Aszimptotikus eredmények a valószínűségszámítás területén

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: Pecsora Sándor
Témavezető: Dr. Fazekas István

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács
Informatikai Tudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2023.

Aszimptotikus eredmények a valószínűségszámítás területén

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: Pecsora Sándor
Témavezető: Dr. Fazekas István

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács
Informatikai Tudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2023.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Informatikai Tudományok Doktori Iskola Az információ technológia és sztochasztikus rendszerek elméleti alapjai és alkalmazásai programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem műszaki doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.
Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2023. 09. 13.

. . . .
Pecsora Sándor
jelölt

Tanúsítom, hogy Pecsora Sándor doktorjelölt 2013 – 2016 között a fent megnevezett Doktori Iskola Az információ technológia és sztochasztikus rendszerek elméleti alapjai és alkalmazásai programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.
Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2023. 09. 13.

. . . .
Dr. Fazekas István
témavezető

Aszimptotikus eredmények a valószínűségszámítás területén

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
az informatika tudományágban.

Írta: Pecsora Sándor, okleveles matematika és informatika tanár

Készült a Debreceni Egyetem Informatikai Tudományok Doktori Iskolája
(Az információ technológia és sztochasztikus rendszerek elméleti alapjai és alkalmazásai programja) keretében

Témavezető: Dr. Fazekas István

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Sztrik János	DE-IK
tagok:	Dr. Viharos László	SZTE
	Dr. Burai Pál József	DE-IK

A doktori szigorlat időpontja: 2020. június 24.

Az értekezés bírálói:

	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

Az értekezés védésének időpontja: 20 . . ..

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Fazekas István professzor úrnak, akinek köszönhetően megismerkedhettem a valószínűségszámítás ezen új és érdekes területével. Köszönöm a konzultációk során kapott rengeteg segítséget, a tudást és magyarázatokat, amelyek nagyban hozzájárultak a doktori értekezésem sikeres elkészítéséhez. Szeretném továbbá megköszönni az Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás Tanszék munkatársainak az elmúlt évek alatt nyújtott támogatást.

Végezetül szeretnék köszönetet mondani a családomnak és a barátaimnak, akik tanulmányaim során végig mellettem álltak, biztattak, segítettek és támogatták előrehaladásomat.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A disszertáció a valószínűségelmélet határérték tételei témakörébe tartozó néhány eredményt tartalmaz. A 2. és a 3. fejezet a nagy számok törvényeihez tartozó aszimptotikus tételeket és a velük kapcsolatos egyenlőtlenségeket tárgyalja, a 4. fejezet pedig véletlen zajjal terhelt mátrixok sajátértékeinek aszimptotikus viselkedését elemzi. A 2. és 3. fejezet egymással szoros összefüggésben van, míg a 4. fejezet a korábbi kettőhöz egy tételen keresztül kapcsolódik. A disszertációban megtartottuk a megjelent cikkek szerkezetét, de a cikkeket kiegészítettük néhány magyarázattal és részletesebb bizonyításokkal.

A disszertáció 2. fejezete a [Fazekas, Pecsora, Porvázsnyik (2018)] cikk, a 3. fejezet a [Fazekas, Pecsora (2017)] cikk, míg a 4. fejezet a [Fazekas, Pecsora (2020)I] és a [Fazekas, Pecsora (2020)II] cikkek eredményeit tartalmazza.

Ebben a bevezető 1. fejezetben a történeti háttérből néhány nevezetes eredményt sorolunk fel, a saját eredmények közvetlen kapcsolódását napjaink szakirodalmához a következő három fejezetben részletezzük.

A nagy számok törvényei esetén technikailag igen fontosak a háttérben meghúzódó egyenlőtlenségek. A legegyszerűbb ilyen példa a nagy számok gyenge törvényének a független, azonos eloszlású és véges szórással rendelkező valószínűségi változókra vonatkozó alakja, amely csupán a Csebisev-egyenlőtlenségre támaszkodik.

A nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye a következő:

1.1. Tétel (Kolmogorov-féle erős törvény. Lásd [Kolmogorov (1950)]). *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ (teljesen) független, azonos eloszlású valószínűségi változók, tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi_i| < \infty$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m$ majdnem biztosan, ahol $m = \mathbb{E}\xi_i$ (és $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$).*

Ennek a jól ismert bizonyításában alapvető szerepet a Kolmogorov-egyenlőtlenség játszik.

A nagy számok Etemadi-féle erős törvénye a következő:

1.2. Tétel (Etemadi tétele. Lásd [Etemadi (1981)]). *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|\xi_i| < \infty$. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m$$

majdnem biztosan, ahol $m = \mathbb{E}\xi_i$ (és $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$).

Mivel itt páronkénti függetlenség szerepel, így a bizonyításban a Kolmogorov-egyenlőtlenség nem használható. Itt a kiinduló ötlet az, hogy először egy speciális részsorozat konvergenciáját igazoljuk. Fontos megjegyezni, hogy mind a függetlenség, mind a páronkénti függetlenség olyan tulajdonság, amely öröklődik a valószínűségi változók csonkítottjaira is, és ezt a bizonyítások külön említés nélkül használják. A későbbiekben látni fogjuk, hogy milyen fontos egy-egy gyenge függőségi feltétel öröklődése a csonkított valószínűségi változókra.

A Marcinkiewicz–Zygmund-féle erős törvény a Kolmogorov-féle törvény kiterjesztéseinek tekinthető.

1.3. Tétel (Marcinkiewicz–Zygmund-féle erős törvény. Lásd [Marcinkiewicz, Zygmund (1938)])**.** *Legyen* $0 < r < 2$*. Tegyük fel, hogy* $X, X_1, X_2, \dots$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Ha* $\mathbb{E}|X|^r < \infty$ *és* $\mathbb{E}X = 0$*, amikor* $1 \le r < 2$*, akkor*

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \to 0$$

majdnem biztosan, ahogy $n \to \infty$*. Fordítva, ha a majdnem biztos konvergencia teljesül az állításnak megfelelően, akkor* $\mathbb{E}|X|^r < \infty$ *és* $\mathbb{E}X = 0$*, amikor* $1 \le r < 2$*.*

A teljes konvergencia (complete convergence) a specialisták számára jól ismert, de talán szélesebb körben kevésbé. Ezért felidézzük a definícióját. Valószínűségi változók egy $Z_1, Z_2, \dots$ sorozata teljesen konvergál (0-hoz), ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|Z_n| > \varepsilon\right) < \infty.$$

Ekkor természetesen $Z_n \to 0$ majdnem biztosan is teljesül a Borel–Cantelli-lemma miatt.

A Kolmogorov-féle erős törvényhez kapcsolódó teljes konvergenciát Hsu és Robbins, valamint Erdős vizsgálta.

A tétel következő alakja Allan Gut - Probability: A Graduate Course című könyvéből származik (lásd [Gut (2013)]).

1.4. Tétel (Hsu–Robbins–Erdős. Lásd Theorem 11.2. [Gut (2013)])**.** *Legyen* $X, X_1, X_2, \dots$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók, továbbá* $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$*,* $n \ge 1$*. Ha* $\mathbb{E}X = 0$ *és* $\mathbb{E}X^2 < \infty$*, akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|S_n| > n\varepsilon\right) < \infty, \forall \varepsilon > 0.$$

Fordítva, ha az összeg véges valamilyen $\varepsilon > 0$-ra, akkor $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}X^2 < \infty$, és az összeg véges minden $\varepsilon > 0$-ra.

Ennek a tételnek az eredeti változatát 1947-ben publikálta Pao-Lu Hsu és Herbert Robbins - Complete Convergence and the Law of Large Numbers című munkájában (lásd [Hsu, Robbins (1947)]), később 1949-ben Erdős Pál - On a theorem of Hsu and Robbins című munkájában jelent meg (lásd [Erdős (1949)]), mely munkának 1950-ben Remark on my Paper „On a Theorem of Hsu and Robbins" címmel korrektúrája került publikálásra (lásd [Erdős (1950)]).

A Marcinkiewicz–Zygmund-féle erős törvény esetén a teljes konvergenciát, sőt bizonyos esetben a konvergencia sebességét a Baum–Katz-féle tétel írja le:

1.5. Tétel (Baum–Katz-féle tétel. Lásd [Baum, Katz (1965)]). *Legyen $p, r > 0$, $r \geq p$, $p < 2$. Tegyük fel, hogy $X, X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és a részösszegük $S_n = \sum_{i=1}^n X_k$, $n \geq 1$. Ha*

$$\mathbb{E}|X|^r < \infty, \quad r \geq 1, \quad \mathbb{E}X = 0,$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(r/p)-2}\mathbb{P}\left(|S_n| > n^{1/p}\varepsilon\right) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(r/p)-2}\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > n^{1/p}\varepsilon\right) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ha $r > p$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(r/p)-2}\mathbb{P}\left(\sup_{k\geq n} |S_k/k^{1/p}| > \varepsilon\right) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Fordítva, ha az összegek valamelyike véges valamely $\varepsilon > 0$ esetén, akkor a többi is az (megfelelő p és r értékek esetén), $\mathbb{E}|X|^r < \infty$ és, ha $r \geq 1$, $\mathbb{E}X = 0$.

Most térjünk rá a disszertációban fontos szerepet játszó exponenciális egyenlőtlenségekre. A klasszikus eredmény ebben a tekintetben a Bernstein-féle egyenlőtlenség.

1.6. Tétel (Bernstein-féle egyenlőtlenség. Lásd [Bernstein (1924)]). *Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ teljesen független valószínűségi változók, $\mathbb{E}(\xi_k) = M_k$,*

$\mathbb{D}(\xi_k) = D_k$, és $|\xi_k - M_k| \le K$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, akkor a $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ valószínűségi változóra

$$\mathbb{P}(|\xi - M| \ge cD) \le 2 \exp\left[-\frac{c^2}{2\left(1 + \frac{cK}{2D}\right)^2} \right].$$

Itt $M = \sum_{k=1}^{n} M_k$, $D = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D_k^2}$, c pedig tetszőleges, $\frac{D}{K}$-nál nem nagyobb pozitív szám.

A másik klasszikus exponenciális egyenlőtlenség a Bennett-egyenlőtlenség.

1.7. Tétel (Bennett-egyenlőtlenség. Lásd [Bennett (1962)]). *Legyenek az $X_1, X_2, \dots, X_n$ független valószínűségi változók majdnem biztosan korlátosak, $|X_i| \le C_i$ majdnem biztosan, $i = 1, \dots, n$ és az általánosság elvesztése nélkül feltételezzük, hogy centralizáltak a várható értékeiknél. Legyen $\sigma_i^2 = \mathbb{D}^2(X_i) = \mathbb{E}X_i^2$, $s_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \mathbb{D}^2(S_n)$, ahol $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Továbbá, legyen $C_0 = \max\{C_i; i = 1, \dots, n\}$. Akkor, minden $t > 0$-re*

$$\mathbb{P}\left(S_n \ge s_n t\right) \le \exp\left[-t^2 / \left(2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{C_0 t}{s_n} \right) \right],$$

illetve

$$\mathbb{P}\left(|S_n| \ge s_n t\right) \le 2\exp\left[-t^2 / \left(2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{C_0 t}{s_n} \right) \right].$$

Nevezetes exponenciális egyenlőtlenség a Fuk–Nagaev-féle egyenlőtlenség, melyet [Fuk, Nagaev (1971)] 5. Tétele mond ki:

1.8. Tétel (Fuk, Nagaev (1971)). *Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független valószínűségi változók, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ pozitív számok egy halmaza, $y = \max\{y_1, \dots, y_n\}$, $A(t; -Y, Y) = \sum_{i=1}^{n} \int_{-y_i}^{y_i} |u|^t dF_i(u)$. A $0 < t \le 1$ esetén teljesül a következő egyenlőtlenség*

$$\mathbb{P}\left(|S_n| \ge x\right) \le \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(|X_k| \ge y_k\right) + P_8,$$

ahol

$$P_8 = \exp\left[\frac{x}{y} - \frac{x}{y} \ln\left(\frac{xy^{t-1}}{A(t; -Y, Y)} + 1 \right) \right].$$

Ha

$$xy^{t-1} > A(t; -Y, Y),$$

akkor

$$\mathbb{P}\left(|S_n| \geq x\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P\left(|X_k| \geq y_k\right) + P_9,$$

ahol

$$P_9 = \exp\left[\frac{x}{y} - \frac{A(t;-Y,Y)}{y^t} - \frac{x}{y}\ln\left(\frac{xy^{t-1}}{A(t;-Y,Y)} + 1\right)\right],$$

és $P_9 \leq P_8$.

Szintén az exponenciális egyenlőtlenségek közé sorolható a Hoeffding-egyenlőtlenség is.

1.9. Tétel (Hoeffding (1963), Theorem 2)**.** *Legyenek* $X_1, \dots, X_n$ *olyan független valószínűségi változók, hogy* $a_i \leq X_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, n$. *Legyen* $\mu_i = \mathbb{E}X_i$, $i = 1, \dots, n$ *és* $\mu = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i$. *Akkor minden* $t > 0$*-ra*

$$\mathbb{P}(\bar{X} - \mu \geq t) \leq \exp\left[-2n^2t^2 / \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right],$$

illetve

$$\mathbb{P}(|\bar{X} - \mu| \geq t) \leq 2\exp\left[-2n^2t^2 / \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right].$$

Ahol $\bar{X} = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

A momentum egyenlőtlenségek közül talán a legismertebbek a Marcinkiewicz–Zygmund- és Rosenthal-egyenlőtlenségek, mely 1938 a Quelques theoremes sur les fonctions independantes című munkában került publikálásra (lásd [Marcinkiewicz, Zygmund (1938)]). A következő két tétel alábbi alakja Allan Gut - Probability: A Graduate Course című könyvéből származik (lásd [Gut (2013)]).

1.10. Tétel (Marcinkiewicz–Zygmund egyenlőtlenségek. Lásd [Gut (2013)])**.** *Legyen* $p > 1$. *Tegyük fel, hogy* $X_1, \dots, X_n$ *független valószínűségi változók* 0 *várható értékkel, valamint* $\mathbb{E}|X_k|^p < \infty$, *minden* k*-ra, továbbá jelölje* $\{S_n, n \geq 1\}$ *a részösszegeiket. Akkor léteznek az olyan csak* p*-től függő* A_p^* *és* B_p^* *konstansok, melyekre*

$$A_p^*\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{p/2} \leq \mathbb{E}|S_n|^p \leq B_p^*\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{p/2},$$

vagy ezzel ekvivalens a következő:

$$(A_p^*)^{1/p}\|Q_n(X)\|_p \leq \|S_n\|_p \leq (B_p^*)^{1/p}\|Q_n(X)\|_p,$$

ahol

$$Q_n(X) = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{1/2}.$$

1.11. Tétel (Rosenthal-egyenlőtlenség, Lásd [Gut (2013)])**.** *$p > 2$ esetén, legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók 0 várhatóértékkel és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}|X_k|^p < \infty$ minden k-ra, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Akkor*

$$\mathbb{E}|S_n|^p \begin{cases} \leq & D_p \max\left\{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k|^p, \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k^2\right)^{p/2}\right\}, \\ \geq & 2^{-p} \max\left\{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k|^p, \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k^2\right)^{p/2}\right\}, \end{cases}$$

ahol D_p, egy csak p-től függő konstans.

Szintén hasznos, de talán kevésbé közismert a von Bahr–Esseen-egyenlőtlenség:

1.12. Tétel (von Bahr–Esseen. Lásd [von Bahr–Esseen (1965)])**.** *Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók egy sorozata, $\mathbb{E}|X_\nu|^r < \infty$, $1 \leq \nu \leq n$. Ha minden X_{m+1} S_m általi feltételes eloszlása szimmetrikus és $1 \leq m \leq n-1$, akkor*

$$\mathbb{E}|S_n|^r \leq \sum_{\nu=1}^{n} \mathbb{E}|X_\nu|^r, \quad 1 \leq r \leq 2.$$

Az utóbbi évtizedekben számos gyenge függőségi feltételt vezettek be. Nem lehet célunk a hatalmas tömegű cikk áttekintése, csupán az úgynevezett elfogadható (acceptable) és tágabb értelemben ortáns függő (WOD) sorozatokra koncentrálunk.

1.1. Definíció (Antonini, Kozachenko, Volodin (2008))**.** *Azt mondjuk, hogy az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ véges valószínűségi változók családja elfogadható, ha minden valós λ-ra*

$$\mathbb{E}\exp\left\{\lambda \sum_{k=1}^{n} X_k\right\} \leq \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\exp\{\lambda X_k\}.$$

1.2. Definíció (Wang, Li, Gao (2011))**.** *Azt mondjuk, hogy az $\{X_i, i \geq 1\}$ valószínűségi változók tágabb értelemben elfogadhatók $\delta_0 > 0$ esetén, ha minden valós $\lambda \geq \delta_0$-ra léteznek olyan pozitív $g(n), n \geq 1$ számok, hogy*

$$\mathbb{E}\exp\left\{\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i\right\} \leq g(n) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\exp\{\lambda X_i\}, \text{ minden } n \geq 1\text{-re.}$$

1.3. Definíció. *(Wang, Wang, Gao (2013)) Az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók sorozatát tágabb értelemben ortáns függőnek (WOD) nevezzük, ha tetszőleges pozitív egész n-re létezik egy olyan véges $g(n)$, hogy tetszőleges valós $x_1, \ldots, x_n$ számokra*

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \ldots, X_n > x_n) \leq g(n) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x_i)$$

és

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) \leq g(n) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x_i)$$

teljesül.

A fenti fogalmak, már meglehetősen általános fogalmak a korábbi gyenge függőségi fogalmakhoz képest.

Áttekintve a független és a gyengén függő valószínűségi változókra vonatkozó tételeket, látható, hogy azonos, vagy nagyon hasonló részek ismétlődnek ezekben. Célunk ilyen közös bizonyítási gondolatmenetek általános szinten való rögzítése volt. A tételeink az alábbi sémákra épülnek.

1. Ha az A típusú egyenlőtlenség teljesül a valószínűségi változóinkra (vagy azok csonkítottjaira), akkor a B típusú egyenlőtlenség is teljesül.

2. Ha a C típusú egyenlőtlenség teljesül a valószínűségi változóinkra (vagy azok csonkítottjaira), akkor a D típusú aszimptotikus tétel teljesül.

Természetesen ez a szemléletmód nem új. Például [Roussas (1996)]-ban megjegyezte, hogy a Bennett-egyenlőtlenség és a Hoeffding-egyenlőtlenség bizonyításában nem maga a függetlenség, hanem az elfogadhatóság definíciójában szereplő egyenlőtlenség a fontos. Azonban magát az elfogadhatóság fogalmát nem vezette be és nem is vizsgálta. Azt a fogalmat, csak 2008-ban vezette be [Antonini, Kozachenko, Volodin (2008)]. Az általános megközelítést hangsúlyozó cikkek közül megemlíthető [Fazekas, Klesov (2000)], ahol Hájek–Rényi-típusú egyenlőtlenség köré építettek egy általános módszert.

Szintén ez az általános szemléletmód jellemzi [Sung (2009)] cikkét, ahol azt igazolták, hogy a von Bahr–Esseen, illetve a Rosenthal-egyenlőtlenség (és bizonyos momentum feltételek) teljesülése a csonkított valószínűségi változókra, maga után vonja a teljes momentum konvergenciát.

1.13. Tétel (Sung (2009), Theorem 2.5)**.** *Legyen $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ valószínűségi változók egy tömbje és $\mathbb{E}|X_{ni}| < \infty$, $1 \leq i \leq n, n \geq 1$ esetén.*

Legyen $\{a_n, n \geq 1\}$ *és* $\{b_n, n \geq 1\}$ *pozitív valós számok sorozata. Tegyük fel, hogy a következő feltételek teljesülnek:*

(i) Valamely $1 < q \leq 2$*-re létezik egy olyan csak* q*-tól függő* C_q *pozitív konstans, hogy*

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n}(X'_{ni} - \mathbb{E}X'_{ni})\right|^q \leq C_q \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left|X'_{ni}\right|^q \quad \forall n \geq 1,$$

ahol $X'_{ni} = X_{ni}\mathbb{I}(|X'_{ni}| \leq a_n) + a_n\mathbb{I}(X_{ni} > a_n) - a_n\mathbb{I}(X_{ni} < -a_n)$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^{-q} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_{ni}|^q \mathbb{I}(|X_{ni}| \leq a_n) < \infty$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_{ni}|\mathbb{I}(|X_{ni}| > a_n) < \infty$.

Akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_{ni} - \mathbb{E}X_{ni})\right| - \epsilon a_n\right)^+ < \infty \quad \forall \epsilon > 0. \tag{1.1}$$

1.14. Tétel (Sung (2009), Theorem 2.7)**.** *Legyen* $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ *valószínűségi változók egy tömbje és* $\mathbb{E}|X_{ni}| < \infty$, $1 \leq i \leq n, n \geq 1$ *esetén. Legyen* $\{a_n, n \geq 1\}$ *és* $\{b_n, n \geq 1\}$ *pozitív valós számok sorozata. Tegyük fel, hogy a következő feltételek teljesülnek:*

(i) Valamely $q > 2$*-re létezik egy olyan csak* q*-tól függő* C_q *pozitív konstans, hogy*

$$\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n}(X'_{ni} - \mathbb{E}X'_{ni})\right|^q \leq C_q \left\{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left|X'_{ni}\right|^q + \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left|X'_{ni}\right|^2\right)^{\frac{q}{2}}\right\} \quad \forall n \geq 1,$$

ahol $X'_{ni} = X_{ni}\mathbb{I}(|X'_{ni}| \leq a_n) + a_n\mathbb{I}(X_{ni} > a_n) - a_n\mathbb{I}(X_{ni} < -a_n)$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^{-q} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_{ni}|^q \mathbb{I}(|X_{ni}| \leq a_n) < \infty$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_{ni}|\mathbb{I}(|X_{ni}| > a_n) < \infty$.

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_{ni}|^r / a_n^r\right)^{q/2} < \infty$ *valamely* $1 < r < 2$ *esetén.*

Akkor (1.1) *teljesül.*

A disszertáció második fejezetében az alábbi eredményeket bizonyítjuk a fenti témákhoz kapcsolódva. A 2.1 Tétel egy Fuk–Nagaev-típusú exponenciális egyenlőtlenség abban az esetben, ha a valószínűségi változók csonkítottjai tágabb értelemben elfogadhatóak. A 2.2 Tétel egy Hoeffding-típusú egyenlőtlenség tágabb értelemben elfogadható valószínűségi változókra. Mindkét tétel esetén a független esetbeli klasszikus bizonyítás lépései követhetőek. A 2.1 Következmény Hoeffding-típusú maximális egyenlőtlenség elfogadható valószínűségi változók esetén. A 2.4 Tételben belátjuk, hogy az exponenciális egyenlőtlenség maga után vonja a Rosenthal-egyenlőtlenséget további feltételek nélkül. A 2.6 Tételben azt igazoljuk hogy, ha az exponenciális egyenlőtlenség teljesül a csonkított és centralizált valószínűségi változókra, akkor teljesül egy Baum–Katz-típusú tétel.

A 2.7 - 2.10 Tételek az előző tételek közvetlen következményei valószínűségi változók WOD sorozataira, hiszen ezek teljesítik az előző tételek feltételeit. Tehát ezek a tételek rendre: exponenciális egyenlőtlenség, Hoeffding-egyenlőtlenség, Rosenthal-egyenlőtlenség és Baum–Katz-típusú tétel WOD sorozatokra.

A harmadik fejezet középpontjában a von Bahr–Esseen-egyenlőtlenség áll. A 3.1 Tételben azt látjuk be, hogy ha a q-adik von Bahr–Esseen-egyenlőtlenség teljesül a csonkított és centrált valószínűségi változókra, akkor a p-edik von Bahr–Esseen-egyenlőtlenség teljesül az eredeti valószínűségi változókra, ahol $1 < p < q$. A 3.2 Tételünk azt állítja, hogy ha az aszimmetrikusan csonkított valószínűségi változók sorozata tágabb értelemben elfogadható, akkor teljesül rá a von Bahr–Esseen-egyenlőtlenség. Ennek speciális esete a 3.3 Tétel, amely szerint egy WOD sorozatra teljesül a von Bahr–Esseen egyenlőtlenség. A 3.4 Tétel egy nagy számok erős törvénye, olyan azonos eloszlású valószínűségi változókra, amelyek aszimmetrikus csonkítottjainak sorozata elfogadható. Hasonló a 3.5 Tétel is a nem azonos eloszlású esetben. A 3.6 Tétel egy Marcinkiewicz-típusú nagy számok gyenge törvénye olyan gyengén átlagosan dominált valószínűségi változókra, amelyeknek az aszimmetrikusan csonkított változatai elfogadhatóak. Hasonló szituációkban mond ki teljes momentum konvergenciát a 3.7 Tétel.

A disszertáció negyedik fejezetében véletlen mátrixokkal perturbált mátrixok sajátértékeivel foglalkozunk. A véletlen mátrixok sajátértékeiről szóló egyik klasszikus tétel a Wigner-féle félkör törvény. Legyen W_n $n \times n$ valós szimmetrikus mátrix, melynek a főátlóban és a főátló feletti elemei független, azonos eloszlású, korlátos és nulla várható értékű valószínűségi változók. Ekkor $W_n/\sqrt{n}$ sajátértékeinek tapasztalati eloszlásfüggvénye majdnem biztosan konvergál egy olyan eloszlásfüggvényhez, melynek sűrűségfüggvénye „félkör alakú" (lásd: [Wigner (1955)], [Wigner (1958)]). Ennek a tételnek számos általánosítása van (lásd [Bai (1999)]). További híres eredmény a Marchenko–Pastur-tétel, melyben a minta kovariancia mátrix sajátértékeinek aszimptotikus viselkedését írták le (lásd [Marchenko, Pastur (1967)]). További nevezetes eredmények születtek az elliptikus véletlen mátrixok sajátértékeiről, ezek közül is kiemelkedő a 2014-ben Sean O'Rourke és David Renfrew által publikált Low rank perturbations of large elliptic random matrices című munka [O'Rourke, Renfrew (2014)] (lásd Appendix 8.1 Lemma).

A disszertációban a véletlen mátrixok csak mint perturbáló mátrixok szerepelnek, így nem fogunk elmélyülni a véletlen mátrixok elméletében. A célunk néhány, véletlen mátrixszal perturbált felfújt mátrix spektrumára vonatkozó tétel kiterjesztése.

Az egyik ilyen tétel [Bolla (2005)] Theorem 2.3. Ebben a tételben az $A = B+W$ mátrix sajátértékeinek viselkedését írják le, ahol B szimmetrikus felfújt mátrix, W pedig Wigner-zaj. A másik tétel [Bolla, Friedl, Krámli (2010)] Theorem 7. Ebben a tételben az $A = B + W$ szinguláris értékeit vizsgálják, ahol B felfújt mátrix, W pedig független eloszlású valószínűségi változókból álló mátrix.

A negyedik fejezet fő eredményei [Bolla (2005)] és [Bolla, Friedl, Krámli (2010)] néhány tételének kiterjesztése komplex esetre. A 4.1 Tételben a felfújt mátrixok komplex hermitikus mátrix, a zaj pedig komplex Wigner-mátrix. A 4.2 Tételben a zaj komplex minta kovariancia mátrix. A 4.3 Tételben a felfújt mátrix ugyan valós és szimmetrikus, a zaj azonban elliptikus, így a zajos mátrix sajátértékei komplex számok lesznek. A negyedik fejezet 4.5 Tétele olyan zaj mátrixra vonatkozik, amelynek elemei nemnegatívak és teljesítik az úgynevezett elfogadhatóságot. Ekkor a maximális sajátérték gyorsan konvergál a végtelenhez, ha a mátrix mérete növekszik. Számos numerikus eredmény is illusztrálja az elméleti tételeket.

2. Exponenciális és Rosenthal-egyenlőtlenségek

2.1. Bevezetés

A független valószínűségi változók aszimptotikus eredményeinek vizsgálatakor látható, hogy az exponenciális egyenlőtlenségek alapvető fontosságúak. Az exponenciális egyenlőtlenségek terén végzett kutatások közül fontosnak tartom kiemelni Bennett 1962-es független valószínűségi változók összegén értelmezett egyenlőtlenségekről szóló írását [Bennett (1962)], illetve Hoeffding 1963-ban megjelent munkáját [Hoeffding (1963)]. Ezt követően többen is kutattak klasszikus exponenciális egyenlőtlenségek területén, (lásd: a [Petrov (1995)] és a [Stout (1974)] monográfiákat, illetve a [Fuk, Nagaev (1971)] cikket).

A Rosenthal-egyenlőtlenség fontos szerepet játszik a független valószínűségi változók elméletében. Először Haskell P. Rosenthal 1970-ben megjelent On the subspaces of $L^p (p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables [Rosenthal (1970)] című munkájában találkozhatunk a Rosenthal-egyenlőtlenséggel. A kezdetekben megjelent eredményeket független valószínűségi változókra fogalmazták meg, lásd Nagaev és Pinelis 1977-ben megjelent munkája [Nagaev (1977)], Petrov 1995-ben publikált írása [Petrov (1995)]. A későbbi kutatások megmutatták, hogy a Rosenthal-egyenlőtlenség nemcsak független esetben lehet igaz, hanem gyenge függőségi feltételek mellett is teljesül (például [Fazekas, Kukush, Tómács (2000)]), vagy negatívan függő (negative dependence) esetben (lásd: [Gan, Chen, Qiu (2011)], [Wu, Song, Wang (2014)]). A továbbiakban belátjuk, hogy egy általános exponenciális egyenlőtlenség maga után von egy Rosenthal-egyenlőtlenséget (2.4 Tétel).

Több különböző egyenlőtlenség esetén felmerült az alábbi (2.1) reláció, melyet érdemes absztrakt formában megfogalmazni. Ez a következő definícióhoz vezet: Az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változókat elfogadhatónak nevezzük, ha

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda X_i} \leq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{\lambda X_i} \tag{2.1}$$

minden valós λ esetén, lásd [Antonini, Kozachenko, Volodin (2008)]. Elfogadható sorozatokra ismertek az exponenciális egyenlőtlenségek és a teljes konvergencia tételek eredményei, továbbá az elfogadhatóság különböző verzióit is bevezették, lásd: [Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)] és [Wang, Li, Gao (2011)].

Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy a fenti egyenlőtlenség egy megfelelő formája exponenciális egyenlőtlenséget implikál, az exponenciális egyenlőtlenség Rosenthal-egyenlőtlenséget implikál, továbbá az exponenciális egyenlőtlenségből teljes konvergencia következik. Fontos megjegyezni, hogy a fent említett eredmények eléréséhez nem volt szükséges további feltételeket hozzáadni.

Hasonló elvek inspirálták a [Fazekas, Klesov (2000)] munkát, ahol egy általános módszert írtak le, hogy megkapják a nagy számok erős törvényét. Belátták, hogy a Hájek–Rényi típusú maximális egyenlőtlenség mindig következménye egy megfelelő Kolmogorov típusú maximális egyenlőtlenségnek. Továbbá, a Hájek–Rényi típusú maximális egyenlőtlenség közvetlenül implikálja a nagy számok erős törvényét. Az előnye ennek az eredménynek az, hogy nem kellett további megszorításokat alkalmazni a valószínűségi változók függőségi struktúrájára. A [Fazekas, Klesov (2000)] eredményeit később széles körben alkalmazták függő valószínűségi változókra, lásd [Fazekas (2014)].

A 2.2 alfejezetben exponenciális egyenlőtlenségeket tanulmányozunk. Az exponenciális egyenlőtlenségek területén klasszikus eredmények fűződnek Bernstein, Kolmogorov, Fuk és Nagaev nevéhez, lásd: a [Petrov (1995)], [Stout (1974)] monográfiákat, illetve a [Fuk, Nagaev (1971)] cikket. Különböző függőségi feltételek mellett kaptak exponenciális egyenlőtlenségeket, például: [Christofides, Hadjikyriakou (2009)] a negatív asszociált, [Gan, Chen, Qiu (2011)] negatív ortáns függő, illetve [Wu, Guan (2012)] negatív ortáns függő valószínűségi változók esetére. A [Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)] cikkben elfogadható valószínűségi változókra kaptak exponenciális egyenlőtlenségeket, majd felhasználták őket a teljes konvergencia bizonyítására.

A 2.3 alfejezetben a Rosenthal-egyenlőtlenségeket tárgyaljuk. A Rosenthal-egyenlőtlenségek fontos szerepet játszanak a független valószínűségi változók elméletében (lásd: [Gut (2013)], [Petrov (1995)], [Nagaev (1977)]). A Rosenthal-egyenlőtlenségek igazak gyenge függőségi feltételek mellett (lásd [Fazekas, Kukush, Tómács (2000)]) vagy negatív függőség esetén (lásd: [Gan, Chen, Qiu (2011)], [Wu, Song, Wang (2014)]). A továbbiakban belátjuk, hogy egy általános exponenciális egyenlőtlenség maga után von egy Rosenthal-egyenlőtlenséget (2.4 Tétel).

A 2.4 alfejezetben a teljes konvergenciát vizsgáljuk. Független azonos eloszlású valószínűségi változókra a Kolmogorov-féle SLLN az egyik legfontosabb eredmény. A teljes konvergencia bizonyítása a Kolmogorov-féle SLLN-ben a [Hsu, Robbins (1947)] és a [Erdős (1949)] cikkekben található. Baum és Katz nevéhez fűződik egy általánosabb eredmény a konvergenciára, lásd [Baum, Katz (1965)]. Baum és Katz klasszikus eredményeinek kiterjesztése független dominált valószínűségi változókra található a [Hu, Móricz, Taylor (1989)] cikkben. A gyengén átlagosan dominált esettel Gut foglalkozott [Gut (1992)]. Gut eredményének kiterjesztése a [Fazekas (1992)] cikkben található. A Baum–Katz típusú eredmény kiterjesztésének komoly irodalma van, lásd [Shao (1993)]-ban α-keverést, [Wu, Guan (2012)] és [Wu, Song, Wang (2014)]-ben kiterjesztett negatív függőséget, [Wang, Xu, Hu, Volodin, Hu (2014)]-ben tágabb értelemben ortáns függő valószínűségi változókat használtak.

A mi célunk általános feltételek definiálása a Baum–Katz típusú eredményekre. Megmutatjuk, hogy egy exponenciális egyenlőtlenség a csonkított és centralizált valószínűségi változókra maga után vonja a Baum–Katz típusú konvergencia sebességet (2.6 Tétel).

A 2.5 alfejezetben a tágabb értelemben ortáns függő (WOD) sorozatokat tanulmányozunk. A WOD fogalmával először [Wang, Wang, Gao (2013)] cikkben találkozhatunk. Korábbi eredményekből tudjuk, hogy a kiterjesztett negatív ortáns függő sorozatok, a negatív ortáns függő sorozatok, a negatív szuperadditív függő sorozatok, negatív asszociált és a független sorozatok mindegyike WOD sorozat, lásd [Wang, Xu, Hu, Volodin, Hu (2014)].

