

BESTIMMUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN VON KARDANANTRIEBEN

Der Artikel ist der zweite Teil der in 2003. begonnenen Serie, erschienen in den *Debrecener Technischen Veröffentlichungen*. Im ersten Teil wurde die Notwendigkeit der dynamischen Modellierung während der Festigkeits-Dimensionierung von Anlagen der Maschinenbau begründet.

Voraussetzung des ruhigen Laufs einer Antriebskette ist, dass bei der Betriebsfrequenz keine Resonanz auftritt. Eine Resonanz bildet sich aus, wenn die Erregerfrequenzen mit irgendeiner Eigenfrequenz der Antriebskette zusammenfallen. Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen soll eine dynamische Modellierung der Antriebskette verrichtet werden.

In diesem Artikel wird die Methode der Bestimmung der Bewegungsgleichung einer allgemeinen Antriebskette dargelegt, die die Grundlage für die Bestimmung der dynamischen Modelle bildet. Das Ziel ist also, das elementare kettenartige Modell einer Antriebskette zu bestimmen, die Ersetzung ihrer Komponente mit Massen, Trägheitsmomenten und Federn. In den weiteren zwei Teilen der Artikelserie werden die dynamischen Modelle und das darauf basierende Simulationsprogramm vorgelegt.

1. DIE UMFORMUNG DES ALLGEMEINEN ANTRIEBSSYSTEMS / BILD 1. / IN EIN ELEMENTARES KETTENFÖRMIGES MODELL

Die Antriebsketten können aus mechanischer Absicht Verzweigungs-, Übersetzung- oder Kettenantriebe sein. Es ist nachweisbar, dass die Eigenfrequenzen einer allgemeinstrukturierter Antriebskette und die Eigenfrequenzen ihr elementares kettenförmiges Modells übereinstimmen. Da dieses letztere wesentlich einfacher bestimmt werden kann, es ist sinnvoll, die Antriebskette in ein kettenförmiges Modell umzuwandeln.

Mit der analytischen Methode der Bestimmung der Bewegungsgleichung kann die allgemeine Form der Bewegungsgleichung zweiten Grades nach Lagrange bestimmt werden, für den erregungsfreien und dämpfungsfreien Fall [1]. Die dynamischen Modelle werde ich mit der Anwendung dieser Vereinfachung

aufbauen, da mit dieser Annäherung sich die Eigenfrequenzen der Antriebskette wesentlich nicht ändern.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (1)$$

$i=1, 2, \dots, n$

Wobei: E - kinetische Energie des Systems
 U - potentielle Energie des Systems
 q - allgemeine Koordinate

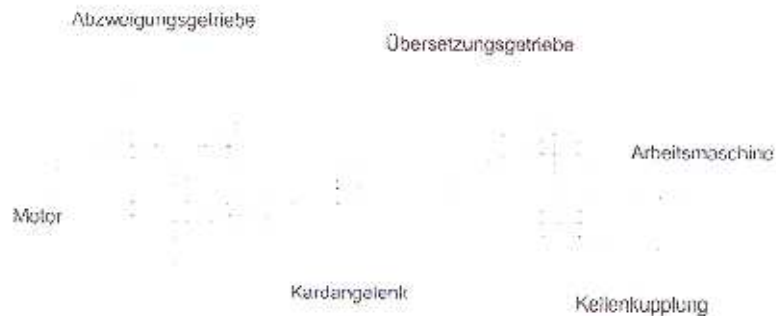


Bild 1

Die Bewegungskette im Bild 1. beinhaltet ein Abzweigungsgelände, einen kettenförmigen Kardanantrieb-Teil und ein Übersetzungsgetriebe. Die Antriebskette ist insgesamt also verzweigungsartig.

Nach Bestimmung der kinetischen und potentiellen Energie der Antriebskette bekommt man in der Lagrange-Gleichung bei einem System mit Freiheitsgrad „n“ ein Gleichungssystem aus „n“ Gleichungen, das in einer Matrixform einfach aufgeschrieben werden kann.

