$$(0; -6 + 7u + 3v; v) \cdot (2; 1; 1) = -6 + 7u + 4v.$$

A w vektormező rotációjának felületmenti integrálja:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^{2-2u} \operatorname{rot} w((r(u;v))) \cdot n \, dv \right) du &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-2u} -6 + 7u + 4v \, dv \right) du = \\ &= \int_0^1 \left[-6v + 7uv + 2v^2 \right]_{v=0}^{v=2-2u} du = \int_0^1 -6 \cdot (2-2u) + 7u \cdot (2-2u) + \\ &+ 2 \cdot (2-2u)^2 \, du = \int_0^1 -12 + 12u + 14u - 14u^2 + 8 - 16u + 8u^2 \, du = \\ &= \int_0^1 -6u^2 + 10u - 4 \, du = \left[-2u^3 + 5u^2 - 4u \right]_0^1 = -2 + 5 - 4 = -1. \end{aligned}$$

Tehát a Stokes tétel alkalmazásával azt kaptuk, hogy a felületmenti integrál: -1 .

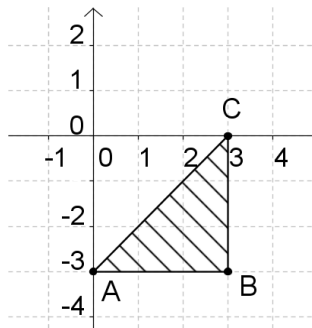
242. Feladat. A Green tétel felhasználásával számoljuk ki a

$$w(x; y) = (y^2 + x; y^2 + y)$$

vektormező integrálját az $A = (0; -3)$, $B = (3; 3)$, $C = (3; 0)$ pontok által meghatározott háromszög mentén!

Megoldás:

Az adott pontok által meghatározott háromszöglemez:



Az A és C pontokon áthaladó egyenes egyenlete: $y = -3 + x$, ezért a háromszöglemez:

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3 \text{ és } -3 \leq y \leq x - 3\}.$$

A Green tétel szerint a görbementi integrál:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(\int_{-3}^{x-3} 2x - 2y \, dy \right) dx &= \int_0^3 \left[2xy - y^2 \right]_{y=-3}^{y=x-3} dx = \\ &= \int_0^3 2x \cdot (x-3) - (x-3)^2 + 6x + 9 \, dx = \\ &= \int_0^3 2x^2 - 6x - x^2 + 6x - 9 + 6x + 9 \, dx = \int_0^3 x^2 + 6x \, dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 3x^2 \right]_0^3 = 9 + 27 = 36. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a Green tétel alkalmazása nélkül 3 darab görbementi integrált kellett volna kiszámolnunk.

243. Feladat. A Gauss-Osztrogradszkij tétel felhasználásával számoljuk ki a

$$w(x; y; z) = (x^2 + z^2; x + y^3; x^4 + z)$$

vektormező felületmenti integrálját az

$$A = (0; 0; 0), \quad B = (2; 0; 0), \quad C = (2; 2; 0), \quad D = (0; 2; 0)$$

$$E = (0; 0; 2), \quad F = (2; 0; 2), \quad G = (2; 2; 2), \quad H = (2; 2; 0)$$

pontok által meghatározott kocka felszínén!

Megoldás:

A vektormező divergenciája:

$$\operatorname{div} w = 2x + 3y^2 + 1.$$

Tekintsük a

$$D = \{(x; y; z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2\}$$

halmazt!

A Gauss-Osztrogradskij tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy a felületmenti integrál:

$$\begin{aligned} \iiint_D \operatorname{div} w &= \int_0^2 \left(\int_0^2 \left(\int_0^2 2x + 3y^2 + 1 \, dz \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^2 [2xz + 3y^2z + z]_{z=0}^{z=2} dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^2 4x + 6y^2 + 2 \, dy \right) dx = \int_0^2 [4xy + 2y^3 + 2y]_{y=0}^{y=2} dx = \\ &= \int_0^2 8x + 16 + 4 \, dx = [4x^2 + 20x]_0^2 = 16 + 40 = 56. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a Gauss-Osztrogradskij tétel nélkül 6 darab felületmenti integrált kellett volna kiszámolnunk.

244. Feladat. Határozzuk meg az óramutató járásával ellentétes körüljárással számított cirkulációt és fluxust kifelé mutató normállissal a

$$w(x; y) = (xy; y^2)$$

síkbeli vektormezőre az $y = x^2$ és $y = x$ görbék által határolt tartomány határán!