Először összehasonlítjuk a WOD sorozatok és a tágabb értelemben elfogadható sorozatok fogalmát. Ismert, hogy a WOD sorozatok kielégítik a (2.2) egyenlőtlenséget, vagyis akkor tágabb értelemben elfogadhatóak. Továbbá a 2.1 Példa megmutatja, hogy a tágabb értelemben elfogadható valószínűségi változók osztálya nagyobb a WOD valószínűségi változók osztályánál. Így a tágabb értelemben elfogadható sorozatokra kapott eredményeink általánosabbak a WOD sorozatokra kapott eredményeknél.

2.2. Exponenciális egyenlőtlenségek

Legyen $d > 0$ valós szám és legyen ξ egy valószínűségi változó. A továbbiakban

$$\xi^{(d)} = \min\{\xi, d\}$$

jelöli a felülről csonkított valószínűségi változót.

Az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ valószínűségi változók sorozatára tekintsük a következő feltételt

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda\eta_i} \leq g(n) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{\lambda\eta_i} \tag{2.2}$$

ahol $0 < g(n) < \infty$. Ha a (2.2) feltétel teljesül minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén és minden n-re, akkor az $\eta_1, \eta_2, \ldots$ sorozatot tágabb értelemben elfogadhatónak (widely acceptable) nevezzük, lásd [Wang, Li, Gao (2011)]. Ha

$g(n) \equiv 1$, akkor az elfogadható (acceptable) valószínűségi változók fogalmánál vagyunk ([Antonini, Kozachenko, Volodin (2008)], [Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)]). Ha (2.2) igaz $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$-ra, akkor igaz marad $\eta_1 - a_1, \eta_2 - a_2, \ldots, \eta_n - a_n$-re is minden valós $a_1, \ldots, a_n$ esetén, speciálisan igaz marad $\eta_1 - \mathbb{E}\eta_1, \eta_2 - \mathbb{E}\eta_2, \ldots, \eta_n - \mathbb{E}\eta_n$-re. Ugyanis

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i(\eta_i - a_i)} = \mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i\eta_i} \cdot e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i} = e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i}\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i\eta_i} \leq$$

$$\leq e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i} g(n) \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{\lambda_i\eta_i} = g(n) \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{\lambda_i(\eta_i - a_i)}.$$

A következőkben látni fogjuk, hogy, ha feltesszük a (2.2) feltételt a λ pozitív értékeire a megfelelően csonkított valószínűségi változókra, akkor meg fogjuk kapni az egyoldali exponenciális egyenlőtlenséget. Ha pedig feltesszük a (2.2) feltételt a λ pozitív és negatív értékeire is, akkor meg fogjuk kapni a kétoldali exponenciális egyenlőtlenséget.

A következő tételben szereplő exponenciális egyenlőtlenséget negatívan ortáns függő (negatively orthant dependent, továbbiakban NOD) valószínűségi változókra kapták meg a [Gan, Chen, Qiu (2011)] 3. Lemmájában, valamint kiterjesztett negatívan függő (extended negatively dependent, továbbiakban END) valószínűségi változókra a [Wu, Guan (2012)] 1.2 Lemmájában.

2.1. Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók egy sorozata, $d > 0$. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ az összegük és $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2$ a szórásnégyzetek összege.*

Feltételezzük, hogy (2.2) teljesül $\eta_i = X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$-re $0 < \lambda \leq \lambda_0$ esetén. Akkor minden olyan x-re, melyre $0 < x \leq (B_n e^{d\lambda_0} - B_n)/d$, a következő igaz

$$\mathbb{P}(S_n > x) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i > d\right) + g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right). \quad (2.3)$$

Ha pedig (2.2) teljesül $\eta_i = X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ és $\eta_i = (-X_i)^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén is minden $0 < \lambda \leq \lambda_0$-ra, akkor minden olyan x-re, melyre $0 < x \leq (B_n e^{d\lambda_0} - B_n)/d$ a következő teljesül

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n| > x) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| > d\right) + \\ +2g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Bizonyítás. A bizonyítás [Fuk, Nagaev (1971)] klasszikus ötletét követi (lásd továbbá [Petrov (1995)]). Ugyanilyen módszert alkalmaztak a [Gan, Chen, Qiu (2011)] 3. Lemmájának a bizonyítására, és a [Wu, Guan (2012)] 1.2 Lemmájára is. Először (2.3)-t bizonyítjuk. Jelölje $\eta_i = X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a csonkított valószínűségi változókat. Mivel $\mathbb{E}X_i = 0$, így $\mathbb{E}\eta_i \leq 0$. Legyen $F_i(x) = \mathbb{P}(X_i < x)$ az X_i eloszlásfüggvénye. Algebrai számításokból és az $\mathbb{E}\eta_i \leq 0$-ból kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}e^{\lambda\eta_i} = \int\limits_{-\infty}^{d} e^{\lambda x}\mathrm{d}F_i(x) + e^{\lambda d}\mathbb{P}(X_i \geq d) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{d} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x)\mathrm{d}F_i(x) + (e^{\lambda d} - 1 - \lambda d)\mathbb{P}(X_i \geq d) + 1 + \lambda\mathbb{E}\eta_i \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{d} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x)\mathrm{d}F_i(x) + (e^{\lambda d} - 1 - \lambda d)\mathbb{P}(X_i \geq d) + 1 \leq$$

$$\leq 1 + \frac{e^{\lambda x} - 1 - \lambda x}{d^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{d} x^2\mathrm{d}F_i(x) + d^2\mathbb{P}(X_i \geq d)\right) = 1 + e^{\frac{\lambda d - 1 - \lambda d}{d^2}}\mathbb{E}\eta_i \leq$$

$$\leq 1 + \frac{e^{\lambda d} - 1 - \lambda d}{d^2}\mathbb{E}X_i^2 \leq \exp\left(\frac{e^{\lambda d} - 1 - \lambda d}{d^2}\mathbb{E}X_i^2\right). \tag{2.5}$$

Fent alkalmaztuk, hogy az $f(t) = (e^{\lambda t} - 1 - \lambda t)/t^2$ függvény monoton növekvő, így

$$\int\limits_{0}^{d} \frac{e^{\lambda x} - 1 - \lambda x}{x^2}x^2dF_i(x) \leq \frac{e^{\lambda d} - 1 - \lambda d}{d^2}\int\limits_{0}^{d} x^2dF_i(x),$$

és figyelembe vettük, hogy $\mathbb{E}\eta_i^2 \leq \mathbb{E}X_i^2$ és $1 + t \leq e^t$. Most, (2.2)-ből és (2.5)-ből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} e^{-\lambda x}\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda\eta_i} &\leq g(n)e^{-\lambda x}\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}e^{\lambda\eta_i} \leq \\ &\leq g(n)\exp\left(-\lambda x + \frac{e^{\lambda d} - 1 - \lambda d}{d^2}B_n\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Belátjuk, hogy az $f(\lambda) = -\lambda x + \frac{e^{\lambda d}-1-\lambda d}{d^2} B_n$ függvény minimuma $\lambda = \frac{\left(\ln\left(1+\frac{xd}{B_n}\right)\right)}{d}$-nél van. Mivel

$$f'(\lambda) = -x + \left(\frac{e^{\lambda d}}{d} - \frac{1}{d}\right) B_n,$$

és λ-ra megoldva a $-x + \left(\frac{e^{\lambda d}}{d} - \frac{1}{d}\right) B_n = 0$ egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$\lambda = \left(\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right) \Big/ d.$$

A második deriváltat meghatározva kapjuk, hogy

$$f''(\lambda) = B_n e^{\lambda d}.$$

A második deriváltba behelyettesítve kapjuk, hogy

$$f''\left(\left(\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right) \Big/ d\right) = B_n + xd.$$

Mivel $B_n \geq 0$, $d > 0$ és $x > 0$, ezért $B_n + xd > 0$, így kijelenthetjük, hogy az $f(\lambda)$ függvénynek a $\lambda = \left(\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right) \Big/ d$ pontban minimuma van.

Választhatjuk λ-nak ezt az értékét, mivel $0 < \lambda \leq \lambda_0$ teljesül a $0 < x \leq (B_n e^{d\lambda_0} - B_n)/d$ feltétel miatt. Ezért a (2.2) alkalmazása lehetséges erre a λ-ra. Továbbá látható, hogy λ ezen értékére $\frac{e^{\lambda d}-1-\lambda d}{d^2} B_n \leq \frac{x}{d}$, mivel

$$\frac{e^{\frac{\ln\left(1+\frac{xd}{B_n}\right)}{d} d} - 1 - \frac{\ln\left(1+\frac{xd}{B_n}\right)}{d} d}{d^2} B_n = \frac{1 + \frac{xd}{B_n} - 1 - \ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)}{d^2} B_n =$$

$$\frac{\frac{xd}{B_n} B_n}{d^2} - \frac{\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right) B_n}{d^2} = \frac{x}{d} - \frac{\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right) B_n}{d^2} \leq \frac{x}{d},$$

hiszen $d^2 > 0$, $B_n \geq 0$ és $\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right) \geq 0$, ezért az $\frac{\ln\left(1+\frac{xd}{B_n}\right) B_n}{d^2} \geq 0$.

Ezért (2.6)-be behelyettesítve az előző λ értéket, kapjuk, hogy

$$e^{-\lambda x} \mathbb{E} e^{\sum_{i=1}^n \lambda \eta_i} \leq g(n) \exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d} \ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right). \tag{2.7}$$

A Markov-egyenlőtlenségből és (2.7)-ből

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i^{(d)} > x\right) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda \sum_{i=1}^n \eta_i} > e^{\lambda x}\right) \leq \tag{2.8}$$

$$\leq e^{-\lambda x}\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda\eta_i} \leq g(n)\exp\left(\frac{x}{d}-\frac{x}{d}\ln\left(1+\frac{xd}{B_n}\right)\right).$$

Mivel

$$\mathbb{P}\left(S_n > x\right) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i > d\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{(d)} > x\right),$$

ezért (2.8) alkalmazásából következik (2.3).

Most belátjuk (2.4)-et. Ha (2.2) igaz $\eta_i = (-X_i)^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ és $0 < \lambda \leq \lambda_0$ esetén, akkor (2.8) igaz a $-X_1, -X_2, \ldots, -X_n$ valószínűségi változókra is. Alkalmazva (2.8)-t az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ és a $-X_1, -X_2, \ldots, -X_n$ valószínűségi változókra, a következőt kapjuk

$$\mathbb{P}\left(|S_n| > x\right) \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| > d\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{(d)} > x\right) + \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n}(-X_i)^{(d)} > x\right) \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| > d\right) + 2g(n)\exp\left(\frac{x}{d}-\frac{x}{d}\ln\left(1+\frac{xd}{B_n}\right)\right),$$

tehát megkaptuk (2.4)-t. □

A 2.1 Tételt megvizsgálva belátható, hogy a tétel formálisan kiterjeszthető kétindexes (többindexes) sorozatokra is. A bizonyítás lényegében ugyanaz, mint az egyindexes esetben.

Most a Hoeffding-egyenlőtlenséggel folytatjuk, mellyel Wassily Hoeffding 1963-ban megjelent „Probability inequalities for sums of bounded random variables” című írásában találkozhatunk először [Hoeffding (1963)]. Hoeffding eredeti eredménye eredménye független valószínűségi változókra vonatkozik. Később ezt kiterjesztették egyes függő sorozatokra is. A következő tétel a [Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)] 2.3 Tételének egy változata, melyben elfogadható valószínűségi változókat tekintettek.

2.2. Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók egy sorozata. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ az összeg. Legyenek a valószínűségi változók korlátosak, azaz $a_i \leq X_i \leq b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$-re, ahol a_i és b_i valós számok. Tegyük fel, hogy (2.2) teljesül $\eta_i = X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ és $0 < \lambda \leq \lambda_0$ esetén. Akkor minden olyan ε-ra, hogy $0 < \varepsilon \leq \frac{\lambda_0}{4}\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2$, a következő igaz*

$$\mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}S_n \geq \varepsilon\right) \leq g(n)\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right). \tag{2.9}$$

Tegyük fel, hogy (2.2) teljesül $\eta_i = X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ és $|\lambda| \leq \lambda_0$ esetén. Akkor minden olyan ε-ra, hogy $0 < \varepsilon \leq \frac{\lambda_0}{4} \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2$, teljesül a következő

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}S_n| \geq \varepsilon\right) \leq 2g(n) \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right). \tag{2.10}$$

Bizonyítás. Követhetjük a független valószínűségi változókra vonatkozó eredeti bizonyítást (lásd [Hoeffding (1963)], 2. Tétel). Elfogadható valószínűségi változókra az eredeti bizonyítás egy alkalmas módosítását már bemutatták a [Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)]-ben (lásd a 2.3 Tétel bizonyítását a [Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)]-ben).

A Markov-egyenlőtlenséget felhasználva

$$\mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}S_n \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{E}e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}S_n - \varepsilon)}, \lambda > 0.$$

Most a (2.2) egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}S_n - \varepsilon)} \leq g(n)e^{-\lambda\varepsilon} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{\lambda(X_i - \mathbb{E}X_i)}.$$

A továbbiakban legyen $\mathbb{E}X_i = \mu_i, i = 1, 2, \ldots$. Mivel az $f(x) = e^{\lambda x}$ függvény konvex, így $a < x < b$ esetén

$$\frac{e^{\lambda b} - e^{\lambda a}}{b - a}(x - a) + e^{a} \geq e^{\lambda x}$$

ahonnan

$$e^{\lambda x} \leq \frac{b - x}{b - a} e^{\lambda a} + \frac{x - a}{b - a} e^{\lambda b}.$$

Ebbe $x = X_i$-t írva és mindkét oldal várható értékét véve kapjuk, mivel $a_i \leq X \leq b_i$

$$\mathbb{E}e^{\lambda(X_i - \mathbb{E}X_i)} \leq e^{-\lambda\mu_i} \left(\frac{b_i - \mu_i}{b_i - a_i} e^{\lambda a_i} + \frac{\mu_i - a_i}{b_i - a_i} e^{\lambda b_i}\right)$$

Az előző egyenlőtlenség jobb oldalát jelölje $e^{L(\lambda_i)}$, ahol

$$L(\lambda_i) = -\lambda_i p_i + ln\left(1 - p_i + p_i e^{\lambda_i}\right), \quad \lambda_i = \lambda\left(b_i - a_i\right), \quad p_i = \frac{\mu_i - a_i}{b_i - a_i}$$

$L(\lambda_i)$ első két λ_i szerinti deriváltja a következő

$$L'(\lambda_i) = -p_i + \frac{p_i}{(1 - p_i)e^{-\lambda_i} + p_i}, \quad L''(\lambda_i) = \frac{p_i(1 - p_i)e^{-\lambda_i}}{\left((1 - p_i)e^{-\lambda_i} + p_i\right)^2}.$$

$L''(\lambda_i)$-t átalakítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
L''(\lambda_i) &= \frac{\left(p_i + (1-p_i)e^{-\lambda_i} - (1-p_i)e^{-\lambda_i}\right)(1-p_i)e^{-\lambda_i}}{\left((1-p_i)e^{-\lambda_i} + p_i\right)^2} = \\
&= \frac{\left(p_i + (1-p_i)e^{-\lambda_i}\right)(1-p_i)e^{-\lambda_i} - \left((1-p_i)e^{-\lambda_i}\right)^2}{\left((1-p_i)e^{-\lambda_i} + p_i\right)^2} = \\
&= \frac{(1-p_i)e^{-\lambda_i}}{(1-p_i)e^{-\lambda_i} + p_i} - \frac{\left((1-p_i)e^{-\lambda_i}\right)^2}{\left((1-p_i)e^{-\lambda_i} + p_i\right)^2} = \\
&= \frac{(1-p_i)e^{-\lambda_i}}{(1-p_i)e^{-\lambda_i} + p_i}\left(1 - \frac{(1-p_i)e^{-\lambda_i}}{(1-p_i)e^{-\lambda_i} + p_i}\right).
\end{aligned}$$

Mivel a fenti egyenlőség vége $u(1-u)$ alakú, ahol $0 < u < 1$, emiatt $L''(\lambda_i) \leq \frac{1}{4}$. Így Taylor-sorba fejtve $L(\lambda_i)$-t, a következőt kapjuk

$$L(\lambda_i) \leq L(0) + L'(0)\lambda_i + \frac{1}{8}\lambda_i^2 = \frac{1}{8}\lambda_i^2 = \frac{1}{8}\lambda^2(b_i - a_i)^2.$$

Így kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}S_n \geq \varepsilon\right) \leq g(n) \exp\left\{-\lambda\varepsilon + \frac{1}{8}\lambda^2 \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right\}.$$

A fenti egyenlőtlenség jobb oldalának a minimuma $\lambda = \frac{4\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}$, ezt visszahelyettesítve ugyanebbe az egyenlőtlenségbe kapjuk meg (2.9)-et. Mivel a $-X_1, -X_2, \ldots$ valószínűségi változók sorozata elfogadható, így (2.9)-ből következik (2.10). □

Most a maximális Hoeffding-egyenlőtlenséggel folytatjuk. Megjegyezzük, hogy [Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)]-ben a maximális Hoeffding egyenlőtlenséget nem vizsgálták elfogadható valószínűségi változók sorozatára.

2.1. Következmény. *Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók egy sorozata. Tegyük fel, hogy a valószínűségi változók korlátosak, azaz $a_i \leq X_i \leq b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$-re, ahol a_i és b_i valós számok. Olyan k, l-re, melyekre $1 \leq k \leq l \leq n$, jelölje $M_{k,l}$ a következő maximumot*

$$M_{k,l} = \max_{k \leq j \leq l}\left|\sum_{t=k}^{j}\left(X_t - \mathbb{E}X_t\right)\right|. \tag{2.11}$$

Tegyük fel, hogy

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=k}^{l}\lambda X_i} \leq C \prod_{i=k}^{l} \mathbb{E}e^{\lambda X_i} \tag{2.12}$$

tetszőleges $1 \leq k < l \leq n$ *és* $\lambda \in \mathbb{R}$ *esetén. Legyen* $\varepsilon > 0$*. Ekkor minden* $0 < \delta < 1$*-re létezik egy olyan* $C_1 = C_1(\delta)$*, hogy*

$$\mathbb{P}\left(M_{k,l} \geq \varepsilon\right) \leq 2CC_1 \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2(1-\delta)}{\sum_{i=k}^{l}(b_i - a_i)^2}\right) \tag{2.13}$$

minden $1 \leq k \leq l \leq n$*-re.*

Bizonyítás. (2.10)-ből kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{t=k}^{l}(X_t - \mathbb{E}X_t)\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2C \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=k}^{l}(b_i - a_i)^2}\right) \tag{2.14}$$

minden $1 \leq k < l \leq n$-re. Itt $g(k,l) = \sum_{i=k+1}^{k+l}(b_i - a_i)^2$ egy szuperadditív függvény. Most alkalmazzuk [Móricz (1979)] 1. Tételét, mely kimondja, hogy, ha létezik egy olyan nemnegatív $g(b,m)$ függvény, melyre igaz, hogy $g(b,h)+g(b+h,m-h) \leq g(b,m)$ minden $b \geq 0$ és $1 \leq h < m$, vagyis $g(b,m)$ a $[b+1, b+m]$ intervallum szuperadditív függvénye, és minden $\varepsilon \in (0,\Lambda), b \geq 0$ és $m \geq 1$ esetén teljesül, hogy $\mathbb{P}\left(|S(b,m)| \geq \varepsilon\right) \leq C \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{g(b,m)}\right)$, ahol $S(b,m) = \sum_{k=b+1}^{b+m}\xi_k$, $\varepsilon \in (0,\Lambda), 0 < \Lambda \leq \infty$ és C egy konstans, akkor tetszőleges $0 < \beta < 1$ esetén létezik egy olyan $C_1 = C_1(\beta)$ konstans, hogy $\mathbb{P}\left(M(b,m) \geq \varepsilon\right) \leq C_1 \exp\left(-\frac{(1-\beta)\varepsilon^2}{g(b,m)}\right)$, ahol $M(b,m) = \max\limits_{1\leq k\leq m}|S(b,k)|$ $(S(b,0) = M(b,0) = 0)$, igaz minden $\varepsilon \in (0,\Lambda), b \geq 0$ és $m \geq 1$. Ezzel megkaptuk a kívánt eredményt. □

2.3. A Rosenthal-egyenlőtlenség

A következőkben bemutatjuk, hogy egy általános exponenciális egyenlőtlenségből következik egy alkalmas Rosenthal-egyenlőtlenség. A Rosenthal-egyenlőtlenség [Rosenthal (1970)] független valószínűségi változókra az alábbi:

2.3. Tétel (Rosenthal-egyenlőtlenség, Gut (2013))**.** $p > 2$ *esetén, legyenek* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *független valószínűségi változók* 0 *várhatóértékkel és tegyük fel, hogy* $\mathbb{E}|X_k|^p < \infty$ *minden* k*-ra,* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$*. Akkor*

$$\mathbb{E}|S_n|^p \begin{cases} \leq & D_p \max\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X_k|^p, (\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}X_k^2)^{p/2}\right\}, \\ \geq & 2^{-p}\max\left\{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X_k|^p, (\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}X_k^2)^{p/2}\right\}, \end{cases}$$

ahol D_p, egy csak p-től függő konstans.

A következő tételünk lényege az, hogy nem teszünk fel a kiinduló valószínűségi változók között semmilyen függőségi feltételt, hanem absztrakt módon egy exponenciális egyenlőtlenség teljesülése esetére vezetjük le a Rosenthal-típusú egyenlőtlenséget.

2.4. Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nulla várhatóértékű valószínűségi változók egy sorozata, továbbá legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ az összegük és B_n pozitív számok egy sorozata. Tegyük fel,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|S_n| > x\right) \le l(n)\mathbb{P}\left(\max_{1\le i\le n} |X_i| > d\right) + \\ +h(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right)\end{aligned} \tag{2.15}$$

teljesül minden $x > 0$ és $d > 0$ esetén, ahol $l(n)$ és $h(n)$ valós számok. Akkor $p > 0$-ra

$$\mathbb{E}|S_n|^p \le C_1 l(n)\mathbb{E}\max_{1\le i\le n} |X_i|^p + C_2 h(n) B_n^{p/2} \tag{2.16}$$

teljesül, ahol $C_1 = p^p$, $C_2 = \frac{1}{2}p^{1+p/2}e^p B\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ abszolút konstansok, a $B(u, v)$ béta függvénnyel.

Bizonyítás. A klasszikus módszert használjuk, lásd [Petrov (1995)]. Alkalmazzuk a várhatóérték ismert kiszámítását [Gut (2013)] 2. fejezet 12.1 Tételét (lásd Appendix 8.1), majd a (2.15) egyenlőtlenséget $d = x/p$-vel. Akkor a következőt kapjuk

$$\mathbb{E}|S_n|^p = \int_0^\infty p\mathbb{P}(|S_n| \ge x)x^{p-1}\mathrm{d}x \le$$

$$\le \int_0^\infty pl(n)\mathbb{P}\left(\max_{1\le i\le n} |X_i| > \frac{x}{p}\right) x^{p-1}\mathrm{d}x + \int_0^\infty ph(n)e^p\left(1 + \frac{x^2}{pB_n}\right)^{-p} x^{p-1}\mathrm{d}x =$$

$$= l(n)p^p\mathbb{E}\max_{1\le i\le n} |X_i|^p + h(n)\frac{1}{2}p^{1+p/2}e^p B\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right) B_n^{p/2},$$

ahol az utolsó lépésben az első integrálban $y = \frac{x}{p}$-t helyettesítettük, és a második integrálban kicseréltük a változót a következő módon $t = \frac{x^2}{pB_n}$, továbbá $B(u, v)$ a béta függvényt jelöli

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^{u-1}(1+t)^{-(u+v)}\mathrm{d}t, \qquad u > 0, v > 0. \ \square$$

2.1. *Megjegyzés.* Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ nulla várhatóértékű valószínűségi változók egy sorozata, továbbá legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ az összegük és $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2$ a szórásnégyzetek összege. Tegyük fel, hogy (2.2) teljesül $\eta_i = X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \dots, n$-re és $\eta_i = (-X_i)^{(d)}$, $i = 1, 2, \dots, n$-re is minden $\lambda > 0$ és $d > 0$ esetén. Akkor a 2.1 Tételből és a (2.16) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\mathbb{E}|S_n|^p \le C_1 \mathbb{E} \max_{1 \le i \le n} |X_i|^p + 2C_2 g(n) B_n^{p/2}, \tag{2.17}$$

ahol $p > 0$.

Fontos megjegyezni, hogy [Sung (2009)]-ban be van bizonyítva, hogy a Marcinkiewicz–Zygmund- és a Rosenthal-egyenlőtlenségekből teljes momentum konvergencia következik. Továbbá, a [Wang, Hu (2012)]-ben bemutatták, hogy egy Rosenthal-egyenlőtlenségből következik a teljes konvergencia és a teljes momentum konvergencia.

2.4. Teljes konvergencia

Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy egy általános exponenciális egyenlőtlenségből következik egy Baum–Katz-típusú tétel. Emlékeztetünk a nagy számok Kolmogorov-féle erős törvényére. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Ha $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ és $m = \mathbb{E}X_i$, akkor $\frac{S_n}{n} \to m$ 1 valószínűséggel. Ha pedig $\frac{S_n}{n} \to c$ 1 valószínűséggel, akkor $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ és $c = \mathbb{E}X_i$. A nagy számok törvényeinek vannak úgynevezett teljes konvergenciát (complete convergence) kimondó változatai.

Azt mondjuk, hogy $Y_n \to 0$ teljesen, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) < \infty.$$

A Borel–Cantelli-lemma alapján látható, hogy a teljes konvergenciából következik az 1 valószínűséggel való konvergencia.

A nagy számok törvényének teljes konvergenciát kimondó változata Hsu–Robbins és Erdős nevéhez fűződik. A Hsu–Robbins-tétel eredeti formája a következő.

2.5. Tétel (Hsu és Robbins (1947))**.** *Legyen $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók egy sorozata, azonos $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel és*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) < \infty. \tag{2.18}$$

Akkor az $Y = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ *sorozat nullához konvergál teljesen, azaz a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|Y_n| > \epsilon\} \tag{2.19}$$

konvergens minden $\epsilon > 0$ *esetén.*

Legyen Y_n, $i = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók egy sorozata. Azt mondjuk, hogy ez a sorozat átlagosan gyengén dominált (weakly mean dominated, wmd) az Y valószínűségi változó által, ha

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(|Y_i| > t\right) \leq C \mathbb{P}\left(|Y| > t\right) \tag{2.20}$$

minden $t \geq 0$-re és $n = 1, 2, \ldots$-re (lásd [Gut (1992)]).

A továbbiakban használni fogjuk a következő lemmát (lásd [Fazekas (1992)]).

2.1. Lemma (Fazekas (1992))**.** *Legyen az* Y_n, $i = 1, 2, \ldots$ *sorozat átlagosan gyengén dominált az* Y *valószínűségi változó által. Legyen* $d > 0$ *rögzített. Legyen* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *egy szigorúan növekvő nem korlátos függvény és* $f(0) = 0$. *Akkor*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|Y_i| \leq C \mathbb{E}|Y|; \tag{2.21}$$

az $f(|Y_n|)$, $i = 1, 2, \ldots$ *sorozat átlagosan gyengén dominált (weakly mean dominated, wmd) az* $f(|Y|)$ *valószínűségi változó által;*

a csonkított $|Y_n|^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots$ *sorozat átlagosan gyengén dominált a csonkított* $|Y|^{(d)}$ *valószínűségi változó által;*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|Y_i| \mathbb{I}\left\{|Y_i| > t\right\} \leq C \mathbb{E}|Y| \mathbb{I}\left\{|Y| > t\right\}. \tag{2.22}$$

Adott X valószínűségi változó és t pozitív szám esetén a következő csonkított valószínűségi változót fogjuk használni

$$\tilde{X}^{(t)} = -t \mathbb{I}\left\{X < -t\right\} + X \mathbb{I}\left\{|X| \leq t\right\} + t \mathbb{I}\left\{X > t\right\}. \tag{2.23}$$

Itt $\mathbb{I}$ egy halmaz indikátor függvényét jelöli.

A következő tételben használjuk a reguláris változású függvényeket

2.1. Definíció. *Egy pozitív mérhető f függvény reguláris változású $\rho \in \mathbb{R}$ kitevővel, ha*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\rho \text{ minden } \lambda > 0\text{-ra.}$$

A következő tételünk egy Baum–Katz-típusú tétel.

2.6. Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók egy sorozata, továbbá legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ a részösszegük. Legyen $0 < p < 2$ és α egy pozitív szám. Tegyük fel, hogy az exponenciális egyenlőtlenség teljesül csonkított és centralizált valószínűségi változókra, azaz*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n \left(\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right)\right| > x\right) \le \tag{2.24}$$

$$\le \mathbb{P}\left(\max_{1\le i\le n}\left|\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right| > d\right) + g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right)$$

minden $t > 0$, $x > 0$, $d > 0$ és $n = 1, 2, \dots$ esetén, ahol $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right)^2$. Tegyük fel, hogy $g(.)$ reguláris változású r kitevővel, ahol $0 < r < \alpha(2-p)$. Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \dots$ átlagosan gyengén dominált (weakly mean dominated, wmd) az X valószínűségi változó által, melyre $\mathbb{E}|X|^p g(|X|^{1/\alpha}) < \infty$. Ha $0 < p < 1$, akkor feltesszük, hogy $\alpha p > 1$. Ha $1 \le p < 2$, akkor feltesszük, hogy $\alpha p \ge 1$ és $\mathbb{E}X_i = 0$ minden i-re. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-2}\mathbb{P}\left(|S_n| > \varepsilon n^\alpha\right) < \infty.$$

Bizonyítás. Az egyszerűségért használjuk a következő jelölést: $X'_{ni} = \tilde{X}_i^{(\varepsilon n^\alpha/4)}$ és $X' = \tilde{X}^{(\varepsilon n^\alpha/4)}$. Az $\{|S_n| > \varepsilon n^\alpha\}$ eseményt három részre bontjuk:

$$\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-2}\mathbb{P}\left(|S_n| > \varepsilon n^\alpha\right) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-2}\sum_{i=1}^n \mathbb{P}\left(|X_i| > \frac{\varepsilon n^\alpha}{4}\right) + \sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-2}\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n (X'_{ni} - \mathbb{E}X'_{ni})\right| > \frac{\varepsilon n^\alpha}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-2}\mathbb{I}\left(\left|\sum_{i=1}^n \mathbb{E}X'_{ni}\right| > \frac{\varepsilon n^\alpha}{2}\right) = A_1 + A_2 + A_3.$$

Használva a (wmd) feltevést, a következőt kapjuk

$$A_1 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1} \mathbb{P}\left(|X| > \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right) \leq$$

$$\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1} \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon i^{\alpha}}{4} < |X| \leq \frac{\varepsilon (i+1)^{\alpha}}{4}\right) =$$

$$= C \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon i^{\alpha}}{4} < |X| \leq \frac{\varepsilon (i+1)^{\alpha}}{4}\right) \sum_{n=1}^{i} n^{\alpha p-1} \leq$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{\infty} i^{\alpha p} \mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon i^{\alpha}}{4} < |X| \leq \frac{\varepsilon (i+1)^{\alpha}}{4}\right) \leq C\mathbb{E}|X|^p < \infty.$$

A_3 vizsgálatához tekintsük a következőt

$$V = n^{-\alpha} \left|\sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{E}X'_{ni}\right| =$$

$$= n^{-\alpha} \left|\sum\nolimits_{i=1}^{n} \left(-\frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\mathbb{P}\left\{X_i < -\frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\} + \mathbb{E}X_i \mathbb{I}\left\{|X_i| \leq \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\mathbb{P}\left\{X_i > \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\}\right)\right|.$$

Ha $p \geq 1$, akkor használva, hogy $\mathbb{E}X_i = 0$, a (wmd) feltevést és a 2.1 Lemmát, a következőt kapjuk

$$V \leq n^{-\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E}|X_i| \mathbb{I}\left\{|X_i| > \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\} + \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\mathbb{P}\left\{|X_i| > \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\}\right) \leq$$

$$\leq 2n^{-\alpha} n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_i| \mathbb{I}\left\{|X_i| > \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\} \leq C n^{1-\alpha} \mathbb{E}|X| \mathbb{I}\left\{|X| > \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\} \leq$$

$$\leq C n^{1-\alpha} \mathbb{E}|X| \frac{|X|^{p-1}}{n^{\alpha(p-1)}} \mathbb{I}\left\{|X| > \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\} = C n^{1-\alpha p} \mathbb{E}|X|^p \mathbb{I}\left\{|X| > \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\} \to 0,$$

ahogy $n \to \infty$, mert $\mathbb{E}|X|^p < \infty$ és $\alpha p \geq 1$.

Ha $p < 1$, akkor használva az (2.21)-t az $|X_i|^{(d)}$ csonkított valószínűségi változókra kapjuk, hogy

$$V \leq n^{-\alpha} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E}|X_i| \mathbb{I}\left\{|X_i| \leq \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\} + \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\mathbb{P}\left\{|X_i| > \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\}\right) \leq$$

$$\leq C n^{1-\alpha} \mathbb{E}|X| \mathbb{I}\left\{|X| \leq \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\} + C n^{1-\alpha} \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4} \mathbb{P}\left\{|X| > \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right\} \leq$$

$$\leq Cn^{1-\alpha}\mathbb{E}|X|\frac{|X|^{p-1}}{(\varepsilon n^\alpha/4)^{p-1}}\mathbb{I}\left\{|X|\leq\frac{\varepsilon n^\alpha}{4}\right\}+Cn\frac{\mathbb{E}|X|^p}{(\varepsilon n^\alpha/4)^p}\leq$$
$$\leq Cn^{1-\alpha p}\mathbb{E}|X|^p\mathbb{I}\left\{|X|\leq\frac{\varepsilon n^\alpha}{4}\right\}+Cn^{1-\alpha p}\mathbb{E}|X|^p\to 0,$$

ahogy $n\to\infty$, mert $\mathbb{E}|X|^p<\infty$ és $\alpha p>1$ ebben az esetben. Ezért

$$n^{-\alpha}\left|\sum\nolimits_{i=1}^n \mathbb{E}X'_{ni}\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.25}$$

ha $n>n_\varepsilon$. Ezért $A_3<\infty$.