Falls das allgemeine Antriebssystem verzweigungsartig ist, kann es durch zwei Schritte in ein elementares kettenförmiges Modell umgewandelt werden:

- das Abzweigungssystem wird in ein Übersetzungssystem umgewandelt
- das Übersetzungssystem wird in ein kettenförmiges System umgewandelt

1.A. Die Bewegungsgleichung für ein elementares kettenförmiges System lautet:

$$\underline{\underline{m}}\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{c}}\underline{q} = \underline{\underline{0}} \quad (2)$$

mit $\underline{\underline{m}}$ diagonale Massenmatrix:

$\underline{\underline{c}}$ = dreidiagonale Federmatrix, und die Summe der Elementen der Matrixreihe ist 0.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\ 0 & & & & c_{n,n-1} & c_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

1.B. Die Bewegungsgleichung für das Übersetzungssystem lautet:

$$\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{p}} + \underline{\underline{C}}\underline{p} = \underline{\underline{0}} \quad (4)$$

mit $\underline{\underline{M}}$ Massenmatrix Diagonale

$\underline{\underline{C}}$ = Federmatrix diagonale, aber die Summe der Elementen der Matrixreihe ist mindestens in zwei Reihen nicht 0.

Diese Matrixgleichung ist durch $\underline{\underline{S}}$ Transformation veränderbar [2]:

$$\underline{\underline{m}} = \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{S}}, \quad \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}, \quad \underline{\underline{c}} = \underline{\underline{S}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}, \quad \text{und} \quad \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{p}} \quad (5)$$

Die Elementen der $\underline{\underline{S}}$ -Matrix können aus folgenderer Ausgangsbedingung bestimmt werden: die Summe der Elementen der C-Matrix-Reihen soll 0 sein.

Die Matrixgleichung $\underline{\underline{m}}\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{c}}\underline{q} = \underline{\underline{0}}$ ist schon für ein kettenförmiges System gültig.

1.C. Die Bewegungsgleichung des Abzweigungssystems lautet:

$$\underline{\underline{N}}\ddot{\underline{\underline{r}}} + \underline{\underline{Q}}\dot{\underline{\underline{r}}} = \underline{\underline{0}} \quad (6)$$

Diese Matrixgleichung ist durch $\underline{\underline{T}}$ -Transformation veränderbar [2]:

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{T}}^* \underline{\underline{N}} \underline{\underline{T}}, \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{T}}^* \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{T}}, \quad \text{és } \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{r}} \underline{\underline{M}} \quad (7)$$

Die Elementen der $\underline{\underline{T}}$ -Matrix können aus folgender Ausgangsbedingung bestimmt werden: die Fedenmatrix soll triagonal sein.

Die Matrixgleichung $\underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\underline{p}}} + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{\underline{p}}} = \underline{\underline{0}}$ ist schon für ein Übersetzungssystem gültig. Diese Matrixgleichung kann wiederum nach I.B. Abschnitt in ein Kettensystem umgewandelt werden.

Wenn nur die Gelenkwellen zu prüfen sind, können wir den Motor und das Getriebe mit dem mechanischen Trägheitsmoment vertreten.

2. BESTIMMUNG DER LAGERSTEIFIGKEIT / BILD 2. / BERUHT AUF DER HERTZ - THEORIE UND DEM STEIFIGKEITSMODELLS VON SJÖVALL [3].

Die Federsteifigkeit der Lager hängt hauptsächlich von der Art, den Abmessungen, Belastung, Position der Wälzelementen und dem Schmierzustand der Lager ab. Die letzten zwei Faktoren können als Vereinfachung außer Acht gelassen werden, da sie den Wert der Steifigkeit nicht wesentlich beeinflussen.