Megoldás:

Legyen a D tartomány az $y = x^2$ és az $y = x$ görbék által határolt tartomány:

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}.$$

Az első Green tétel szerint a cirkuláció:

$$\begin{aligned} \iint_D \partial_x w_2 - \partial_y w_1 &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x -x \, dy \right) dx = \int_0^1 [-xy]_{y=x^2}^{y=x} dx = \\ &= \int_0^1 -x^2 + x^3 \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

A második Green tétel szerint a fluxus:

$$\begin{aligned}\iint_D \partial_x w_1 + \partial_y w_2 &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x y + 2y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{3y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=x} dx = \\ &= \int_0^1 \frac{3x^2}{2} - \frac{3x^4}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left[x^3 - \frac{3x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

3.7. Összefoglaló feladatok a harmadik fejezethez

245. Feladat. Tekintsük a $v(x; y; z) = (3x^2 + y + 2xz; x; x^2)$ vektormezőt!

- Adjuk meg a vektormező koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a rotációt!
- Örvénymentes-e a vektormező?
- Létezik-e a v vektormezőnek potenciálfüggvénye?
- Ha létezik potenciálfüggvény, adjuk meg!

Megoldás:

- a) A vektormező koordinátafüggvényei:

$$v_1(x; y; z) = 3x^2 + y + 2xz$$

$$v_2(x; y; z) = x$$

$$v_3(x; y; z) = x^2.$$

- b) A v vektormező rotációja:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} v(x; y; z) &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ -\partial_x v_3 + \partial_z v_1 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 2x - 2x \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Örvénymentes, mert a rotációja zérusvektor.
- Létezik potenciálfüggvény, mert örvénymentes.
- A potenciálfüggvény az a $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (skalármező), melyre

$$\operatorname{grad} \varphi(x; y; z) = v(x; y; z)$$

teljesül, azaz

$$\varphi'_x(x; y; z) = v_1(x; y; z)$$

$$\varphi'_y(x; y; z) = v_2(x; y; z)$$

$$\varphi'_z(x; y; z) = v_3(x; y; z).$$

Behelyettesítve a koordinátafüggvényeket azt kapjuk, hogy

$$\varphi'_x(x; y; z) = 3x^2 + y + 2xz$$

$$\varphi'_y(x; y; z) = x$$

$$\varphi'_z(x; y; z) = x^2.$$

Mivel $\varphi'_x(x; y; z) = 3x^2 + y + 2xz$, ezért

$$\varphi(x; y; z) = \int 3x^2 + y + 2xz \, dx = x^3 + xy + x^2z + c(y; z).$$

A kapott függvényt az y változó szerint deriválva

$$\varphi'_y(x; y; z) = x + c'_y(y; z)$$

adódik. Ugyanakkor tudjuk, hogy $\varphi'_y(x; y; z) = x$, ezért

$$x = x + c'_y(y; z) \quad \Rightarrow \quad c'_y(y; z) = 0,$$

így

$$c(y; z) = \int 0 \, dy = c(z).$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\varphi(x; y; z) = x^3 + xy + x^2z + c(z).$$

A kapott függvényt a z változó szerint deriválva

$$\varphi'_z(x; y; z) = x^2 + c'(z)$$

adódik. Ugyanakkor tudjuk, hogy $\varphi'_z(x; y; z) = x^2$, ezért

$$x^2 + c'(z) = x^2 \quad \Rightarrow \quad c'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(z) = c.$$

Tehát a potenciálfüggvény:

$$\varphi(x; y; z) = x^3 + xy + x^2z + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

246. Feladat. Tekintsük a

$$w(x; y; z) = (xy; yz; x^2 + y^2)$$

vektormezőt! Legyen γ az xy síkban fekvő, origó középpontú, 2 egység sugarú körvonal és legyen F az a 2 egység sugarú kúp, melynek 2 egység a magassága és a csúcsa a z tengely pozitív félegyenesén van.

- Adjuk meg a vektormező koordinátafüggvényeit!
- Határozzuk meg a vektormező deriváltmátrixát!