Alkalmazva a (2.24) egyenlőtlenséget $d=x=\varepsilon n^\alpha/2$-vel és használva a $B_n=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}\left(X'_{ni}-\mathbb{E}X'_{ni}\right)^2$ jelölést, a következőt kapjuk

$$A_2=\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-2}\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n(X'_{ni}-\mathbb{E}X'_{ni})\right|>\frac{\varepsilon n^\alpha}{2}\right)\leq$$
$$\leq\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-2}\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n}|X'_{ni}-\mathbb{E}X'_{ni}|>d\right)+$$
$$+\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-2}g(n)\exp\left(\frac{x}{d}-\frac{x}{d}\ln\left(1+\frac{xd}{B_n}\right)\right).$$

Mivel $|X'_{ni}|\leq\frac{d}{2}$, így az első tag nulla. Tehát $x=d=\varepsilon n^\alpha/2$ miatt

$$A_2\leq\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-2}g(n)e\frac{1}{1+\frac{xd}{B_n}}\leq C\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-2-2\alpha}g(n)B_n=$$
$$=C\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-2-2\alpha}g(n)\sum_{i=1}^n\mathbb{E}(X'_{ni})^2.$$

Használva az átlagosan gyengén dominált feltevést, és a 2.1 Lemmát, kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^n\mathbb{E}(X'_{ni})^2\leq n\mathbb{E}(X')^2$. Tehát X' definíciója miatt

$$A_2\leq C\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-1-2\alpha}g(n)\left(\frac{\varepsilon n^\alpha}{4}\right)^2\mathbb{P}\left(|X|>\frac{\varepsilon n^\alpha}{4}\right)+$$
$$+C\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-1-2\alpha}g(n)\mathbb{E}\left(X^2\mathbb{I}\left\{|X|\leq\frac{\varepsilon n^\alpha}{4}\right\}\right)=A_{21}+A_{22}.$$

A_{22}-re a következőt kapjuk

$$A_{22}\leq C\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha p-1-2\alpha}g(n)\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon i^\alpha}{4}<|X|\leq\frac{\varepsilon(i+1)^\alpha}{4}\right)\left(\frac{\varepsilon(i+1)^\alpha}{4}\right)^2\leq$$

$$\leq C \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon i^{\alpha}}{4} < |X| \leq \frac{\varepsilon (i+1)^{\alpha}}{4}\right) \left(\frac{\varepsilon (i+1)^{\alpha}}{4}\right)^{2} \sum_{n=i+1}^{\infty} n^{\alpha p - 1 - 2\alpha} g(n).$$

Itt

$$\sum_{n=i+1}^{\infty} n^{\alpha p-1-2\alpha} g(n) \approx \int_{i}^{\infty} x^{\alpha p-1-2\alpha} g(x) dx.$$

Most használva a reguláris változású függvények ismert tulajdonságait (lásd [Bingham, Goldie, Teugels (1987)], 26-27. oldal) a következőt kapjuk

$$A_{22} \leq C \sum_{i=0}^{\infty} i^{\alpha p} g(i) \mathbb{P}\left(i < \left(\frac{4|X|}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq i+1\right) \leq$$

$$\leq C \mathbb{E}\left(|X|^{p} g\left(|X|^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right) < \infty.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$A_{21} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1} g(n) \mathbb{P}\left(|X| > \frac{\varepsilon n^{\alpha}}{4}\right) =$$

$$= C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1} g(n) \sum_{i=n}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon i^{\alpha}}{4} < |X| \leq \frac{\varepsilon (i+1)^{\alpha}}{4}\right) \leq$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\varepsilon i^{\alpha}}{4} < |X| \leq \frac{\varepsilon (i+1)^{\alpha}}{4}\right) \sum_{n=1}^{i} n^{\alpha p-1} g(n).$$

Belátjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{i} n^{\alpha p-1} g(n) \leq C i^{\alpha p} g(i).$$

$x^{\alpha p-1} g(x)$ reguláris változású $\alpha p - 1 + r > 0$ kitevővel. Ezért a [Bingham, Goldie, Teugels (1987)] 1.5.4 Tétele miatt $x^{\alpha p-1} g(x)$ ekvivalens egy monoton növekvő függvénnyel. Ezért a szumma behelyettesíthető megfelelő integrállal. Azaz

$$\sum_{n=1}^{i} n^{\alpha p-1} g(n) \leq C \int_{1}^{i} x^{\alpha p-1} g(x) dx.$$

Mivel $\alpha p - 1 + r > -1$, így [Bingham, Goldie, Teugels (1987)] 1.5.8 Állítása miatt

$$\int_{1}^{i} x^{\alpha p-1} g(x) dx \leq C i^{\alpha p} g(i),$$

így

$$\sum_{n=1}^{i} n^{\alpha p-1} g(n) \leq C i^{\alpha p} g(i).$$

Most ismét használva a regulárisan változó függvények tulajdonságait (lásd [Bingham, Goldie, Teugels (1987)], 26-27. oldal)

$$B_1 \leq C \sum_{i=0}^{\infty} i^{\alpha p} g(i) \mathbb{P}\left(i < \left(\frac{4|X|}{\varepsilon} \right)^{1/\alpha} \leq i+1 \right) \leq$$

$$\leq C\mathbb{E}\left(\left(\left(\frac{4}{\varepsilon}|X| \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{\alpha p} g\left(\frac{4}{\varepsilon}|X|^{\frac{1}{\alpha}} \right) = C\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{p} \mathbb{E}|X|^p \underbrace{g\left(\frac{4}{\varepsilon}|X|^{\frac{1}{\alpha}} \right)}_{\leq Cg\left(|X|^{\frac{1}{\alpha}}\right)} \leq$$

$$\leq C\mathbb{E}|X|^p g\left(|X|^{1/\alpha} \right) < \infty. \qquad \square$$

2.5. Tágabb értelemben ortáns függő sorozatok

Az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók sorozatát tágabb értelemben ortáns függőnek (WOD) nevezzük, ha tetszőleges pozitív egész n-re létezik egy olyan véges $g(n)$, hogy tetszőleges valós $x_1, \ldots, x_n$ számokra

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \ldots, X_n > x_n) \leq g(n) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > x_i) \tag{2.26}$$

és

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) \leq g(n) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x_i), \tag{2.27}$$

teljesül (lásd [Wang, Wang, Gao (2013)]). Ismeretes, hogy a kiterjesztett negatív ortáns függő sorozatok, a negatív ortáns függő sorozatok, a negatív szuperadditív függő sorozatok, negatív asszociált és a független sorozatok mindegyike WOD sorozat, lásd [Wang, Xu, Hu, Volodin, Hu (2014)]. [Wang, Xu, Hu, Volodin, Hu (2014)]-ben exponenciális egyenlőtlenségeket és teljes konvergencia tételeket bizonyítottak WOD sorozatokra.

Ebben a fejezetben először összehasonlítjuk a WOD sorozatot és a tágabb értelemben elfogadható sorozatot. Ha $X_1, X_2, \ldots$ egy WOD sorozat, akkor ismert, hogy

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda X_i} \leq g(n) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{\lambda X_i} \tag{2.28}$$

tetszőleges valós λ-ra. Felidézzük, hogy $X_1, X_2, \ldots$-t tágabb értelemben elfogadhatónak nevezzük, ha teljesítik a (2.28) egyenlőtlenséget. Tehát, ha valószínűségi változók egy sorozata WOD, akkor tágabb értelemben elfogadható is ugyanazzal a $g(n)$ sorozattal. A következő példa bemutatja, hogy a fordított állítás nem igaz. A 2.1 Példa bemutatja, hogy a tágabb értelemben elfogadható valószínűségi változók osztálya bővebb, mint a WOD valószínűségi változóké, feltételezve, ugyanazt a $g(n)$ sorozatot. Annak érdekében, hogy ezt megmutassuk, egy olyan példát fogunk használni, amely a [Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)]-ben megadott példa diszkrét megfelelőjének tekinthető. Az a példa a Feller-féle ellenpéldán alapszik (lásd [Feller (1971)]-ban a III/1 Problémát).

2.1. *Példa.* Legyenek X és Y diszkrét valószínűségi változók a következő együttes eloszlással

$$\mathbb{P}(X=0,Y=0)=\tfrac{1}{16},\quad \mathbb{P}(X=0,Y=1)=\tfrac{3}{16},\quad \mathbb{P}(X=0,Y=2)=0,$$

$$\mathbb{P}(X=1,Y=0)=\tfrac{1}{16},\quad \mathbb{P}(X=1,Y=1)=\tfrac{4}{16},\quad \mathbb{P}(X=1,Y=2)=\tfrac{3}{16},$$

$$\mathbb{P}(X=2,Y=0)=\tfrac{2}{16},\quad \mathbb{P}(X=2,Y=1)=\tfrac{1}{16},\quad \mathbb{P}(X=2,Y=2)=\tfrac{1}{16}.$$

$$\mathbb{P}(X=0)=\tfrac{1}{4},\quad \mathbb{P}(X=1)=\tfrac{1}{2},\quad \mathbb{P}(X=2)=\tfrac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(Y=0)=\tfrac{1}{4},\quad \mathbb{P}(Y=1)=\tfrac{1}{2},\quad \mathbb{P}(Y=2)=\tfrac{1}{4}.$$

Független esetben az együttes eloszlás ($\widetilde{X}$ eloszlása és X eloszlása megegyezik, illetve $\widetilde{Y}$ eloszlása és Y eloszlása is megegyezik, de függetlenek).

$\widetilde{X}$ \ $\widetilde{Y}$	0	1	2	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

1. Táblázat. $\widetilde{X}$ és $\widetilde{Y}$ kontingencia táblázata

$X+Y$ eloszlása	0	1	2	3	4
	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
$\widetilde{X}+\widetilde{Y}$ eloszlása	0	1	2	3	4
	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

2. Táblázat. $X+Y$ és $\widetilde{X}+\widetilde{Y}$ eloszlása

Látható, hogy X és Y nem független, de az $X+Y$ eloszlása ugyanaz, mint az X eloszlásának és az Y eloszlásának a konvolúciója. Ezért

$$\mathbb{E}e^{\lambda(X+Y)} = \mathbb{E}e^{\lambda X}\mathbb{E}e^{\lambda Y}.$$

Azonban, direkt számításokkal

$$\mathbb{P}(X \le u, Y \le v) \le g\mathbb{P}(X \le u)\mathbb{P}(Y \le v) \tag{2.29}$$

és

$$\mathbb{P}(X > u, Y > v) \le g\mathbb{P}(X > u)\mathbb{P}(Y > v) \tag{2.30}$$

nem teljesülnek $g = 1$-re. Például

$$\mathbb{P}(X > 0, Y > 1) = \frac{1}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{16} = \frac{4}{3}\mathbb{P}(X > 0)\mathbb{P}(Y > 1).$$

Látható, hogy a legkisebb konstans, amely kielégíti a fenti (2.29) - (2.30) egyenlőtlenségeket a $g = 4/3$.

Most legyenek a kétdimenziós $(X_1, X_2), (X_3, X_4), (X_5, X_6), \dots$ valószínűségi változók az (X, Y) független másolatai. Akkor a (2.28) egyenlőtlenség teljesül $g(n) \equiv 1$ esetén, míg (2.26) és (2.27) $g(n) = (4/3)^{n/2}$ esetén teljesül. Tehát élesebb eredményt kapunk, ha direkt a (2.28) egyenlőtlenséget alkalmazzuk.

A fejezet hátralévő részében alkalmazzuk WOD sorozatokra az előző fejezetben kapott eredményeket. Ehhez először fel kell sorolni néhány ismert tényt a WOD sorozatokról. Ha $X_1, X_2, \dots$ egy WOD sorozat és a valós $f_1, f_2, \dots$ függvények, vagy mind nem csökkenőek, vagy pedig mind nem növekvőek, akkor az $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots$ sorozat szintén WOD. Speciálisan a csonkított $X_1^{(t)}, X_2^{(t)}, \dots$ sorozat is WOD.

2.7. Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nulla várhatóértékű valószínűségi változók WOD sorozata. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ az összegük és $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2$ a szórásnégyzetek összege. Akkor $d > 0$ és $x > 0$ esetén*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n > x) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} X_i > d\right) + \\ +g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1+\frac{xd}{B_n}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.31}$$

és

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n| > x) \leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| > d\right) + \\ +2g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1+\frac{xd}{B_n}\right)\right) \end{aligned} \tag{2.32}$$

teljesül.

Bizonyítás. Ez a 2.1 Tétel és a (2.28) egyenlőtlenség következménye. Meg kell jegyezni, hogy (2.32) egy speciális esete a [Wang, Xu, Hu, Volodin, Hu (2014)] 2.2 Lemmájának, aminek részletes bizonyítását nem közölték. □

Most a WOD sorozatokra értelmezett Hoeffding-egyenlőtlenséggel folytatjuk.

2.8. Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók egy WOD sorozata. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ az összegük. Legyenek a valószínűségi változók korlátosak, azaz $a_i \leq X_i \leq b_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$-re, ahol a_i és b_i valós számok. Legyen $\varepsilon > 0$. Akkor*

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}S_n \geq \varepsilon) \leq g(n)\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right), \tag{2.33}$$

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}S_n| \geq \varepsilon) \leq 2g(n)\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right). \tag{2.34}$$

Legyen $M_{k,l}$ a (2.11)-ben definiált maximum. Tegyük fel, hogy (2.26) és (2.27) teljesülnek $g(n) = C$ esetén. Akkor minden $0 < \delta < 1$-re létezik egy olyan $C_1 = C_1(\delta)$, hogy

$$\mathbb{P}(M_{k,l} \geq \varepsilon) \leq 2CC_1\exp\left(-\frac{2\varepsilon^2(1-\delta)}{\sum_{i=k}^l (b_i - a_i)^2}\right) \tag{2.35}$$

minden $1 \leq k \leq l \leq n$-re.

Bizonyítás. A fent leírtak a 2.2 Tétel, a 2.1 Következmény és a (2.28) egyenlőtlenség következményei. □

Most a WOD sorozatokra értelmezett Rosenthal-egyenlőtlenséggel folytatjuk.

2.9. Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nulla várhatóértékű valószínűségi változók egy WOD sorozata, legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ az összegük és $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2$. Akkor $p > 0$-ra*

$$\mathbb{E}|S_n|^p \leq C_1 \mathbb{E} \max_{1\leq i\leq n} |X_i|^p + C_2 g(n) B_n^{p/2}, \tag{2.36}$$

ahol C_1 és C_2 abszolút konstansok.

Bizonyítás. A fent leírtak a 2.1 Megjegyzés és a (2.28) egyenlőtlenség következményei. □

A következő teljes konvergencia tétel a [Wang, Xu, Hu, Volodin, Hu (2014)] 3.2 Következményének egy változata.

2.10. Tétel. *Legyen $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók egy WOD sorozata, továbbá legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ a részösszegük. Legyen $0 < p < 2$ és α legyen egy pozitív szám. Tegyük fel, hogy $g(.)$ regulárisan változó r kitevővel, ahol $0 < r < \alpha(2-p)$. Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots$ átlagosan gyengén dominált az X valószínűségi változó által, melyre $\mathbb{E}|X|^p g(|X|^{1/\alpha}) < \infty$. Ha $0 < p < 1$, akkor feltesszük, hogy $\alpha p > 1$. Ha $1 \leq p < 2$, akkor feltesszük, hogy $\alpha p \geq 1$ és $\mathbb{E}X_i = 0$ minden i-re. Ekkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2} \mathbb{P}\left(|S_n| > \varepsilon n^{\alpha}\right) < \infty.$$

Bizonyítás. A fenti tétel a 2.6 Tétel és a 2.7 Tétel következménye. □

3. A von Bahr–Esseen egyenlőtlenségek és alkalmazásaik

3.1. Bevezetés

Tekintsük először a jól ismert von Bahr–Esseen egyenlőtlenséget. Legyen $1 \leq p \leq 2$ és legyen X_n, $n = 1, 2, \dots$ független valószínűségi változók egy sorozata, véges p-edik momentummal és nulla várhatóértékkel. ($\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}X_n = 0$ minden $n = 1, 2, \dots$ esetén). Akkor

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p \leq c_{p,n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^p, \tag{3.1}$$

minden $n = 1, 2, \dots$ esetén, ahol $c_{p,n} \leq 2 - n^{-1}$ [von Bahr–Esseen (1965)]. Az (3.1) egyenlőtlenség a p-edik von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség.

Megjegyezzük, hogy a p-edik von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség természetesen igaz $0 < p \leq 1$ esetén, vagyis $\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^p$, ha $0 < p \leq 1$ tetszőleges X_n, $n = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók olyan sorozatára, mely rendelkezik véges p-edik momentummal.

Dharmadhikari és Jogdeo [Dharmadhikari, Jogdeo (1969)] bebizonyította a következő egyenlőtlenséget, mely a von Bahr–Esseen egyenlőtlenség $p > 2$ esetre történő kiterjesztésének tekinthető. Legyen $p \geq 2$ és legyen X_n, $n = 1, 2, \dots$ független valószínűségi változók sorozata véges p-edik momentummal és nulla várhatóértékkel. Akkor (3.1) teljesül a következő $c_{p,n}$ konstanssal

$$c_{p,n} = n^{p/2-1} \frac{p(p-1)}{2} \max\left\{1, 2^{p-3}\right\} \left[1 + 2p^{-1} D_{2m}^{(p-2)/2m}\right], \tag{3.2}$$

ahol az egész m kielégíti a $2m \leq p < 2m + 2$ egyenlőtlenséget és

$$D_{2m} = \sum_{k=1}^{m} k^{2m-1}/(k-1)!\,. \tag{3.3}$$

A [Chen, Bai, Sung (2014)] cikkben páronként független valószínűségi változókra kapták meg a p-edik von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenséget, ha p értékére teljesül, hogy $1 < p < 2$. A von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség $p = 2$ esetén nyilvánvalóan teljesül páronként független nulla várhatóértékű valószínűségi változókra, és [Chen, Bai, Sung (2014)]-ben ezt a tényt alkalmazták a p-edik ($1 < p < 2$) von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség bizonyítására.

A [Chen, Bai, Sung (2014)]-ben található bizonyítást elemezve a következő eredményt kaphatjuk. Ha $1 < p < 2$ és X_n, $n = 1, 2, \ldots$ tetszőleges valószínűségi változók egy sorozata véges p-edik momentummal és nulla várhatóértékkel, továbbá a második von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség teljesül a csonkított centralizált $X_k \mathbb{I}\left(|X_k| \leq x\right) - \mathbb{E}X_k \mathbb{I}\left(|X_k| \leq x\right)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ változókra, minden $x > 0$ esetén, akkor a p-edik $(1 < p < 2)$ von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség igaz az X_n, $n = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változókra, ahol $\mathbb{I}$ az indikátor függvényt jelöli.

Továbbá, általánosíthatjuk az előző eredményt azzal, hogy 2 helyett q-t használunk. Vagyis, ha $1 < p < q$ és a q-adik $(1 < p < 2)$ von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség teljesül minden csonkított centralizált változóra, akkor a p-edik von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség igaz az eredeti valószínűségi változókra is. Azonban létezik a csonkításnak egy másik változata is. Adott X valószínűségi változó és t pozitív szám esetén a következő csonkított valószínűségi változót használhatjuk

$$^{(-t)}X^{(t)} = -t\mathbb{I}\left\{X < -t\right\} + X\mathbb{I}\left\{|X| \leq t\right\} + t\mathbb{I}\left\{X > t\right\}. \qquad (3.4)$$

Az az előnye ennek a csonkításnak, hogy $^{(-t)}X^{(t)} = h(X)$ alakú, ahol h egy növekvő valós függvény. Továbbá tudjuk, hogy bizonyos függőségi feltételek öröklődnek, ha a valószínűségi változókat növekvő függvényekbe helyezzük. Ezért még fontosabb tudni, hogy a q-adik von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlensége a csonkított és centralizált változóknak $^{(-x)}X_k^{(x)} - \mathbb{E}^{(-x)}X_k^{(x)}$ maga után vonja a p-edik von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenséget az eredeti X_k valószínűségi változókra $(1 < p < q)$. Ezt a 3.1 Tételben bizonyítjuk. Továbbá kiemeljük, hogy a 3.1 Tételben nem feltételezünk semmilyen gyenge függőséget a valószínűségi változókon. Megjegyezzük, hogy a vizsgálataink során a (3.4) különböző változatait alkalmazzuk.

Ismert tény, hogy bizonyos exponenciális kapcsolatok alapvető szerepet játszanak a független és gyengén függő valószínűségi változók aszimptotikus eredményeinek bizonyításában. Az ilyen fajta kapcsolat egy általános alakja megjelenik az elfogadhatóság definíciójában is. Az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változókat elfogadhatónak nevezzük, ha

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda X_i} \leq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{\lambda X_i} \qquad (3.5)$$

minden valós λ esetén, lásd [Antonini, Kozachenko, Volodin (2008)]. A 3.3 fejezetben megmutatjuk, hogy a (3.5) egyenlőtlenség egy változata maga után von egy exponenciális egyenlőtlenséget, lásd 3.1 Állítás. Az exponenciális egyenlőtlenséget alkalmazva, megkapjuk a Rosenthal-egyenlőtlenséget

(3.2 Állítás). Végezetül, látni fogjuk, hogy a (3.5) egyenlőtlenség egy változata maga után vonja a p-edik von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenséget, lásd a 3.2 Tételt. Alkalmazva a 3.2 Tételt, megkapjuk a von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenséget WOD sorozatokra (3.3 Tétel).

A momentum egyenlőtlenségek alkalmazásának fontos szerepe van a konvergencia tételekben. A 3.4 fejezetben az egyenlőtlenségeink következményeként igazolunk egy nagy számok törvényét és egy teljes konvergenciát. A jól ismert Etemadi-féle nagy számok erős törvénye (SLLN) szerint, ha $X_1, X_2, \ldots$ páronként független és azonos eloszlású valószínűségi változók véges első momentummal, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mathbb{E}X_1$$

majdnem biztosan, lásd [Etemadi (1981)]. A később bemutatott 3.4 tételünk is egy Etemadi típusú SLLN. A mi tételünkben, páronkénti függetlenség helyett, azt tesszük fel, hogy, vagy (3.5), vagy (3.1) teljesül a csonkított valószínűségi változókra. További jól ismert SLLN eredmény a [Csörgő, Tandori, Totik (1983)] cikk. Itt páronként független, viszont nem azonos eloszlású valószínűségi változókat tételeztek fel. A mi 3.5 tételünk a Csörgő, Tandori és Totik SLLN egy új változata. Mi a páronkénti függetlenséget a (3.5), vagy a (3.1) egy megfelelő változatával helyettesítettük. Továbbá bemutatásra kerül a nagy számok egy gyenge törvénye (WLLN, lásd 3.6 Tétel).

A nagy számok törvényében a a konvergencia sebessége leírható a teljes konvergencia tételek által. A klasszikus teljes konvergencia eredmények Hsu, Robbins, Erdős, Baum and Katz munkájához fűződnek, lásd [Baum, Katz (1965)]. Az első teljes konvergencia tétel eredményeket valószínűségre kapták, később hasonló eredményeket bizonyítottak a momentumokra is. A teljes momentum konvergencia általános formája az $Y_1, Y_2, \ldots$ valószínűségi változókra a következő

$$\sum_{n}^{\infty} a_n \mathbb{E}\left(|Y_n|/b_n - \varepsilon\right)_+^q < \infty$$

minden $\varepsilon > 0$-ra, ahol $(\cdot)_+$ a pozitív részt jelenti. Itt Y_n a valószínűségi változók részösszege. A [Chow (1988)] munka foglalkozik teljes momentum konvergenciával független valószínűségi változók esetén. A [Sung (2009)]-ben Soo Hak Sung bemutatta, hogy amikor bizonyos momentum egyenlőtlenségek teljesülnek csonkított valószínűségi változókra, akkor a teljes momentum konvergencia teljesül.

A módszerünk lényegét az alábbiakban foglaljuk össze. Csonkítást alkalmazunk a valószínűségi változókra, aztán közelítéseket a valószínűségekre és momentumokra. Ezen módszerek kombinációjának köszönhetően kaptuk a momentum egyenlőtlenségek általános változatait és a konvergencia tételeket.

3.2. A von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség

Ebben a fejezetben a következő általános tételt bizonyítjuk. Ha a von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség teljesül a q kitevő és csonkított centralizált valószínűségi változók esetén, akkor teljesül magukra a valószínűségi változókra tetszőleges p esetén, $1 < p < q$. Kiemeljük, hogy nem alkalmaztunk további feltevéseket a valószínűségi változók függőségének struktúrájára. A bizonyítás során [Chen, Bai, Sung (2014)] 2.1 Tétele bizonyításának módszerét alkalmazzuk. Az a tétel egy von Bahr–Esseen egyenlőtlenség páronként független valószínűségi változókra. A (3.4) csonkítást alkalmazva $X_k \mathbb{I}\left(|X_k| \le x\right)$ helyett, a mi módszerünk rövidebb, mint ami a [Chen, Bai, Sung (2014)]-ben található.

3.1. Tétel. *Legyen* $1 < p < q$. *Legyen* $X_n, n = 1, 2, \ldots$ *valószínűségi változók egy sorozata és* $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}X_n = 0$ *minden* $n = 1, 2, \ldots$*-re. Tegyük fel, hogy tetszőleges* $x > 0$ *esetén*

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\left({}^{(-x)}X_k^{(x)} - \mathbb{E}\,{}^{(-x)}X_k^{(x)}\right)\right|^q \le g_q(n)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|{}^{(-x)}X_k^{(x)} - \mathbb{E}\,{}^{(-x)}X_k^{(x)}\right|^q. \tag{3.6}$$

Akkor

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p \le f_{p,q}(n)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X_k|^p, \tag{3.7}$$

ahol $f_{p,q}(n)$ *csak* $g_q(n)$*-től,* p*-től és* q*-tól függ (egy lehetséges választás az* $f_{p,q}(n) = 5 + 2c_q g_q(n) 2^q \left(\frac{q}{q-p}\right)^2$, *ahol* $c_q = 2^{q-1}$*).*

Bizonyítás. Legyen $V = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^p$. Ha $V = 0$, akkor $X_k = 0$ majdnem biztosan minden $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén, tehát feltehetjük, hogy $V \neq 0$. Az egyszerűség kedvéért, jelölje Z_i a csonkított valószínűségi változót, vagyis legyen $Z_i = {}^{(-x^{1/p})}X_i^{(x^{1/p})}$, ahol x egy tetszőleges pozitív szám. Tetszőleges

$\varepsilon > 1$ esetén,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p > x\right\} \mathrm{d}x \le \\ &\le (1+\varepsilon)V + \int_{(1+\varepsilon)V}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| > x^{1/p}\right\} \mathrm{d}x \le \\ &\le (1+\varepsilon)V + \int_{(1+\varepsilon)V}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left\{|X_k| > x^{1/p}\right\} \mathrm{d}x + \\ &+ \int_{(1+\varepsilon)V}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} Z_k\right| > x^{1/p}\right\} \mathrm{d}x = \\ &= (1+\varepsilon)V + I_1 + I_2.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Látható, hogy

$$I_1 \le \sum_{k=1}^{n} \int_0^\infty \mathbb{P}\left\{|X_k| > x^{1/p}\right\} \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^p = V. \tag{3.9}$$

Felhasználva, hogy $\mathbb{E}X_k = 0$, a következőt kapjuk $\mathbb{E}X_k\mathbb{I}\left(|X_k| \le x^{1/p}\right) = -\mathbb{E}X_k\mathbb{I}\left(|X_k| > x^{1/p}\right)$, ahonnan

$$\begin{aligned}&\sup_{x\ge(1+\varepsilon)V} x^{-1/p}\left|\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}Z_k\right| = \sup_{x\ge(1+\varepsilon)V} x^{-1/p}\Big|\sum_{k=1}^{n} -\mathbb{E}X_k\mathbb{I}\left(|X_k| > x^{1/p}\right) + \\ &+ x^{1/p}\mathbb{P}\left(X_k > x^{1/p}\right) - x^{1/p}\mathbb{P}\left(X_k < -x^{1/p}\right)\Big| \le \\ &\le \sup_{x\ge(1+\varepsilon)V} x^{-1/p}\left|\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_k|\,\mathbb{I}\left(|X_k| > x^{1/p}\right) + x^{1/p}\mathbb{P}\left(|X_k| > x^{1/p}\right)\right| \le \\ &\le 2\sup_{x\ge(1+\varepsilon)V} x^{-1/p}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_k|\,\mathbb{I}\left(|X_k| > x^{1/p}\right) \le \\ &\le 2\sup_{x\ge(1+\varepsilon)V} x^{-1/p}\cdot x^{1/p-1}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\,|X_k|^p\,\mathbb{I}\left(|X_k| > x^{1/p}\right) \le \\ &\le 2(1+\varepsilon)^{-1}V^{-1}\cdot V = 2(1+\varepsilon)^{-1}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Most alkalmazzuk a (3.10)-et és akkor, mivel $\varepsilon > 1$, használhatjuk a Markov egyenlőtlenséget, és a következőt kapjuk

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_{(1+\varepsilon)V}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} Z_k\right| > x^{1/p}\right\} \mathrm{d}x \le \\
&\le \int\limits_{(1+\varepsilon)V}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} Z_k - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}Z_k\right| > x^{1/p} - \left|\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}Z_k\right|\right\} \mathrm{d}x \le \\
&\le \int\limits_{(1+\varepsilon)V}^{\infty} \mathbb{P}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} [Z_k - \mathbb{E}Z_k]\right| > \left[1 - 2(1+\varepsilon)^{-1}\right] x^{1/p}\right\} \mathrm{d}x \le \\
&\le \left[1 - 2(1+\varepsilon)^{-1}\right]^{-q} \int\limits_{(1+\varepsilon)V}^{\infty} x^{-q/p} \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} [Z_k - \mathbb{E}Z_k]\right|^q \mathrm{d}x \le \\
&\le 2c_q g_q(n) \left[1 - 2(1+\varepsilon)^{-1}\right]^{-q} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{(1+\varepsilon)V}^{\infty} x^{-q/p} \mathbb{E}\left|Z_k\right|^q \mathrm{d}x = \\
&= 2c_q g_q(n) \left[1 - 2(1+\varepsilon)^{-1}\right]^{-q} \sum_{k=1}^{n} I_{2k}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Az utolsó lépésben alkalmaztuk a (3.6)-et és a c_q-egyenlőtlenséget. Most rögzített k esetén, $1 \le k \le n$, a következőt kapjuk

$$\begin{aligned}
I_{2k} &= \int\limits_{(1+\varepsilon)V}^{\infty} x^{-q/p} \mathbb{E}\left|Z_k\right|^q \mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{(1+\varepsilon)V}^{\infty} x^{-q/p} \int\limits_{0}^{x^{q/p}} \mathbb{P}\left\{|X_k|^q > y\right\} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{(1+\varepsilon)V}^{\infty} x^{-q/p} \int\limits_{0}^{(1+\varepsilon)^{q/p}V^{q/p}} \mathbb{P}\left\{|X_k| > y^{1/q}\right\} \mathrm{d}y\mathrm{d}x + \\
&+ \int\limits_{(1+\varepsilon)V}^{\infty} x^{-q/p} \int\limits_{(1+\varepsilon)^{q/p}V^{q/p}}^{x^{q/p}} \mathbb{P}\left\{|X_k| > y^{1/q}\right\} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \\
&= I_{21k} + I_{22k}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ismét alkalmazva a Markov egyenlőtlenséget

$$\begin{aligned}
I_{21k} &= \frac{p}{q-p}(1+\varepsilon)^{1-q/p}V^{1-q/p}\int\limits_0^{(1+\varepsilon)^{q/p}V^{q/p}} \mathbb{P}\left\{|X_k| > y^{1/q}\right\}\mathrm{d}y \leq \\
&\leq \frac{p}{q-p}(1+\varepsilon)^{1-q/p}V^{1-q/p}\int\limits_0^{(1+\varepsilon)^{q/p}V^{q/p}} \mathbb{E}|X_k|^p \cdot y^{-p/q}\mathrm{d}y = \\
&= \frac{qp}{(q-p)^2}\mathbb{E}|X_k|^p.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

I_{22k}-ra a következőt kapjuk

$$\begin{aligned}
I_{22k} &= \int\limits_{(1+\varepsilon)^{q/p}V^{q/p}}^{\infty} \mathbb{P}\left\{|X_k| > y^{1/q}\right\}\int\limits_{y^{p/q}}^{\infty} x^{-q/p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \frac{p}{q-p}\int\limits_{(1+\varepsilon)^{q/p}V^{q/p}}^{\infty} y^{p/q-1}\mathbb{P}\left\{|X_k| > y^{1/q}\right\}\mathrm{d}y \leq \\
&\leq \frac{p}{q-p}\int\limits_0^{\infty} y^{p/q-1}\mathbb{P}\left\{|X_k| > y^{1/q}\right\}\mathrm{d}y = \\
&= \frac{q}{q-p}\mathbb{E}|X_k|^p.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

(3.11)-(3.14)-et alkalmazva

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq 2c_q g_q(n)[1-2(1+\varepsilon)^{-1}]^{-q}\left[\frac{qp}{(q-p)^2} + \frac{q}{q-p}\right]V = \\
&= 2c_q g_q(n)[1-2(1+\varepsilon)^{-1}]^{-q}\left(\frac{q}{q-p}\right)^2 V.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Összegezve a (3.8), (3.9) és (3.15) formulákat kapjuk

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p \leq \left\{2+\varepsilon+2c_q g_q(n)[1-2(1+\varepsilon)^{-1}]^{-q}\left(\frac{q}{q-p}\right)^2\right\}V.$$

Látható, hogy a következő függvény

$$f(\varepsilon) = 2+\varepsilon+2c_q g_q(n)[1-2(1+\varepsilon)^{-1}]^{-q}\left(\frac{q}{q-p}\right)^2$$

pozitív és folytonos az $(1,\infty)$ intervallumon, és $\lim\limits_{\varepsilon\to 1^+} f(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to\infty} f(\varepsilon) = \infty$. Ezért $f(\varepsilon)$-nak létezik minimuma az $(1,\infty)$ intervallumon. Legyen $f_{p,q}(n) = \inf\limits_{1<\varepsilon<\infty} f(\varepsilon)$. Látható, hogy $f_{p,q}(n) > 3$, és ez csak $g_q(n)$-től, p-től és q-tól függ, tehát (3.7) igaz. □

3.3. Exponenciális egyenlőtlenségek és következményeik

Ebben a részben azt tárgyaljuk, hogy, ha feltételezzük, hogy (3.5) teljesül a csonkított valószínűségi változókra, akkor kapunk egy exponenciális egyenlőtlenséget (3.1 Állítás), amelynek következménye egy Rosenthal-egyenlőtlenség (3.2 Állítás) és egy von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség (Tétel 3.2).

Legyen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ valószínűségi változók egy sorozata. Tekintsük a következő feltételt

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^n \lambda\eta_i} \le g(n) \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{\lambda\eta_i}. \tag{3.16}$$

Ha a (3.16) feltétel teljesül $g(n) = 1$-re és tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén, akkor az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$-t elfogadhatónak nevezzük. Látható, hogy, ha (3.16) igaz $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ esetén, akkor igaz $\eta_1 - a_1, \eta_2 - a_2, \ldots, \eta_n - a_n$ esetén is, minden valós $a_1, \ldots, a_n$ számra, speciálisan igaz $\eta_1 - \mathbb{E}\eta_1$, $\eta_2 - \mathbb{E}\eta_2, \ldots, \eta_n - \mathbb{E}\eta_n$ esetén.

Adott X valószínűségi változó és $a < b$ számok esetén definiáljuk a következő (aszimmetrikus) csonkított valószínűségi változót

$${}^{(a)}X^{(b)} = a\mathbb{I}\{X < a\} + X\mathbb{I}\{a \le X \le b\} + b\mathbb{I}\{X > b\}. \tag{3.17}$$

Ez az ${}^{(a)}X^{(b)}$ csonkítás növekvő függvénye X-nek.

3.1. Állítás. *Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók egy sorozata. Tegyük fel, hogy (3.16) teljesül minden $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén $\eta_i = {}^{(a_i)} X_i^{(b_i)}$-re tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ mellett. Legyen $d > 0$ rögzített és legyen $Y_i = {}^{(-d)} X_i^{(d)} - \mathbb{E}\,{}^{(-d)}X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ csonkított és centrált valószínűségi változó. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ az összeg és $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}Y_i^2$ a szórásnégyzetek összege. Akkor minden $x > 0$ és $t > 0$-re,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_n| > x) \le \mathbb{P}\left(\max_{1\le i\le n} |Y_i| > t\right) + \\ +2g(n)\exp\left(\frac{x}{t} - \frac{x}{t}\ln\left(1 + \frac{xt}{B_n}\right)\right). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Bizonyítás. A [Fuk, Nagaev (1971)] klasszikus ötletét követjük. Tetszőleges valós $t > 0$ szám és ξ valószínűségi változó estén

$$\xi^{(t)} = \min\{\xi, t\}$$

jelöli a valószínűségi változó csonkított formáját. Jelölje $\eta_i = Y_i^{(t)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a csonkított valószínűségi változókat. Akkor η_i az ${}^{(a_i)}X_i^{(b_i)} - m_i$ alakú valamely $a_i < b_i$ és m_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Ezért (3.16) teljesül $\eta_i = Y_i^{(t)}$-re. Így a 2.1 Tétel alapján

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i > x\right) \leq g(n) \exp\left(\frac{x}{t} - \frac{x}{t} \ln\left(1 + \frac{xt}{B_n}\right)\right). \tag{3.19}$$

A (3.16) egyenlőtlenség igaz $\eta_i = (-Y_i)^{(t)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén, tehát (3.19) igaz az $-Y_1, -Y_2, \ldots, -Y_n$ valószínűségi változókra is. Alkalmazva a (3.19) egyenlőtlenséget az $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ éa a $-Y_1, -Y_2, \ldots, -Y_n$ valószínűségi változókra, megkapjuk a (3.18) egyenlőtlenséget. □

Most a Rosenthal-egyenlőtlenséggel folytatjuk.

3.2. Állítás. *Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók egy sorozata. Tegyük fel, hogy (3.16) teljesül tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\eta_i = {}^{(a_i)} X_i^{(b_i)}$ esetén minden $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$-re. Legyen $d > 0$ rögzített és legyen $Y_i = {}^{(-d)} X_i^{(d)} - \mathbb{E}{}^{(-d)}X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a csonkított centralizált valószínűségi változó. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ az összegük és $B_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}Y_i^2$ a varianciák összege. Akkor*

$$\mathbb{E}|S_n|^p \leq C_1 \mathbb{E} \max_{1 \leq i \leq n} |Y_i|^p + 2C_2 g(n) B_n^{p/2}, \tag{3.20}$$

ahol $p > 0$ és C_1, C_2 csak p-től függ.

Bizonyítás. Ismert, hogy az exponenciális egyenlőtlenségből következik a Rosenthal-egyenlőtlenség, lásd 2.4 Tétel. Ezért (3.18)-ból következik (3.20). □

Most megkapjuk a von Bahr–Esseen egyenlőtlenséget.

3.2. Tétel. *Legyen $1 < p \leq 2$. Legyen $X_n, n = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók egy sorozata, úgy, hogy $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}X_n = 0$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Tegyük fel, hogy (3.16) teljesül tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\eta_i = {}^{(a_i)} X_i^{(b_i)}$ esetén minden $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$-re. Akkor*

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p \leq f_p(n) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^p, \tag{3.21}$$

ahol $f_p(n)$ csak $g(n)$-től és p-től függ.

Bizonyítás. Legyen $d > 0$ rögzített és legyen $Y_i =^{(-d)} X_i^{(d)} - \mathbb{E}^{(-d)} X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ csonkított és centralizált valószínűségi változó. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ az összegük és $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} Y_i^2$ a varianciák összege. Akkor, a 3.2 Állításból 2 kitevővel kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 = \mathbb{E}|S_n|^2 \le C g(n) B_n = \sum_{i=1}^n C g(n) \mathbb{E} Y_i^2. \tag{3.22}$$

Tehát megkaptuk, hogy a von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség igaz 2 kitevő esetén a csonkított és centralizált valószínűségi változókra. Ezért a 3.1 Tételből, akkor is teljesül magukra a valószínűségi változókra tetszőleges p esetén, ha $1 < p < 2$. Tehát (3.21)-t bebizonyítottuk $1 < p < 2$-re. $p = 2$-re használjuk a $d \uparrow \infty$-t (3.22)-ben. Akkor a dominált konvergencia tételből következik (3.21), ha $p = 2$. □

Most alkalmazzuk az eredményeinket a WOD sorozatokra. Az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók sorozata WOD, ha minden pozitív egész n-re létezik egy véges $g(n)$, hogy minden valós $x_1, \ldots, x_n$ számra

$$\mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \ldots, X_n > x_n) \le g(n) \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > x_i) \tag{3.23}$$

és

$$\mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots, X_n \le x_n) \le g(n) \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \le x_i), \tag{3.24}$$

lásd [Wang, Wang, Gao (2013)].

Ismert, hogy a kiterjesztett negatív ortáns függő sorozatok, a negatív ortáns függő sorozatok, a negatív szuper-additív függő sorozatok, a negatív asszociált és a független sorozatok mind WOD sorozatok, lásd [Wang, Xu, Hu, Volodin, Hu (2014)]. A következőkben a WOD sorozatok jól ismert tulajdonságai kerülnek bemutatásra.

Ha $X_1, X_2, \ldots$ WOD sorozat és az $f_1, f_2, \ldots$ valós függvények mindegyike vagy nem csökkenőek, vagy nem növekvő, akkor az $f_1(X_1), f_2(X_2), \ldots$ sorozat szintén WOD, illetve az ${}^{(a_i)}X_i^{(b_i)}$, $i = 1, 2, \ldots$ csonkított sorozat is WOD.

Továbbá

$$\mathbb{E} e^{\sum_{i=1}^n \lambda X_i} \le g(n) \prod_{i=1}^n \mathbb{E} e^{\lambda X_i} \tag{3.25}$$

minden valós λ esetén és (3.23)-(3.24)-ben lévő $g(n)$-re. Most megfogalmazzuk a von Bahr–Esseen egyenlőtlenséget WOD sorozatokra. Meg kell jegyezni, hogy a következő tételt más módszerrel belátták a [Wang, Xu, Hu, Volodin, Hu (2014)] cikkben (lásd a [Wang, Xu, Hu, Volodin, Hu (2014)] 2.3 Következményét).

3.3. Tétel. *Legyen* $1 < p \le 2$. *Legyen* $X_n, n = 1, 2, \dots$ *valószínűségi változók egy WOD sorozata, azaz teljesüljön* (3.23) *és* (3.24). *Tegyük fel, hogy* $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}X_n = 0$ *minden* $n = 1, 2, \dots$*-re. Akkor*

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p \le f_p(n) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^p, \tag{3.26}$$

ahol $f_p(n)$ *csak* p*-től és* (3.23)-(3.24)*-ben lévő* $g(n)$*-től függ.*

Bizonyítás. A WOD sorozatok fent említett tulajdonságai miatt alkalmazhatjuk a 3.2 Tételt. □

3.4. Konvergencia tételek

Ebben a fejezetben általános konvergencia tételek kerülnek bizonyításra. Bemutatjuk, hogy amikor a (3.16) elfogadhatósági feltétel teljesül a csonkított valószínűségi változókra, akkor gyenge és erős nagy számok törvénye (WLLN, SLLN) és teljes konvergencia is teljesül egyéb gyenge függőség feltételezése nélkül. Mivel a bizonyítások a von Bahr–Esseen egyenlőtlenség felhasználásával történnek, látható, hogy a (3.21) teljesülése a csonkított és centralizált valószínűségi változókra maga után vonja a fent említett aszimptotikus eredményeket.

Kezdjük az Etemadi típusú SLLN-nel.

3.4. Tétel. *Legyen* $X_n, n = 1, 2, \dots$ *azonos eloszlású valószínűségi változók egy sorozata, mely teljesíti a következőket:* $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$ *és* $\mathbb{E}X_1 = 0$.

(1) Tegyük fel, hogy (3.16) *teljesül* $g(n) = C$*-re és minden* $\lambda \in \mathbb{R}$ *és* $\eta_i = {}^{(a_i)}X_i^{(b_i)}$ *tetszőleges* $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \dots$ *esetén. Akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \tag{3.27}$$

1 *valószínűséggel.*

(2) Ha, (3.16) *helyett, a von Bahr–Esseen egyenlőtlenség teljesül a csonkított centralizált valószínűségi változókra, azaz, ha*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left({}^{(a_i)}X_i^{(b_i)} - \mathbb{E}\,{}^{(a_i)}X_i^{(b_i)}\right)\right)^2 \le \\ &\le C\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left({}^{(a_i)}X_i^{(b_i)} - \mathbb{E}\,{}^{(a_i)}X_i^{(b_i)}\right)^2, \end{aligned} \tag{3.28}$$

akkor (3.27) *teljesül.*

Bizonyítás. Először meg kell jegyezni, hogy a 3.2 Tétel miatt, a (3.28) egyenlőtlenség mindig teljesül a tétel feltételei miatt. Tudjuk, hogy az eredeti Etemadi SLLN teljesül páronként független valószínűségi változókra. Azonban, a bizonyítást elemezve (lásd: [Etemadi (1981)] vagy [Bauer (1996)]) az egyetlen lépés, ahol a páronkénti függetlenséget alkalmazták, az a (3.28) egyenlőtlenség, $a_i = 0$, $b_i = i$ és $a_i = -i$, $b_i = 0$ választással. □

Egy jól ismert SLLN páronként független valószínűségi változókra a [Csörgő, Tandori, Totik (1983)]-ban leírt eredmény. Megmutatjuk, hogy az 1. Tétel a [Csörgő, Tandori, Totik (1983)]-ban igaz, ha a páronkénti függetlenséget kicseréljük az elfogadhatósági feltétellel. A mi tételünkben p tetszőleges $1 < p < 2$ közti szám, míg a [Csörgő, Tandori, Totik (1983)]-ban $p = 2$.

3.5. Tétel. *Legyen* $1 < p < 2$. *Legyen* $X_n, n = 1, 2, \ldots$ *valószínűségi változók egy sorozata. Tegyük fel, hogy*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E} \frac{|X_m - \mathbb{E}X_m|^p}{m^p} < \infty \tag{3.29}$$

és

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\, |X_m - \mathbb{E}X_m| \qquad \textit{korlátos.} \tag{3.30}$$

(1) *Tegyük fel, hogy* (3.16) *teljesül* $g(n) = C$ *esetén és minden* $\lambda \in \mathbb{R}$*-re és* $\eta_i = ^{(a_i)} X_i^{(b_i)}$*-re tetszőleges* $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots$ *esetén. Akkor*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} (X_m - \mathbb{E}X_m) = 0 \tag{3.31}$$

1 *valószínűséggel.*

(2) *Ha* (3.16) *helyett, a von Bahr–Esseen egyenlőtlenség teljesül a csonkított centralizált valószínűségi változókra, azaz ha*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{n} \left({}^{(a_i)}X_i^{(b_i)} - \mathbb{E}\, {}^{(a_i)}X_i^{(b_i)} \right) \right|^p \le \\ \le C \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E} \left| {}^{(a_i)}X_i^{(b_i)} - \mathbb{E}\, {}^{(a_i)}X_i^{(b_i)} \right|^p, \end{aligned} \tag{3.32}$$

akkor (3.31) *teljesül.*

Bizonyítás. A 3.2 Tételből, (3.32) egyenlőtlenség mindig teljesül, a tételünk feltételei alatt. Az eredeti bizonyításban (lásd [Csörgő, Tandori, Totik (1983)]) az egyetlen lépés, ahol a páronkénti függetlenséget alkalmazták, az a (3.32) egyenlőtlenség, ahol $a_i = 0$, $b_i = \infty$ és $a_i = -\infty$, $b_i = 0$. □

A következő tétel egy nagy számok gyenge törvénye, amelyben L_p konvergenciát is bizonyítunk.

3.6. Tétel. *Legyen* $1 < p < 2$. *Legyen az* $X_n, n = 1, 2, \dots$ *sorozat átlagosan gyengén dominált az* X *valószínűségi változó által, ahol* $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. *Tegyük fel, hogy* $\mathbb{E}X_n = 0$ *minden* $n = 1, 2, \dots$*-re. Tegyük fel, hogy* (3.16) *teljesül* $g(n) = C$*-re, tetszőleges* $\lambda \in \mathbb{R}$*-re és* $\eta_i = {}^{(a_i)}X_i^{(b_i)}$*-re minden* $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \dots$ *esetén. Akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p = 0. \tag{3.33}$$

Továbbá,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \tag{3.34}$$

valószínűségben.

Bizonyítás. Legyen $t > 0$. Legyen

$${}^{(-\infty)}Z^{(-t)} = \min\{-t, Z\} + t, \quad {}^{(t)}Z^{(\infty)} = \max\{t, Z\} - t.$$

Mivel $\mathbb{E}X_k = 0$, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p &\le c\mathbb{E}\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n}\left({}^{(-\infty)}X_k^{(-t)} - \mathbb{E}^{(-\infty)}X_k^{(-t)}\right)\right|^p + \\
&\quad + c\mathbb{E}\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n}\left({}^{(-t)}X_k^{(t)} - \mathbb{E}^{(-t)}X_k^{(t)}\right)\right|^p + \\
&\quad + c\mathbb{E}\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n}\left({}^{(t)}X_k^{(\infty)} - \mathbb{E}^{(t)}X_k^{(\infty)}\}\right)\right|^p = \\
&= T_1 + T_2 + T_3,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

A 3.2 Tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$T_3 \le \frac{c}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E} \left| {}^{(t)}X_k^{(\infty)} - \mathbb{E}^{(t)} X_k^{(\infty)} \right|^p \le$$

$$\le \frac{c}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E} \big| t\mathbb{I}\{X_k > t\} - \mathbb{E}t\mathbb{I}\{X_k > t\} \big|^p +$$

$$+ \frac{c}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E} \left| X_k\mathbb{I}\{X_k > t\} - \mathbb{E}X_k\mathbb{I}\{X_k > t\} \right|^p \le$$

$$\le \frac{c}{n} \sum_{k=1}^{n} t^p \mathbb{P}\{X_k > t\} + \frac{c}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_k^p \mathbb{I}\{X_k > t\} \le$$

$$\le \frac{c}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_k^p \mathbb{I}\{X_k > t\}.$$

Hasonlóan

$$T_1 \le \frac{c}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^p \mathbb{I}\{X_k < -t\}.$$

Tehát, (2.22) miatt

$$T_1 + T_3 \le \frac{c}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^p \mathbb{I}\{|X_k| > t\} \le c\mathbb{E}|X|^p \mathbb{I}\{|X| > t\} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

minden rögzített $\varepsilon > 0$-ra, ha t elég nagy, vagyis $t \ge t_\varepsilon$. Most alkalmazva a 3.2 Tételt 2 exponenssel, a következőt kapjuk

$$\begin{aligned} T_2 &\le \frac{c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E} \left({}^{(-t)}X_k^{(t)} - \mathbb{E}^{(-t)} X_k^{(t)} \right)^2 \right)^{p/2} \le \\ &\le \frac{c}{n} \left(n(2t)^2 \right)^{p/2} = ct^p n^{p/2}/n. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Legyen $t = t_\varepsilon$ és válasszunk egy elég nagy n-t, hogy $ct_\varepsilon^p n^{p/2}/n \le \frac{\varepsilon}{2}$. Akkor $T_2 \le \varepsilon/2$. $\square$

3.1. *Megjegyzés.* A bemutatott 3.6 Tétel hasonló a [Chen, Bai, Sung (2014)] 3.1 Tételéhez, ahol páronként független valószínűségi változókat használtak. Látható, hogy a 3.6 Tételben az átlagosan gyengén dominált feltevés kicserélhető a p-edik egyenletes integrálhatóság feltevésével, melyet a [Chen, Bai, Sung (2014)] 3.1 Tételében használtak.

A következő tételben láthatjuk, hogy, ha az elfogadhatósági feltétel, vagyis az (3.16) $g(n) = C$ esetén igaz a csonkított valószínűségi változókra, akkor teljes momentum konvergencia eredmények kaphatók. Speciálisan a von Bahr–Esseen egyenlőtlenség igaz a csonkított és centralizált valószínűségi változókra, akkor teljes momentum konvergencia is teljesül.

3.7. Tétel. *Legyen* $0 < p < 2$, $1 \le r < 2$, *és* $0 < \alpha < 2$. *Legyen az* X_n, $n = 1, 2, \dots$ *sorozat átlagosan gyengén dominált az* X *valószínűségi változó által. Tegyük fel, hogy* $\mathbb{E}X_n = 0$ *minden* $n = 1, 2, \dots$*-re. Tegyük fel, hogy* (3.16) *teljesül* $g(n) = C$ *esetén minden* $\lambda \in \mathbb{R}$*-re és* $\eta_i =^{(a_i)} X_i^{(b_i)}$*-re tetszőleges* $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \dots$ *esetén.*

(i) Ha $r < \alpha$, *akkor feltesszük, hogy* $\mathbb{E}|X|^\alpha < \infty$.

(ii) Ha $r = \alpha$, *akkor feltesszük, hogy* $\mathbb{E}|X|^r \log(1 + |X|) < \infty$.

(iii) Ha $r > \alpha$, *akkor feltesszük, hogy* $\mathbb{E}|X|^r < \infty$.

Akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2}\mathbb{E}\left\{\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n} X_k\right| - \varepsilon\right\}_+^r < \infty \tag{3.37}$$

minden $\varepsilon > 0$*-ra,* (3.37) *a teljes momentum konvergencia, ami implikálja a teljes konvergenciát.*

Bizonyítás. Legyen $t = n^{1/p}$. Mivel $\mathbb{E}X_k = 0$, ezért

$$
\begin{aligned}
B &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2}\mathbb{E}\left\{\frac{1}{n^{1/p}}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right| - \varepsilon\right\}_+^r = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2}\mathbb{E}\left\{\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n}\left({}^{(-t)}X_k^{(t)} - \mathbb{E}^{(-t)}X_k^{(t)}\right) + \right.\right. \\
&+ \sum_{k=1}^{n}\left({}^{(-\infty)}X_k^{(-t)} - \mathbb{E}^{(-\infty)}X_k^{(-t)}\right) + \\
&+ \left.\left.\sum_{k=1}^{n}\left({}^{(t)}X_k^{(\infty)} - \mathbb{E}^{(t)}X_k^{(\infty)}\}\right)\right| - \varepsilon\right\}_+^r \leq \\
&\leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2}\mathbb{E}\left(\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n}\left({}^{(-t)}X_k^{(t)} - \mathbb{E}^{(-t)}X_k^{(t)}\right)\right)^2 + \\
&+ c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2}\mathbb{E}\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n}\left({}^{(-\infty)}X_k^{(-t)} - \mathbb{E}^{(-\infty)}X_k^{(-t)}\right)\right|^r + \\
&+ c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2}\mathbb{E}\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n}\left({}^{(t)}X_k^{(\infty)} - \mathbb{E}^{(t)}X_k^{(\infty)}\}\right)\right|^r,
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

ahol alkalmaztuk a [Chen, Bai, Sung (2014)] 3.1 Lemmáját. Most, mivel $g(n) = C$, a 3.2 Tételből kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
B &\leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2}\frac{1}{n^{2/p}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left({}^{(-t)}X_k^{(t)} - \mathbb{E}^{(-t)}X_k^{(t)}\right)^2 + \\
&+ c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2}\frac{1}{n^{r/p}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|{}^{(-\infty)}X_k^{(-t)} - \mathbb{E}^{(-\infty)}X_k^{(-t)}\right|^r + \\
&+ c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2}\frac{1}{n^{r/p}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|{}^{(t)}X_k^{(\infty)} - \mathbb{E}^{(t)}X_k^{(\infty)}\right|^r = \\
&= T_2 + T_1 + T_3,
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Először tekintsük T_2-t. Alkalmazva a 2.1 lemmát, és a $t = n^{1/p}$ értéket választva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
T_2 &\leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2/p-2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left({}^{(-t)}X_k^{(t)}\right)^2 \leq \\
&\leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2/p-1}\mathbb{E}\left({}^{(-t)}X^{(t)}\right)^2 = \\
&= c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2/p-1}\mathbb{E}|X|^2\mathbb{I}\{|X|\leq n^{1/p}\}+ \\
&+ c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2/p-1}\left(n^{1/p}\right)^2\mathbb{P}\{|X|> n^{1/p}\} = \\
&= T_{21}+T_{22}.
\end{aligned}$$

A következőt kapjuk

$$\begin{aligned}
T_{22} &\leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-1}\sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}\{k^{1/p}<|X|\leq (k+1)^{1/p}\} = \\
&= c\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\{k^{1/p}<|X|\leq (k+1)^{1/p}\}\sum_{n=1}^{k} n^{\alpha/p-1},
\end{aligned}$$

mivel $\sum_{n=1}^{k} n^{\alpha/p-1}\leq ck^{\alpha/p}$, ezért

$$T_{22}\leq c\mathbb{E}|X|^{\alpha}.$$

Továbbá

$$\begin{aligned}
T_{21} &\leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2/p-1}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X|^2\mathbb{I}\{(k-1)^{1/p}<|X|\leq k^{1/p}\} = \\
&= c\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}|X|^2\mathbb{I}\{(k-1)^{1/p}<|X|\leq k^{1/p}\}\sum_{n=k}^{\infty} n^{\alpha/p-2/p-1}\leq c\mathbb{E}|X|^{\alpha}
\end{aligned}$$

mivel $\sum_{n=k}^{\infty} n^{\alpha/p-2/p-1}\leq ck^{\alpha/p-2/p}\leq c(|X|^p)^{\alpha/p-2/p}$

$$T_{21}\leq c\mathbb{E}|X|^{\alpha}$$

Ezért láthatjuk, hogy $T_2<\infty$.

Most tekintsük T_1-et és T_3-at. Mint a 3.6 Tétel bizonyításánál, amint $t=n^{1/p}$, a következőt kapjuk

$$T_3\leq c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-r/p-2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}X_k^r\mathbb{I}\{X_k>n^{1/p}\}.$$

Hasonlóan,

$$T_1 \leq c \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-r/p-2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^r \mathbb{I}\{X_k < -n^{1/p}\}.$$

Ezért a 2.1 Lemmából

$$\begin{aligned} T_1 + T_3 &\leq c \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-r/p-2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^r \mathbb{I}\{|X_k| > n^{1/p}\} \leq \\ &\leq c \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-r/p-1} \mathbb{E}|X|^r \mathbb{I}\{|X| > n^{1/p}\} \leq \\ &\leq c \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-r/p-1} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{E}|X|^r \mathbb{I}\{k^{1/p} < |X| \leq (k+1)^{1/p}\} \leq \\ &\leq c \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}|X|^r \mathbb{I}\{k^{1/p} < |X| \leq (k+1)^{1/p}\} \sum_{n=1}^{k} n^{\alpha/p-r/p-1}. \end{aligned}$$

Így a következő látható:

(i) Ha $r < \alpha$, akkor $T_1 + T_3 \leq c\mathbb{E}|X|^\alpha < \infty$.

(ii) Ha $r = \alpha$, akkor $T_1 + T_3 \leq c\mathbb{E}|X|^r \log(1 + |X|) < \infty$.

(iii) Ha $r > \alpha$, akkor $T_1 + T_3 \leq c\mathbb{E}|X|^r < \infty$.

Ezért minden esetben $B < \infty$. □

3.2. *Megjegyzés.* Páronként független és azonos eloszlású valószínűségi változókra, [Chen, Bai, Sung (2014)]-ben lévő 3.7 Tétel ugyanazt az állítást mondja ki, mint a 3.7 Tétel. A 3.7 Tétel bizonyításából látható, hogy a [Chen, Bai, Sung (2014)]-ben lévő 3.7 Tétel kiterjeszthető átlagosan gyengén dominált páronként független valószínűségi változókra is. Továbbá látható, hogy a 3.7 Tételből következik a WOD valószínűségi változók teljes konvergenciája, ha (3.23)-ban és (3.24)-ben $g(n) = C$.

4. Perturbált mátrixok vizsgálata

4.1. Bevezetés

A véletlen mátrixok spektrális elmélete hosszú történelemre tekint vissza (lásd [Bai (1999)], [Füredi, Komlós (1981)], [O'Rourke, Renfrew (2014)], [Tao (2013)], [Vu (2007)] és az általuk felhasznált irodalom). Egyes munkákban a perturbált véletlen mátrixok spektrumát vizsgálták (lásd [O'Rourke, Renfrew (2014)]). Ugyanakkor, ebben az esetben a véletlen mátrixra úgy tekintünk, mint egy perturbált determinisztikus mátrixra.

Célunk Bolla eredményeinek a kiterjesztése (lásd: [Bolla (2005)] és [Bolla, Friedl, Krámli (2010)]). Tekintsünk egy rögzített P determinisztikus sablon (pattern) mátrixot, ezt felfújjuk, hogy megkapjunk egy „nagy" B_n blokkmátrixot, majd hozzáadunk egy W_n véletlen zajt. A következőkben határérték tételeket bizonyítunk be az $A_n = B_n + W_n$ sajátértékeire, ahogy $n \to \infty$. Az így kapott eredmények Bolla eredményeinek a kiterjesztése (lásd: [Bolla (2005)] és [Bolla, Friedl, Krámli (2010)]), mivel egyaránt vizsgálunk valós és komplex esetet is, továbbá különböző típusú zaj mátrixokat használunk, illetve újszerű határértéktételeket alkalmazunk a véletlen mátrixokra. Ezt követően numerikus eredmények kerülnek bemutatásra, illetve egy grafikus módszer, mely segít megkülönböztetni a strukturális sajátértékeket a nem strukturális sajátértékektől

A 4.2 és a 4.3 fejezetekben használt zaj mátrixok elemei nulla várható értékűek. Szimmetrikus mátrixokra kapott eredményeink a 4.2 fejezetben vannak bemutatva. A 4.1 Állítás írja le a felfújt hermitikus mátrixok sajátértékei. A 4.1 Tételben és a 4.1 Következményben komplex felfújt hermitikus mátrixokat perturbáltunk komplex Wigner-mátrixokkal. Wigner-mátrixok sajátértékeinek ismert eredményeit felhasználva belátjuk, hogy a perturbált felfújt mátrixok strukturális sajátértékei n-ed rendűek, míg a véletlen zaj által „generált" sajátértékek, majdnem biztosan, $\sqrt{n}$ rendűek.

A 4.2 Tételben és a 4.2 Következményben megkapjuk a fenti eredményeket arra az esetre, amikor a perturbációt komplex kovariancia mátrix segítségével végezzük el. A 4.3 Tételben és a 4.3 Következményben valós szimmetrikus felfújt mátrixokat perturbáltunk valós elliptikus mátrixokkal. Alkalmazva [O'Rourke, Renfrew (2014)] eredményeit az elliptikus mátrixok sajátértékeire, belátjuk, hogy a perturbált felfújt mátrix strukturális sajátértékei n-ed rendűek, míg a nem strukturális sajátértékek, majdnem biztosan, $\sqrt{n}\log_2 n$ rendűek.

A 4.3 fejezetben nem-szimmetrikus komplex mátrixokat vizsgálunk. A 4.4 Tételben és a 4.4 következményben komplex független azonos eloszlású mátrixszal perturbált komplex felfújt mátrixok szinguláris értékeinek aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk.

A 4.4 fejezetben pozitív várhatóértékű elemekkel feltöltött mátrixokat vizsgálunk. A 4.5 Tétel kimondja, hogy a maximális sajátérték „nagy”, amikor a mátrix elemei teljesítenek bizonyos elfogadhatósági feltételeket. Ezen eredményünk [Bolla (2005)] 4.1 Tételének kiterjesztése, ahol azt tették fel, hogy a szimmetrikus véletlen mátrixok főátló feletti elemei függetlenek. A 4.5 Tétel bizonyításához felhasználjuk a Bernstein-féle egyenlőtlenséget az elfogadható véletlen változókra (4.3 Állítás).

A 4.5 fejezetben a numerikus eredményeket mutatjuk be. A számítógépes szimulációk eredményei alátámasztják az elméleti eredményeket. A perturbált felfújt mátrix sajátértékeinek a tipikus viselkedése a következő. Legyen $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ a perturbált felfújt mátrix sajátértékeinek abszolút értéke csökkenő sorrendben. Akkor a $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_k|$ strukturális sajátértékek „nagyok” és gyorsan csökkenek. A többi sajátérték, $|\lambda_{k+1}| \geq |\lambda_{k+2}| \geq \dots$, relatív „kicsi” és nagyon lassan csökken az értékük. Tehát könnyen megtalálhatóak a strukturális sajátértékek. Ahhoz, hogy megkapjuk a strukturális sajátértékeket, a következő numerikus (grafikus) eljárást javasoljuk. Keressük meg A_n néhány sajátértékét, kezdve abszolút értékben a legnagyobbakkal. Legyen a megállási feltétele az, hogy az utolsó 5-10 sajátérték abszolút értéke közel azonos és nulla körüli. Ekkor megkapjuk a következő növekvő sorozatot: $|\lambda_t| \leq |\lambda_{t-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_1|$. A fenti sorrendben ábrázoljuk az értékeket, hogy megtalálhassuk a hirtelen változást. Ha

$$0 \approx |\lambda_t| \approx |\lambda_{t-1}| \approx \cdots \approx |\lambda_{l+1}| \ll |\lambda_l| < \cdots < |\lambda_1|,$$

akkor a hirtelen változás l-nél van, illetve a $\lambda_l, \lambda_{l-1}, \dots, \lambda_1$ tekinthetők a strukturális sajátértékeknek. Ugyanakkor, lehetséges több-kevesebb kivétel. Ha a jel-zaj arány túl kicsi, vagy a blokkok méretei nagyon eltérőek, vagy B_n legkisebb nemnulla sajátértékei nagyon kicsik, akkor a módszerünk nem eredményez egy precíz határt. Ezekben az esetekben rendszerint néhány strukturális sajátérték úgy viselkedik, mint a nem strukturális sajátértékek.

4.1. *Példa.* Egy mátrix felfújásának menete

Tekintsük a következő P mátrixot

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

A P mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = -1$. Most fújjuk fel a P mátrixot az

$n_1 = 2$ és $n_2 = 3$ segítségével, ekkor B_P a P mátrix felfújtja a következő

$$\left(\begin{array}{cc:ccc} 2 & 2 & 8 & 8 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & 8 & 8 \\ \hdashline 3 & 3 & 7 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 7 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

B_P sajátértékeinek a meghatározása a következő képen történik

$$\left(\begin{array}{cc:ccc} 2 & 2 & 8 & 8 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & 8 & 8 \\ \hdashline 3 & 3 & 7 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 7 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_2 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

ahol, $t_1 = t_2 = u_1$ és $t_3 = t_4 = t_5 = u_2$. Ezt megoldva kapjuk B_P sajátértékeit: $\beta_1 = 27.2054$ és $\beta_2 = -2.2054$.

A fenti egyenlőség ekvivalens a következő

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Melyet megoldva kapjuk a $\beta_1 = 27.2054$ és $\beta_2 = -2.2054$ sajátértékeket.

4.2. Perturbált szimmetrikus mátrixok sajátértékei

Ebben a fejezetben a felfújt hermitikus mátrixok perturbációit tanulmányozzuk. Azt szeretnénk vizsgálni, hogy hogyan hatnak bizonyos perturbációk a mátrixok sajátértékeire.

Legyen P egy szimmetrikus sablon mátrix, amely egy rögzített komplex hermitikus (valós esetben szimmetrikus) $k \times k$ méretű és r rangú mátrix. Jelölje p_{ij} a P mátrix (i, j) indexű elemét. Legyenek $n_1, \ldots, n_k$ pozitív egész számok és $n = n_1 + \cdots + n_k$. Legyen $\tilde{B}_n$ egy $n \times n$ méretű mátrix, mely k^2 darab blokkból áll. Ezen mátrix (i, j) blokkja $n_i \times n_j$ méretű és minden elem ebben a blokkban egyenlő p_{ij}-vel. A B_n mátrixot felfújt mátrixnak nevezzük, ha megkapható $\tilde{B}_n$-ból azáltal, hogy azonos permutációt alkalmazva újrarendezzük a sorait és az oszlopait.

Bolla Marianna [Bolla (2005)] munkája nyomán a következő növekedési feltételt fogjuk használni

$$n \to \infty, \quad \text{ahol} \quad n_i/n \geq c \quad \text{minden} \quad i\text{-re}, \tag{4.1}$$

ahol $c > 0$ egy rögzített konstans. Olyan valós, szimmetrikus mátrixok esetén, melyek minden eleme $0 < p_{ij} < 1$, a [Bolla (2005)] 2.1 Állításában a következő eredmény szerepel. Ha (4.1) feltétel teljesül, akkor B_n mátrixnak r darab nemnulla sajátértéke és $n - r$ nulla sajátértéke van. Továbbá minden nemnulla sajátértéke n nagyságrendű. Ezt az eredményt szeretnénk kiterjeszteni komplex mátrixok esetére is.

4.1. Állítás. *Legyen P egy előre rögzített hermitikus sablon mátrix, azaz egy komplex hermitikus (valós esetben szimmetrikus) $k \times k$ méretű és r rangú mátrix. Legyen B_n a P_n mátrix felfújt mátrixa. Akkor B_n-nek r darab nemnulla sajátértéke van. Ha a* (4.1) *feltétel teljesül, akkor B_n nemnulla sajátértékeinek az abszolút értékének a nagyságrendje n.*

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy B_n sajátértékei valósak és az n-dimenziós térnek létezik egy, a B_n sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. Jelölje β_j a B_n sajátértékeit és $\mathbf{u}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ az ortonormált sajátvektorait. Tegyük fel, hogy $\beta_1, \ldots, \beta_r$ a nemnulla sajátértékek. Felhasználva a [Bolla (2005)]-ben alkalmazott ötleteket, a következőt kapjuk. Jelölje $\mathbf{u}$ és β a B_n egy általános sajátérték és sajátvektor párját. Akkor minden $l = 1, 2, \ldots, k$-ra, $\mathbf{u}$ n_l koordinátái egyenlőnek mondjuk $u(l)$-lel. Legyen $\tilde{\mathbf{u}}$ egy k-dimenziós vektor, melynek koordinátái $u(1), \ldots, u(k)$ és legyen N egy diagonális mátrix, főátlóján az $n_1, \ldots, n_k$ elemekkel. Tehát a $B_n\mathbf{u} = \beta\mathbf{u}$ sajátérték-egyenlet ekvivalens a $PN\tilde{\mathbf{u}} = \beta\tilde{\mathbf{u}}$ egyenlettel. Továbbá, ez az egyenlet ekvivalens a a következővel

$$N^{1/2}PN^{1/2}\mathbf{v} = \beta\mathbf{v},$$

ahol $\mathbf{v} = N^{1/2}\tilde{\mathbf{u}}$. Végül, ez az egyenlet ekvivalens a a következővel

$$\tilde{N}^{1/2}P\tilde{N}^{1/2}\mathbf{v} = \frac{\beta}{n}\mathbf{v},$$

ahol $\tilde{N} = \frac{1}{n}N$. Látható, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ vektorok ortonormált sajátvektorai $\tilde{N}^{1/2}P\tilde{N}^{1/2}$-nek és a sajátértékei a következők: $\beta_1/n, \ldots, \beta_r/n$. Most alkalmazzuk a Courant–Fischer–Weyl min-max elvet. Először feltételezzük, hogy a P mátrix l-edik sajátértéke pozitív, vagyis $\lambda_l(P) > 0$. Akkor

$$\lambda_l(\tilde{N}^{1/2}P\tilde{N}^{1/2}) \geq \min_{\mathbf{x}\in H} \frac{\mathbf{x}^*\tilde{N}^{1/2}P\tilde{N}^{1/2}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}} \geq \min_j \frac{n_j}{n} \min_{\mathbf{x}\in H} \frac{\mathbf{x}^*\tilde{N}^{1/2}P\tilde{N}^{1/2}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\tilde{N}^{1/2}\tilde{N}^{1/2}\mathbf{x}}$$

minden $k - l + 1$ dimenziós H altérre. Mivel $\tilde{N}^{1/2}$ nem szinguláris, a következőt kapjuk

$$\lambda_l(\tilde{N}^{1/2}P\tilde{N}^{1/2}) \geq c\lambda_l(P).$$

Másrészről

$$\lambda_l(\tilde{N}^{1/2}P\tilde{N}^{1/2}) \le \max_{\mathbf{x}\in H} \frac{\mathbf{x}^*\tilde{N}^{1/2}P\tilde{N}^{1/2}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\mathbf{x}} \le \max_j \frac{n_j}{n} \max_{\mathbf{x}\in H} \frac{\mathbf{x}^*\tilde{N}^{1/2}P\tilde{N}^{1/2}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^*\tilde{N}^{1/2}\tilde{N}^{1/2}\mathbf{x}}$$

minden l dimenziós H altérre. A következőt kapjuk

$$\lambda_l(\tilde{N}^{1/2}P\tilde{N}^{1/2}) \le (1-c)\lambda_l(P).$$

Mivel $\lambda_l(\tilde{N}^{1/2}P\tilde{N}^{1/2}) = \beta_l/n$, megkapjuk az eredményt pozitív $\lambda_l(P)$-re. Ha $\lambda_l(P) < 0$, hasonló gondolatmenet vezet eredményre. □

Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy P rangja k. Tekintsük csökkenő sorrendben a sajátértékeket, vagyis $\lambda_1(B_n) \ge \cdots \ge \lambda_n(B_n)$. Tudjuk, hogy a B_n mátrixnak k darab sajátértéke nemnulla és a megmaradt sajátértékek nullával egyenlőek. Ezt a k darab nemnulla sajátértéket, a B_n strukturális sajátértékeinek nevezzük. Hasonlóan, strukturális sajátértékeknek fogjuk nevezni a felfújt mátrixnak azokat a sajátértékeit, melyek a megfelelői a B_n strukturális sajátértékeinek. Ezt a megfeleltetést a következő tételek tárgyalják. Látni fogjuk, hogy a strukturális sajátértékek nagyságrendje nagy, viszont a többi, nem strukturális sajátérték nagyságrendje kicsi.

Először tekintsük a Wigner-mátrixokkal képzett perturbációkat. A következő tétel a [Bolla (2005)] 2.3 Tételének általánosítása, ahol a valós esetet vizsgálták és a perturbáció mátrixa egyenletesen korlátos. A következő tételben B_n és W_n egyaránt komplex hermitikus mátrixok (speciális esetben szimmetrikus valós mátrixok). A W_n zaj mátrix egy Wigner-mátrix, mely véges negyedik momentummal rendelkezik.

4.1. Tétel. *Legyen B_n, $n = 1, 2, \dots$, komplex hermitikus mátrixok egy sorozata. A W_n, $n = 1, 2, \dots$ Wigner-mátrixok legyenek komplex hermitikus mátrixok, melyek teljesítik a következő feltételeket. Legyenek a W_n főátlóján lévő w_{ii} elemek független azonos eloszlású valós valószínűségi változók, továbbá legyenek a főátló feletti elemek független azonos eloszlású komplex valószínűségi változók és mindezek az elemek legyenek függetlenek. Legyen $w_{ij} = \bar{w}_{ji}$ minden i, j-re. Feltételezzük, hogy $\mathbb{E}w_{11}^2 < \infty$, $\mathbb{E}w_{12} = 0$, $\mathbb{E}|w_{12} - \mathbb{E}w_{12}|^2 = \sigma^2$ véges és pozitív, $\mathbb{E}|w_{12}|^4 < \infty$. Akkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_i(B_n + W_n) - \lambda_i(B_n)|}{\sqrt{n}} \le 2\sigma \tag{4.2}$$

minden i-re majdnem biztosan.

Bizonyítás. A [Bai (1999)] 2.12 Tétele alapján (lásd Appendix 8.4 Tétel), $W_n/\sqrt{n}$ legnagyobb sajátértéke 2σ-hoz konvergál, majdnem biztosan. Így a Weyl perturbációs tételéből (lásd Appendix 8.2 Tétel) következik (4.2). □

4.1. Következmény. *Legyenek a B_n, $n = 1, 2, \dots$ a k rangú komplex hermitikus P mátrix felfújt mátrixai. Tegyük fel, hogy a (4.1) feltétel teljesül. Legyenek a W_n, $n = 1, 2, \dots$ olyan Wigner-mátrixok, melyek teljesítik a 4.1 Tétel feltételeit. Akkor a 4.1 Tétel és 4.1 Állítás értelmében $B_n + W_n$-nek van k darab n-ed rendű sajátértéke és a megmaradt sajátértékek $\sqrt{n}$ rendűek majdnem biztosan.*

Tulajdonképpen [Bolla (2005)] 2.3 Tételében a következő egyenlőtlenség van bebizonyítva (valós esetben)

$$|\lambda_j(B_n + W_n) - \lambda_j(B_n)| \le 2\sigma\sqrt{n} + \mathrm{O}(n^{1/3}\ln n)$$

$j = 1, \dots, n$-re, ahogy $n \to \infty$ majdnem biztosan teljesül (ahol σ^2 a w_{ij} valószínűségi változók szórásnégyzetének felső korlátja). Itt [Füredi, Komlós (1981)] eredményét alkalmazták. A következő megjegyzésben használjuk a [Vu (2007)] 1.3 Tételét (lásd Appendix 8.5 Tétel), hogy javítsuk a maradékot, de a majdnem biztos eredmény helyett, a kapott eredmény csak egyhez tartó valószínűséggel teljesül.

4.1. *Megjegyzés.* Legyen B_n, $n = 1, 2, \dots$ valós szimmetrikus mátrixok egy sorozata. Legyenek a W_n, $n = 1, 2, \dots$ Wigner-mátrixok valós szimmetrikus véletlen mátrixok, melyek teljesítik a következő feltevéseket. Legyenek w_{ij}, $1 \le i \le j \le n$ függetlenek, (de nem feltétlenül azonos eloszlásúak). Tegyük fel, hogy $|w_{ij}| \le K < \infty$, minden $1 \le i \le j \le n$ esetén. Legyen $\mathbb{E}w_{ij} = 0$ és $\mathbb{E}w_{ij}^2 = \sigma^2$, minden $1 \le i < j \le n$ esetén. Legyen $w_{ij} = w_{ji}$, minden i, j esetén. Akkor

$$|\lambda_j(B_n + W_n) - \lambda_j(B_n)| \le 2\sigma\sqrt{n} + Cn^{1/4}\ln n \tag{4.3}$$

$j = 1, \dots, n$-re teljesül egyhez tartó valószínűséggel, ha $n \to \infty$.

Most minta kovariancia mátrixokat fogunk használni perturbációs mátrixként. Legyen x_{jl}, $j, l = 1, 2, \dots$ egy végtelen tömb, mely elemei függetlenek és azonos eloszlású komplex értékű valószínűségi változók, 0 várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Legyen $X = (x_{jl})_{j=1,\ l=1}^{n,\ \ m}$ a bal felső sarokban lévő blokk, mely mérete $n \times m$. Az $S_n = \frac{1}{m}XX^*$ mátrixot minta kovariancia mátrixnak nevezzük.

4.2. Tétel. *Legyen* B_n*,* $n = 1, 2, \ldots$ *komplex hermitikus mátrixok egy sorozata. Legyen* S_n*,* $n = 1, 2, \ldots$ *olyan komplex értékű minta kovariancia mátrix, mely teljesíti a fenti feltételeket. Továbbá feltesszük, hogy* X *elemeinek rendelkeznek véges negyedik momentummal. Legyen* $\lim_{n\to\infty} n/m = y \in (0, \infty)$*. Akkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_i(B_n + \sqrt{m}S_n) - \lambda_i(B_n)}{\sqrt{m}} \leq \sigma^2(1 + \sqrt{y})^2$$

majdnem biztosan teljesül, tetszőleges i*-re.*

Bizonyítás. A [Bai (1999)] 2.16 Tétele szerint (lásd Appendix 8.6 Tétel), S_n legnagyobb sajátértéke majdnem biztosan konvergál $\sigma^2(1 + \sqrt{y})^2$-hez. Így a Weyl perturbációs tételből (lásd 8.2 Tétel) következik az eredmény. $\square$

4.2. *Megjegyzés.* Mivel S_n pozitív szemi-definit, ezért $0 \leq \lambda_i(B_n + \sqrt{m}S_n) - \lambda_i(B_n)$ mindig igaz.

4.2. Következmény. *Legyenek* B_n*,* $n = 1, 2, \ldots,$ *egy* k *rangú* P *komplex hermitikus mátrix felfújt mátrixai. Tegyük fel, hogy a* (4.1) *feltétel teljesül. Legyenek* S_n*,* $n = 1, 2, \ldots$ *a minta kovariancia mátrixok és teljesítsék a 4.2 Tételben foglalt feltételeket. Akkor a 4.2 Tételből és a 4.1 Állításból következik, hogy* $B_n + \sqrt{m}S_n$ k *darab* n*-ed rendű sajátértékkel rendelkezik és a megmaradt sajátértékek* $\sqrt{n}$ *rendűek, majdnem biztosan.*

Most folytassuk az elliptikus perturbációkkal. Ezt tekinthetjük a Wigner-féle és a független azonos eloszlású perturbáció egy közös általánosításának. A [O'Rourke, Renfrew (2014)]-ben megadott (C0) feltételt fogjuk használni. Az Y_n, $n = 1, 2, \ldots$ mátrixok sorozata teljesíti a (C0) feltételt, ha a következő tulajdonságok igazak. Legyen (ξ_1, ξ_2) valós valószínűségi változók (úgynevezett atom változók), mindkettő nulla várhatóértékű, egység szórásnégyzetű és véges negyedik momentummal rendelkeznek. Legyen y_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots$ valós valószínűségi változókkal feltöltött tömb olyan, hogy $1 \leq i < j$ esetén az (y_{ij}, y_{ji}) valószínűségi vektorok független másolatai a (ξ_1, ξ_2)-nek, y_{ii}, $i = 1, 2, \ldots$ pedig független azonos eloszlású valószínűségi változók nulla várható értékkel és véges szórásnégyzettel, $\{y_{ii} : i = 1, 2, \ldots\} \cup \{(y_{ij}, y_{ji}) : 1 \leq i < j\}$ független véletlen elemek. Ekkor azt mondjuk, hogy az $Y_n = (y_{ij})_{i,j=1}^n$, $n = 1, 2, \ldots$ elliptikus véletlen mátrixok teljesítik a (C0) feltételt.

4.3. Tétel. *Legyen* B_n*,* $n = 1, 2, \ldots$ *valós szimmetrikus mátrixok sorozata. Legyenek* $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_n$ B_n *mátrix sajátértékei. Legyen* Y_n*,* $n = 1, 2, \ldots$ *elliptikus véletlen mátrixok sorozata, melyek teljesítik a (C0)* *feltételt. Legyen* $(\lambda_1 + i\mu_1), \ldots, (\lambda_n + i\mu_n)$ *a* $B_n + Y_n$ *sajátértékei, úgy hogy* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ *(itt* $i = \sqrt{-1}$*). Akkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_j - \beta_j|}{\sqrt{n}(\log_2 n + 1.038)} \leq 4$$

és

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\mu_j|}{\sqrt{n}} \leq 4$$

minden j*-re, majdnem biztosan.*

Bizonyítás. A [O'Rourke, Renfrew (2014)] 3.3 Lemmája alapján a spektrál normára a következőt kapjuk

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \frac{Y_n}{\sqrt{n}} \right\| \leq 4$$

majdnem biztosan. Továbbá, egy hermitikus mátrix nem hermitikus perturbációjára, a [Kahan (1975)] alapján a következőt kapjuk. Ha $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_n$ a B komplex hermitikus mátrix sajátértékei és $(\lambda_1 + i\mu_1), \ldots, (\lambda_n + i\mu_n)$ a $B + Y$ perturbált mátrix sajátértékei, úgy, hogy $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$, akkor

$$|\lambda_j - \beta_j| \leq \|Y\|(\log_2 n + 1.038) \quad \text{and} \quad |\mu_j| \leq \|Y\|$$

minden j-re. □

4.3. Következmény. *Legyen* B_n*,* $n = 1, 2, \ldots$ *egy* k *rangú* P *valós szimmetrikus mátrix felfújt mátrixai. Tegyük fel, hogy a* (4.1) *feltétel teljesül. Legyen* Y_n*,* $n = 1, 2, \ldots$ *elliptikus véletlen mátrixok sorozata, melyek teljesítik a (C0) feltételt. Akkor a 4.3 Tételből és a 4.1 Állításból következik, hogy* $B_n + Y_n$*-nek van* k *darab* n*-ed rendű sajátértéke és a többi sajátértékek* $\sqrt{n}\log_2 n$ *rendűek, majdnem biztosan.*

4.3. Perturbált mátrixok szinguláris értékei

Ebben a fejezetben tetszőleges felfújt mátrixok perturbációinak tanulmányozásával folytatjuk. Olyan mátrixok szinguláris értékeit keressük, melyeket bizonyos véletlen mátrixokkal perturbáltak.

Legyen P egy rögzített r rangú $a \times b$ méretű komplex sablon mátrix. Jelölje p_{ij} a P mátrix (i, j) indexű elemét. Legyenek $m_1, \ldots, m_a$ és $n_1, \ldots, n_b$ pozitív egész számok, $m = m_1 + \cdots + m_a$, $n = n_1 + \cdots + n_b$. Legyen $\tilde{B}$ egy ab blokkból álló $m \times n$ méretű mátrix. Az (i, j) blokk mérete $m_i \times n_j$ és minden elem ebben a blokkban p_{ij}-vel egyenlő. A B mátrixot felfújt mátrixnak nevezzük, ha megkapható $\tilde{B}$ sorainak és oszlopainak átrendezésével.

A [Bolla, Friedl, Krámli (2010)] munka nyomán, a következő növekedési feltételt fogjuk használni

$$m, n \to \infty \ \text{ úgy hogy } \ m_i/m \geq c \ \text{ és } n_i/n \geq d \ \text{ minden } \ i\text{-re}, \tag{4.1}$$

ahol $c, d > 0$ rögzített konstansok. A következő állítás egy kiterjesztése a [Bolla, Friedl, Krámli (2010)] 6. Állításának a komplex esetre.

4.2. Állítás. *Legyen P rögzített, $a \times b$ méretű és r rangú komplex mátrix. Legyen B a P mátrix $m \times n$-en felfújt mátrixa. Ha a* (4.1) *feltétel teljesül, akkor B nemnulla szinguláris értékeinek nagyságrendje $\sqrt{mn}$.*

A következő tétel $[Bolla, Friedl, Krámli(2010)]$ 5. Megjegyzésének ötletén alapszik, viszont részben eltérő feltételrendszert alkalmazva. Most tekintsük azokat a perturbáló mátrixokat, melyek elemei független azonos eloszlású komplex számok. Legyen x_{jk}, $j, k = 1, 2, \ldots$, egy végtelen tömb, mely elemei független azonos eloszlású komplex valószínűségi változók, nulla várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Legyen $X = (x_{jk})_{j=1,\ k=1}^{m,\ \ n}$ a bal felső sarokban lévő $m \times n$ méretű blokk.

4.4. Tétel. *Minden m-re és n-re legyen B egy $m \times n$ méretű komplex mátrix és legyen $X = X_{mn}$ egy fent leírt $m \times n$ méretű komplex mátrix, mely elemei független azonos eloszlásúak. Továbbá, tegyük fel, hogy X elemei rendelkeznek véges negyedik momentummal. Tegyük fel, hogy $m, n \to \infty$ úgy, hogy $K_1 \leq \frac{m}{n} \leq K_2$, ahol $0 < K_1 \leq K_2 < \infty$ rögzített konstansok. Jelölje rendre s_i és z_i B és $B + X$ szinguláris értékeit, $s_1 \geq \cdots \geq s_{\min\{m,n\}}$, $z_1 \geq \cdots \geq z_{\min\{m,n\}}$. Akkor, minden i-re*

$$|s_i - z_i| = \mathrm{O}(\sqrt{n})$$

ahogy $m, n \to \infty$, majdnem biztosan.

Bizonyítás. Legyen $S = S_n = \frac{1}{n} X X^*$ a minta kovariancia mátrix. A [Bai (1999)] 2.16 Tétele alapján (lásd Appendix 8.6 Tétel), ha $\lim_{n\to\infty} m/n = y \in (0, \infty)$, akkor S_n legnagyobb sajátértéke $\sigma^2(1 + \sqrt{y})^2$-hez konvergál, majdnem biztosan. Ezért $\frac{1}{\sqrt{n}} X$ legnagyobb szinguláris értéke felülről korlátos. Így, a Weyl perturbációs tétel értelmében, $|s_i - z_i| \leq \|X\|_2$, ahol $\|X\|_2$ a spektrál norma, vagyis az X mátrix legnagyobb szinguláris értéke. Ebből következik a végeredmény. $\square$

A 4.2 Állítás és a 4.4 Tétel a következőt vonja maga után.

4.4. Következmény. *Legyen P rögzített r rangú és $a \times b$ méretű komplex mátrix. Legyen B, a P $m \times n$ méretű felfújt mátrixa. Tegyük fel, hogy a (4.1) feltétel teljesül. Legyen X olyan komplex értékű felfújt mátrixok, melyek teljesítik a 4.4 Tétel feltevéseit. Jelölje z_i a $B + X$ szinguláris értékeit, $z_1 \geq \cdots \geq z_{\min\{m,n\}}$. Akkor z_i nagyságrendje n, ha $i = 1, \ldots, r$ és $z_i = \mathrm{O}(\sqrt{n})$, ha $i = r+1, \ldots, \min\{m,n\}$, majdnem biztosan, ahogy $m, n \to \infty$ úgy, hogy $K_1 \leq \frac{m}{n} \leq K_2$, ahol $0 < K_1 \leq K_2 < \infty$ rögzített konstansok.*

4.4. Nemnulla várható értékű elemekből álló mátrixok sajátértékei

Az előző fejezetben megvizsgáltuk azokat a perturbációkat, melyek olyan mátrixokkal adódtak, melyek eleme nulla várható értékűk. Most általános feltételek mellett megmutatjuk, hogy a sajátértékek „nagyok”, ha a várható értékek pozitívak. Ez a tétel egy kiterjesztése a [Bolla (2005)] eredményének, ahol a független elemek esetét vizsgálták.

Először egy általános Bernstein típusú egyenlőtlenséget fogunk igazolni. Az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ valós valószínűségi változók egy sorozatára tekintsük a következő feltételt

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n} t\eta_i} \leq \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{t\eta_i}. \tag{4.1}$$

Ha a (4.1) feltétel teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, az [Antonini, Kozachenko, Volodin (2008)]-ben ismertetett elfogadható valószínűségi változókat kapjuk. A korábbi fejezetekből tudjuk, hogy a negatív ortáns függő, a negatív asszociált és a független valószínűségi változók elfogadhatóak. Ha a (4.1) egyenlőtlenség igaz $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ esetén, akkor igaz marad $\eta_1 - a_1, \eta_2 - a_2, \ldots, \eta_n - a_n$-re is, tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós számokra, speciálisan $\eta_1 - \mathbb{E}\eta_1, \eta_2 - \mathbb{E}\eta_2, \ldots, \eta_n - \mathbb{E}\eta_n$ esetén. Néhány egyenlőtlenség, mely alkalmazható független esetben, könnyedén módosítható elfogadható valószínűségi változók esetére.

Most egy ismert lemmával folytatjuk.

4.1. Lemma. *Legyen η valós valószínűségi változó, $|\eta| \leq C < \infty$, $\mathbb{E}\eta = 0$, $\sigma^2 = \mathbb{D}^2\eta$. Akkor*

$$\mathbb{E}e^{t\eta} \leq \exp\left\{ t^2\sigma^2 \left(\frac{e^{tC} - 1 - tC}{(tC)^2} \right) \right\}$$

tetszőleges t-re.

A teljesség kedvéért közöljük a bizonyítást

Bizonyítás. Legyen $F = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{t^{r-2}\mathbb{E}(\eta^r)}{r!\sigma^2}$. Ekkor

$$\mathbb{E}e^{t\eta} = \mathbb{E}\left(1 + t\eta + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{t^r\eta^r}{r!}\right) = 1 + t^2\sigma^2 F \leq e^{t^2\sigma^2 F}$$

$r \geq 2$-re: $\mathbb{E}\eta^r = \mathbb{E}\left(\eta^{r-2}\eta^2\right) \leq \sigma^2 C^{r-2}$, így

$$F \leq \sum_{r=2}^{\infty} \frac{t^{r-2}\sigma^2 C^{r-2}}{r!\sigma^2} = \frac{1}{(tC)^2} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{(tC^r)}{r!} = \frac{e^{tC} - 1 - tC}{(tC)^2}. \qquad \square$$

A [Chen, Sungo (2017)]-ben bemutatták, hogy a Bernstein-egyenlőtlenség teljesül negatív ortáns függő sorozatok esetén. Itt megmutatjuk, hogy ez igaz általánosabb esetben is.

4.3. Állítás. *Valós valószínűségi változók egy $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ sorozatára feltesszük, hogy a (4.1) feltétel teljesül minden $\lambda \geq 0$ esetén. Legyen $|\eta_i| \leq C < \infty$, $\mathbb{E}\eta_i = 0$, $\sigma_i^2 = \mathbb{D}^2\eta_i$ minden i-re. Legyen $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$. Akkor*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2(\sigma^2 + \varepsilon C/3)}\right)$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra.

Bizonyítás. A megszokott módszert követjük. A Markov-egyenlőtlenség, illetve (4.1) és a 3.1 Állítás alapján, $t \geq 0$ esetén a következőt kapjuk

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(e^{t\sum_{i=1}^{n}\eta_i} \geq e^{t\varepsilon}\right) \leq \frac{\mathbb{E}e^{t\sum_{i=1}^{n}\eta_i}}{e^{t\varepsilon}} \leq$$

$$\leq \frac{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{t\eta_i}}{e^{t\varepsilon}} \leq \exp\left\{t^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \left(\frac{e^{tC} - 1 - tC}{(tC)^2}\right) - t\varepsilon\right\}.$$

Legyen $t = \frac{1}{C}\log\left(1 + \frac{\varepsilon C}{\sigma^2}\right)$. Akkor a fenti kifejezés egyenlő a következővel

$$\exp\left\{\frac{\sigma^2}{C^2}\left(1 + \frac{\varepsilon C}{\sigma^2}\right) - 1 - \log\left(1 + \frac{\varepsilon C}{\sigma^2}\right)\right\}$$

Legyen $u = \frac{\varepsilon C}{\sigma^2}$. Akkor a fenti kifejezés egyenlő a következővel

$$\exp\left(-\frac{\sigma^2}{C^2}\left\{\log(1+u)\left[1 + \frac{\varepsilon C}{\sigma^2}\right] - u\right\}\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{C^2} h\left(\frac{C\varepsilon}{\sigma^2}\right)\right),$$

ahol $h(u) = (1+u)\log(1+u) - u$. Mivel $h(u) \geq \frac{u^2}{2(1+u/3)}$, ha $u \geq 0$, következésképpen megkapjuk, hogy a fenti kifejezés kisebb vagy egyenlő, mint

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2(\sigma^2+\varepsilon C/3)}\right).$$

Így megkaptuk a kívánt eredményt. □

Most a [Bolla (2005)] 4.1 Tételét terjesszük ki olyan mátrixokra, melyek minden sorában elfogadható valószínűségi változók vannak.

4.5. Tétel. *Legyenek x_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots$ nemnegatív valós valószínűségi változók, $0 \leq x_{ij} \leq K < \infty$ minden i, j-re. Tegyük fel, hogy minden sor teljesíti a következő elfogadhatósági feltételt*

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^n tx_{ki}} \leq \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{tx_{ki}} \tag{4.2}$$

tetszőleges $t \leq 0$-re és minden $k, n = 1, 2, \dots$ esetén. Legyen $m_{kn} = \mathbb{E}x_{k1} + \mathbb{E}x_{k2} + \dots + \mathbb{E}x_{kn}$ és $\sigma_{kn}^2 = \mathbb{D}^2x_{k1} + \mathbb{D}^2x_{k2} + \dots + \mathbb{D}^2x_{kn}$ tetszőleges k, n-re. Tegyük fel, hogy léteznek c_1, c_2 pozitív véges konstansok, δ és Δ teljesítik a $0 < \delta \leq \Delta \leq 1/2$ egyenlőtlenséget és olyanok, hogy

$$m_{kn} \geq c_1 n^{\delta+1/2}, \qquad \sigma_{kn}^2 \leq c_2 n^{\Delta+1/2}$$

minden $k, n = 1, 2, \dots$-re. Jelölje $X_n = (x_{ij})_{i,j=1}^n$ a fenti végtelen mátrix bal felső sarkában lévő $n \times n$ részt. Akkor a maximális sajátértékre teljesül

$$\lambda_{\max}(X_n) \geq c_1 n^{\varepsilon+1/2}$$

kivéve véges sok n-et, majdnem biztosan tetszőleges olyan ε-ra, melyre $0 < \varepsilon < \delta$.

Bizonyítás. A Perron–Frobenius-tétel alapján egy nemnegatív négyzetes mátrix rendelkezik olyan sajátértékkel, mely nem kisebb a legkisebb sorösszegnél.

Ezért

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{\max}(X_n) \geq c_1 n^{\varepsilon+1/2}\right) \geq \mathbb{P}\left(\min_i S_i \geq c_1 n^{\varepsilon+1/2}\right),$$

ahol $S_i = \sum_{k=1}^n x_{ik}$. Most alkalmazva a 4.3 Állítást és a $0 < \varepsilon < \delta \leq \Delta \leq 1/2$ feltételt, a komplementer eseményre a következőt kapjuk

$$\mathbb{P}\left(\lambda_{\max}(X_n) < c_1 n^{\varepsilon+1/2}\right) \leq n\mathbb{P}\left(S_i < c_1 n^{\varepsilon+1/2}\right) \leq$$

$$\leq n\mathbb{P}\left(\mathbb{E}S_i - S_i > \mathbb{E}S_i - c_1 n^{\varepsilon+1/2}\right) \leq n\mathbb{P}\left(\mathbb{E}S_i - S_i > c_1 n^{1/2}(n^\delta - n^\varepsilon\right) \leq$$

$$\leq n \exp\left\{-\frac{c_1^2 n(n^\delta - n^\varepsilon)^2}{2(c_2 n^{\Delta+1/2} + c_1 n^{1/2}\,(n^\delta - n^\varepsilon)K/3)}\right\} \leq$$

$$\leq n \exp\left\{-c_3 n^{(-\Delta+1/2)}(n^\delta - n^\varepsilon)^2\right\} \leq n \exp\left\{-c_4 n^\gamma\right\},$$

ahol $\gamma > 0$. Így alkalmazhatjuk a Borel–Cantelli lemmát, hogy megkapjuk, hogy

$$\lambda_{\max}(X_n) < c_1 n^{\varepsilon+1/2}$$

csak végesen gyakran teljesül 1 valószínűséggel. □

4.5. Numerikus eredmények

4.2. *Példa.* Az első példa a 4.1 Tétel és a 4.1 Állítás valós értékű esetét támasztja alá. Legyen P a következő szimmetrikus valós sablon mátrix

$$\begin{pmatrix}
8 & 7 & 2 & 5 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0\\
7 & 9 & 6 & 3 & 4 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1\\
2 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 0 & 2 & 2\\
5 & 3 & 6 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 & 3 & 2\\
3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 8 & 5 & 3 & 0 & 3\\
2 & 0 & 4 & 6 & 8 & 7 & 6 & 4 & 3 & 1\\
1 & 2 & 2 & 3 & 5 & 6 & 9 & 7 & 6 & 5\\
2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 8 & 6\\
1 & 2 & 2 & 3 & 0 & 3 & 6 & 8 & 9 & 5\\
0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 5 & 7
\end{pmatrix}$$

Ebben a példában a mátrix mérete $k = 10$, a rangja $r = 10$, vagyis A_n rendelkezik 10 strukturális sajátértékkel. Hogy megkapjuk a B_n mátrixot, felfújjuk P-t, a következő blokkméreteket használva: $n_1, \ldots, n_{10}$, melyek mérete rendre a következő

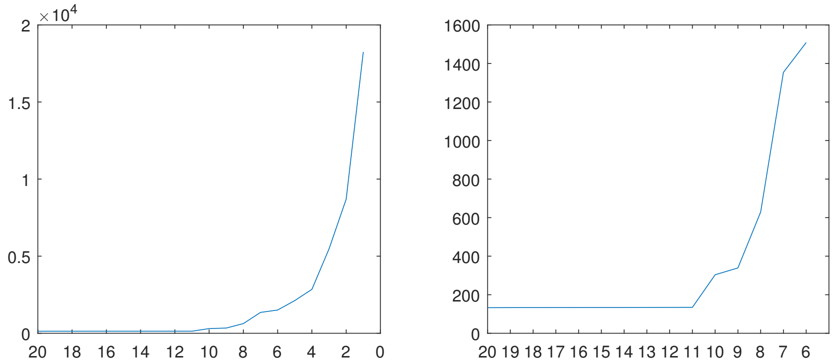
$$500, 490, 480, 470, 460, 450, 440, 430, 420, 410.$$

Továbbá legyen W_n egy valós szimmetrikus Wigner-mátrix, w_{ij} elemekkel úgy, hogy $i \leq j$ esetén a w_{ij} elemek legyenek független standard normális eloszlásúak. 1000 alkalommal generáltunk W_n mátrixot, majd minden esetben meghatároztuk az $A_n = B_n + W_n$ 20 legnagyobb sajátértékét (ebben az esetben a legnagyobb az abszolút érték szerinti legnagyobbat jelenti). Az eredmények az 3. Táblázatban láthatóak

j	$\lambda_j(B_n)$	$\lambda_j(A_n)$	mean($\lvert\lambda_j(A_n)\rvert$)	var($\lvert\lambda_j(A_n)\rvert$)
1	18246.0	18247.0	18246.0	2.0461
2	8692.4	8693.6	8692.9	2.0533
3	5471.5	5472.3	5472.3	1.9234
4	2846.3	2848.2	2847.9	2.0317
5	2118.1	2121.0	2120.2	1.9060
6	1504.8	1508.5	1507.8	2.0873
7	-1350.0	-1353.7	1353.3	2.0347
8	-622.2	-629.2	629.5	2.0003
9	-326.1	-339.0	340.0	1.9204
10	289.2	303.6	304.9	2.0125
11	0	134.5	134.6	0.0761
12	0	-134.4	134.3	0.0505
13	0	-134.2	134.1	0.0348
14	0	133.8	133.8	0.0310
15	0	-133.8	133.7	0.0289
16	0	-133.6	133.5	0.0272
17	0	133.5	133.3	0.0245
18	0	-133.3	133.1	0.0231
19	0	133.2	133.0	0.0209
20	0	-132.9	132.9	0.0195

3. Táblázat. A felfújt B_n és a zajos A_n mátrixok sajátértékei

A második oszlopban B_n sajátértékeit soroltuk fel. A harmadik oszlopban, egy tipikus eredményt (amely egy rögzített kísérlet eredménye) mutatunk be az A_n sajátértékeire, a negyedik oszlopban az A_n mátrixok sajátértékeinek abszolút értékének az átlaga, míg az ötödik oszlopban az A_n mátrixok sajátértékeinek abszolút értékének szórásnégyzete látható az 1000 ismétléses kísérlet elvégzését követően. Látható, hogy a szórásnégyzetek értéke kicsi, vagyis a kísérlet stabil. Továbbá megkülönböztethetőek a strukturális és nem strukturális sajátértékek, mivel a nem strukturális sajátértékek abszolút értéke kicsi és nagyon lassan növekszik, ezzel szemben a strukturális sajátértékek gyorsan növekednek, és a növekedésben hirtelen változás figyelhető meg a nem strukturális és strukturális sajátértékek határán (lásd 1. Ábra, ahol egy tipikus eredmény látható). Az 1. Ábra bal oldalán látható a $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_1(A_n)|$ sajátértékek. Itt jól látható, hogy $|\lambda_{20}(A_n)|, \ldots, |\lambda_{11}(A_n)|$ értékei közel azonosak, és $|\lambda_{10}(A_n)|$-nél a változás jól megfigyelhető. Az 1. Ábra jobb oldalán látható a $|\lambda_{20}(A_n)|, \ldots, |\lambda_6(A_n)|$



1. Ábra. Bal oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_1(A_n)|$; jobb oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_6(A_n)|$ egy tipikus eredmény az 4.2 Példában.

sajátértékek. Itt (a függőleges tengely skálázásának változása miatt), a hirtelen változás tisztán látható $|\lambda_{10}(A_n)|$-nél. Tehát a $|\lambda_{10}(A_n)|, \ldots, |\lambda_1(A_n)|$ a strukturális sajátértékek.

4.3. *Példa.* Ez a példa szintén a 4.1 Tétel és a 4.1 Állítás valós értékű esetére vonatkozik. Itt a legkisebb nemnulla sajátértékek relatív kicsik. Így azt gondolhatnánk, hogy A_n legkisebb strukturális sajátértékei megkülönböztethetetlenek a nem strukturális sajátértékektől. Mindazonáltal, a numerikus eredmények azt mutatják, hogy egy hirtelen váltás figyelhető meg a nem strukturális/strukturális sajátértékek határán.

Itt P egy 10×10-es méretű szimmetrikus, pozitív, valós sablon mátrix, melynek rangja 10, az elemei pedig 6 és 9 közöttiek. P sajátértékei a következők

40.22 19.24 11.72 6.03 4.73 3.44 -2.91 -1.42 -0.70 0.65

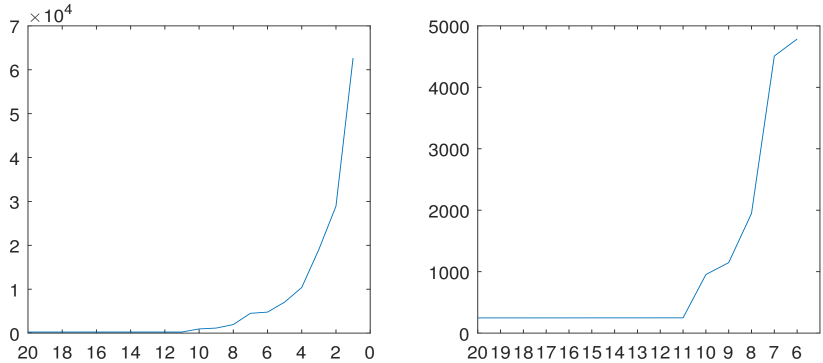
P felfújásához a következő blokkméreteket használtuk

2000, 1900, 1800, 1700, 1600, 1500, 1400, 1300, 1200, 1100

Az így megkapott B_n felfújt mátrix nemnulla sajátértékei a következőek:

62687 28914 19058 10393 7061 -4780 4506 -1938 -1134 935

Láthatjuk, hogy a P mátrix legkisebb sajátértéke relatív kicsi, emiatt ez így van B_n esetében is. A W_n perturbáció mátrix ismételten egy valós szimmetrikus Wigner-mátrix, mely elemei w_{ij}. Az $i \leq j$ esetén a w_{ij} elemek független standard normális eloszlásúak. Meghatároztuk az első 20 (abszolút érték szerinti csökkenő sorrendben) sajátértékét $A_n = B_n + W_n$-nek. Ismét



2. Ábra. Bal oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_1(A_n)|$;
jobb oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_6(A_n)|$ egy tipikus eredmény az 4.3 Példában.

elvégeztünk 1000 ismétlést a kísérletből. A sajátértékek szórásnégyzetei ismét kicsik voltak, így a kísérlet stabil volt.

$|A_n(10)|$, azaz A_n legkisebb strukturális sajátértéke megkülönböztethető volt a nem strukturális sajátértékektől. A $|\lambda_6(A_n)|, \dots, |\lambda_{15}(A_n)|$ átlagos értékei a következőek voltak

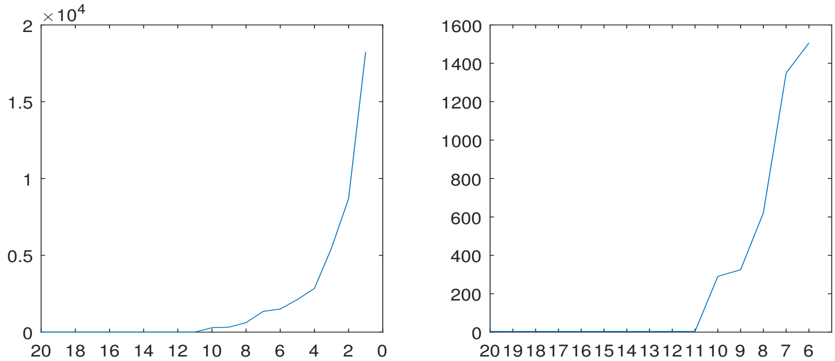
4783.8	4508.8	1945.9	1147.9	951.0	248.8	248.5	248.3	248.2	248.0

Az A_n legnagyobb sajátértékeinek egy tipikus megjelenése a 2. Ábrán látható.

4.4. *Példa.* Ez a példa a 4.2 Tételt és a 4.2 Állítást támasztja alá. Legyen P a 4.2 Példában megadott valós szimmetrikus sablon mátrix. Tehát 10 strukturális sajátértéke van a P mátrixnak. Hogy megkapjuk B_n-t, a P felfújásához ugyanazokat a blokkméreteket fogjuk használni, mint az 4.2 Példában. Az S_n minta kovariancia mátrix generálásához valós értékű független standard normális eloszlású mintát használtunk. 1000 alkalommal generáltuk az S_n mátrixot, majd kiszámoltuk az $A_n = B_n + S_n$ 20 legnagyobb sajátértékét (ebben az esetben a legnagyobb az abszolút érték szerinti legnagyobbat jelenti) Az eredmények stabilak voltak, vagyis a szórásnégyzet kicsi volt. Az A_n 20 legnagyobb sajátértékeire vett átlag a következő képen alakult:

18247.0	8693.3	5472.5	2847.3	2119.1	1505.8	-1349.0	-621.1	-325.0	290.2
3.9976	3.9785	3.9565	3.9392	3.9280	3.9253	3.9161	3.9087	3.8969	3.8905

Tehát, meg tudjuk különböztetni a strukturális és nem strukturális sajátértékeket. A 3. Ábrán egy tipikus eredmény látható. Az ábra bal oldalán $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_1(A_n)|$ szerepel, míg az ábra jobb oldalán $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_6(A_n)|$ szerepel. $|\lambda_{10}(A_n)|$-nél tisztán látható a hirtelen váltás. Tehát, a strukturális sajátértékek, a $|\lambda_1(A_n)|, \ldots, |\lambda_{10}(A_n)|$.



3. Ábra. Bal oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_1(A_n)|$;
jobb oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_6(A_n)|$ egy tipikus eredmény az 4.4 Példában.

4.5. *Példa.* Ez a példa a 4.4 Tételt és a 4.4 Állítást támasztja alá. Legyen P a következő 7×8-as valós, nem szimmetrikus sablon mátrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 6 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 9 & 8 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 8 & 7 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 9 & 6 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Hogy megkapjuk a B_n mátrixot, a következő blokkok segítségével fújtuk fel P-t

$$1000, 1500, 1000, 1200, 1500, 1100, 1000$$

és

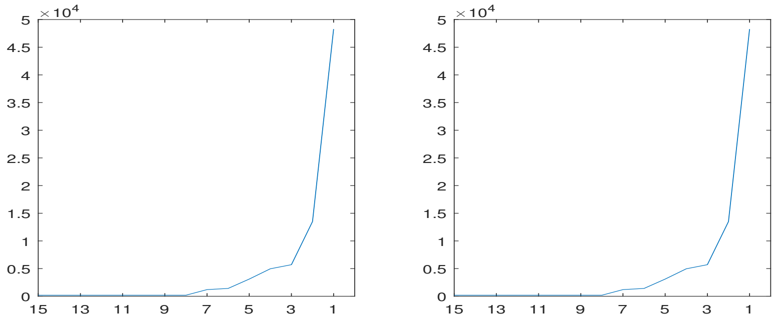
$$1000, 1000, 1200, 2000, 1100, 1000, 1100, 1000.$$

P szinguláris értékei a következők:

$$38.78, 12.84, 4.93, 4.29, 2.77, 1.26, 0.92$$

B_n nemnulla szinguláris értékei a következők:

$$48277.0, 13495.0, 5701.5, 4962.5, 3101.0, 1407.1, 1194.2$$



4. Ábra. Bal oldal: az A_n mátrix 15 legnagyobb szinguláris értékének átlaga; jobb oldal: az 4.5 Példára kapott egy tipikus eredmény, az A_n mátrixának a 15 legnagyobb szinguláris értéke.

Tehát ebben a példában 7 strukturális szinguláris érték található. Miután a B_n mátrixhoz független standard normális eloszlású zajt adtunk, megkaptuk az A_n mátrixot. Ezt követően kiszámoltuk A_n szinguláris értékeit és ezt a kísérletet megismételtük 1000 alkalommal. A_n 20 legnagyobb szinguláris értéke a következő volt

48277.0	13495.0	5703.0	4964.3	3103.7	1413.4	1201.6	187.8	187.5	187.3
187.1	187.0	186.8	186.7	186.5	186.4	186.3	186.1	186.0	185.9

Látható, hogy egy hirtelen változás következik be a 7. és a 8. szinguláris érték között. A szórásnégyzetek értéke ezúttal is kicsi volt. A 4. Ábra bal oldalán látható az A_N mátrix 15 legnagyobb szinguláris értékének az átlaga. A 4. Ábra jobb oldalán látható a kísérletsorozat egy tipikus kimenetele, ahol az A_n mátrix 15 legnagyobb szinguláris értéke jelenik meg. Mindkét ábra jól látható, hogy a nem strukturális szinguláris értékek kicsik és az értékük majdnem egyenlő. Továbbá jól definiált a hirtelen ugrás a nem strukturális és a strukturális szinguláris értékek között, valamint a strukturális szinguláris értékek nagyok. Tehát, a numerikus eredmények alátámasztják a 4.4 Tételt és a 4.4 Állítást.

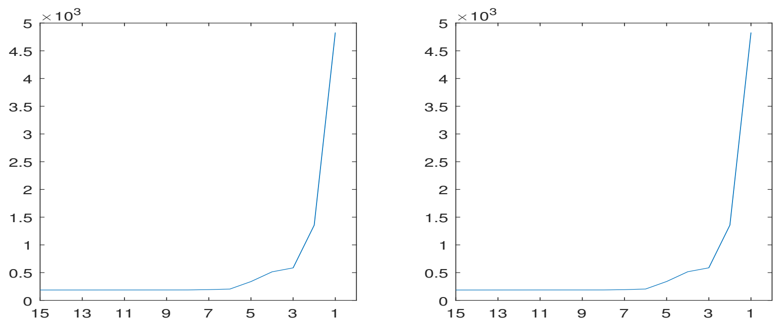
4.6. *Példa.* A következő példa is a 4.4 Tételre és a 4.4 Állításra vonatkozik. Legyen ebben az esetben a sablon mátrix $P/10$, ahol P az 4.5 Példában ismertetett mátrix. A továbbiakban minden más része a kísérletnek megegyeznek az 4.5 Példával. Tehát 7 strukturális szinguláris érték van. B_n nemnulla szinguláris értékei a következők

$$4827.7, 1349.5, 570.2, 496.3, 310.1, 140.7, 119.4$$

Itt a legkisebb szinguláris értékek úgy tűnnek, hogy távol vannak a nullától. Azonban a sablon mátrix kicsi elemei miatt kicsi a jel-zaj aránya, és ezáltal az A_n mátrix két legkisebb strukturális szinguláris értéke a 7-ből megkülönböztethetetlenné válik a nem strukturálisaktól, ezt a következő adatok és az 5. Ábra is mutatja.

Az A_n mátrix 20 legnagyobb szinguláris értékének az átlaga a következő:

4829.5	1356.0	585.6	514.0	338.6	203.6	193.4	187.8	187.5	187.3
187.1	186.9	186.8	186.6	186.5	186.4	186.2	186.1	186.0	185.9



5. Ábra. Bal oldal: az A_n mátrix 15 legnagyobb szinguláris értékének az átlaga;
jobb oldal: a 4.6 Példára kapott egy tipikus eredmény, az A_n mátrixának a 15 legnagyobb szinguláris értéke.

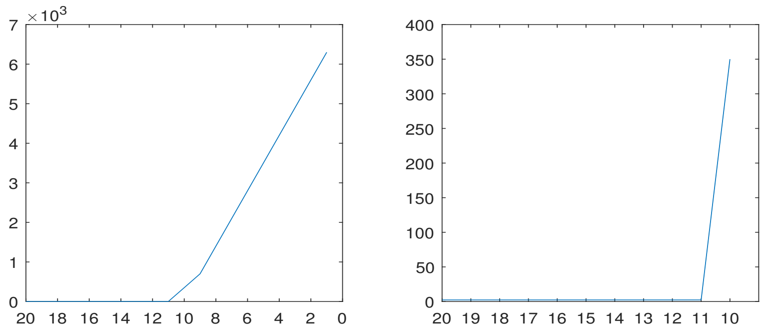
Az 5. Ábra bal oldalán az A_n mátrix 15 legnagyobb szinguláris értékeinek az átlaga látható, a jobb oldalon pedig egy tipikus kimenetele a kísérletnek, ahol az A_n mátrix 15 legnagyobb szinguláris értéke látható. Mindkét eset azt mutatja, hogy a nem strukturális szinguláris értékek és a két legkisebb strukturális szinguláris érték kicsik és az értékük majdnem megegyezik. A második legkisebb strukturális szinguláris érték után látható a hirtelen változás az értékekben.

4.7. *Példa.* A soron következő példa a 4.1 Tételre és a 4.1 Állításra mutat be numerikus eredményeket a komplex értékű esetben. Bemutatja, hogy milyen hatása van a különböző blokkméreteknek a zajjal szennyezett felfújt mátrixok sajátértékeire. A P mátrixot ebben az esetben egy 10×10 méretű komplex hermitikus mátrixnak választottuk, melynek rangja $r = 10$, a sajátértékei, pedig a következők:

$$9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.5$$

Ahhoz, hogy elkészítsük a B_n mátrixot, a P mátrixot fújtuk fel a 4.2 fejezetben ismertetett módszerrel. W_n egy Wigner-mátrix, mely teljesíti a 4.1 Tételben található feltételeket, illetve az elemei normális eloszlásúak, egész pontosan w_{ii} valós standard normális eloszlású, ha $i \neq j$, akkor w_{ij} komplex standard normális eloszlású, így $A_n = B_n + W_n$.

(a) Az első esetben azonos blokkméreteket alkalmaztunk, melyek a következők: $n_1 = n_2 = \cdots = n_{10} = 700$. Aztán kiszámoltuk az A_n 20 legnagyobb abszolút értékkel rendelkező sajátértékét, majd ezt a lépést 1000 alkalommal megismételtük és minden lépésben új W_n mátrixot generáltunk. A kísérletsorozat eredményei a 6. Árbán és a 4. Táblázatban láthatóak. A következő jelöléseket használtuk: $\lambda_j(B_n)$ - a felfújt mátrix sajátértékei, $\lambda_j(A_n)$ - a zajjal szennyezett mátrix sajátértékei, míg mean($|\lambda_j(A_n)|$) és var($|\lambda_j(A_n)|$) az A_n mátrix 20 legnagyobb abszolút értékkel rendelkező sajátértékeinek az 1000 ismétlés során kapott értékeinek az átlaga és a szórásnégyzete.



6. Ábra. Bal oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_1(A_n)|$;
jobb oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_{10}(A_n)|$ egy tipikus eredménye a 4.7 Példa (a) esetének.

Ebben az esetben jól látható, hogy a 10 strukturális sajátérték jól megkülönböztethető a nem strukturális sajátértékektől.

j	$\lambda_j(B_n)$	$\lambda_j(A_n)$	mean($\lvert\lambda_j(A_n)\rvert$)	var($\lvert\lambda_j(A_n)\rvert$)
1	6300	6300.10	6300.00	0.0019390
2	5600	5599.90	5600.00	0.0033253
3	4900	4900.00	4900.00	0.0040081
4	4200	4200.10	4200.00	0.0025829
5	3500	3500.00	3500.00	0.0036319
6	2800	2800.00	2800.00	0.0026237
7	2100	2100.00	2100.00	0.0024251
8	1400	1400.00	1400.00	0.0029042
9	700	699.98	700.01	0.0017381
10	350	350.03	350.02	0.0018437
11	0	2.37	2.37	0.0000100
12	0	2.36	2.36	0.0000064
13	0	2.35	2.36	0.0000047
14	0	-2.35	2.35	0.0000037
15	0	2.35	2.35	0.0000028
16	0	2.35	2.35	0.0000020
17	0	-2.34	2.35	0.0000017
18	0	2.34	2.34	0.0000020
19	0	2.34	2.34	0.0000015
20	0	-2.34	2.34	0.0000016

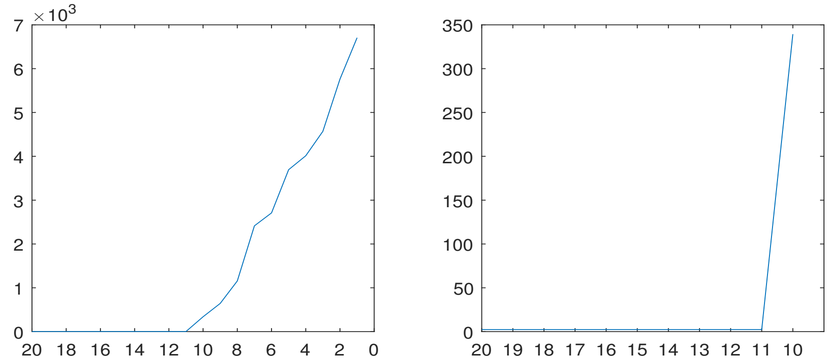
4. Táblázat. A 4.7 Példa (a) esetében a felfújt B_n és a zajos A_n mátrixok sajátértékei

(b) Ezt követően a következő módon változtattuk meg a blokkméreteket:

$$n_1 = n_2 = 560, n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = n_7 = n_8 = 700, n_9 = n_{10} = 840$$

A kísérlet többi részét nem módosítottuk. Ez az eset bemutatja, a különböző blokkméretek strukturális sajátértékekre gyakorolt hatását. Továbbra is 10 jól megkülönböztethető strukturális sajátértéket kaptunk, de a sajátértékek aránya megváltozott. A következő táblázat bemutatja az A_n mátrix 20 legnagyobb abszolút értékkel rendelkező sajátértékét, a 7. Ábra grafikusan jeleníti meg az eredményeket.

6705.3	5761.4	4569.6	4012.3	3694.7	2708.7	2413.9	1156.0	643.4	339.3
2.3666	2.3604	2.3557	2.3523	2.3500	2.3477	2.3454	2.3435	2.3415	2.3396



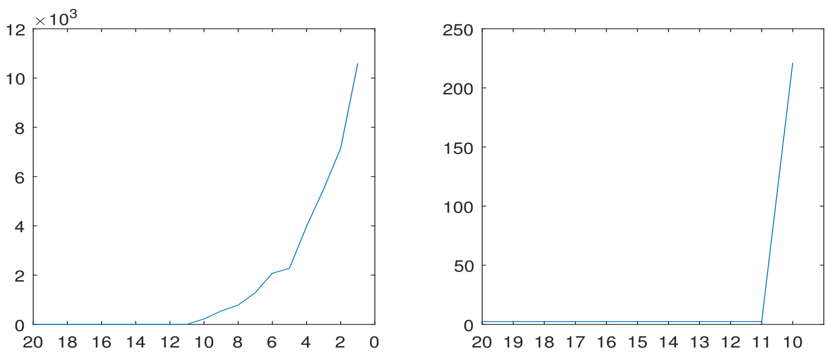
7. Ábra. Bal oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_1(A_n)|$;
jobb oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_{10}(A_n)|$ egy tipikus eredménye az 4.7 Példa (b) esetének.

(c) Az utolsó esetben még változatosabbak voltak a blokkméretek, mint az előző esetekben.

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 350, n_5 = n_6 = n_7 = 700,$$
$$n_8 = n_9 = 1050, n_{10} = 1600$$

Az A_n mátrix 20 legnagyobb abszolút értékkel rendelkező sajátértékeinek az 1000 ismétlést követően kapott sajátértékeinek az átlaga a következő:

10595.0	7150.3	5482.8	3975.3	2276.3	2075.4	1288.1	786.8	542.8	221.3
2.3671	2.3608	2.3562	2.3529	2.3505	2.3479	2.3456	2.3436	2.3414	2.3396



8. Ábra. Bal oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_1(A_n)|$;
jobb oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_{10}(A_n)|$ egy tipikus eredménye a 4.7 Példa (c) esetének.

A kísérletsorozatból kapott sajátértékek abszolút értékeinek az átlaga és a 8. Ábra bemutatja, hogy a legkisebb abszolút értékkel rendelkező strukturális sajátértékek közelednek a nem strukturális sajátértékekhez, de továbbra is jól megkülönböztethetőek maradnak.

Ez a példa bemutatta, hogy az $n_1, \ldots, n_{10}$ értékekben bekövetkező változtatások, változásokat okozhat a felfújt zajos mátrixok sajátértékeiben, de a strukturális sajátértékek továbbra is jól megkülönböztethetőek maradnak. Tehát az ismertetett módszer megbízható a blokkméretek széles tartományán.

4.8. *Példa.* Ebben a példában a 4.3 Tételhez mutatunk be numerikus eredményeket. A P mátrix sajátértékei a következők: 42.807, 19.568, 10.186, 5.088, 3.519, 2.962, -2.543, -1.322, 1.133, 0.602. Ezt a mátrixot a következő blokkméreteket alkalmazva fújjuk fel: $n_1, n_2, \ldots, n_{10}$. Legyen P a következő mátrix

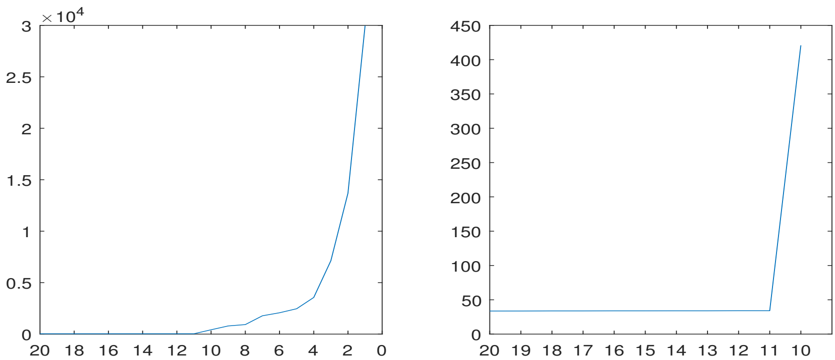
$$P = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 9 & 6 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 8 & 7 & 6 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 8 & 5 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 7 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 5 & 7 & 9 & 7 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 5 & 7 & 8 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 & 6 & 8 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Az alkalmazott zaj valós elliptikus, mely a következő legyen V_n egy mátrix, az elemei legyenek független azonos eloszlásúak a $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ intervallumon. Legyen U_n a felső triangulárisa és L_n az alsó triangulárisa a $V_n$mátrixnak. Legyen $Y_n = V_n - U_n^T + L_n^T$ a zaj mátrix (itt ^{T} a transzponáltat jelöli).

(a) Legyenek a blokkméretek a következők: $n_1 = n_2 = \cdots = n_{10} = 700$. A kísérletet 1000 alkalommal ismételtük meg. Miután meghatároztuk a perturbált mátrixok sajátértékeit, a következő eredményt kaptuk

j	$\lambda_j(B_n)$	$\lambda_j(A_n)$	mean($\lvert\lambda_j(A_n)\rvert$)	var($\lvert\lambda_j(A_n)\rvert$)
1	29965.00	29965.00	29965.00	0.16710
2	13697.00	13698.00	13697.00	0.16797
3	7130.20	7130.40	7130.20	0.19615
4	3561.30	3561.40	3561.20	0.16914
5	2463.60	2464.20	2463.60	0.14148
6	2073.70	2073.40	2073.70	0.16437
7	-1780.10	-1779.50	1780.10	0.15265
8	-925.42	-924.77	925.45	0.21044
9	793.29	792.95	793.33	0.18823
10	421.12	420.90	421.10	0.14813
11	0	-34.07	34.28	0.03450
12	0	-34.07	34.18	0.02131
13	0	33.96	34.09	0.01507
14	0	33.96	34.04	0.01438
15	0	-33.92	33.98	0.01196
16	0	-33.92	33.94	0.01079
17	0	-33.83	33.90	0.00947
18	0	-33.83	33.86	0.00875
19	0	33.67	33.83	0.00838
20	0	-33.64	33.80	0.00816

5. Táblázat. A 4.8 Példa (a) esetében a felfújt B_n és a zajos A_n mátrixok sajátértékei

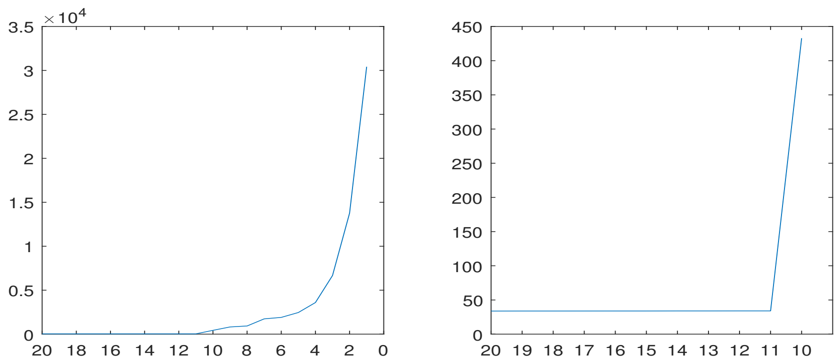


9. Ábra. Bal oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_1(A_n)|$; jobb oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_{10}(A_n)|$ egy tipikus eredménye a 4.8 Példa (a) esetének.

(b) Ebben az esetben a P mátrix és az Y_n generálásának a módja nem változott, viszont különböző blokkméreteket alkalmaztunk, $n_1 = n_2 = 560, n_3 = \cdots = n_8 = 700, n_9 = n_{10} = 840$. Most az A_n sajátértékeinek egy tipikus példája a következő:

30422.0	13767.0	6666.7	3594.9	2461.2	1906.1	1738.8	931.1	818.9	432.5
34.27	34.18	34.07	34.03	33.97	33.93	33.89	33.86	33.83	33.80

A következő ábra a sajátértékek grafikus megjelenítése.

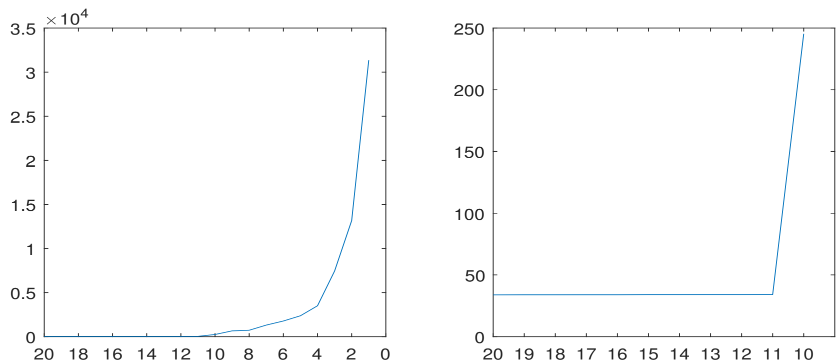


10. Ábra. Bal oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_1(A_n)|$;
jobb oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_{10}(A_n)|$ egy tipikus eredménye a 4.8 Példa (b) esetének.

(c) Ebben az esetben a P kiindulási mátrix és Y_n létrehozásának módja nem változott, továbbra is csak a blokkok méretét változtatjuk, melyek a következők lettek: $n_1 = \cdots = n_9 = 770, n_{10} = 70$, ami azt jelenti, hogy a felfújt mátrixban első kilenc sor blokk kilenc 770×770 blokkot tartalmaz és egy 770×70 méretű blokkot, míg az utolsó sor kilenc 70×770 méretű blokkot tartalmaz és egy darab 70×70-es blokkot. Ennek a kísérletnek az eredménye a 6. Táblázatban illetve a 11. Ábrán látható.

j	$\lambda_j(B_n)$	$\lambda_j(A_n)$	mean($\lvert\lambda_j(A_n)\rvert$)	var($\lvert\lambda_j(A_n)\rvert$)
1	31351.00	31351.00	31351.00	0.14696
2	13162.00	13161.00	13162.00	0.15903
3	7443.40	7443.00	7443.40	0.17163
4	3503.30	3502.30	3503.30	0.16403
5	2369.30	2368.90	2369.30	0.18241
6	-1773.90	-1773.80	1773.80	0.14494
7	1311.70	1311.90	1311.80	0.16097
8	-726.44	-727.34	726.47	0.18760
9	655.79	655.85	655.83	0.17405
10	244.50	245.32	244.47	0.15170
11	0	-34.15	34.27	0.02765
12	0	-34.10	34.17	0.01817
13	0	-34.10	34.10	0.01521
14	0	34.08	34.03	0.01171
15	0	34.08	33.98	0.00865
16	0	-33.94	33.94	0.00766
17	0	-33.94	33.90	0.00737
18	0	33.91	33.86	0.00711
19	0	33.91	33.83	0.00747
20	0	33.83	33.79	0.00727

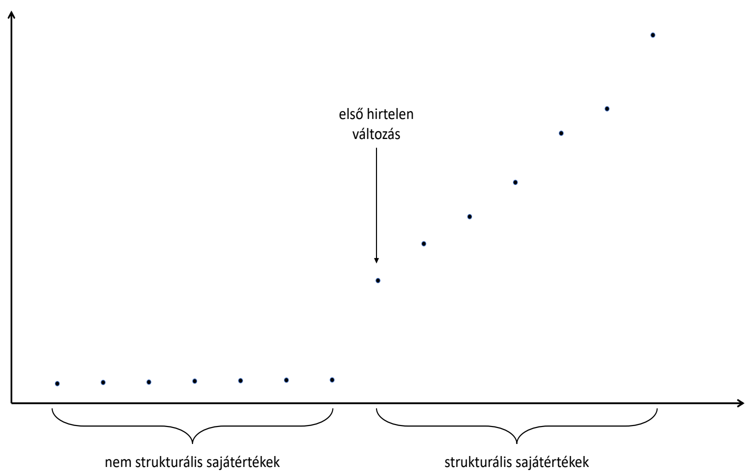
6. Táblázat. A 4.8 Példa (c) esetében a felfújt B_n és a zajos A_n mátrixok sajátértékei



11. Ábra. Bal oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_1(A_n)|$; jobb oldal: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_{10}(A_n)|$ egy tipikus eredménye a 4.8 Példa (c) esetének.

Ez a példa demonstrálta, hogy változtatások az $n_1, \ldots, n_{10}$ értékeiben, változásokat okozhatnak a felfújt zajos mátrixok sajátértékeiben, de a strukturális sajátértékek továbbra is jól megkülönböztethetőek maradnak. Vagyis az ismertetett módszer megbízható a blokkméretek széles tartományán.

A korábban leírtak alapján, abban az esetben, amikor a perturbáció mátrix elemei nulla várható értékű valószínűségi változók, a strukturális sajátértékek „nagyok”, míg a nem strukturális sajátértékek „kicsik”. Pontosabban legyenek $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ a felfújt és perturbált mátrix sajátértékeinek az abszolút értékei csökkenő sorrendben. Akkor a strukturális sajátértékek $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_l|$ „nagyok” és gyorsan csökkenek. A többi sajátérték $|\lambda_{l+1}| \geq |\lambda_{l+2}| \geq \ldots$ pedig relatív kicsi és lassan csökkenek. Ahhoz, hogy megkapjuk a strukturális sajátértékeket, a következő numerikus (grafikus) eljárást követtük. Az A_n mátrix abszolút érték szerinti legnagyobb sajátértékét számoljuk ki először, majd az abszolút érték szerinti következő legnagyobbat és így tovább. Akkor állunk meg, amikor az utolsó 5-10 sajátérték közel van nullához és az értékük közel azonos. Így megkapjuk a következő növekvő sorozatot $|\lambda_t| \leq |\lambda_{t-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_1|$. Majd ábrázoljuk az értékeket és megkeressük az első hirtelen változást.



12. Ábra. A hirtelen változás a nem strukturális sajátértékeket követően

Legyen

$$0 \approx |\lambda_t| \approx |\lambda_{t-1}| \approx \cdots \approx |\lambda_{l+1}| \ll |\lambda_l| < \cdots < |\lambda_1|,$$

ebben az esetben az első hirtelen változás l-nél következik be, akkor a $\lambda_l, \lambda_{l-1}, \ldots, \lambda_1$ értékeket tekintjük a strukturális sajátértékeknek. A tipikus hirtelen változás a nem strukturális és a strukturális sajátértékek között a 12. Ábrán látható.

A következő egy valós esetű példa a 4.1 Tételre és a 4.1 Állításra. Tekintsük a 4.2. Példában bemutatott P mátrixot.

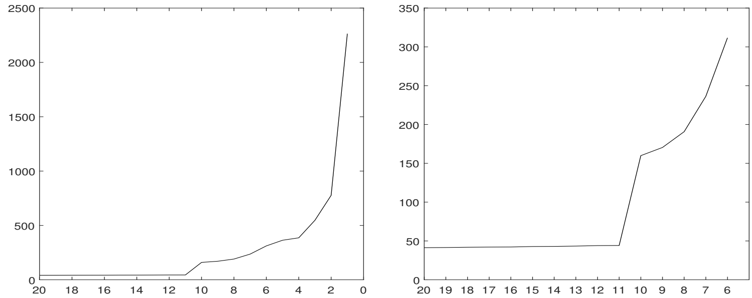
Négy különböző felfújási sémát tanulmányoztunk, melyek segítségével felfújtuk a P mátrixot, a 4 séma mindegyikében 6 különböző n vektort használtunk. Ezek a blokkméret sorozatok az 7. Táblázatban találhatók.

A 7. Táblázat minden blokksorozatára elvégeztünk egy 1000 ismétlésből álló szimulációt, majd ellenőriztük, hogy a hirtelen változás a sajátértékekben megjelenik-e a 12. Ábrán látható módon. n_i nagyon kicsi értékei esetén nem egyértelmű a hirtelen ugrás helye. Minden egyes esetben az első jól megkülönböztethető hirtelen változás akkor következett be, amikor n_1 értéke 50 volt. Itt meg lehet jegyezni, hogy ennek ellenére az a jelenség továbbra is fennáll, hogy a nem strukturális sajátértékek közel egyenlőek. Ez az eredmény a 13., 14., 15., és 16. Ábrákon látható. Minden ábra bal oldala: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_1(A_n)|$; jobb oldala: $|\lambda_{20}(A_n)| < \cdots < |\lambda_6(A_n)|$ egy tipikus eredménye a példának. A jobb oldala az ábráknak csak a hirtelen változás körül elhelyezkedő sajátértékeket mutatja, hogy az értékekben történő ugrást jobban lehessen látni.

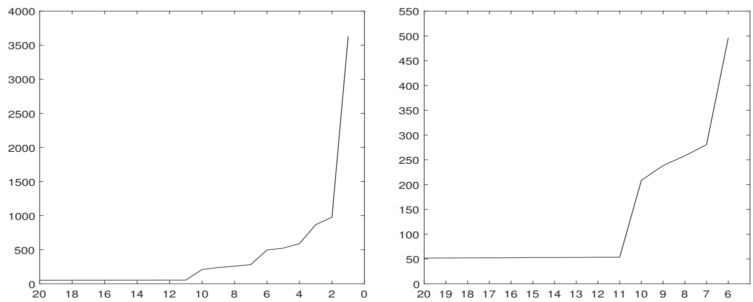
A séma neve	A blokkok sorozata
Egyenlő	$n_1 = n_2 = \cdots = n_{10} = 10$
	$n_1 = n_2 = \cdots = n_{10} = 20$
	$n_1 = n_2 = \cdots = n_{10} = 50$
	$n_1 = n_2 = \cdots = n_{10} = 100$
	$n_1 = n_2 = \cdots = n_{10} = 500$
	$n_1 = n_2 = \cdots = n_{10} = 1000$
Két típusú	$n_1 = n_2 = \cdots = n_5 = 10, n_6 = \cdots = n_{10} = 20$
	$n_1 = n_2 = \cdots = n_5 = 20, n_6 = \cdots = n_{10} = 40$
	$n_1 = n_2 = \cdots = n_5 = 50, n_6 = \cdots = n_{10} = 100$
	$n_1 = n_2 = \cdots = n_5 = 100, n_6 = \cdots = n_{10} = 200$
	$n_1 = n_2 = \cdots = n_5 = 500, n_6 = \cdots = n_{10} = 1000$
	$n_1 = n_2 = \cdots = n_5 = 1000, n_6 = \cdots = n_{10} = 2000$
Számtani sorozat	$n_1 = 10, n_2 = 20, \ldots, n_{10} = 100$
	$n_1 = 20, n_2 = 30, \ldots, n_{10} = 110$
	$n_1 = 50, n_2 = 60, \ldots, n_{10} = 140$
	$n_1 = 100, n_2 = 110, \ldots, n_{10} = 190$
	$n_1 = 500, n_2 = 510, \ldots, n_{10} = 590$
	$n_1 = 1000, n_2 = 1010, \ldots, n_{10} = 1090$
Négy típusú	$n_1 = n_2 = 10, n_3 = n_4 = n_5 = 20,$ $n_6 = n_7 = n_8 = 30, n_9 = n_{10} = 40$
	$n_1 = n_2 = 20, n_3 = n_4 = n_5 = 40,$ $n_6 = n_7 = n_8 = 60, n_9 = n_{10} = 80$
	$n_1 = n_2 = 50, n_3 = n_4 = n_5 = 100,$ $n_6 = n_7 = n_8 = 150, n_9 = n_{10} = 200$
	$n_1 = n_2 = 100, n_3 = n_4 = n_5 = 200,$ $n_6 = n_7 = n_8 = 300, n_9 = n_{10} = 400$
	$n_1 = n_2 = 500, n_3 = n_4 = n_5 = 1000,$ $n_6 = n_7 = n_8 = 1500, n_9 = n_{10} = 2000$
	$n_1 = n_2 = 1000, n_3 = n_4 = n_5 = 2000,$ $n_6 = n_7 = n_8 = 3000, n_9 = n_{10} = 4000$

7. Táblázat. A P mátrix felfújására használt sémák

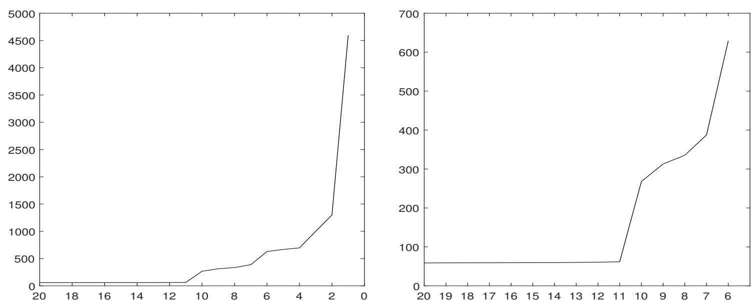
Az alábbi ábrák mindegyikén megjelenik a hirtelen változás a 11. és a 10. sajátérték között. Tehát el tudjuk dönteni, hogy a 10 abszolút érték szerinti legnagyobb sajátérték a strukturális sajátértékek (ami a helytálló következtetés, hiszen a P mátrix rangja 10)



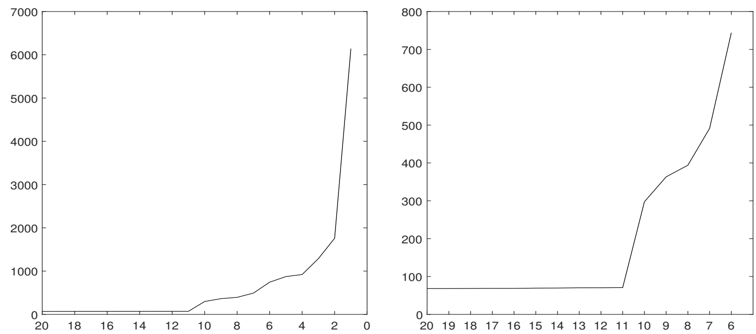
13. Ábra. Egyenlő: $n_1 = n_2 = \cdots = n_{10} = 50$



14. Ábra. Két típusú: $n_1 = \cdots = n_5 = 50$, $n_6 = \cdots = n_{10} = 100$

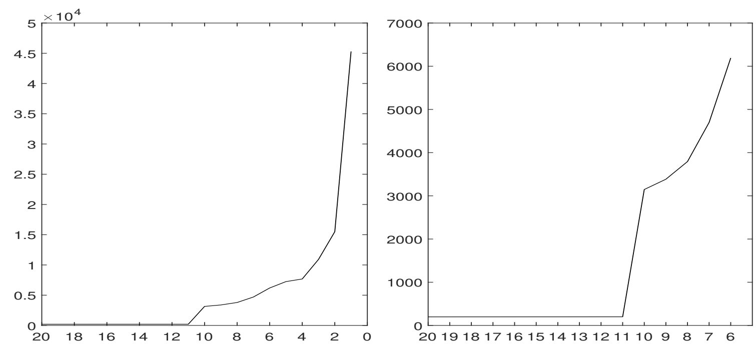


15. Ábra. Számtani sorozat: $n_1 = 50, n_2 = 60, \ldots, n_{10} = 140$



16. Ábra. Négy típus: $n_1 = n_2 = 50, n_3 = n_4 = n_5 = 100$,
$n_6 = n_7 = n_8 = 150, n_9 = n_{10} = 200$

Ahogyan növekszik a blokkméret, úgy a határ a strukturális és nem strukturális sajátértékek között egyre szignifikánsabbá válik, ahogyan ez látszik is a 17. Ábrán. Látható, hogy amikor $n_i = 1000$ (minden i-re), akkor az ugrás sokkal nagyobb, mint az $n_i = 50$ esetben.



17. Ábra. Egyenlő: $n_1 = n_2 = \cdots = n_{10} = 1000$

A 8. Táblázatban, felsoroljuk az 1000 ismétlésben kapott sajátértékek abszolút értékeinek az átlagát. Pontosabban, n_i azt jelenti, hogy minden blokkméret $n_i \times n_i$ volt és az oszlop n_i alatt a 20 legnagyobb abszolút értékű sajátérték átlaga található a megfelelő A_n mátrixoknak. Láthatjuk, hogy jelen van az ugrás a 10. és a 11. értékek között, még azokban az esetekben is, amikor n_i értéke relatív kicsi volt, $n_i = 10$. Minél nagyobb n_i értéke, annál nagyobb az ugrás is. Ez a táblázat bemutatja, hogy az ismertetett módszer megbízható mérsékelten kicsi ($n_i = 50$) blokkméretek esetén is.

j	$n_i = 10$	$n_i = 20$	$n_i = 50$	$n_i = 100$	$n_i = 200$	$n_i = 500$	$n_i = 1000$
1	453.26	906.28	2265.40	4530.50	9060.70	22652.00	45303.00
2	155.64	310.65	775.43	1550.31	3100.00	7748.90	15497.00
3	110.06	219.28	546.65	1092.40	2183.90	5458.00	10915.00
4	77.99	154.82	385.08	768.93	1536.70	3839.60	7677.90
5	73.76	146.21	363.63	725.90	1450.40	3624.10	7246.90
6	63.36	125.32	310.93	620.41	1239.20	3095.40	6189.40
7	48.86	95.95	236.92	471.66	941.21	2349.90	4697.80
8	40.51	78.39	192.04	381.54	760.54	1897.10	3791.70
9	36.30	70.32	171.90	340.95	678.98	1693.20	3383.40
10	34.06	65.84	160.18	317.23	631.47	1573.90	3144.70
11	18.56	27.21	44.03	62.73	89.04	141.14	199.78
12	17.96	26.70	43.58	62.33	88.67	140.84	199.50
13	17.45	26.27	43.20	61.99	88.37	140.58	199.27
14	17.03	25.92	42.90	61.72	88.14	140.38	199.09
15	16.65	25.59	42.62	61.47	87.92	140.18	198.92
16	16.33	25.28	42.36	61.25	87.72	140.01	198.77
17	15.99	25.00	42.11	61.03	87.53	139.85	198.63
18	15.69	24.74	41.89	60.83	87.34	139.69	198.49
19	15.40	24.47	41.67	60.64	87.17	139.54	198.36
20	15.12	24.23	41.47	60.45	87.01	139.40	198.23

8. Táblázat. Sajátértékek az egyenlő blokkméretek esetében

4.9. *Példa.* A következőkben a 4.4 Tételre és a 4.4 Állításra mutatunk be egy példát. Legyen P egy 7×8 méretű valós nem szimmetrikus sablon mátrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 6 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 9 & 8 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 6 & 8 & 7 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 9 & 6 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

Az előző példában láthattuk a blokkméretek hatását a sajátértékekre, most pedig bemutatjuk a jel/zaj arányának (signal to noise ratio, továbbiakban snr) hatását a P mátrix szinguláris értékeire. A P mátrix felfújásához a következő blokkmagasságokat: $[m_1, \ldots, m_a] = [500, 750, 500, 600, 750, 550, 500]$ és blokkszélességek: $[n_1, \ldots, n_b] = [500, 500, 600, 1000, 550, 500, 550, 500]$ használtuk. Ezt követően felfújtuk a P mátrixot és hozzáadtuk a zajt, hogy megkapjuk a perturbált mátrixot. Mint ahogyan a 4.3 fejezetben, B-vel jelöltük a felfújt mátrixot, ami a jel ebben az esetben, illetve X mátrix volt a zaj, és így az $A = B + X$ a perturbált mátrix. A jel és a zaj arányára a következő definíciót fogjuk használni

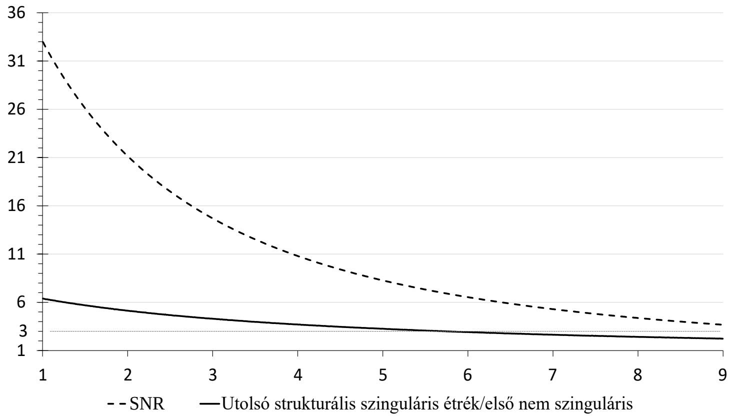
$$\texttt{snr} = \frac{\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^2}{\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}^2}. \tag{4.1}$$

Itt $m = \sum_{i=1}^{a} m_i$ a sorok száma, $n = \sum_{j=1}^{b} n_j$ pedig az oszlopok száma a B és az X mátrixban, $b_{i,j}$ a B jel mátrix eleme, míg $x_{i,j}$ az X zaj mátrix eleme, az i. sorban és j. oszlopban.

Ebben a példában az X zaj mátrix elemei függetlenek, és a kiindulási lépésben standard normális eloszlásúak. Minden soron következő lépésben növeljük a zajt, azáltal, hogy a zaj mátrix elemeit egy adott számmal szorozzuk. Az első szorzó 1.002, a második 1.004, majd 1.006, ..., 3.000.

Tehát a kísérlet alatt lépésről-lépésre növeljük a zajt és minden alkalommal ellenőrizzük a jel/zaj arányát, illetve az utolsó (abszolút érték szerinti legkisebb) strukturális szinguláris érték és az első (abszolút érték szerinti legnagyobb) nem strukturális szinguláris érték arányát. Ha a strukturális/nem strukturális arány elér egy bizonyos pontot, a jel túlságosan zajossá válik, vagyis nem lehetséges a strukturális és nem strukturális szinguláris értékek további megkülönböztetése.

Az 18. Ábrán a szaggatott vonal a jel/zaj arányát, a vonal pedig az utolsó strukturális szinguláris érték és az első nem strukturális szinguláris érték arányát mutatja. A vízszintes tengelyen a zaj szórásnégyzete van feltüntetve. Látható, hogy a zaj növekedésével a jel/zaj arány gyorsan csökken, de a strukturális/nem strukturális szinguláris értékek aránya lassan csökken. Ha a strukturális/nem strukturális arány értéke 1-hez közeli, akkor elérjük azt a pontot, amikor a strukturális és nem strukturális szinguláris értékek nem jól megkülönböztethetőek. Azonban, az 18. Ábrán megmutatja, hogy az ismertetett módszer megbízható, mivel, ha a zaj nem nagyobb mint a jel 25%-a, akkor a strukturális szinguláris értékek jól megkülönböztethetőek a nem strukturális szinguláris értéktől.



18. Ábra. A jel/zaj arány összehasonlítása a strukturális/nem strukturális szinguláris értékek arányával

5. Összefoglalás

A disszertáció első, bevezető fejezetében áttekintettük a dolgozat alapjául szolgáló irodalmi előzményeket. Ezen irodalmi áttekintő a teljesség igénye nélkül készült, első sorban a dolgozat szempontjából jelentős eredményekre koncentrál.

A disszertáció második fejezetében exponenciális és Rosenthal-egyenlőtlenségeket vizsgáltunk elfogadható és tágabb értelemben elfogadható valószínűségi változók esetén. Megmutattuk, hogy az

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^n \lambda X_i} \le \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{\lambda X_i}$$

egyenlőtlenség egy megfelelő formája exponenciális egyenlőtlenséget implikál, az exponenciális egyenlőtlenség pedig Rosenthal-egyenlőtlenséget implikál, továbbá az exponenciális egyenlőtlenségből teljes konvergencia következik. Ez a forma a következő

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^n \lambda \eta_i} \le g(n) \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{\lambda \eta_i}, \tag{5.1}$$

ahol $0 < g(n) < \infty$. Ha a fenti feltétel teljesül minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén és minden n-re, akkor az $\eta_1, \eta_2, \dots$ sorozatot tágabb értelemben elfogadhatónak (widely acceptable) nevezzük. Jelölje $X^{(d)}$ az X valószínűségi változó levágottját $X^{(d)} = \min\{X, d\}$. Ezeket felhasználva kaptuk a 2.1 Tételt, mely állítása a következő

Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ valószínűségi változók egy sorozata, $d > 0$. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ az összegük és $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2$ a szórásnégyzetek összege. Feltételezzük, hogy (5.1) teljesül $\eta_i = X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \dots, n$-re $0 < \lambda \le \lambda_0$ esetén. Akkor minden olyan x-re, melyre $0 < x \le (B_n e^{d\lambda_0} - B_n)/d$, a következő igaz

$$\mathbb{P}(S_n > x) \le \mathbb{P}\left(\max_{1 \le i \le n} X_i > d\right) + g(n) \exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d} \ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right).$$

Ha pedig (5.1) teljesül $\eta_i = X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ és $\eta_i = (-X_i)^{(d)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ esetén is minden $0 < \lambda \le \lambda_0$-ra, akkor minden olyan x-re, melyre $0 < x \le (B_n e^{d\lambda_0} - B_n)/d$ a következő teljesül:

$$\mathbb{P}(|S_n| > x) \le \mathbb{P}\left(\max_{1 \le i \le n} |X_i| > d\right) + 2g(n) \exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d} \ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right).$$

A fenti két egyenlőtlenséget nevezzük exponenciális egyenlőtlenségnek.

Ezt követően a Hoeffding-egyenlőtlenséggel folytatjuk, melyet eredetileg Wassily Hoeffding 1963-ban publikált független valószínűségi változók esetére. Későbbiekben eredmények jelentek meg egyes függő sorozatokra is. A következő 2.2 Tétel az elfogadható valószínűségi változókra mutat be egy Hoeffding-típusú egyenlőtlenséget.

Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *valószínűségi változók egy sorozata. Legyen* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ *az összeg. Legyenek a valószínűségi változók korlátosak, azaz* $a_i \le X_i \le b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$*-re, ahol* a_i *és* b_i *valós számok. Tegyük fel, hogy* (5.1) *teljesül* $\eta_i = X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *és* $0 < \lambda \le \lambda_0$ *esetén. Akkor minden olyan* ε*-ra, hogy* $0 < \varepsilon \le \frac{\lambda_0}{4} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2$*, a következő igaz*

$$\mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}S_n \ge \varepsilon\right) \le g(n) \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right).$$

Tegyük fel, hogy (5.1) *teljesül* $\eta_i = X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *és* $|\lambda| \le \lambda_0$ *esetén. Akkor minden olyan* ε*-ra, hogy* $0 < \varepsilon \le \frac{\lambda_0}{4} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2$*, teljesül a következő*

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}S_n| \ge \varepsilon\right) \le 2g(n) \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right).$$

A következő tételünkben absztrakt módon egy exponenciális egyenlőtlenség teljesülése esetére vezetjük le a Rosenthal-típusú egyenlőtlenséget, tehát nem teszünk fel a kiinduló valószínűségi változók között függőségi feltételt. A 2.4 Tétel a következőképen szól:

Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *nulla várhatóértékű valószínűségi változók egy sorozata, továbbá legyen* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ *az összegük és* B_n *pozitív számok egy sorozata. Tegyük fel,*

$$\mathbb{P}\left(|S_n| > x\right) \le l(n)\mathbb{P}\left(\max_{1 \le i \le n} |X_i| > d\right) + h(n) \exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d} \ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right)$$

teljesül minden $x > 0$ *és* $d > 0$ *esetén, ahol* $l(n)$ *és* $h(n)$ *valós számok. Akkor* $p > 0$*-ra*

$$\mathbb{E}|S_n|^p \le C_1 l(n) \mathbb{E} \max_{1 \le i \le n} |X_i|^p + C_2 h(n) B_n^{p/2}$$

teljesül, ahol $C_1 = p^p$, $C_2 = \frac{1}{2} p^{1+p/2} e^p B\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ *abszolút konstansok,* $B(u, v)$ *pedig a béta függvény.*

A következő eredményben bemutatjuk, hogy egy általános exponenciális egyenlőtlenségből következik egy Baum–Katz-típusú tétel, ehhez szükség van a teljes konvergenciára, mely a következő azt mondjuk, hogy $Y_n \to 0$ teljesen, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n| > \varepsilon\right) < \infty.$$

A tételünkben a konvergencia sebességét is mutató súlyozott összeg fog szerepelni. Jelölje $\tilde{X}^{(t)}$ az X csonkított és centralizált változatát. Ezt felhasználva kapjuk a következő eredményt, mely a 2.6 Tétel:

Legyen $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók egy sorozata, továbbá legyen $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ a részösszegük. Legyen $0 < p < 2$ és α egy pozitív szám. Tegyük fel, hogy az exponenciális egyenlőtlenség teljesül csonkított és centralizált valószínűségi változókra, azaz

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right)\right| > x\right) \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n}\left|\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right| > d\right) + g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right)$$

minden $t > 0$, $x > 0$, $d > 0$ és $n = 1, 2, \dots$ esetén, ahol $B_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right)^2$. Tegyük fel, hogy $g(.)$ reguláris változású r kitevővel, ahol $0 < r < \alpha(2-p)$. Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \dots$ átlagosan gyengén dominált (weakly mean dominated, wmd) az X valószínűségi változó által, melyre $\mathbb{E}|X|^p g(|X|^{1/\alpha}) < \infty$. Ha $0 < p < 1$, akkor feltesszük, hogy $\alpha p > 1$. Ha $1 \leq p < 2$, akkor feltesszük, hogy $\alpha p \geq 1$ és $\mathbb{E}X_i = 0$ minden i-re. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2}\mathbb{P}\left(|S_n| > \varepsilon n^{\alpha}\right) < \infty.$$

A harmadik fejezetben a von Bahr–Esseen-egyenlőtlenséggel foglalkoztunk. A következő tételben azt bizonyítottuk, hogy ha a von Bahr–Esseen-féle momentum egyenlőtlenség teljesül a q kitevő és csonkított centralizált valószínűségi változók esetén, akkor teljesül magukra a valószínűségi változókra tetszőleges p esetén, $1 < p < q$. A tételünkben a következő csonkítást alkalmaztuk adott X valószínűségi változó és t pozitív szám esetén

$$^{(-t)}X^{(t)} = -t\mathbb{I}\left\{X < -t\right\} + X\mathbb{I}\left\{|X| \leq t\right\} + t\mathbb{I}\left\{X > t\right\}.$$

A 3.1 Tétel a következőt mondja ki:

Legyen $1 < p < q$. Legyen $X_n, n = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók egy sorozata és $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}X_n = 0$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Tegyük fel, hogy tetszőleges $x > 0$ esetén

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\left({}^{(-x)}X_k^{(x)} - \mathbb{E}^{(-x)}X_k^{(x)}\right)\right|^q \leq g_q(n)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|{}^{(-x)}X_k^{(x)} - \mathbb{E}^{(-x)}X_k^{(x)}\right|^q.$$

Akkor

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|^p \leq f_{p,q}(n)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X_k|^p,$$

ahol $f_{p,q}(n)$ csak $g_q(n)$-től, p-től és q-tól függ (egy lehetséges választás az $f_{p,q}(n) = 5 + 2c_q g_q(n) 2^q \left(\frac{q}{q-p}\right)^2$, ahol $c_q = 2^{q-1}$).

Ezt követően azt tárgyaltuk, hogy, ha feltételezzük, hogy egy elfogadhatósági feltétel teljesül a csonkított valószínűségi változókra akkor kapunk egy exponenciális egyenlőtlenséget (3.1 Állítás), amelynek következménye egy Rosenthal-egyenlőtlenség (3.2 Állítás) és egy von Bahr–Esseen momentum egyenlőtlenség, melyet a 3.2 Tétel mond ki:

Legyen $1 < p \leq 2$. Legyen $X_n, n = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók egy sorozata, úgy, hogy $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}X_n = 0$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Tegyük fel, hogy (5.1) teljesül tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\eta_i = {}^{(a_i)}X_i^{(b_i)}$ csonkított valószínűségi változó esetén minden $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$-re. Akkor

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}X_k\right|^p \leq f_p(n)\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X_k|^p,$$

ahol $f_p(n)$ csak $g(n)$-től és p-től függ.

A következő 3.6 Tétel egy nagy számok gyenge törvénye, amelyben L_p konvergenciát is bizonyítunk.

Legyen $1 < p < 2$. Legyen az $X_n, n = 1, 2, \ldots$ sorozat átlagosan gyengén dominált az X valószínűségi változó által, ahol $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}X_n = 0$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re. Tegyük fel, hogy (5.1) teljesül $g(n) = C$-re, tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$-re és $\eta_i = {}^{(a_i)}X_i^{(b_i)}$-re minden $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots$ esetén. Akkor

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left|\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n}X_k\right|^p = 0.$$

Továbbá,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1/p}}\sum_{k=1}^{n}X_k = 0$$

valószínűségben.

A következő 3.7 Tétel bemutatja, hogy, ha az elfogadhatósági feltétel, vagyis az (5.1) $g(n) = C$ esetén igaz a csonkított valószínűségi változókra, akkor teljes momentum konvergencia eredmények kaphatók.

Legyen $0 < p < 2$, $1 \leq r < 2$, *és* $0 < \alpha < 2$. *Legyen az* X_n, $n = 1, 2, \ldots$ *sorozat átlagosan gyengén dominált az* X *valószínűségi változó által. Tegyük fel, hogy* $\mathbb{E}X_n = 0$ *minden* $n = 1, 2, \ldots$*-re. Tegyük fel, hogy* (5.1) *teljesül* $g(n) = C$ *esetén minden* $\lambda \in \mathbb{R}$*-re és* $\eta_i =^{(a_i)} X_i^{(b_i)}$*-re tetszőleges* $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots$ *esetén.*
(i) Ha $r < \alpha$, *akkor feltesszük, hogy* $\mathbb{E}|X|^\alpha < \infty$.
(ii) Ha $r = \alpha$, *akkor feltesszük, hogy* $\mathbb{E}|X|^r \log(1 + |X|) < \infty$.
(iii) Ha $r > \alpha$, *akkor feltesszük, hogy* $\mathbb{E}|X|^r < \infty$.
Akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2} \mathbb{E} \left\{ \left| \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} X_k \right| - \varepsilon \right\}_+^r < \infty$$

minden $\varepsilon > 0$*-ra. A fenti egyenlőtlenség a teljes momentum konvergencia, ami implikálja a teljes konvergenciát.*

A negyedik fejezetben perturbált mátrixokat vizsgáltunk. Eredményként elmondhatjuk, hogy, amikor a perturbáció mátrix elemei nulla várhatóértékűek, akkor az elméleti eredmények megmutatták, hogy a strukturális sajátértékek „nagyok” és a nem strukturális sajátértékek „kicsik”, a numerikus eredményeink, pedig betekintést engedtek a sajátértékek sorozatainak a viselkedésébe.

A következő 4.1 Tételben a B_n felfújt mátrixok és a W_n egyaránt komplex hermitikus mátrixok (speciális esetben szimmetrikus valós mátrixok). A W_n zaj mátrix egy Wigner-mátrix, mely véges negyedik momentummal rendelkezik.

Legyen B_n, $n = 1, 2, \ldots,$ *komplex hermitikus mátrixok egy sorozata. A* W_n, $n = 1, 2, \ldots$ *Wigner-mátrixok legyenek komplex hermitikus mátrixok, melyek teljesítik a következő feltételeket. Legyenek a* W_n *főátlóján lévő* w_{ii} *elemek független azonos eloszlású valós valószínűségi változók, továbbá legyenek a főátló feletti elemek független azonos eloszlású komplex valószínűségi változók és mindezek az elemek legyenek függetlenek. Legyen* $w_{ij} = \bar{w}_{ji}$ *minden* i, j*-re. Feltételezzük, hogy* $\mathbb{E}w_{11}^2 < \infty$, $\mathbb{E}w_{12} = 0$, $\mathbb{E}|w_{12} - \mathbb{E}w_{12}|^2 = \sigma^2$ *véges és pozitív,* $\mathbb{E}|w_{12}|^4 < \infty$. *Akkor*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|\lambda_i(B_n + W_n) - \lambda_i(B_n)|}{\sqrt{n}} \leq 2\sigma$$

minden i*-re majdnem biztosan.*

Ezt követően minta kovariancia mátrixokat használtunk perturbációs mátrixként. Jelöljön x_{jl}, $j,l = 1,2,\dots$ egy véges tömböt, mely elemei függetlenek és azonos eloszlású komplex értékű valószínűségi változók, 0 várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Legyen $X = (x_{jl})_{j=1,\ l=1}^{n,\ \ m}$ a bal felső sarokban lévő blokk, mely mérete $n \times m$. Az $S_n = \frac{1}{m} XX^*$ mátrixot minta kovariancia mátrixnak nevezzük, ahol X^* az X mátrix transzponáltja, B_n felfújt mátrix. Az erről szóló 4.2 Tétel a következő:

Legyen B_n, $n = 1,2,\dots$ komplex hermitikus mátrixok egy sorozata. Legyen S_n, $n = 1,2,\dots$ olyan komplex értékű minta kovariancia mátrix, mely teljesíti a fenti feltételeket. Továbbá feltesszük, hogy X elemeinek rendelkeznek véges negyedik momentummal. Legyen $\lim_{n\to\infty} n/m = y \in (0,\infty)$. Akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_i(B_n + \sqrt{m}S_n) - \lambda_i(B_n)}{\sqrt{m}} \le \sigma^2(1+\sqrt{y})^2$$

majdnem biztosan teljesül, tetszőleges i-re.

Majd olyan perturbáló mátrixokat vizsgáltunk, melyek elemei független azonos eloszlású komplex számok. Legyen x_{jk}, $j,k = 1,2,\dots,$ egy végtelen tömb, mely elemei független azonos eloszlású komplex valószínűségi változók, nulla várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Legyen $X = (x_{jk})_{j=1,\ k=1}^{m,\ \ n}$ a bal felső sarokban lévő $m \times n$ méretű blokk. Ezt a 4.4 Tétel mondja ki:

Minden m-re és n-re legyen B egy $m \times n$ méretű komplex mátrix és legyen $X = X_{mn}$ egy fent leírt $m \times n$ méretű komplex mátrix, mely elemei független azonos eloszlásúak. Továbbá, tegyük fel, hogy X elemei rendelkeznek véges negyedik momentummal. Tegyük fel, hogy $m,n \to \infty$ úgy, hogy $K_1 \le \frac{m}{n} \le K_2$, ahol $0 < K_1 \le K_2 < \infty$ rögzített konstansok. Jelölje rendre s_i és z_i B és $B + X$ szinguláris értékeit, $s_1 \ge \cdots \ge s_{\min\{m,n\}}$, $z_1 \ge \cdots \ge z_{\min\{m,n\}}$. Akkor, minden i-re

$$|s_i - z_i| = \mathrm{O}(\sqrt{n})$$

ahogy $m,n \to \infty$, majdnem biztosan.

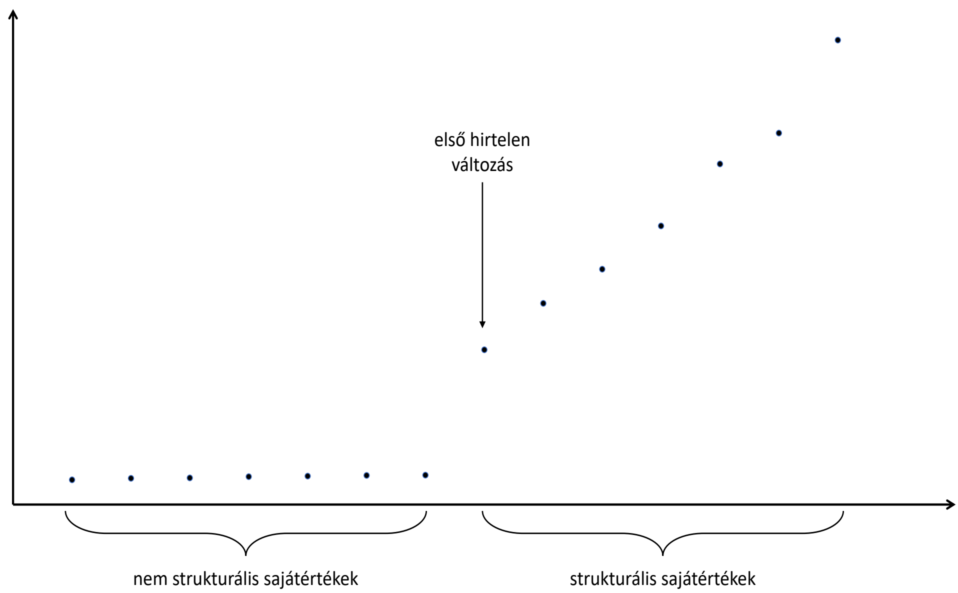
Végül a negyedik fejezet elméleti eredményeit alátámasztó numerikus példák következtek. Legyenek $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \dots$ a felfújt és perturbált mátrix sajátértékei csökkenő sorrendben, akkor a strukturális sajátértékek $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_l|$ „nagyok” és gyorsan csökkennek. A többi sajátérték $|\lambda_{l+1}| \ge |\lambda_{l+2}| \ge \dots$ relatív kicsik és nagyon lassan csökkennek. Tehát könnyen megtalálhatóak a strukturális sajátértékek. Ahhoz, hogy megkapjuk a strukturális sajátértékeket, a következő numerikus (grafikus) módszert javasoljuk:

- Megkeressük A néhány sajátértékét, az abszolút érték szerinti legnagyobbal kezdve, majd a rákövetkezőt és így tovább.
- Addig folytatjuk az első lépést, míg a legutoljára kapott 5-10 sajátérték közel van a nullához és az abszolút értékük majdnem nulla.
- Az így kapott $|\lambda_t| \leq |\lambda_{t-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_1|$ növekvő sorozatot ebben a sorrendben ábrázoljuk, majd megkeressük a hirtelen változást.

Amennyiben

$$0 \approx |\lambda_t| \approx |\lambda_{t-1}| \approx \cdots \approx |\lambda_{l+1}| \ll |\lambda_l| < \cdots < |\lambda_1|,$$

akkor a hirtelen változás l-nél következik be, tehát $\lambda_l, \lambda_{l-1}, \ldots, \lambda_1$ tekinthető a strukturális sajátértékeknek. A tipikus hirtelen változás a nem strukturális és strukturális sajátértékek között a következő ábrán látható



19. Ábra. A hirtelen változás a nem strukturális sajátértékeket követően

Hasonló módszer igaz a szinguláris értékek esetén is. A kapott numerikus eredmények stabilak voltak abban az értelemben, hogy kicsi volt a szórásnégyzet, illetve a sajátértékek viselkedése hasonló volt a feltételek széles spektruma mellett.

6. Summary

In the first section, we reviewed the literary background of the topics of the dissertation. This review was done without the requirement of completeness, we mainly concentrated on the results, that were mostly relevant to this work.

In the second section of the dissertation, we analysed the exponential and Rosenthal's inequalities for acceptable and widely acceptable random variables. We showed, that an appropriate form of the

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda X_i} \le \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{\lambda X_i}$$

inequality implies an exponential inequality and the exponential inequality implies a Rosenthal's inequality, moreover the exponential inequality complete convergence. This form is the following

$$\mathbb{E}e^{\sum_{i=1}^{n}\lambda \eta_i} \le g(n) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}e^{\lambda \eta_i}, \tag{6.1}$$

where $0 < g(n) < \infty$.

If the above condition is satisfied for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and for all n, then the $\eta_1, \eta_2, \ldots$ sequence is called widely acceptable. Let $X^{(d)}$ denote the truncated of the X random variable: $X^{(d)} = \min\{X, d\}$. Applying these, we get Theorem 2.1, which is the following:

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a sequence of zero mean r.v.'s, $d > 0$. Let $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ be the sum and $B_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i^2$ be the sum of variances. Assume that (6.1) is satisfied for $\eta_i = X_i^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ and $0 < \lambda \le \lambda_0$. Then for any x with $0 < x \le (B_n e^{d\lambda_0} - B_n)/d$, we have

$$\mathbb{P}\left(S_n > x\right) \le \mathbb{P}\left(\max_{1\le i\le n} X_i > d\right) + g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right).$$

If (6.1) is satisfied both for $\eta_i = X_i^{(d)}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, and $\eta_i = (-X_i)^{(d)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ and $0 < \lambda \le \lambda_0$, then for any x with $0 < x \le (B_n e^{d\lambda_0} - B_n)/d$ we have

$$\mathbb{P}\left(|S_n| > x\right) \le \mathbb{P}\left(\max_{1\le i\le n} |X_i| > d\right) + 2g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right).$$

The two inequalities above are called exponential inequalities.

Next, we continue with the Hoeffding-inequality, which originally was published by Wassily Hoeffding in 1963, for the case of independent random variables. Later more results were published for dependent sequences. The upcoming Theorem 2.2 presents a Hoeffding-type inequality for acceptable random variables.

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *be a sequence of r.v.'s. Let* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ *be the sum. Let the random variables be bounded, i.e.* $a_i \leq X_i \leq b_i$ *for* $i = 1, 2, \ldots, n$*, where* a_i *and* b_i *are real numbers. Assume that* (6.1) *is satisfied with* $\eta_i = X_i$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$ *and* $0 < \lambda \leq \lambda_0$*. Then for any* ε *with* $0 < \varepsilon \leq \frac{\lambda_0}{4} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2$*, we have*

$$\mathbb{P}\left(S_n - \mathbb{E}S_n \geq \varepsilon\right) \leq g(n) \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right).$$

Assume that (6.1) *is satisfied for* $\eta_i = X_i$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$ *and* $|\lambda| \leq \lambda_0$*. Then for any* ε *with* $0 < \varepsilon \leq \frac{\lambda_0}{4} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2$*, we have*

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}S_n| \geq \varepsilon\right) \leq 2g(n) \exp\left(-\frac{2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right).$$

In the upcoming theorem, we show, that a general exponential inequality implies an appropriate Rosenthal inequality. Theorem 2.4 is the following:

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *be a sequence of zero mean r.v.'s, let* $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ *be their sum and* B_n *be a sequence of positive numbers. Assume that*

$$\mathbb{P}\left(|S_n| > x\right) \leq l(n)\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |X_i| > d\right) + h(n) \exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d} \ln\left(1 + \frac{xd}{B_n}\right)\right)$$

is satisfied for any $x > 0$ *and* $d > 0$ *where* $l(n)$ *and* $h(n)$ *are some real numbers. Then, for* $p > 0$ *we have*

$$\mathbb{E}|S_n|^p \leq C_1 l(n) \mathbb{E} \max_{1\leq i\leq n} |X_i|^p + C_2 h(n) B_n^{p/2},$$

where $C_1 = p^p$*,* $C_2 = \frac{1}{2} p^{1+p/2} e^p B\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ *are absolute constants with* $B(u, v)$ *being the beta function.*

The next result shows, that a general exponential inequality implies a Baum–Katz-type theorem, for this we shall need the complete convergence, which is the following: we say, that $Y_n \to 0$ completely, if $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|Y_n| > \varepsilon\right) < \infty.$$

Let $\tilde{X}^{(t)}$ denote the truncated and centered X. Applying this, we got Theorem 2.6:

Let $X_1, X_2, \dots$ be a sequence of r.v.'s, let $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ be their partial sum. Let $0 < p < 2$ and let α be a positive number. Assume that the exponential inequality is satisfied for the truncated and centered r.v.'s, that is

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n \left(\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right)\right| > x\right) \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n}\left|\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right| > d\right) + g(n)\exp\left(\frac{x}{d} - \frac{x}{d}\ln\left(1+\frac{xd}{B_n}\right)\right)$$

for all $t > 0$, $x > 0$, $d > 0$ and $n = 1, 2, \dots,$ where $B_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(\tilde{X}_i^{(t)} - \mathbb{E}\tilde{X}_i^{(t)}\right)^2$. Assume that $g(.)$ is regularly varying with exponent r, where $0 < r < \alpha(2-p)$. Assume that $X_1, X_2, \dots$ is weakly mean dominated by the r.v. X for which $\mathbb{E}|X|^p g(|X|^{1/\alpha}) < \infty$. If $0 < p < 1$, then assume $\alpha p > 1$. If $1 \leq p < 2$, then assume $\alpha p \geq 1$ and $\mathbb{E}X_i = 0$ for all i. Then we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p - 2}\mathbb{P}\left(|S_n| > \varepsilon n^{\alpha}\right) < \infty.$$

In the third section we studied the von Bahr–Esseen inequality. In the next theorem we showed, that if the von Bahr–Esseen moment inequality holds for q for the truncated and centered random variables, then it holds for the random variables themselves for any p, $1 < p < q$. In the theorem we used the following truncation for a given X random variable and t positive number

$$^{(-t)}X^{(t)} = -t\mathbb{I}\{X < -t\} + X\mathbb{I}\{|X| \leq t\} + t\mathbb{I}\{X > t\}.$$

Theorem 3.1 is the following:

Let $1 < p < q$. Let $X_n, n = 1, 2, \dots$ be a sequence of random variables with $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}X_n = 0$ for all $n = 1, 2, \dots$. Assume that for any $x > 0$

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^n \left({}^{(-x)}X_k^{(x)} - \mathbb{E}{}^{(-x)}X_k^{(x)}\right)\right|^q \leq g_q(n)\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left|{}^{(-x)}X_k^{(x)} - \mathbb{E}{}^{(-x)}X_k^{(x)}\right|^q.$$

Then

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^n X_k\right|^p \leq f_{p,q}(n)\sum_{k=1}^n \mathbb{E}|X_k|^p,$$

where $f_{p,q}(n)$ depends only on $g_q(n)$, p and q (a possible choice is $f_{p,q}(n) = 5 + 2c_q g_q(n) 2^q \left(\frac{q}{q-p}\right)^2$, where $c_q = 2^{q-1}$).

Now we assume, that if an acceptability condition holds for the truncated random variables, then we get an exponential inequality (3.1 Proposition), from which follows a Rosenthal inequality (3.2 Proposition) and a von Bahr–Esseen moment inequality, which is stated in Theorem 3.2:

Let $1 < p \leq 2$. Let $X_n, n = 1, 2, \ldots$ be a sequence of random variables with $\mathbb{E}|X_n|^p < \infty$, $\mathbb{E}X_n = 0$ for all $n = 1, 2, \ldots$. Assume that (6.1) is satisfied for any $\lambda \in \mathbb{R}$ and for $\eta_i = {}^{(a_i)} X_i^{(b_i)}$ for any $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Then

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p \leq f_p(n) \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|X_k|^p,$$

where $f_p(n)$ depends only on $g(n)$ and p.

The next Theorem 3.6 is a weak law of large numbers, where we proved L_p convergence.

Let $1 < p < 2$. Let the sequence $X_n, n = 1, 2, \ldots$ be weakly mean dominated by the r.v. X with $\mathbb{E}|X|^p < \infty$. Assume that $\mathbb{E}X_n = 0$ for all $n = 1, 2, \ldots$. Assume that (6.1) is satisfied with $g(n) = C$ for any $\lambda \in \mathbb{R}$ and for $\eta_i = {}^{(a_i)}X_i^{(b_i)}$ with any $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Then

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left|\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} X_k\right|^p = 0.$$

Moreover,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} X_k = 0$$

in probability.

The upcoming Theorem 3.7 shows, that if the acceptability condition (6.1) holds in the case of $g(n) = C$ for the truncated random variables, then we get complete moment convergence.

Let $0 < p < 2$, $1 \leq r < 2$, and $0 < \alpha < 2$. Let the sequence X_n, $n = 1, 2, \ldots$ be weakly mean dominated by the r.v. X. Assume that $\mathbb{E}X_n = 0$ for all $n = 1, 2, \ldots$. Assume that (6.1) is satisfied with $g(n) = C$ for any $\lambda \in \mathbb{R}$ and for $\eta_i = {}^{(a_i)} X_i^{(b_i)}$ with any $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots$. (i) If $r < \alpha$, then assume $\mathbb{E}|X|^\alpha < \infty$. (ii) If $r = \alpha$, then assume $\mathbb{E}|X|^r \log(1 + |X|) < \infty$. (iii) If $r > \alpha$, then assume $\mathbb{E}|X|^r < \infty$. Then

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/p-2} \mathbb{E}\left\{\left|\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} X_k\right| - \varepsilon\right\}_+^r < \infty$$

for any $\varepsilon > 0$.

In the fourth section we studied the topic of perturbed matrices. As a result, we can say, that when the noise matrices with entries having zero mean values, then the theoretical results showed, that the structural eigenvalues are „large" and the non-structural eigenvalues are „small", our numerical results let us see the behaviour of the sequences of the eigenvalues.

In the next Theorem 4.1 the B_n blown-up matrices and the W_n are both complex hermitian matrices (in special case real symmetric matrices). The W_n noise matrix is a Wigner matrix, which has a finite fourth moment.

Let B_n, $n = 1, 2, \ldots$, be a sequence of complex Hermitian matrices. Let the Wigner matrices W_n, $n = 1, 2, \ldots$, be complex Hermitian random matrices satisfying the following assumptions. Let the diagonal elements w_{ii} of W_n be i.i.d. real, let the above diagonal elements be i.i.d. complex random variables and let all of these be independent. Let $w_{ij} = \bar{w}_{ji}$ for all i, j. Assume that $\mathbb{E}w_{11}^2 < \infty$, $\mathbb{E}w_{12} = 0$, $\mathbb{E}|w_{12} - \mathbb{E}w_{12}|^2 = \sigma^2$ is finite and positive, $\mathbb{E}|w_{12}|^4 < \infty$. Then

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\lambda_i(B_n + W_n) - \lambda_i(B_n)|}{\sqrt{n}} \le 2\sigma$$

for all i almost surely.

Next we used sample covariance matrices as noise matrices. Let x_{jl}, $j, l = 1, 2, \ldots$ be an infinite array of independent and identically distributed complex valued random variables with mean 0 and variance σ^2. Let $X = (x_{jl})_{j=1,\ l=1}^{n,\ \ m}$ be the left upper block of size $n \times m$. $S_n = \frac{1}{m} XX^*$ is called the sample covariance matrix, where X^* is the transpose matrix of X and B_n the blown-up matrix. The theorem is the following:

Let B_n, $n = 1, 2, \ldots$, be a sequence of complex Hermitian matrices. Let S_n, $n = 1, 2, \ldots$, be complex valued sample covariance matrices satisfying the above conditions. Moreover, assume that the entries of X have finite fourth moments. Assume that $\lim_{n\to\infty} n/m = y \in (0, \infty)$. Then

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_i(B_n + \sqrt{m}S_n) - \lambda_i(B_n)}{\sqrt{m}} \le \sigma^2(1 + \sqrt{y})^2$$

for all i almost surely.

Then we considered perturbation with matrices having independent and identically distributed complex entries. Let x_{jk}, $j, k = 1, 2, \ldots$, be an infinite array of independent and identically distributed complex valued random variables with mean 0 and variance σ^2. Let $X = (x_{jk})_{j=1,\ k=1}^{m,\ \ n}$ be the left upper block of size $m \times n$. The connecting Theorem 4.4 is the following:

For each m and n let $B = B_{mn}$ be a complex matrix of size $m \times n$ and let $X = X_{mn}$ be the above complex valued random matrix of size $m \times n$ with *independent and identically distributed entries. Moreover, assume that the entries of X have finite fourth moments. Assume that $m, n \to \infty$ so that $K_1 \leq \frac{m}{n} \leq K_2$, where $0 < K_1 \leq K_2 < \infty$ are fixed constants. Denote by s_i and z_i the singular values of B and $B+X$, respectively, $s_1 \geq \cdots \geq s_{\min\{m,n\}}$, $z_1 \geq \cdots \geq z_{\min\{m,n\}}$. Then for all i*

$$|s_i - z_i| = \mathrm{O}(\sqrt{n})$$

as $m, n \to \infty$ almost surely.

Finally come the numerical examples which support the theoretical results. Let $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ be the absolute values of the eigenvalues of the perturbed blown-up matrix in descending order. Then the structural eigenvalues $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_l|$ are „large" and they rapidly decrease. The other eigenvalues $|\lambda_{l+1}| \geq |\lambda_{l+2}| \geq \ldots$ are relatively small and they decrease very slowly. So it is easy to find the structural eigenvalues. To obtain the structural eigenvalues we suggest the following numerical (graphical) procedure:

- Calculate some eigenvalues of A_n starting with the largest ones in absolute value.

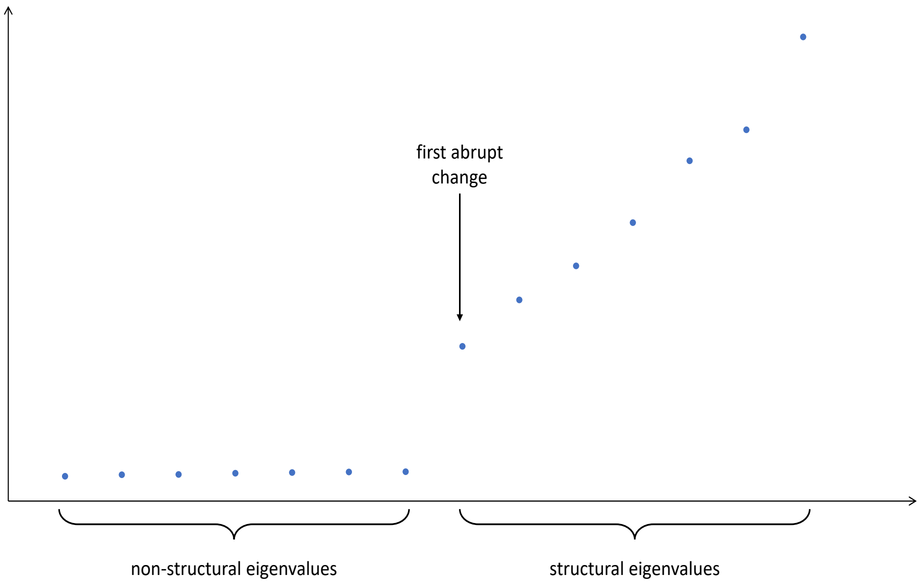
- We are repeating the previous step, until the last 5-10 eigenvalues are close to zero and they are almost the same in absolute value.

- Then we obtain the increasing sequence $|\lambda_t| \leq |\lambda_{t-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_1|$. Plot their values in the above order, then find the first abrupt change.

If, say,

$$0 \approx |\lambda_t| \approx |\lambda_{t-1}| \approx \cdots \approx |\lambda_{l+1}| \ll |\lambda_l| < \cdots < |\lambda_1|,$$

that is the abrupt change is at l, then $\lambda_l, \lambda_{l-1}, \ldots, \lambda_1$ can be considered as the structural eigenvalues. The typical abrupt change after the non-structural eigenvalues can be seen on the following figure.



20. Ábra. The abrupt change after the non-structural eigenvalues

Similar method is valid for the singular values, too. Our results are stable in the sense that variances are small and the behaviour of the eigenvalues is the same in wide range of conditions.

7. Jelmagyarázat

END	Extended Negatively Dependent	Kiterjesztett Negatív Függő
NOD	Negatively Orthant Dependent	Negatív Ortáns Függő
WMD	Weakly Mean Dominated	Átlagosan Gyengén Dominált
WOD	Widely orthant dependent	Tágabb értelemben Ortáns Függő

9. Táblázat. Rövidítések táblázata

$\mathbb{I}$	indikátor függvény
$\mathbb{E}$	várható érték
$\mathbb{D}$	szórás
$\lambda_l(A)$	az A mátrix l-edik legnagyobb sajátértéke.
$\bar{z}$	a z szám komplex konjugáltja

10. Táblázat. Jelölések táblázata

8. Appendix

8.1. Tétel. *Legyen $r > 0$, és tegyük fel, hogy X egy nemnegatív valószínűségi változó. Akkor*

(i) $\mathbb{E}X = \int_0^\infty (1 - F(x))dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx$, *ahol mindkét tag egyszerre konvergens, vagy egyszerre divergens;*

(ii) $\mathbb{E}X^r = r\int_0^\infty x^{r-1}(1 - F(x))dx = r\int_0^\infty x^{r-1}\mathbb{P}(X > x)dx$, *ahol mindkét tag egyszerre konvergens, vagy egyszerre divergens;*

(iii) $\mathbb{E}X < \infty \iff \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq n) < \infty$.
Pontosabban

$$\sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq n) \leq \mathbb{E}X \leq 1 + \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq n)$$

(iv) $\mathbb{E}X^r < \infty \iff \sum_{n=1}^\infty n^{r-1}\mathbb{P}(X \geq n) < \infty$.
Pontosabban

$$\sum_{n=1}^\infty n^{r-1}\mathbb{P}(X \geq n) \leq \mathbb{E}X^r \leq 1 + \sum_{n=1}^\infty n^{r-1}\mathbb{P}(X \geq n)$$

8.2. Tétel (Weyl perturbációs tétel)**.** *Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ szimmetrikus mátrixok, akkor minden $j = 1, \ldots, d$ esetén*

$$\max_{j\in|d|} |\lambda_j(B) - \lambda_j(A)| \leq \|B - A\|_2$$

Ahol $\|C\|_2$ a C mátrix legnagyobb szinguláris értéke.

8.3. Tétel (Courant–Fischer–Weyl min-max elv)**.** *Legyen A $n\times n$-es Hermite-féle mátrix, ennek sajátértékei legyenek $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$, és U az alteret jelöli. Ekkor $k = 1, \ldots, n$-re*

$$\lambda_k = \min_U \left\{ \max_x \left\{ \frac{x^*Ax}{x^*x} : x \in U, x \neq 0 \right\} : dim(U) = k \right\}$$

és

$$\lambda_k = \max_U \left\{ \min_x \left\{ \frac{x^*Ax}{x^*x} : x \in U, x \neq 0 \right\} : dim(U) = n - k + 1 \right\}.$$

A következő tételben a W komplex Wigner mátrixra, azaz a konjugáltja egyelő a transzponáltjával.

8.4. Tétel (Bai (1999), 2.12 Tétel)**.** *Tegyük fel, hogy a W Wigner mátrix főátlóbeli elemei független, azonos eloszlású valós valószínűségi változók, a főátló feletti elemek független azonos eloszlású komplex valószínűségi változók, továbbá ezek mind független változók. Akkor $n^{-\frac{1}{2}}W$ legnagyobb sajátértéke 1 valószínűséggel akkor és csak akkor tart $2\sigma > 0$-hoz, ha a következő négy feltétel teljesül:*

1. $\mathbb{E}((w_{11}^{+})^2) < \infty$,
2. $\mathbb{E}(w_{12})$ *valós és* $\mathbb{E}(w_{12}) \leq 0$,
3. $\mathbb{E}(|w_{12} - \mathbb{E}(w_{12})|^2) = \sigma^2$,
4. $\mathbb{E}(|w_{12}|^4) < \infty$,

ahol $x^+ = \max(x, 0)$.

A következők bevezetésére a soron következő tétel kimondásához van szükség. Legyenek az $a_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq n$, független (de nem feltétlenül azonos eloszlású) valószínűségi változók a következő tulajdonságúak:

- $|a_{ij}| \leq K$, minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén;
- $\mathbb{E}(a_{ij}) = 0$, minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén;
- $\mathrm{Var}(a_{ij}) = \sigma^2$, minden $1 \leq i \leq j \leq n$ esetén;

Legyen $a_{ji} = a_{ij}$ azaz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ egy szimmetrikus mátrix, illetve $\lambda(A)$ az A spektrál normája.

8.5. Tétel (Vu (2007), 1.3 Tétel)**.** *A fent definiált A véletlen mátrixra létezek egy olyan $c = c(\sigma, K)$ pozitív konstans, hogy*

$$\lambda(A) \leq 2\sigma\sqrt{n} + cn^{1/4}\ln n$$

majdnem biztosan teljesül.

A következő tétel kimondásához a szükséges a következő: tegyük fel, hogy $\{x_{jk}, k = 1, 2, \dots\}$ egy kétdimenziós tömb, elemei független azonos eloszlású komplex valószínűségi változók nulla várhatóértékkel és σ^2-tel. Jelölje $x_k = (x_{1k}, \dots, x_{pk})'$ és $X = (x_1, \dots, x_n)$. Legyen S a minta kovariancia mátrix, $S = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k x_k^* = \frac{1}{n}XX^*$.

8.6. Tétel (Bai (1999), 2.16 Tétel)**.** *Tegyük fel, hogy $p/n \to y \in (0, \infty)$, továbbá X elemeinek létezik véges negyedik momentuma. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{\min}(S) = \sigma^2(1-\sqrt{y})^2$$

majdnem biztosan, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{\max}(S) = \sigma^2(1+\sqrt{y})^2$$

majdnem biztosan.

8.1. Definíció (C1 feltétel. Lásd [O'Rourke, Renfrew (2014)])**.** *Legyen (ξ_1, ξ_2) egy véletlen vektor $\mathbb{R}^2$-ben, ahol ξ_1 és ξ_2 nulla várhatóértékű és egység szórásnégyzetű. Legyen $\rho := \mathbb{E}[\xi_1\xi_2]$. Legyen $\{y_{ij}\}_{i,j\geq 1}$ egy végtelen valós elemű kétindexes tömb. Minden $N \geq 1$-re definiálunk egy $N \times N$ véletlen mátrixot $Y_N = (y_{ij})_{i,j=1}^N$. Azt mondjuk, hogy az $\{Y_N\}_{N\geq 1}$ véletlen mátrixok sorozata teljesíti a $C1$ feltételt (ξ_1, ξ_2) atom változókkal, ha a következő feltételek teljesülnek:*

- $\{y_{ii} : 1 \leq i\} \cup \{(y_{ij}, y_{ji}) : 1 \leq i < j\}$ *– független véletlen elemek összessége,*
- $\{(y_{ij}, y_{ji}) : 1 \leq i < j\}$ *– a (ξ_1, ξ_2) független azonos eloszlású másolatainak egy összessége,*
- $\{y_{ii} : 1 \leq i\}$ *– független azonos eloszlású, nulla várható értékű és véges szórásnégyzetű valószínűségi változók egy összessége.*

8.2. Definíció (C0 feltétel. Lásd [O'Rourke, Renfrew (2014)])**.** *Legyen (ξ_1, ξ_2) egy véletlen vektor $\mathbb{R}^2$-ben, ahol ξ_1 és ξ_2 nulla várhatóértékű és egység szórásnégyzetű. Legyen $\rho := \mathbb{E}[\xi_1\xi_2]$. Minden $N \geq 1$-re legyen Y_N a fenti $N \times N$ véletlen mátrix. Azt mondjuk, hogy az $\{Y_N\}_{N\geq 1}$ véletlen mátrixok sorozata teljesíti a $C0$ feltételt (ξ_1, ξ_2) atom változókkal, ha a következő feltételek teljesülnek:*

- *Az $\{Y_N\}_{N\geq 1}$ teljesíti a C1 feltételt (ξ_1, ξ_2) atom változókkal,*
- *Továbbá*
$$M_4 := \max\left\{\mathbb{E}|\xi_1|^4, \mathbb{E}|\xi_2|^4\right\} < \infty.$$

8.1. Lemma (O'Rourke, Renfrew 3.3 Lemma. Lásd [O'Rourke, Renfrew (2014)])**.** *Legyen $\{Y\}_{N\geq 1}$ véletlen mátrixok egy sorozata, mely teljesíti a C0 feltételt a (ξ_1, ξ_2) atom változókkal. Akkor majdnem biztosan*

$$\limsup_{N\to\infty} \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} Y_N \right\| \leq 4.$$

Irodalomjegyzék

[Antonini, Kozachenko, Volodin (2008)] Antonini, R.G., Kozachenko, Y. and Volodin, A. Convergence of series of dependent φ-sub-Gaussian random variables. *J. Math. Anal. Appl.* 338 (2008), No. 2, 1188–1203.

[von Bahr–Esseen (1965)] B. von Bahr, C. G. Esseen Inequalities for the r^{th} absolute moment of a sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$. *Ann. Math. Statist.*, 36 (1965), no.1, 299–303.

[Bai (1999)] Bai, Z. D. Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices. A review. *Statistica Sinica*, 9 (1999), 611–677.

[Bauer (1996)] Heinz Bauer: Probability theory. *Walter de Gruyter & Co.*, Berlin, 1996.

[Baum, Katz (1965)] L. E. Baum, M. Katz: Convergence rates in the law of large numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.* 120 (1965), 108–123.

[Bennett (1962)] Bennett, G. Probability Inequalities for the Sum of Independent Random Variables. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 57, No. 297, pp. 33-45 (13 pages), 1962.

[Bernstein (1924)] N. Bernstein On a modification of Chebyshev's inequality and of the error formula of Laplace. *Ann. Sci. Inst. Sav. Ukraine.*, Sect. Math. 1 (1924).

[Bingham, Goldie, Teugels (1987)] Bingham, N. H.; Goldie, C. M.; Teugels, J. L. Regular variation. *Cambridge University Press*, Cambridge, 1987.

[Bolla (2005)] Bolla, M. Recognizing linear structure in noisy matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 402 (2005), 228–244.

[Bolla, Friedl, Krámli (2010)] Bolla, M., Friedl, K. and Krámli, A. Singular value decomposition of large random matrices (for two-way classification of microarrays). *J. Multivariate Analysis*, 101 no. 2 (2010), 434–446.

[Chen, Bai, Sung (2014)] Pingyan Chen, Peng Bai, Soo Hak Sung: The von Bahr–Esseen moment inequality for pairwise independent random variables and applications. *J. Math. Anal. Appl.* 419 (2014), no.2, 1290–1302.

[Chen, Sungo (2017)] Chen, Pingyan and Sung, Soo Hak. A Bernstein type inequality for NOD random variables and applications. *J. Math. Ineq.* 22 no. 2 (2017), 455–467.

[Chow (1988)] Y. S. Chow: On the rate of moment convergence of sample sums and extremes. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 6 (1988), no. 3, 177–201.

[Christofides, Hadjikyriakou (2009)] Christofides, T. C.; Hadjikyriakou, M. Exponential inequalities for N-demimartingales and negatively associated random variables. *Statist. Probab. Lett.* 79, no. 19 (2009), 2060–2065.

[Csörgő, Tandori, Totik (1983)] S. Csörgő, K. Tandori, V. Totik: On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables. *Acta Math. Hungar.* 42 (1983), no. 3-4, 319–330.

[Dharmadhikari, Jogdeo (1969)] S. W. Dharmadhikari, Kumar Jogdeo: Bounds on moments of certain random variables. *Ann. Math. Statist.* 40 (1969), no.4, 1506–1509.

[Erdős (1949)] Erdős, P. On a theorem of Hsu and Robbins. *The Annals of Mathematical Statistics*; Vol. 20, No. 2 (Jun., 1949), pp. 286-291

[Erdős (1950)] Erdős, P. Remark on my Paper "On a Theorem of Hsu and Robbins". *The Annals of Mathematical Statistics*; Vol. 21(1) (March, 1950), pp. 138-138

[Etemadi (1981)] N. Etemadi: An elementary proof of the strong law of large numbers. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 55 (1981), no. 1, 119–122.

[Fazekas (1992)] Fazekas, I.: Convergence rates in the law of large numbers for arrays. *Publ. Math. Debrecen*, 41 (1992), no. 1-2, 53–71.

[Fazekas (2014)] Fazekas, I. On a general approach to the strong laws of large numbers. *J. Math. Sci. (N. Y.)* 200, no. 4 (2014), 411–423.

[Fazekas, Klesov (2000)] Fazekas, I., Klesov, O. A General Approach to the Strong Law of Large Numbers. *Theory of Probability and its Applications*, vol. 45., pp. 436–449, 2000

[Fazekas, Kukush, Tómács (2000)] Fazekas, I.; Kukush, A. G.; Tómács, T. On the Rosenthal inequality for mixing fields. *Ukrainian Math. J.* 52, no. 2, 305–318, 2000.

[Fazekas, Pecsora (2017)] Fazekas, I. and Pecsora, S. General Bahr–Esseen inequalities and their applications. *Journal of inequalities and applications*, 2017:191 (2017).

[Fazekas, Pecsora (2020)I] Fazekas, I., Pecsora, S. On the spectrum of noisy blown-up matrices. *Special Matrices*, 8 no. 1 (2020), 104–122.

[Fazekas, Pecsora (2020)II] Fazekas, I., Pecsora, S. Numerical results on noisy blown-up matrices *Annales Mathematicae et Informaticae.* 51. pp. 17-28. ISSN 1787-6117 (Online),(2020)

[Fazekas, Pecsora, Porvázsnyik (2018)] I. Fazekas, S. Pecsora, B. Porvázsnyik: General theorems on exponential and Rosenthal's inequalities and on complete convergence. *Journal of Mathematical Inequalities* 12 (2), 2018, 433-446.

[Feller (1971)] Feller, W. *An introduction to probability theory and its applications.* Vol II. Wiley, New York, 1971.

[Fuk, Nagaev (1971)] D. H. Fuk, S. V. Nagaev: Probabilistic inequalities for sums of independent random variables. *Teor. Verojatnost. i Primenen.* 16 (1971), 660–675.

[Füredi, Komlós (1981)] Füredi, Z. and Komlós, J. The eigenvalues of random symmetric matrices. *Combinatorica*, 1 (1981), 233–241.

[Gan, Chen, Qiu (2011)] Gan, Shixin; Chen, Pingyan; Qiu, Dehua. Rosenthal inequality for NOD sequences and its applications. *Wuhan Univ. J. Nat. Sci.* 16, no. 3 (2011), 185–189.

[Gut (1992)] Gut, A.: Complete convergence for arrays. *Period. Math. Hungar.* 25 (1992), no. 1, 51–75.

[Gut (2013)] Gut, A. Probability: a graduate course. *Springer*, New York, 2013.

[Hoeffding (1963)] Hoeffding, W. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.* 58 (1963), 13–30.

[Hsu, Robbins (1947)] Hsu, P. L.; Robbins, Herbert. Complete Convergence and the Law of Large Numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*; Vol. 33, no. 2, National Academy of Sciences, 1947, pp. 25–31.

[Hu, Móricz, Taylor (1989)] Hu, T. C.; Móricz, F.; Taylor, R. L. Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random variables. *Acta Math. Hungar.* 54, no. 1-2 (1989), 153–162.

[Kahan (1975)] Kahan, W. Spectra of nearly Hermitian matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.* 48 no.1 (1975), 11–17.

[Kolmogorov (1950)] A. N. Kolmogorov Foundations of the Theory of Probability. *Chelsea Publishing, New York.*, (1950), (eredetileg német nyelven jelent meg Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung címmel, Springer-Verlag, Berlin, 1933).

[Marchenko, Pastur (1967)] V. A. Marchenko, L. A. Pastur Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices. *Mat. Sb. (N.S.).*, vol. 72(114), no. 4 (1967), 507–536.

[Marcinkiewicz, Zygmund (1938)] J. Marcinkiewicz, A. Zygmund Quelques theoremes sur les fonctions independantes. *Studia Mathematica.*, vol. 7 104–120 (1938).

[Móricz (1979)] Móricz, F. Exponential estimates for the maximum of partial sums. I. Sequences of rv's. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 33, no. 1-2 (1979), 159–167.

[Nagaev (1977)] Nagaev, S. V.; Pinelis, I. F. Some inequalities for the distribution of sums of independent random variables. *Teor. Veroyatn. Primen.* 22, 254–263, 1977.

[O'Rourke, Renfrew (2014)] O'Rourke, S. and Renfrew, D. Low rank perturbations of large elliptic random matrices. *Electron. J. Probab.* 19 (2014), paper no. 43, 65 pp.

[Petrov (1995)] Petrov, V. V. Limit theorems of probability theory. Sequences of independent random variables. *The Clarendon Press, Oxford University Press*, New York, 1995.

[Rosenthal (1970)] Rosenthal, H. P. On the subspaces of $L^p (p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables. *Israel J. Math.* 8, 273–303 1970.

[Roussas (1996)] G. G. Roussas Exponential Probability Inequalities with Some Applications *Lecture Notes-Monograph Series*, vol. 30, Institute of Mathematical Statistics, 1996, pp. 303–19

[Shao (1993)] Shao, Qi Man. Complete convergence for α-mixing sequences. *Statist. Probab. Lett.* 16, no. 4 (1993), 279–287.

[Shen, Hu, Volodin, Wang (2011)] Shen, Aiting; Hu, Shuhe; Volodin, Andrei; Wang, Xuejun. Some exponential inequalities for acceptable random variables and complete convergence. *J. Inequal. Appl.*, 2011:142 (2011), 10 pp.

[Stout (1974)] Stout, W. F. Almost sure convergence. *Probab. Math. Statistics*, Vol. 24. Academic Press, New York-London, 1974.

[Sung (2009)] Soo Hak Sung: Moment inequalities and complete moment convergence. *J. Inequal. Appl.* (2009), Art. ID 271265, 14 pp.

[Tao (2013)] Tao, T. Outliers in the spectrum of iid matrices with bounded rank perturbations. *Probability Theory and Related Fields*, 155, 1–2 (2013), 231–263.

[Vu (2007)] Vu, Van H. Spectral norm of random matrices. *Combinatorica*, 27 (2007), 721–736.

[Wang, Hu (2012)] Wang, Xinghui; Hu, Shuhe. Complete convergence and complete moment convergence for a class of random variables. *J. Inequal. Appl.*, 2012:229 (2012), 12 pp.

[Wang, Li, Gao (2011)] Wang, Yuebao; Li, Yawei; Gao, Qingwu. On the exponential inequality for acceptable random variables. *J. Inequal. Appl.*, 2011:40 (2011), 10 pp.

[Wang, Wang, Gao (2013)] Kaiyong Wang, Yuebao Wang, Qingwu Gao: Uniform asymptotics for the finite-time ruin probability of a dependent risk model with a constant interest rate. *Methodol. Comput. Appl. Probab.* 15 (2013), no. 1, 109–124.

[Wang, Xu, Hu, Volodin, Hu (2014)] Xuejun Wang, Chen Xu, Tien-Chung Hu, Andrei Volodin, Shuhe Hu: On complete convergence for widely orthant-dependent random variables and its applications in nonparametric regression models. *TEST: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research* 23 (2014), no. 3, 607–629.

[Wigner (1955)] Eugene P. Wigner: Characteristic Vectors of Bordered Matrices With Infinite Dimensions. *Annals of Mathematics* Second Series, Vol. 62, No. 3 (Nov., 1955), pp. 548–564.

[Wigner (1958)] Eugene P. Wigner: On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices. *Annals of Mathematics* Second Series, Vol. 67, No. 2 (Mar., 1958), pp. 325–327.

[Wu, Guan (2012)] Wu, Yongfeng; Guan, Mei. Convergence properties of the partial sums for sequences of end random variables. *J. Korean Math. Soc.* 49, no. 6 (2012), 1097–1110.

[Wu, Song, Wang (2014)] Wu, Yongfeng; Song, Mingzhu; Wang, Chunhua. Complete Moment Convergence and Mean Convergence for Arrays of Rowwise Extended Negatively Dependent Random Variables. *Scientific World Journal*; Article ID 2014:478612, (2014).

DEBRECENI EGYETEM
DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/60/2023.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Pecsora Sándor
Doktori Iskola: Informatikai Tudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10054512

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

1. Fazekas, I., **Pecsora, S.**: Numerical results on noisy blown-up matrices.
   Ann. Math. Inform. 51, 17-28, 2020. ISSN: 1787-5021.
   DOI: http://dx.doi.org/10.33039/ami.2020.07.001

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

2. Fazekas, I., **Pecsora, S.**: On the spectrum of noisy blown-up matrices.
   Special Matrices. 8 (1), 104-122, 2020. EISSN: 2300-7451.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1515/spma-2020-0010

3. Fazekas, I., **Pecsora, S.**, Porvázsnyik, B.: General theorems on exponential and Rosenthal's inequalities and on complete convergence.
   J. Math. Inequal. 12 (2), 433-446, 2018. ISSN: 1846-579X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.7153/jmi-2018-12-32
   IF: 1.158

4. Fazekas, I., **Pecsora, S.**: General Bahr-Esseen inequalities and their applications.
   J. Inequal. Appl. 2017 (191), 1-16, 2017. EISSN: 1029-242X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1186/s13660-017-1468-y
   IF: 0.966

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

5. Fazekas, I., **Pecsora, S.**: A generalization of the Barabási-Albert random tree.
   Ann. Math. Inform. 44, 71-85, 2015. ISSN: 1787-5021.

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 2,124
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 2,124

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2023.03.01.