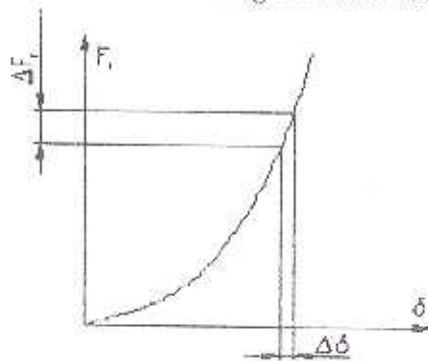


Bild 2

$$s = \frac{dFr}{d\delta} \approx \frac{\Delta Fr}{\Delta \delta} \quad (8)$$

Für die Bestimmung der Deformation der Wälzlager unter Belastung kann das Sjövall Modell verwendet werden, wozu aber solche detaillierte Daten zur Verfügung stehen müssen, welche in den Lagerkatalogen nicht zu finden sind [3]. Mit den Daten, die in den Lagerkatalogen zur Verfügung stehen, können Näherungsberechnungen durchgeführt werden, die weniger als 10 % Abweichung zum Sjövall Modell aufweisen.

Es gilt folgende Näherungsformel für die Berechnung der elastische Deformation einer einreihigen tiefnutigen Rollenlager [3].

$$\delta = \frac{0,002}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{Q_{Gesamt}^2}{d_w}} \quad (9)$$

Wobei: $Q_{Gesamt} = Q_i + Q_{er}$ Gesamtbelastung am Lager (10)

$$Q_i = S \frac{F_i}{z \cdot \cos \alpha}, \quad Q_{er} = \frac{F_{er}}{z \cdot \sin \alpha} \quad (11)$$

z : Anzahl der Wälzelementen in einer Reihe

α : effektiver Wirkungswinkel des Lagers

d_w : Durchmesser der wälzenden Elementen

Das Problem ist, daß die Charakteristik der Federsteifigkeit nicht linear ist, sondern von der Belastung abhängt.

Deshalb muss erst die Lagerbelastung bestimmt werden.

Es wird die Lagerdeformation bei der Nennbelastung und auch bei einer Belastung um 2 % höher als der Nennwert bestimmt, und so kann die lokale Federsteifigkeit für die gegebene Belastung bei bekannter ΔF und $\Delta \delta$ berechnet werden.

3. BESTIMMUNG DER ANTRIEBS-EIGENSCHAFTEN DER WELLEN UND KUPPLUNGEN

Zur dynamischen Modellbildung ist es notwendig, daß man diese Elemente mit Stäben, Scheiben, Federn ersetzen kann. Dazu müssen außer ihrer geometrischen und Materie-Eigenschaften auch ihre Masse, Trägheitsmoment, Biege- und Torsionssteifigkeit bekannt sein. Diese Werte stehen entweder in den

Produktkatalogen zur Verfügung, oder können mit Hilfe einfacher mechanischer Zusammenhänge bestimmt werden.

Bei winkelausgleichenden Wellenkupplungen muß auch die Übertragungsfunktion bestimmt werden, die z.B. für ein Kardangelenk die Größe der Schwankung der Winkelgeschwindigkeit bei Winkelabweichung ausdrückt.

4. BEWEGUNGSGLEICHUNGSSYSTEM EINES KETTENARTIGES MODELLS MIT KARDANGELENK

Die Kardangelenke in einer Antriebskette können wesentlich die Betriebseigenschaften, das Verhalten der Kette beeinflussen. Deshalb ist es wichtig, daß man bei der Modellbildung die Eigenschaften und die Wirkung des Gelenks auf den Antrieb mit berücksichtigt. Deswegen müssen Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung der mit einem Kardangelenk angetriebenen Welle bekannt sein [4].

$$\text{Winkelweg:} \quad \varphi_{12} = \varphi_{11} + \delta_1 \sin 2\varphi_{11} \quad (12)$$

(dies ist eine gute Annäherung bis $\beta = 30^\circ$ /

$$\text{Winkelgeschwindigkeit:} \quad \omega_{12} = \omega_{11} (1 + 2\delta_1 \cos 2\varphi_{11}) \quad (13)$$

$$\text{Winkelbeschleunigung:} \quad \varepsilon_{12} = -4\omega_{11}^2 \delta_1 \sin 2\varphi_{11} \quad (14)$$

Das Übertragungskoeffizient des i-er Gelenks kann aus dem Winkelunterschied aufgeschrieben werden:

$$\frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \varphi_{11}} = 1 + 2\delta_1 \cos 2\varphi_{11}, \quad \delta_1 \cong \frac{\beta_i^2}{4} \quad (15)$$

Wobei:

- φ_i : Drehwinkel im Vergleich zu erste Gelenk
- β_i : Winkeldifferenz zwischen zwei Wellen

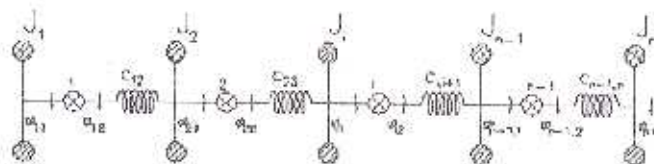


Bild 3.

Bei dem bereits ins Kettenförmige umgeformten Modell

das Lagrangesche Gleichungssystem $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} = 0$ auf der Basis von

Bild 3, lautet:

$$\begin{aligned}
 J_1 \ddot{\varphi}_{11} - \frac{1}{c_{12}} (\varphi_{21} - \varphi_{12}) \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial \varphi_{11}} &= 0 \\
 J_2 \ddot{\varphi}_{21} + \frac{1}{c_{12}} (\varphi_{21} - \varphi_{12}) - \frac{1}{c_{23}} (\varphi_{21} - \varphi_{22}) \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial \varphi_{21}} &= 0 \\
 &\vdots \\
 J_n \ddot{\varphi}_{n1} + \frac{1}{c_{n-1,n}} (\varphi_{n,1} - \varphi_{n-1,2}) &= 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

Wobei J_i : mechanisches Trägheitsmoment

$c_{i,i+1}$: Drehsteifigkeit den Wellen

Mit der veränderlichen X_i und unter Beachtung der tatsächlichen Verformung $\varphi_{i,i+1} - \varphi_{i,2}$ der Torsionsfedern wird $\varphi_{i,i+1} - \varphi_{i,2} = X_i - \delta_i \sin 2\varphi_{i1}$

Ausgehend vom System gemäss Gleichung ergibt sich unter Berücksichtigung von

$$X_i = \varphi_{i,i+1} - \varphi_{i,2} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \tag{17}$$

ein lineares Gleichungssystem mit periodischen Koeffizienten, das in Matrixschreibweise die folgende Form besitzt [5]:

$$\ddot{\underline{X}} + \underline{A}\underline{X} + \underline{B}\underline{X} \cos 2\varphi + \underline{C} \sin 2\varphi + \underline{D} \sin 2\varphi \cos 2\varphi = \underline{0} \tag{18}$$

Wobei:

$$\underline{\ddot{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \\ \vdots \\ \ddot{X}_{n-1} \end{bmatrix} \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix} \quad \underline{X} \cos 2\varphi = \begin{bmatrix} X_1 \cos 2\varphi_1 \\ X_2 \cos 2\varphi_2 \\ X_3 \cos 2\varphi_3 \\ \vdots \\ X_{n-1} \cos 2\varphi_{n-1} \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\underline{\sin 2\varphi} = \begin{bmatrix} \sin 2\varphi_1 \\ \sin 2\varphi_2 \\ \sin 2\varphi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sin 2\varphi_{n-1} \end{bmatrix} \quad \underline{\sin 2\varphi \cos 2\varphi} = \begin{bmatrix} \sin 2\varphi_1 \cos 2\varphi_1 \\ \sin 2\varphi_2 \cos 2\varphi_2 \\ \sin 2\varphi_3 \cos 2\varphi_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sin 2\varphi_{n-1} \cos 2\varphi_{n-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_1} \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) & \frac{1}{r_1 J_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{r_2 J_1} & \frac{1}{r_2} \left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right) & \frac{1}{r_2 J_1} & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_3 J_1} & \frac{1}{r_3} \left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right) & \frac{1}{r_3 J_2} & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{r_{n-1} \cos 2\varphi_{n-1}} & \frac{1}{r_{n-1}} \left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{2\delta_1}{r_1 \omega_1} & \frac{2\delta_1}{r_2 \omega_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\delta_2}{r_2 \omega_2} & \frac{2\delta_2}{r_1 \omega_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\delta_3}{r_3 \omega_3} & \frac{2\delta_3}{r_2 \omega_3} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{2\delta_{n-1}}{r_{n-1} \omega_{n-1}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1 \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)}{\gamma_{12} J_1} & \frac{\delta_1}{\gamma_{12} J_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\delta_1}{\gamma_{12} J_2} & \frac{\delta_1 \left(\frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_3} \right)}{\gamma_{23} J_2} & \frac{\delta_1}{\gamma_{23} J_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta_1}{\gamma_{23} J_3} & \frac{\delta_1 \left(\frac{1}{J_3} + \frac{1}{J_4} \right)}{\gamma_{34} J_3} & \frac{\delta_1}{\gamma_{34} J_4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\delta_{a-2}}{\gamma_{a-2,a} J_{a-2}} & \frac{\delta_{a-2}}{\gamma_{a-2,a} \left(\frac{1}{J_{a-2}} + \frac{1}{J_a} \right)} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{2\delta_1^2}{\gamma_{12} J_1} & \frac{2\delta_1^2}{\gamma_{12} J_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\delta_1^2}{\gamma_{23} J_2} & \frac{2\delta_1^2}{\gamma_{23} J_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\delta_1^2}{\gamma_{34} J_3} & \frac{2\delta_1^2}{\gamma_{34} J_4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{2\delta_{a-1}^2}{\gamma_{a-1,a} J_{a-1}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

In Kenntnis der Bewegungsgleichungssystem einer kettenartigen Antriebskette können die Biege-, Torsions- und longitudinale dynamische Modelle der Antriebskette bestimmt werden.

In den weiteren Teilen der Artikelserie werde ich diese Modelle darlegen, und zum Schluß die Anwendung eines Simulationsprogramm – basierend auf diesen Modellen – im Falle einer konkreten Antriebskette vorlegen.

LITERATUR

- [1] Dr. Bosznay Ádám: Müszaki rezgésstan, Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1962.

- [2] Dr.Ludvig Győző: Gépek dinamikája., Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.
- [3] Molnár - Dr. Varga: Görgülőcsapágyazások tervezése, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977.
- [4] Doz. Dr. Ing.Florea Duditz: Kardangetricbe und ihre Anwendungen. VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1973.
- [5] Tiba: Kardánhajtások lengéstanai viszonyai, Doktori értekezés 1998.

A KARDÁNHAJTÁS MOZGÁSEGYENLETÉNEK MEGHATÁROZÁSA

A cikk a Debreceni Műszaki Közlemények 2003. évben elkezdett sorozat második része. Az első részben a dinamikai modellezés szükségességét indokoltam a gépészeti berendezések szilárdsági méretezése során.

A hajtáslánc nyugodt járásának feltétele, hogy az üzemi fordulatszámra ne lépjen fel rezonancia. Rezonancia akkor alakul ki, ha a gerjesztő frekvenciák egybeesnek a hajtáslánc valamelyik sajátfrekvenciájával. A sajátfrekvenciák meghatározásához el kell végezni a hajtáslánc dinamikai modellezését.

Ebben a cikkben egy általános hajtáslánc mozgásegyenletének felírásának módját ismertetem, melyek alapján a dinamikai modellek felírhatók. A cél tehát a hajtáslánc elemi láncszerű modelljének felírása, elemeinek helyettesítése tömegekkel, tehetetlenségi nyomatékkal, rugókkal. A cikksorozat további két része a dinamikai modelleket és a rájuk épülő szimulációs programot mutatja be.