- c) Határozzuk meg a vektormező deriváltmátrixát a $P = (2; -1; 0)$ pontban!
 d) Adjuk meg a vektormező P pontbeli deriváltmátrixának determinánsát!
 e) Invertálható-e a vektormező P pontbeli deriváltmátrixa?
 f) Írjuk fel a vektormező P pontbeli deriváltmátrixának transzponáltját?
 g) Szimmetrikus-e a vektormező P pontbeli deriváltmátrixa?
 h) Határozzuk meg a vektormező rotációt!
 i) Örvénymentes-e a vektormező?
 j) Létezik-e a v vektormezőnek potenciálfüggvénye?
 k) Határozzuk meg a vektormező divergenciáját!
 l) Forrásmentes-e a vektormező?
 m) Adjuk meg a γ görbe egy paraméteres előállítását!
 n) Adjuk meg az F felület egy paraméteres előállítását!
 o) Ábrázoljuk a görbét és a felületet közös koordinátarendszerben!
 p) Számoljuk ki a w vektormező görbementi integrálját a γ görbe mentén!
 q) Számoljuk ki a w vektormező felületmenti integrálját az F görbe mentén!

Megoldás:

- a) A vektormező koordinátafüggvényei:

$$w_1(x; y; z) = xy$$

$$w_2(x; y; z) = yz$$

$$w_3(x; y; z) = x^2 + y^2.$$

- b) A v vektormező deriváltmátrixa:

$$w'(x; y; z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) A w vektormező deriváltmátrixának értéke a $P = (2; -1; 0)$ pontban:

$$w'(P) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- d) A determináns értéke: $0 - 8 + 0 - 0 + 2 = -6$.

e) Mivel a determináns értéke nem nulla, ezért invertálható.

f) A w vektormező deriváltmátrixának transzponáltja a $P = (2; -1; 0)$ pontban:

$$(w'(P))^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

g) Mivel a P pontbeli deriváltmátrix nem egyenlő a transzponáltjával, ezért a mátrix nem szimmetrikus.

h) A w vektormező rotációja:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} w(x; y; z) &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y w_3 - \partial_z w_2 \\ -\partial_x w_3 + \partial_z w_1 \\ \partial_x w_2 - \partial_y w_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2y - y \\ -2x + 0 \\ 0 - x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

i) Mivel a rotáció nem zérusvektor, ezért nem örvénymentes.

j) Mivel nem örvénymentes, ezért nem létezik potenciálfüggvénye.

k) A w vektormező divergenciája:

$$\operatorname{div} w(x; y; z) = y + z.$$

l) Nem forrásmentes, mert a divergenciája nem nulla.

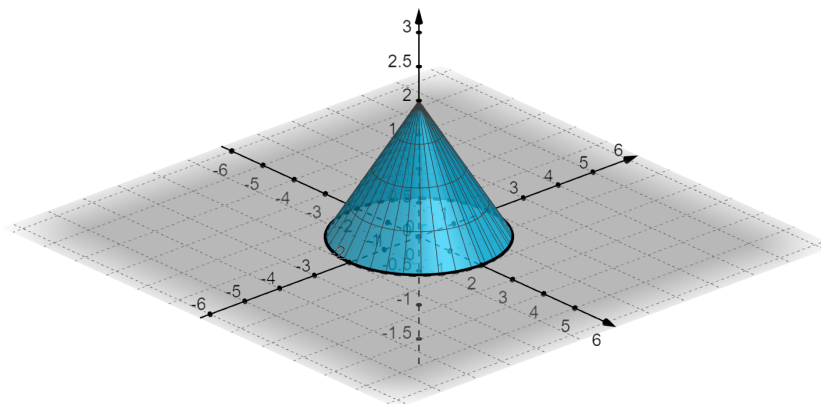
m) A γ görbe egy paraméteres előállítás:

$$r(t) = (2 \cos t; 2 \sin t; 0) \quad (t \in [0; 2\pi]).$$

n) Az F felület egy paraméteres előállítása:

$$r(u; v) = (v \cos u; v \sin u; 2 - v) \quad (u \in [0; 2\pi], v \in [0; 2]).$$

o) A görbe és a felület ábrázolása:



p) Az r térgörbe deriváltfüggvénye:

$$r'(t) = (-2 \sin t; 2 \cos t; 0).$$

A $w(r(t))$ összetett függvény:

$$\begin{aligned} w(r(t)) &= v(2 \cos t; 2 \sin t; 0) = (4 \sin t \cdot \cos t; 0; 4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t) = \\ &= (4 \sin t \cdot \cos t; 0; 4). \end{aligned}$$

A $w(r(t)) \cdot r'(t)$ skaláris szorzat:

$$w(r(t)) \cdot r'(t) = -8 \sin^2 t \cdot \cos t.$$

A görbementi integrál értéke:

$$\int_0^{2\pi} w(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} -8 \sin^2 t \cdot \cos t dt = \left[-\frac{8 \sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

q) Az $r(u; v)$ felület deriváltfüggvényei:

$$r'_u(u; v) = (-v \cdot \sin u; v \cdot \cos u; 0) \quad \text{és} \quad r'_v(u; v) = (\cos u; \sin u; -1).$$

Az $n = r'_u(u; v) \times r'_v(u; v)$ vektor:

$$\begin{aligned} n &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -v \cdot \sin u & v \cdot \cos u & 0 \\ \cos u & \sin u & -1 \end{vmatrix} = \\ &= (-v \cdot \cos u; -v \cdot \sin u; -v \cdot \sin^2 u - v \cdot \cos^2 u) = \\ &= (-v \cdot \cos u; -v \cdot \sin u; -v). \end{aligned}$$

A $w(r(u; v))$ összetett függvény:

$$\begin{aligned} w(r(u; v)) &= w(v \cdot \cos u; v \cdot \sin u; 2 - v) = \\ &= (v^2 \cdot \sin u \cdot \cos u; 2v \cdot \sin u - v^2 \cdot \sin u; v^2). \end{aligned}$$

A $w(r(u; v)) \cdot n$ skaláris szorzat:

$$w(r(u; v)) \cdot n = -v^3 \cdot \sin u \cdot \cos^2 u - 2v^2 \cdot \sin^2 u + v^3 \cdot \sin^2 u - v^3.$$

A felületmenti integrál értéke:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 w(r(u; v)) \cdot n \, dv \right) du = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 -v^3 \cdot \sin u \cdot \cos^2 u - 2v^2 \cdot \sin^2 u + v^3 \cdot \sin^2 u - v^3 \, dv \right) du = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{v^4}{4} \cdot \sin u \cdot \cos^2 u - \frac{2}{3} v^3 \cdot \sin^2 u + \frac{v^4}{4} \cdot \sin^2 u - \frac{v^4}{4} \right]_{v=0}^{v=2} du = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin u \cdot \cos^2 u - \frac{16}{3} \cdot \sin^2 u + 2 \sin^2 u - 4 \, du = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin u \cdot \cos^2 u - \frac{10}{3} \cdot \sin^2 u - 4 \, du = \\ &= -8\pi - \frac{10}{3}\pi \approx -35,6. \end{aligned}$$

247. Feladat. Számoljuk ki a

$$w(x; y; z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 1; x^2 y^2 + 3 + y; x + y + z^2)$$

vektormező fluxusát azon háromszög alapú hasáb mentén, melynek alaplajját a

$$(0; 0; 0), (2; 0; 0), (0; 2; 0)$$

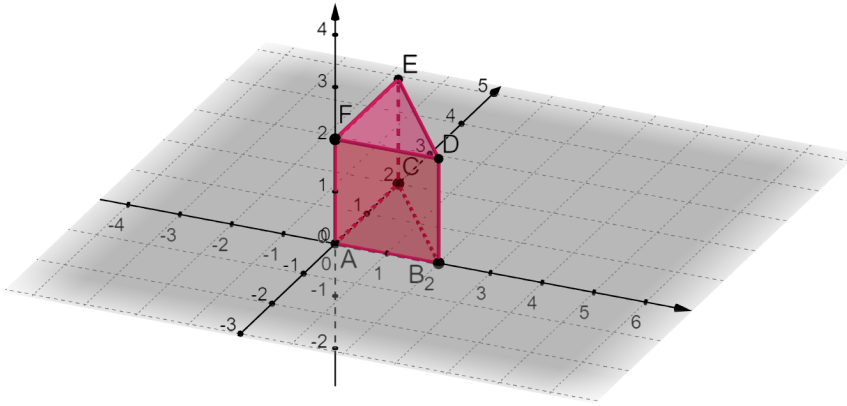
pontok által meghatározott háromszög alkotja, magassága 2 egység, és a normális kifelé irányított!

Megoldás:

A Gauss-Osztrogradszkij tétel szerint

$$\int_{\partial D} w = \iiint_D \operatorname{div} w.$$

A D testet az alábbi ábra szemlélteti:



A w vektormező koordinátáfüggvényei:

$$w_1(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$$

$$w_2(x; y; z) = x^2 y^2 + 3 + y$$

$$w_3(x; y; z) = x + y + z^2.$$

A w vektormező divergenciája:

$$\operatorname{div} w(x; y; z) = \partial_x w_1 + \partial_y w_2 + \partial_z w_3 = 2x + 2x^2 y + 1 + 2z.$$

Az xy síkban a B és C pontokon áthaladó egyenes egyenlete:

$$y = 2 - x,$$

ezért a D halmaz felírható az alábbi módon:

$$D = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x, 0 \leq z \leq 2\}.$$

A Gauss-Osztrogradskij tételt alkalmazva a fluxus:

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} w &= \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left(\int_0^2 2x + 2x^2y + 1 + 2z \, dz \right) dy \right) dx = \\
 &= \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left[2xz + 2x^2yz + z + z^2 \right]_{z=0}^{z=2} dy \right) dx = \\
 &= \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} 4x + 4x^2y + 2 + 4y \, dy \right) dx = \\
 &= \int_0^2 \left[4xy + 2x^2y^2 + 6y \right]_{y=0}^{y=2-x} dx = \\
 &= \int_0^2 4x \cdot (2-x) + 2x^2 \cdot (2-x)^2 + 6 \cdot (2-x) dx = \\
 &= \int_0^2 8x - 4x^2 + 2x^2 \cdot (4 - 4x + x^2) + 12 - 6x dx = \\
 &= \int_0^2 8x - 4x^2 + 8x^2 - 8x^3 + 2x^4 + 12 - 6x dx = \\
 &= \int_0^2 2x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 2x + 12 dx = \\
 &= \left[\frac{2x^5}{5} - 2x^4 + \frac{4x^3}{3} + x^2 + 12x \right]_0^2 = \\
 &= \frac{64}{5} - 32 + \frac{32}{3} + 4 + 24 = \frac{292}{15}.
 \end{aligned}$$

Irodalomjegyzék

- [1] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II.*, Műgyetemi Kiadó, 2002.
- [2] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf>, 2011.
- [3] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
- [4] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.
- [5] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.
- [6] Pintér Lajos, *Analízis I.*, Typotex, 1998.
- [7] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.
- [8] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.
- [9] Knut Sydsaeter, Peter Hammond, *Matematika közgazdászoknak*, Aula, 2006.
- [10] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial*, Life and Social Sciences, Brooks/Cole, 1999.
- [11] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus*, Typotex, Budapest, 2008.

Tartalomjegyzék

1. fejezet: Többváltozós valós értékű függvények analízise (skalármezők).	3
1.1. Bevezető fogalmak	4
1.2. Többváltozós függvények differenciálhatósága	18
1.3. Kétfváltozós függvények Taylor-polinomja	41
1.4. Mátrixok definitisége	49
1.5. Kétfváltozós függvények lokális szélsőértéke	56
1.6. Három- és többváltozós függvények lokális szélsőértéke	91
1.7. Kétfváltozós függvények abszolút szélsőértéke	113
1.8. Feltételes szélsőérték	118
1.9. Halmazok és többváltozós függvények konvexitása	136
1.10. Kettős integrál és alkalmazásai	146
1.11. Hármás integrál és alkalmazásai	165
1.12. Összefoglaló feladatok az első fejezethez	176
2. fejezet: Síkgörbék, térgörbék, felületek.	209
2.1. Síkgörbék megadása, differenciálása, érintőegyenese	210
2.2. Síkgörbék görbülete, ívhossza, fizikai alkalmazásai	227
2.3. Néhány nevezetes síkgörbe	240
2.4. Térgörbék megadása, differenciálása, érintőegyenese	247
2.5. Térgörbék görbülete, torziója, ívhossza, fizikai alkalmazásai	257
2.6. Felületek megadása	270
2.7. Felületek deriváltja, normálisa, érintősíkja	276
2.8. Felületdarab felszíne	281
2.9. Felületek görbülete	286
2.10. Néhány nevezetes felület	292
2.11. Összefoglaló feladatok a második fejezethez	302
3. fejezet: Vektormezők.	315

3.1. Vektormezők fogalma, deriváltja	316
3.2. Vektormezők divergenciája és rotációja	320
3.3. Vektormezők potenciálfüggvénye	324
3.4. Vektormezők görbementi integrálja	330
3.5. Vektormezők felületmenti integrálja	340
3.6. Integrálátalakító tételek	345
3.7. Összefoglaló feladatok a harmadik fejezethez	361
Irodalomjegyzék	369