Kocsis Imre, Maksa Gyula

AZ IRÁNYÍTOTT DIVERGENCIA EGY JELLEMZÉSE FÜGGVÉNYEGYENLETEK SEGÍTSÉGÉVEL

Az irányított divergencia egy véges valószínűségeloszlás két becslése közötti eltérést méri. Alkalmazása, vizsgálata és különböző tulajdonságrendszereivel való jellemzése több helyen előfordul az irodalomban (lásd például Theil [7], Kannappan-Rathie [5], Kannappan [4], Aczél-Daróczy [13]). Mi ebben a dolgozatban – főleg algebrai tulajdonságokat használva – egy általános jellemzési tételt bizonyítunk az irányított divergenciára függvényegyenletek segítségével.

1. BEVEZETÉS

A továbbiakban jelölje **R** a valós számok halmazát, $\mathbf{R}^n$ a valós számokból álló rendezett szám n-esek halmazát és $n\geq 2$ egész esetén Γ_n az n-elemű, pozitív valószínűségekből álló teljes valószínűségeloszlások halmazát, azaz legyen

$$\Gamma_n = \left\{ (p_1,\dots,p_n) \in \mathrm{R}^n \,\middle|\, 0 < p_k, k = 1,\dots,n; \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \right\}.$$

A $(p_1,\dots p_n)\in\Gamma_n$ eloszlás $(q_1,\dots,q_n)\in\Gamma_n$ és $(r_1,\dots r_n)\in\Gamma_n$ becslései közötti irányított divergencia (irányított eltérés) a

$$D_n\begin{pmatrix} p_1,\dots,p_n \\ q_1,\dots,q_n \\ r_1,\dots,r_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 \frac{q_k}{r_k} \tag{1}$$

képlettel van definiálva. A statisztikában és az információelméletben az ilyen jellegű mennyiségeket szokásos függvénysorozatként felfogni: például az irányított divergencia olyan $I_n:\Gamma_n^3\to\mathbf{R}$ $(n\geq 2)$ függvényekből álló (I_n) sorozat,

melyre $I_n \equiv D_n$ ($n \geq 2$), és – az információelméletben – információmértéknek nevezni (lásd Aczél-Daróczy [1]).
Megjegyezzük, hogy információmértékre talán a legfontosabb példa az

$$I_n(p_1,\dots,p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k, \qquad (p_1,\dots,p_n) \in \Gamma_n$$

függvényekből álló (I_n) függvénysorozat, amelyet Shannon entrópiának neveznek, és amelynek az elemei csak egy valószínűségeloszlástól (és nem háromtól, mint az irányított divergencia elemei) függnek.
Hogyan dönthető el, hogy egy információmérték azonos-e egy konkrét információmértékkel (például a Shannon entrópiával vagy az általánosított divergenciával)? A kérdéssel számos szerző foglalkozott és a témakörről két könyv is megjelent (Aczél-Daróczy [1], Ebanks-Sahoo-Sander [3]). Dolgozatunkban egy olyan – eddig publikálatlan – eredményről számolunk be, amely hozzájárulás az irányított divergencia jellemzési problémáinak megoldásához.
Maga a probléma a következő: mit kell feltételezni (lehetőleg „keveset”, „természeteset” és egymástól független tulajdonságokat) az $I_n:\Gamma_n^3 \to \mathbf{R}$ ($n \geq 2$) függvények (I_n) sorozatáról ahhoz, hogy ez a sorozat azonos legyen (D_n)-nel, az irányított divergenciával?

2. AZ IRÁNYÍTOTT DIVERGENCIA NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

Ha $I_n = D_n$, ahol D_n (1) szerint van definiálva ($n \geq 2$), akkor – pusztán a $\log_2$ függvény alapvető tulajdonságainak ismeretében – számolással könnyen igazolható, hogy

(I) (I_n) rekurzív, azaz

$$I_n\begin{pmatrix} p_1, p_2, \dots p_n \\ q_1, q_2, \dots q_n \\ r_1, r_2, \dots r_n \end{pmatrix} = I_{n-1}\begin{pmatrix} p_1 + p_2, \dots p_n \\ q_1 + q_2, \dots q_n \\ r_1 + r_2, \dots r_n \end{pmatrix} + (p_1 + p_2) I_2 \begin{pmatrix} p_1(p_1+p_2)^{-1}, p_2(p_1+p_2)^{-1} \\ q_1(q_1+q_2)^{-1}, q_2(q_1+q_2)^{-1} \\ r_1(r_1+r_2)^{-1}, \quad r_2(r_1+r_2)^{-1} \end{pmatrix}$$

teljesül minden $n \geq 3$; $(p_1,\ldots p_n),(q_1,\ldots q_n),(r_1,\ldots r_n) \in \Gamma_n$ mellett. (Ez azt fejezi ki, hogy az n elemű eloszlások becslései közötti eltérés hogyan kapható meg (n-1) elemű eloszlások, illetve kételemű eloszlások becslései közötti eltérésekből.);

(II) (I_n) szemi-szimmetrikus, azaz

$$I_3\begin{pmatrix} p_1, p_2, p_3 \\ q_1, q_2, q_3 \\ r_1,\ r_2,\ r_3 \end{pmatrix} = I_3\begin{pmatrix} p_1, p_3, p_2 \\ q_1, q_3, q_2 \\ r_1,\ r_3,\ r_2 \end{pmatrix}$$

ha $(p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3),(r_1,r_2,r_3) \in \Gamma_3$. (Ez az a természetes tulajdonság, hogy háromelemű eloszlások becslései közötti eltérés ne változzon meg attól, hogy az eloszlás, illetve vele együtt a becslései két utolsó elemét felcseréljük. Az, hogy itt n=3-ra és a két utolsó változóra szorítkozunk, a matematikai gondolkodás gazdaságossági és egyben esztétikai követelményeivel van összhangban);

(III) (I_n) nilpotens, azaz

$$I_2\begin{pmatrix} p_1, p_2 \\ q_1, q_2 \\ q_1, q_2 \end{pmatrix} = 0,$$

ha $(p_1,p_2),(q_1,q_2) \in \Gamma_2$. (A (p_1,p_2) eloszlás két becslése között ne legyen „eltérés", ha azok azonosak.)

(IV) (I_n) korlátos, azaz a

$$z \to I_2\begin{pmatrix} 1/2,\ 1/2, \\ 1/2,\ 1/2, \\ 1-z,\ \ z, \end{pmatrix}, \qquad z \in]0,1[$$

függvény legyen alulról vagy felülről korlátos]0,1[valamely pozitív hosszúságú részintervallumán. (Az $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ eloszlás $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ „pontos" becslése és (1-z,z) becslése között ne legyen akármilyen nagy „eltérés".);

(V) (I_n) aszimptotikusan normált, azaz

$$\lim_{x\to 0} I_2\begin{pmatrix} 1-x, & x \\ 1-x, & x \\ 1/2, & 1/2 \end{pmatrix} = 1,$$

ha $x\in]0,1[$. (Az (1-x,x) elosztás (1-x,x) „pontos" becslése és az $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ eloszlással való becslése közötti eltérést válasszuk egységnyinek az $x\to 0$ határesetben.)

A dolgozatban igazolni fogjuk, hogy ha egy (I_n) információérték rendelkezik, az (I)-(V) tulajdonságokkal, akkor az nem lehet más, mint az irányított divergencia.

3. FÜGGVÉNYEGYENLETEK

Tegyük fel tehát, hogy az $I_n:\Gamma_n^3\to\mathbf{R}$ $(n\geq 2)$ függvényekből álló (I_n) sorozat rekurzív, szemi-szimmetrikus, nilpotens, korlátos és aszimptotikusan normált. A rekurzivitás miatt az (I_n) sorozatot teljesen meghatározza (I_2) kezdő eleme. Legyen ezért

$$E(x,u,z) = I_2\begin{pmatrix} 1-x, x \\ 1-u, u \\ 1-z, z \end{pmatrix}, \qquad x,u,z\in]0,1[, \qquad (2)$$

és $\Delta = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x,y,x+y\in]0,1[\}$. Ha (x,y), (u,v), $(z,w)\in\Delta$, akkor (I)-et n=3-ra és a

$$\begin{array}{lll} p_1 = 1-x-y, & p_2 = y, & p_3 = x \\ q_1 = 1-u-v, & q_2 = v & q_3 = u \\ r_1 = 1-z-w, & r_2 = w, & r_3 = z \end{array}$$

eloszlásokra alkalmazva – egy kis számolás után –

$$I_3\begin{pmatrix}1-x-y,\ y,\ x\\ 1-u-v,\ v,\ u\\ 1-z-w,w,z\end{pmatrix}=E(x,u,z)+(1-x)E\left(\frac{y}{1-x},\frac{v}{1-u},\frac{w}{1-z}\right)$$

adódik. Innen (II) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$E(x,u,z)+(1-x)E\left(\frac{y}{1-x},\frac{v}{1-u},\frac{w}{1-z}\right)=E(y,v,w)+(1-y)E\left(\frac{x}{1-y},\frac{u}{1-v},\frac{z}{1-w}\right),\quad (3)$$

ha (x,y), (u,v), (z,w)$\in\Delta$. Ez egy olyan egyenlet, amelyben az ismeretlen az E függvény, de nem differenciálegyenlet és nem is algebrai egyenlet. Az ilyen típusú egyenleteket hívják függvényegyenleteknek. Ha (3)-ban az (x,y),(u,v)$\in\Delta$ változókat átmenetileg rögzítjük és bevezetjük az

$$\begin{aligned}&f_1(t)=E(x,u,t),\quad f_2(t)=(1-x)E\left(\frac{y}{1-x},\frac{v}{1-u},t\right),\\ &f_3(t)=E(y,v,t),\quad f_4(t)=(1-y)E\left(\frac{x}{1-y},\frac{u}{1-v},t\right)\end{aligned}\qquad (4)$$

jelöléseket (t$\in$] 0,1 [), akkor (4)-ből az egyszerűbb alakú

$$f_1(z)+f_2\left(\frac{w}{1-z}\right)=f_3(w)+f_4\left(\frac{z}{1-w}\right),\qquad (z,w)\in\Delta\qquad (5)$$

egyenletet nyerjük, ahol azonban négy darab ismeretlen függvény van, míg (3)-ban csak egy. Az (5) egyenlet megoldására alkalmazható Maksa [6] tétele, amely szerint – egyebek mellett – az f_1 függvény két „logaritmikus" függvényből és egy konstans függvényből kikombinálható. Az f_1 függvény (4)-ben szereplő definíciójából látható, hogy a logaritmikus függvények és a konstans függhetnek a korábban rögzített (x,u)$\in\Delta$ változótól. Ezeket figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$E(x,u,z) = l_1(x,u,1-z) + l_2(x,u,z) + a(x,u),\qquad x,u,z\in]0,1[,$$

ahol az l_i:]0,1[$^2\times$]0,+∞[$\to\mathbf{R}$ függvények a harmadik változójukban logaritmikusak (de nem feltétlenül a közönséges logaritmus függvények), azaz

$$l_i(x,u,ts) = l_i(x,u,t) + l_i(x,u,s), \tag{7}$$

ha $(x,u)\in\Delta$, $t,s\in]0,+\infty[$, $i=1,2$ és $a:]0,1[^2\to\mathbf{R}$ egy egyelőre ismeretlen függvény. Azért hogy az l_i és az a függvényekről többet megtudjunk, helyettesítsük vissza E (6)-beli alakját (3)-ba és használjuk fel (7)-et. Egy bonyolult egyenlőséget kapunk, amely azonban – alkalmas jelölések bevezetése után – könnyen áttekinthetővé válik. Rögzítsük ugyanis – szintén átmenetileg – az $(x,y),(u,v)\in\Delta$ és $w\in]0,1[$ változókat, és vezessük be a következő jelöléseket $0<t$-re:

$$L_1(t) = l_2(x,u,t) - (1-y)l_2\left(\frac{x}{1-y},\frac{v}{1-u},t\right), \tag{8}$$

$$L_2(t) = l_1(x,u,t) - (1-x)\left[l_2\left(\frac{y}{1-x},\frac{u}{1-v},t\right) - l_1\left(\frac{y}{1-x},\frac{u}{1-v},t\right)\right], \tag{9}$$

$$L_3(t) = (1-x)l_1\left(\frac{y}{1-x},\frac{u}{1-v},t\right) - (1-y)l_1\left(\frac{x}{1-y},\frac{v}{1-u},t\right). \tag{10}$$

Ekkor a szóban forgó bonyolult egyenlőség arra redukálódik, hogy:

$$L_1(z) + L_2(1-z) + L_3(1-z-w) = c \qquad (z\in]0,1-w[) \tag{11}$$

valamely c – a z-től független – konstans mellett. Másrészt az L_i függvények definíciójából látszik, hogy L_i logaritmikus, azaz

$$L_i(ts) = L_i(t) + L_i(s), \tag{12}$$

ha $t,s\in]0,+\infty[$, $i=1,2,3$. Gondolatmenetünkben döntő lépés lesz az alábbi lemma igazolása.

LEMMA.
Tegyük fel, hogy az $L_i:]0,+\infty[\to\mathbf{R}$ függvények rendelkeznek a (12) és (11) tulajdonságokkal valamely $w\in]0,1[$ és $c\in\mathbf{R}$ esetén ($i=1,2,3$). Akkor $L_1\equiv L_2\equiv L_3\equiv 0$ és $c = 0$.

BIZONYÍTÁS
(a) Először azt igazoljuk, hogyha $L:]0,+\infty[\to\mathbf{R}$ logaritmikus függvény, azaz

$$L(ts) = L(t) + L(s) \tag{13}$$

minden $t,s\in]0,+\infty[$ esetén és L egy pozitív hosszúságú intervallumon konstans, akkor L azonosan zéró. (Ez egyébként könnyen következik a függvényegyenletek elméletének általános tételeiből, de itt egy elemi bizonyítást adunk rá.) Valóban, legyen ugyanis $0<a<b\in\mathbf{R}$ olyan, hogy $L(t) = c_0$ (konstans), ha $t\in[a,b]$. Ekkor nyilván – mivel $a<\sqrt{ab}<b$ – $L(\sqrt{ab})=c_0$ és így – (13) miatt – $L(t)=0$, ha $t\sqrt{ab}\in[a,b]$, azaz $t\in\left[\sqrt{\frac{a}{b}},\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$. Ha $t>0$ tetszőleges, akkor $\sqrt[n]{t}\to 1$, ha $t\to\infty$ miatt $\sqrt[n]{t}\in\left[\sqrt{\frac{a}{b}},\sqrt{\frac{b}{a}}\right]$ valamely n-re, és így $L(\sqrt[n]{t})=0$. (13)-ból azonban teljes indukcióval könnyen belátható, hogy $\sqrt[n]{L(t)}=L(\sqrt[n]{t})=0$ és így $L\equiv 0$.

(b) Legyen most $t,s\in]0,+\infty[$ és $z=\frac{t(1-w)}{t+s}$ (11)-ben. Ekkor (12) felhasználásával kapjuk, hogy

$$L_1(t)+L_2(s+tw)+L_3(s)=c-L_1\left(\frac{1-w}{t+s}\right)-L_2\left(\frac{1}{t+s}\right)-L_3\left(\frac{1-w}{t+s}\right). \quad (14)$$

Itt a jobboldal (t,s)-nek szimmetrikus függvénye, ezért

$$L_1(t) + L_2(s+tw) + L_3(s) = L_1(s) + L_2(t+sw) + L_3(t). \quad (15)$$

Legyen itt s=1 és használjuk fel (12)-t. Ebből

$$L_1(t)-L_3(t)=L_2\left(\frac{t+w}{tw+1}\right), \qquad t\in]0,+\infty[\quad (16)$$

következik. Mivel L_1-L_3 is logaritmikus függvény, azaz fennáll (10) L helyett L_1-L_3-mal, ezért – (16) miatt –

$$L_2\left(\frac{2t+w}{2tw+1}\right)=L_2\left(\frac{2+w}{2w+1}\right)+L_2\left(\frac{t+w}{tw+1}\right), \quad \text{azaz}$$

$$L_2\left(\frac{2t+w}{2tw+1}\cdot\frac{tw+1}{t+w}\cdot\frac{2w+1}{2+w}\right)=0$$

minden pozitív t-re. Ez azt mutatja, hogy L_2 konstans (speciálisan zéró) valamely pozitív hosszúságú intervallumon és így – a bizonyítás (a) része szerint – $L_2 \equiv 0$. Ebből – (16) miatt – $L_1 \equiv L_3$. