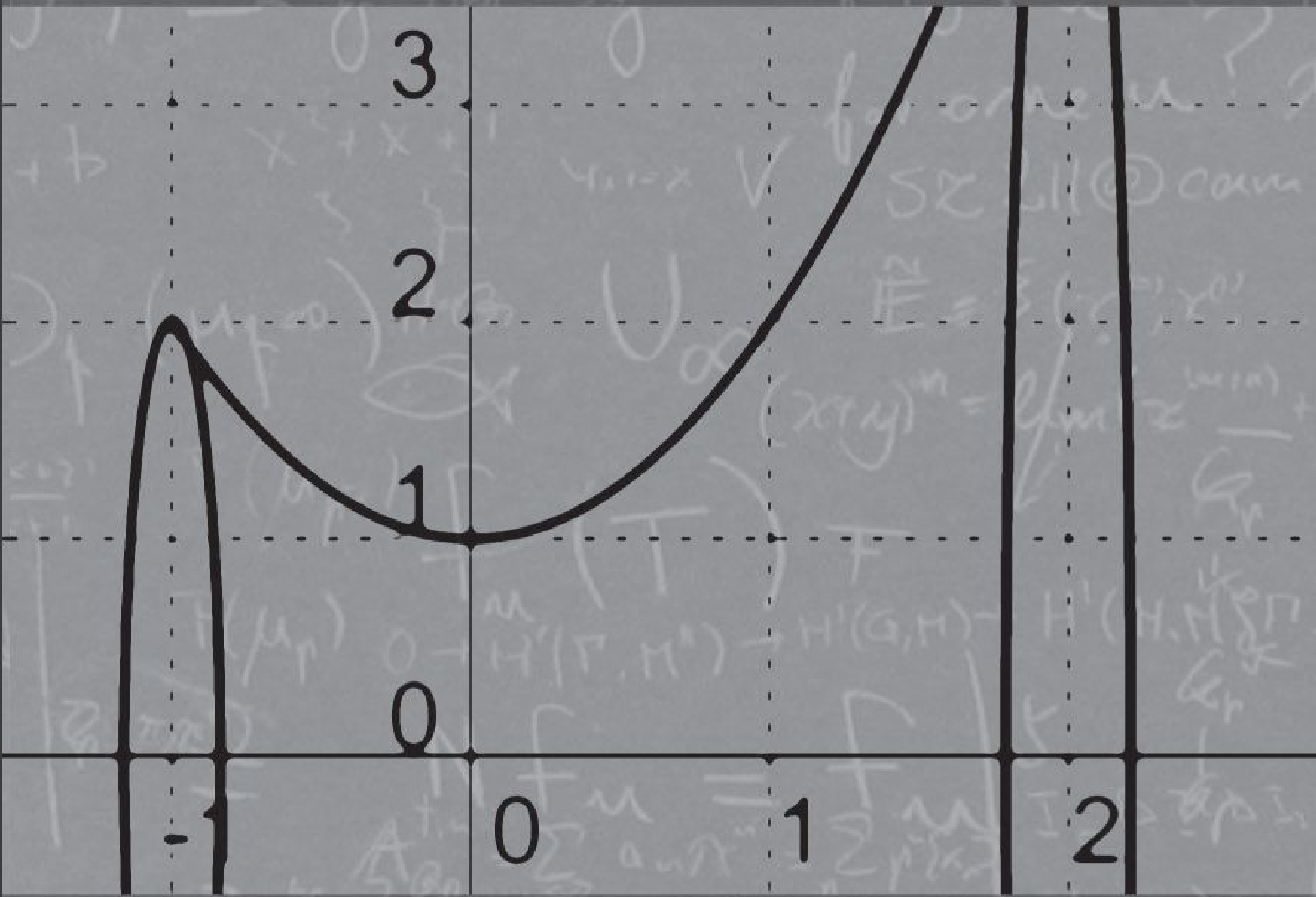
Dr. Kézi Csaba Gábor

Primitív függvény keresési módszerek és alkalmazásaik

feladatgyűjtemény



Debreceni Egyetem Műszaki Kar
Műszaki Alaptárgyi Tanszék

DEBRECENI EGYETEM
MŰSZAKI KAR
MŰSZAKI ALAPTÁRGYI TANSZÉK

Dr. Kézi Csaba Gábor

PRIMITÍV FÜGGVÉNY KERESÉSI MÓDSZEREK ÉS ALKALMAZÁSAIK FELADATGYŰJTEMÉNY

Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2019

1. A Riemann-integrál definíciója

1. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon [0;1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ függvényt! A $[0;1]$ intervallumot öt egyenlő részre osztjuk.

a) Határozzuk meg a beosztás finomságát!

b) Adjuk meg az f függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeget!

c) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményt!

d) Adjuk meg az f függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeget!

e) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményt!

f) Adjuk meg az f függvény megadott beosztásához tartozó oszcillációs összeget!

Megoldás:

a) A beosztás finomsága az osztópontok által keletkezett részintervallumok hosszának maximuma. Ha a $[0;1]$ intervallumot 5 egyenlő részre osztjuk fel, akkor minden keletkezett részintervallum hossza $\frac{1}{5} = 0,2$, így a beosztás finomsága is $0,2$.

b) A beosztás által keletkezett osztópontok halmaza:

$$D = \{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\},$$

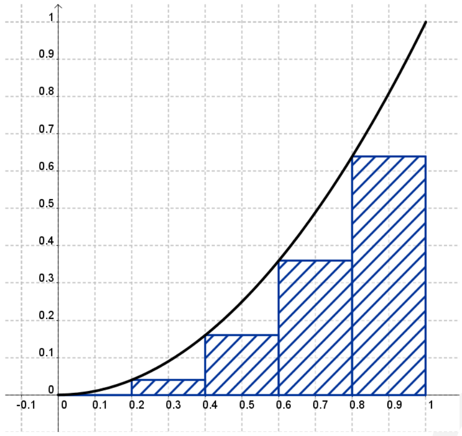
A beosztásnak megfelelő részintervallumok halmaza:

$$d = \big\{[0; 0,2]; [0,2; 0,4]; [0,4; 0,6]; [0,6; 0,8]; [0,8; 1]\big\}.$$

Az alsó integrálközelítő összeg:

$$\begin{aligned} s(f;d) &= 0 \cdot 0,2 + 0,2^2 \cdot 0,2 + 0,4^2 \cdot 0,2 + \\ &\quad + 0,6^2 \cdot 0,2 + 0,8^2 \cdot 0,2 = \\ &= 0,2 \cdot (0,04 + 0,16 + 0,36 + 0,64) = \\ &= 0,2 \cdot 1,2 = 0,24. \end{aligned}$$

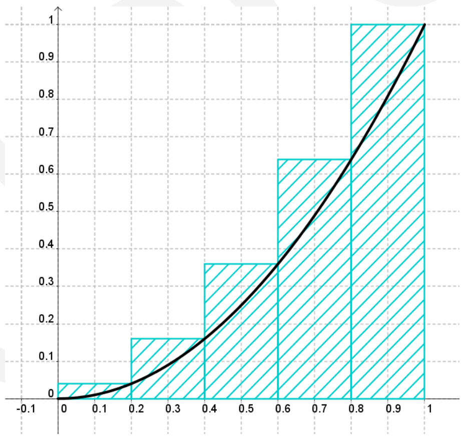
c) A függvény grafikonja és az alsó integrálközelítő összeg:



d) A felső integrálközelítő összeg:

$$S(f;d) = 0,2^2 \cdot 0,2 + 0,4^2 \cdot 0,2 + 0,6^2 \cdot 0,2 + 0,8^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,2 =$$
$$= 0,2 \cdot (0,04 + 0,16 + 0,36 + 0,64 + 1) = 0,2 \cdot 2,2 = 0,44.$$

e) A függvény grafikonja és a felső integrálközelítő összeg:



f) Az oszcillációs összeg:

$$\mathcal{O}(f;d) = S(f;d) - s(f;d) = 0,44 - 0,24 = 0,2.$$

2. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon [1;4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4}{x}$ függvényt! Az $[1;4]$ intervallumot három egyenlő részre osztjuk.

a) Határozzuk meg a beosztás finomságát!

b) Adjuk meg az f függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeget!

c) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményt!

d) Adjuk meg az f függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeget!

e) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményt!

f) Adjuk meg az f függvény d beosztásához tartozó oszcillációs összeget!

<u>Megoldás</u>:

a) A keletkezett részintervallumok hossza 1, így a beosztás finomsága 1.

b) A beosztás által keletkezett osztópontok halmaza:

$$D = \{1; 2; 3; 4\},$$

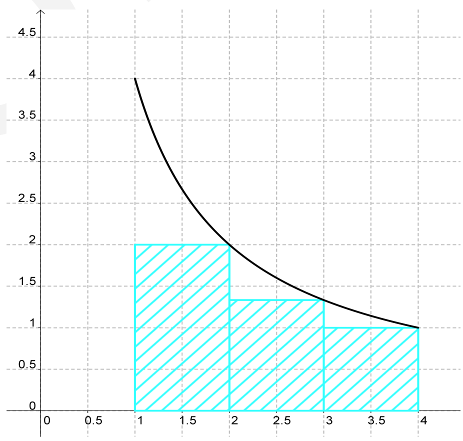
A beosztásnak megfelelő részintervallumok halmaza:

$$d = \big\{[1; 2]; [2; 3]; [3; 4]\big\}.$$

Az alsó integrálközelítő összeg:

$$s(f; d) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{4}{3} + 1 \cdot 1 = 2 + \frac{4}{3} + 1 = \frac{13}{3}.$$

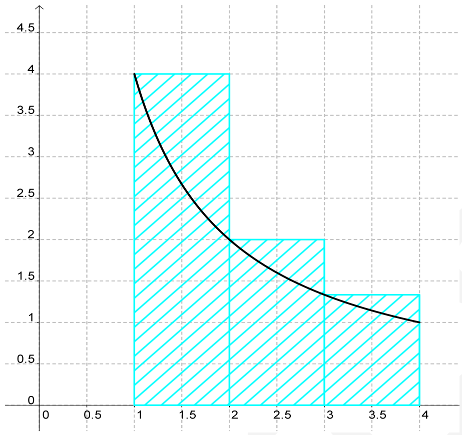
c) A függvény grafikonja és az alsó integrálközelítő összeg:



d) A felső integrálközelítő összeg:

$$S(f;d) = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{4}{3} = 4 + 2 + \frac{4}{3} = \frac{22}{3}.$$

e) A függvény grafikonja és a felső integrálközelítő összeg:



f) Az oszcillációs összeg:

$$\mathcal{O}(f;d) = S(f;d) - s(f;d) = \frac{22}{3} - \frac{13}{3} = 3.$$

3. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon [0;2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ függvényt! A $[0;2]$ intervallumot négy egyenlő részre osztjuk.

a) Határozzuk meg a beosztás finomságát!

b) Adjuk meg az f függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeget!

c) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményt!

d) Adjuk meg az f függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeget!

e) Vázoljuk fel az f függvény grafikonját és szemléltessük az előbbi eredményt!

f) Adjuk meg az f függvény megadott beosztásához tartozó oszcillációs összeget!

Megoldás:

a) Ha a $[0;2]$ intervallumot 4 egyenlő részre osztjuk fel, akkor a keletkezett részintervallumok hossza $\dfrac{2}{4} = 0,5$, így a beosztás finomsága $0,5$.

b) A beosztás által keletkezett osztópontok halmaza:

$$D = \{0; 0,5; 1; 1,5; 2\},$$

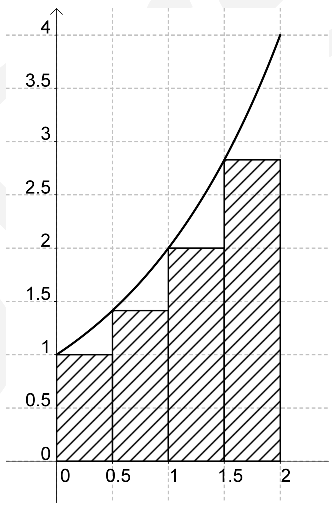
A beosztásnak megfelelő részintervallumok halmaza:

$$d = \big\{[0; 0,5]; [0,5; 1]; [1; 1,5]; [1,5; 2]\big\}.$$

Az alsó integrálközelítő összeg:

$$s(f;d) = 0,5 \cdot 2^0 + 0,5 \cdot 2^{0,5} + 0,5 \cdot 2^1 + 0,5 \cdot 2^{1,5} =$$
$$= 0,5 \cdot (1 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{8}) = 3,62.$$

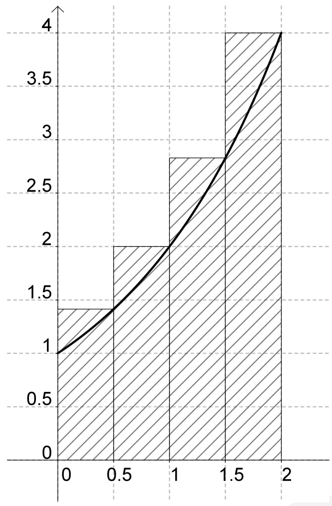
c) A függvény grafikonja és az alsó integrálközelítő összeg:



d) A felső integrálközelítő összeg:

$$S(f;d) = 0,5 \cdot 2^{0,5} + 0,5 \cdot 2^1 + 0,5 \cdot 2^{1,5} + 0,5 \cdot 2^2 =$$
$$= 0,5 \cdot (1 + \sqrt{2} + 4 + \sqrt{8} + 4) = 5,12.$$

e) A függvény grafikonja és a felső integrálközelítő összeg:



f) Az oszcillációs összeg:

$$\mathcal{O}(f;d) = S(f;d) - s(f;d) = 5,12 - 3,62 = 1,5.$$

4. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon [0;9] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt, valamint a $D = \{0;1;4;9\}$ osztópontok halmazát!

a) Határozzuk meg a beosztás finomságát!

b) Adjuk meg az f függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeget!

c) Adjuk meg az f függvény megadott beosztásához tartozó felső integrálközelítő összeget!

d) Adjuk meg az f függvény esetén a megadott beosztáshoz tartozó oszcillációs összeget!

Megoldás:

a) beosztásnak megfelelő részintervallumok halmaza:

$$d = \big\{[0;1];[1,4];[4;9]\big\}.$$

A beosztás finomsága a keletkezett részintervallumok hosszának maximuma, így jelen esetben 5.

b) Az alsó integrálközelítő összeg:

$$s(f;d) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13.$$

c) A felső integrálközelítő összeg:

$$S(f;d) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 22.$$

d) Az oszcillációs összeg:

$$\mathcal{O}(f;d) = S(f;d) - s(f;d) = 22 - 13 = 9.$$

5. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon [0;3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 4,25$ függvényt!

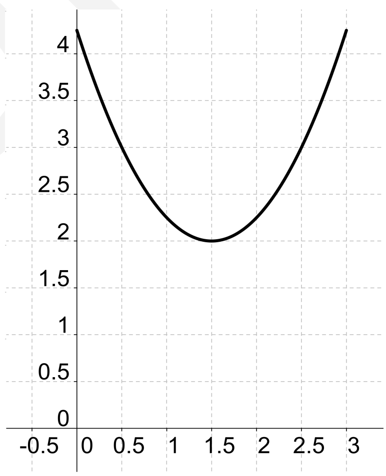
a) Alakítsuk teljes négyzetté az $f(x)$ függvényt!
b) Vázoljuk fel az $f(x)$ függvény grafikonját!
c) A $[0;3]$ intervallumot három egyenlő részre osztva adjuk meg a beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeget!
d) Szemléltessük az előbbi eredményt!
e) A $[0;3]$ intervallumot három egyenlő részre osztva adjuk meg a beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeget!
f) Szemléltessük az előbbi eredményt!
g) A $[0;3]$ intervallumot három egyenlő részre osztva adjuk meg a beosztáshoz tartozó oszcillációs összeget!

Megoldás:

a) Teljes négyzetté alakítva

$$f(x) = (x - 1,5)^2 - 2,25 + 4.25 = (x - 1,5)^2 + 2.$$

b) Az $f(x)$ függvény grafikonja:



c) Az alsó integrálközelítő összeg:

$$s(f;d) = f(1)\cdot 1 + f(1,5)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 = \\ = \big(f(1)+f(1,5)+f(2)\big)\cdot 1.$$

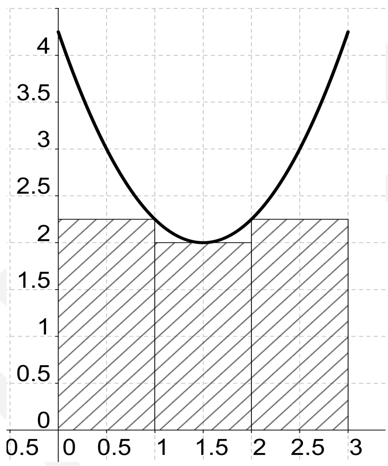
Mivel

$$f(1) = (1-1,5)^2+2 = 2,25$$
$$f(1,5) = (1,5-1,5)^2+2 = 2$$
$$f(2) = (2-1,5)^2+2 = 2,25,$$

ezért

$$s(f;d) = 2,25+2+2,25 = 6,5.$$

d) Az alsó integrálközelítő összeg szemléltetése:



e) A felső integrálközelítő összeg:

$$S(f;d) = f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 = \big(f(0)+f(1)+f(3)\big)\cdot 1.$$

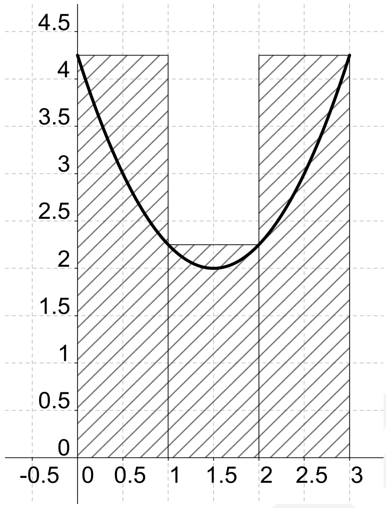
Mivel

$$f(0) = (0-1,5)^2+2 = 4,25$$
$$f(1) = (1-1,5)^2+2 = 2,25$$
$$f(3) = (3-1,5)^2+2 = 4,25,$$

ezért

$$S(f;d) = 4,25+2,25+4,25 = 10,75.$$

f) A felső integrálközelítő összeg szemléltetése:



g) Az oszcillációs összeg:

$$\mathcal{O}(f;d) = S(f;d) - s(f;d) = 10,75 - 6,5 = 4,25.$$

2. A Riemann integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei

6. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon [0;9] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt! Bizonyítsuk be, hogy az $f(x)$ függvény Riemann-integrálható a $[0;9]$ intervallumon! A bizonyításhoz azt a kritériumot használjuk, ami szerint a függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha a $[0;9]$ intervallumot n egyenlő részre osztva az oszcillációs összeg nullához tart, ha $n \to \infty$ esetén. Adjuk meg a Riemann-integrál értékét is!

Megoldás:

A beosztás által keletkezett osztópontok halmaza:

$$D = \left\{0; 9\cdot\frac{1}{n}; 9\cdot\frac{2}{n}; \ldots; 9\cdot\frac{n-1}{n}; 9\right\},$$

A beosztásnak megfelelő részintervallumok halmaza:

$$d = \left\{\left[0; 9\cdot\frac{1}{n}\right]; \left[9\cdot\frac{1}{n}; 9\cdot\frac{2}{n}\right]; \ldots; \left[9\cdot\frac{n-1}{n}; 9\right]\right\}.$$

Az alsó integrálközelítő összeg:

$$\begin{aligned} s_n(f;d) &= \frac{9}{n}\cdot 0 + \frac{9}{n}\cdot\sqrt{9\cdot\frac{1}{n}} + \frac{9}{n}\cdot\sqrt{9\cdot\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{9}{n}\cdot\sqrt{9\cdot\frac{n-1}{n}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{9}{n}\cdot 3\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}\right) = \\ &= \frac{27}{n\cdot\sqrt{n}}\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}\right). \end{aligned}$$

A felső integrálközelítő összeg:

$$\begin{aligned} S_n(f;d) &= \frac{9}{n}\cdot\sqrt{9\cdot\frac{1}{n}} + \frac{9}{n}\cdot\sqrt{9\cdot\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{9}{n}\cdot\sqrt{9\cdot\frac{n-1}{n}} + \frac{9}{n}\cdot\sqrt{9} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{9}{n}\cdot 3\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right) = \\ &= \frac{27}{n\cdot\sqrt{n}}\cdot\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right). \end{aligned}$$

Az oszcillációs összeg a felső és alsó integrálközelítő összeg különbsége, így

$$\mathcal{O}_n(f;d) = S_n(f;d) - s_n(f;d) = \frac{27}{n\cdot\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n} = \frac{27}{n}.$$

Ezt felhasználva

$$\lim_{n\to\infty} \frac{27}{n} = 0,$$

amivel igazoltuk az állítást.

7. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^2$ füügvény Riemann-integrálható a $[0;1]$ intervallumon! A bizonyításhoz használjuk azt a kritériumot, hogy egy függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha az alsó integrálközelítő összegek és a felső integrálközelítő összegek sorozatának határértéke megegyezik! Számoljuk ki az $\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$ értéket is!

Megoldás:

Első lépésben a $[0,1]$ intervallumot n egyenlő részre osztjuk. A keletkezett osztópontok halmaza

$$\mathcal{D} = \left\{0, \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \ldots; \frac{n-1}{n}; 1\right\}.$$

Az osztópontok által keletkezett részintervallumok

$$d = \left\{\left[0; \frac{1}{n}\right]; \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right]; \ldots; \left[\frac{n-1}{n}; 1\right]\right\}.$$

A beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeg

$$s_n(f;d) = \frac{1}{n} \cdot \left(0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2\right).$$

Felhasználva, hogy az első n természetes szám négyzetének összege

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

azt kapjuk, hogy az alsó integrálközelítő összeg

$$s_n(f;d) = \frac{1}{n^3} \cdot (0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}.$$

Ebből az alsó integrálközelítő összegek határértéke

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f;d) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6n^3}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n^2-n)\cdot(2n-1)}{6n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}\right) = \frac{1}{3}.$$

A beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeg

$$S_n(f;d) = \frac{1}{n}\cdot\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right).$$

Felhasználva, hogy az első n természetes szám négyzetének összege

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

azt kapjuk, hogy

$$S_n(f;d) = \frac{1}{n^3}(1^2+2^2\ldots+(n-1)^2+n^2) =$$
$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$

Ebből a felső integrálközelítő összegek határértéke

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;d) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^3}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n^2+n)\cdot(2n+1)}{6n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}\right) = \frac{1}{3}.$$

Mivel az alsó és felső integrálközelítő összegek határtértéke megegyezik, ezért a függvény Riemann integrálható, és az integrál értéke

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 1.$$

8. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvény a $[0;1]$ intervallumon integrálható! A bizonyításhoz az alsó integrálközelítő összeg és felső integrálközelítő összeg határértékeinek egyenlőségét használjuk! Számoljuk ki az $\int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ értéket!

Megoldás:

Első lépésben a $[0,1]$ intervallumot n egyenlő részre osztjuk. A keletkezett osztópontok halmaza

$$\mathcal{D} = \left\{0, \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \ldots; \frac{n-1}{n}; 1\right\}.$$

Az osztópontok által keletkezett részintervallumok

$$d = \left\{\left[0; \frac{1}{n}\right]; \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right]; \ldots; \left[\frac{n-1}{n}; 1\right]\right\}.$$

A beosztáshoz tartozó alsó integrálközelítő összeg

$$s_n(f;d) = \frac{1}{n} \cdot \left(\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\right).$$

Felhasználva, hogy

$$\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}$$

egy mértani sorozat első n tagjának az összege azt kapjuk, hogy az összeg

$$\frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

Tehát az alsó integrálközelítő összeg:

$$s_n(f;d) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot (\mathrm{e} - 1).$$

Felhaszálva, hogy a L'Hospital-szabály szerint

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 1$$

azt kapjuk, hogy az alsó integrálközelítő összeg határértéke

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot (\mathrm{e} - 1) = \mathrm{e} - 1.$$

A d beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeg

$$s_n(f;d) = \frac{1}{n} \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{n}{n}} \right).$$

Felhasználva, hogy

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} + \mathrm{e}$$

egy mértani sorozat első n tagjának az összege azt kapjuk, hogy az összeg

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

Tehát az felső integrálközelítő összeg:

$$s_n(f;d) = \frac{1}{n} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\mathrm{e} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot (\mathrm{e} - 1).$$

Felhaszálva, hogy a L'Hospital-szabály szerint

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = 1$$

azt kapjuk, hogy a felső integrálközelítő összeg határértéke

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot (\mathrm{e} - 1) = \mathrm{e} - 1.$$

Mivel az alsó és felső integrálközelítő összeg határértéke megegyezik, ezért a függvény Riemann integrálható, és az integrál értéke

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1.$$

9. **Feladat.** A Riemann-integrálhatóság valamelyik elegendő feltételét alkalmazva mutassuk meg, hogy az $f(x) = x^3 - 3x + 2$ függvény Riemann-integrálható a $[0; 10]$ intervallumon!

Megoldás:

Mivel az $f(x)$ függvény zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény, ezért Riemann-integrálható.

10. **Feladat.** A Riemann-integrálhatóság elegendő feltételeit alkalmazva mutassuk meg, hogy az $f(x) = \sin x$ függvény Riemann-integrálható a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon!

Megoldás:

Mivel az f függvény korlátos és monoton növekvő, ezért Riemann-integrálható.

Mivel az f függvény korlátos és folytonos, ezért Riemann-integrálható.

3. A Riemann-integrál tulajdonságai, Newton-Leibniz tétel

11. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int_2^2 x^3 + x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x$$

Riemann-integrál értékét!

Megoldás:

Mivel definíció szerint

$$\int_a^a f(x) \, \mathrm{d}x = 0,$$

ezért

$$\int_2^2 x^3 + x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \, \mathrm{d}x = 0.$$

12. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int_{-2}^2 \sin x \, \mathrm{d}x$$

Riemann-integrál értékét!

Megoldás:

Mivel az $f(x) = \sin x$ függvény páratlan és a $[-2; 2]$ az origóra szimmetrikus intervallum, ezért

$$\int_{-2}^2 \sin x \, \mathrm{d}x = 0.$$

13. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^5 \cdot \cos x$ függvény Riemann-integrálját a $[-4; 4]$ intervallumon!

Megoldás:

Mivel

$$f(-x) = (-x)^5 \cdot \cos(-x) = -x^5 \cdot \cos x,$$

ezért $f(-x) = -f(x)$, így az $f(x)$ függvény páratlan. A $[-4; 4]$ intervallum az origóra szimmetrikus, ezért

$$\int_{-4}^4 f(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

14. **Feladat.** Tegyük fel, hogy az f függvény páratlan, a g függvény páros. Legyen $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ és tegyük fel, hogy a h függvény értelmezve van a $[-1; 1]$ intervallumon. Számoljuk ki a $h(x)$ függvény Riemann-integrálját a $[-1; 1]$ intervallumon!

Megoldás:

Az f függvény páratlan, ezért $f(-x) = -f(x)$.

A g páros, ezért $f(-x) = f(x)$.

Mivel

$$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x) = -h(x)$$

ezért $h(x)$ páratlan. A $[-1; 1]$ intervallum az origóra szimmetrikus, ezért

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

15. **Feladat.** Ha f Riemann integrálható függvény a $[0; 6]$ intervallumon és

$$\int_{0}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = 10,$$

valamint

$$\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 7,$$

akkor mivel egyenlő $\int_{4}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x$?

Megoldás:

A Riemann-interál intervallum additivitási tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{4}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

így

$$\int_{4}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{6} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 10 - 7 = 3.$$

16. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \cos x$ függvény Riemann-integrálját a $[0; \pi]$ intervallumon a Newton-Leibniz tétel felhasználásával !

Megoldás:

Mivel az $f(x) = \cos x$ függvény egy primitív függvénye $F(x) = \sin x$, ezért

$$\int_0^\pi \cos x \,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0.$$

17. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = 2x$ függvény Riemann-integrálját a $[0; 4]$ intervallumon a Newton-Leibniz tétel felhasználásával!

Megoldás:

Mivel az $f(x) = 2x$ függvény egy primitív függvénye $F(x) = x^2$, ezért

$$\int_0^4 2x \,\mathrm{d}x = [x^2]_0^4 = 4^2 - 0^2 = 16.$$

18. **Feladat.** A Newton-Leibniz tétel és az integrálközelítő összeg felhasználásával adjunk becslést az első n természetes szám összegének kiszámolására! Az eredményt illusztráljuk úgy, hogy számoljuk ki az első 10, az első 100 és az első 1 000 természetes szám összegének pontos értékét és a kapott formulával becsült értékét!

Megoldás:

Tekintsük az $f(x) = x$ függvényt a $[0; 1]$ intervallumon. A függvény folytonos, így Riemann-integrálható. Az egyik primitív függvénye $F(x) = \frac{x^2}{2}$. A Newton-Leibniz tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Tekintsük a $[0; 1]$ intervallumnak azt a beosztását, amely n egyenlő részre osztja az intervallumot.

A keletkezett osztópontok halmaza

$$\mathcal{D} = \left\{0, \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \ldots; \frac{n-1}{n}; 1\right\}.$$

Az osztópontok által keletkezett részintervallumok

$$d = \left\{\left[0; \frac{1}{n}\right]; \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right]; \ldots; \left[\frac{n-1}{n}; 1\right]\right\}.$$

A beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeg

$$S(f; d) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n}{n}\right).$$

Mivel az f függvény integrálható, ezért a felső integrálközelítő összegek sorozata a Riemann-integrál értékéhez tart. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{1}{2},$$

így ha n tart végtelenhez, akkor

$$1+2+\ldots+n \to \frac{1}{2}n^2.$$

Tehát azt kaptuk, hogy nagy n számokra az első n természetes szám összege az $\frac{1}{2}n^2$ formulával becsülhető

$$1+2+\ldots+n \sim \frac{1}{2}\cdot n^2.$$

Az alábbi táblázat mutatja a közelítés „jóságát”.

n értéke	az első n természetes szám összege	becslés a kapott formulával	relatív hiba
10	45	50	$5/50 = 0,1$
100	4 950	5 000	$50/5\,000 = 0,01$
1 000	499 500	500 000	$500/500\,000 = 0,001$

19. **Feladat.** A Newton-Leibniz tétel és az integrálközelítő összeg felhasználásával adjunk becslést az első n természetes szám négyzetösszegének kiszámolására! Az eredményt illusztráljuk úgy, hogy számoljuk ki az első 10, az első 100 és az első 1 000 természetes szám négyzetösszegének pontos értékét és a kapott formulával becsült értékét!

Megoldás:

Tekintsük az $f(x) = x^2$ függvényt a $[0;1]$ intervallumon. A függvény folytonos, így Riemann-integrálható. Az egyik primitív függvénye $F(x) = \frac{x^3}{3}$. A Newton-Leibniz tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Tekintsük a $[0;1]$ intervallumnak azt a beosztását, amely n egyenlő részre osztja az intervallumot.

A keletkezett osztópontok halmaza

$$\mathcal{D} = \left\{0, \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \ldots; \frac{n-1}{n}; 1\right\}.$$

Az osztópontok által keletkezett részintervallumok

$$d = \left\{\left[0; \frac{1}{n}\right]; \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right]; \ldots; \left[\frac{n-1}{n}; 1\right]\right\}.$$

A beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeg

$$S(f;d) = \frac{1}{n} \cdot \left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right).$$

Mivel az f függvény integrálható, ezért a felső integrálközelítő összegek sorozata a Riemann-integrál értékéhez tart. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3},$$

így ha n tart végtelenhez, akkor

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \to \frac{1}{3} \cdot n^3.$$

Tehát azt kaptuk, hogy nagy n értékekre az első n természetes szám négyzetösszege az $\frac{1}{3}n^3$ formulával becsülhető

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 \sim \frac{1}{3} \cdot n^3.$$

Az alábbi táblázat mutatja a közelítés „jóságát”.

n értéke	az első n természetes szám összege	becslés a kapott formulával	relatív hiba
10	385	333	$0,135$
100	338 350	333 333	$0,015$
1 000	333 833 500	333 333 333	$0,0015$

20. **Feladat.** A Newton-Leibniz tétel és az integrálközelítő összeg felhasználásával adjunk becslést az első n természetes szám négyzetgyöke összegének kiszámolására! Az eredményt illusztráljuk úgy, hogy számoljuk ki az első 10, az első 100 és az első 1 000 természetes szám négyzetösszegének pontos értékét és a kapott formulával becsült értékét!

Megoldás:

Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt a $[0; 1]$ intervallumon. A függvény folytonos, így Riemann-integrálható. Az egyik primitív függvénye $F(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$. A Newton-Leibniz tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}.$$

Tekintsük a $[0; 1]$ intervallumnak azt a beosztását, amely n egyenlő részre osztja az intervallumot.

A keletkezett osztópontok halmaza

$$\mathcal{D} = \left\{0, \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \ldots; \frac{n-1}{n}; 1\right\}.$$

Az osztópontok által keletkezett részintervallumok

$$d = \left\{\left[0; \frac{1}{n}\right]; \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right]; \ldots; \left[\frac{n-1}{n}; 1\right]\right\}.$$

A beosztáshoz tartozó felső integrálközelítő összeg

$$S(f; d) = \frac{1}{n} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right).$$

Mivel az f függvény integrálható, ezért a felső integrálközelítő összegek sorozata a Riemann-integrál értékéhez tart. Tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}}{n \cdot \sqrt{n}} = \frac{2}{3},$$

így ha n tart végtelenhez, akkor

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} \to \frac{2}{3} \cdot n \cdot \sqrt{n}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy nagy n számokra az első n természetes szám négyzetgyökének összege a $\frac{2}{3} \cdot n \cdot \sqrt{n}$ formulával becsülhető:

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} \sim \frac{2}{3} \cdot n \cdot \sqrt{n}.$$

Az alábbi táblázat mutatja a közelítés „jóságát”.

n értéke	az első n természetes szám összege	becslés a kapott formulával	relatív hiba
10	$22,47$	$21,08$	$0,062$
100	$671,46$	$666,67$	$0,0071$
$1\,000$	$21\,097$	$21\,082$	$0,00071$

4. Alapintegrálok

21. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = 3x^2 + 6x + 9$$

függvénynek egy primitív függvénye az

$$F(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 10$$

függvény! Adjuk meg az $f(x)$ függvény összes primitív függvényét!

Megoldás:

Az F primitív függvénye f-nek, ezért $F'(x) = f(x)$. Mivel

$$F'(x) = 3x^2 + 6x + 9 = f(x),$$

ezért F egy primitív függvénye az f függvénynek.

Az f függvény összes primitív függvénye:

$$G(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ konstans.

22. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = x \cdot \cos x$$

függvénynek egy primitív függvénye az

$$F(x) = x \cdot \sin x + \cos x$$

függvény! Adjuk meg az f függvény összes primitív függvényét!

Megoldás:

Mivel

$$F'(x) = \sin x + x \cdot \cos x - \sin x = x \cdot \cos x = f(x),$$

ezért F egy primitív függvénye az f függvénynek.

Az f függvény összes primitív függvénye:

$$G(x) = x \cdot \sin x + \cos x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ konstans.

23. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int 2x + 2\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int x^2 + 5x - 6\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{x^4 + x^3}{x^4}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int 2^x + 5^x\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{x - 1}\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x}\,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int 2x + 2\,\mathrm{d}x = \int 2x\,\mathrm{d}x + \int 2\,\mathrm{d}x = x^2 + 2x + c.$$

b) Az integrál additív és homogén tulajdonságát használva

$$\int x^2 + 5x - 6\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x + 5 \cdot \int x\,\mathrm{d}x - \int 6\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} - 6x + c$$

adódik.

c) Felhasználva az

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

azonosságot azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int 2 \cdot x^{-3}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{x^2} + c.$$

d) Felhasználva a hatványozás azonosságait, a $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ azonosságot, továbbá az integrál additív és homogén tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^2+x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+x}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{x^5} + \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3} + c.$$

e) A hatványozás azonosságainak alkalmazásával és az integrál additív tulajdonságának felhasználásával

$$\int \frac{x^4+x^3}{x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^4}{x^4} + \frac{x^3}{x^4}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int 1 + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x + \ln|x| + c.$$

adódik.

f) Az integrál additív tulajdonsága miatt azt kapjuk, hogy

$$\int 2^x + 5^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5^x}{\ln 5} + c.$$

g) A számlálóhoz 1-et hozzáadva és kivonva, majd az integrál additív tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= x - \operatorname{arctg} x + c.$$

h) Mivel $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, ezért

$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c.$$

i) Felhasználva az

$$x^2 - 1 = (x-1)\cdot(x+1)$$

azonosságot

$$\int \frac{x^2-1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}\,\mathrm{d}x = \int x+1\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x + c$$

adódik.

j) A törtet két tört összegére bontva, majd az integrál additív tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x} + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int 1 + \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x + \ln|x| + c.$$

k) Felhasználva, hogy

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

és

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

továbbá az integrál additivitása miatt

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int x^{-\frac{5}{3}} + x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\cdot x^{-\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + c =$$
$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c.$$

adódik.

A fentiekben $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

24. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\, x\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int 2\cdot\cos x + 3\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \mathrm{tg}^2\, x + 1\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x - 2\cdot\mathrm{ctg}\, x + c.$$

b) Felhasználva, hogy $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$, továbbá az integrál additív tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\int \mathrm{tg}^2\, x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = $$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x - x + c.$$

c) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva

$$\int 2\cdot\cos x + 3\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = 2\cdot\sin x - 3\cdot\cos x + c$$

adódik.

d) Felhasználva, hogy $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{(\cos x - \sin x)\cdot(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \cos x - \sin x\,\mathrm{d}x = \sin x + \cos x + c.$$

e) Felhasználva, hogy $\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, majd a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ azonosságot alkalmazva

$$\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} - 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}x - x + c$$

adódik.

f) Felhasználva, hogy $\mathrm{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, majd a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ azonosságot alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{1}{\sin^2 x} - 1\,\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}x - x + c.$$

g) Felhasználva, hogy $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int 2\sin x\,\mathrm{d}x = \\ = -2\cos x + c.$$

h) Felhasználva, hogy $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\sin x \cdot \cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int 2\cos x\,\mathrm{d}x = \\ = 2\sin x + c.$$

i) Felhasználva, hogy $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, majd a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\int \mathrm{tg}^2\, x + 1\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \\ = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}x + c.$$

A fentiekben $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

25. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int 2^x + 5^x\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int 4x^3 + \cos x + \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{2^{2x} - 4}{2^x - 2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \left(2^x + 3\right)^2\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) Az integrál additív tulajdonsága miatt

$$\int 2^x + 5^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5^x}{\ln 5} + c.$$

b) Az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int 4x^3 + \cos x + \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^4 + \sin x + \mathrm{e}^x + c.$$

c) Mivel

$$2^{2x} - 4 = (2^x)^2 - 2^2 = (2^x - 2) \cdot (2^x + 2),$$

ezért

$$\int \frac{2^{2x}-4}{2^x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(2^x-2)\cdot(2^x+2)}{2^x-2}\,\mathrm{d}x = \int 2^x+2\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2^x}{\ln 2} + 2x + c.$$

d) Mivel

$$\left(2^x+3\right)^2 = 2^{2x} + 6\cdot 2^x + 9 = 4^x + 6\cdot 2^x + 9,$$

ezért

$$\int \left(2^x+3\right)^2 \mathrm{d}x = \int 4^x + 6\cdot 2^x + 9\,\mathrm{d}x = \frac{4^x}{\ln 4} + 6\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + 9x.$$

A fentiekben $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

26. **Feladat.** Adjuk meg az

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

függvény azon F primitív függvényét, melyre $F(2) = 8$ teljesül! Ábrázoljuk a kapott függvényt!

Megoldás:

Mivel

$$x^2 - 4 = (x-2)\cdot(x+2),$$

ezért

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2} = x+2,$$

így

$$\int \frac{x^2-4}{x-2}\,\mathrm{d}x = \int x+2\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 2x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Tehát az f primitív függvényei:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + c.$$

Mivel $F(2) = 8$, ezért

$$8 = \frac{2^2}{2} + 2\cdot 2 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 2.$$

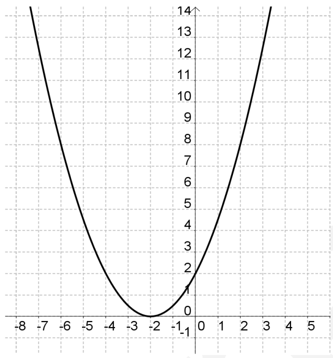
Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + 2.$$

Mivel

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{2} \cdot (x + 2)^2,$$

a függvény grafikonja:



27. **Feladat.** Adjuk meg az

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$$

függvény azon F primitív függvényét, melyre $F(2) = 8$ teljesül! Határozzuk meg a keresett függvény szélsőértékének helyét!

Megoldás:

Mivel

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2,$$

ezért

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)^2}{x - 3} = x - 3,$$

így

$$\int \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} \, \mathrm{d}x = \int x - 3 \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - 3x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Tehát az f primitív függvényei:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + c.$$

Mivel $F(0) = 6$, ezért

$$6 = \frac{0^2}{2} + 0 \cdot 2 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 6.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 6.$$

Mivel

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 6x + 12) = \frac{1}{2} \cdot \big[(x-3)^2 + 3\big] = \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 + 1,5,$$

így az F minimum helye $x = 3$, minimum értéke $F(3) = 1,5$.

28. **Feladat.** Adjuk meg az

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 4}{e^x - 2}$$

függvény azon F primitív függvényét, melyre $F(0) = 4$ teljesül!

Megoldás:

Mivel

$$e^{2x} - 4 = \big(e^x\big)^2 - 2^2 = \big(e^x - 2\big) \cdot \big(e^x + 2\big),$$

ezért

$$e^{2x} - 4 = \frac{\big(e^x - 2\big) \cdot \big(e^x + 2\big)}{e^x - 2} = e^x + 2,$$

így

$$\int \frac{e^{2x} - 4}{e^x - 2} \, dx = \int e^x + 2 \, dx = e^x + 2x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Tehát az f primitív függvényei:

$$F(x) = e^x + 2x + c.$$

Mivel $F(0) = 4$, ezért

$$4 = e^0 + 2 \cdot 0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 3.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = e^x + 2x + 3.$$

29. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$$

függvény azon F primitív függvényét, amelynek grafikonja áthalad a $P = (1;4)$ ponton!

Megoldás:

Mivel

$$f(x) = 4 \cdot x^{-1} + 4 \cdot x^{-2},$$

ezért

$$\int \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int 4 \cdot x^{-1} + 4 \cdot x^{-2}\,\mathrm{d}x = 4 \cdot \ln|x| + 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + c =$$

$$= 4 \cdot \ln|x| - \frac{4}{x^2} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Tehát az f primitív függvényei:

$$F(x) = 4 \cdot \ln|x| - \frac{4}{x^2} + c.$$

Mivel a függvény grafikonja áthalad a $P = (1;4)$ ponton, ezért $F(1) = 4$, így

$$4 = 4 \cdot \ln 1 - \frac{4}{1^2} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 8.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = 4 \cdot \ln|x| - \frac{4}{x^2} + 8.$$

30. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x}$$

függvény azon F primitív függvényét, melyre teljesül, hogy

$$F(1) = 3.$$

Megoldás:

Az algebrai átalakítások és a határozatlan integrál tulajdonságai alapján:

$$F(x) = \int \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^{-2} + \frac{3}{x}\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 3 \cdot \ln|x| + c = -\frac{3}{x} + 3 \cdot \ln|x| + c.$$

Mivel $F(1) = 3$, ezért

$$-\frac{3}{1} + 3 \cdot \ln|1| + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = 3,$$

így a keresett függvény:

$$F(x) = -\frac{3}{x} + 3 \cdot \ln|x| + 3.$$

31. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = (\sqrt{x} + 2)^2$$

függvény azon F primitív függvényét, melyre teljesül, hogy

$$F(4) = \frac{1}{3}.$$

Megoldás:

Felhasználva, hogy

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

azt kapjuk, hogy

$$(\sqrt{x} + 2)^2 = x + 4 \cdot \sqrt{x} + 4.$$

Az algebrai átalakítások és a határozatlan integrál tulajdonságai alapján:

$$F(x) = \int x + 4 \cdot \sqrt{x} + 4 \, \mathrm{d}x = \int x + 4 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 4 \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4x + c = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{3} \cdot \sqrt{x^3} + 4x + c.$$

Mivel $F(4) = \frac{1}{3}$, ezért

$$8 + \frac{8}{3} \cdot 8 + 16 + c = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad c = -45,$$

így a keresett függvény:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{8}{3} \cdot \sqrt{x^3} + 4x - 45.$$

32. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = 100^{\lg x}$$

függvény azon F primitív függvényét, melyre teljesül, hogy

$$F(2) = 1.$$

Megoldás:

Mivel

$$f(x) = 100^{\lg x} = (10^2)^{\lg x} = 10^{2\lg x} = 10^{\lg x^2} = x^2,$$

ezért

$$F(x) = \int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c.$$

Felhasználva, hogy $F(2) = 1$ azt kapjuk, hogy

$$\frac{8}{3} + c = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{5}{3}.$$

Tehát a keresett függvény

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}.$$

33. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = (x^2 + 3x - 1)^2$$

függvény azon F primitív függvényét, melyre teljesül, hogy

$$F(0) = 5$$

teljesül.

Megoldás:

Mivel

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

ezért

$$f(x) = x^4 + 9x^2 + 1 + 6x^3 - 2x^2 - 6x = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1,$$

ezért

$$F(x) = \int x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1 \, \mathrm{d}x = \frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} + \frac{7x^3}{3} - 3x^2 + x + c.$$

Felhasználva, hogy $F(0) = 5$ azt kapjuk, hogy

$$0 + c = 5 \qquad \Rightarrow \qquad c = 5.$$

Tehát a keresett függvény

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} + \frac{7x^3}{3} - 3x^2 + x + 5.$$

34. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \dfrac{x+6}{\sqrt{x}}$ függvényt és legyen F az f azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = 0$ teljesül.

a) Határozzuk meg az F függvény leképezési szabályát!
b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!
c) Adjuk meg az F függvény zérushelyét!
d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az F függvényt!
e) Adjuk meg az(oka)t az intervallumo(ka)t, amely(ek)en az F függvény konvex, illetve az(oka)t, amely(ek)en konkáv! Határozzuk meg az inflexiós pontot, ha létezik!
f) Vázoljuk fel az F függvény grafikonját!
g) Injektív-e az F függvény?
h) Határozzuk meg az F függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Mivel

$$F(x) = \int \frac{x+6}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}} + 6 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 6 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + 12 \cdot \sqrt{x} + c$$

és $F(0) = 0 \Rightarrow c = 0$, ezért

$$F(x) = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + 12 \cdot \sqrt{x}.$$

b) A $\sqrt{x}$ függvény miatt $x \geq 0$ kell, hogy teljesüljön, ezért

$$\mathcal{D}_F = [0; \infty[.$$

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldása adja, tehát az

$$\sqrt{x} \cdot \left(\frac{2}{3}x + 12\right) = 0$$

egyenlet megoldása, amiből azt kapjuk, hogy $x = 0$ vagy $\frac{2}{3}x + 12 = 0$, amiből $x = -18$, ami nem lehetséges az értelmezési tartomány miatt. Tehát a függvény egyetlen zérushelye $x = 0$.

d) Mivel $F'(x) = f(x)$, ezért az

$$\frac{x+6}{\sqrt{x}} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, amiből azt kapjuk, hogy $x = -6$, ami nem eleme az értelmezési tartománynak, így az $F'(x)$ függvénynek nincs zérushelye, tehát az F függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

Mivel $F'(x) \geq 0$ minden $x \geq 0$ esetén, ezért F monoton növekvő.

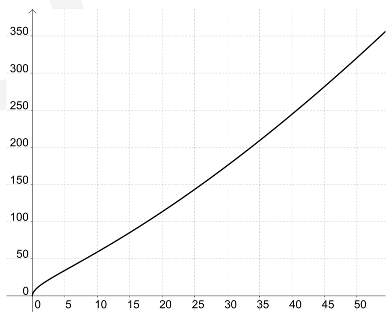
e) Mivel

$$F''(x) = \frac{\sqrt{x} - (x+6) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x+6}{\sqrt{x}}}{x} = \\ = \frac{2x - x - 6}{2x \cdot \sqrt{x}} = \frac{x-6}{2x \cdot \sqrt{x}},$$

ezért az $F''(x) = 0$ egyenlet megoldása $x = 6$. A második derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

x	$[0;6[$	6	$]6;\infty[$
$F''(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex
$F(x)$		$39,19$	

f) Az F függvény grafikonja:



g) Injektív, mert különböző elemekhez különböző elemeket rendel.

h) Az F függvény értékkészlete $[0;\infty[$.

35. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}$$

függvény határozatlan integrálját!

Megoldás:

Mivel

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

ezért

$$\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

36. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = 4x^3 - 12x^2$ függvényt és legyen F az f azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = 0$ teljesül.

a) Határozzuk meg az F függvény leképezési szabályát!
b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!
c) Adjuk meg az F függvény zérushelyét!
d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az F függvényt!
e) Adjuk meg az(oka)t az intervallumo(ka)t, amely(ek)en az F függvény konvex, illetve az(oka)t, amely(ek)en konkáv! Határozzuk meg az inflexiós pontot, ha létezik!
f) Vázoljuk fel az F függvény grafikonját!
g) Injektív-e az F függvény?
h) Határozzuk meg az F függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Mivel

$$F(x) = \int 4x^3 - 12x^2\,\mathrm{d}x = x^4 - 4x^3 + c$$

és $F(0) = 0 \Rightarrow c = 0$, ezért

$$F(x) = x^4 - 4x^3.$$

b) Az F függvény értelmezési tartománya

$$\mathcal{D}_F =]-\infty;\infty[.$$

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldása adja, tehát az

$$x^4 - 4x^3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^3 \cdot (x-4) = 0$$

egyenlet megoldása, amiből azt kapjuk, hogy $x = 0$, illetve $x = 4$.

d) Mivel $F'(x) = f(x)$, ezért a

$$4x^3 - 12x^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4x^3 \cdot (x-3) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, amiből azt kapjuk, hogy $x = 0$, illetve $x = 3$. Az első derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;3[$	3	$]3;\infty[$
$F'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	stac. pont	$\searrow$	lok. minimum	$\nearrow$
$F(x)$		0		-27	

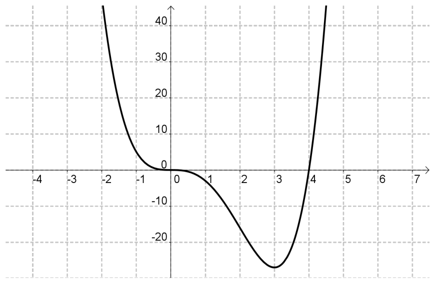
e) Mivel

$$F''(x) = 12x^2 - 24x = 12x \cdot (x-2),$$

ezért az $F''(x) = 0$ egyenlet megoldása $x = 0$, illetve $x = 2$. A második derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;2[$	2	$]2;\infty[$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	konvex	infl. pont	konkáv	infl. pont	konvex
$F(x)$		0		-16	

f) Az F függvény grafikonja:



g) Nem injektív, mert például a 0 és a 4 helyen megegyezik a függvényérték.

h) Az F függvény értékkészlete $[-27; \infty[$.

5. Az $f(ax+b)$ alakú függvények integrálása

37. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \cos(2x+3)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \sin(\pi x - e)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(5x-2)}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(3x+6)}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int (3x+1)^{20}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int (1-4x)^3\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-2x}}\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) Mivel $(\sin x)' = \cos x$, ezért

$$\int \cos(2x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2x+3)}{2} + c.$$

b) Mivel $(\cos x)' = -\sin x$, ezért

$$\int \sin(\pi x - e)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(\pi x - e)}{\pi} + c.$$

c) Mivel $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, ezért

$$\int \frac{1}{\cos^2(5x-2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{tg}\,(5x-2)}{5} + c.$$

d) Mivel $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, ezért

$$\int \frac{1}{\sin^2(3x+6)}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{ctg}\,(3x+6)}{3} + c.$$

e) Mivel $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, ezért

$$\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + c.$$

f) Mivel
$$\int x^{20}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{21}}{21} + c,$$
ezért
$$\int (3x+1)^{20}\,\mathrm{d}x = \frac{(3x+1)^{21}}{21\cdot 3} + c = \frac{(3x+1)^{21}}{63} + c.$$

g) Mivel
$$\int x^{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{4}}{4} + c,$$
ezért
$$\int (1-4x)^{3}\,\mathrm{d}x = \frac{(1-4x)^{4}}{4\cdot(-4)} = -\frac{(1-4x)^{4}}{16} + c.$$

h) Mivel
$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c,$$
ezért
$$\int \frac{1}{\sqrt{5-2x}}\,\mathrm{d}x = \int (5-2x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{(5-2x)^{\frac{1}{2}}}{-2\cdot\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{5-2x} + c.$$

A fentiekben $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

38. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$ függvény azon primitív függvényét, amelynek grafikonja áthalad $P = (0;2)$ ponton!

Megoldás:

Mivel
$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + \sin 2x,$$
ezért
$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 + \sin 2x\,\mathrm{d}x = x - \frac{\cos 2x}{2} + c.$$

Mivel azt a primitív függvényt keressük, amelynek grafikonjára illeszkedik a P pont, ezért $F(0) = 2$, így
$$2 = 0 - \frac{\cos 0}{2} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{5}{2}.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{5}{2}.$$

39. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = \left(\mathrm{e}^x + 2\right)^2$ függvény azon primitív függvényét, amelynek grafikonja áthalad $P = (0; 1)$ ponton!

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel

$$\left(\mathrm{e}^x + 2\right)^2 = \mathrm{e}^{2x} + 4 \cdot \mathrm{e}^x + 4,$$

ezért

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x} + 4 \cdot \mathrm{e}^x + 4\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + 4 \cdot \mathrm{e}^x + c.$$

Mivel azt a primitív függvényt keressük, amelynek grafikonjára illeszkedik a P pont, ezért $F(0) = 1$, így

$$1 = \frac{1}{2} + 4 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{7}{2}.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + 4 \cdot \mathrm{e}^x + 4x - \frac{7}{2}.$$

40. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = \left(\mathrm{e}^x + 4\right)^3$ függvény azon primitív függvényét, amelynek grafikonja áthalad $P = (0; 126)$ ponton!

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel

$$\left(\mathrm{e}^x + 4\right)^3 = \mathrm{e}^{3x} + 12 \cdot \mathrm{e}^{2x} + 48 \cdot \mathrm{e}^x + 64,$$

ezért

$$\begin{aligned} F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^{3x} + 12 \cdot \mathrm{e}^{2x} + 48 \cdot \mathrm{e}^x + 64\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} + 12 \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + 48 \cdot \mathrm{e}^x + 64x + c = \\ &= \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} + 6 \cdot \mathrm{e}^{2x} + 48 \cdot \mathrm{e}^x + 64x + c. \end{aligned}$$

Mivel azt a primitív függvényt keressük, amelynek grafikonjára illeszkedik a P pont, ezért $F(0) = 126$, így

$$126 = 1 + 12 + 48 + 64 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 1.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} + 6 \cdot \mathrm{e}^{2x} + 48 \cdot \mathrm{e}^{x} + 64x + 1.$$

41. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = \sqrt{4+2x}$ függvény azon primitív függvényét, amelynek grafikonja áthalad $P = (6; 25)$ ponton!

Megoldás:

Mivel

$$\sqrt{4+2x} = (4+2x)^{\frac{1}{2}},$$

és

$$\int x^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$$

ezért

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{(4+2x)^3}}{2} + c = \frac{\sqrt{(4+2x)^3}}{3} + c.$$

Mivel azt a primitív függvényt keressük, amelynek grafikonjára illeszkedik a P pont, ezért $F(6) = 25$, így

$$25 = \frac{(4+2\cdot 6)^3}{3} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{11}{3}.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = \frac{\sqrt{(4+2x)^3}}{3} + \frac{11}{3}.$$

42. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = \cos 2x$ függvény azon $F(x)$ primitív függvényét, amelyre $F(0) = 1$ teljesül! Függvénytranszformációs lépések segítségével ábrázoljuk a primitív függvényt!

Megoldás:

Mivel

$$F(x) = \frac{\sin 2x}{2} + c,$$

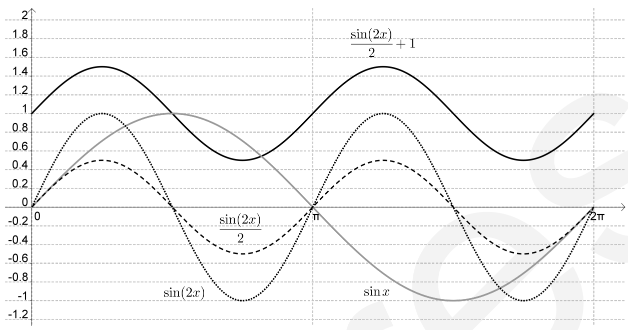
ahol $c \in \mathbb{R}$ és $F(0) = 1$, ezért

$$1 = F(0) = \frac{\sin 0}{2} + c = c,$$

így $c = 1$, tehát a keresett primitív függvény

$$F(x) = \frac{\sin 2x}{2} + 1.$$

A függvény grafikonjának ábrázolása függvénytranszformációs lépésekkel:



43. **Feladat.** Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{3}{25 + 16x^2}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás:

Az integrált visszavezetjük az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény integráljára:

$$\int \frac{3}{25 + 16x^2}\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \int \frac{1}{25 + 16x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{25} \cdot \int \frac{1}{1 + \frac{16}{25}x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3}{25} \cdot \int \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{5}x\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{25} \cdot \frac{\operatorname{arctg} \frac{4}{5}x}{\frac{4}{5}} + c =$$
$$\frac{3}{25} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}x\right) \cdot \frac{5}{4} + c = \frac{3}{20} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}x\right) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

44. **Feladat.** Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{36 - 16x^2}}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás:

Az integrált visszavezetjük az $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvény integráljára:

$$\int \frac{2}{\sqrt{36-16x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int \frac{1}{\sqrt{36-16x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{6}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{36}x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{6}x\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right)}{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right) + c,$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

45. **Feladat.** Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{3}{7+8x^2}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás:

Az integrált visszavezetjük az $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ függvény integráljára:

$$\int \frac{3}{7+8x^2}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\int \frac{1}{7+8x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{7}\cdot\int \frac{1}{1+\frac{8}{7}x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3}{7}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{8}{7}}x\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{7}\cdot\frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{8}{7}}\,x\right)}{\sqrt{\frac{8}{7}}} + c =$$
$$= \frac{3}{7}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{8}{7}}\,x\right)\cdot\sqrt{\frac{7}{8}} + c = \frac{3}{\sqrt{56}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{8}{7}}\,x\right) + c,$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

46. **Feladat.** Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás:

Az integrált visszavezetjük az $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ függvény integráljára:

$$\int \frac{5}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x = 5\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,\mathrm{d}x = 5\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 5\cdot\frac{\arcsin(2x)}{2} + c = \frac{5}{2}\cdot\arcsin(2x) + c$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

47. **Feladat.** Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$ integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Az integrált visszavezetjük az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény integráljára. Első lépésben teljes négyzetté alakítjuk az x^2+2x+2 kifejezést:

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1.$$

Ezt felhasználva

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+(x+1)^2}\,\mathrm{d}x=\operatorname{arctg}(x+1)+c,$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

48. **Feladat.** Határozzuk meg az $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+6}\,\mathrm{d}x$ integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Az integrált visszavezetjük az $\frac{1}{1+x^2}$ függvény integráljára. Első lépésben teljes négyzetté alakítjuk az x^2+4x+6 kifejezést:

$$x^2+4x+6=(x+2)^2+2.$$

Ezt felhasználva

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{2+(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2}=$$

$$=\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)+c=\sqrt{2}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)+c,$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

6. Az $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakú függvények integrálása

Ebben a fejezetben, ha mást nem mondunk, $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

49. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+5}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{ctg} x \cdot \sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int \operatorname{tg} 2x\,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} 2x\,\mathrm{d}x$

<u>**Megoldás**</u>:

a) Ha $f(x) = x^2 + 5$, akkor $f'(x) = 2x$, így az integrál $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakra hozható. Felhasználva, hogy
$$\frac{x}{x^2+5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+5},$$
továbbá az integrál homogén tulajdonságát azt kapjuk, hogy
$$\int \frac{x}{x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{x^2+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+5) + c.$$

b) A nevező deriváltja: $2x + 4$. A számlálót 2-vel szorozva a számlálóban a nevező deriváltját kapjuk, így alkalmazható az előbbi módszer. Ahhoz, hogy a kifejezés értéke ne változzon, $\frac{1}{2}$-el is szoroznunk kell, amit az integrál homogenitása miatt kiemelhetünk az integráljel elé. Tehát
$$\int \frac{x+2}{x^2+4x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+4}{x^2+4x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+4x+1| + c.$$

c) Mivel
$$\frac{1}{x \cdot \ln x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x},$$
ezért
$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \ln|\ln x| + c.$$

d) Mivel
$$\frac{1}{\cos^2 x \cdot \mathrm{tg} x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\mathrm{tg} x},$$
ezért
$$\int \frac{1}{\mathrm{tg}\, x \cdot \cos^2\, x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\cos^2\, x}}{\mathrm{tg}\, x}\,\mathrm{d}x = \ln|\mathrm{tg}\, x| + c.$$

e) Mivel
$$\frac{1}{\sin^2 x \cdot \mathrm{ctg} x} = \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\mathrm{ctg} x},$$
ezért
$$\int \frac{1}{\mathrm{ctg}\, x \cdot \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{\sin^2\, x}}{\mathrm{ctg}\, x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\mathrm{ctg}\, x| + c.$$

f) Ha $f(x) = \mathrm{e}^x + 1$, akkor $f'(x) = \mathrm{e}^x$, így
$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \ln(\mathrm{e}^x + 1) + c.$$

g) A számlálót 2-vel szorozva a számlálóban a nevező deriváltját kapjuk, így alkalmazható az előbbi módszer. Ahhoz, hogy a kifejezés értéke ne változzon, $\frac{1}{2}$-el is szoroznunk kell, amit az integrál homogenitása miatt kiemelhetünk az integráljel elé, így
$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(e^{2x} + 1) + c.$$

h) Felhasználva az integrál homogenitását azt kapjuk, hogy
$$\int \frac{2 \cdot \cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \ln|\sin x| + c.$$

i) Mivel $\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, továbbá $(\cos x)' = -\sin x$, ezért

$$\int \mathrm{tg}\, x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c.$$

j) Mivel $\mathrm{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, továbbá $(\sin x)' = \cos x$, ezért

$$\int \mathrm{ctg}\, x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c.$$

k) Mivel $\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, továbbá $(\cos 2x)' = -2 \cdot \sin 2x$, ezért

$$\int \mathrm{tg}\, 2x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{-2 \cdot \sin 2x}{\cos 2x} \,\mathrm{d}x = \\ = -\frac{1}{2} \cdot \ln|\cos(2x)| + c.$$

l) Mivel $\mathrm{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, továbbá $(\sin 2x)' = 2 \cdot \sin 2x$, ezért

$$\int \mathrm{ctg}\, 2x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} \,\mathrm{d}x = \\ = \frac{1}{2} \cdot \ln|\sin(2x)| + c.$$

50. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

függvényt és legyen F az f azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = \ln 2$ teljesül.

a) Határozzuk meg az F függvény leképezési szabályát!
b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!
c) Adjuk meg az F függvény zérushelyét!
d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az F függvényt!
e) Adjuk meg az(oka)t az intervallumo(ka)t, amely(ek)en az F függvény konvex, illetve az(oka)t, amely(ek)en konkáv! Határozzuk meg az inflexiós pontot, ha létezik!
f) Határozzuk meg az F függvény határértékeit az értelmezési tartomány határpontjaiban!
g) Vázoljuk fel az F függvény grafikonját!
h) Injektív-e az F függvény?

i) Határozzuk meg az F függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Mivel

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\,\mathrm{d}x = \ln(^{\mathrm{e}x} + 1) + c$$

és $F(0) = \ln 2 + c \Rightarrow c = 0$, ezért

$$F(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 1).$$

b) Az F függvény értelmezési tartománya

$$\mathcal{D}_F =]-\infty; \infty[.$$

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldása adja, tehát az

$$\ln(\mathrm{e}^x + 1) = 0$$

egyenlet megoldása, amiből azt kapjuk, hogy $\mathrm{e}^x = 0$, ami nem lehetséges, így az F függvénynek nincs zérushelye.

d) Mivel $F'(x) = f(x)$, ezért az

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{e}^x = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, aminek nincs megoldása. Mivel $F'(x) > 0$, ezért az F függvény értelmezési tartományának minden pontjában monoton növekvő.

e) Mivel

$$F''(x) = \frac{\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 1) - \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{1}{(\mathrm{e}^x + 1)^2},$$

így $F''(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért F konvex.

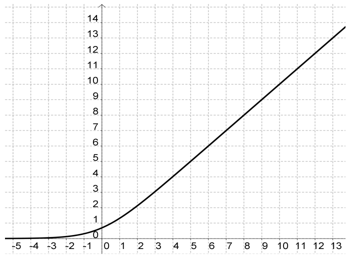
f) Az F függvény határértéke $-\infty$-ben:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$$

Az F függvény határértéke ∞-ben:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \infty.$$

g) Az F függvény grafikonja:



h) Injektív, mert különböző elemekhez különböző elemeket rendel.

i) Az F függvény értékkészlete $]0;\infty[$.

51. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\displaystyle\int \sin^3 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \cos^2 x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin^3 x}}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{\ln^8 x}{x}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^6+1)^2}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) Ha $f(x)=\sin x$, akkor $f'(x)=\cos x$, így az integrál $f^n(x)\cdot f'(x)$ alakra hozható:
$$\int \sin^3 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\sin^4 x}{4}+c.$$

b) Ha $f(x)=\cos x$, akkor $f'(x)=-\sin x$, így az integrál $f^n(x)\cdot f'(x)$ alakra hozható:
$$\int \cos^2 x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x=-\int \cos^2 x\cdot(-\sin x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos^3 x}{3}+c.$$

c) Felhasználva, hogy $\frac{1}{\cos^5 x}=\cos^{-5} x$ az integrál $f^n(x)\cdot f'(x)$ alakra hozható:
$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}\,\mathrm{d}x=\int \sin x\cdot\cos^{-5} x\,\mathrm{d}x=-\int -\sin x\cdot\cos^{-5} x\,\mathrm{d}x=$$
$$=-\frac{\cos^{-4} x}{-4}+c=\frac{1}{4\cdot\cos^4 x}+c.$$

d) Felhasználva, hogy $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = x^{-\frac{3}{4}}$ az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin^3 x}}\,\mathrm{d}x = \int \cos x \cdot (\sin x)^{-\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^{\frac{1}{4}} x}{\frac{1}{4}} + c = 4 \cdot \sqrt[4]{\sin}\, x + c.$$

e) Ha $f(x) = \ln x$, akkor $f'(x) = \frac{1}{x}$, így az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható:

$$\int \frac{\ln^8 x}{x} = \int \ln^8 x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^9 x}{9} + c.$$

f) Ha $f(x) = x^6 + 1$, akkor $f'(x) = 6x^5$, így az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható, tehát

$$\int \frac{x^5}{(x^6+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int x^5 \cdot (x^6+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot \int 6x^5 \cdot (x^6+1)^{-2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{(x^6+1)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^6+1} + c.$$

g) Ha $f(x) = 1 + x^2$, akkor $f'(x) = 2x$, így az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható, tehát

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int x \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int 2x \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1+x^2} + c.$$

h) Ha $f(x) = 1 + x^3$, akkor $f'(x) = 3x^2$, így az integrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakra hozható, tehát

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \cdot \int 3x^2 \cdot (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{1+x^3} + c.$$

52. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

függvényt és legyen F az f azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = 1$ teljesül.

a) Határozzuk meg az F függvény leképezési szabályát!

b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!
c) Adjuk meg az F függvény zérushelyét!
d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az F függvényt!
e) Adjuk meg az(oka)t az intervallumo(ka)t, amely(ek)en az F függvény konvex, illetve az(oka)t, amely(ek)en konkáv! Határozzuk meg az inflexiós pontot, ha létezik!
f) Határozzuk meg az F függvény határértékeit az értelmezési tartomány határpontjaiban!
g) Vázoljuk fel az F függvény grafikonját!
h) Injektív-e az F függvény?
i) Határozzuk meg az F függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Mivel

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \int x\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int 2x\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = $$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{1+x^2} + c.$$

és $F(0) = 1 + c \Rightarrow c = 0$, ezért

$$F(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

b) Az F függvény értelmezési tartománya

$$\mathcal{D}_F =]-\infty;\infty[.$$

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldása adja, tehát a

$$\sqrt{1+x^2} = 0$$

egyenlet megoldása, amiből azt kapjuk, hogy $x^2 = -1$, ami nem lehetséges, így az F függvénynek nincs zérushelye.

d) Mivel $F'(x) = f(x)$, ezért az

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, aminek egyetlen megoldása $x = 0$.

Az első derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	lokális minimum	$\nearrow$
$F(x)$		1	

e) Mivel

$$F''(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{1+x^2}=\frac{\sqrt{1+x^2}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=$$
$$=\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2},$$

így $F''(x)>0$ minden $x\in\mathbb{R}$ esetén, ezért F konvex.

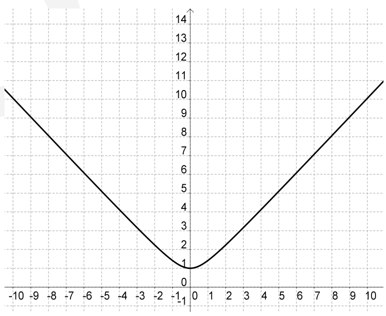
f) Az F függvény határértéke $-\infty$-ben:

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\infty.$$

Az F függvény határértéke ∞-ben:

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\infty.$$

g) Az F függvény grafikonja:



h) Nem injektív.

i) Az F függvény értékkészlete $[1;\infty[$.

53. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$$

függvényt és legyen F az f azon primitív függvénye, amelyre $F(1) = 0$ teljesül.

a) Határozzuk meg az F függvény leképezési szabályát!
b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!
c) Adjuk meg az F függvény zérushelyét!
d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az F függvényt!
e) Adjuk meg az(oka)t az intervallumo(ka)t, amely(ek)en az F függvény konvex, illetve az(oka)t, amely(ek)en konkáv! Határozzuk meg az inflexiós pontot, ha létezik!
f) Határozzuk meg az F függvény határértékeit az értelmezési tartomány határpontjaiban!
g) Vázoljuk fel az F függvény grafikonját!
h) Injektív-e az F függvény?
i) Határozzuk meg az F függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Mivel

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\ln x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = (\ln x)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} + c = \sqrt{(\ln x)^3} + c$$

és $F(1) = c \Rightarrow c = 0$, ezért

$$F(x) = \sqrt{(\ln x)^3}.$$

b) Mivel $x > 0$ és $\ln x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, ezért az F függvény értelmezési tartománya

$$\mathcal{D}_F = [1; \infty[.$$

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldása adja, tehát a

$$\sqrt{(\ln x)^3} = 0$$

egyenlet megoldása, amiből azt kapjuk, hogy $\ln x = 0$, így $x = 1$.

d) Mivel $F'(x) = f(x)$, ezért az

$$F'(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x} = 0.$$

Mivel $\sqrt{\ln x} \geq 0$ és $x \geq 1$, ezért $F'(x) \geq 0$, így F értelmezési tartományának minden pontjában monoton növekvő.

e) Mivel

$$F''(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \sqrt{\ln x}}{x^2} = \frac{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\ln x}} - \sqrt{\ln x}}{x^2} =$$
$$= \frac{1 - \ln x}{2 \cdot \sqrt{\ln x} \cdot x^2},$$

és $x \geq 1$ miatt $1 - \ln x \leq 0$ így $F''(x) \leq 0$ minden $x \in [1; \infty[$ esetén, ezért F konkáv.

f) Az F függvény határértéke az 1 helyen:

$$\lim_{x \to 1} F(x) = 0.$$

Az F függvény határértéke ∞-ben:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \infty.$$

g) Az F függvény grafikonja:

h) Injektív.

i) Az F függvény értékkészlete $[0; \infty[$.

54. **Feladat.** Hol a hiba a következő okoskodásban?

Az $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ függvény határozatlan integrálját kétféleképpen is meghatározzuk.

Egyrészt az f

$$\int \sin x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Másrészt mivel $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$, ezért

$$\int \sin x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \sin 2x \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{4} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Tehát

$$\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4}.$$

Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$2\sin^2 x + \cos 2x = 0.$$

Felhasználva, hogy $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$2\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

adódik, így

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 0.$$

Azonban $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, így azt kapjuk, hogy $0 = 1$.

Megoldás:

Mivel $\dfrac{\sin^2 x}{2}$ és $-\frac{\cos 2x}{4}$ is egy-egy primitív függvényei a $\sin x \cdot \cos x$ függvénynek, ezért azok egymástól konstans összeadandóban eltérhetnek, így a c konstanssal nem egyszerűsíthetünk. A helyes egyenlet

$$\frac{\sin^2 x}{2} = -\frac{\cos 2x}{4} + c$$

lenne, amiből $1 = 0 + c$ következik, amelyben már nincs ellentmondás, $c = 1$ esetén teljesül az egyenlet.

7. A $k \circ b(x) \cdot b'(x)$ alakú függvények integrálása

55. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x} \cdot (2x+2)$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(0) = 5$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = x^2 + 2x$ függvény deriváltja $b'(x) = 2x + 2$, ezért a $k(x) = \mathrm{e}^x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) =$$
$$= \mathrm{e}^{x^2+2x} + c.$$

Mivel $F(0) = 5$, ezért

$$5 = \mathrm{e}^0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 5.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x} + 5.$$

56. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = \sin x^3 \cdot 3x^2$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(0) = 2$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = x^3$ függvény deriváltja $b'(x) = 3x^2$, ezért a $k(x) = \sin x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) =$$
$$= -\cos x^3 + c.$$

Mivel $F(0) = 2$, ezért

$$2 = -\cos 0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 3.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = -\cos x^3 + 3.$$

57. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = \cos\left(\mathrm{e}^x\right) \cdot \mathrm{e}^x$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(0) = \sin 1$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = \mathrm{e}^x$ függvény deriváltja $b'(x) = \mathrm{e}^x$, ezért a $k(x) = \cos x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) = \\ = \sin\left(\mathrm{e}^x\right) + c.$$

Mivel $F(0) = \sin 1$, ezért

$$\sin 1 = \sin 1 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 0.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \sin\left(\mathrm{e}^x\right).$$

58. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x} \cdot \cos x$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(0) = 3$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = \sin x$ függvény deriváltja $b'(x) = \cos x$, ezért a $k(x) = \mathrm{e}^x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) = \\ = \mathrm{e}^{\sin x} + c.$$

Mivel $F(0) = 3$, ezért

$$3 = 1 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 2.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \mathrm{e}^{\sin x} + 2.$$

59. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = x^2 \cdot \sin(x^3 - 1)$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(1) = 3$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = x^3 - 1$ függvény deriváltja $b'(x) = 3x^2$, ezért a $k(x) = \sin x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x \right) \circ b(x) =$$
$$= -\frac{1}{3} \cdot \cos(x^3 - 1) + c.$$

Mivel $F(1) = 3$, ezért

$$3 = -\frac{1}{3} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{10}{3}.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \cos(x^3 - 1) + \frac{10}{3}.$$

60. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = x \cdot \cos x^2$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(0) = 0$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = x^2$ függvény deriváltja $b'(x) = 2x$, ezért a $k(x) = \cos x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x \right) \circ b(x) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sin x^2 + c.$$

Mivel $F(0) = 0$, ezért

$$0 = \frac{1}{2} \cdot \sin 0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 0.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \frac{\sin x^2}{2}.$$

61. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = (x+2) \cdot \mathrm{e}^{3x^2+12x-15}$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(1) = 4$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = 3x^2 + 12x - 15$ függvény deriváltja $b'(x) = 6x + 12$, ezért a $k(x) = \mathrm{e}^x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{6} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x \right) \circ b(x) =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \mathrm{e}^{3x^2+12x-15} + c.$$

Mivel $F(1) = 4$, ezért

$$4 = \frac{1}{6} \cdot \mathrm{e}^0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 23.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \frac{\mathrm{e}^{3x^2+12x-15}}{6} + 23.$$

62. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = 5^x \cdot \cos\left(5^x - 1\right)$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(0) = 2$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = 5^x - 1$ függvény deriváltja $b'(x) = 5^x \cdot \ln 5$, ezért a $k(x) = \cos x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln 5} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\ln 5} \cdot \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x \right) \circ b(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot \sin\left(5^x - 1\right) + c.$$

Mivel $F(0) = 2$, ezért

$$2 = \frac{1}{\ln 5} \cdot \sin 0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 2.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \frac{\sin\left(5^x - 1\right)}{\ln 5}.$$

63. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = \sin 3x \cdot 3^{\cos 3x}$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(0) = 2$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = \cos 3x$ függvény deriváltja $b'(x) = -3 \cdot \sin 3x$, ezért a $k(x) = 3^x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = -\frac{1}{3} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{3} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{3} \cdot \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3^{\cos 3x}}{\ln 3} + c.$$

Mivel $F(0) = 2$, ezért

$$2 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3^{\cos 3x}}{\ln 3} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = -2\ln 3 = -\ln 9.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3^{\cos 3x}}{\ln 3} - \ln 9.$$

64. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(1) = 0$ teljesül!

Megoldás:

Mivel a $b(x) = \frac{1}{x} - 1$ függvény deriváltja $b'(x) = -\frac{1}{x^2}$, ezért a $k(x) = \cos x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) =$$
$$= \sin\left(\frac{1}{x} - 1\right) + c.$$

Mivel $F(1) = 0$, ezért

$$0 = \sin\left(\frac{1}{x} - 1\right) + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 0.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \sin\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

65. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2}$ függvényt és legyen F az $f(x)$ azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = 1$ teljesül.

a) Határozzuk meg az F függvény leképezési szabályát!
b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!
c) Adjuk meg az F függvény zérushelyét!
d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az F függvényt!
e) Adjuk meg az(oka)t az intervallumo(ka)t, amely(ek)en az F függvény konvex, illetve az(oka)t, amely(ek)en konkáv! Határozzuk meg az inflexiós pontot, ha létezik!
f) Határozzuk meg az F függvény határértékeit az értelmezési tartomány határpontjaiban!
g) Vázoljuk fel az F függvény grafikonját!
h) Injektív-e az F függvény?
i) Határozzuk meg az F függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Mivel a $b(x) = x^2$ függvény deriváltja $b'(x) = 2x$, ezért a $k(x) = \mathrm{e}^x$ jelöléssel azt kapjuk, hogy

$$f(x) = \frac{1}{6} \cdot k \circ b(x) \cdot b'(x).$$

Ezt felhasználva

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int k \circ b(x) \cdot b'(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left(\int k(x)\,\mathrm{d}x\right) \circ b(x) = \mathrm{e}^{x^2} + c.$$

Mivel $F(0) = 1$, ezért

$$1 = \mathrm{e}^0 + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 0.$$

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = \mathrm{e}^{x^2}.$$

b) Az F függvény értelmezési tartománya

$$\mathcal{D}_F =]-\infty;\infty[.$$

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldása adja, tehát az

$$\mathrm{e}^{x^2} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, azonban $\mathrm{e}^{x^2} \neq 0$, így az F függvénynek nincs zérushelye.

d) Mivel $F'(x) = f(x)$, ezért a

$$2x \cdot \mathrm{e}^{x^2} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk, aminek egyetlen megoldása $x = 0$.

Az első derivált előjeleit táblázatba foglaljuk:

x	$]-\infty;0[$	0	$]0;\infty[$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	lokális minimum	$\nearrow$
$F(x)$		1	

e) Mivel

$$F''(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{x^2} + 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x = \mathrm{e}^{x^2} \cdot (2 + 4x^2),$$

így $F''(x) > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért F konvex.

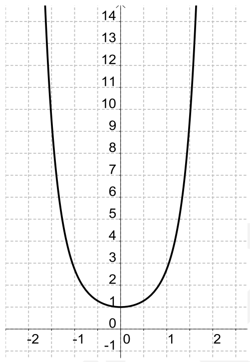
f) Az F függvény határértéke $-\infty$-ben:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

Az F függvény határértéke ∞-ben:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty.$$

g) Az F függvény grafikonja:



h) Nem injektív.

i) Az F függvény értékkészlete $[1; \infty[$.

8. Parciális integrálás

66. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \mathrm{e}^x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 1.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x =$$
$$= x \cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c = \mathrm{e}^x \cdot (x-1) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám.

67. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \cos x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 1.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = x \cdot \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x =$$
$$= x \cdot \sin x + \cos x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

68. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \sin x$ és $g(x) = x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 1.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= -x \cdot \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x = \\ &= -x \cdot \cos x + \sin x + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

69. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int (8x - 2) \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \mathrm{e}^x$ és $g(x) = 8x - 2$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 8.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int (8x - 2) \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x &= (8x - 2) \cdot \mathrm{e}^x - \int 8 \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \\ &= (8x - 2) \cdot \mathrm{e}^x - 8 \cdot \mathrm{e}^x + c = \mathrm{e}^x \cdot (8x - 10) + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

70. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int (2x+3)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \cos x$ és $g(x) = (2x+3)$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 2.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int (2x+3)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = (2x+3)\cdot\sin x - \int 2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x =$$
$$= (2x+3)\cdot\sin x + 2\cdot\cos x + c,$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

71. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int 4x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = \sin x$ és $g(x) = 4x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x.$$

Továbbá

$$g'(x) = 4.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int 4x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = -4x\cdot\cos x + \int 4\cdot\cos x\,\mathrm{d}x =$$
$$= -4x\cdot\cos x + 4\cdot\sin x + c,$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

72. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \frac{-x-2}{\mathrm{e}^x}$ függvényt! Legyen F az f függvény azon primitív függvénye, amelyre $F(-3) = 0$ teljesül.

a) Adjuk meg az F leképezési szabályát!
b) Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!
c) Számoljuk ki az F függvény zérushelyét!
d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az F függvényt!
e) Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az F függvényt!
f) Határozzuk meg az F függvény határértékét a $-\infty$ és a ∞ helyeken!
g) Vázoljuk fel az F függvény grafikonját!
h) Határozzuk meg az F függvény értékkészletét!
i) Korlátos-e az F függvény?
j) Vizsgáljuk meg az F függvény paritását!

Megoldás:

a) A parciális integrálás tételét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$F(x) = \int \frac{-x-2}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int (-x-2)\cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= (-x-2)\cdot\frac{\mathrm{e}^{-x}}{-1} - \int -1\cdot\frac{\mathrm{e}^{-x}}{-1}\,\mathrm{d}x = (x+2)\cdot\mathrm{e}^{-x} - \int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Mivel

$$\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{-1} + c = -\mathrm{e}^{-x} + c,$$

ezért

$$F(x) = (x+2)\cdot\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\cdot(x+3) = \frac{x+3}{\mathrm{e}^x} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

Mivel $F(-3) = 0$, ezért

$$\frac{-3+3}{\mathrm{e}^0} + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = 0,$$

így a keresett primitív függvény

$$F(x) = \frac{x+3}{\mathrm{e}^x}.$$

b) Az F függvény értelmezési tartománya: $x \in \mathbb{R}$.

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$\frac{x+3}{\mathrm{e}^x} = 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = -3$.

d) Az F függvény deriváltja $F'(x) = f(x)$.

Ennek zérushelye(i), azaz a

$$\frac{-x-2}{\mathrm{e}^x} = 0$$

egyenlet egyetlen megoldása $x = -2$.

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;\infty]$
$F'(x)$	$+$	0	$-$
$F(x)$	$\nearrow$	lokális maximum	$\searrow$
$F(x)$		e^2	

e) Az F függvény második deriváltja

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - (x+2)\cdot \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{\mathrm{e}^x\cdot(-x-1)}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{(-x-1)}{\mathrm{e}^x}.$$

Ennek zérushelye(i), azaz az $F''(x) = 0$ egyenlet megoldása(i) $x = -1$.

Táblázatba foglaljuk a második derivált előjelét:

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;\infty[$
$F''(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex
$F(x)$		2e	

f) Az F függvény határértéke $-\infty$-ben:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\cdot(x+3) = -\infty.$$

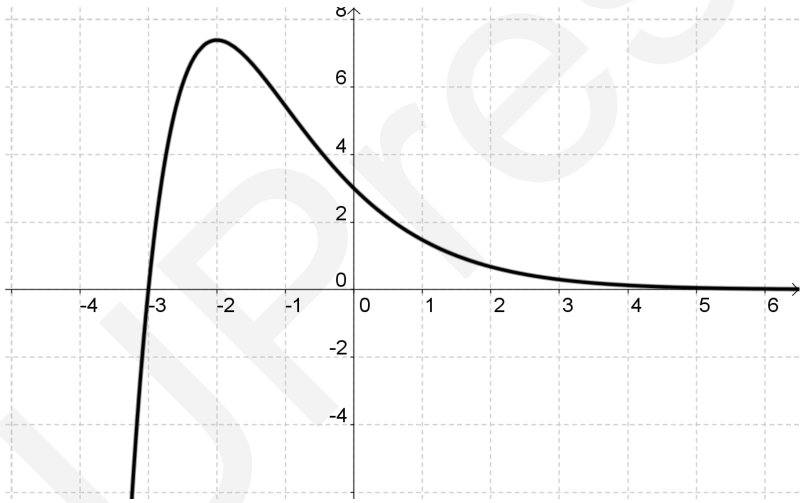
Az F függvény határértéke ∞-ben:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x}\cdot(x+3) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{\mathrm{e}^{x}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{x}} = 0.$$

g) A függvény grafikonjának felrajzolásához készítünk egy összefoglaló táblázatot az előző két táblázat alapján.

	$]-\infty;-2[$	$]-2;-1[$	$]-1;\infty[$
Mononotnitás	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
Konvexitás	konkáv	konkáv	konvex

Ennek segítségével fel tudjuk vázolni a függvény grafikonját:



h) Az F függvény értékkészlete: $y \le \mathrm{e}^2$.

i) Az F függvény felülről korlátos, alulról nem korlátos, így nem korlátos.

j) Nem páros, nem páratlan.

73. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int (x^2+7x-1)\cdot\cos x \,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

Mivel $x^2 + 7x - 1$ egy másodfokú polinom, ezért a parciális integrálás tételét kétszer kell alkalmaznunk.

A parciális integrálás képletében az

$$f_1'(x) = \cos x$$

és

$$g_1(x) = x^2 + 7x - 1$$

jelöléssel élünk. Ekkor az $f_1'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f_1(x) = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x.$$

Továbbá

$$g_1'(x) = 2x + 7.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva

$$\int f_1'(x) \cdot g_1(x) \,\mathrm{d}x = f_1(x) \cdot g_1(x) - \int f_1(x) \cdot g_1'(x) \,\mathrm{d}x$$

adódik, amiből behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\int (x^2 + 7x - 1) \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = (x^2 + 7x - 1) \cdot \sin x - \int (2x + 7) \cdot \sin x \,\mathrm{d}x.$$

A kapott

$$\int (2x + 7) \cdot \sin x \,\mathrm{d}x$$

integrál kiszámolása szintén parciális integrálással történik. Legyen

$$f_2'(x) = \sin x$$

és

$$g_2(x) = 2x + 7.$$

Ismételten alkalmazva a parciális integrálás képletét

$$\int f_2'(x) \cdot g_2(x) \,\mathrm{d}x = f_2(x) \cdot g_2(x) - \int f_2(x) \cdot g_2'(x) \,\mathrm{d}x$$

adódik, amiből behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int (2x + 7) \cdot \sin x \,\mathrm{d}x &= -(2x + 7) \cdot \cos x + \int 2 \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \\ &= -(2x + 7) \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x,\end{aligned}$$

Tehát

$$\int (x^2+7x-1)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$(x^2+7x-1)\cdot\sin x - \int (2x+7)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= (x^2+7x-1)\cdot\sin x - \big(-(2x+7)\cdot\cos x + 2\cdot\sin x\big) =$$

$$= (x^2+7x-1)\cdot\sin x + (2x+7)\cdot\cos x - 2\cdot\sin x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

74. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int (3x^2-6x)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

Mivel $3x^2-6x$ egy másodfokú polinom, ezért a parciális integrálás tételét kétszer kell alkalmaznunk.

A parciális integrálás képletében az

$$f_1'(x) = \sin x$$

és

$$g_1(x) = 3x^2-6x$$

jelöléssel élünk. Ekkor az $f_1'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f_1(x) = \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x.$$

Továbbá

$$g_1'(x) = 6x-6.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva

$$\int f_1'(x)\cdot g_1(x)\,\mathrm{d}x = f_1(x)\cdot g_1(x) - \int f_1(x)\cdot g_1'(x)\,\mathrm{d}x$$

adódik, amiből behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\int (3x^2-6x)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = (3x^2-6x)\cdot(-\cos x) + \int (6x-6)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x.$$

A kapott

$$\int (6x-6)\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$$

integrál kiszámolása szintén parciális integrálással történik. Legyen

$$f_2'(x) = \cos x$$

és

$$g_2(x) = 6x - 6.$$

Ismételten alkalmazva a parciális integrálás képletét

$$\int f_2'(x) \cdot g_2(x)\,\mathrm{d}x = f_2(x) \cdot g_2(x) - \int f_2(x) \cdot g_2'(x)\,\mathrm{d}x$$

adódik, amiből behelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int (6x-6) \cdot \cos x\,\mathrm{d}x &= (6x-6) \cdot \sin x - \int 6 \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \\ &= (6x-6) \cdot \sin x + 6 \cdot \cos x.\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}&\int (3x^2 - 6x) \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \\ &(3x^2 - 6x) \cdot (-\cos x) + \int (6x-6) \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \\ &= (3x^2 - 6x) \cdot (-\cos x) + \big((6x-6) \cdot \sin x + 6 \cdot \cos x\big) + c = \\ &= (-3x^2 + 6x + 6) \cdot \cos x + (6x-6) \cdot \sin x + c,\end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

75. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int (x^2 + 2x - 1) \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Kétszer alkalmazzuk a parciális integrálás tételét:

$$\int (x^2+2x-1)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = (x^2+2x-1)\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \int (2x+2)\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= (x^2+2x-1)\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \int (x+1)\cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= (x^2+2x-1)\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \left((x+1)\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= (x^2+2x-1)\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \left((x+1)\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right) + c =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot \mathrm{e}^{2x}\cdot\left(-3+2\,x+2\,x^2\right)+c,$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

76. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int x\cdot\ln x\,\mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

A parciális integrálás képletében az $f'(x)=x$ és $g(x)=\ln x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x)=\int x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}.$$

Továbbá

$$g'(x)=\frac{1}{x}.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int x\cdot\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Elvégezve az egyszerűsítést, majd felhasználva, hogy

$$\int x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+c,$$

azt kapjuk, hogy

$$\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}+c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

77. **Feladat.** Tekintsük a $\varphi(x) = \ln x$ függvényt! Legyen F a $\varphi(x)$ függvény azon primitív függvénye, amelyre $F(1) = -1$ teljesül.

a) Adjuk meg az F leképezési szabályát!
b) Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!
c) Számoljuk ki az F függvény zérushelyét!
d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az F függvényt!
e) Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az F függvényt!
f) Határozzuk meg az F függvény határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
g) Vázoljuk fel az F függvény grafikonját!
h) Határozzuk meg az F függvény értékkészletét!
i) Korlátos-e az F függvény?

Megoldás:

a) A parciális integrálás képletében az $f'(x) = 1$ és $g(x) = \ln x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int 1 \, \mathrm{d}x = x.$$

Továbbá

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$F(x) = \int \ln x \, \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \\ = x \cdot \ln x - x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Mivel $F(1) = -1$, ezért $c = 0$, így a keresett primitív függvény

$$F(x) = x \cdot \ln x - x.$$

b) Az F függvény értelmezési tartománya: $x \in]0; \infty[$.

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$x \cdot \ln x - x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot (\ln x - 1) = 0,$$

amiből $x > 0$ miatt azt kapjuk, hogy $x = \mathrm{e}$.

d) Az F függvény deriváltja $F'(x) = f(x)$.

Ennek zérushelye(i), azaz a

$$\ln x = 0$$

egyenlet megoldása $x = 1$.

Az első derivált előjelét táblázatban foglaljuk össze:

x	$]0;1[$	1	$]1;\infty]$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	lokális minimum	$\nearrow$
$F(x)$		-1	

e) Az F függvény második deriváltja

$$F''(x) = f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Az $F''(x) = 0$ egyenletnek nincs megoldása, így az F függvénynek nincs zérushelye.

Mivel $x > 0$, ezért az F függvény értelmezési tartományának minden pontjában konvex.

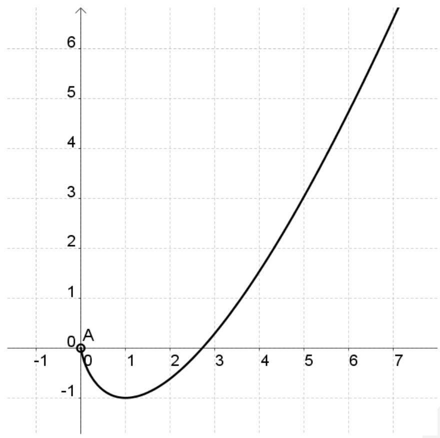
f) Az F függvény határértéke a 0 helyen:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x \cdot \ln x - x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \lim_{x\to 0+} -x = 0.$$

Az F függvény határértéke ∞-ben:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot \ln x - x = \lim_{x\to\infty} x \cdot (\ln x - 1) = \infty.$$

g) A függvény grafikonja:



h) Az F függvény értékkészlete: $y \leq -1$.

i) Az F függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos.

j) Nem páros, nem páratlan.

78. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \log_2 x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

A parciális integrálás képletében az $f'(x) = 1$ és $g(x) = \log_2 x$ jelöléssel élünk. Ekkor az $f'(x)$ függvény egy primitív függvénye:

$$f(x) = \int 1 \, \mathrm{d}x = x.$$

Továbbá

$$g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln 2}.$$

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int \log_2 x \, \mathrm{d}x = x \cdot \log_2 x - \int x \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2} \, \mathrm{d}x = x \cdot \log_2 x - \frac{x}{\ln 2} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

79. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Mivel

$$\int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = $$
$$= \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x^2) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

80. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$$

határozatlan integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Mivel

$$\int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left(\int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \right) = $$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

81. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int 1 \cdot \arcsin x \,\mathrm{d}x = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x.$$

Mivel

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \int x \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x,$$

ezért a kapott inetgrál $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakú, így

$$\int x \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \cdot \int -2x \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = $$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

82. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\int \ln(x^2+1) \,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

A parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int 1 \cdot \ln(x^2+1) \,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x^2+1) - \int x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \,\mathrm{d}x.$$

Mivel

$$\int \frac{2x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \\ = 2\cdot(x-\operatorname{arctg} x)+c,$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges. Tehát

$$\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x^2+1) - 2\cdot(x-\operatorname{arctg} x)+c,$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

83. **Feladat.** Határozzuk meg az alábbi integrálokat:

a) $\int \mathrm{e}^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$

b) $\int \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x$

c) $\int \mathrm{e}^{2x}\sin x\,\mathrm{d}x$

d) $\int \mathrm{e}^{3x}\cos 2x\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

a) A parciális integrálás tételét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x\cdot\sin x - \int \mathrm{e}^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \\ &= \mathrm{e}^x\cdot\sin x - \left(\mathrm{e}^x\cdot\cos x + \int \mathrm{e}^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= \mathrm{e}^x\cdot\sin x - \mathrm{e}^x\cdot\cos x - \int \mathrm{e}^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = \\ &= \mathrm{e}^x\cdot(\sin x-\cos x) - \int \mathrm{e}^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Legyen

$$I = \int \mathrm{e}^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Ekkor az előbbi egyenlőségsor „elejét” és „végét” nézve

$$I = \mathrm{e}^x\cdot(\sin x-\cos x) - I$$

adódik. A kapott egyenletet I-re megoldva azt kapjuk, hogy

$$I = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^x\cdot(\sin x-\cos x)+c.$$

b) A parciális integrálás tételét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int e^x \cdot \cos x \, dx &= e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \, dx = \\ &= e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \, dx = \\ &= e^x \cdot (\cos x + \sin x) - \int e^x \cdot \cos x \, dx.\end{aligned}$$

Legyen

$$I = \int e^x \cdot \cos x \, dx.$$

Ekkor az előbbi egyenlőségsor „elejét" és „végét" nézve

$$I = e^x \cdot (\sin x + \cos x) - I$$

adódik. Így egy egyenletet kaptunk, amit I-re megoldva

$$I = \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin x + \cos x) + c$$

adódik.

c) A parciális integrálás tételét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot \sin x - \int \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot \cos x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot \sin x - \left(\frac{1}{4} \cdot e^{2x} \cdot \cos x + \int \frac{1}{4} \cdot e^{2x} \cdot \sin x \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot \sin x - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} \cdot \cos x - \int \frac{1}{4} \cdot e^{2x} \cdot \sin x \, dx = \\ &= \frac{e^{2x}}{4} \cdot (2 \sin x - \cos x) - \int \frac{1}{4} \cdot e^{2x} \cdot \sin x \, dx.\end{aligned}$$

Legyen

$$I = \int e^{2x} \cdot \sin x \, dx.$$

Ekkor az előbbi egyenlőségsor „elejét" és „végét" nézve azt kapjuk, hogy

$$I = \frac{e^{2x}}{4} \cdot (2 \sin x - \cos x) - \frac{1}{4} \cdot I$$

adódik. Így egy egyenletet kaptunk, amit I-re megoldva

$$I = \frac{1}{5} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot (2\sin x - \cos x) + c$$

adódik.

d) A parciális integrálás tételét kétszer alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{3x} \cdot \cos 2x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot \cos 2x + \int \frac{2}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot \sin 2x \,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot \cos 2x + \frac{2}{9} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot \sin 2x - \int \frac{4}{9} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot \cos 2x \,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot \cos 2x + \frac{2}{9} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot \sin 2x - \frac{4}{9} \cdot \int \mathrm{e}^{3x} \cdot \cos 2x \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Legyen

$$I = \int \mathrm{e}^{3x} \cdot \cos 2x \,\mathrm{d}x.$$

Ekkor az előbbi egyenlőségsor „elejét" és „végét" nézve

$$I = \frac{1}{3} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot \cos 2x + \frac{2}{9} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot \sin 2x - \frac{4}{9} \cdot I.$$

adódik. Így egy egyenletet kaptunk, amit I-re megoldva

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{9} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot (3\cos 2x + 2\sin 2x) - \frac{4}{9} \cdot I \\ \frac{13}{9} \cdot I &= \frac{1}{9} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot (3\cos 2x + 2\sin 2x) \\ I &= \frac{1}{13} \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot (3\cos 2x + 2\sin 2x) + c\end{aligned}$$

adódik.

84. **Feladat.** Hol a hiba a következő levezetésben?

A parciális integrálás képletének felhasználásával kiszámoljuk az

$$\int \frac{1}{x} \cdot 1 \,\mathrm{d}x$$

integrált.

Legyen $f'(x) = 1$ és $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Ekkor $f(x) = x$ és $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ekkor
$$\int \frac{1}{x} \cdot 1 \, \mathrm{d}x = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x,$$
azaz
$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x.$$
Midkét oldalból $\int \dfrac{1}{x} \, \mathrm{d}x$-et kivonva azt kapjuk, hogy $0 = 1$.

Megoldás:

A primitív függvény csak konstans összeadandó erejéig egyértelműen meghatározott, ezért az
$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$
sorban a helyes egyenlet
$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x + c$$
lenne, amiből $0 = 1 + c$ és nem $0 = 1$ következik.

9. Parciális törtekre bontás módszere

85. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{2x+3}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Először szorzattá alakítjuk a tört nevezőjét. Ehhez keressük az x^2+5x+6 polinom gyökeit. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2},$$

adódik, így $x_1 = -3$, illetve $x_2 = -2$. Ezt felhasználva

$$x^2+5x+6 = (x+2)\cdot(x+3).$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2x+3}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+3}{(x+2)\cdot(x+3)}\,\mathrm{d}x.$$

A fenti törtet felbontjuk parciális törtek összegére:

$$\frac{2x+3}{(x+2)\cdot(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}.$$

Meghatározzuk az A és B együtthatókat. Mindkét oldalt szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$2x+3 = A\cdot(x+3) + B\cdot(x+2).$$

Felbontjuk a zárójelet, majd x hatványai szerint csoportosítjuk a tagokat. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$2x+3 = x\cdot(A+B) + 3A + 2B$$

adódik. A jobb oldal pontosan akkor egyezik meg a bal oldallal, ha az x együtthatója és a konstans tag megegyezik a két oldalon, azaz ha teljesül az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 2 &= A + B \\ 3 &= 3A + 2B. \end{aligned}$$

Az első egyenlet kétszeresét kivonva a második egyenletből $A = -1$ adódik, amelyet visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $B = 3$. Tehát

$$\int \frac{2x+3}{(x+2)\cdot(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-1}{x+2} + \frac{3}{x+3}\,\mathrm{d}x = \\ = -1\cdot\ln|x+2| + 3\cdot\ln|x+3| + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Felhasználva a logaritmus azonosságait

$$\int \frac{2x+3}{(x+2)\cdot(x+3)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{(x+3)^3}{x+2}\right| + c$$

adódik.

86. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{4x-1}{x^2-7x+12}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Először szorzattá alakítjuk a tört nevezőjét. Ehhez keressük az $x^2 - 7x + 12$ polinom gyökeit. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

adódik, így $x_1 = 3$, illetve $x_2 = 4$. Tehát

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3)\cdot(x-4).$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{4x-1}{x^2-7x+12}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x-1}{(x-3)\cdot(x-4)}\,\mathrm{d}x.$$

A fenti törtet felbontjuk parciális törtek összegére:

$$\frac{4x-1}{(x-3)\cdot(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}.$$

Meghatározzuk az A és B együtthatókat. Az egyenletet szorozva a közös nevezővel

$$4x - 1 = A\cdot(x-4) + B\cdot(x-3)$$

adódik. Felbontjuk a zárójelet, majd x hatványai szerint csoportosítjuk a tagokat:

$$4x - 1 = x \cdot (A + B) - 4A - 3B.$$

A jobb oldal pontosan akkor egyezik meg a bal oldallal, ha az x együtthatója, és a konstans tag megegyezik a két oldalon, azaz ha teljesül az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 4 &= \quad A + \ \ B \\ -1 &= -4A - 3B. \end{aligned}$$

Az első egyenletet 3-szorosát hozzáadva a második egyenlethez $A = -11$ adódik. Ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $B = 15$. Tehát

$$\begin{aligned} \int \frac{4x-1}{(x-4)\cdot(x-3)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{15}{x-4} - \frac{11}{x-3}\,\mathrm{d}x = \\ &= 15 \cdot \ln|x-4| - 11 \cdot \ln|x-3| + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Felhasználva a logaritmus azonosságait

$$\int \frac{4x-1}{(x-4)\cdot(x-3)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{(x-4)^{15}}{(x-3)^{11}}\right| + c$$

adódik.

87. **Feladat.** Adjuk meg az

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+7x+12}$$

függvény azon F primitív függvényét, amelyre $F(-2) = 12 \cdot \ln 2$ teljesül!

Megoldás:

Első lépésben szorzattá alakítjuk a nevezőt. Ehhez megkeressük az

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

egyenlet megoldását:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 248}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2},$$

azaz $x_1 = -3$, illetve $x_2 = -4$. Ezt felhasználva a gyöktényezős alak:

$$x^2 + 5x + 6 = (x+3)\cdot(x+4).$$

A keresett kifejezést

$$\frac{3x+1}{x^2+7x+12} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$3x+1 = A \cdot (x+4) + B \cdot (x+3).$$

Felbontva a zárójeleket

$$3x+1 = Ax + 4A + Bx + 3B$$

adódik. A tagokat csoportosítsuk fokszám szerint csökkenő sorrendbe:

$$3x+1 = (A+B) \cdot x + 4A + 3B.$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\begin{aligned} A + B &= 3 \\ 4A + 3B &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az egyenletrendszert Cramer-szabállyal oldjuk meg. Az alapmátrix determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1.$$

Továbbá

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8$$

és

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 12 = -11.$$

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$A = \frac{D_1}{D} = \frac{8}{-1} = -8;$$

$$B = \frac{D_2}{D} = \frac{-11}{-1} = 11.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a keresett felbontás:

$$\frac{3x+1}{x^2+7x+12} = \frac{-8}{x+3} + \frac{11}{x+4}.$$

Tehát az integrál additív és homogén tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{3x+1}{x^2+7x+12}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-8}{x+3} + \frac{11}{x+4}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{-8}{x+3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{11}{x+4}\,\mathrm{d}x = \\ &= -8 \cdot \int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x + 11 \cdot \int \frac{1}{x+4}\,\mathrm{d}x = \\ &= -8 \cdot \ln|x+3| + 11 \cdot \ln|x+4| + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Mivel $F(-2) = 12 \cdot \ln 2$, ezért

$$12 \cdot \ln 2 = -8 \cdot \ln|-2+3| + 11 \cdot \ln|-2+4| + c \qquad \Rightarrow \qquad c = \ln 2.$$

Tehát a keresett primitív függvény:

$$F(x) = -8 \cdot \ln|x+3| + 11 \cdot \ln|x+4| + \ln 2.$$

88. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{x+2}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

A nevezőt felírhatjuk elsőfokú polinomok szorzataként, így

$$\int \frac{x+2}{x\cdot(x^2-1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+2}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)}\,\mathrm{d}x$$

adódik. A törtet bontsuk fel parciális törtekre

$$\frac{x+2}{x\cdot(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Meghatározzuk az A, B és C együtthatókat. Ehhez először beszorozzuk az előbbi egyenletet a közös nevezővel:

$$x+2 = A\cdot(x+1)\cdot(x-1) + B\cdot x\cdot(x-1) + C\cdot x\cdot(x+1).$$

A zárójeleket felbontva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x+2 &= A\cdot(x^2-1) + B\cdot(x^2-x) + C\cdot(x^2+x) \\ x+2 &= A\cdot x^2 - A + B\cdot x^2 - B\cdot x + C\cdot x^2 + C\cdot x. \end{aligned}$$

A tagokat fokszám szerint csoportosítva

$$x + 2 = (A + B + C) \cdot x^2 + (-B + C) \cdot x - A$$

adódik.

Két polinom pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő fokszámú tagok együtthatói egyenlőek, így az

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -B + C &= 1 \\ -A \qquad\quad &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $A = -2$. Ezt visszahelyettesítve az első és a második egyenletbe a

$$\begin{aligned} B + C &= 2 \\ -B + C &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk.

Az egyenleteket összeadva $C = 1,5$ adódik. Ezt felhasználva, az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$B + 1,5 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad B = 0,5.$$

Az A, B és C értékeket behelyettesítve az

$$\frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

összefüggésbe, majd felhasználva az integrál additív és homogén tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\int \frac{x+2}{x \cdot (x^2-1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x-1)}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{-2}{x} + \frac{1,5}{x+1} + \frac{0,5}{x-1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{-2}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1,5}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{0,5}{x-1}\,\mathrm{d}x = \\ &= -2 \cdot \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 1,5 \cdot \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + 0,5 \cdot \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \\ &= -2 \cdot \ln|x| + 1,5 \cdot \ln|x+1| + 0,5 \cdot \ln|x-1| + c. \end{aligned}$$

89. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\int \frac{3x-7}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Első lépésben parciális törtek összegére bontjuk a törtet. A keresett kifejezést

$$\frac{3x-7}{(x-4)^2} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$3x-7 = A\cdot(x-4)+B.$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$3x-7 = Ax-4A+B.$$

A megfelelő fokszámú tagok összehasonlítása után az

$$\begin{aligned} A &= 3 \\ -4A+B &= -7 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletbe behelyettesítve az A értékét azt kapjuk, hogy $B=5$. A keresett felbontás tehát:

$$\frac{3x-7}{(x-4)^2} = \frac{3}{x-4} + \frac{5}{(x-4)^2}.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-7}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{3}{x-4} + \frac{5}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= 3\cdot\int \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x + 5\cdot\int \frac{1}{(x-4)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= 3\cdot\ln|x-4| - 5\cdot\frac{1}{x-4} + c = 3\cdot\ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \end{aligned}$$

adódik, ahol $c\in\mathbb{R}$.

90. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\frac{4x+7}{x^2-6x+9}$$

integrált!

Megoldás:

Első lépésben parciális törtek összegeként írjuk fel a törtet. A nevező teljes négyzet, így átalakítható az $(x-3)^2$ kifejezéssé. A törtet

$$\frac{4x+7}{(x-3)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$4x+7 = A\cdot(x-3)+B.$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$4x+7 = Ax-3A+B.$$

A megfelelő fokszámú tagok összehasonlítása után az

$$\begin{aligned} A \quad &= 4 \\ -3A+B &= 7 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletbe behelyettesítve az A értékét azt kapjuk, hogy $B=19$. A keresett felbontás tehát:

$$\frac{4x+7}{(x-3)^2} = \frac{4}{x-3} + \frac{19}{(x-3)^2}.$$

Ezt felhasználva az integrál additív és homogén tulajdonsága alapján

$$\begin{aligned} \int \frac{4x+7}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{4}{x-3} + \frac{19}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{4}{x-3}\,\mathrm{d}x + \int \frac{19}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= 4\cdot\int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x + 19\cdot\int \frac{1}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= 4\cdot\ln|x-3| - \frac{19}{x-3} + c \end{aligned}$$

adódik, ahol $c\in\mathbb{R}$.

91. **Feladat.** Határozzuk meg a

$$\int \frac{-2x+4}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Első lépésben parciális törtek összegére bontjuk a törtet. A keresett kifejezést

$$\frac{-2x+4}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

alakban keressük. Az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel:

$$-2x+4 = A\cdot(x-1)\cdot(x^2+1) + B\cdot(x^2+1) + (Cx+D)\cdot(x-1)^2.$$

A nevezetes azonosság alkalmazása és a zárójelek felbontása után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -2x+4 = A\cdot(x^3-x^2+x-1) + Bx^2 + B+ \\ +(Cx+D)\cdot(x^2-2x+1). \end{aligned}$$

Ismét felbontjuk a zárójeleket:

$$\begin{aligned} -2x+4 = Ax^3 - Ax^2 + Ax - A + Bx^2 + B+ \\ + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx + Dx^2 - 2Dx + D. \end{aligned}$$

Rendezzük fokszám szerint csökkenő sorrendbe a tagokat:

$$\begin{aligned} -2x+4 = (A+C)\cdot x^3 + (-A+B-2C+D)\cdot x^2 + \\ + (A+C-2D)\cdot x - A + B + D. \end{aligned}$$

A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok együtthatóinak meg kell egyezni, így az

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} A & & & + & C & & & = & 0 \\ -A & + & B & - & 2C & + & D & = & 0 \\ A & & & + & C & - & 2D & = & -2 \\ -A & + & B & & & + & D & = & 4 \end{array}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A lineáris egyenletrendszert megoldhatjuk például Gauss-eliminációval. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Első lépésben az első sort adjuk hozzá a második és negyedik sorhoz, az első sor -1-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sor -1-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz, végül cseréljük meg a harmadik és a negyedik sort:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right).$$

Ezen mátrixból visszaírva a lineáris egyenletrendszert

$$\begin{aligned} A \quad + C \qquad &= 0 \\ B - C + D &= 0 \\ 2C \qquad &= 4 \\ -2D &= -2 \end{aligned}$$

adódik. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $D = 1$, amit behelyettesítve a harmadik egyenletbe $C = 2$ adódik. A második egyenletből $B = 1$, míg az első egyenletből $A = -2$ következik. Ezeket visszahelyettesítve megkapjuk a keresett felbontást:

$$\frac{-2x+4}{(x-1)^2 \cdot (x^2+1)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Mivel

$$\int \frac{-2}{x-1}\,\mathrm{d}x = -2 \cdot \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = -2 \cdot \ln|x-1| + c_1,$$

és

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int (x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c_2 = -\frac{1}{x-1} + c_2,$$

és

$$\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + c_3,$$

ahol $c_1; c_2; c_3 \in \mathbb{R}$, így

$$\begin{aligned}
&\int \frac{-2x+4}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \\
&= -2\cdot\ln|x-1| + c_1 - \frac{1}{x-1} + c_2 + \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + c_3 = \\
&= -2\cdot\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + c.
\end{aligned}$$

92. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{10x^4-28x^3}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)\cdot(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Első lépésben parciális törtek összegére bontjuk a törtet. A keresett felbontást

$$\frac{10x^4-28x^3}{(x-1)^2\cdot(x^2+1)\cdot(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{x+1}$$

alakban keressük. Az előbbi törtet szorozzuk a közös nevezővel:

$$\begin{aligned}
10x^4-28x^3 &= A\cdot(x-1)\cdot(x^2+1)\cdot(x+1) + B\cdot(x^2+1)\cdot(x+1) + \\
&+ (Cx+D)\cdot(x-1)^2\cdot(x+1) + E\cdot(x-1)^2\cdot(x^2+1).
\end{aligned}$$

Elvégezzük a nevezetes azonosságokat:

$$\begin{aligned}
10x^4-28x^3 &= A\cdot(x^2-1)\cdot(x^2+1) + B\cdot(x^2+1)\cdot(x+1) + \\
&+ (Cx+D)\cdot(x^2-2x+1)\cdot(x+1) + \\
&+ E\cdot(x^2-2x+1)\cdot(x^2+1).
\end{aligned}$$

Elvégezzük a kijelölt műveleteket:

$$\begin{aligned}
10x^4-28x^3 &= A\cdot(x^4-1) + B\cdot(x^3+x^2+x+1) + \\
&+ (Cx^4 - Cx^3 + Dx^3 - Cx^2 - Dx^2 - Dx + Cx + D) + \\
&+ E\cdot(x^4-2x^3+2x^2-2x+1).
\end{aligned}$$

A jobb oldalon fokszám szerinti csökkenő sorrendben csoportosítjuk a tagokat:

$$\begin{aligned}
10x^4-28x^3 &= (A+C+E)\cdot x^4 + (B-C+D-2E)\cdot x^3 + \\
&+ (B-C-D+2E)\cdot x^2 + (B+C-D-2E)\cdot x + \\
&+ (-A+B+D+E).
\end{aligned}$$

A megfelelő fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításából az alábbi e-gyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} A \quad + C \quad\quad + \; E &= \;10 \\ B - C + D - 2E &= -28 \\ B - C - D + 2E &= \;\;0 \\ B + C - D - 2E &= \;\;0 \\ -A + B \quad + D + \; E &= \;\;0. \end{aligned}$$

A lineáris egyenletrendszert megoldhatjuk például Gauss-eliminációval. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -28 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Első lépésben az első sort adjuk hozzá az utolsó sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -28 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sor -1-szeresét adjuk hozzá a a harmadik, negyedik és ötödik sorhoz:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 38 \end{array}\right).$$

Cseréljük meg a harmadik és a negyedik sort:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 38 \end{array}\right).$$

A harmadik sor -1-szeresét adjuk hozzá az utolsó sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right).$$

A negyedik sort adjuk hozzá az utolsó sorhoz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 38 \end{array}\right).$$

Az utolsó kibővített mátrixból felírva az egyenleteket (az utolsó sorral kezdve)

$$8E = 38 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{19}{4}$$

adódik. Az utolsó előtti sor felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$-2D + 4E = 28 \qquad \Rightarrow \qquad -2D + 19 = 28 \qquad \Rightarrow \qquad D = -\frac{9}{2}.$$

A harmadik sornak megfelelő egyenletből:

$$2C - 2D = 28 \qquad \Rightarrow \qquad 2C + 9 = 28 \qquad \rightarrow \qquad C = \frac{19}{2}.$$

A második sornak megfelelő egyenlet:

$$B - C + D - 2E = -28 \qquad \Rightarrow \qquad B - \frac{19}{2} - \frac{9}{2} - \frac{19}{2} = -28,$$

amiből azt kapjuk, hogy $B = -\frac{9}{2}$.

A Gauss-elimináció végrehajtása után kapott mátrix első sorának megfelelő egyenlet:

$$A + C + E = 10 \qquad \Rightarrow \qquad A + \frac{19}{2} + \frac{19}{4} = 10 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{17}{4}.$$

A keresett felbontás tehát:

$$\frac{10x^4 - 28x^3}{(x-1)^2 \cdot (x^2+1) \cdot (x+1)} =$$
$$= -\frac{17}{4 \cdot (x-1)} - \frac{9}{2 \cdot (x-1)^2} + \frac{19x - 9}{2 \cdot (x^2+1)} + \frac{19}{4 \cdot (x+1)}.$$

Mivel

$$\int -\frac{17}{4 \cdot (x-1)}\,\mathrm{d}x = -\frac{17}{4} \cdot \ln|x-1| + c_1,$$

és

$$\int \frac{9}{2 \cdot (x-1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + c_2,$$

és

$$\int \frac{19x-9}{2 \cdot (x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{19}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \frac{19}{4} \cdot \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{19}{4} \cdot \ln(x^2+1) - \frac{9}{2} \cdot \operatorname{arctg} x + c_3,$$

és

$$\int \frac{19}{4 \cdot (x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{19}{4} \cdot \ln|x+1| + c_4,$$

ahol $c_1; c_2; c_3; c_4 \in \mathbb{R}$, így

$$\int \frac{10x^4 - 28x^3}{(x-1)^2 \cdot (x^2+1) \cdot (x+1)}\,\mathrm{d}x = -\frac{17}{4} \cdot \ln|x-1| - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x-1} +$$
$$+ \frac{19}{4} \cdot \ln(x^2+1) - \frac{9}{2} \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{19}{4} \cdot \ln|x+1| + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

93. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Vegyük észre, hogy a nevező deriváltja kétszerese a számlálónak, így

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2x+2}{x^2+2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot \ln|x^2+2x| + c.$$

94. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{x+1}{x\cdot(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

A törtet parciális törtekre bontva

$$\frac{x+1}{x\cdot(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

adódik.

Az A, B és C együtthatók meghatározásához az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel, felbontjuk a zárójeleket, elvégezzük az összevonásokat, majd a tagokat fokszám szerint csoportosítjuk:

$$\begin{aligned} x+1 &= A\cdot(x^2+1) + (Bx+C)\cdot x \\ x+1 &= Ax^2 + A + Bx^2 + Cx \\ x+1 &= (A+B)\cdot x^2 + Cx + A. \end{aligned}$$

Két polinom pontosan akkor egyezik meg, ha a megfelelő fokszámú tagok együtthatói megegyeznek, így az

$$\begin{aligned} A+B \quad\quad &= 0 \\ C &= 1 \\ A \quad\quad\quad\;\; &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ebből $A = 1$, $B = -1$ és $C = 1$ adódik. Ezeket visszahelyettesítve az

$$\frac{x+1}{x\cdot(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

egyenletbe, majd felhasználva az integrál additív tulajdonságát azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x\cdot(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x}+\frac{-x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + c,\end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

95. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Mivel

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \frac{x^2+1+2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1}+\frac{2x}{x^2+1} = 1+\frac{2x}{x^2+1},$$

ezért

$$\int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int 1+\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x+\ln(x^2+1)+c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

96. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{x+3}{x^2\cdot(x-1)}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

A nevezőt parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{x+3}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}.$$

Az ismeretlen A, B és C együtthatók meghatározásához először az előbbi egyenletet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel, majd a jobb oldalon fokszám szerint csoportosítjuk a tagokat:

$$x+3 = A\cdot x\cdot(x-1) + B\cdot(x-1) + C\cdot x^2$$
$$x+3 = A\cdot x^2 - A\cdot x + B\cdot x - B + C\cdot x^2$$
$$x+3 = (A+C)\cdot x^2 + (-A+B)\cdot x - B$$

A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok összehasonlításából a

$$\begin{aligned} A \quad\;\; + C &= 0 \\ -A + B \quad\;\; &= 1 \\ - B \quad\;\; &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ennek megoldása $A=-4$, $B=-3$ és $C=4$. A kapott együtthatókat visszagelyettesítve az

$$\frac{x+3}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}.$$

egyenletbe, majd a kapott törteket tagonként integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x^2\cdot(x-1)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{-4}{x} + \frac{-3}{x^2} + \frac{4}{x-1}\,\mathrm{d}x = \\ &= -4\cdot\ln|x| - 3\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + 4\cdot\ln|x-1| + c = \\ &= \frac{3}{x} + 4\cdot\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + c, \end{aligned}$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

10. Integrálás helyettesítéssel

97. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Bevezetve a $\sqrt{x}=t$ helyettesítést, amiből

$$x=t^2,\ \text{így}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(t^2)'=2t,$$

az integrál a következőképpen írható át

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int\frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int\frac{t+1-1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2\cdot\int 1-\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\cdot(t-\ln|t+1|)+c = \\ &= 2\cdot\big(\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)\big)+c,\end{aligned}$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

98. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Bevezetve a $\sqrt{x}=t$ helyettesítést, amiből

$$x=t^2,\ \text{így}\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(t^2)'=2t,$$

az integrál a következőképpen írható át

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{1}{t\cdot(1+t)}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int\frac{2}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \\ &= 2\cdot\ln|t+1|+c = 2\cdot\ln(\sqrt{x}+1)+c,\end{aligned}$$

ahol $c\in\mathbb{R}$ tetszőleges.

99. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Bevezetve a $\mathrm{e}^x = t$ helyettesítést, amiből

$$x = \ln t, \text{ így } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (\ln t)' = \frac{1}{t},$$

az integrál a következőképpen írható át

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t+1-1}{1+t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int 1 - \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = t - \ln|t+1| + c = \mathrm{e}^x - \ln(\mathrm{e}^x+1) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

100. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Bevezetve a $\mathrm{e}^x = t$ helyettesítést, amiből

$$x = \ln t, \text{ így } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (\ln t)' = \frac{1}{t},$$

az integrál a következőképpen írható át

$$\int \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} t + c =$$
$$= \operatorname{arctg} \mathrm{e}^x + c.$$

101. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \sqrt{x}\cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Bevezetve a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést, amiből

$$x = t^2, \text{ így } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (t^2)' = 2t,$$

tehát az integrál a következőképpen írható át

$$\int \sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int t \cdot \mathrm{e}^t \cdot 2t \,\mathrm{d}t = 2 \cdot \int t^2 \cdot \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

A kapott integrálra kétszer alkamazva a parciális integrálás tételét azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int t^2 \cdot \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t &= 2 \cdot \left(t^2 \cdot \mathrm{e}^t - \int 2t \cdot \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \right) = \\ &= 2 \cdot \left(t^2 \cdot \mathrm{e}^t - 2t \cdot \mathrm{e}^t + 2 \cdot \mathrm{e}^t \right) + c = \\ &= \mathrm{e}^t \cdot (2t^2 - 4t + 4) + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Visszahelyettesítve t helyére $\sqrt{x}$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál

$$\int \sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} \cdot (2x - 4 \cdot \sqrt{x} + 4) + c.$$

102. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Bevezetve a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést, amiből

$$x = t^2, \text{ így } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (t^2)' = 2t$$

azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin t}{t} \cdot 2t \,\mathrm{d}t = 2 \cdot \int \sin t \,\mathrm{d}t = -2 \cos t + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Visszahelyettesítve t helyére $\sqrt{x}$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = -2 \cdot \cos \sqrt{x} + c.$$

103. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Alkalmazzuk az $x = \sin t$ helyettesítést. Ekkor

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t.$$

Elvégezve a helyettesítést

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Összeadva a $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ és $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ egyenleteket, majd 2-vel elosztva a kapott egyenlet mindkét oldalát azt kapjuk, hogy

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}.$$

Ezt felhasználva

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Visszahelyettesítve t helyére az $\arcsin x$ függvényt

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{\sin(2\arcsin x)}{4} + c$$

adódik.

Mivel $\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$, továbbá $\sin(\arcsin x) = x$, ezért

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{2x\cdot\cos(\arcsin x)}{4} + c.$$

Felhasználva, hogy $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ valamint azt, hogy $\sin(\arcsin x) = x$ azt kapjuk, hogy

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2},$$

így

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{2x\cdot\sqrt{1-x^2}}{4} + c.$$

104. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Bevezetve a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést

$$x = t^2, \text{ így } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (t^2)' = 2t,$$

adódik. Ezt felhasználva

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos t}{t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int \cos t\,\mathrm{d}t = 2\cdot\sin t + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Visszahelyettesítve t helyére $\sqrt{x}$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\sin\sqrt{x} + c.$$

105. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Vezessük be az $\sqrt{x} = t$ helyettesítést! Ekkor

$$x = t^2, \quad \text{amiből} \quad \frac{dx}{dt} = (t^2)' = 2t.$$

A helyettesítést végrehajtva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{t+t^2}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int \frac{t}{t+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int \frac{t}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\cdot\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\ln|1+t| + c = 2\ln|1+\sqrt{x}| + c,\end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

106. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Vezessük be a $\sqrt{x+1} = t$ helyettesítést! Ekkor

$$x = t^2 - 1, \quad \text{amiből} \quad \frac{dx}{dt} = 2t.$$

A helyettesítést végrehajtva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{t^2+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \\
&= 2\cdot \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1 - \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \\
&= 2\cdot(t - \operatorname{arctg} t) + c = \\
&= 2\left(\sqrt{x+1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x+1}\right) + c,
\end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

107. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \frac{x\cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Vezessük be az $x = \sin t$ helyettesítést! Ekkor

$$\frac{dx}{dt} = \cos t.$$

A helyettesítést végrehajtva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin t\cdot t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \\
&= \int \frac{\sin t\cdot t}{\cos t}\cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int t\cdot \sin t\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

A kapott integrálra a parciális integrálás képletét alkalmazzuk

$$\int t \cdot \sin t \, \mathrm{d}t = -t \cdot \cos t + \int \cos t \, \mathrm{d}t = -t \cdot \cos t + \sin t + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Visszahelyettesítve t helyére $\arcsin x$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál

$$\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = -\arcsin x \cdot \cos\big(\arcsin x\big) + x + c.$$

Felhasználva, hogy $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ valamint azt, hogy $\sin(\arcsin x) = x$ azt kapjuk, hogy

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2},$$

így

$$\int \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = -\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} + x + c.$$

108. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \cos \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Vezessük be az $\sqrt[3]{x} = t$ helyettesítést! Ekkor

$$x = t^3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = 3t^2.$$

A helyettesítést végrehajtva azt kapjuk, hogy

$$\int \cos \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x = \int 3t^2 \cdot \cos t \, \mathrm{d}t.$$

A kapott integrálra a parciális integrálás képletét alkalmazzuk:

$$\int 3t^2 \cdot \cos t \, \mathrm{d}t = 3t^2 \cdot \sin t - \int 6t \cdot \sin t \, \mathrm{d}t.$$

A $6t \cdot \sin t$ függvényre ismét alkalmazzuk a parciális integrálás képletét. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\int 6t \cdot \sin t \, \mathrm{d}t = -6t \cdot \cos t + \int 6 \cdot \cos t \, \mathrm{d}t = -6t \cdot \cos t + 6 \cdot \sin t + c.$$

Tehát

$$\int 3t^2 \cdot \cos t \,\mathrm{d}t = 3t^2 \cdot \sin t + 6t \cdot \cos t - 6 \cdot \sin t + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Visszahelyettesítve t helyére $\sqrt[3]{x}$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál

$$\int \cos \sqrt[3]{x} \,\mathrm{d}x = 3\sqrt[3]{x^2} \cdot \sin \sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x} \cdot \cos \sqrt[3]{x} - 6 \cdot \sin \sqrt[3]{x} + c.$$

109. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int x \cdot \sqrt{x+2} \,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Vezessük be az $\sqrt{x+2} = t$ helyettesítést! Ekkor

$$x = t^2 - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = 2t.$$

A helyettesítést végrehajtva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sqrt{x+2} \,\mathrm{d}x &= \int (t^2 - 2) \cdot t \cdot 2t \,\mathrm{d}t = \int 2t^4 - 4t^2 \,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{2}{5} \cdot t^5 - \frac{4}{3} \cdot t^3 + c,\end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

Visszahelyettesítve t helyére $\sqrt[3]{x}$-et azt kapjuk, hogy a keresett integrál

$$\begin{aligned}\int x \cdot \sqrt{x+2} \,\mathrm{d}x &= \frac{2}{5} \cdot (\sqrt{x+2})^5 - \frac{4}{3} \cdot (\sqrt{x+2})^3 + c = \\ &= (\sqrt{x+2})^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot (x+2) - \frac{4}{3}\right) + c = \\ &= (\sqrt{x+2})^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2}{5}x - \frac{8}{15}\right) = \\ &= \frac{2}{15} \cdot (\sqrt{x+2})^{\frac{3}{2}} \cdot (3x - 4) + c.\end{aligned}$$

110. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}} \,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Vezessük be a $\mathrm{e}^x = t$ helyettesítést! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$x = \ln t, \quad \text{amiből} \quad \frac{dx}{dt} = (\ln t)' = \frac{1}{t}.$$

A helyettesítést végrehajtva

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t+t^2} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2 \cdot (1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

A kapott törtet parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{t^2 \cdot (1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1+t}.$$

Az A, B és C együtthatók meghatározásához először az előbbi egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel, majd felbontjuk a zárójeleket, végül a jobb oldalon fokszám szerint csoportosítjuk a tagokat:

$$\begin{aligned} 1 &= A \cdot t \cdot (t+1) + B \cdot (t+1) + C \cdot t^2 \\ 1 &= A \cdot t^2 + A \cdot t + B \cdot t + B + C \cdot t^2 \\ 1 &= (A+C) \cdot t^2 + (A+B) \cdot t + B. \end{aligned}$$

A kapott egyenletben a két oldalon a megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\begin{aligned} A \qquad + C &= 0 \\ A + B \qquad &= 0 \\ B \qquad &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ezt megoldva $A = -1$, $B = 1$ és $C = 1$ adódik.

A kapott együtthatók visszahelyettesítve az

$$\frac{1}{t^2 \cdot (1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1+t}.$$

egyenlet azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{t^2 \cdot (1+t)} = \frac{-1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1+t}.$$

Tehát

$$\int \frac{1}{t^2\cdot(1+t)} = \int \frac{-1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\ln|t| + \frac{t^{-1}}{-1} + \ln|t+1| + c = \ln\left|\frac{t+1}{t}\right| - \frac{1}{t} + c.$$

Mivel $t = \mathrm{e}^x$, ezért

$$\int \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x}\right| - \frac{1}{\mathrm{e}^x} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

111. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}+x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Vezessük be az $\sqrt{x} = t$ helyettesítést! Ekkor

$$x = t^2, \quad \text{amiből} \quad \frac{dx}{dt} = (t^2)' = 2t.$$

A helyettesítést végrehajtva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{t+t^2}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int \frac{t^3}{t+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int \frac{t^3}{t\cdot(1+t)}\,\mathrm{d}t =$$
$$= 2\cdot\int \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Osszuk el a t^2 polinomot a $t+1$ polinommal:

$$\begin{array}{l} \quad t^2 : (t+1) = t-1 \\ -(t^2+t) \\ \quad -t \\ -(-t-1) \\ \qquad 1 \end{array}$$

Ezt felhasználva

$$2\cdot\int \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int t - 1 + \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = 2\cdot\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + c$$

adódik, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Mivel $t = \sqrt{x}$, ezért

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}+x}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}+1|\right) + c.$$

112. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ függvényt és legyen F az f azon primitív függvénye, amelyre $F(1) = 0$ teljesül.

a) Határozzuk meg az F függvény leképezési szabályát!
b) Adjuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az F függvény értelmezhető!
c) Adjuk meg az F függvény zérushelyét!
d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az F függvényt!
e) Adjuk meg az(oka)t az intervallumo(ka)t, amely(ek)en az F függvény konvex, illetve az(oka)t, amely(ek)en konkáv! Határozzuk meg az inflexiós pontot, ha létezik!
f) Határozzuk meg az F függvény határértékeit az értelmezési tartomány határpontjaiban!
g) Vázoljuk fel az F függvény grafikonját!
h) Injektív-e az F függvény?
i) Határozzuk meg az F függvény értékkészletét!

Megoldás:

a) Vezessük be a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést! Ekkor

$$x = t^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = 2t,$$

így a helyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2t\cdot \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva

$$\int 2t\cdot\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2t\cdot\mathrm{e}^t - \int 2\cdot\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^t\cdot(t-1)+c.$$

Felhasználva, hogy $t = \sqrt{x}$ azt kapjuk, hogy

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}-1)+c.$$

Mivel $F(1) = 0$, ezért $c = 0$.

Tehát a primitív függvény:

$$F(x) = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} - 1).$$

b) Az F függvény értelmezési tartománya

$$\mathcal{D}_F = [0; \infty[.$$

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldása adja, tehát az

$$2\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} - 1) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk Mivel $\mathrm{e}^{\sqrt{x}} \neq 0$, ezért az egyetlen zérushely $x = 1$.

d) Mivel $F'(x) = f(x)$, ezért a

$$\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenletnek azonban nincs megoldása. Mivel $F'(x) > 0$ minden $x \geq 0$ esetén, ezért F monoton növekvő.

e) Mivel

$$F''(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x}},$$

így $F''(x) > 0$ minden x esetén, ezért F konvex.

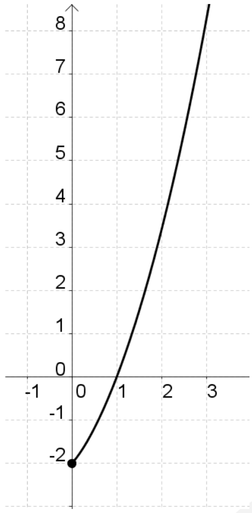
f) Az F függvény határértéke a 0 helyen:

$$\lim_{x \to 0} F(x) = -2.$$

Az F függvény határértéke ∞-ben:

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \infty.$$

g) Az F függvény grafikonja:



h) Injektív, mert különböző elemekhez különböző elemeket rendel.

i) Az F függvény értékkészlete $[-2; \infty[$.

11. Trigonometrikus függvények racionális törtfüggvényeinek integrálása

113. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Vezessük be a $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítést! Ekkor

$$\operatorname{arctg} t = \frac{x}{2},$$

így

$$x = 2\cdot\operatorname{arctg} t,$$

amiből

$$\frac{dx}{dt} = (2\cdot\operatorname{arctg} t)' = 2\cdot\frac{1}{1+t^2} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Felhasználva, hogy

$$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x,$$

továbbá az 1-et trigonometrikus alakban felírva, majd a tört számlálóját és nevezőjét is $\cos^2\frac{x}{2}$-vel elosztva, és felhasználva, hogy $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ azt kapjuk, hogy

$$\sin x = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1} = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}.$$

Felhasználva, hogy

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

továbbá az 1-et trigonometrikus alakban felírva, majd a tört számlálóját és nevezőjét is $\cos^2\frac{x}{2}$-vel elosztva, és felhasználva, hogy $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ azt kapjuk, hogy

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + 1} = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Elvégezve a helyettesítést, majd az összevonásokat és egyszerűsítéseket

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t+2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{2t+2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1-t)\cdot(1+t)}{2\cdot(t+1)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1-t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{arctg}\, t - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \mathrm{arctg}\, t - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+t^2) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Visszahelyettesítve a t helyére az $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right) + c = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right) + c.$$

114. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Bevezetve a

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$$

helyettesítést, egyrészt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2},$$

másrészt

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Elvégezve a helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2t + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Visszahelyettesítve a t helyére az $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ kifejezést

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c$$

adódik.

115. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Bevezetve a

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

helyettesítést, egyrészt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2},$$

másrészt

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

adódik.

Elvégezve a helyettesítést

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

adódik. A kapott tört nevezőjét szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{(1-t)\cdot(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

A kapott törtet parciális törtekre bontva

$$\frac{2}{(1-t)\cdot(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$$

adódik. Az A és B együtthatók meghatározásához az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a közös nevezővel. Ezután a zárójelek felbontása és összevonások után a jobb oldalon fokszám szerint csoportosítva a tagokat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2 &= A\cdot(1+t) + B\cdot(1-t)\\ 2 &= A + At + B - Bt\\ 2 &= (A-B)\cdot t + A + B. \end{aligned}$$

A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\begin{aligned} A - B &= 0\\ A + B &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ezt megoldva $A = 1$ és $B = 1$ adódik.

A kapott együtthatókat visszahelyettesítve az

$$\frac{2}{(1-t)\cdot(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t}$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{2}{(1-t)\cdot(1+t)} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}.$$

Ezt felhasználva

$$\int \frac{2}{(1-t)\cdot(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\ln|1-t| + \ln|1+t| + c = \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Mivel $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, ezért azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + c.$$

116. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Bevezetve a

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$$

helyettesítést, egyrészt

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{1+t^2},$$

másrészt

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$

és

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

adódik.

Elvégezve a helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\\&=\int\frac{1}{\frac{2t+1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1+t^2}{2t+1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\\&=\int\frac{2}{2t+1-t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

A keletkezett törtet parciális törtek összegére bontjuk. Ehhez először a nevezőt szorzattá alakítjuk, amihez megkeressük a $2t+2-t^2$ másodfokú polinom gyökeit:

$$t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{-2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{-2}=-1\pm\sqrt{2}.$$

Ezt felhasználva a nevező szorzattá alakítására

$$2t+1-t^2=(t+1-\sqrt{2})\cdot(t+1+\sqrt{2})$$

adódik. A

$$\frac{2}{2t+1-t^2}=\frac{2}{(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})}$$

törtet parciális törtekre bontva azt kapjuk, hogy

$$\frac{2}{(t+1-\sqrt{2})\cdot(t+1+\sqrt{2})}=\frac{A}{t+1-\sqrt{2}}+\frac{B}{t+1+\sqrt{2}}.$$

A kapott tört mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel, majd a tagokat a fokszám szerint csoportosítva

$$\begin{aligned} 2 &= A\cdot(t+1+\sqrt{2}) + B\cdot(t+1-\sqrt{2}) \\ 2 &= (A+B)\cdot t + (1+\sqrt{2})\cdot A + (1-\sqrt{2})\cdot B \end{aligned}$$

adódik. A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva az

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ (1+\sqrt{2})\cdot A + (1-\sqrt{2})\cdot B &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenletből $A = -B$ adódik, amit behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} -(1+\sqrt{2})\cdot B + (1-\sqrt{2})\cdot B &= 2 \\ -2\sqrt{2}\cdot B &= 2, \end{aligned}$$

amiből

$$B = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

adódik, így

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ezeket az együtthatókat visszahelyettesítve az

$$\frac{2}{(t+1-\sqrt{2})\cdot(t+1+\sqrt{2})} = \frac{A}{t+1-\sqrt{2}} + \frac{B}{t+1+\sqrt{2}}$$

egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{2}{(t+1-\sqrt{2})\cdot(t+1+\sqrt{2})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{t+1-\sqrt{2}} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{t+1+\sqrt{2}}$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} &\int \frac{2}{(t+1-\sqrt{2})\cdot(t+1+\sqrt{2})}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{t+1-\sqrt{2}} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{t+1+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\int\frac{1}{t+1-\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\int\frac{1}{t+1+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\ln|t+1-\sqrt{2}| - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\ln|t+1+\sqrt{2}| + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

Mivel $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, ezért azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}\right| - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}\right| + c.$$

117. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Bevezetve a

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

helyettesítést, egyrészt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2},$$

másrészt

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

és

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

adódik.

Elvégezve a helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \\ = \int \frac{1+t^2}{2t + 1 - t^2 + 1 + t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \\ = \int \frac{2}{2+2t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \\ = \ln|1+t| + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, ezért azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x + 1} \, \mathrm{d}x = \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c.$$

12. Primitív függvények a közgazdaságtanban

118. **Feladat.** Tegyük fel, hogy egy vállalat valamely termékéhez tartozó határbevételi függvénye

$$MR(q) = 2\,000 - 20q - 3q^2.$$

A termelt mennyiséget darabban, a bevételt ezer forintban értjük.

a) Adjuk meg a bevételi függvényt!

b) Határozzuk meg az inverz keresleti függvényt!

c) Adjuk meg a keresleti függvényt!

d) Ábrázoljuk a keresleti függvényt!

Megoldás:

a) A határbevételi függvény azon $R(q)$ primitív függvényét keressük, amelyre $R(0) = 0$, hiszen ha 0 darab terméket termelünk, akkor a bevételünk is 0. Egyrészt

$$\begin{aligned} R(q) &= \int 2\,000 - 20q - 3q^2 \,\mathrm{d}q = \\ &= \int 2\,000 \,\mathrm{d}q - \int 20q \,\mathrm{d}q - \int 3q^2 \,\mathrm{d}q = \\ &= 2\,000q - 10q^2 - q^3 + c. \end{aligned}$$

Másrészt $R(0) = 0$, így

$$2\,000 \cdot 0 - 10 \cdot 0^2 - 0^3 + c = 0,$$

amiből azt kapjuk, hogy $c = 0$. Tehát a bevételi függvény

$$R(q) = -q^3 - 10q^2 + 2\,000q.$$

b) Amennyiben $f^{-1}(q)$ az inverz keresleti függvény, úgy

$$R(q) = q \cdot f^{-1}(q),$$

amiből azt kapjuk, hogy az inverz keresleti függvény:

$$f^{-1}(q) = \frac{R(q)}{q} = \frac{-q^3 - 10q^2 + 2\,000q}{q} = -q^2 - 10q + 2\,000.$$

c) A keresleti függvény az inverz keresleti függvény inverze.

Egy függvény és az inverze között fennáll az

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

kapcsolat. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$-\big(f(x)\big)^2 - 10 \cdot f(x) + 2\,000 = x.$$

Ezt az egyenletet kell megoldanunk $f(x)$-re. Az egyenletet nullára rendezve

$$-\big(f(x)\big)^2 - 10 \cdot f(x) + 2\,000 - x = 0 \qquad (x \geq 0)$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$f(x)_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot (-1) \cdot (2\,000 - x)}}{-2} = \frac{10 \pm \sqrt{8\,100 - 4x}}{-2}.$$

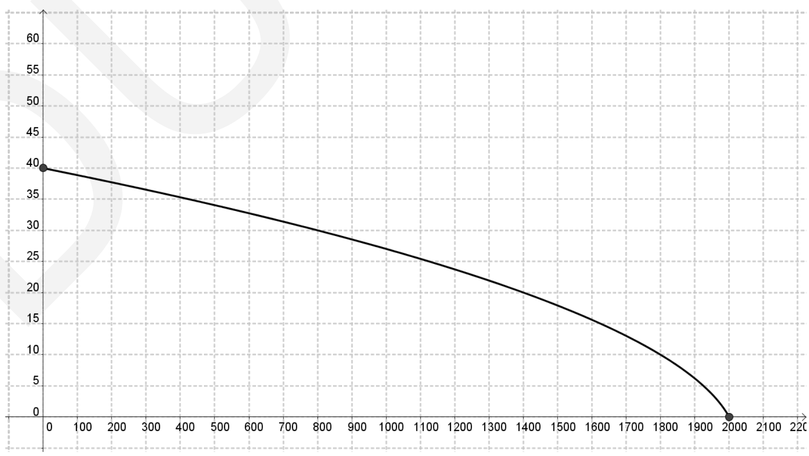
A gyökjel alól kiemelve, majd egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$f(x)_{1,2} = \frac{10 \pm 2 \cdot \sqrt{2\,025 - x}}{-2} = -5 \pm \sqrt{2\,025 - x}.$$

Mivel $x \geq 0$ és $f(x) \geq 0$, ezért a keresleti függvény

$$f(x) = -5 + \sqrt{2\,025 - x}.$$

d) A keresleti függvény grafikonja:



119. **Feladat.** Tegyük fel, hogy egy vállalat adott termékhez tartozó határköltség függvénye

$$MC(q) = 0,000001 \cdot (0,002q^2 - 25q + 0,2).$$

A fixköltség $FC = 4\,000$ dollár. Mennyibe kerül $10\,000$ darab termék előállítása?

<u>**Megoldás**</u>:

A költségfüggvény a határköltség függvény azon $C(q)$ primitív függvénye, amelyre $C(0) = FC$ teljesül. Felhasználva a határozatlan integrál tulajdonságait azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C(q) = \int 0,000001 \cdot (0,002q^2 - 25q + 0,2)\,\mathrm{d}q = \\ = 0,000001 \cdot \int (0,002q^2 - 25q + 0,2)\,\mathrm{d}q = \\ = 0,000001 \cdot \left(\int 0,002q^2\,\mathrm{d}q - \int 25q\,\mathrm{d}q + \int 0,2\,\mathrm{d}q \right) = \\ = 0,000001 \cdot \left(0,002 \cdot \frac{q^3}{3} - 25 \cdot \frac{q^2}{2} + 0,2q \right) + c. \end{aligned}$$

Mivel $C(0) = 4\,000$, ezért azt kapjuk, hogy

$$c = 4\,000,$$

így a költségfüggvény:

$$C(q) = 0,000001 \cdot \left(0,002 \cdot \frac{q^3}{3} - 25 \cdot \frac{q^2}{2} + 0,2q \right) + 4\,000.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C(10\,000) = 0,000001 \cdot \left(0,002 \cdot \frac{10\,000^3}{3} - 25 \cdot \frac{10\,000^2}{2} + 0,2 \cdot 10\,000 \right) + \\ + 4\,000 = 5416,67\,\$. \end{aligned}$$

120. **Feladat.** Tegyük fel, hogy egy vállalat valamely termékéhez tartozó határbevételi függvény

$$MR(q) = 100 - 3q^2.$$

A termelt mennyiséget ezer darabban, a bevételt ezer forintban értjük.

a) Adjuk meg a bevételi függvényt!

b) Határozzuk meg az inverz keresleti függvényt!

c) Határozzuk meg a keresleti függvényt!

Megoldás:

a) A bevételi függvény a határbevételi függvény azon $R(q)$ primitív függvénye, amelyre $R(0) = 0$ teljesül. A határozatlan integrál tulajdonságai alapján:

$$R(q) = \int 100 - 3q^2 \,\mathrm{d}q = \int 100 \,\mathrm{d}q - \int 3q^2 \,\mathrm{d}q = \\ = 100q - q^3 + c.$$

Mivel $R(0) = 0$, ezért

$$-100 \cdot 0 - 0^3 + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = 0,$$

ezért a bevételi függvény:

$$R(q) = 100q - q^3.$$

b) Amennyiben $f^{-1}(q)$ az inverz keresleti függvény, úgy

$$R(q) = q \cdot f^{-1}(q),$$

amiből azt kapjuk, hogy az inverz keresleti függvény:

$$f^{-1}(q) = \frac{R(q)}{q} = \frac{-q^3 + 100q}{q} = -q^2 + 100.$$

c) A keresleti függvény az inverz keresleti függvény inverze.
Egy függvény és az inverze között fennáll az

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x$$

kapcsolat. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$-\big(f(x)\big)^2 + 100 = x.$$

Ebből $x \geq 0$ és $f(x) \geq 0$ miatt azt kapjuk, hogy a keresleti függvény

$$f(x) = \sqrt{100 - x}.$$

121. **Feladat.** Tegyük fel, hogy egy vállalat valamely termékéhez tartozó határköltség függvénye

$$MC(q) = 0,003q^2 - 0,4q + 40.$$

A fixköltség $FC = 5\,000$ dollár. Adjuk meg az átlagköltséget $q = 100$ esetén!

Megoldás:

A költségfüggvény a határköltség függvény azon $C(q)$ primitív függvénye, amelyre $C(0) = FC$ teljesül. Felhasználva a határozatlan integrál tulajdonságait azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C(q) &= \int 0,003q^2 - 0,4q + 40 \,\mathrm{d}q = \\ &= \int 0,003q^2 \,\mathrm{d}q - \int 0,4q \,\mathrm{d}q + \int 40 \,\mathrm{d}q = \\ &= 0,001q^3 - 0,2q^2 + 40q + c. \end{aligned}$$

Mivel $C(0) = 5\,000$, ezért

$$c = 5\,000,$$

így azt kapjuk, hogy a költségfüggvény

$$C(q) = 0,001q^3 - 0,2q^2 + 40q + 5\,000.$$

Az átlagköltség függvény:

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = 0,001q^2 - 0,2q + 40 + \frac{5\,000}{q}.$$

Ha $q = 500$, akkor az átlagköltség:

$$AC(500) = 0,001 \cdot 500^2 - 0,2 \cdot 500 + 40 + \frac{5\,000}{500} = 80\,[\text{dollár}].$$

122. **Feladat.** Egy vállalat valamely termékéhez tartozó határkeresleti függvénye

$$MC(q) = 10 - \frac{100}{q + 10}.$$

Tudjuk továbbá, hogy az átlagköltség $q = 100$ esetén

$$AC(100) = 50.$$

Határozzuk meg a fixköltséget! A mennyiséget darabban, a költséget forintban értjük.

Megoldás:

A költségfüggvény a határköltség függvény azon $C(q)$ primitív függvénye, amelyre $C(0) = FC$ teljesül. Felhasználva a határozatlan integrál tulajdonságait azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C(q) &= \int 10 - \frac{100}{q+10}\,\mathrm{d}q = \\ &= \int 10\,\mathrm{d}q - \int \frac{100}{q+10}\,\mathrm{d}q = \\ &= 10q - 100 \cdot \ln(q+10) + c. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy az átlag költség függvény

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = 10 - 100 \cdot \frac{\ln(q+10)}{q} + \frac{c}{q}.$$

Mivel $AC(100) = 50$, ezért

$$50 = 10 - \frac{100 \cdot \ln 110}{100} + \frac{c}{100}.$$

Az egyenletet megoldva

$$c = 400 + 100 \cdot \ln 110 \approx 870$$

adódik. Mivel

$$FC = C(0) = c,$$

ezért a fixköltség

$$FC = 870\,[\mathrm{Ft}].$$

123. **Feladat.** Tegyük fel, hogy egy vállalat valamely termékéhez tartozó határbevételi függvény

$$MR(q) = 44 - 5q.$$

Ugyanezen termékhez tartozó határköltség függvény

$$MC(q) = 3q + 20.$$

A mennyiséget ezer darabban, a bevételt és a költséget euróban értjük. Tudjuk továbbá azt is, hogy 80 ezer darab termék előállításának költsége 11 400 euro.

a) Határozzuk meg a bevételi függvényt!
b) Határozzuk meg a költség függvényt!
c) Adjuk meg a profit függvényt!
d) Ha 100 ezer darab terméket állítunk elő, akkor nyereséges vagy veszteséges lesz-e a termelés?
e) Hány darab termék előállítása esetén lesz a nyereség maximáli?

f) Adjuk meg az átlagköltség függvényt!

Megoldás:

a) Mivel
$$R(q) = \int 44 - 5q \,\mathrm{d}q = 44q - \frac{5}{2}q^2 + c$$
és $R(0) = 0$ miatt $c = 0$, ezért a bevételi függvény
$$R(q) = 44q - \frac{5}{2}q^2.$$

b) Mivel
$$C(q) = \int 3q + 20 \,\mathrm{d}q = \frac{3}{2}q^2 + 20q + c$$
és a $C(80) = 11\,400$ feltétel miatt
$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\cdot 80^2 + 20\cdot 80 + c &= 11\,400 \\ 9\,600 + \ 1600 + c &= 11\,400, \end{aligned}$$
ezért $c = 200$, ezért a költség függvény
$$C(q) = \frac{3}{2}q^2 + 20q + 200.$$

c) A profit függvény
$$\begin{aligned} \Pi(q) = R(q) - C(q) &= 44q - \frac{5}{2}q^2 - \left(\frac{3}{2}q^2 + 20q + 200\right) = \\ &= -4q^2 + 24q - 200. \end{aligned}$$

d) Mivel
$$\Pi(100) = -4\cdot 100^2 + 24\cdot 100 - 200 = -37\,800 < 0,$$
ezért 100 ezer darab termék előállítása esetén a termelés veszteséges lesz.

e) Mivel $\Pi'(q) = -8q + 24$, ezért $\Pi'(q)$ egyetlen zérushelye $q = 3$. Másrészt $\Pi''(q) = -8 < 0$, ezért azt kaptuk, hogy $3\,000$ darab termék előállítása esetén érjük el a lehető legnagyobb nyereséget.

f) Az átlagköltség függvényt:
$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{3}{2}q + 20 + \frac{200}{q}.$$

124. **Feladat.** Egy vállalat adott termékéhez tartozó határköltség függvénye

$$MC(q) = 180 + 0,3q^2.$$

Ugyanezen termékhez tartozó határbevételi függvény

$$MR(q) = 540 - 0,6q^2.$$

A termelt mennyiséget darabban, a bevételt és a költséget forintban értjük.

Tudjuk azt is, hogy a fix költség 65 forint.

a) Adjuk meg a bevételi függvényt!
b) Adjuk meg a költség függvényt!
c) Határozzuk meg a profit függvényt!
d) Ha az eladott termék egységára 360 forint, akkor hány terméket tudunk értékesíteni? Mennyi ekkor a bevétel?
e) Hány terméket gyártsunk ahhoz, hogy a nyereség maximális legyen?
f) Mennyi a maximális nyereség?

Megoldás:

a) A bevételi függvény a határbevételi függvény azon $R(q)$ primitív függvénye, amelyre $R(0) = 0$ teljesül. Tehát

$$R(q) = \int 540 - 0,6q^2 \, \mathrm{d}q = 540q - 0,2q^3 + c.$$

Mivel $R(0) = 0$, ezért $c = 0$, így a bevételi függvény

$$R(q) = 540q - 0,2q^3.$$

b) A költség függvény a határköltség függvény azon $C(q)$ primitív függvénye, amelyre $FC = C(0) = 65$ teljesül. Tehát

$$R(q) = \int 180 + 0,3q^2 \, \mathrm{d}q = 180q + 0,1q^3 + c.$$

Mivel $C(0) = 65$, ezért $c = 0$, így a költsége függvény

$$C(q) = 180q + 0,1q^3.$$

c) A profit függvény

$$\Pi(q) = R(q) - C(q) = 540q.0,2q^3 - (180q + 0,1q^3 + 65) =$$
$$= 360 - 0,3q^3 - 65.$$

d) Ha p a termék egységára, akkor $R(q) = p \cdot q$, így

$$p = \frac{R(q)}{q} = \frac{540q - 0,2q^3}{q} = 540 - 0,2q^2.$$

Mivel $p = 360$, ezért

$$360 = 540 - 0,2q^2 \qquad \Rightarrow \qquad 180 = 0,2q^2,$$

így $q > 0$ miatt $q = 30$, tehát 30 darab terméket tudunk előállítani. Ekkor a bevétel

$$360 \cdot 30 = 10\,800\,[\mathrm{Ft}].$$

e) Mivel a

$$\Pi'(q) = 360 - 0,9q^2$$

függvény zérushelyei $q = \pm 20$, ezért $q > 0$ miatt 20 darab terméket kell gyártanunk ahhoz, hogy a nyereség függvénynek szélsőértéke legyen. Mivel $\Pi''(q) = -1,8q$, így $\Pi''(20) = -36 < 0$, tehát valóban maximuma van a $\Pi(q)$ függvénynek a $q = 20$ helyen.

f) A maximális nyereség

$$\Pi(20) = 360 \cdot 20 - 0,3 \cdot 20^3 - 65 = 4\,735\,[\mathrm{Ft}].$$

125. **Feladat.** Egy vállalat adott termékéhez tartozó határbevételi függvénye

$$MR(q) = 960 - 0,15q^2.$$

A termelt mennyiséget darabban, a bevételt és a költséget forintban értjük.

A termék egységára 715 forint.

a) Adjuk meg a bevételi függvényt!
b) Hány darab terméket állítunk elő?
c) Mennyi a bevétel?

Megoldás:

a) A bevételi függvény a határbevételi függvény azon $R(q)$ primitív függvénye, amelyre $R(0) = 0$ teljesül. Tehát

$$R(q) = \int 960 - 0,15q^2 \, \mathrm{d}q = 960q - 0,05q^3 + c.$$

Mivel $R(0) = 0$, ezért $c = 0$, így a bevételi függvény

$$R(q) = 960q - 0,05q^3.$$

b) Ha p a termék egységára, akkor $R(q) = p \cdot q$, így

$$p = \frac{R(q)}{q} = \frac{960q - 0,05q^3}{q} = 960 - 0,05q^2.$$

Mivel $p = 715$, ezért

$$715 = 960 - 0,05q^2 \qquad \Rightarrow \qquad 245 = 0,05q^2,$$

így $q > 0$ miatt $q = 70$, tehát 70 darab terméket tudunk előállítani.

c) A bevétel

$$715 \cdot 70 = 50\,050\,[\mathrm{Ft}].$$

13. Parciális és helyettesítéses integrálás tétele Riemann-integrálokra, Riemann integrálok kiszámítása Newton-Leibniz formulával

126. **Feladat.** Határozzuk meg az a valós számot úgy, hogy

$$\int_a^{2a} x^2 \,\mathrm{d}x = 504$$

teljesüljön!

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel

$$\int_a^{2a} x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^{2a} = \frac{8a^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{7a^3}{3},$$

ezért a feltétel szerint

$$\frac{7a^3}{3} = 1\,512,$$

így $a^3 = 216$, tehát $a = 6$.

127. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int_{-1}^{2} x^2 - 3x + 2 \,\mathrm{d}x$$

integrál értékét!

<u>**Megoldás**</u>:

Meghatározunk egy primitív függvényt, majd alkalmazzuk a Newton-Leibniz tételt:

$$\int_{-1}^{2} x^2 - 3x + 2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - 3\cdot\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 3\cdot\frac{(-1)^2}{2} + 2\cdot(-1)\right) =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}.$$

128. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x$$

integrál értékét!

Megoldás:

Meghatározunk egy primitív függvényt, majd alkalmazzuk a Newton-Leibniz tételt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln|\cos 0| = -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

129. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2x+1} \, \mathrm{d}x$$

integrál értékét!

Megoldás:

A Newton-Leibniz tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2x+1} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^{2\cdot 1+1}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2\cdot 0+1}}{2} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}}{2}.$$

130. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x$$

integrál értékét!

Megoldás:

A parciáls integrálás Riemann-integrálra vonatkozó tétele szerint

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = [x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x =$$

$$= [x \cdot \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

A számolást úgy is elvégezhettük volna, hogy az $x \cdot \cos x$ függvény egy primitív függvényét határozzuk meg, majd azt követően alkalmazzuk a Newton-Leibniz tételt.

131. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int_0^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$$

integrál értékét!

Megoldás:

Végezzük el a $t = \sqrt{x}$ helyettesítést. Ekkor $t^2 = x$, így $\frac{dx}{dt} = 2t$. Tehát

$$\int_0^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{4}} \frac{\mathrm{e}^t}{t} \cdot 2t \,\mathrm{d}t = \int_0^2 2 \cdot \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t =$$

$$= [2 \cdot \mathrm{e}^t]_0^2 = 2 \cdot \mathrm{e}^2 - 2.$$

A számolást úgy is elvégezhettük volna, hogy az $x \cdot \cos x$ függvény egy primitív függvényét határozzuk meg, majd azt követően alkalmazzuk a Newton-Leibniz tételt.

132. **Feladat.** Határozzuk meg az a és b valós számokat úgy, hogy teljesüljön az

$$\int_1^9 \sqrt{x} \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = a \cdot \ln 3 + b$$

egyenlőség!

Megoldás:

A parciáls integrálás Riemann-integrálra vonatkozó tétele szerint

$$\int_1^9 \sqrt{x} \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \ln x\right]_1^9 - \int_1^9 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} \cdot \ln x\right]_1^9 - \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} \cdot \frac{2}{3}\right]_1^9 =$$

$$= 18 \cdot \ln 9 - \frac{4}{9} \cdot 27 + \frac{4}{9} = 36 \cdot \ln 3 - \frac{104}{9}.$$

Tehát $a = 36$, illetve $b = -\frac{104}{9}$.

133. **Feladat.** Bizonyítsuk be, hogy ha f folytonosan differenciálható függvény, akkor

$$\int_a^b f'(x) \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(f(b)\right)^2 - \left(f(a)\right)^2\right).$$

Megoldás:

A parciáls integrálás Riemann-integrálra vonatkozó tétele szerint

$$\int_a^b f'(x) \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = [f(x) \cdot f(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot f(x) \, \mathrm{d}x,$$

így

$$2 \cdot \int_a^b f'(x) \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = \left[\left(f(x)\right)^2\right]_a^b,$$

tehát

$$2 \cdot \int_a^b f'(x) \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = \left(\left(f(b)\right)^2 - \left(f(a)\right)^2\right).$$

Mindkét oldalt 2-vel osztva azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b f'(x) \cdot f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(f(b)\right)^2 - \left(f(a)\right)^2\right),$$

amivel igazoltuk az állítást.

134. **Feladat.** Tegyük fel, hogy f kétszer folytonosan differenciálható függvény, továbbá $f(1) = 2$, $f(4) = 7$ és $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$. Számoljuk ki az

$$\int_1^4 x \cdot f''(x)\,\mathrm{d}x$$

értéket!

<u>**Megoldás**</u>:

A parciáls integrálás Riemann-integrálra vonatkozó tétele szerint

$$\int_1^4 x \cdot f''(x)\,\mathrm{d}x = \left[x \cdot f'(x)\right]_1^4 - \int_1^4 f'(x)\,\mathrm{d}x = \\ = 4 \cdot f'(4) - 1 \cdot f'(1) - f(4) + f(1).$$

Behelyettesítve a megfelelő értékeket azt kapjuk, hogy

$$\int_1^4 x \cdot f''(x)\,\mathrm{d}x = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 5 - 7 + 2 = 2.$$

135. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

integrál értékét!

<u>**Megoldás**</u>:

A Riemann-integrálra vonatkozó parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 x \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[x \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \left[x \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_0^1 = \\ = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

136. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int\limits_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x$$

integrál értékét!

Megoldás:

A Riemann-integrálra vonatkozó parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_1^{\mathrm{e}} x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2} \cdot \ln \mathrm{e} - \frac{1^2}{2} \ln 1\right) -$$

$$- \left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right) = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}.$$

137. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$\int\limits_4^5 \frac{1}{x^2 + 5x + 6} \, \mathrm{d}x$$

integrál értékét!

Megoldás:

Először alakítsuk szorzattá a nevezőt! Ehhez keressük az $x^2 + 5x + 6$ polinom gyökeit. A másodfokú egyenlet megoldóképletét felhasználva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2},$$

így $x_1 = -3$, $x_2 = -2$. Tehát a nevező gyöktényezős alakja $(x + 2) \cdot (x + 3)$, így azt kapjuk, hogy

$$\int_4^5 \frac{1}{x^2 + 5x + 6} \, \mathrm{d}x = \int_4^5 \frac{1}{(x + 2) \cdot (x + 3)} \, \mathrm{d}x.$$

A fenti törtet bontsuk fel parciális törtek összegére:

$$\frac{1}{(x + 2) \cdot (x + 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3}.$$

Meghatározzuk az A és B együtthatókat. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel

$$1 = A \cdot (x+3) + B \cdot (x+2)$$

adódik. A zárójelet felbontva, majd x-et kiemelve az x-et tartalmazó tagokból azt kapjuk, hogy

$$1 = x \cdot (A+B) + 3A + 2B.$$

A bal oldal pontosan akkor egyezik meg a jobb oldallal, ha az x együtthatója, illetve ha a konstans tag megegyezik a két oldalon, azaz ha teljesül az alábbi egyenletrendszer

$$\begin{aligned} 0 &= A + B \\ 1 &= 3A + 2B. \end{aligned}$$

Az első egyenletet 2-vel szorozva, majd a második egyenletből kivonva az elsőt $A = 1$ adódik, amelyet visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $B = -1$. Tehát

$$\begin{aligned} &\int_4^5 \frac{1}{(x+2)\cdot(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int_4^5 \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = \\ &= \Big[\ln|x+2| - \ln|x+3|\Big]_4^5 = \left[\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|\right]_4^5 = \ln\frac{7}{8} - \ln\frac{6}{7} = \ln\frac{49}{48}. \end{aligned}$$

14. Folytonos függvények átlagértéke

138. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt!

a) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény átlagértékét a $[0;4]$ intervallumon.

b) Határozzuk meg azt a ξ valós számot, amelyre $\overline{f} = f(\xi)$.

c) Szemléltessük a kapott eredményt!

Megoldás:

a) Mivel

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3},$$

ezért a függvényértékek átlaga

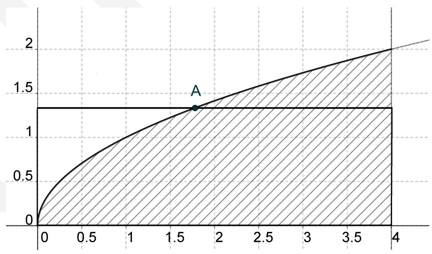
$$\frac{1}{4}\cdot\frac{16}{3} = \frac{4}{3}.$$

b) Keressük a $\sqrt{\xi} = \frac{4}{3}$ egyenletnek a $[0;4]$ intervallumba eső megoldását.

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$$\xi = \frac{16}{9}.$$

c) A kapott eredmény szemléltetése:



A $[0;4]$ intervallumon a függvény grafikonjának az x-tengellyel bezárt területe megegyezik annak a téglalapnak a területével, amelynek oldalai 4 és $\frac{4}{3}$ egység hosszúak.

139. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = 4x - x^2$ függvényt!

a) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény átlagértékét a $[0;2]$ intervallumon.

b) Határozzuk meg azt a ξ valós számot, amelyre $\overline{f} = f(\xi)$.

Megoldás:

a) Mivel

$$\int_0^2 4x - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3},$$

ezért a függvényértékek átlaga

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$

b) Keressük a

$$4\xi - \xi^2 = \frac{8}{3}$$

egyenletnek a $[0; 2]$ intervallumba eső megoldását.

Az egyenletet nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$4\xi - \xi^2 - \frac{8}{3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3\xi^2 - 12\xi + 8 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$\xi_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 96}}{6} = \frac{6 \pm 2 \cdot \sqrt{3}}{3},$$

így $\xi_1 \approx 3,155$, illetve $\xi_2 \approx 0,8453$ adódik. Mivel $\xi_1 \notin [0; 2]$, ezért egyetlen ξ érték létetik, $\xi \approx 0,8453$.

140. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \ln x$ függvényt!

a) Határozzuk meg az $f(x)$ függvény átlagértékét az $[1; \mathrm{e}]$ intervallumon.

b) Határozzuk meg azt a ξ valós számot, amelyre $\overline{f} = f(\xi)$.

c) Szemléltessük a kapott eredményt!

Megoldás:

a) Mivel a Riemann-integrálra vonatkozó parciális integrálás képletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x = \Big[x \cdot \ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \Big[x \cdot \ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} - \Big[x\Big]_1^{\mathrm{e}} = 1,$$

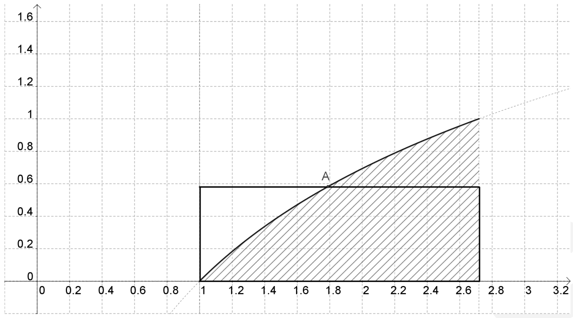
ezért a függvényértékek átlaga

$$\frac{1}{\mathrm{e} - 1} \cdot 1 = \frac{1}{\mathrm{e} - 1}.$$

b) Keressük az $\ln\xi = \frac{1}{\mathrm{e}-1}$ egyenletnek az $[1;\mathrm{e}]$ intervallumba eső megoldását.

Az egyenlet megoldása $\xi = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}$.

c) A kapott eredmény szemléltetése:



Az $[1;\mathrm{e}]$ intervallumon a függvény grafikonjának az x-tengellyel bezárt területe megegyezik annak a téglalapnak a területével, amelynek oldalai $\mathrm{e}-1$ és $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}-1}}$ egység hosszúak.

141. **Feladat.** Egy nyári napon a hőmérsékletet a

$$T(t) = 7,46 \cdot \sin(0,36t - 2,93) + 20,39 \qquad \big(t \in [0;24]\big)$$

függvénnyel modellezzük, ahol t az éjféltől eltelt időt jelenti órában mérve.

a) Hány órakor volt a leghidegebb?
b) Mennyi volt a legalacsonyabb hőmérséklet?
c) Hány órakor volt a legmelegebb?
d) Mennyi volt a legmagasabb hőmérséklet?
e) Mennyi volt az átlaghőmérséklet?

<u>**Megoldás**</u>:

a) A $T(t)$ függvény deriváltja

$$T'(t) = 7,46 \cdot \cos(0,36t - 2,93) \cdot 0,36 = \\ = 2,686 \cdot \cos(0,36t - 2,93).$$

A $T'(t)$ függvény zérushelye a

$$2,686 \cdot \cos(0,36t - 2,93) = 0$$

egyenlet megoldása, amiből azt kapjuk, hogy

$$0,36t - 2,93 = 1,57 \qquad \Rightarrow \qquad t = 12,5,$$

illetve

$$0,36t - 2,93 = 4,71 \qquad \Rightarrow \qquad t = 21,2,$$

illetve

$$0,36t - 2,93 = -1,57 \qquad \Rightarrow \qquad t = 3,78.$$

Mivel

$$\begin{aligned} T''(t) &= -2,686 \cdot \sin(0,36t - 2,93) \cdot 0,36 = \\ &= 0,967 \cdot \sin(0,36t - 2,93) \end{aligned}$$

és $T''(3,78) > 0$ és $T''(21,2) > 0$, ezért 3 óra 12 perckor és 21 óra 12 perckor lesz a legalacsonyabb a hőmérséklet.

b) Mivel $T(3,78) = T(21,2) = 12,9$, ezért A legalacsonyabb hőmérséklet $12,9°C$.

c) Mivel $T''(12,5) < 0$, ezért 12 óra 30 perckor volt a legmagasabb a hőmérséklet.

d) Mivel $T(12,5) = 27,8$, ezért $27,8°C$ volt a legmagasabb hőmérséklet.

e) Mivel

$$\int_0^{24} 7,46 \cdot \sin(0,36t - 2,93) + 20,39 \,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{-7,46 \cdot \cos(0,36t - 2,93) + 20,39}{0,36} + 20,39t\right]_0^{24} =$$

$$= \Big[-20,72 \cdot \cos(0,36t - 2,93) + 20,39 + 20,39t\Big]_0^{24} =$$

$$= -20,,72 \cdot \cos 5,71 + 489,36 + 20,72 \cdot \cos(-2,93) = 484,31,$$

ezért

$$\overline{T} = \frac{1}{24} \cdot \int_0^{24} 7,46 \cdot \sin(0,36t - 2,93) + 20,39 \,\mathrm{d}t = \frac{484,31}{24},$$

így az átlaghőmérséklet $20,18°C$.

142. **Feladat.** Egy test sebesség-idő függvénye

$$v(t) = -t^2 + 4t \qquad \big(t \in [0;4]\big).$$

Az időt másodpercben, a sebességet $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$-ban mérjük. Határozzuk meg a $[0;4]$ időintervallumon az átlagsebességet!

Megoldás:

Mivel

$$\int_0^4 -t^2+4t\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^3}{3}+2t^2\right]_0^4 = -\frac{4^3}{3}+32 = \frac{32}{3},$$

ezért az átlagsebesség

$$\overline{v} = \frac{1}{4}\cdot\int_0^4 -t^2+4t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot\frac{32}{3} = \frac{8}{3}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

15. Területszámítás integrálással

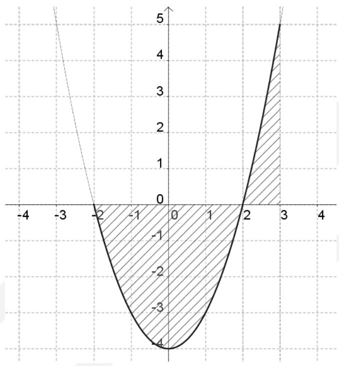
143. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^2 - 4$ függvénynek az x tengellyel bezárt területét a $[-2; 3]$ intervallumon!

Megoldás:

Az $f(x)$ függvény zérushelyei

$$x^2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 2.$$

A függvény grafikonját és a keresett területet mutatja az alábbi ábra:



Tehát a $[-2; 2]$ és a $[2; 3]$ intervallumokon kell kiszámolnunk az $f(x)$ függvény Riemann-integrálját.

Egyrészt

$$\int_{-2}^{2} x^2 - 4 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 8\right) - $$

$$- \left(-\frac{8}{3} + 8\right) = -\frac{32}{3}.$$

Másrészt

$$\int_{2}^{3} x^2 - 4 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{3} = (9 - 12) - $$

$$- \left(-\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{7}{3}.$$

Tehát a keresett terület

$$T = \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = 13.$$

144. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = -x^2 + 2x$ függvénynek az x tengellyel bezárt területét a $[-1;3]$ intervallumon!

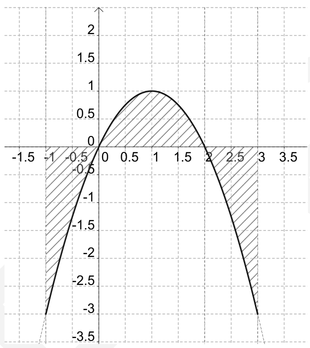
Megoldás:

Az $f(x)$ függvény zérushelyei

$$-x^2 + 2x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot (-x + 2) = 0,$$

így $x = 0$, illetve $x = 2$.

A függvény grafikonját és a keresett területet mutatja az alábbi ábra:



Tehát a $[-1;0]$, a $[0;2]$ és a $[2;3]$ intervallumokon kell kiszámolnunk az $f(x)$ függvény Riemann-integrálját.

Egyrészt

$$\int_{-1}^{0} -x^2 + 2x \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = -\frac{4}{3}.$$

Másrészt

$$\int_{0}^{2} -x^2 + 2x \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{0}^{2} = -\left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3}.$$

Valamint

$$\int_{2}^{3} -x^2 + 2x \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{3}^{2} = (-9 + 9) - \left(-\frac{8}{3} + 4\right) = \frac{4}{3}.$$

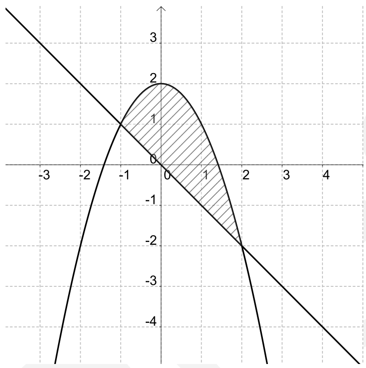
Tehát a keresett terület

$$T = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4.$$

145. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = 2 - x^2$ és $g(x) = -x$ függvények által közrezárt területet!

Megoldás:

Először vázoljuk fel a függvények grafikonjait:



A függvények grafikonjainak metszéspontjait (vagyis az integrál határait) az

$$2 - x^2 = -x$$

egyenlet megoldásai adják. Az egyenletet nullára rendezve

$$x^2 - x - 2 = 0$$

adódik. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}.$$

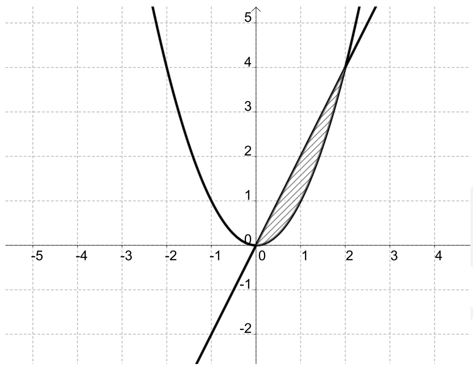
Tehát: $x_1 = -1$, illetve $x_2 = 2$.
A két függvény grafikonja által közrezárt terület:

$$T = \int_{-1}^{2} 2 - x^2 - (-x)\,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} =$$
$$= \left(4 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) =$$
$$= 6 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{5}{6} = \frac{9}{2}.$$

146. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = 2 - x^2$ és $g(x) = 2x$ függvények által közrezárt területet!

Megoldás:

Először vázoljuk fel a függvények grafikonjait:



A függvények grafikonjainak metszéspontjait (vagyis az integrálás határait) az

$$x^2 = 2x$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x \cdot (x - 2) = 0$$

egyenlet megoldásai adják. Mivel egy szorzat csak úgy lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, ezért $x = 0$, illetve $x = 2$.

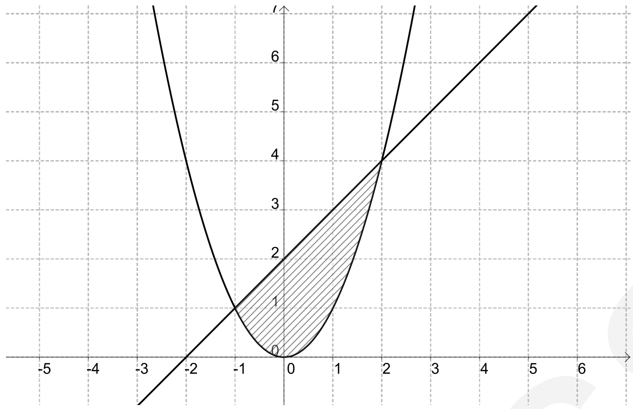
A két függvény grafikonja által közrezárt terület:

$$T = \int_0^2 2x - x^2 \, \mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = $$
$$= 4 - \frac{8}{3} = \frac{12 - 8}{3} = \frac{4}{3}.$$

147. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^2$ és $g(x) = x + 2$ függvények által közrezárt területet!

Megoldás:

Először vázoljuk fel a függvények grafikonjait:



A függvények grafikonjainak metszéspontjait (vagyis az integrálás határait) az

$$x^2 = x + 2$$

egyenlet megoldásai adják. Az egyenletet nullára rendezve azt kapjuk, hogy

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

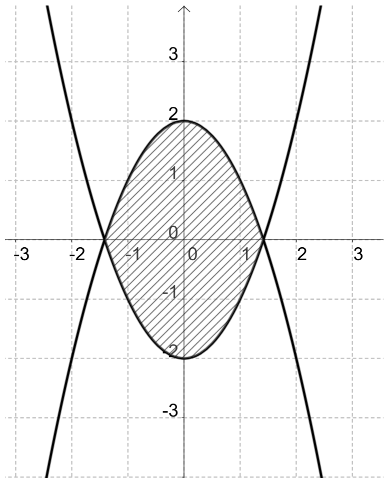
adódik, így $x_1 = -1$, illetve $x_2 = 2$.
A keresett terület:

$$T = \int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} =$$
$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = 4,5.$$

148. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^2 - 2$ és $g(x) = 2 - x^2$ függvények által közrezárt területet!

Megoldás:

Először vázoljuk fel a függvények grafikonjait:



Az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldása:

$$x^2 - 2 = 2 - x^2$$
$$x^2 = 4,$$

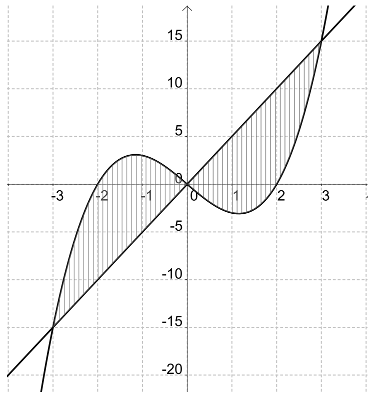
tehát $x = -2$, illetve $x = 2$. A keresett terület:

$$T = \int_{-2}^{2} (2 - x^2) - (x^2 - 2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (4 - 2x^2)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[4x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^{2} =$$
$$= \left(4 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) =$$
$$= \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

149. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^3 - 4x$ és $g(x) = 5x$ függvények által közrezárt területet!

Megoldás:

Először vázoljuk fel a függvények grafikonjait:



A függvények grafikonjainak metszéspontjait az

$$x^3 - 4x - 5x = 0$$

egyenlet megoldásai adják. Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakítva

$$x \cdot (x^2 - 9) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot (x-3) \cdot (x+3) = 0$$

adódik, így a metszéspontok: $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3$. A keresett terület szimmetrikus az origóra, így elegendő az egyik tartomány területét kiszámolni, melynek kétszerese lesz a meghatározandó terület.
Mivel

$$T_1 = \int_0^3 5x - (x^3 - 4x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 9x - x^3\,\mathrm{d}x = \left[9 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \\ = \frac{81}{2} - \frac{81}{4} = \frac{81}{4},$$

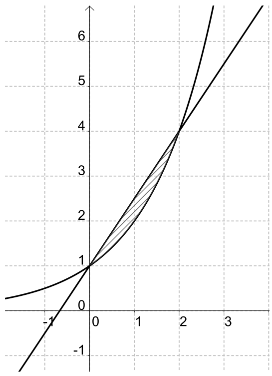
ezért a keresett terület:

$$T = 2 \cdot T_1 = 2 \cdot \frac{81}{4} = \frac{81}{2} = 40,5.$$

150. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = 2^x$ és $g(x) = \frac{3}{2}x + 1$ függvények által közrezárt területet!

Megoldás:

Először vázoljuk fel a függvények grafikonjait:



A függvények grafikonjainak metszéspontjait (vagyis az integrál határait) az

$$2^x = \frac{3}{2}x + 1$$

egyenlet megoldásai adják. A megoldásokat grafikusan keressük meg. Az ábrázolásból $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 2$ adódik.

A két függvény grafikonja által közrezárt terület:

$$T = \int_0^2 \frac{3}{2}x + 1 - 2^x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + x - \frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^2 =$$

$$= \left(3 + 2 - \frac{4}{\ln 2}\right) + \frac{1}{\ln 2} = 5 - \frac{3}{\ln 2} \approx 0,6719.$$

151. **Feladat.** Mekkora területet vág le az $f(x) = 2x^2 + 3$ függvény grafikonjából az $A = (-1; 5)$ és $B = (3; 21)$ pontokra illeszkedő húrja?

Megoldás:

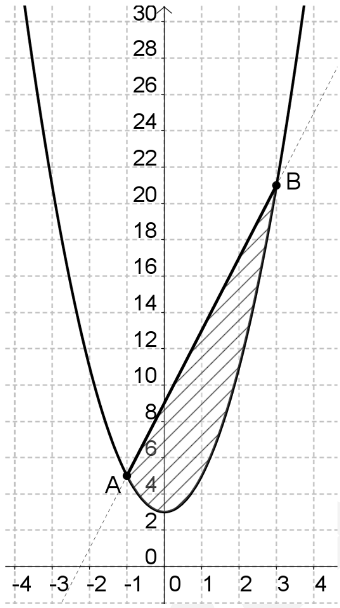
Az A és B pontokra illeszkedő egyenes meredeksége

$$m = \frac{21 - 5}{3 - (-1)} = 4,$$

így az A és B pontkra illeszkedő egyenes egyenlete

$$y = 5 + 4 \cdot (x + 1) \qquad \Rightarrow \qquad y = 4x + 9.$$

A keresett területet az alábbi ábra szemlélteti:



A keresett terület

$$\int_{-1}^{3} 9+4x-(2x^2+3)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} -2x^2+4x+6\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3} = -18+18+18-\frac{2}{3}-2+6 = \frac{64}{3}.$$

152. **Feladat.** Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja, ezen grafikon $x_0 = 2$ pontjába húzott érintő egyenese, az x tengely és az y tengely határolnak?

Megoldás:

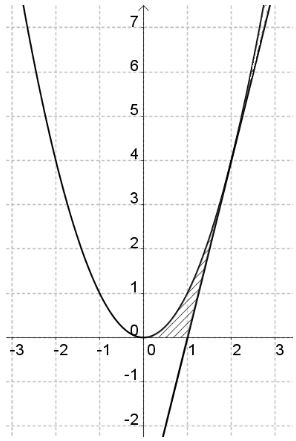
Az $f(x)$ függvény $\big(x_0; f(x_0)\big)$ pontjába húzott érintő egyenesének egyenlete

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0),$$

így mivel $f'(x) = 2x$ és $f'(x_0) = 4$, ezért

$$y = 4+4\cdot(x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y = 4x-4.$$

A keresett területet az alábbi ábra szemlélteti:



A keresett terület

$$\int_0^2 x^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1 \cdot 4}{2} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

153. **Feladat.** Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola átmegy az origón és csúcspontjának koordinátái $(2; 4)$. Mekkora területet határol a parabola és a parabolának az x tengellyel való metszéspontjaiba húzott érintő egyenesei?

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel a parabola átmegy az origón, ezért $c = 0$.

A parabola általános alakját teljes négyzetté alakítva azt kapjuk, hogy

$$y = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x \right) = a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] =$$

$$= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a}.$$

A parabola csúcspontja $(2; 4)$, így

$$\frac{b}{2a} = -2 \qquad -\frac{b^2}{4a} = 4.$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $b = -4a$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$\frac{b^2}{b} = 4 \qquad \Rightarrow \qquad b = 4$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy $a = -1$.

Tehát a parabolát leíró függvény hozzárendelési szabály

$$f(x) = -x^2 + 4x.$$

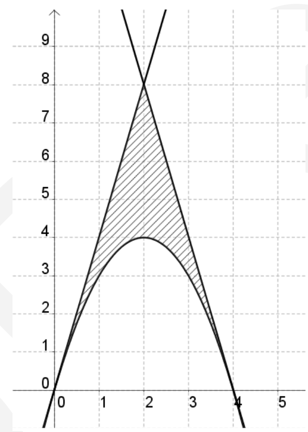
Ennek zérushelyei $x = 0$, illetve $x = 4$. Mivel $f'(x) = -2x + 4$ és $f'(0) = 4$, illetve $f'(4) = -4$, ezért a $f(x)$ függvény grafikonjának zérushelyeihez húzott érintő egyenesek egyenletei

$$y = 0 + 4 \cdot (x - 0) = 4x$$
$$y = 0 - 4 \cdot (x - 4) = 16 - 4x.$$

A két érintő egyenes metszéspontjának x koordinátája a

$$4x = 16 - 4x \qquad \Rightarrow \qquad 8x = 16$$

egyenlet megoldása, amiből azt kapjuk, hogy $x = 2$. A metszéspont második koordinátája $y = 4 \cdot 2 = 8$. Tehát a metszéspont $(2; 8)$.



A $(0; 0)$, $(4; 0)$ és $(2; 8)$ pontok által meghatározott háromszög területe

$$T_{\triangle} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16.$$

A parabolának az x tengellyel bazárt területe

$$T_{parabola} = \int_0^4 4x - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

A keresett terület

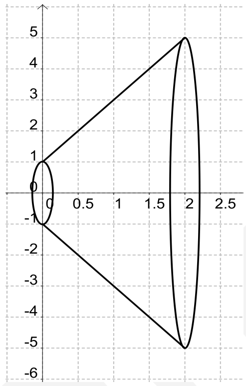
$$T = T_{\triangle} - T_{parabola} = 16 - \frac{32}{3} = \frac{16}{3}.$$

16. Forgástest térfogata

154. **Feladat.** Az $f\colon [0;2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ függvény grafikonját forgassuk meg az x-tengely körül! Számoljuk ki a keletkezett forgástest térfogatát!

Megoldás:

Az $f(x)$ függvény grafikonjának megforgatásával az alábbi forgástest keletkezik:



A forgástest térfogatát a

$$V = \pi \cdot \int_0^2 \big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

képlettel számolhatjuk ki.

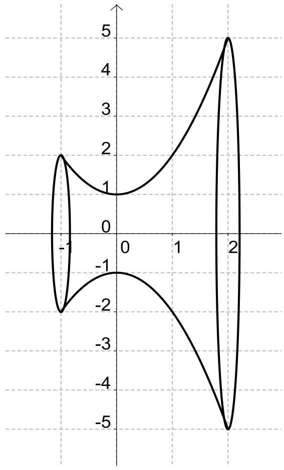
Ezt felhasználva a keresett térfogat:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^2 (2x+1)^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \left[\frac{(2x+1)^3}{6}\right]_0^2 = \\ &= \pi \cdot \left(\frac{(2\cdot 2+1)^3}{6}\right) - \pi \cdot \left(\frac{(2\cdot 0+1)^3}{6}\right) = \\ &= \pi \cdot \frac{124}{6} = \frac{62}{3} \cdot \pi. \end{aligned}$$

155. **Feladat.** Az $f\colon [-1;2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ függvény grafikonját forgassuk meg az x-tengely körül! Számoljuk ki a keletkezett forgástest térfogatát!

Megoldás:

Az $f(x)$ függvény grafikonjának megforgatásával az alábbi forgástest keletkezik:



Mivel

$$\big(f(x)\big)^2 = (x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1,$$

ezért

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} (x^2+1)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{2} x^4 + 2x^2 + 1 \,\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{x^5}{5} + 2\cdot\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{2} = \\ &= \left(\frac{2^5}{5} + 2\cdot\frac{2^3}{3} + 2\right) - \left(\frac{(-1)^5}{5} + 2\cdot\frac{(-1)^3}{3} + (-1)\right) = \\ &= \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1\right) = \\ &= \frac{33}{5} + \frac{18}{3} + 3 = \frac{78}{5}.\end{aligned}$$

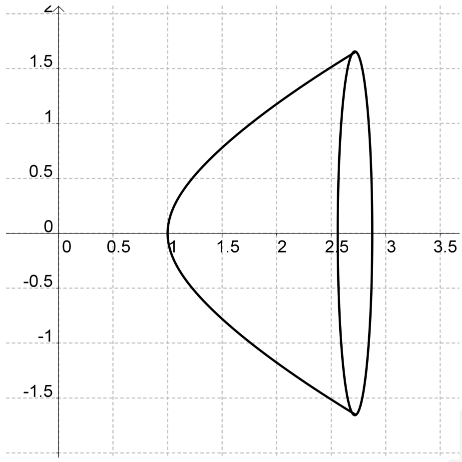
Tehát a keresett térfogat:

$$V = \frac{78}{5}\cdot\pi \approx 49.$$

156. **Feladat.** Az $f\colon [1;\mathrm{e}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x\cdot\ln x}$ függvény grafikonját forgassuk meg az x-tengely körül! Számoljuk ki a keletkezett forgástest térfogatát!

Megoldás:

A forgástestet az alábbi ábra szemlélteti:



Mivel

$$\big(f(x)\big)^2=\left(\sqrt{x\cdot\ln x}\right)^2=x\cdot\ln x,$$

ezért a parciális integrálás tételének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x\cdot\ln x\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\\ &=\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}}=\\ &=\frac{\mathrm{e}^2}{2}\cdot\ln\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}^2}{4}-\left(\frac{1}{2}\cdot\ln 1-\frac{1}{4}\right)=\\ &=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.\end{aligned}$$

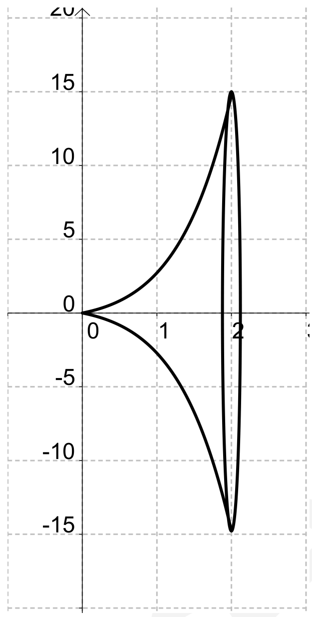
Tehát a térfogat:

$$V=\pi\cdot\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}\approx 6,58.$$

157. **Feladat.** Az $f\colon[0;2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\cdot\mathrm{e}^x$ függvény grafikonját forgassuk meg az x-tengely körül! Számoljuk ki a keletkezett forgástest térfogatát!

Megoldás:

A forgástestet az alábbi ábra szemlélteti:

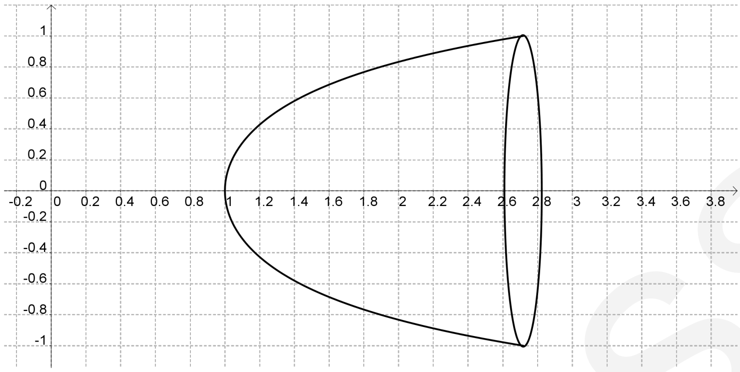


Mivel
$$\big(f(x)\big)^2 = (x \cdot \mathrm{e}^x)^2 = x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x},$$
ezért a parciális integrálás tételének kétszeri alkalmazásával azt kapjuk, hogy
$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^2 - \int_0^2 x \cdot \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^2 - \left(\frac{x \cdot \mathrm{e}^{2x}}{2} - \int_0^2 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= \left[\frac{x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{x \cdot \mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{(2x^2 - 2x + 1) \cdot \mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_0^2 = \\ &= \frac{(8 - 4 + 1) \cdot \mathrm{e}^4 - 1}{4} = \frac{5\mathrm{e}^4 - 1}{4}.\end{aligned}$$
Tehát a téfrogat:
$$V = \pi \cdot \frac{5\mathrm{e}^4 - 1}{4} \approx 213,62.$$

158. **Feladat.** Az $f\colon [1;\mathrm{e}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\ln x}$ függvény grafikonját forgassuk meg az x-tengely körül! Számoljuk ki a keletkezett forgástest térfogatát!

Megoldás:

A keletkezett forgástestet az alábbi ábra szemlélteti:



Mivel

$$\big(f(x)\big)^2 = \left(\sqrt{\ln x}\right)^2 = \ln x,$$

ezért a parciális integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x &= [x \cdot \ln x]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{e} x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \\ &= [x \cdot \ln x - x]_1^{\mathrm{e}} = \\ &= \mathrm{e} \cdot \ln \mathrm{e} - \mathrm{e} - (1 \cdot \ln 1 - 1) = 1.\end{aligned}$$

A keresett térfogat:

$$V = \pi \approx 3,14.$$

159. **Feladat.** Forgassuk meg az x tengely körül azt a körszeletet, amelyet az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű körből az $x - 3y = -5$ egyenletű egyenes levág! Mekkor a keletkezett forgástest térfogata?

Megoldás:

Az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör és az $x - 3y = -5$ egyenletű egyenes metszéspontjait az alakzatok egyenleteiből képzett egyenletrendszer megoldása adja:

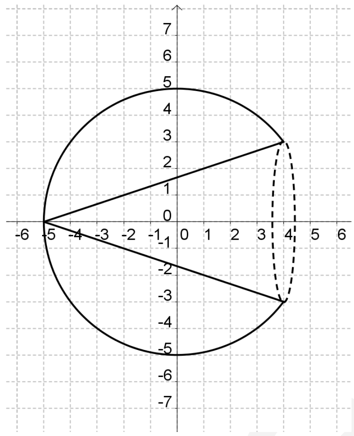
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ x - 3y &= -5. \end{aligned}$$

A második egyenletből kifejezve az x ismeretlent $x = 3y - 5$ adódik. Ezt behelyttesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$9y^2 - 30y + 25 + y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad 10y^2 - 30y = 0 \quad \Rightarrow \quad 10y \cdot (y - 3) = 0,$$

így $y_1 = 0$, illetve $y_2 = 3$. Ezt felhasználva $x_1 = -5$, illetve $x_2 = 4$.

Tehát a kör és az egyenes metszéspontjai: $A = (-5; 0)$ és $B = (4; 3)$.



A körívet leíró függvény $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $x \in [-5; 4]$. Ezen grafikonnak az x tengely körüli megforgatásával keletkezett test térfogata

$$V_1 = \pi \cdot \int_{-5}^{4} \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x \pi \cdot \int_{-5}^{4} 25 - x^2 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_{-5}^{4} = \pi \cdot \left(100 - \frac{64}{3}\right) -$$

$$- \pi \cdot \left(-125 + \frac{125}{3}\right) = 162\pi.$$

Az $x - 3y = -5$ egyenletű egyenes a $g(x) = \frac{x+5}{3}$ függvény grafikonja. Ezen grafikon $[-5; 4]$ intervallumba eső részének az x tengely körüli megforgatásával keletkező térfogata

$$V_2 = \pi \cdot \int_{-5}^{4} \big(g(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_{-5}^{4} \left(\frac{x+5}{3}\right)^2 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{9} \cdot \left[\frac{(x+5)^3}{3}\right]_{-5}^{4} = \frac{\pi}{27} \cdot 9^3 = 27\pi.$$

Tehát a keresett térfogat

$$V = V_1 - V_2 = 162\pi - 27\pi = 135\pi.$$

160. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \sin x$ függvénynek a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon az x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogatát!

Megoldás:

A test térfogata

$$V = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Mivel

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x,$$

ezért az első egyenletből kivonva a másodikat, majd 2-vel osztva mindkét oldalt

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

adódik. Ezt felhasználva

$$V = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \cos 2x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} \right) - 0 - \sin 0 \right] = \frac{\pi^2}{4}.$$

161. **Feladat.** Számoljuk ki integrálszámítás segítségével az r sugarú gömb térfogatát!

Megoldás:

Az $f \colon [-r; r] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkezik az r sugarú gömb. Ezt felhasználva a gömb térfogata

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} =$$
$$= \pi \cdot \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \pi \cdot \left(-r^3 + \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}.$$

162. **Feladat.** Számoljuk ki integrálszámítás segítségével az r sugarú, m magasságú forgásparaboloid térfogatát!

Megoldás:

Az $f\colon [0;m] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{r}{\sqrt{m}} \cdot \sqrt{x}$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkezik a forgásparaboloid. Ezt felhasználva a gömb térfogata

$$V = \pi \cdot \int_0^m \frac{r^2}{m} \cdot x \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{r^2}{m} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^m =$$
$$= \pi \cdot \cdot \frac{r^2}{m} \cdot \frac{m^2}{2} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{2}.$$

163. **Feladat.** Számoljuk ki integrálszámítás segítségével az r sugarú, m magasságú egyenes körhenger térfogatát!

Megoldás:

Az $f\colon [0;m] \to \mathbb{R}$, $f(x) = r$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkezik a henger. Ezt felhasználva a gömb térfogata

$$V = \pi \cdot \int_0^m r^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \left[r^2 \cdot x\right]_0^m = r^2 \cdot \pi \cdot m.$$

17. Függvény grafikonjának ívhossza

164. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \operatorname{ch} x$ függvény grafikonjának ívhosszát a $[-1; 1]$ intervallumon.

Megoldás:

Mivel $f'(x) = \operatorname{sh} x$, ezért az ívhossz

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, \mathrm{d}x.$$

Mivel $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, ezért $\operatorname{ch}^2 x = 1 + \operatorname{sh}^2 x$, így

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{\operatorname{ch}^2 x}\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |\operatorname{ch} x|\, \mathrm{d}x.$$

Mivel a $\operatorname{ch} x$ függvény páros, ezért

$$L = 2 \cdot \int_{0}^{1} \operatorname{ch} x\, \mathrm{d}x = 2 \cdot [\operatorname{sh} x]_0^1 = 2 \cdot \operatorname{sh} 1 \approx 2,35.$$

165. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \sqrt{x^3}$ függvény grafikonjának ívhosszát a $[0; 1]$ intervallumon.

Megoldás:

Mivel $f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$, ezért az ívhossz

$$L = \int_{0}^{1} \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot x}\, \mathrm{d}x.$$

Olyan összetett függvényt kell integrálnunk, ahol a belső függvény elsőfokú. Ezt felhasználva az ívhossz

$$L = \left[\frac{\left(1 + \frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{4}{9} \right] = \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}\right)^3} \cdot \frac{8}{27} \right].$$

A Newton-Leibniz tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$L = \frac{8}{27} \cdot \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} - \frac{8}{27} \approx 1,44.$$

166. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^2$ függvény grafikonjának ívhosszát a $[0;4]$ intervallumon.

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel $f'(x) = 2x$, így $\left(f'(x)\right)^2 = 4x^2$, tehát

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Először meghatározzuk a $\sqrt{1+4x^2}$ függvény egy primitív függvényét.

Elvégezzük a $2x = \operatorname{sh} t$ helyettesítést. Ekkor

$$x = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sh} t,$$

így

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ch} t.$$

A helyettesítés végrehajtása után azt kapjuk, hogy

$$I = \int \sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t.$$

A hiperbolikus függvényekre vonatkozó

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{ch}^2 t = 1 + \operatorname{sh}^2 t,$$

azonosság miatt

$$I = \int \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t.$$

A

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$
$$\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch} 2t$$

hiperbolikus azonosságok megfelelő oldalait összeadva, majd a kapott egyenletet 2-vel osztva azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{ch}^2 t = \frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2}.$$

Ezt felhasználva

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} \right) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.
Mivel

$$t = \operatorname{arsh} 2x,$$

ezért

$$I = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{8} \cdot \operatorname{sh} \big(2 \cdot \operatorname{arsh} 2x\big) + c.$$

Mivel $\operatorname{sh} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sh} \alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha$, ezért

$$I = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \operatorname{sh} \big(\operatorname{arsh} 2x\big) \cdot \operatorname{ch} \big(\operatorname{arsh} 2x\big) + c.$$

Mivel $\operatorname{sh} \big(\operatorname{arsh} x\big) = x$, ezért

$$I = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \operatorname{ch} \big(\operatorname{arsh} 2x\big) + c.$$

Mivel $\operatorname{ch} \alpha = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \alpha}$, ezért

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \big(\operatorname{arsh} 2x\big)} + c = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} + c. \end{aligned}$$

Tehát

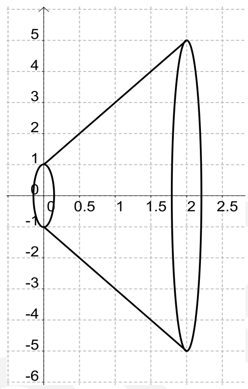
$$\begin{aligned} L &= \int\limits_0^4 \sqrt{1 + 4x^2}\, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4} \cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 + 4x^2} \right]_0^4 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arsh} 8 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{65} \approx 16,82. \end{aligned}$$

18. Forgástest palástjának területe

167. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = 2x + 1$ ($x \in [0; 2]$) függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának területét.

Megoldás:

A testet az alábbi ábra szemlélteti:



A palást területe

$$A = 2\pi \cdot \int_0^2 f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Mivel $f'(x) = 2$, így $\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} = \sqrt{5}$, tehát a palást területe

$$A = 2\pi \cdot \int_0^2 (2x + 1) \cdot \sqrt{5}\, \mathrm{d}x = 2\pi \cdot \sqrt{5} \cdot \left[\frac{(2x+1)^2}{2 \cdot 2}\right]_0^2 =$$

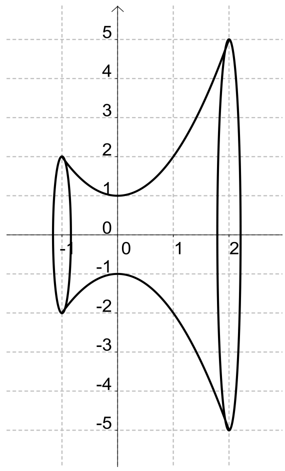
$$= 2\pi \cdot \left(\frac{(2 \cdot 2 + 1)^2}{4}\right) - 2\pi \cdot \left(\frac{(2 \cdot 0 + 1)^2}{4}\right) =$$

$$= 2\pi \cdot 6 \cdot \sqrt{5} = 12\pi \cdot \sqrt{5} \approx 84,3.$$

168. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^2 + 1$ ($x \in [-1; 2]$) függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának területét.

Megoldás:

A testet az alábbi ábra szemlélteti:



Az $f(x)$ függvény deriváltja: $f'(x) = 2x$.

Ki kell számolnunk a

$$2\pi \cdot \int_{-1}^{2} (x^2+1) \cdot \sqrt{1+4x^2}\, \mathrm{d}x$$

integrált.

Először meghatározzuk az $(x^2+1) \cdot \sqrt{1+4x^2}$ egy primitív függvényét.

Elvégezzük a $2x = \operatorname{sh} t$ helyettesítést. Ekkor

$$x = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sh} t,$$

így

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ch} t.$$

A helyettesítés végrehajtása után azt kapjuk, hogy

$$I = \int (x^2+1) \cdot \sqrt{1+4x^2}\, \mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(\frac{1}{4} \cdot \operatorname{sh}^2 t + 1 \right) \cdot \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ch} t \, \mathrm{d}t.$$

A hiperbolikus függvényekre vonatkozó

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{ch}^2 t = 1 + \operatorname{sh}^2 t,$$

azonosság miatt

$$I = \int \left(\frac{1}{4} \cdot \operatorname{sh}^2 t + 1\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ch}^2 t \, \mathrm{d}t.$$

A primitív függvény tulajdonságai miatt

$$I = \frac{1}{8} \cdot \int \operatorname{sh}^2 t \cdot \operatorname{ch}^2 t \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \cdot \int \operatorname{ch}^2 t \, \mathrm{d}t.$$

Mivel

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \cdot \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{sh}^2 2t = 4 \cdot \operatorname{sh}^2 t \cdot \operatorname{ch}^2 t,$$

ezért

$$\operatorname{sh}^2 t \cdot \operatorname{ch}^2 t = \frac{\operatorname{sh}^2 2t}{4},$$

így

$$I = \frac{1}{32} \cdot \int \operatorname{sh}^2 2t \, \mathrm{d}t + \frac{1}{4} \cdot \int t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} \, \mathrm{d}t.$$

Az

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 2t - \operatorname{sh}^2 2t &= 1 \\ \operatorname{ch}^2 2t + \operatorname{sh}^2 2t &= \operatorname{ch} 4t \end{aligned}$$

egyenletek megfelelő oldalait kivonva egymásból, majd a kapott egyenletet 2-vel osztva azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{sh}^2 2t = \frac{\operatorname{ch} 4t - 1}{2},$$

így

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{32} \cdot \int \frac{\operatorname{ch} 4t - 1}{2} \, \mathrm{d}t + \frac{1}{4} \cdot \int t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} \, \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{\operatorname{sh} 4t}{4} - t\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}\right) + c = \\ &= \frac{1}{256} \cdot \operatorname{sh} 4t + \frac{13}{64} t + \frac{1}{8} \operatorname{sh} 2t + c, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.
Mivel

$$t = \operatorname{arsh} 2x,$$

ezért

$$I = \frac{1}{256} \cdot \operatorname{sh}\big(4 \cdot (\operatorname{arsh} 2x)\big) + \frac{13}{64} \cdot \operatorname{arsh} 2x + \frac{1}{8} \cdot \operatorname{sh}\big(2 \cdot \operatorname{arsh} 2x\big) + c.$$

Tehát

$$\int\limits_{-1}^{2} (x^2+1)\cdot\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{1}{256}\cdot \operatorname{sh}\big(4\cdot(\operatorname{arsh}2x)\big) + \frac{13}{64}\cdot \operatorname{arsh}2x + \frac{1}{8}\cdot \operatorname{sh}\big(2\cdot \operatorname{arsh}2x\big)\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sh}\big(4\cdot(\operatorname{arsh}4)\big)}{256} + \frac{13}{64}\cdot\operatorname{arsh}4 + \frac{\operatorname{sh}\big(2\cdot\operatorname{arsh}4\big)}{8}\right) -$$

$$- \left(\frac{\operatorname{sh}\big(4\cdot(\operatorname{arsh}(-2))\big)}{256} + \frac{13}{64}\cdot\operatorname{arsh}(-2) + \frac{\operatorname{sh}\big(2\cdot\operatorname{arsh}(-2)\big)}{8}\right) \approx$$

$$\approx 15,2.$$

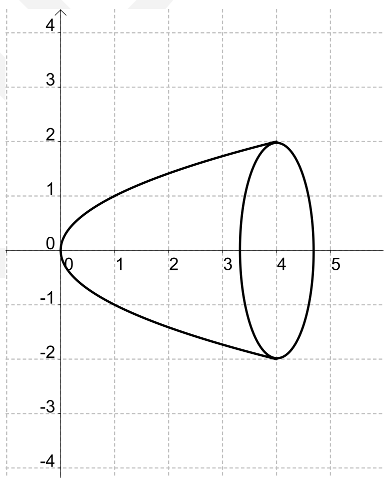
A forgástest palástjának területe

$$A = 2\pi\cdot 15,2 \approx 95,5.$$

169. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0;4]$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának területét.

<u>**Megoldás**</u>:

A keletkezett testet az alábbi ábra szemlélteti:



Az $f(x)$ függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}.$$

A palást területe

$$A = 2\pi \cdot \int\limits_0^4 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, \mathrm{d}x = 2\pi \cdot \int\limits_0^4 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, \mathrm{d}x =$$

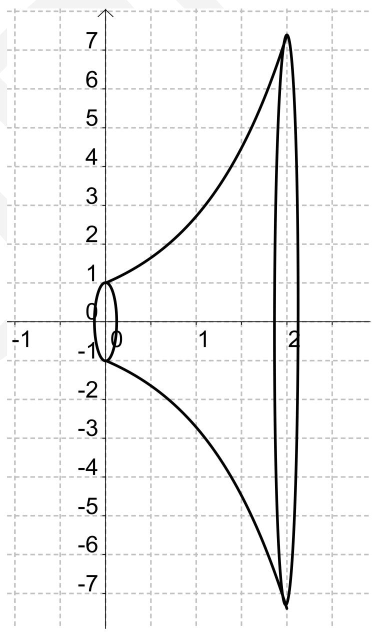
$$= \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \right]_0^4 = \left(\frac{17}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{17 \cdot \sqrt{17}}{8} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{17 \cdot \sqrt{17} - 1}{6} \cdot \pi \approx 36,18.$$

170. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in [0; 2]$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest palástjának területét.

Solution:

A testet az alábbi ábra szemlélteti:



Az $f(x)$ függvény deriváltja: $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

A palást felszíne

$$S = 2\pi \cdot \int_0^2 f(x) \cdot \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Tehát

$$S = 2\pi \cdot \int_0^2 \mathrm{e}^x \cdot \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x.$$

Először meghatározzuk az

$$\mathrm{e}^x \cdot \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}$$

függvény egy primitív függvényét.

Legyen

$$I = \int \mathrm{e}^x \cdot \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x.$$

Elvégezzük az $\mathrm{e}^x = t$ helyettesítést. Ekkor

$$x = \ln t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t},$$

így

$$I = \int t \cdot \sqrt{1 + t^2} \cdot \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{1 + t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Most hajtsuk végre a $t = \operatorname{sh} y$ helyettesítést. Ekkor

$$\frac{dt}{dy} = \operatorname{ch} y,$$

így

$$y = \text{armathrmsh}\ t,$$

tehát

$$I = \int \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y} \cdot \operatorname{ch} y\,\mathrm{d}y = \int \operatorname{ch}^2 y.$$

Az

$$\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$$
$$\operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch} 2y,$$

egyenletekből azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{ch}^2 y = \frac{1 + \operatorname{ch} 2y}{2},$$

így
$$I = \frac{1}{2} \cdot \left(y + \frac{\operatorname{sh} 2y}{2} \right).$$

Mivel
$$\operatorname{sh} 2y = 2 \cdot \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{ch} y = 2 \cdot \operatorname{sh}(\operatorname{arsh} t) \cdot \operatorname{ch}(\operatorname{arsh} t) =$$
$$= 2 \cdot t \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ch}^2(\operatorname{arch} t)} = 2 \cdot t \cdot \sqrt{1 + t^2},$$

ezért
$$I = \frac{1}{2} \cdot \left(\operatorname{arsh} t + t \cdot \sqrt{1 + t^2} \right).$$

Felhasználva, hogy $t = \mathrm{e}^x$, azt kapjuk, hogy
$$I = \frac{\operatorname{arsh} \mathrm{e}^x}{2} + \frac{\mathrm{e}^x \cdot \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}}{2},$$

így
$$A = 2\pi \cdot \left[\frac{\operatorname{arsh} \mathrm{e}^x}{2} + \frac{\mathrm{e}^x \cdot \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}}}{2} \right]_0^2,$$

tehát a palást területe
$$A = \pi \cdot \left(\operatorname{arsh} \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 \cdot \sqrt{1 + \mathrm{e}^4} - \operatorname{arsh} 1 - \sqrt{2} \right) \approx 174,35.$$

171. **Feladat.** Számoljuk ki integrálszámítás segítségével az r sugarú gömb térfogatát!

Megoldás:

Az $f\colon [-r; r] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával kapjuk meg a gömböt. Mivel
$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

ezért
$$\left(f'(x)\right)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}.$$

A gömb felszíne

$$A = 2\pi \cdot \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \cdot \int\limits_{-r}^{r} r\,\mathrm{d}x = 2\pi \cdot [r \cdot x]_{-r}^{r} = 4r^2 \cdot \pi.$$

19. Vékony huzal, rúd és síklemez tömege

172. **Feladat.** Egy vékony lemezt az $x = 1$, az $x = 4$ és $y = 0$ egyenesek, valamint az $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ függvény grafikonja határol. A lemez sűrűsége az $(x; y)$ koordinátájú pontban $\rho(x) = \frac{1}{x}\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}}\right]$. Határozzuk meg a lemez tömegét!

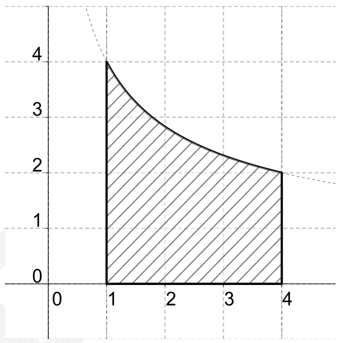
Megoldás:

A síklemezt a

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

halmaz adja meg.

A lemez ábrázolása:



A lemez tömege

$$m = \int_1^4 \rho(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{1}{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{4}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[4 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_1^4 = \left[-\frac{8}{\sqrt{x}}\right]_1^4 = -\frac{8}{2} + \frac{8}{1} = 4\,[\text{g}].$$

173. **Feladat.** Egy vékony lemezt az $x = 2$, az $x = 7$ és $y = 0$ egyenesek, valamint az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja határol. A lemez sűrűsége az $(x; y)$ koordinátájú pontban $\rho(x) = \sqrt{x+2}\left[\frac{\text{g}}{\text{cm}}\right]$. Határozzuk meg a lemez tömegét!

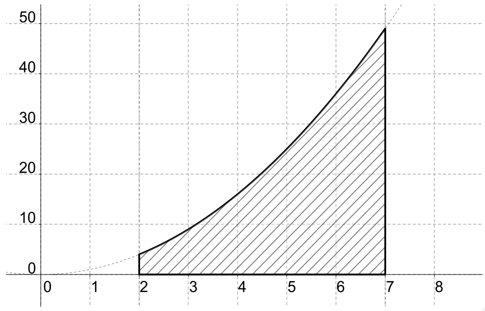
Megoldás:

A síklemezt a

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

halmaz adja meg.

A lemez ábrázolása:



A lemez tömege

$$m = \int_2^7 \rho(x) \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^7 x^2 \cdot \sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x.$$

Vezessük be a $\sqrt{x+2} = t$ helyettesítést! Ekkor

$$x + 2 = t^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = t^2 - 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = 2t$$

és az integrálás határai

$$\sqrt{2+2} = 2,$$

illetve

$$\sqrt{7+2} = 3.$$

Tehát

$$m = \int_2^7 x^2 \cdot \sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 (t^2-2)^2 \cdot t \cdot 2t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_2^3 2t^6 - 8t^4 + 8t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2t^7}{7} - \frac{8t^5}{5} + \frac{8t^3}{3}\right]_2^3 =$$

$$= \left(\frac{2\cdot 3^7}{7} - \frac{8\cdot 3^5}{5} + \frac{8\cdot 3^3}{3}\right) - \left(\frac{2\cdot 2^7}{7} - \frac{8\cdot 2^5}{5} + \frac{8\cdot 2^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{31\,642}{105} \approx 301,35\,[\mathrm{g}].$$

174. **Feladat.** Egy $10\,[\mathrm{m}]$ hosszúságú rúd az x-tengely pozitív irányába vastagszik és sűrűségét a $\rho(x) = 1 + \frac{x}{10}\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right]$ függvény írja le. Határozzuk meg a tömegét!

Megoldás:

A rúd tömege

$$m = \int_0^{10} 1 + \frac{x}{10}\,\mathrm{d}x = \left[x + \frac{x^2}{20}\right]_0^{10} = 15\,[\mathrm{kg}].$$

175. **Feladat.** Az x-tengely $[0;2]$ intervallumát lefedő vékony rúd sűrűségét a

$$\rho(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ x, & \text{ha } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

függvény adja meg, ahol a mértékegységet $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right]$-ben értjük. Határozzuk meg a tömegét!

Megoldás:

Mivel egyrészt

$$\int_0^1 2 - x\,\mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,[\mathrm{kg}],$$

másrészt

$$\int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,[\mathrm{kg}],$$

ezért a rúd tömege

$$m = \int_0^2 \rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2 - x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3\,[\mathrm{kg}].$$

176. **Feladat.** Az x-tengely $[0;2]$ intervallumát lefedő vékony rúd sűrűségét a

$$\rho(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 2, & \text{ha } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

függvény adja meg, ahol a mértékegységet $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right]$-ben értjük. Határozzuk meg a tömegét!

Megoldás:

Mivel egyrészt

$$\int_0^1 x+1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}\,[\mathrm{kg}],$$

másrészt

$$\int_1^2 2\,\mathrm{d}x = [2x]_1^2 = 4-1 = 3\,[\mathrm{kg}],$$

ezért a rúd tömege

$$m = \int_0^2 \rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x+1\,\mathrm{d}x + \int_1^2 2\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}+3 = 4,5\,[\mathrm{kg}].$$

20. Vékony huzal, rúd és síklemez tömegközéppontja és súlypontja

177. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x)=\sqrt{2x}$ függvénynek a $[0;2]$ intervallumon az x-tengely által határolt homogén síklemez súlypontját!

Megoldás:

A síklemez súlypontjának koordinátái

$$x_s=\frac{\int\limits_a^b x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x};\qquad y_s=\frac{\frac{1}{2}\cdot\int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Mivel

$$\int_0^2\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\sqrt{2}\cdot\left[\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}\right]_0^2=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{8}\right)=\frac{8}{3}$$

és

$$\int_0^2 x\cdot\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cdot\int_0^2 x\cdot\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cdot\int_0^2 x\cdot x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=$$

$$\sqrt{2}\cdot\int_0^2\cdot x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cdot\left[\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\right]_0^2=\sqrt{2}\left[\frac{2}{5}\cdot\sqrt{x^5}\right]_0^2=$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{2}{5}\cdot\sqrt{32}\right)=\frac{16}{5},$$

ezért

$$x_s=\frac{\frac{16}{5}}{\frac{8}{3}}=\frac{16}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{6}{5}.$$

Másrészt mivel

$$\int_0^2 2x\,\mathrm{d}x=[x^2]_0^2=4,$$

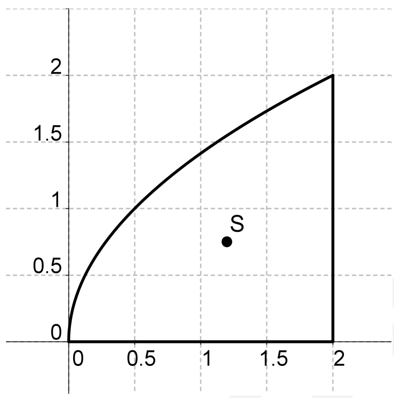
ezért

$$y_s=\frac{2}{\frac{8}{3}}=\frac{3}{4}.$$

Tehát a súlypont

$$S = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{4}\right).$$

A homogén síklemezet és a súlypontot az alábbi ábra szemlélteti:



178. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \cos x$ függvénynek a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon az x-tengely által határolt homogén síklemez súlypontját!

<u>**Megoldás**</u>:

A síklemez súlypontjának koordinátái

$$x_s = \frac{\int\limits_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}; \qquad y_s = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_a^b \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Mivel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

és a parciális integrálás képlete szerint az $x \cdot \cos x$ függvény egy primitív függvénye

$$\int x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = x \cdot \sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x \cdot \sin x + \cos x,$$

ezért

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = [x \cdot \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - (0 \cdot \sin 0 + \cos 0) = \frac{\pi}{2} - 1,$$

így

$$x_s = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{1} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Másrészt ki kell számolnunk a $\cos^2 x$ függvény egy primitív függvényét. Az alábbi két azonosság megfelelő oldalait összeadva

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x,$$

azt kapjuk, hogy

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Ezt felhasználva

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(0 + \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

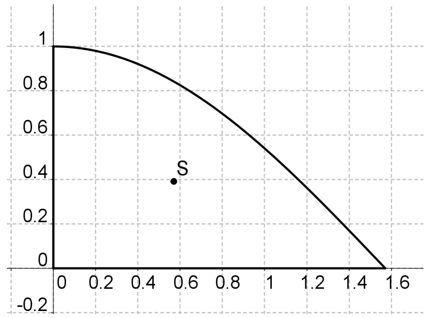
ezért

$$y_s = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Tehát a súlypont

$$S = \left(\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{8}\right).$$

A homogén síklemezet és a súlypontot az alábbi ábra szemlélteti:



179. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvénynek a $[0; 2]$ intervallumon az x-tengely által határolt homogén síklemez súlypontját!

Megoldás:

A síklemez súlypontjának koordinátái

$$x_s = \frac{\int\limits_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}; \qquad y_s = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Mivel

$$\int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^2 = \mathrm{e}^2 - 1.$$

és a parciális integrálás képlete szerint az $x \cdot \mathrm{e}^x$ függvény egy primitív függvénye

$$\int x \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x \cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x,$$

ezért

$$\int\limits_0^2 x \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x \cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x]_0^2 =$$
$$= 2\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^2 + 1 = \mathrm{e}^2 + 1,$$

így

$$x_s = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{\mathrm{e}^2 - 1} \approx 1,313.$$

Mivel

$$\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^4-1}{2}$$

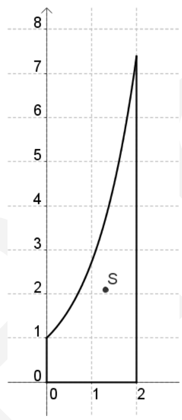
ezért

$$y_s = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\mathrm{e}^4-1}{2}}{\mathrm{e}^2-1} \approx 2,097.$$

Tehát a súlypont

$$S = \left(\frac{\pi}{2}-1, \frac{\pi}{8}\right) \approx (1,313; 2,097).$$

A homogén síklemezet és a súlypontot az alábbi ábra szemlélteti:



180. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^2$ függvénynek a $[0; 3]$ intervallumon az x-tengely által határolt homogén síklemez súlypontját!

Megoldás:

A síklemez súlypontjának koordinátái

$$x_s = \frac{\int\limits_a^b x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}; \qquad y_s = \frac{\frac{1}{2}\cdot\int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Mivel

$$\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$$

és

$$\int_0^3 x \cdot x^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^3 x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \frac{81}{4},$$

ezért

$$x_s = \frac{\frac{81}{9}}{9} = \frac{9}{4}.$$

Mivel

$$\int_0^3 x^4 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \frac{243}{5},$$

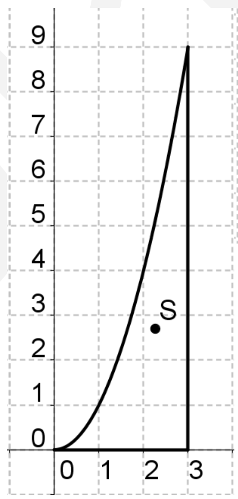
ezért

$$y_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{243}{5}}{9} = \frac{27}{10}.$$

Tehát a súlypont

$$S = \left(\frac{9}{4}; \frac{27}{10}\right).$$

A homogén síklemezet és a súlypontot az alábbi ábra szemlélteti:



181. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \frac{4}{x}$ függvénynek a $[1; 4]$ intervallumon az x-tengely által határolt homogén síklemez súlypontját!

<u>**Megoldás**</u>:

A síklemez súlypontjának koordinátái

$$x_s = \frac{\int\limits_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}; \qquad y_s = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Mivel

$$\int_1^4 \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x = [4 \cdot \ln x]_1^4 = 4 \cdot \ln 4$$

és

$$\int_1^4 x \cdot \frac{4}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 4\,\mathrm{d}x = [4x]_1^4 = 12,$$

ezért

$$x_s = \frac{12}{4 \cdot \ln 4} \approx 2,164.$$

Mivel

$$\int_1^4 \frac{16}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{16}{x}\right]_1^4 = -4 + 16 = 12,$$

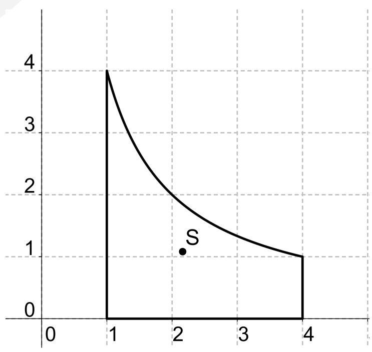
ezért

$$y_s = \frac{6}{4 \cdot \ln 4} \approx 1,082.$$

Tehát a súlypont

$$S = (2,164; 1,082)\,.$$

A homogén síklemezt és a súlypontot az alábbi ábra szemlélteti:



182. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = \ln x$ függvénynek a $[1; \mathrm{e}]$ intervallumon az x-tengely által határolt homogén síklemez súlypontját!

Megoldás:

A síklemez súlypontjának koordinátái

$$x_s = \frac{\int\limits_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}; \qquad y_s = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int\limits_a^b \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

A parciális integrálás képlete szerint az $\ln x$ függvény egy primitív függvény

$$\int \ln x\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln x - x,$$

ezért

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = [x \cdot \ln x - x]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - \mathrm{e} - (\ln 1 - 1) = 1.$$

Másrészt szintén a parciális integrálás képletét alkalmazva az $x \cdot \ln x$ függvény egy primitív függvénye

$$\int x \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4},$$

ezért

$$\int_1^{\mathrm{e}} x \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}.$$

Tehát

$$x_s = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4} \approx 2,097.$$

Az $\ln^2 x$ függvény egy primitív függvényét helyettesítéses integrálással keressük meg. Alkalmazzuk az $\ln x = t$ helyettesítést. Ekkor

$$x = \mathrm{e}^t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \mathrm{e}^t.$$

A helyettesítés elvégzése után az

$$\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x = \int t^2 \cdot \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

integrálhoz jutunk. Erre kétszer alkalmazva a parciális integárlás képletét azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int t^2 \cdot \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t &= t^2 \cdot \mathrm{e}^t - \int 2t \cdot \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \\ &= t^2 \cdot \mathrm{e}^t - 2t \cdot \mathrm{e}^t + 2 \cdot \int \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \\ &= (t^2 - 2t + 2) \cdot \mathrm{e}^t.\end{aligned}$$

Mivel $\ln x = t$, ezért

$$\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x = (\ln^2 x - 2 \cdot \ln x + 2) \cdot x.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \ln^2 x \, \mathrm{d}x &= \left[(\ln^2 x - 2 \cdot \ln x + 2) \cdot x\right]_1^{\mathrm{e}} = \\ &= \mathrm{e} \cdot (1 - 2 + 2) - 1 \cdot (0 - 0 + 2) = \mathrm{e} - 2,\end{aligned}$$

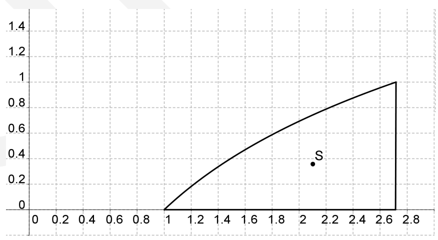
ezért

$$y_s = \frac{\mathrm{e} - 2}{2} \approx 0,359.$$

Tehát a súlypont

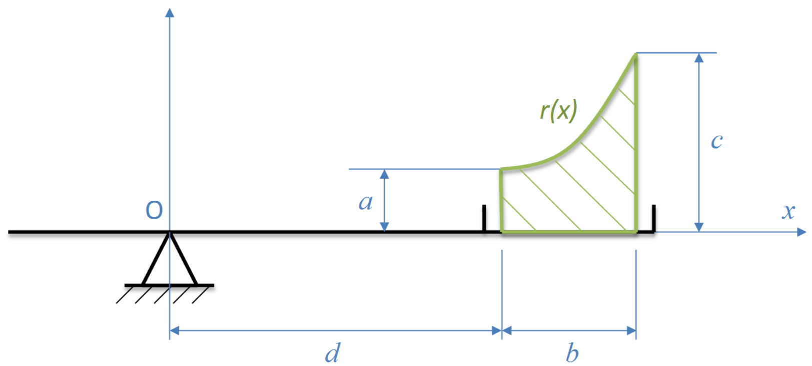
$$S = \left(\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4} ; \frac{\mathrm{e} - 1}{2} \right) \approx (2,097; 0,359)\,.$$

A homogén síklemezet és a súlypontot az alábbi ábra szemlélteti:



21. Vonal mentén megoszló párhuzamos erőrendszer

183. **Feladat.** Az ábra egy egyensúlyban lévő kétkarú mérleget mutat, amelynek egyik serpenyőjében egy acélból készült hasáb található.



A hasáb hossztengelye merőleges az ábra síkjára, így az ábrán a hasáb alaplapja látható. Az ábrán jelzett geometriai adatokon kívül ismert a hasáb hossztengely irányú l mérete, ρ sűrűsége, valamint a gravitációs gyorsulás g értéke. Továbbá tudjuk, hogy a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő f intenzitása, és a hasáb keresztmetszetét jellemző r függvénygörbe közötti összefüggés az alábbi:

$$f(x) = -l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x).$$

Ismertel az alábbi adatok:

$$a = 0,05\,[\mathrm{m}]; \quad b = 0,1\,[\mathrm{m}]; \quad c = 0,15\,[\mathrm{m}]; \quad l = 0,1\,[\mathrm{m}];$$
$$d = 0,25\,[\mathrm{m}]; \quad \rho = 7\,800\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]; \quad g = 9,81\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

a) Írjuk fel az r függvényt, ha tudjuk, hogy annak képe parabola, amelynek csúcspontja a $(d; a)$ koordinátájú pont!

b) Határozzuk meg a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő eredőjének nagyságát!

c) Határozzuk meg a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő O pontra vonatkozó skaláris forgatónyomatékát!

d) Számítsuk ki az eredő támadáspontjának O ponttól mért távolságát!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Mivel az r függvény grafikonja parabola alakú és a feltétel szerint a parabola tengelypontja a $(d; a) = (0,25; 0,05)$ pont, ezért a parabola grafikonját leíró függvény:

$$r(x) = a \cdot (x - 0,25)^2 + 0,05.$$

A fenti ábráról az is leolvasható, hogy az r függvény grafikonjára illeszkedik a $(d + b; c) = (0,35; 0,15)$ pont is. Ezt felhasználva az alábbi egyenlethez jutunk:

$$a \cdot (0,35 - 0,25)^2 + 0,05 = 0,15.$$

Az egyenlet megoldására

$$0,01a + 0,05 = 0,15 \quad \Rightarrow \quad 0,01a = 0,1 \quad \Rightarrow \quad a = 10$$

adódik. A parabola grafikonját leíró függvény tehát

$$r(x) = 10 \cdot (x - 0,25)^2 + 0,05 = 10x^2 - 5x + 0,675 \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right].$$

b) A feladat feltételei szerint a serpenyőre kifejtett nyomóerő f intenzitása és a hasáb keresztmetszetét jellemző r függvénygörbe közötti összefüggés:

$$f(x) = -l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x) = -0,1 \cdot 7\,800 \cdot 9,81 \cdot (10x^2 - 5x + 0,675) =$$
$$= -7\,651,8 \cdot (10x^2 - 5x + 0,675).$$

Mivel

$$F = \int\limits_{0,25}^{0,35} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0,25}^{0,35} -7\,651,8 \cdot (10x^2 - 5x + 0,675)\,\mathrm{d}x =$$
$$= -7\,651,8 \cdot \int\limits_{0,25}^{0,35} 10x^2 - 5x + 0,675\,\mathrm{d}x =$$
$$= -7\,651,8 \cdot \left[\frac{10}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 0,675x\right]_{0,25}^{0,35},$$

így a Newton-Leibniz tételt alkalmazva a nyomóerő

$$F = -7\,651,8 \cdot \left(\frac{10}{3} \cdot 0,35^3 - \frac{5}{2} \cdot 0,35^2 + 0,675 \cdot 0,35 \right) +$$
$$+ 7\,651,8 \cdot \left(\frac{10}{3} \cdot 0,25^3 - \frac{5}{2} \cdot 0,25^2 + 0,675 \cdot 0,25 \right) =$$
$$= -7\,651,8 \cdot \frac{1}{120} = -63,765 \text{ [N]}.$$

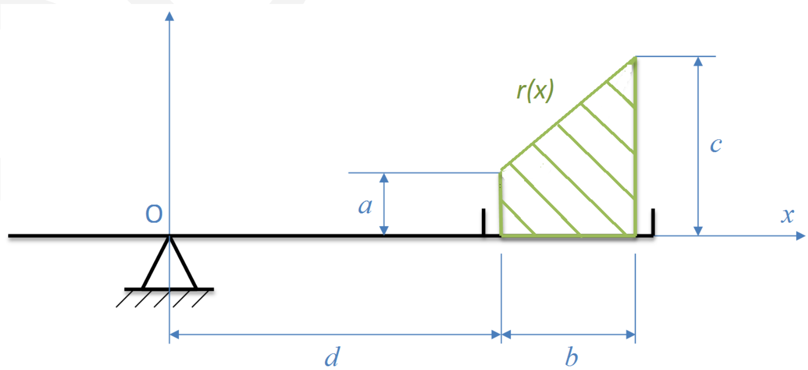
c) A skaláris forgatónyomaték

$$\underset{O}{M} = -\int_{0,25}^{0,35} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = 7\,651,8 \cdot \int_{0,25}^{0,35} 10x^3 - 5x^2 + 0,675x\,\mathrm{d}x =$$
$$= 7\,651,8 \cdot \left[\frac{5}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{27}{80}x^2 \right]_{0,25}^{0,35} = 19,767 \text{ [Nm]}.$$

d) Az eredő támadáspontjának x_F koordinátája

$$x_F = \frac{\int_{0,25}^{0,35} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{0,25}^{0,35} f(x)\,\mathrm{d}x} \approx \frac{-19,767}{-63,765} \approx 0,31.$$

184. **Feladat.** Az ábra egy betonból készült tartóelemet mutat. A jelölt geometriai méreteken kívül ismert a tartóelem z irányú l mérete, ρ sűrűsége és a gravitációs gyorsulás g értéke.



Tudjuk továbbá azt is, hogy a tartóra ható gravitációs erő f intenzitása és a hasáb keresztmetszetét jellemző r függvénygörbe közötti összefüggés az alábbi:

$$f(x) = -l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x).$$

Adatok:

$$a = 2\,[\mathrm{m}]; \quad b = 3\,[\mathrm{m}]; \quad c = 4\,[\mathrm{m}]; \quad d = 8\,[\mathrm{m}]$$
$$\rho = 2\,800 \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]; \quad g = 9,81 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

a) Adjuk meg az r függvényt!
b) Határozzuk meg a tartóelemre ható gravitációs erő eredőjének nagyságát!
c) Határozzuk meg a tartóelemre ható gravitációs erő O pontra vonatkozó skaláris forgatónyomatékát!
d) Számítsuk ki gravitációs erő eredőjének O ponttól mért távolságát! (Ez nem más, mint a tartóelem súlypontjának O ponttól mért x irányú távolsága.)

Megoldás:

a) Az r függvény grafikonja egy egyenes, amelyet

$$r(x) = m \cdot x + k.$$

alakban keresünk. Az ábráról leolvasható, hogy a keresett függvény grafikonjára illeszkednek a $(8;2)$ és a $(11;4)$ pontok. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy teljesülnie kell az alábbi egyenletrendszernek:

$$2 = 8m + k$$
$$4 = 11m + k.$$

Az egyenletrendszer megoldására $m = \frac{2}{3}$ és $k = -\frac{10}{3}$ adódik. Azt kaptuk tehát, hogy a keresett függvény:

$$r(x) = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}.$$

b) A feladat feltételei szerint a tartóra ható gravitációs erő f intenzitása, és a hasáb keresztmetszetét jellemző r függvénygörbe közötti összefüggés

$$f(x) = -l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x) = -3 \cdot 2800 \cdot 9,81 \cdot \left(\frac{2}{3}x - \frac{10}{3}\right) =$$
$$= -82\,404 \cdot \left(\frac{2}{3}x - \frac{10}{3}\right).$$

A nyomóerő

$$F = \int_8^{11} f(x)\,\mathrm{d}x = -82\,404 \cdot \int_8^{11} \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -82\,404 \left[\frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{10}{3}x\right]_8^{11} = -82\,404 \left(\frac{1}{3} \cdot 11^2 - \frac{10}{3} \cdot 11\right) -$$

$$- 82\,404 \left(\frac{1}{3} \cdot 8^2 - \frac{10}{3} \cdot 8\right) \approx -741\,636\,[\mathrm{N}].$$

c) A skaláris forgatónyomaték

$$\underset{O}{M} = -\int_8^{11} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = 82\,404 \cdot \int_8^{11} \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x\,\mathrm{d}x =$$

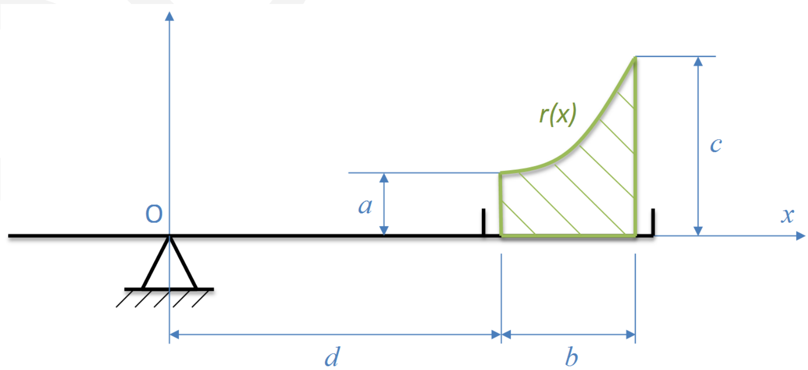
$$= 82\,404 \cdot \left[\frac{2}{9}x^3 - \frac{5}{3}x^2\right]_8^{11} \approx$$

$$\approx 82\,404 \cdot (87) \approx 7\,169\,148\,[\mathrm{Nm}].$$

d) Az eredő támadáspontjának x_F koordinátája

$$x_F = \frac{\int_8^{11} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_8^{11} f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{-7\,169\,148}{741\,636} = -9,67.$$

185. **Feladat.** Az ábra egy egyensúlyban lévő kétkarú mérleget mutat, amelynek egyik serpenyőjében egy hasáb található.



A hasáb hossztengelye merőleges az ábra síkjára, így az ábrán a hasáb alaplapja látható. Az ábrán jelzett geometriai adatokon kívül ismert a hasáb hossztengely irányú l mérete, ρ sűrűsége, valamint a gravitációs gyorsulás g értéke. Továbbá tudjuk, hogy a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő f intenzitása, és a hasáb keresztmetszetét jellemző r függvénygörbe közötti összefüggés az alábbi:

$$f(x) = -l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x).$$

Az alábbi adatokat ismerjük:

$$a = 0,5\,[\mathrm{m}]; \quad b = 1\,[\mathrm{m}]; \quad c = 1,5\,[\mathrm{m}]; \quad l = 0,5\,[\mathrm{m}];$$
$$d = 2\,[\mathrm{m}]; \quad \rho = 5\,000 \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]; \quad g = 9,81 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

a) Adjuk meg az r függvényt!
b) Határozzuk meg a tartóelemre ható gravitációs erő eredőjének nagyságát!
c) Határozzuk meg a tartóelemre ható gravitációs erő O pontra vonatkozó skaláris forgatónyomatékát!
d) Számítsuk ki gravitációs erő eredőjének O ponttól mért távolságát! (Ez nem más, mint a tartóelem súlypontjának O ponttól mért x irányú távolsága.)

Megoldás:

a) Határozzuk meg $r(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ függvény ismeretlen paramétereit!
b) Adjuk meg a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő eredőjének nagyságát!
c) Számoljuk ki a hasáb által a serpenyőre kifejtett nyomóerő O pontra vonatkozó skaláris forgatónyomatékát!
d) Határozzuk meg az eredő támadáspontjának O ponttól mért távolságát!

Megoldás:

a) Mivel az r függvény grafikonjára illeszkedik a $(d; a) = (2; 0,5)$ és a $(d + b; c) = (3; 1,5)$ pont, ezért teljesül az alábbi egyenletrendszer:

$$0,5 = \alpha \cdot 2^2 + \beta$$
$$1,5 = \alpha \cdot 2^3 + \beta.$$

A második egyenletből kivonva az elsőt azt kapjuk, hogy $\alpha = \frac{1}{4}$, amit ha behelyettesítünk például az első egyenletbe $\beta = -\frac{1}{2}$ adódik. Így tehát azt kapjuk, hogy

$$r(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x - \frac{1}{2}.$$

b) A feladat feltételei szerint a serpenyőre kifejtett nyomóerő f intenzitása, és a hasáb keresztmetszetét jellemző r függvénygörbe közötti összefüggés:

$$f(x) = -l \cdot \rho \cdot g \cdot r(x) = -0,5 \cdot 5\,000 \cdot 9,81 \cdot (0,25 \cdot 2^x - 0,5) = \\ = -(6\,131,25 \cdot 2^x - 12\,262,5).$$

A nyomóerő

$$F = \int_2^3 f \,\mathrm{d}x = \int_2^3 6\,131,25 \cdot 2^x - 12\,262,5 \,\mathrm{d}x = \\ = \left[\frac{6\,131,25}{\ln 2} \cdot 2^x - 12\,262,5x\right]_2^3 = -23\,120\,[\mathrm{N}].$$

c) A skaláris forgatónyomaték:

$$\underset{O}{M} = -\int_2^3 x \cdot f(x) \,\mathrm{d}x = \int_2^3 6\,131,25 \cdot x \cdot 2^x - 12\,262,5x \,\mathrm{d}x = \\ = \int_2^3 6\,131,25 \cdot (x \cdot 2^x - 2x) \,\mathrm{d}x.$$

Az $x \cdot 2^x$ függvény egy primitív függvényét a parciális integrálás képletének felhasználásával tudjuk meghatározni:

$$\int x \cdot 2^x \,\mathrm{d}x = x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} \,\mathrm{d}x = x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2}.$$

Ezt felhasználva

$$\underset{O}{M} = 6\,131,25 \cdot \left[x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} - x^2\right]_2^3 \approx 59\,827\,[\mathrm{J}].$$

d) Az eredő támadáspontjának x_F koordinátája:

$$x_F = \frac{\int_2^3 x \cdot f(x) \,\mathrm{d}x}{\int_2^3 f(x) \,\mathrm{d}x} \approx \frac{-59\,827}{23\,120} \approx -2,59.$$

22. Mozgástani feladatok

186. **Feladat.** Egy vízszintes terepen mozgó gépkocsi sebesség-idő függvénye

$$v(t) = A \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-a(t+b)}}{1 + \mathrm{e}^{-a(t+b)}} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad (t \geq 0).$$

Az időt másodpercben mérjük.

a) Határozzuk meg a gépkocsi hely-idő függvényét feltételezve, hogy az indulás pillanatában a hely-idő függvény értéke $s(0) = 0\,[\mathrm{m}]$.

b) Ha

$$A = 36,25 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right];\ a = 0,145 \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right];\ b = 6,494\,[\mathrm{s}],$$

akkor adjuk meg a hely-idő függvényt!

c) Milyen hosszú pályaszakaszt fut be a gépkocsi $10\,[\mathrm{s}]$ alatt?

Megoldás:

a) Mivel

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t A \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-a(\tau+b)}}{1 + \mathrm{e}^{-a(\tau+b)}}\,\mathrm{d}\tau,$$

ezért első lépésben az

$$f(\tau) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-a(\tau+b)}}{1 + \mathrm{e}^{-a(\tau+b)}}$$

függvény egy primitív függvényét keressük meg. Ehhez vezessük be az

$$\mathrm{e}^{-a(\tau+b)} = y$$

helyettesítést. A fenti egyenletből kifejezzük a τ változót:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-a(\tau+b)} &= y \\ -a \cdot (\tau + b) &= \ln y \\ \tau &= -\frac{1}{a} \cdot \ln y - b. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\frac{d\tau}{dy} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{y}.$$

A helyettesítéses integrálás tételét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$-\int \frac{1-y}{1+y} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{y-1}{y \cdot (1+y)} \, \mathrm{d}y.$$

A kapott kifejezésre a parciális törtekre bontás módszerét alkalmazzuk. Az

$$\frac{y-1}{y \cdot (1+y)}$$

törtet

$$\frac{y-1}{y \cdot (1+y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y}$$

alakban keressük, ahol a feladatunk az A és B együtthatók meghatározása. A fenti egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel, majd a kapott egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{y \cdot (1+y)} &= \frac{A}{y} + \frac{B}{1+y} \\ y-1 &= A \cdot (1+y) + B \cdot y \\ y-1 &= (A+B) \cdot y + A \end{aligned}$$

A két oldalon a megfelelő fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításából az alábbi egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ A &= -1. \end{aligned}$$

Az A értékét közvetlenül megkaptuk, amit felhasználva az első egyenletből $B = 2$ adódik. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \cdot \int \frac{y-1}{y \cdot (1+y)} \, \mathrm{d}y &= \frac{1}{a} \cdot \int \frac{-1}{y} + \frac{2}{1+y} \, \mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{a} \cdot (-\ln|y| + 2 \cdot \ln|1+y|) = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \left(-\ln|\mathrm{e}^{-a(\tau+b)}| + 2 \cdot \ln|1 + \mathrm{e}^{-a(\tau+b)}|\right) = \\ &= \frac{1}{a} \cdot \left(a \cdot (\tau+b) + 2 \cdot \ln|1 + \mathrm{e}^{-a(\tau+b)}|\right) = \\ &= \frac{2 \cdot \ln|1 + \mathrm{e}^{-a(\tau+b)}|}{a} + \tau + b. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
s(t) = \int_0^t A \cdot \frac{1-\mathrm{e}^{-a(\tau+b)}}{1+\mathrm{e}^{-a(\tau+b)}} + B \,\mathrm{d}\tau = \\
&= A \cdot \left[\frac{2 \cdot \ln\left|1+\mathrm{e}^{-a(\tau+b)}\right|}{a} + \tau + b + B \cdot \tau \right]_0^t = \\
&= A \cdot \left(\frac{2 \cdot \ln\left|1+\mathrm{e}^{-a(t+b)}\right|}{a} + t + b + B \cdot t - \right. \\
&\left. - \frac{2 \cdot \ln\left|1+\mathrm{e}^{-a \cdot b}\right|}{a} - b \right) = \\
&= A \cdot \left(\frac{2 \cdot \ln\left|1+\mathrm{e}^{-a(t+b)}\right|}{a} + t - \frac{2 \cdot \ln\left|1+\mathrm{e}^{-a \cdot b}\right|}{a} + B \cdot t \right).
\end{aligned}
$$

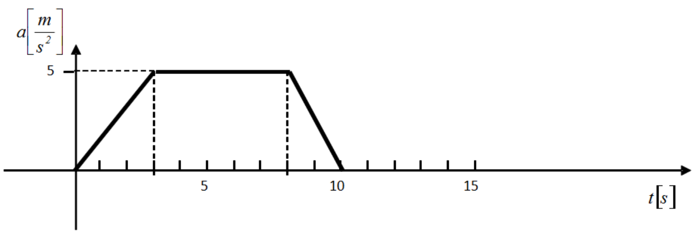
b) Behelyettesítve a megadott értékeket a hely-idő függvényre

$$
\begin{aligned}
s(t) = 36,25 \cdot \left(\frac{2 \cdot \ln\left|1+\mathrm{e}^{-0,145 \cdot (t+6,494)}\right|}{0,145} + t - \right. \\
\left. - \frac{2 \cdot \ln\left|1+\mathrm{e}^{-0,145 \cdot 6,494}\right|}{0,145} - 1,5t \right)
\end{aligned}
$$

adódik.

c) Az első 10 másodpercben $s(10) \approx 27,19\,[\mathrm{m}]$ hosszúságú pályaszakaszt fut be a gépkocsi.

187. **Feladat.** Az alábbi ábra egy álló helyzetből induló gépkocsi gyorsulás-idő függvényét mutatja:



a) Adjuk meg az egyes szakaszokon a gépkocsi gyorsulás-idő függvényét!

b) Határozzuk meg, majd ábrázoljuk az egyes szakaszokon a gépkocsi sebesség-idő függvényét!

c) Határozzuk meg, majd ábrázoljuk az egyes szakaszokon a gépkocsi hely-idő függvényét, ha $s(0) = 0$.

Megoldás:

a) Látható az ábrán, hogy a gyorsulás-idő függvény minden szakaszon legfeljebb elsőfokú polinom függvényekből áll elő. Ezen függvények meredekségét az i-edik szakaszon jelölje m_i, ahol $(i = 0, 1, 2)$. Jelölje t_i és $a(t_i)$ a szakasz kezdetéhez tartozó időpontot és gyorsulást! A fenti jelölésekkel a gyorsulás az i-edik szakaszon:

$$a(t) = a(t_i) + m_i \cdot (t - t_i).$$

Az első szakasz esetén $t \in [0; 3]$. Ekkor

$$a(t) = a(t_0) + m_0 \cdot (t - t_0) = 0 + \frac{5}{3} \cdot (t - 0) = \frac{5}{3} t \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

A második szakasz esetén $t \in [3; 8]$. Ekkor

$$a(t) = a(t_1) + m_1 \cdot (t - t_1) = 5 + 0 \cdot (t - 3) = 5 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

A harmadik szakasz esetén $t \in [8; 10]$. Ekkor

$$a(t) = a(t_2) + m_2 \cdot (t - t_2) = 5 - \frac{5}{2} \cdot (t - 8) = -\frac{5}{2} t + 25 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

Összefoglalva tehát azt kaptuk, hogy

$$a(t) = \begin{cases} \frac{5}{3} t, & \text{ha } 0 \leq t \leq 3 \\ 5, & \text{ha } 3 \leq t \leq 8 \\ -\frac{5}{2} t + 25, & \text{ha } 8 \leq t \leq 10. \end{cases}$$

b) Ha $t \in [0; 3]$, akkor

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0 + \int_{0}^{t} \frac{5}{3} \tau\,\mathrm{d}\tau = \left[\frac{5}{6} \tau^2\right]_0^t = \frac{5}{6} t^2 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ezt felhasználva

$$v(3) = \frac{15}{2} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ha $t \in [3;8]$, akkor

$$v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{15}{2} + \int_{3}^{t} 5\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \frac{15}{2} + [5\tau]_3^t = \frac{15}{2} + 5t - 15 = 5t - \frac{15}{2}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ezt felhasználva

$$v(8) = 5 \cdot 8 - \frac{15}{2} = \frac{65}{2}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

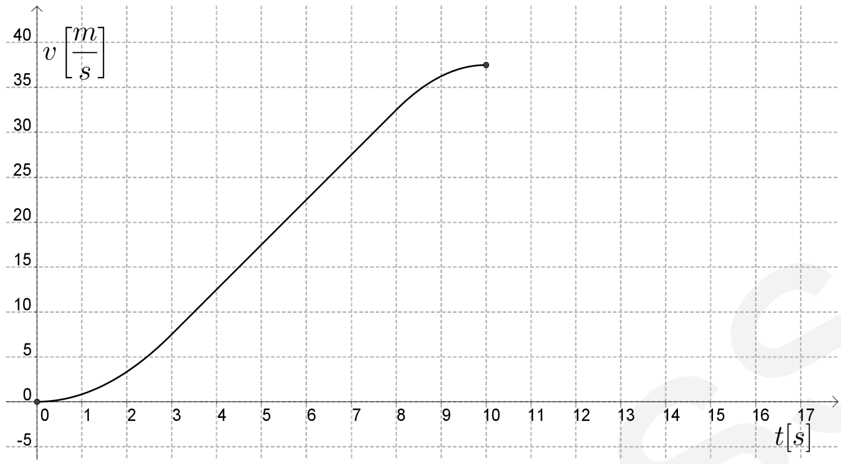
Ha $t \in [8;10]$, akkor

$$v(t) = v(t_2) + \int_{t_2}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{65}{2} + \int_{8}^{t} -\frac{5}{2}\tau + 25\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \frac{65}{2} + \left[-\frac{5}{4}\tau^2 + 25\tau\right]_8^t = \frac{65}{2} - \frac{5}{4}t^2 + 25t + \frac{5}{2}\cdot 32 - 25\cdot 8 =$$
$$= -\frac{5}{4}t^2 + 25t - \frac{175}{2}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] = -\frac{5}{4}\cdot\left[(t-10)^2 - 100 + 70\right] =$$
$$= -\frac{5}{4}\cdot(t-10)^2 + \frac{75}{2}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$v(t) = \begin{cases} \frac{5}{6}t^2, & \text{ha } 0 \le t \le 3 \\ 5t - \frac{15}{2}, & \text{ha } 3 \le t \le 8 \\ -\frac{5}{4}t^2 + 25t - \frac{175}{2}, & \text{ha } 8 \le t \le 10. \end{cases}$$

A sebesség-idő függvény grafikonja:



Ha $t \in [0; 3]$, akkor

$$s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0 + \int_{0}^{t} \frac{5}{6}\tau^2\,\mathrm{d}\tau = \left[\frac{5}{18}\tau^3\right]_0^t = \frac{5}{18}t^3 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ezt felhasználva

$$s(3) = \frac{5}{18} \cdot 27 = \frac{15}{2} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ha $t \in [3; 8]$, akkor

$$\begin{aligned} s(t) = s(t_1) + \int_{t_1}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \frac{15}{2} + \int_{3}^{t} 5\tau - \frac{15}{2}\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{15}{2} + \left[\frac{5}{2}\tau^2 - \frac{15}{2}\tau\right]_3^t = \\ &= \frac{15}{2} + \frac{5}{2}t^2 - \frac{15}{2}t - \frac{45}{2} + \frac{45}{2} = \\ &= \frac{5}{2}t^2 - \frac{15}{2}t + \frac{15}{2} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva

$$s(8) = \frac{5}{2} \cdot 64 - \frac{15}{2} \cdot 8 + \frac{15}{2} = \frac{215}{2} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Ha $t \in [8; 10]$, akkor

$$s(t) = s(t_2) + \int_{t_2}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{215}{2} + \int_{8}^{t} -\frac{5}{4}\tau^2 + 25\tau - \frac{175}{2}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{215}{2} + \left[-\frac{5}{12}\tau^3 + \frac{25}{2}\tau^2 - \frac{175}{2}\tau\right]_8^t =$$

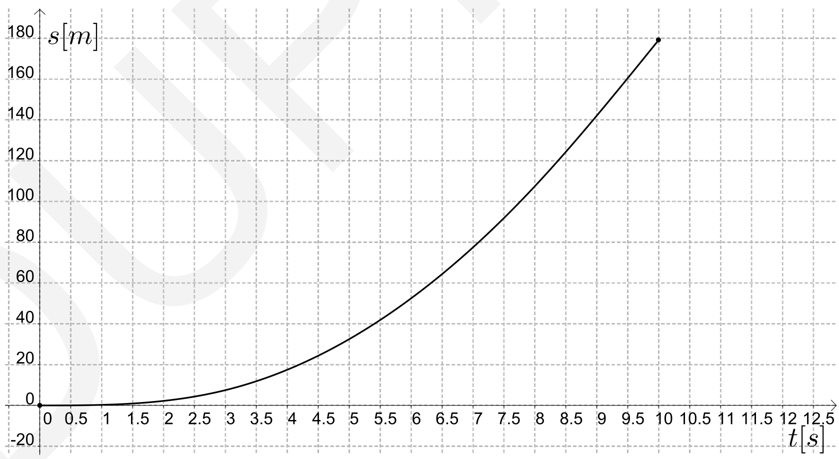
$$= \frac{215}{2} - \frac{5}{12}t^3 + \frac{25}{2}t^2 - \frac{175}{2}t + \frac{5}{12}\cdot 512 - \frac{25}{2}\cdot 64 + \frac{175}{2}\cdot 8 =$$

$$= -\frac{5}{12}t^3 + \frac{25}{2}t^2 - \frac{175}{2}t + \frac{1325}{6}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$s(t) = \begin{cases} \dfrac{5}{18}t^3, & \text{ha } 0 \le t \le 3 \\ \dfrac{5}{2}t^2 - \dfrac{15}{2}t + \dfrac{15}{2}, & \text{ha } 3 \le t \le 8 \\ -\dfrac{5}{12}t^3 + \dfrac{25}{2}t^2 - \dfrac{175}{2}t + \dfrac{1325}{6}, & \text{ha } 8 \le t \le 10. \end{cases}$$

A hely-idő függvény grafikonja:



188. **Feladat.** Egy hajó a tenger fenekéről a

$$v(t) = A \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-Bt}\right)$$

sebesség-idő függvény szerint emelkedik.

a) Határozzuk meg a hajó hely-idő függvényét, feltételezve, hogy a magasságot a tenger fenekétől mérjük és feltételezzük, hogy $s(0) = 0\,[\mathrm{m}]$.

b) Amennyiben
$$A = 6,412\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right];\ B = 0,459\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right],$$
úgy adjuk meg a hely-idő függvényt!

c) Mennyit emelkedik a hajó 15 [s], illetve 20 [s] alatt?

d) Adjuk meg a gyorsulás-idő függvényt!

e) Határozzuk meg a gyorsulás-idő függvény végtelenbeli határértékét!

Megoldás:

a) A hely-idő függvény
$$s(t) = s(t_0) + \int_0^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = s(t_0) + \int_0^t A\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-B\tau}\right)\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= \int_0^t A\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-B\tau}\right)\,\mathrm{d}\tau = A\cdot\left[\tau + \frac{\mathrm{e}^{-B\tau}}{B}\right]_0^t =$$
$$= A\cdot\left(t + \frac{\mathrm{e}^{-Bt}}{B} - \frac{1}{B}\right).$$

b) A megfelelő adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy
$$s(t) = 6,412\cdot\left(t + \frac{\mathrm{e}^{-0,459t}}{0,459} - \frac{1}{0,459}\right) =$$
$$= 6,412t - 13,97\mathrm{e}^{-0,459t} - 13,97\,[\mathrm{m}].$$

c) Mivel
$$s(15) = 6,412\cdot 15 - 13,97\mathrm{e}^{-0,459\cdot 15} - 13,97 \approx 82,22\,[\mathrm{m}],$$
ezért a kutatóhajó 15 [s] alatt 82, 22 métert emelkedik. Hasonlóan kapjuk meg, hogy a hajó
$$s(20) = 6,412\cdot 20 - 13,97\mathrm{e}^{-0,459\cdot 20} - 13,97 \approx 114,27$$
métert emelkedik 20 [s] alatt.

d) A gyorsulás-idő függvény
$$a(t) = A\cdot B\cdot\mathrm{e}^{-Bt} = 2,943\cdot\mathrm{e}^{-0,459t}.$$

e) A gyorsulás-idő függvény végtelenbeli határértéke

$$\lim_{t\to\infty} 2,943 \cdot \mathrm{e}^{-0,459t} = 0.$$

189. **Feladat.** Egy versenyautó gyorsulás-idő függvénye az alábbi alakú lesz:

$$a(t) = 112 \cdot \left(\frac{2 - \ln(t+1)}{(t+1)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

A t paraméter a veresenyautó indulásától mért időt jelöli.

a) Határozzuk meg a versenyautó sebesség-idő függvényét, felhasználva, hogy az autó nyugalomból indul.

b) Határozzuk meg, hogy mekkora maximális sebességet sikerült végül elérni a gépkocsival!

c) Vizsgáljuk meg a v függvényt monotonitás és konvexitás szerint, határozzuk meg a szélsőértékét és inflexiós pontját!

d) Vázoljuk fel a sebesség-idő függvény grafikonját!

Megoldás:

a) A sebesség-idő függvényt a gyorsulás-idő függvény integrálásával kapjuk

$$v(t) = \int_0^t 112 \cdot \left(\frac{2 - \ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}} \right) \mathrm{d}\tau.$$

Első lépésben az

$$f(\tau) = \frac{2 - \ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}$$

függvény egy primitív függvényét keressük meg.

$$f(\tau) = \frac{2 - \ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Az első tag egyszerűen integrálható, hiszen

$$\int \frac{2}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau = \int 2 \cdot (\tau+1)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= -4 \cdot (\tau+1)^{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{4}{\sqrt{\tau+1}} + c.$$

A második tag parciális integrálással integrálható:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\tau = \int \ln(\tau+1)\cdot(\tau+1)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\tau = \\
&= \ln(\tau+1)\cdot\frac{(\tau+1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \int \frac{1}{\tau+1}\cdot\frac{(\tau+1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\tau = \\
&= -2\cdot\ln(\tau+1)\cdot(\tau+1)^{-\frac{1}{2}} + 2\cdot\int(\tau+1)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\tau = \\
&= -2\cdot\ln(\tau+1)\cdot(\tau+1)^{-\frac{1}{2}} - 4\cdot(\tau+1)^{-\frac{1}{2}} + c = \\
&= \frac{-2\cdot\ln(\tau+1)-4}{\sqrt{\tau+1}} + c.
\end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy az $f(\tau)$ függvény egy primitív függvénye

$$F(\tau) = -\frac{4}{\sqrt{\tau+1}} - \frac{-2\cdot\ln(\tau+1)-4}{\sqrt{\tau+1}} = \frac{2\cdot\ln(\tau+1)}{\sqrt{\tau+1}}.$$

Ezt felhasználva a sebesség-idő függvény

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int_0^t 112\cdot\left(\frac{2-\ln(\tau+1)}{(\tau+1)^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{d}\tau = \left[112\cdot\frac{2\cdot\ln(\tau+1)}{\sqrt{\tau+1}}\right]_0^t = \\
&= 112\cdot\frac{2\cdot\ln(t+1)}{\sqrt{t+1}} = \frac{224\cdot\ln(t+1)}{\sqrt{t+1}}.
\end{aligned}$$

b) A maximális sebességet abban az időpillanatban éri el a versenyautó, amikor a gyorsulása zérus, azaz meg kell oldanunk az $a(t) = 0$ egyenletet:

$$\begin{aligned}
112\cdot\left(\frac{2-\ln(t+1)}{(t+1)^{\frac{3}{2}}}\right) &= 0 \\
2 &= \ln(t+1) \\
\mathrm{e}^2 - 1 &= t.
\end{aligned}$$

Tehát $t \approx 6,39$ másodperc elteltével éri el a rakéta meghajtású versenyautó a maximális sebességét. Ekkor a maximális sebességének nagysága

$$v(6,39) \approx 154,67\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

c) A v függvény zérushelye:

$$\begin{aligned}\frac{224\cdot\ln(t+1)}{\sqrt{t+1}} &= 0\\ \ln(t+1) &= 0\\ t+1 &= 1 \qquad \Rightarrow \qquad t=0,\end{aligned}$$

azaz a v függvény egyetlen zérushelye a $t=0$ helyen van.
A v függvény inflexiós helyét az $\dot{a}(t)=0$ egyenlet megoldása adja. Mivel

$$\begin{aligned}\ddot{v}(t)=\dot{a}(t) &= 112\cdot\frac{-\frac{1}{t+1}\cdot(t+1)^{\frac{3}{2}}-\big(2-\ln(t+1)\big)\cdot\frac{3}{2}\cdot(t+1)^{\frac{1}{2}}}{(t+1)^3}=\\ &= 112\cdot\frac{-(t+1)^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\cdot(t+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(2-\ln(t+1))}{(t+1)^3}=\\ &= 112\cdot\frac{\sqrt{t+1}\cdot\left(-1-3+\frac{3}{2}\cdot\ln(t+1)\right)}{(t+1)^3},\end{aligned}$$

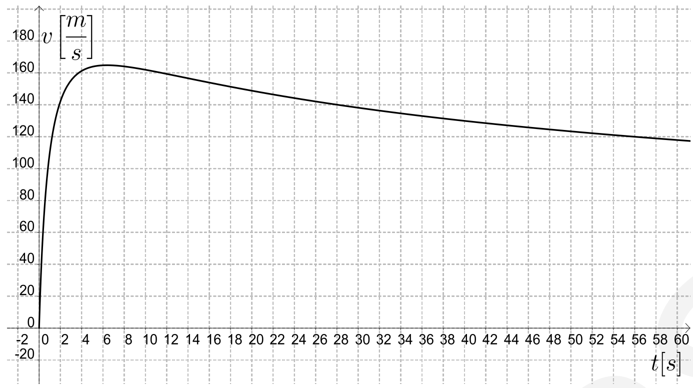
ami pontosan akkor zérus, ha

$$\begin{aligned}-4+\frac{3}{2}\cdot\ln(t+1) &= 0\\ \ln(t+1) &= \frac{8}{3}\\ t+1 &= \mathrm{e}^{\frac{8}{3}},\end{aligned}$$

amiből $t\approx 13,39$ adódik. A v függvény második deriváltjának előjelét tartalmazó táblázat:

	$t<13,39$	$t=13,39$	$t>13,39$
$\ddot{v}(t)$	$-$	0	$+$
$v(t)$	konkáv	inflexiós pont	konvex

d) A kapott eredmények felhasználásával elkészíthető a v sebesség-idő függvény grafikonja:



190. **Feladat.** Tegyük fel, hogy egy gépkocsi sebesség-idő függvénye

$$v(t) = 100 \cdot \left(\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^{-t}} \right) \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \right].$$

Tudjuk azt is, hogy $s(0) = 200 \cdot \ln 2\,[\mathrm{m}]$.

a) Adjuk meg a kezdősebességet!
b) Számoljuk ki a sebességet a $t = 2$ időpillanatban!
c) Adjuk meg az átlagos gyorsulást a $[0; 2]$ [s] intervallumon!
d) Határozzuk meg a gépkocsi végsebességét!
e) Vázoljuk fel a sebesség-idő függvényt!
f) Adjuk meg a hely-idő függvényt!
g) Határozzuk meg a $t = 0$ időpillanatban a hely-idő függvény értékét!
h) Adjuk meg a gépkocsi pozícióját a $t = 2$ időpillanatban!
i) Számoljuk ki az átlagsebességet a $[0; 2]$ [s] intervallumban!
j) Vázoljuk fel a hely-idő függvény grafikonját $s(t)$!
k) Adjuk meg a gyorsulás-idő függvényt!
l) Számoljuk ki a gyorsulást a $t = 0$ időpillanatban!
m) Számoljuk ki a gyorsulást a $t = 2$ időpillanatban!
n) Adjuk meg a gyorsulás-idő függvény végtelenbeli határértékét!
o) Vázoljuk fel a gyorsulás-idő függvény grafikonkát!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A kezdősebesség

$$v(0) = 100 \cdot \frac{\mathrm{e}^0 - 1}{\mathrm{e}^0 + 1} = 0 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

b) A pillanatnyi sebesség a megfigyelés után 2 másodperccel

$$v(2) = 100 \cdot \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^2 + 1} = 76,16 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

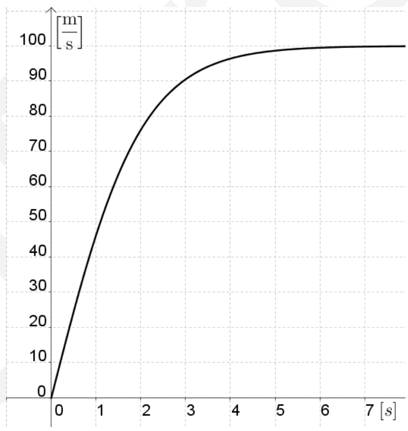
c) Az átlagos gyorsulás

$$\frac{v(2) - v(0)}{2 - 0} = \frac{76,16 - 0}{2} = 38,08 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

d) A L'Hosptial szabályt alkalmazva azt kapjuk, hogy a végsebesség

$$v_{\max} = \lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{t \to \infty} 100 \cdot \frac{\mathrm{e}^t - 1}{\mathrm{e}^t + 1} = 100 \cdot \lim_{t \to \infty} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t} = 100 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

e) A sebesség-idő függvény grafikonja



f) A hely-idő függvény

$$\begin{aligned} s(t) &= \int \left(\frac{\mathrm{e}^t}{1 + \mathrm{e}^t} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 + \mathrm{e}^{-t}} \right) \mathrm{d}t = \\ &= 100 \cdot \left(\ln(1 + \mathrm{e}^t) + \ln(1 + \mathrm{e}^{-t}) \right) + c. \end{aligned}$$

Mivel $s(0) = 200 \ln 2$, ezért

$$200 \cdot \ln 2 = 100 \cdot (\ln 2 + \ln 2) + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 0,$$

így a hely-idő függvény

$$s(t) = 100 \cdot \big(\ln(1 + \mathrm{e}^t) + \ln(1 + \mathrm{e}^{-t}) \big).$$

g) A megfigyelés kezdetekor

$$s(0) = 100 \cdot (\ln 2 + \ln 2) = 138,6\,[\mathrm{m}].$$

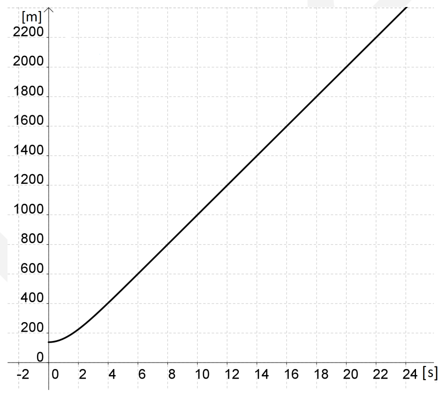
h) A megfigyelés után 2 másodperccel

$$s(2) = 100 \cdot \big(\ln(1 + \mathrm{e}^2) + \ln(1 + \mathrm{e}^{-2}) \big) = 225,4\,[\mathrm{m}].$$

i) Az átlagsebesség a $[0; 2]$ intervallumon

$$\frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \frac{225,4 - 138,6}{2} = 43,4 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

j) A hely-idő függvény grafikonja



k) A gyorsulás-idő függvény

$$a(t) = \dot{v}(t) = 100 \cdot \frac{\mathrm{e}^t \cdot (\mathrm{e}^t + 1) - (\mathrm{e}^t - 1) \cdot \mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t + 1^2)} =$$

$$= 100 \cdot \frac{\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t + 1)^2} = 100 \cdot \frac{2 \cdot \mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t + 1)^2} = \frac{200 \cdot \mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t + 1)^2} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

l) A gyorsulás a megfigyelés kezdetekor

$$a(0) = \frac{200 \cdot \mathrm{e}^0}{(\mathrm{e}^0 + 1)^2} = \frac{200}{4} = 50 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

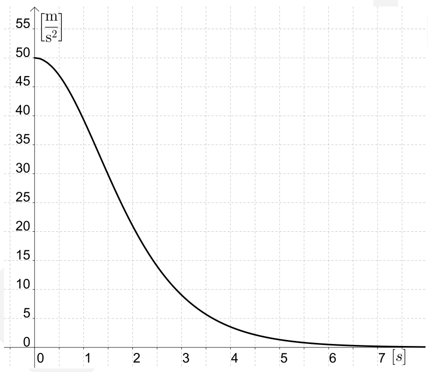
m) A gyorsulás a megfigyelés után 2 másodperccel

$$a(2) = \frac{200 \cdot \mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}^2+1)^2} = \frac{200}{4} = 21\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

n) A gyorsulás-idő függvény végtelenbeli határértéke

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{200 \cdot \mathrm{e}^t}{(\mathrm{e}^t+1)^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{200 \cdot \mathrm{e}^t}{2 \cdot (\mathrm{e}^t+1) \cdot \mathrm{e}^t} =$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{100}{\mathrm{e}^t+1} = 0.$$

o) A gyorsulás-idő függvény grafikonja



191. **Feladat.** Egy egyenes pályán mozgó pont sebesség-idő függvénye

$$v\colon [0;10] \to \mathbb{R}, \quad v(t) = 8t + 10.$$

Mekkora utat tesz meg a pont, ha az időt másodpercben, a sebességet $\mathrm{m/s}$-ban mérjük?

Megoldás:

A megtett utat a sebesség-idő függvénynek a megfelelő intervallumon vett integráljaként kapjuk meg, így a megtett út

$$s = \int_0^{10} 8t + 10\,\mathrm{d}t = \left[4t^2 + 10t\right]_0^{10} =$$
$$= (4 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10) - (4 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0) = 500,$$

így a megtett út $500\,\mathrm{m}$.

192. **Feladat.** Egy részecske a $[0; 20]$ időintervallumban egyenes vonalú mozgást végez, sebessége $v(t) = 12 - 2t$. Melyik időpontban maximális a részecskének a kezdőponttól való távolsága? Mekkora ez a maximális távolság?

Megoldás:

Az hely-idő függvényt a sebesség-idő függvény idő szerinti integrálja adja, jelen esetben azzal a kezdeti érték feltétellel, hogy $s(0) = 0$.

Mivel

$$s(t) = \int 12 - 2t \,\mathrm{d}t = 12t - t^2 + c$$

és $s(0) = 0$, ezért $0 = 12 \cdot 0 - 0^2 + c$, amiből $c = 0$ adódik.

Tehát a keresett hely-idő függvény

$$s(t) = 12t - t^2.$$

Ennek a függvénynek keressük a maximumát a $[0; 20]$ intervallumon.

Ezt meghatározhatjuk differenciálszámítás segítségével, de elemi úton is, mivel egy másodfokú függvénynek keressük a szélsőértékét.

Teljes négyzetté alakítjuk a másodfokú kifejezést:

$$s(t) = 12t - t^2 = -1 \cdot (t^2 - 12t) = -1 \cdot \left[(t-6)^2 - 36\right] = -(t-6)^2 + 36.$$

Ebből leolvasható, hogy a maximum hely $t = 6$, a maximum érték pedig $s = 36$, így 6 másodperc elteltével lesz a legtávolabb a pont a kiindulási helytől, és ez a maximális távolság $36\,\mathrm{m}$.

23. Munkavégzés

193. **Feladat.** Egy rugó hossza megfeszítetlen állapotban 20 [cm]. Ahhoz, hogy 30 [cm] hosszúságúra megnyújtsuk 40 [N] erőre van szükség. Mennyi munka szükséges ahhoz, hogy 35 [cm]-ről 38 [cm]-re nyújtsuk a rugót?

Megoldás:

A rugóállandót az

$$|F(x)| = D \cdot x$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Jelen esetben a rugó megnyúlása $0,1$ méter, így a

$$40 = D \cdot 0,1$$

egyenlethez jutunk, amiből $D = 400 \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$ adódik. Tehát $F(x) = -400x$, így a végzett munka

$$W = -\int\limits_{0,15}^{0,18} 400x \, \mathrm{d}x = -\left[200x^2\right]_{0,15}^{0,18} = -1,98\,[\mathrm{J}].$$

194. **Feladat.** Egy rugó hossza megfeszítetlen állapotában 1 méter. A rugót 24 [N] erővel $1,8$ méter hosszúságúra nyújtjuk meg.

a) Határozzuk meg a rugóállandót!

b) Mennyi munkát végez a rugó, miközben 3 méter hosszúságúra nyújtjuk?

c) Mekkora a rugó hosszúsága 45 [N] terhelés esetén?

Megoldás:

a) A rugóállandót az

$$|F(x)| = D \cdot x$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Jelen esetben a rugó megnyúlása $0,8$ méter, így a

$$24 = D \cdot 0,8$$

egyenlethez jutunk, amiből $D = 30 \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$ adódik.

b) Legyen a rugó „szabad” vége nyújtatlan állapotban az $x = 0$ pontban. Ekkor

$$F(x) = -30x\,[\mathrm{N}].$$

A rugó által végzett munka az $x = 0$ és $x = 2$ koordinátájú pontok között

$$W = -\int\limits_0^2 30x\,\mathrm{d}x = -\Big[15x^2\Big]_0^2 = -60\,[\mathrm{J}].$$

c) Mivel $F(x) = -30x$, ezért

$$45 = -30x \qquad \Rightarrow \qquad x = -1,5\,[\mathrm{m}],$$

így a rugó megnyúlása $1,5$ méter lesz, ami azt jelenti, hogy a rugó hossza ekkor $2,5$ méter.

195. **Feladat.** Egy rugó megfeszítetlen állapotában 10 centiméter hosszú. A rugót 800 [N] erővel 14 centiméter hosszúságúra nyúlik meg.

a) Határozzuk meg a rugóállandót!

b) Mennyi munkát végez a rugó, miközben 12 centiméter hosszúra nyújtjuk?

c) Mekkora a rugó hosszúsága $1\,600$ [N] terhelés esetén?

Megoldás:

a) A rugóállandót az

$$|F| = D \cdot x$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Jelen esetben a rugó megnyúlása $0,04$ méter, így a

$$800 = D \cdot 0,04$$

egyenlethez jutunk, amiből $D = 20\,000\,\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$ adódik.

b) Legyen a rugó „szabad" vége nyújtatlan állapotban az $x = 0$ pontban. Ekkor

$$F(x) = -20\,000x\,[\mathrm{N}].$$

A rugó által végzett munka az $x = 0$ és $x = 0,02$ koordinátájú pontok között:

$$W = -\int\limits_0^{0,02} 20\,000x\,\mathrm{d}x = -\Big[10\,000x^2\Big]_0^{0,02} = -4\,[\mathrm{J}].$$

c) Mivel $F(x) = -20\,000x$, ezért

$$1\,600 = -20\,000x \qquad \Rightarrow \qquad x = -0,08\,[\mathrm{m}],$$

így a rugó megnyúlása 8 centiméter, ami azt jelenti, hogy a rugó hossza 18 [cm] lesz.

196. **Feladat.** Egy liftet, melynek motorja a legfelső szinten van, sodronykötél tartja. Tudjuk azt is, hogy 1 méteres drótkötél darab súlya $45\,[\mathrm{N}]$. Amikor a kabin a földszinten tartózkodik $60\,[\mathrm{m}]$ kábel lóg lefelé. Mire a lift a legfelső szintre ér a kábel teljes egészében feltekeredik. Mennyi munkát kell fordítani csupán a kábel felhúzására?

Megoldás:

Az erőfüggvény

$$F(x) = 45 \cdot (60 - x).$$

Mivel

$$W = \int_0^{60} 45 \cdot (60 - x)\,\mathrm{d}x = 45 \cdot \int_0^{60} 60 - x\,\mathrm{d}x =$$
$$= 45 \cdot \left[60x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{60} = 45 \cdot (3\,600 - 1\,800) = 81\,000\,[\mathrm{J}],$$

ezért azt kaptuk tehát, hogy a végzett munka $W = 81\,000\,[\mathrm{J}]$.

197. **Feladat.** Egy egyenes pályán mozgó részecske erőfüggvénye

$$F(x) = x^2 + 2x\,[\mathrm{N}].$$

Mennyi munkát végez a részecskére ható erő, amíg az $x = 1\,[\mathrm{m}]$ helyről az $x = 3\,[\mathrm{m}]$ helyig eljut?

Megoldás:

A munka

$$\int_1^3 x^2 + 2x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} + 3^2\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1^2\right) = \frac{50}{3}\,[\mathrm{J}].$$

198. **Feladat.** Ahhoz, hogy egy rugót $10\,[\mathrm{cm}]$-ről $12\,[\mathrm{cm}]$-re megnyújtsunk $6\,[\mathrm{J}]$ munkára van szükség. Ugyanezen rugó $12\,[\mathrm{cm}]$-ről $14\,[\mathrm{cm}]$-re való megnyújtásához $10\,[\mathrm{J}]$ munkára van szükség. Mennyi a rugó hossza megfeszítetlen állapotban? Mennyi a rugóállandó?

Megoldás:

Legyen L a rugó hossza nyújtatlan állapotban, méterben mérve. Ekkor

$$\begin{aligned}
6 &= \int\limits_{0{,}10-L}^{0{,}12-L} -D\cdot x\,\mathrm{d}x = -D\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0{,}10}^{0{,}12} = \\
&= -\frac{D}{2}\cdot\left[(0,12-L)^2-(0,10-L)^2\right] = \\
&= -\frac{D}{2}\cdot(0,0144-0,24L+L^2-0,01+0,2L-L^2) = \\
&= -\frac{D}{2}\cdot(0,0044-0,04L)\,.
\end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned}
10 &= \int\limits_{0{,}12-L}^{0{,}14-L} -D\cdot x\,\mathrm{d}x = -D\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0{,}12}^{0{,}14} = \\
&= -\frac{D}{2}\cdot\left[(0,14-L)^2-(0,12-L)^2\right] = \\
&= -\frac{D}{2}\cdot(0,0196-0,28L+L^2-0,0144+0,24L-L^2) = \\
&= -\frac{D}{2}\cdot(0,0052-0,04L)\,.
\end{aligned}$$

Tehát az

$$\begin{aligned}
-12 &= D\cdot(0,0044-0,04L)\\
-20 &= D\cdot(0,0052-0,04L)
\end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletet elosztva az elsővel azt kapjuk, hogy

$$\frac{0,0052-0,04L}{0,0044-0,04L}=\frac{5}{3}.$$

A közös nevezővel szorozva az

$$3\cdot(0,0052-0,04L)=5\cdot(0,0044-0,04L)$$

egyenletet kapjuk, amiből

$$0,0156-0,12L=0,0220-0,2L$$

adódik, így a rugó hossza nyújtatlan állapotban $L=0,08\,[\mathrm{m}]$.

Mivel

$$-D\cdot(0,0044-0,0032)=12,$$

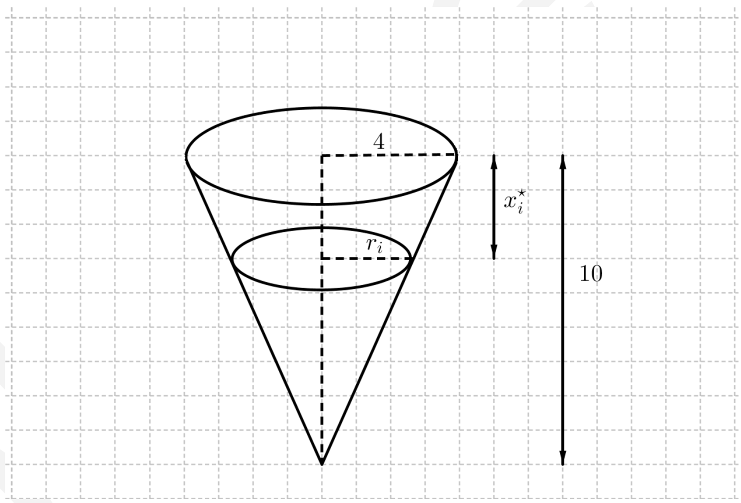
ezért a rugóállandó

$$-0,0012D = 12 \qquad \Rightarrow \qquad D = -10\,000.$$

199. **Feladat.** Egy tartály fordított egyenes körkúp alakú. A tartály magassága $10\,[\mathrm{m}]$, alapkörének sugara $4\,[\mathrm{m}]$. A tartály $8\,[\mathrm{m}]$ magasságig van vízzel töltve. Mennyi munkára van szükség ahhoz, hogy a tartály kiürüljön? A víz sűrűsége $1\,000\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$.

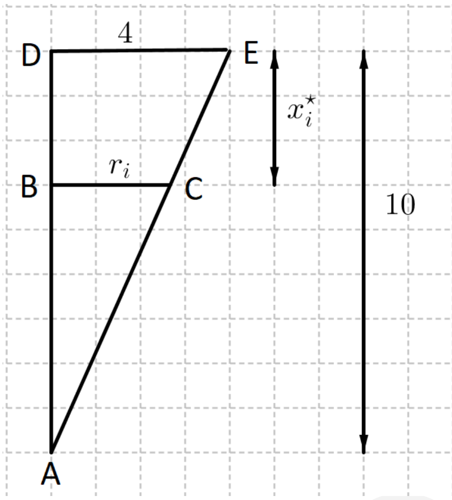
Megoldás:

Válasszuk meg a koordinátarendszert úgy, hogy a tartály magasságvonala legyen a koordinátarendszer x tengelye, úgy hogy a skálázás fentről lefelé halad:



A víz a $2\,[\mathrm{m}]$ mélységtől a $10\,[\mathrm{m}]$ mélységig terjed. A $[2;10]$ intervallumot n darab részintervallumra osztjuk fel az $x_0, x_1, \ldots, x_n$ osztópontok segítségével. Az i-edik részintervallumból válasszuk ki az $x_i^\star$ pontot. Az osztópontok segítségével a tartályt n darab részre osztjuk. Az i-edik réteg sugara r_i és az i-edik réteget közelítsük r_i sugarú, Δx magasságú hengerekkel.

Az alábbi ábrán látható ABC és ADE háromszögek hasonlóak.



A hasonlóság arányát felírva azt kapjuk, hogy

$$\frac{r_i}{10 - x_i^\star} = \frac{4}{10},$$

így

$$r_i = 4 - 0,4x_i^\star.$$

Az i-edik réteg térfogata

$$V_i = r_i^2 \cdot \pi \cdot \Delta x = \left(4 - 0,4x_i^\star\right)^2 \cdot \pi \cdot \Delta x,$$

így a tömege

$$m_i = \varrho \cdot V_i \approx 1\,000 \cdot \left(4 - 0,4x_i^\star\right)^2 \cdot \pi \cdot \Delta x.$$

A víz által kifejtett erő

$$F_i = g \cdot m_i \approx 9,81 \cdot 1\,000 \cdot \left(4 - 0,4x_i^\star\right)^2 \cdot \pi \cdot \Delta x = \\ = 9\,810 \cdot \left(4 - 0,4x_i^\star\right)^2 \cdot \pi \cdot \Delta x.$$

Az i-edik réteg esetén a végzett munka

$$W_i = F_i \cdot x_i^\star \approx 9\,810 \cdot \left(4 - 0,4x_i^\star\right)^2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot x_i^\star.$$

Az $n \to \infty$ határátmenetet véve azt kapjuk, hogy

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 9\,810 \cdot \left(4 - 0,4x_i^\star\right)^2 \cdot \pi \cdot \Delta x \cdot x_i^\star =$$

$$= \int_2^{10} 9\,810 \cdot (4 - 0,4x)^2 \cdot \pi \,\mathrm{d}x = 9\,810 \cdot \pi \cdot \left[\frac{(4-0,4x)^3}{3\cdot(-0,4)}\right]_2^{10} =$$

$$= 9\,810 \cdot \pi \cdot \left(0 - \frac{3,2^3}{-1,2}\right) = 1\,009\,878\,[\mathrm{J}].$$

200. **Feladat.** Mennyi munkát kell végezni ahhoz, hogy egy $m = 1$ tonna tömegű űrhajót $h = 1\,000\,[\mathrm{km}]$ magasra juttassunk (a Föld sugarának irányába) a Föld felszínétől? A Föld sugara $R = 6\,370\,[\mathrm{km}]$, tömege $M = 6 \cdot 10^{24}\,[\mathrm{kg}]$. A gravitációs állandó $k = 6,67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}\right]$.

Megoldás:

Az úrhajóra a Föld által kifejtett gravitációs erő hat, amely arányos az űrhajó és a Föld tömegével és fordítottan arányos a tömegközéppontja távolságának négyzetével:

$$F = k \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

A mozgás során változik a két test tömegközéppontjának távolsága, ezért változik az erő is:

$$F(x) = k \cdot \frac{M \cdot m}{x^2}.$$

Mivel

$$k \cdot M \cdot m = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 10^3 = 40,02 \cdot 10^{16},$$

ezért a keresett munka

$$W = \int_{6\,370}^{7\,370} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{6\,370}^{7\,370} \frac{40,02 \cdot 10^{16}}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{40,02 \cdot 10^{16}}{x}\right]_{6\,370}^{7\,370} = 8,52 \cdot 10^{12}[J] = 8\,520\,[\mathrm{GJ}].$$

201. **Feladat.** Kezdetben $1\,[\mathrm{m}^3]$ térfogatú, $p_1 = 10^6\,[\mathrm{Pa}]$ nyomású héliumgáz adiabatikusan tágul $v_2 = 2\,[\mathrm{m}^3]$ téfogatúra. Mennyi munkát végez a tágulása során a gáz?

Megoldás:

Az adiabatikus folyamatokban $p \cdot V^k$ konstans, ahol

$$k = \frac{f+2}{f},$$

ahol f a gázrészecskék szabadsági fokainak száma, ami egyatomos gázok esetén 3. A hélium nemesgáz, így egyatomos, tehát a szabadsági fokainak száma 3. Tehát jelen esetben

$$k = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Mivel $p \cdot V^k$ állandó, ezért

$$p \cdot V^k = p_1 \cdot V_1^k \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{p_1 \cdot V_1^k}{V^k},$$

így

$$P(V) = \frac{10^6}{V^{\frac{5}{3}}}.$$

A végzett munka

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,\mathrm{d}V = \int_1^2 \frac{10^6}{V^{\frac{5}{3}}}\,\mathrm{d}V = \int_1^2 10^6 \cdot V^{-\frac{5}{3}}\,\mathrm{d}V =$$

$$= 10^6 \cdot \left[\frac{V^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}\right]_1^2 = 10^6 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt[3]{V^2}}\right]_1^2 =$$

$$= -10^6 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}\right) = 555[\mathrm{kJ}].$$

202. **Feladat.** Egy $Q_1 = 10^{-5}$ [C] nagyságú, rögzített, pozitív töltéstől $1\,[\mathrm{cm}]$ távolságra $Q_2 = 10^{-6}\,\mathrm{C}$ nagyságú, szabad, pozitív töltés található. Mennyi munkát végez a Q_1 töltés körüli elektromos mező a Q_2 töltésen, miközben a két töltés $2\,[\mathrm{cm}]$-re távolodik el egymástól?

Megoldás:

Két pontszerű töltés közötti erő

$$F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2},$$

ahol r a két töltés távolsága és $k = 9 \cdot 10^9 \left[\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\right]$. Tehát

$$W = \int\limits_{0{,}01}^{0{,}02} k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}\,\mathrm{d}r = \int\limits_{0{,}01}^{0{,}02} \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-11}}{r^2}\,\mathrm{d}r =$$

$$= \left[-\frac{9 \cdot 10^{-2}}{r}\right]_{0{,}01}^{0{,}02} = 0,09 \cdot \left(-\frac{1}{0,02} + \frac{1}{0,01}\right) = 4,5\,[\mathrm{J}].$$

24. Riemann-integrál megjelenése a közgazdaságtanban

203. **Feladat.** Egy vállalat adott termékéhez tartozó keresleti függvénye:

$$f(p) = 2\,000 - 20p \qquad (10 \le p \le 100),$$

kínálati függvénye

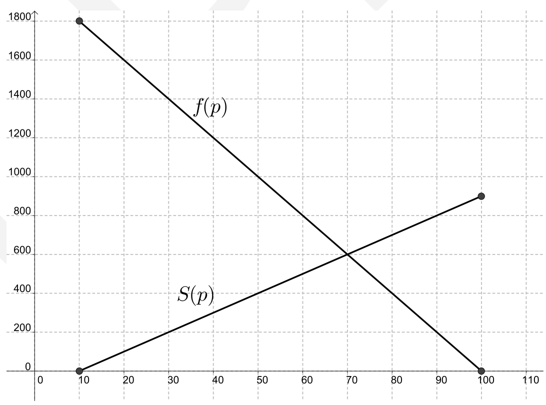
$$S(p) = 10p - 100 \qquad (10 \le p \le 100).$$

Az árakat dollárban értjük, a mennyiséget darabban.

a) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a keresleti és kínálati függvényeket!
b) Számoljuk ki az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!
c) Jelöljük az előbbi koordinátarendszerben az egyensúlyi mennyiséget, az egyensúlyi árat, a termelői többletet és a fogyasztói többletet!
d) Számoljuk ki a termelői többletet!
e) Számoljuk ki a fogyasztói többletet!

<u>**Megoldás**</u>:

a) A keresleti és a kínálati függvény grafikonja:



b) Az egyensúlyi árat az

$$f(p) = S(p)$$

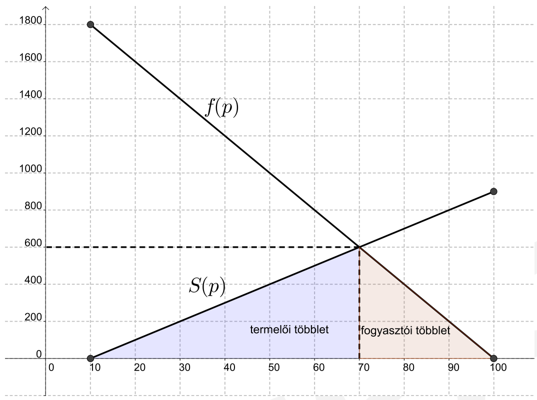
egyenlet megoldása adja. Mivel

$$10p - 100 = 2\,000 - 20p \qquad \Rightarrow \qquad p = 70,$$

ezért az egyensúlyi ár 70 dollár. Ezt felhasználva az egyensúlyi mennyiség

$$f(70) = 10 \cdot 70 - 100 = 600 \,\mathrm{darab}.$$

c) Az alábbi ábra mutatja az egyensúlyi árat, az egyensúlyi mennyiséget, a termelői többletet és a fogyasztói többletet.



d) Mivel

$$\int_{10}^{70} 10p - 100 \,\mathrm{d}p = [5p^2 - 100p]_{10}^{70} =$$

$$= 5 \cdot 70^2 - 100 \cdot 70 - (5 \cdot 10^2 - 100 \cdot 10) = 18\,000,$$

ezért a termelői többlet 18 000 dollár.

e) Mivel

$$\int_{70}^{100} 2\,000 - 20p \,\mathrm{d}p = [2\,000p - 10p^2]_{70}^{100} =$$

$$= 2\,000 \cdot 100 - 10 \cdot 100^2 - (2\,000 \cdot 70 - 10 \cdot 70^2) = 9\,000,$$

ezért a fogyasztói többlet 9 000 dollár.

204. **Feladat.** Egy vállalat adott termékéhez tartozó keresleti függvénye:

$$f(p) = \frac{90}{p} - 2 \qquad (1 \leq p \leq 45),$$

kínálati függvénye

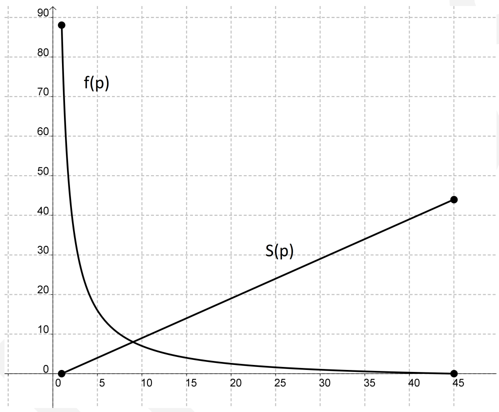
$$S(p) = p - 1 \qquad (1 \leq p \leq 45).$$

Az árakat dollárban értjük, a mennyiséget darabban.

a) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a keresleti és kínálati függvényeket!
b) Számoljuk ki az egyensúlyi árat és az egyensúlyi mennyiséget!
c) Jelöljük az előbbi koordinátarendszerben az egyensúlyi mennyiséget, az egyensúlyi árat, a termelői többletet és a fogyasztói többletet!
d) Számoljuk ki a termelői többletet!
e) Számoljuk ki a fogyasztói többletet!

Megoldás:

a) A keresleti és a kínálati függvény grafikonja:



b) Az egyensúlyi árat az

$$f(p) = S(p)$$

egyenlet megoldása adja, azaz

$$\frac{90}{p} - 2 = p - 1.$$

Mindkét oldalt szorozva a közös nevezővel, majd összevonva és nullára rendezve az egyenletet azt kapjuk, hogy

$$p^2 + p - 90 = 0.$$

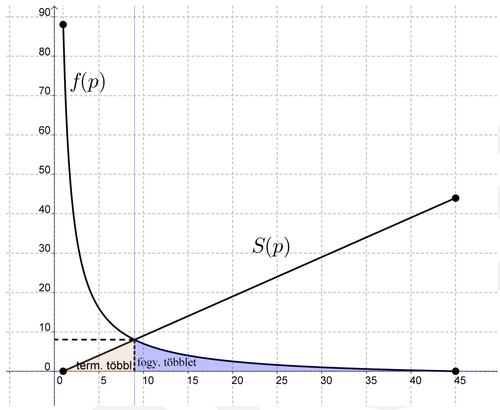
A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 360}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2}$$

adódik, amiből $p > 0$ miatt azt kapjuk, hogy $p = 9$. Ezt felhasználva az egyensúlyi mennyiség

$$f(9) = \frac{90}{9} - 2 = 8\,\text{darab}.$$

c) Az alábbi ábra mutatja az egyensúlyi árat, az egyensúlyi mennyiséget, a termelői többletet és a fogyasztói többletet.



d) Mivel

$$\int_1^9 p - 1\,\mathrm{d}p = \left[\frac{1}{2}\cdot p^2 - p\right]_9^1 =$$
$$= \frac{81}{2} - 9 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 32,$$

ezért a termelői többlet 32 dollár.

e) Mivel

$$\int_9^{45} \frac{90}{p} - 2\,\mathrm{d}p = [90\ln p - 2p]_9^{45} =$$
$$= 90\ln 45 - 90 - (90\ln 9 - 18) \approx 72,85,$$

ezért a fogyasztói többlet $72,85$ dollár.

205. **Feladat.** Egy vállalat adott termékhez tartozó határköltség függvénye:

$$MC(q) = 0,6q + 2.$$

A cég jelenleg hetente $q = 80$ darab terméket állít elő. Mennyivel növekedne a költsége, ha heti 100 darab terméket gyártana?

Megoldás:

A költségnövekedés a

$$C(100) - C(80)$$

érték. A Newton-Leibniz tétel alapján:

$$\begin{aligned} C(100) - C(80) &= \int_{80}^{100} C'(q)\,\mathrm{d}q = \int_{80}^{100} MC(q)\,\mathrm{d}q = \\ &= \int_{80}^{100} 0,6q + 2\,\mathrm{d}q = [0,3q^2 + 2q]_{80}^{100} = \\ &= (0,3 \cdot 100^2 + 2 \cdot 100) - (0,3 \cdot 80^2 + 2 \cdot 80) = \\ &= 3\,200 - 2\,080 = 1\,120. \end{aligned}$$

Tehát a költségnövekedés 1 120 dollár lenne.

25. Lorenz-függvény

206. **Feladat.** Tekintsük az $L(x) = x^p$ függvényt, ahol $p \geq 1$ paraméter.

a) Mutassuk meg, hogy L Lorenz-függvény.

b) Bizonyítsuk be, hogy az L Lorenz-függvényhez tartozó Gini-index
$$G = \frac{p-1}{p+1}.$$

c) Számoljuk ki a p értékét, ha tudjuk, hogy a Gini-index $0,45$.

d) Ebben a modelben a lakosság leggazdagabb 5%-a a jövedelem hány százalékával rendelkezik?

<u>**Megoldás**</u>:

a) Mivel
   - $L(0) = 0^p = 0$;
   - $L(1) = 1^p = 1$;
   - $L(x) = x^p \leq x$ for all $x \in [0;1]$;
   - az L függvény értékkészlete $[0;1]$;
   - ha $x_1 < x_2$, akkor $x_1^p < x_2^p$, így az L függvény szigorúan monoton növekvő,

   tehát L Lorenz-függvény.

b) Mivel
$$\int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1},$$
ezért a Gini-index
$$G = 1 - 2\cdot\frac{1}{p+1} = \frac{p+1-2}{p+1} = \frac{p-1}{p+1}.$$

c) Mivel
$$G = \frac{p-1}{p+1},$$
ezért az
$$\frac{p-1}{p+1} = 0,45$$
egyenletet kell megoldanunk.

Mindkét oldalt szorozva $p+1$-gyel azt kapjuk, hogy

$$p-1=0.45\cdot(p+1).$$

Tehát

$$p-1=0.45p+0.45 \qquad \Rightarrow \qquad 0.55p=1.45,$$

így $p=\dfrac{29}{11}\approx 2,64$ adódik.

d) Mivel

$$L(0,95)=0,95^{2,64}=0,8734,$$

ezért a legszegényebb 95% a teljes jövedelem $87,34\%$-val rendelkezik, azaz a leggazdagabb 5% a teljes jövedelem $12,68\%$-val rendelkezik.

207. **Feladat.** Lorenz-függvény-e az

$$L(x)=x^2$$

függvény? Ha igen, számoljuk ki a Gini-együtthatót?

Megoldás:

Mivel

- $L(0)=0^2=0$;
- $L(1)=1^2=1$;
- $L(x)=x^2\le x$ for all $x\in[0;1]$,
- L értékkészlete $[0;1]$;
- ha $x_1<x_2$, akkor $x_1^2<x_2^2$, így L szigorúan monoton növekvő,

ezért L Lorenz-függvény.

Mivel

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3},$$

ezért a Gini-index

$$G=1-2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

208. **Feladat.** Egy európai ország társadalma az alábbi Lorenz-függvénnyel rendelkezik

$$L(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}-1} \qquad (0\le x\le 1).$$

a) Vázoljuk fel az L függvény grafikonját!

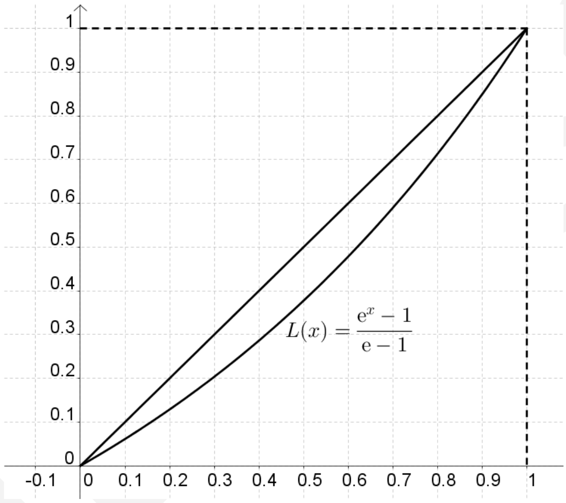
b) Mutassuk meg, hogy L valóban teljesíti a Lorenz függvény tulajdonságait!

c) Számoljuk ki az $L(0,5)$ értéket és szövegesen értelmezzük a kapott eredményt!

d) Számoljuk ki a Gini-indexet!

Megoldás:

a) Az L függvény grafikonja



b) Mivel

- $L(0) = \dfrac{e^0 - 1}{e - 1} = 0;$
- $L(1) = \dfrac{e^1 - 1}{e - 1} = 1;$
- $L(x) = \dfrac{e^x - 1}{e - 1} \leq x$ for all $x \in [0; 1];$
- az L függvény értékkészlete $[0; 1];$
- ha $x_1 < x_2$, akkor $L(x_1) < L(x_2)$, így L szigorúan monoton növekvő,

ezért L Lorenz-függvény.

c) Mivel

$$L(0,5) = \frac{e^{0,5} - 1}{e - 1} = \frac{\sqrt{e} - 1}{e - 1} = 0,3775,$$

ami azt jelenti, hogy a háztartások legszegényebb 50%-a a teljes jövedelem $37,75\%$-val rendelkezik.

d) Mivel

$$\int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e} - 1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e} - 1}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{e} - 1} \cdot \big(\mathrm{e} - 1 - 1\big) = \frac{1}{\mathrm{e} - 1} \cdot \big(\mathrm{e} - 2\big) \approx 0,418,$$

ezért a Gini-index

$$G = 1 - 2 \cdot 0,418 = 0,164.$$

209. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$L(x) = x^3$$

függvényhez tartozó Gini-indexet!

Megoldás:

Mivel

$$\int_0^1 L(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4},$$

ezért a Gini-index

$$G = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

210. **Feladat.** A Lorenz-függvények modellezésére gyakran használják az alábbi függvényt:

$$L(x) = a \cdot x + (1 - a) \cdot x^p.$$

Legyen $a = \frac{1}{4}$ és tegyük fel, hogy a Gini-index $\frac{9}{16}$. Határozzuk meg a p értékét!

Megoldás:

Mivel $a = \frac{1}{4}$, ezért

$$L(x) = \frac{1}{4} \cdot x + \frac{3}{4} \cdot x^p.$$

Az L függvény Riemann-integrálja 0 és 1 között

$$\int_0^1 \frac{1}{4} \cdot x + \frac{3}{4} \cdot x^p\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p+1}.$$

Mivel a Gini-index $\frac{9}{16}$, ezért

$$\frac{9}{16} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{p+1} \right).$$

Átalakítva az egyenletet azt kapjuk, hogy

$$\frac{9}{16} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p+1},$$

így

$$\frac{3}{16} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{p+1},$$

tehát a $8 = p + 1$ egyenlethez jutunk, amiből az következik, hogy $p = 7$.

Ekkor a Lorenz-függvény

$$L(x) = \frac{1}{4} \cdot x + \frac{3}{4} \cdot x^7.$$

26. Folyamatos jövedelemáramlás diszkontált jelenértéke és jövőértéke

211. **Feladat.** Ha 15 éven keresztül, évi 500 dollár jövedelemmel rendelkezünk és a kamat évente 5% folyamatos tőkésítés mellett. Határozzuk meg a diszkontált jelenértéket és a diszkontált jövőértéket!

Megoldás:

A diszkontált jelenérték

$$PDV = \int_0^5 500 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{500 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05t}}{-0,05}\right]_0^5 =$$
$$= \frac{500}{0,05} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0{,}5}) \approx 3\,935\,[\text{dollár}].$$

A diszkontált jövőérték

$$FDV = \int_0^5 500 \cdot \mathrm{e}^{0{,}05\cdot(10-t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{500 \cdot \mathrm{e}^{0{,}05\cdot(5-t)}}{0,05}\right]_0^5 =$$
$$= \frac{500}{-0,05} \cdot (1 - \mathrm{e}^{0{,}5}) \approx 6\,487\,[\text{dollár}].$$

212. **Feladat.** Tegyük fel, hogy egy vállalat gyárt egy bizonyos típusú gépet, és becslések szerint minden gép olyan folyamatos jövedelemáramot generál, amelyet az $f(t) = 15 - 2t$ [millió dollár] függvény ad meg. Azaz $f(t) = 15 - 2t$ [millió dollár] jövedelemáramlást feltételezünk. A gép élettartama 7 év, és 8%-os kamatozást feltételezünk. Határozzuk meg a gép piaci árának jelenértékét!

Megoldás:

A jelenértéket a

$$PDV = \int_0^7 (15 - 2t) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}08t}\,\mathrm{d}t$$

integrál adja meg.

Az

$$\int (15 - 2t) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}08t}\,\mathrm{d}t$$

integrált a parciális integrálás képletével számoljuk ki:

$$\begin{aligned}\int (15-2t)\cdot \mathrm{e}^{-0,08t}\,\mathrm{d}t =& (15-2t)\cdot \frac{\mathrm{e}^{-0,08t}}{-0,08} - \int -2\cdot \frac{\mathrm{e}^{-0,08t}}{-0,08}\,\mathrm{d}t = \\ &= (15-2t)\cdot \frac{\mathrm{e}^{-0,08t}}{-0,08} - \frac{2}{0,08}\cdot \int \mathrm{e}^{-0,08t}\,\mathrm{d}t = \\ &= (-187,5+25t)\cdot \mathrm{e}^{-0,08t} - 25\cdot \frac{\mathrm{e}^{-0,08t}}{-0,08} = \\ &= (-187,5+25t)\cdot \mathrm{e}^{-0,08t} + 312,5\cdot \mathrm{e}^{-0,08t} = \\ &= \mathrm{e}^{-0,08t}\cdot (25t+125).\end{aligned}$$

A Newton-Leibniz tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$PDV = \int_0^7 (15-2t)\cdot \mathrm{e}^{-0,08t}\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^{-0,08t}\cdot (25t+125)\right]_0^7 =$$

$$= 300\cdot \mathrm{e}^{-0,56} - 125 = 46,36\,\text{[millió dollár]}.$$

27. Numerikus integrálási módszerek

213. **Feladat.** Tekintsük

$$\int_3^6 \sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

a) Közelítsük az integrál értékét trapéz formulával úgy, hogy a $[3;6]$ intervallumot $n=5$ részintervallumra osztjuk!
b) Becsüljük meg a közelítés hibáját!
c) Közelítsük az integrál értékét Simpson formulával úgy, hogy a $[3;6]$ intervallumot $2n=10$ részintervallumra osztjuk!
d) Becsüljük meg a közelítés hibáját!
e) Számoljuk ki az integrál pontos értékét!
f) Legalább hány részre osszuk fel a $[3;6]$ intervallumot, ha azt szeretnénk, hogy a trapéz formula esetén a közelítés maximális hibája legfeljebb $0,001$ legyen?

Megoldás:

a) Az alapintervallumot 5 egyenlő részre osztjuk, így az keletkező alappontok

$$x_0=3; \quad x_2=4,2; \quad x_4=5,4;$$
$$x_1=3,6; \quad x_3=4,8; \quad x_5=6.$$

Egy részintervallum hossza $0,6$.

A trapéz formula általános képlete szerint

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx$$
$$\approx \frac{b-a}{2n}\cdot\big(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\big).$$

Behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int_3^6 \sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x \approx 0,6\cdot\left(\frac{\sqrt{3-2}}{2}+\sqrt{3,6-2}+\sqrt{4,2-2}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{4,8-2}+\sqrt{5,4-2}+\frac{\sqrt{6-2}}{2}\right)=$$
$$=0,6\cdot\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1,6}+\sqrt{2,2}+\sqrt{2,8}+\sqrt{3,4}+\frac{\sqrt{4}}{2}\right)\approx$$
$$\approx 4,659.$$

b) A közelítés maximális hibája:

$$\frac{k\cdot(b-a)^3}{12n^2},$$

ahol

$$k=\max_{x\in[a;b]}|f''(x)|.$$

Az

$$f(x)=\sqrt{x-2}=(x-2)^{\frac{1}{2}}$$

függvény deriváltja

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(x-2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-2}}.$$

Az $f(x)$ függvény második deriváltja

$$f''(x)=-\frac{1}{4}\cdot(x-2)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4\cdot\sqrt{(x-2)^3}},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$k=\max_{x\in[3;6]}\left|\frac{1}{4\cdot\sqrt{(x-2)^3}}\right|=\frac{1}{4},$$

így a közelítés maximális hibája

$$\frac{(6-3)^3}{12\cdot 5^2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{400}=2,25\cdot 10^{-2}=0,0225.$$

c) A Simpson formula esetén az az osztópontok száma $2n$, így

$$\begin{array}{llll} x_0 = 3; & x_3 = 3,9; & x_6 = 4,8; & x_{10} = 6. \\ x_1 = 3,3; & x_4 = 4,2; & x_7 = 5,1; & \\ x_2 = 3,6; & x_5 = 4,5; & x_9 = 5,7; & \end{array}$$

A Simpson formula általános képlete szerint

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)}{6n} \cdot \left(f(x_0) + 4f\left(x_1\right) + 2f(x_2) + \right. \\ \left. + 4f\left(x_3\right) + \ldots + 4f\left(x_{2n-1}\right) + f(x_{2n})\right).$$

A képletbe behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int_3^6 \sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{0,6}{6} \cdot \Big(\sqrt{3-2} + 4\cdot\sqrt{3,3-2} + 2\cdot\sqrt{3,6-2} + \\ + 4\cdot\sqrt{3,9-2} + 2\cdot\sqrt{4,2-2} + 4\cdot\sqrt{4,5-2} + \\ + 2\cdot\sqrt{4,8-2} + 4\cdot\sqrt{5,1-2} + 2\cdot\sqrt{5,4-2} + \\ + 4\cdot\sqrt{5,7-2} + \sqrt{6-2}\Big) = \\ = \frac{0,6}{6} \cdot \Big(\sqrt{1} + 4\cdot\sqrt{1,3} + 2\cdot\sqrt{1,6} + 4\cdot\sqrt{1,9} + \\ + 2\cdot\sqrt{2,2} + 4\cdot\sqrt{2,5} + 2\cdot\sqrt{2,8} + 4\cdot\sqrt{3,1} + \\ + 2\cdot\sqrt{3,4} + 4\cdot\sqrt{4,7} + \sqrt{4}\Big) \approx 4,667.$$

d) A közelítés maximális hibája:

$$\frac{K\cdot(b-a)^5}{2880n^4},$$

ahol

$$K = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Az $f(x)$ függvény harmadik és negyedik deriváltja

$$f'''(x) = \frac{3}{8}\cdot(x-2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{(x-2)^5}}.$$

Az $f(x)$ függvény negyedik deriváltja

$$f^4(x) = -\frac{15}{16} \cdot (x-2)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-2)^7}},$$

így $K = \frac{15}{16}$, amiből a közelítés maximális hibája

$$\frac{(6-3)^5}{2880 \cdot 5^4} \cdot \frac{15}{16} = \frac{81}{640000} = 1,266 \cdot 10^{-4}.$$

e) Az integrál pontos értéke

$$\int_3^6 \sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_3^6 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \approx 4,667.$$

f) A közelítés maximális hibája

$$\frac{k \cdot (b-a)^3}{12n^2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 3^3}{12n^2},$$

így a

$$\frac{9}{16n^2} \leq 0,001$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk a természetes számok halmazán. Az egyenlőtlenség rendezése után azt kapjuk, hogy

$$562,5 \leq n^2,$$

így $n \in \mathbb{N}$ miatt azt kapjuk, hogy $n \geq 24$, így legalább 24 részre kell osztani a $[3;6]$ intervallumot ahhoz, hogy a közelítés maximális hibája $0,001$-nél kisebb legyen.

214. **Feladat.** Tekintsük

$$\int_0^4 2^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

a) Közelítsük az integrál értékét trapéz formulával úgy, hogy a $[0;4]$ intervallumot $n = 4$ részintervallumra osztjuk!
b) Számoljuk ki az integrál pontos értékét!

Megoldás:

a) Az alapintervallumot 4 egyenlő részre osztjuk, így az keletkező alappontok

$$x_0 = 0; \qquad x_2 = 2; \qquad x_4 = 4.$$
$$x_1 = 1; \qquad x_3 = 3;$$

Egy részintervallum hossza 1.

A trapéz formula általános képlete szerint

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx$$
$$\approx \frac{4-0}{2\cdot 4}\cdot\big(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+f(x_4)\big).$$

Az alábbi táblázat mutatja a függvényértékeket az x_i $(i = 0,1,2,3,4)$ helyeken:

x_i	$f(x_i)$
0	$2^{\sqrt{0}} = 1$
1	$2^{\sqrt{1}} = 2$
2	$2^{\sqrt{2}} = 2,67$
3	$2^{\sqrt{3}} = 3,32$
4	$2^{\sqrt{4}} = 4$

A trapéz formula képletébe behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int_0^4 2^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \approx 0,5\cdot(1+2\cdot 2+2\cdot 2,67+2\cdot 3,32+4)\approx 10,49.$$

b) Az integrál pontos értékének kiszámolásához első lépésben meghatározzuk az $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ függvény egy primitív függvényét. Ehhez hajtsuk végre a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$x = t^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = 2t,$$

így

$$\int 2^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int 2^t\cdot 2t\,\mathrm{d}t.$$

A parciális integrálás képlete szerint

$$\int 2^t \cdot 2t \,\mathrm{d}t = 2t \cdot \frac{2^t}{\ln 2} - \int 2 \cdot \frac{2^t}{\ln 2} \,\mathrm{d}t = \\ = \frac{2t \cdot 2^t}{\ln 2} - \frac{2 \cdot 2^t}{(\ln 2)^2} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel $t = \sqrt{x}$, ezért

$$\int 2^t \cdot 2t \,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{x} \cdot 2^{\sqrt{x}}}{\ln 2} - \frac{2 \cdot 2^{\sqrt{x}}}{(\ln 2)^2} + c.$$

Ezt felhasználva

$$\int 2^{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{2\sqrt{x} \cdot 2^{\sqrt{x}}}{\ln 2} - \frac{2 \cdot 2^{\sqrt{x}}}{(\ln 2)^2} \right]_0^4 = \\ = \frac{16}{\ln 2} - \frac{8}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^2} = \frac{16}{\ln 2} - \frac{6}{(\ln 2)^2} \approx 10,59.$$

215. **Feladat.** Közelítsük $\ln 2$ értékét trapéz formulával úgy, hogy a hiba kisebb legyen, mint $0,5 \cdot 10^{-3}$!

Megoldás:

Mivel

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x,$$

ezért az

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

integrál közelítését kell elvégeznünk.

Legyen $f(x) = \frac{1}{x}$. Ekkor

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2},$$

így

$$f''(x) = 2 \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}.$$

Ezt felhasználva, a trapéz formula hibaképletben szereplő k érték

$$k = \max_{x \in [1;2]} \frac{2}{x^3} = 2.$$

Tehát ha az n értékét úgy kell megválasztanunk, hogy

$$\frac{(2-1)^3}{12 \cdot n^2} \cdot 2 < 0,5 \cdot 10^{-3}$$

teljesüljön. Az egyenlőtlenséget átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{3} \cdot 10^3 < n^2,$$

így $18,2574 < n$.

Tehát az n értékét legalább 19-nek kell választanunk, ahhoz, hogy a hiba biztosan kisebb legyen, mint $0,5 \cdot 10^{-3}$.

216. **Feladat.** Tekintsük

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^x}{x} \,\mathrm{d}x$$

integrált!

a) Közelítsük az integrál értékét trapéz formulával úgy, hogy az $[1;4]$ intervallumot $n = 3$ részintervallumra osztjuk!
b) Közelítsük az integrál értékét Simpson formulával úgy, hogy az $[1;4]$ intervallumot $2n = 6$ részintervallumra osztjuk!

Megoldás:

a) Az alapintervallumot 3 egyenlő részre osztjuk, így az keletkező alappontok

$$x_0 = 1; \qquad x_2 = 3;$$
$$x_1 = 2; \qquad x_3 = 4.$$

Egy részintervallum hossza 1.

A trapéz formula általános képlete szerint

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \approx$$
$$\approx \frac{4-1}{2 \cdot 3} \cdot \big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + f(x_3)\big).$$

Az alábbi táblázat mutatja a függvényértékeket az x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ helyeken:

x_i	$f(x_i)$
1	$\frac{e}{1} = 2,72$
2	$\frac{e^2}{2} = 3,69$
3	$\frac{e^3}{3} = 6,7$
4	$\frac{e^4}{4} = 13,65$

A trapéz formula képletébe behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int_1^4 \frac{e^x}{x}\,dx \approx 0,5 \cdot (2,72 + 2 \cdot 3,69 + 2 \cdot 6,7 + 13,65) =$$

$$= 0,5 \cdot (2,72 + 7,38 + 13,4 + 13,65) = 18,575.$$

b) Az alapintervallumot 6 egyenlő részre osztjuk, így az keletkező alappontok

$$x_0 = 1; \qquad x_3 = 2,5;$$
$$x_1 = 1,5; \qquad x_4 = 3;$$
$$x_2 = 2; \qquad x_5 = 3,5.$$

A Simpson formula általános képlete szerint

$$\int_1^4 f(x)\,dx \approx \frac{4-1}{6 \cdot 3} \cdot (f(x_0) + 4f(x_1) +$$

$$+\ 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6))\,.$$

Az alábbi táblázat mutatja a függvényértékeket az x_i helyeken:

x_i	$f(x_i)$
1	$\frac{\mathrm{e}}{1} = 2,72$
$1,5$	$\frac{\mathrm{e}^{1,5}}{1,5} = 2,99$
2	$\frac{\mathrm{e}^{2}}{2} = 3,69$
$2,5$	$\frac{\mathrm{e}^{2,5}}{2,5} = 4,87$
3	$\frac{\mathrm{e}^{3}}{3} = 6,7$
$3,5$	$\frac{\mathrm{e}^{3,5}}{3,5} = 9,46$
4	$\frac{\mathrm{e}^{4}}{4} = 13,65$

A Simpson formula képletébe behelyettesítve az adatokat azt kapjuk, hogy

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6} \cdot (2,72 + 4 \cdot 2,99 + 2 \cdot 3,69 + 4 \cdot 4,87 +$$
$$+ 2 \cdot 6,7 + 4 \cdot 9,46 + 13,65) \approx 17,74.$$

28. Improprius integrálok

217. **Feladat.** Konvergens-e az

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját felhasználva

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_1^{c} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_1^{c} x^{-2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim_{c\to\infty} \left(-\frac{1}{c}+1\right) = 1,$$

így az improprius integrál konvergens, és értéke 1.

218. **Feladat.** Konvergens-e az

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_2^{c} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_2^{c} x^{-3}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_2^c = \lim_{c\to\infty} \left(-\frac{1}{2c^2}+\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8},$$

így az improprius integrál konvergens, és értéke $\frac{1}{8}$.

219. **Feladat.** Konvergens-e az

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját felhasználva

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{-2} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to-\infty} \int_{c}^{-2} x^{-3}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_c^{-2} =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \left(-\frac{1}{2\cdot(-2)^2} + \frac{1}{2c^2}\right) = -\frac{1}{8},$$

így az improprius integrál konvergens, és értéke $-\frac{1}{8}$.

220. **Feladat.** Konvergens-e az

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját alkalmazva

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_{1}^{c} \frac{1}{x^{\frac{7}{4}}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \left[-\frac{4}{3}\cdot x^{-\frac{3}{4}}\right]_1^c =$$

$$= \lim_{c\to\infty} \left(-\frac{4}{3}\cdot c^{-\frac{3}{4}} + \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3},$$

így az improprius integrál konvergens, és értéke $\frac{4}{3}$.

221. **Feladat.** Konvergens-e az

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját alkalmazva

$$\int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_0^c \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^c =$$
$$= \lim_{c\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-c}+1\right) = 1,$$

így az improprius integrál konvergens, és értéke 1.

222. **Feladat.** Konvergens-e az

$$\int_4^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját alkalmazva

$$\int_4^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_4^c \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\left[\ln|x|\right]_0^c =$$
$$= \lim_{c\to\infty}\left(\ln c - \ln 4\right) = \infty.$$

Tehát az improprius integrál nem konvergens.

223. **Feladat.** Konvergens-e az

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját alkalmazva

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0}\int_c^1 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_c^1 =$$
$$= \lim_{c\to 0}(2\sqrt{1} - 2\sqrt{c}) = 2,$$

így az improprius integrál konvergens, és értéke 2.

224. **Feladat.** Konvergens-e az

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0}\int_c^1 x^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{c\to 0}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{1} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{c^2}\right) = \frac{3}{2},$$

így az improprius integrál konvergens, és értéke $\frac{3}{2}$.

225. **Feladat.** Konvergens-e az

$$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0}\int_c^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0}\int_c^1 1\cdot\ln x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{c\to 0}\left([x\ln x]_c^1 - \int_c^1 x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{c\to 0}\left([x\ln x]_c^1 - \int_c^1 1\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \lim_{c\to 0}\left([x\ln x]_c^1 - [x]_c^1\right) =$$

$$= \lim_{c\to 0}\left(1\cdot\ln 1 - c\cdot\ln c - (1-c)\right) = -1,$$

ugyanis a L'Hospital szabály szerint

$$\lim_{c\to 0} c\cdot \ln c = \lim_{c\to 0}\frac{\ln c}{\frac{1}{c}} = \lim_{c\to 0}\frac{\frac{1}{c}}{-\frac{1}{c^2}} = \\ = \lim_{c\to 0}\frac{1}{c}\cdot(-c^2) = \lim_{c\to 0} -c = 0$$

adódik.

226. **Feladat.** Konvergens-e az

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to\infty}}\int_{c}^{d}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to\infty}}[\operatorname{arctg} x]_c^d = \\ = \lim_{\substack{c\to-\infty\\ d\to\infty}}(\operatorname{arctg} d - \operatorname{arctg} c) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi,$$

így az improprius integrál konvergens, és értéke π.

227. **Feladat.** Konvergens-e az

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{|x|}}\,\mathrm{d}x$$

improprius integrál? Ha igen, számoljuk ki az értékét!

Megoldás:

Az improprius integrál definícióját alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{|x|}}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\lim_{c\to\infty}\int_{0}^{c}\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\cdot\lim_{c\to\infty}\int_{0}^{c}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\lim_{c\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_{0}^{c} =$$

$$= 2\cdot\lim_{c\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-c}+1\right) = 2,$$

így az improprius integrál konvergens, és értéke 2.

29. Gázok idő szerinti sebességeloszlása

228. **Feladat.** Egy tartályban $N = 10^{12}$ darab nitrogénmolekula található. A tartályban lévő gázmolekulák tömege $m_0 = 4,652 \cdot 10^{-25}$ [kg], a tartályban a hőmérséklet $T = 273,15$ [K].

a) Írjuk fel a gáz esetén a sebességnagyság eloszlásának $n(v)$ sűrűségfüggvényét!
b) Határozzuk meg a sűrűségfüggvény deriváltját!
c) Számoljuk ki a sűrűségfüggvény második deriváltját!
d) Határozzuk meg a $v \mapsto n(v)$ függvény maximumát!
e) Vizsgáljuk meg a $v \mapsto n(v)$ függvényt konvexitás szerint, határozzuk meg a függvény inflexiós helyeit!
f) Vázoljuk fel az $n(v)$ függvény grafikonját!
g) Hány darab részecske tartózkodik átlagosan a $[100; 200] \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$ sebességtartományban?
h) Adjuk meg a részecskék átlagos sebességnagyságát!
i) Határozzuk meg a részecskék átlagos mozgási energiáját!

Megoldás:

a) A gáz sebességnagyság szerinti sűrűségfüggvénye

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2},$$

ahol

$$A = N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3}$$

és

$$B = \frac{m_0}{2k \cdot T}.$$

Mivel

$$A = N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3} = 10^{12} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15}\right)^3} \approx$$

$$\approx 34\,592 \left[\frac{\mathrm{s}^3}{\mathrm{m}^3}\right],$$

és

$$B = \frac{m_0}{2k \cdot T} = \frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} \approx 6,17 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}\right],$$

ezért a kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy a gáz sebességnagyság szerinti sűrűségfüggvénye

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} = 34\,592 \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-6,17 \cdot 10^{-5} \cdot v^2} \left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right].$$

b) Az $n(v)$ függvény deriváltja

$$\begin{aligned} n'(v) &= 2Av \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} - A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot 2Bv = \\ &= \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3). \end{aligned}$$

c) Az $n(v)$ függvény második deriváltja

$$\begin{aligned} n''(v) &= -2Bv \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3) + \\ &\quad + \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2A - 6ABv^2) = \\ &= \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (4AB^2v^4 - 10ABv^2 + 2A). \end{aligned}$$

d) Az $n(v)$ függvény maximum helyének meghatározásához először megoldjuk az $n'(v) = 0$ egyenletet. A megoldandó egyenlet

$$\mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3) = 0.$$

Mivel az $x \mapsto \mathrm{e}^x$ függvény sehol sem zérus, ezért $A \neq 0$, $v > 0$ miatt az egyenlet megoldására $v = \frac{1}{\sqrt{B}}$ adódik. Mivel

$$\begin{aligned} n''\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right) &= \mathrm{e}^{-1} \cdot \left(4AB^2 \cdot \frac{1}{B^2} - 10AB \cdot \frac{1}{B} + 2A\right) \\ &= \mathrm{e}^{-1} \cdot (-4A) = -\frac{4A}{\mathrm{e}} < 0, \end{aligned}$$

ezért a függvények lokális maximum helye van a $v = \frac{1}{\sqrt{B}}$ helyen. Mivel ez az egyetlen lokális maximum hely, ezért ez egyben globális maximum hely is. Azt kaptuk tehát, hogy az $n(v)$ függvény maximum helye

$$v^\star = \frac{1}{\sqrt{B}} = 127,3 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

e) Az előbbiekben megkaptuk, hogy a $v^\star = \frac{1}{\sqrt{B}}$ helyen globális maximum helye van az $n(v)$ függvénynek. A második derivált zérushelyeit $\mathrm{e}^{-B\cdot v^2} \neq 0$ miatt a

$$4AB^2v^4 - 10ABv^2 + 2A = 0$$

egyenlet megoldásával kapjuk. Vezessük be a $v^2 = u$ jelölést. Ekkor a

$$4AB^2u^2 - 10ABu + 2A = 0$$

egyenlethez jutunk. Mivel $A \neq 0$, ezért az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk A-val. Ekkor a

$$4B^2u^2 - 10Bu + 2 = 0$$

egyenletet kapjuk. A másodfokú egyenlet megoldóképletének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$u_{1,2} = \frac{10B \pm \sqrt{100b^2 - 32B^2}}{8B^2} = \frac{10B \pm \sqrt{68}B}{8B^2} = \frac{5B \pm \sqrt{17}B}{4B^2},$$

azaz

$$u_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{4B} \approx \frac{2,28}{B}; \quad u_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{4B} \approx \frac{0,47}{\sqrt{B}}.$$

Mivel $v > 0$, ezért

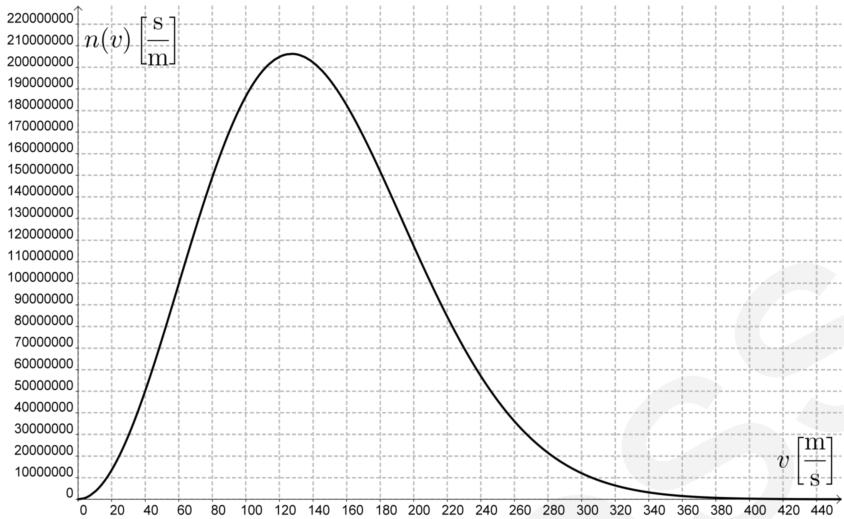
$$v_1 = \frac{1,51}{\sqrt{B}}; \quad v_2 = \frac{0,47}{\sqrt{B}}.$$

Az $n(v)$ függvény második deriváltjának előjeleit az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

	$v < \frac{0{,}47}{\sqrt{B}}$	$v = \frac{0{,}47}{\sqrt{B}}$	$\frac{0{,}47}{\sqrt{B}} < v < \frac{2{,}28}{\sqrt{B}}$	$v = \frac{2{,}28}{\sqrt{B}}$	$v > \frac{2{,}28}{\sqrt{B}}$
$n''(v)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$n(v)$	konvex	ip	konkáv	ip	konvex

A fenti táblázatban az „ip” az inflexiós pont rövidítése.

f) Az $n(v)$ függvény grafikonja:



g) A $[100;200]$ sebességtartományba eső részecskék átlagos száma:

$$N_{[100;200]} = \int_{100}^{200} n(v)\,\mathrm{d}v = \int_{100}^{200} A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B\cdot v^2}\,\mathrm{d}v.$$

A fenti integrált nem tudjuk analitikusan kiszámolni, nem alkalmazható a Newton-Leibniz tétel, ugyanis az integrálandó függvénynek nem létezik zárt alakban felírható primitív függvénye. Az integrál értékét numerikus matematikai módszerekkel vagy valamilyen matematikai szoftver alkalmazásával számolhatjuk ki. Mi most az előbbit válaszjuk és trapéz formula segítségével adjuk meg az integrál közelítő értékét. Bontsuk fel a $[100;200]$ intervallumot 5 egyenlő részre. Ekkor a megfelelő trapézok terültének összege, ami a keresett integrál közelítő értéke:

$$\int_{100}^{200} A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B\cdot v^2}\,\mathrm{d}v \approx \frac{n(100)+n(120)}{2}\cdot 20 + \frac{n(120)+n(140)}{2}\cdot 20 +$$
$$+\frac{n(140)+n(160)}{2}\cdot 20 + \frac{n(160)+n(180)}{2}\cdot 20 +$$
$$+\frac{n(180)+n(200)}{2}\cdot 20 = 10\cdot(n(100)+2\cdot n(120)+$$
$$+2\cdot n(140)+2\cdot n(160)+2\cdot n(180)+n(200))\,.$$

A megfelelő adatok behelyettesítése után azt kapjuk, hogy a $[100; 200]$ sebességtartományba eső részecskék átlagos száma közelítőleg $4,73 \cdot 10^{11}$.

h) A részecskék átlagos sebességnagysága

$$v_{\text{átlag}} = \frac{\int\limits_0^\infty v \cdot n(v)\,\mathrm{d}v}{\int\limits_0^\infty n(v)\,\mathrm{d}v} \approx 143,65\,\left[\frac{m}{s}\right].$$

A számolást matematikai szoftver segítségével végeztük el.

i) A részecskék átlagos mozgási energiája:

$$\varepsilon_{\text{átlag}} = \frac{\int\limits_0^\infty \varepsilon \cdot n(v)\,\mathrm{d}v}{\int\limits_0^\infty n(v)\,\mathrm{d}v} \approx 5,66 \cdot 10^{-21}\,[\mathrm{J}].$$

A számolást matematikai szoftver segítségével végeztük el.

229. **Feladat.** Egy Van de Graaf típusú részecskegyorsító tartályában, a berendezés normál működése esetén nagy vákuum uralkodik. A tartályban található nitrogén molekulák száma $N = 2 \cdot 10^4$ [db]. A tartályban maradt gáz további adatai az alábbiak:

$$m_0 = 4,652 \cdot 10^{26}\,[\mathrm{kg}];\; T = 293,15\,[\mathrm{K}];\; k = 1,38 \cdot 10^{-23}\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right].$$

a) Írjuk fel a gáz esetén a sebességnagyság eloszlásának sűrűségfüggvényét $\big(n(v)\big)$, majd határozzuk meg annak első és második deriváltját!

b) Határozzuk meg azt a $v^\star$ sebességnagyságot, amellyel átlagosan a legtöbb részecske mozog! (A $v^\star$ sebesség az $n(v)$ függvény maximum helye.)

<u>**Megoldás**</u>:

a) A gáz sebességnagyság szerinti sűrűségfüggvénye

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2},$$

ahol

$$A = N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3}$$

és

$$B = \frac{m_0}{2k \cdot T}.$$

Az A paraméter értéke

$$A = N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3} = 2 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15}\right)^3} \approx$$

$$\approx 6,22 \cdot 10^{-4} \left[\frac{\mathrm{s}^3}{\mathrm{m}^3}\right],$$

míg a B paraméter értéke

$$B = \frac{m_0}{2k \cdot T} = \frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} \approx 5,74 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}\right].$$

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} = 6,22 \cdot 10^{-4} \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-5,74 \cdot 10^{-6} \cdot v^2} \left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right].$$

Az $n(v)$ függvény deriváltja

$$n'(v) = 2Av \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} - A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot 2Bv =$$
$$= \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3).$$

Az $n(v)$ függvény második deriváltja

$$n''(v) = -2Bv \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3) +$$
$$+ \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2A - 6ABv^2) =$$
$$= \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (4AB^2v^4 - 10ABv^2 + 2A).$$

b) Az $n(v)$ függvény maximum helyének meghatározásához először megoldjuk az $n'(v) = 0$ egyenletet. A megoldandó egyenlet

$$\mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \cdot (2Av - 2ABv^3) = 0.$$

Mivel az $x \mapsto \mathrm{e}^x$ függvény sehol sem zérus, ezért $A \neq 0$, $v > 0$ miatt az egyenlet megoldására $v = \frac{1}{\sqrt{B}}$ adódik. Mivel

$$v''\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right) < 0,$$

ezért a függvények lokális maximum helye van a $v = \frac{1}{\sqrt{B}}$ helyen. Mivel ez az egyetlen lokális maximum hely, ezért ez egyben globális maximum hely is. Azt kaptuk tehát, hogy az $n(v)$ függvény maximum hely

$$v = \frac{1}{\sqrt{B}} = 417,04 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

230. **Feladat.** Egy mol normál állapotú nitrogén gázban hány darab gázrészecske sebessége haladja meg a normál állapotú levegőre vonatkozó hangsebességet? Megjegyezzük, hogy $v_{\text{hang}} = 331,5\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$. Emlékeztetünk arra, hogy egy mol normál állapotú nitrogén gáz esetén a részecskék száma, nyomása, hőmérséklete és tömege az alábbi:

$$N = 6,022 \cdot 10^{23}\,[\text{db}]; \quad p = 1,013 \cdot 10^{5}\,[\text{Pa}];$$
$$T = 273,15\,[\text{K}]; \quad m_0 = 4,652 \cdot 10^{-26}\,[\text{kg}].$$

Megoldás:

A gáz sebességnagyság szerinti sűrűségfüggvénye

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2},$$

ahol

$$A = N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3}$$

és

$$B = \frac{m_0}{2k \cdot T}.$$

Az A paraméter értéke

$$\begin{aligned} A = N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{m_0}{k \cdot T}\right)^3} &= \\ = 6,022 \cdot 10^{23} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15}\right)^3} &\approx \\ \approx 1,87 \cdot 10^{16} \left[\frac{\text{s}^3}{\text{m}^3}\right], \end{aligned}$$

míg a B paraméter értéke

$$B = \frac{m_0}{2k \cdot T} = \frac{4,652 \cdot 10^{-26}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} \approx 5,74 \cdot 10^{-6} \left[\frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}\right].$$

A kapott eredményeket felhasználva azt kapjuk, hogy

$$n(v) = A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} = 1,87 \cdot 10^{16} \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-5,74 \cdot 10^{-6} \cdot v^2} \left[\frac{\text{s}}{\text{m}}\right].$$

Azon gázrészecskék számát, amelyek sebessége a hangsebességnél nagyobb, az alábbi improprius integrál adja:

$$\int_{331,5}^{\infty} A \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-B \cdot v^2} \, \mathrm{d}v.$$

A megfelelő adatokat behelyettesítve, majd az integrálást például a „Wolfram Alpha" számítógépes szoftver segítségével elvégezve azt kapjuk, hogy a részecskék száma: $4,45 \cdot 10^{23}$ [db].

30. Vegyes feladatok

231. **Feladat.** Egy egyenes pályán mozgó test sebesség-idő függvénye

$$v\colon [0;10] \to \mathbb{R},\ v(t) = 8t + 10.$$

Az időt másodperceben, a sebességet $\left[\frac{m}{s}\right]$-ban mérjük. Mekkora utat tesz meg a test?

Megoldás:

Mivel

$$s = \int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t = [4t^2 + 10t]_0^{10} = 400 + 100 = 500,$$

ezért a megtett út $500\,[\mathrm{m}]$.

232. **Feladat.** Egy egyenes pályán mozgó test sebesség-idő függvénye

$$v\colon [0;60] \to \mathbb{R},\ v(t) = t^2 - 3t + 5.$$

Az időt másodperceben, a sebességet $\left[\frac{m}{s}\right]$-ban mérjük. A 0 időpillanatban a test kitérése $s(0) = 8\,[\mathrm{m}]$. Adjuk meg a test hely-idő függvényét!

Megoldás:

Mivel

$$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int t^2 - 3t + 5\,\mathrm{d}t\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 5t + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Mivel $s(0) = 8$, ezért $c = 8$, így a hely-idő függvény

$$\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 + 5t + 8.$$

233. **Feladat.** Egy test egyenes pályán mozog a $[0;15]$ időintervallumban. A test sebesség-idő függvénye $v(t) = 2t - 2$ és $s(1) = -1$. Adjuk meg a test hely-idő függvényét! Mennyi a 2 és 12 időpillanatbeli helyzet távolsága?

Megoldás:

Mivel

$$s(t) = \int 2t - 2\,\mathrm{d}t = t^2 - 2t + c$$

és $-1 = s(1) = -1 + c$ miatt $c = 0$, ezért a test hely-idő függvénye

$$s(t) = t^2 - 2t.$$

Mivel $s(2) = 4 - 4 = 0$ és $s(12) = 144 - 24 = 120$, ezért a 2 és 12 időpillanatbeli helyzet távolsága $120 - 0 = 120$ méter. Ezt az eredményt úgy is megkaphatjuk, hogy a sebesség-idő függvény Riemann-integrálját számoljuk ki a $[2; 12]$ intervallumon:

$$\int_{2}^{12} 2t - 2\,\mathrm{d}t = [t^2 - 2t]_2^{12} = 144 - 24 - (4 - 4) = 120\,[\mathrm{m}].$$

234. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = 4x - x^2$ függvényt! Írjuk fel ezen függvény $A = \big(1; f(1)\big)$ és $B = \big(3; f(3)\big)$ pontjába húzott érintőegyenesének egyenletét! Az $f(x)$ függvény grafikonjának az x-tengellyel bezárt zárt síkidiom területe hanyad része az érintő egyenesek és az x-tengely által bezárt háromszögnek?

<u>**Megoldás**</u>:

Az $f(x)$ függvény zérushelyei az

$$4x - x^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot (4 - x) = 0,$$

egyenlet megoldásai, így $x_1 = 0$, illetve $x_2 = 4$. Az $f(x)$ függvény grafikonjának az x-tengellyel bezárt területe

$$T = \int_{0}^{4} 4x - x^2\,\mathrm{d}x = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

Mivel $f'(x) = 4 - 2x$ és $f(1) = 3$, továbbá $f'(1) = 2$, ezért az $\big(1; f(1)\big)$ pontba húzott érintő egyenes egyenlete

$$y = 3 + 2 \cdot (x - 1) \qquad \Rightarrow \qquad y = 2x + 1.$$

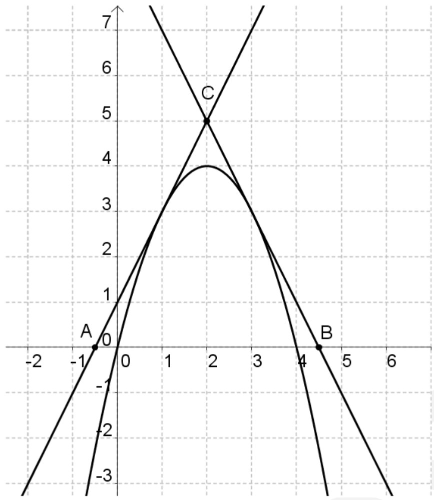
Mivel $f'(x) = 4 - 2x$ és $f(3) = 3$, továbbá $f'(3) = -2$, ezért az $\big(3; f(3)\big)$ pontba húzott érintő egyenes egyenlete

$$y = 3 - 2 \cdot (x - 3) \qquad \Rightarrow \qquad y = 9 - 2x.$$

Az $y = 0$ és $y = 2x + 1$ egyenesek metszéspontja $A = \big(-\frac{1}{2}; 0\big)$.

Az $y = 0$ és $y = 9 - 2x$ egyenesek metszéspontja $B = \big(\frac{9}{2}; 0\big)$.

Az $y = 1 + 2x$ és $y = 9 - 2x$ egyenesek metszéspontja $C = (2; 5)$.



Az ABC háromszög alapjának hossza 5 egység, a háromszög magassága szintén 5 egység, így a háromszög területe

$$T_{\triangle} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}.$$

Mivel

$$\frac{\frac{32}{3}}{\frac{25}{2}} = \frac{64}{75},$$

ezért a parabola területe a háromszög területének $\frac{64}{75}$-öd része.

235. **Feladat.** Tekintsük az $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ függvényt! Legyen $F(x)$ az $f(x)$ függvény azon primitív függvénye, amelyre $F(0) = 0$ teljesül.

a) Adjuk meg az $F(x)$ leképezési szabályát!
b) Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az $F(x)$ függvény értelmezhető!
c) Számoljuk ki az $F(x)$ függvény zérushelyét!
d) Vizsgáljuk meg monotonitás és lokális szélsőérték szerint az $F(x)$ függvényt!
e) Vizsgáljuk meg konvexitás és inflexiós pont szerint az $F(x)$ függvényt!
f) Határozzuk meg az $F(x)$ függvény határértékét az értelmezési tartomány határpontjaiban!
g) Vázoljuk fel az $F(x)$ függvény grafikonját!

h) Határozzuk meg az $F(x)$ függvény értékkészletét!
i) Korlátos-e az $F(x)$ függvény?
j) Vizsgáljuk meg az $F(x)$ függvény paritását!
k) Számoljuk ki az $f(x)$függvény Riemann-integrálját a $[0;1]$ intervallumon!
l) Az $f(x)$ függvény grafikonját a $[0;1]$ intervallumon megforgatjuk az x-tengely körül. Számoljuk ki a keletkezett forgástest térfogatát!

Megoldás:

a) Végezzük el a $\sqrt{x} = t$ helyettesítést! Ekkor

$$x = t^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = 2t.$$

A helyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{t}{1+t^2}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\cdot\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \\ = 2\cdot\int 1-\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\cdot(t-\operatorname{arctg} t)+c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Mivel $t = \sqrt{x}$, ezért

$$F(x) = \int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\left(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)+c.$$

Felhasználva, hogy $F(0) = 0$ azt kapjuk, hogy $c = 0$, így

$$F(x) = 2\cdot\left(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right).$$

b) Az $F(x)$ függvény értelmezési tartománya: $x \in [0;\infty[$.

c) A zérushelyet az $F(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk:

$$2\cdot\left(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right),$$

amiből azt kapjuk, hogy $x = 0$.

d) Az $F(x)$ függvény deriváltja $F'(x) = f(x)$.

Ennek zérushelye(i), azaz a

$$\frac{\sqrt{x}}{1+x} = 0$$

egyenlet egyetlen megoldása $x = 0$. Mivel minden $x \geq 0$ szám esetén $F'(x) \geq 0$, ezért $F(x)$ értelmezési tartományának minden pontjában monoton növekvő.

e) Az $F(x)$ függvény második deriváltja

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(1+x)-\sqrt{x}}}{(1+x)^2} = \frac{1+x}{2\cdot\sqrt{x}} - \sqrt{x} =$$
$$= \frac{1+x-2x}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\cdot\sqrt{x}\cdot(1+x)^2}.$$

Ennek zérushelye, azaz az $F''(x) = 0$ egyenlet megoldása $x = 1$.

Táblázatba foglaljuk a második derivált előjelét:

x	$]0;1[$	1	$]1;\infty[$
$F''(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	konkáv	inflexiós pont	konvex
$F(x)$		$0,21$	

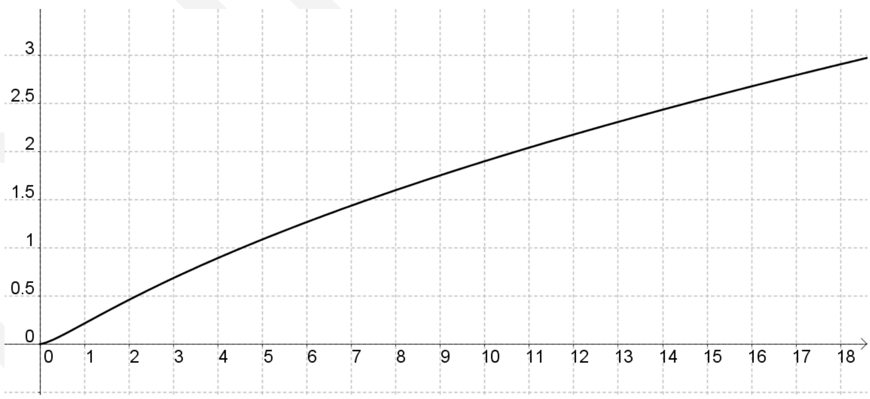
f) Az $F(x)$ függvény határértéke a 0 helyen:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$

Az $F(x)$ függvény határértéke ∞-ben:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty.$$

g) A függvény grafikonja:



h) Az $F(x)$ függvény értékkészlete: $y \leq 0$.

i) Az $F(x)$ függvény alulról korlátos, felülről nem korlátos, így nem korlátos.

j) Nem páros, nem páratlan.

k) Az $f(x)$ függvény Riemann-integrálja a $[0;1]$ intervallumon

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \left[2\cdot\left(\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)\right]_0^1 = 2\cdot\left(2-\frac{\pi}{4}\right).$$

l) Mivel

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)^2\mathrm{d}x &= \int\frac{x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int\frac{x+1-1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c,\end{aligned}$$

ezért

$$\int_0^1\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)^2\mathrm{d}x = \left[\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \ln 2 + \frac{1}{2} - \ln 1 - 1 =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} = 0,1932.$$

A keresett térfogat

$$V = \pi\cdot\int_0^1\left(\frac{\sqrt{x}}{1+x}\right)^2\mathrm{d}x \approx 0,1932\cdot\pi \approx 0,6068.$$

236. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int\frac{1}{x\cdot(1+\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x$$

integrált!

Megoldás:

Legyen

$$k(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

és $b(x) = \ln x$. Ekkor $f(x) = k\circ b(x)\cdot b'(x)$, így

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int k(x)\,\mathrm{d}x\circ b(x).$$

Ezt felhasználva a keresett integrál

$$\int \frac{1}{x \cdot (1 + \ln^2 x)} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(\ln x) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

237. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \, \mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Legyen

$$k(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

és $b(x) = \sin x$. Ekkor $f(x) = k \circ b(x) \cdot b'(x)$, így

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int k(x) \, \mathrm{d}x \circ b(x).$$

Ezt felhasználva a keresett integrál

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1 + \sin^2 x} \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(\sin x) + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

238. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$ függvény azon $F(x)$ primitív függvényét, amelyre $F(0) = 0$ teljesül!

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}},$$

ezért

$$F(x) = \int f(x) \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{6}} \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + c = \frac{6}{11} \cdot \sqrt[6]{x^{11}} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Mivel $F(0) = 0$, ezért $c = 0$, így a keresett primitív függvény

$$F(x) = \frac{6}{11} \cdot \sqrt[6]{x^{11}}.$$

239. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

intgerált!

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{1}{6}},$$

ezért

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{6}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + c = \frac{6}{7}\cdot\sqrt[6]{x^7} + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

240. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{\cos^2 x - 1}{1 + \cos 2x}\,\mathrm{d}x$$

intgerált!

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

és

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

ezért

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^2 x - 1}{1 + \cos 2x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg} x + c,\end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$.

241. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2, & \text{ha } 0 < x < 2 \\ 1, & \text{ha } x \geq 2. \end{cases}$$

függvény Riemann-integrálját a $[-5; 5]$ intervallumon!

Megoldás:

Az $f(x)$ függvény Riemann-integrálja a $[-5; 5]$ intervallumon

$$\int_{-5}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-5}^{0} -x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{1}{4}x^2\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{5} 1\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-5}^{0} + \left[\frac{x^3}{12}\right]_{0}^{2} + [x]_2^5 =$$
$$= \frac{25}{2} + \frac{8}{12} + 3 = \frac{97}{6}.$$

242. **Feladat.** Határozzuk meg a p valós számot úgy, hogy teljesüljön az

$$\int_{0}^{p} 2x + 3\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{p} 3x + 4\,\mathrm{d}x$$

egyenlet!

Megoldás:

Mivel

$$\int_{0}^{p} 2x + 3\,\mathrm{d}x = [x^2 + 3x]_0^p = p^2 + 3p$$

és

$$\int_{1}^{p} 3x + 4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_1^p = \frac{3}{2}p^2 + 4p - \frac{3}{2} - 4 =$$
$$= \frac{3}{2}p^2 + 4p - \frac{11}{2},$$

ezért az

$$p^2 + 3p = \frac{3}{2}p^2 + 4p - \frac{11}{2}$$

egyenletet kell megoldanunk. Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$p^2 + 2p - 11 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+44}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{48}}{2} = -1 \pm 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Mivel $p > 1$, ezért $p = 2 \cdot \sqrt{3} - 1$.

243. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$\int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

integrált!

<u>**Megoldás**</u>:

Végezzük el az $\ln x = t$ helyettesítést! Ekkor

$$x = \mathrm{e}^t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \mathrm{e}^t.$$

Ezt felhasználva

$$\int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{tg} t}{(\mathrm{e}^t)} \cdot \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = \int \operatorname{tg} t \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{\sin t}{\cos t} \, \mathrm{d}t = -\ln|\cos t| + c,$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Mivel $t = \ln x$, ezért

$$\int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x} \, \mathrm{d}x = -\ln\big|\cos(\ln x)\big| + c.$$

244. **Feladat.** Egy motorcsónak motorját a $t = 0$ időpillanatban leállítják. A sebesség-idő függvénye

$$v(t) = \frac{100}{(t+2)^2} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

a) Mennyi volt a csónak sebessége abban az időpillanatban, amikor leállították a motort?

b) Mennyi a csónak sebessége 3 másodperccel azután, hogy leállították a motort?

c) Számoljuk ki a $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ határértéket!

d) Adjuk meg a motorcsónak hely-idő függvényét, ha $s(0) = 0$!
e) Határozzuk meg a gyorsulás-idő függvényt!
f) Mutassuk meg, hogy

$$v'(t) = -k \cdot \big(v(t)\big)^{\frac{3}{2}}.$$

Adjuk meg a k konstans értékét!

Megoldás:

a) A csónak sebessége abban az időpillanatban, amikor leállították a motort

$$v(0) = \frac{100}{4} = 25 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

b) A csónak sebessége 3 másodperccel azután, hogy leállították a motort

$$v(3) = \frac{100}{25} = 4 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right].$$

c) A $v(t)$ függvény határértéke a végtelenben

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = 0.$$

d) Mivel

$$s(t) = \int \frac{100}{(t+2)^2}\,\mathrm{d}t = \int 100 \cdot (t+2)^{-2}\,\mathrm{d}t = -\frac{100}{t+2} + c$$

és $s(0) = 0$, ezért $c = 0$, így a motorcsónak hely-idő függvénye

$$s(t) = -\frac{100}{t+2}\,[\mathrm{m}].$$

e) A gyorsulás-idő függvény

$$a(t) = v'(t) = \frac{-100 \cdot 2 \cdot (t+2)}{(t+2)^4} = -\frac{200}{(t+2)^3} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right].$$

f) Mivel

$$v'(t) = -\frac{200}{(t+2)^3},$$

ezért

$$-\frac{200}{(t+2)^3} = -k \cdot \sqrt{\left(\frac{100}{(t+2)^2}\right)^3}.$$

Az egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$-\frac{200}{(t+2)^3} = -k \cdot \frac{1\,000}{(t+2)^3}.$$

Tehát

$$v'(t) = -k \cdot \big(v(t)\big)^{\frac{3}{2}}$$

valóban teljesül és $200 = 1\,000k$, így $k = 0,2$.

245. **Feladat.** Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény differenciálható és minden x esetén $f'(x) > 0$, továbbá $f(1) = 0$. Legyen

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Igaz-e, hogy $g(x)$ differenciálható függvény?
b) Határozzuk meg a $g'(1)$ értéket!
c) Létezik-e szélsőértéke a $g(x)$ függvénynek az $x = 1$ helyen? Ha igen, határozzuk meg a szélsőérték típusát!
d) Van-e inflexiós pontja a $g(x)$ függvénynek az $x = 1$ helyen?

Megoldás:

a) Igen, mert a $g(x)$ egy differenciálható függvény területmérő függvénye, és mint ilyen, differenciálható.
b) Mivel a $g(x)$ függvény definíciója miatt $g'(x) = f(x)$, ezért $g'(1) = f(1)$.
c) Mivel $g'(1) = f(1) = 0$, ezért az $x = 1$ helyen teljesül a lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele. Másrészt $g''(1) = f'(1) > 0$, ezért a $g(x)$ függvénynek a lokális szélsőérték létezésének másodrendű elegendő feltétele miatt lokális minimum helye van az $x = 1$ helyen.
d) Mivel $g''(x) = f'(x) > 0$, ezért a $g(x)$ függvény mindenhol konvex, így nincs inflexiós pontja.

246. **Feladat.** Egy szoba hőmérsékletét a t időpillanatban a

$$T(t) = 25 - \sqrt{25 - t}\,[^\circ\mathrm{C}] \qquad (t \in [0; 24])$$

függvény írja le. Az időt órában mérjük.

a) Mennyi volt a szoba hőmérséklete a megfigyelés kezdetén?
b) Mennyi volt a szoba hőmérséklete a megfigyelés végén?

c) Mennyi volt a szobában az átlag hőmérséklet a megfigyelés időtartama alatt?

Megoldás:

a) A szoba hőmérséklete a megfigyelés kezdetén
$$T(0) = 25 - \sqrt{25-0} = 20\,[^\circ\mathrm{C}].$$

b) A szoba hőmérséklete a megfigyelés végén
$$T(25) = 25 - \sqrt{25-25} = 25\,[^\circ\mathrm{C}].$$

c) Az átlag hőmérséklet a megfigyelés időtartama alatt
$$\begin{aligned}\frac{1}{24}\cdot\int\limits_0^{24} 25-\sqrt{25-t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{24}\cdot\left[25t - \frac{(25-t)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}\right]_0^{24} = \\ &= \frac{1}{24}\cdot\left[25t + \frac{2}{3}\cdot(25-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{24} = \\ &= \frac{1}{24}\cdot\left(25\cdot 24 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot 125\right) \approx 21{,}55\,[^\circ\mathrm{C}].\end{aligned}$$

247. **Feladat.** Egy cég egy adott termékéhez tartozó profit függvénye
$$\Pi(q) = 4\,000 - q - \frac{3\,000\,000}{q} \text{ forint}$$
a $q > 0$ kibocsátási szint függvényében.

a) Keressük meg a profitmaximalizáló kibocsátási szintet!
b) Az aktuális kibocsátás $1\,000$ és $3\,000$ egység között ingadozik. Számoljuk ki az átlagos profitot!

Megoldás:

a) A $\Pi(q)$ függvény deriváltja
$$\Pi'(q) = -1 + \frac{3\,000\,000}{q^2}.$$
A $\Pi'(q)$ függvény zérushelye
$$-1 + \frac{3\,000\,000}{q^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q \approx \pm 1\,732.$$
Felhasználva, hogy $q > 0$, ezért $q \approx 1\,732$.

Mivel
$$\Pi''(q) = -\frac{6\,000\,000}{q^3},$$
ezért $\Pi''(1\,732) < 0$, így az $1\,732$ helyen valóban maximuma van a $\Pi(q)$ függvénynek. Tehát 1 732 egység esetén lesz maximális a nyereség.

b) Az átlagos profit
$$\begin{aligned}\overline{\Pi} &= \frac{1}{2\,000} \cdot \int\limits_{1\,000}^{3\,000} 4\,000 - q - \frac{3\,000\,000}{q}\, \mathrm{d}q = \\ &= \frac{1}{2\,000} \cdot \left[4\,000q - \frac{q^2}{2} - 3\,000\,000 \ln q\right]_{1\,000}^{3\,000} \approx \\ &\approx 352\,\text{forint}.\end{aligned}$$

248. **Feladat.** Egy vállalat egy adott termék gyártásából és értékesítéséből származó relatív nyereség függvénye
$$\Pi'(q) = 2 - \frac{2}{(q+1)^2},$$
ahol $\Pi'(q)$ értékét ezer dollárban, q-t ezer darabban értjük. Mennyi nyereséggel számolhat a vállalat 3 000 darab termék előállítása és értékesítése esetén?

Megoldás:

Mivel
$$\int\limits_0^3 2 - \frac{2}{(q+1)^2}\, \mathrm{d}q = \int\limits_0^3 2 - 2 \cdot (q+1)^{-2}\, \mathrm{d}q = \left[2q + \frac{2}{q+1}\right]_0^3 = \\ = 6 + 0,5 - 2 = 4,5,$$
ezért $4,5$ millió dollár nyereség lesz.

249. **Feladat.** Egy poszter kinyomtatása költségének változási gyorsasága
$$C'(q) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{q}}.$$
Határozzuk meg a $C(100) - C(1)$ értéket, azaz azt, hogy a másodiktól a századik poszter kinyomtatásának mennyi a költsége?

Megoldás:

A költség

$$C(100)-C(1)=\int_1^{100} C'(q)\,\mathrm{d}q=\int_1^{100}\frac{1}{2\cdot\sqrt{q}}\,\mathrm{d}q=\int_1^{100}\frac{1}{2}\cdot q^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}q=$$
$$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{q^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^{100}=[\sqrt{q}]_1^{100}=9\,\text{dollár}.$$

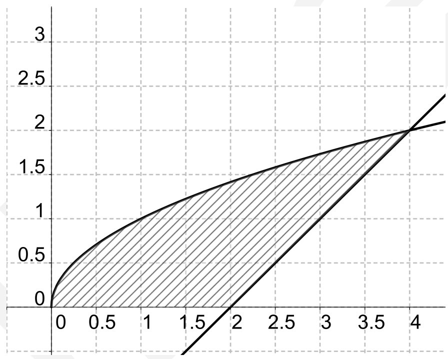
250. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x-2\le y\le\sqrt{x};\ y\ge 0\}$$

tartomány területét!

Megoldás:

A tartomány felrajzolása:



Az $f(x)=x-2$ és a $g(x)=\sqrt{x}$ függvények grafikonjainak metszéspontját az

$$x-2=\sqrt{x}$$

egyenlet megoldása adja. Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve azt kapjuk, hogy

$$x^2-4x+4=x \qquad\Rightarrow\qquad x^2-5x+4=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai $x_1=4$, illetve $x_2=1$. Az $x=1$ érték nem gyöke az $x-2=\sqrt{x}$ egyneletnek (a négyzetre emelés során keletkezett hamis gyök, ezt visszahelyettesítéssel ellenőrizhetjük), így az egyenlet egyetlen megoldása $x=4$.

A D tartomány területét úgy lehet kiszámolni, hogy a tartományt két részre bontjuk. Az egyik rész a $g(x) = \sqrt{x}$ függvénynek az x-tengellyel bezárt területe a $[0; 2]$ intervallumon, a másik rész az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikonjai által bezárt terület a $[2; 4]$ intervallumon.

Az előbbi tartomány területe

$$T_1 = \int\limits_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{8}.$$

Az előbbi tartomány területe

$$T_2 = \int\limits_2^4 \sqrt{x} - x + 2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4 =$$
$$= \frac{2}{3}\cdot 8 - 8 + 8 - \frac{2}{3}\cdot\sqrt{8} + 2 - 4 = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}\cdot\sqrt{8}.$$

Tehát a keresett terület

$$T = T_1 + T_2 = \frac{10}{3}.$$

251. **Feladat.** Számoljuk ki az $f(x) = x^7 \cdot \cos x$ függvény Riemann-integrálját a $[-4; 4]$ intervallumon!

Megoldás:

Mivel

$$f(-x) = (-x)^7 \cdot \cos(-x) = -x^7 \cdot \cos x,$$

ezért $f(-x) = -f(x)$, így az $f(x)$ függvény páratlan. A $[-4; 4]$ intervallum az origóra szimmetrikus, ezért

$$\int_{-4}^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

252. **Feladat.** Ha f Riemann integrálható függvény a $[0; 8]$ intervallumon és

$$\int_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 12,$$

valamint

$$\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 10,$$

akkor mivel egyenlő $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$?

Megoldás:

A Riemann-interál intervallum additivitási tulajdonságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

így

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x = 12 - 10 = 2.$$

References

[1] Dr. Ábrahám István – Bedő László – Dr. Czétényi Csaba – ifj. Frigyes Miklós – Juhász Attila – Dr. Korányi Erzsébet, *Matematika*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1994.

[2] Árki Tamás – Konfárné Nagy Klára – Kovács István – Trembeczki Csaba – Urbán János, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény 11-12*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2010.

[3] Babcsányi István – Gyurmánczi János – Szabó Lajos – Wettl Ferenc, *Matematika feladatgyűjtemény I.*, Műegyetemi Kiadó, 2009.

[4] Bartha Gábor – Bogdán Zoltán – , Duró Lajosné dr. – Gyapjas Ferencné – Hack Frigyes – dr. Kántor Sándorné – dr. Korányi Erzsébet, *Matematika feladatgyűjtemény II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2000.

[5] Benkő Pálné – Diószegi Ferencné – Serény György, *Matematika feladattár II.*, Műegyetemi Kiadó, 2002.

[6] Császár Ákosné, *Matematika I/1*, Műegyetemi Kiadó, 2003.

[7] Csikós Pajor Gizella – Péics Hajnalka, *Analízis elméleti összefoglaló és példatár*, Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta, 2010.

[8] Ernest F. Haeussler, *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, the Life and Social Sciences*, Prentice Hall, 2011.

[9] Dr. Gerőcs László–Juhász István–Orosz Gyula– Paróczay József–Számadó László–Szászné Dr. Simon Judit, *Matematika emelt szintű tananyag*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 2013.

[10] J. Harcet – L. Heinrichs – P. M. Seiler – M. T. Skoumal, *Mathematics Higher Level*, Oxford University Press, 2012.

[11] Horváth Eszter – Inges János – Nagyné Pálmai Piroska – Róka Sándor – Tassy Gergely, *Tehetséggondozás a matematikában*,
http://users.itk.ppke.hu/ adorjan/matematika/list.html, 2011.

[12] Horváth Eszter – Inges János – Nagyné Pálmai Piroska – Róka Sándor – Tassy Gergely – Dr. Korányi Erzsébet, *Matematika*, PPKE, elektronikus jegyzet,
http://users.itk.ppke.hu/ adorjan/rejtett/matematika/, 2013.

[13] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.

[14] Király Balázs, *Analízis (gyakorlat támogató jegyzet)*, elektronikus oktatási segédanyag, http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/analizis.pdf, 2011.

[15] Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1996. január, 51. oldal, 2869. fizika feladat, http://db.komal.hu/KomalHU/felhivatkoz.phtml?id=41005

[16] Nagyné Kondor Rita – Szíki Gusztáv Áron, *Matematika eszközök mérnöki alkalmazásokban*, Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, 2011.

[17] Kovács József – Takács Gábor – Takács Miklós, *Analízis*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[18] Kovács István – Trembeczki Csaba, *Sokszínű matematika feladatgyűjtemény, az analízis elemei 11–12 emelt szint*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[19] Lial M. L. – Greenwell R. N. – Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.

[20] Lukács Antal, *Matematika II/1*, elektronikus jegyzet,
$http : //rs1.sze.hu/\ alukacs/Matematika_I I_1.pdf$, 2018.

[21] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.

[22] Pintér Lajos, *Analízis I.*, Typotex, 1998.

[23] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.

[24] Sikolya Eszter, *Analízis jegyzet Matematikatanári Szakosok részére*, elektronikus jegyzet, tankonyvtar.ttk.bme.hu, 2013.
[25] Simon Anita, *Az analízis néhány közgazdaságtani alkalmazása*, szakdolgozat, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, 2009.
[26] Knut Sydsaeter, Peter Hammond, *Matematika közgazdászoknak*, Aula, 2006.
[27] Szentelekiné Dr. Páles Ilona, *Analízis példatár*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.
[28] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.
[29] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial*, Life and Social Sciences, Brooks/Cole, 1999.
[30] Thomas G. B. – Weir M. D. – Hass J. – Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.

Tartalomjegyzék

1. A Riemann-integrál definíciója 2
2. A Riemann integrálhatóság kritériumai és elegendő feltételei 11
3. A Riemann-integrál tulajdonságai, Newton-Leibniz tétel 17
4. Alapintegrálok 24
5. Az $f(ax+b)$ alakú függvények integrálása 41
6. Az $f^n(x) \cdot f'(x)$ alakú függvények integrálása 48
7. A $k \circ b(x) \cdot b'(x)$ alakú függvények integrálása 59
8. Parciális integrálás 67
9. Parciális törtekre bontás módszere 86
10. Integrálás helyettesítéssel 103
11. Trigonometrikus függvények racionális törtfüggvényeinek integrálása 116
12. Primitív függvények a közgazdaságtanban 124
13. Parciális és helyettesítéses integrálás tétele Riemann-integrálokra, Riemann integrálok kiszámítása Newton-Leibniz formulával 134
14. Folytonos függvények átlagértéke 141
15. Területszámítás integrálással 146
16. Forgástest térfogata 157
17. Függvény grafikonjának ívhossza 165
18. Forgástest palástjának területe 168
19. Vékony huzal, rúd és síklemez tömege 176
20. Vékony huzal, rúd és síklemez tömegközéppontja és súlypontja 180
21. Vonal mentén megoszló párhuzamos erőrendszer 189
22. Mozgástani feladatok 196
23. Munkavégzés 212
24. Riemann-integrál megjelenése a közgazdaságtanban 221
25. Lorenz-függvény 226
26. Folyamatos jövedelemáramlás diszkontált jelenértéke és jövőértéke 231
27. Numerikus integrálási módszerek 233
28. Improprius integrálok 242
29. Gázok idő szerinti sebességeloszlása 248
30. Vegyes feladatok 256

Lektor:
Dr. habil. Kocsis Imre
tanszékvezető főiskolai tanár
Debreceni Egyetem Műszaki Kar Műszaki Alaptárgyi Tanszék

ISBN 978-963-318-779-1

Kiadta: a Debreceni Egyetemi Kiadó Debrecen University Press
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Nyomdai munkálatokat
a Debreceni Egyetem sokszorosítóüzeme végezte 2019-ben
www.dupress.hu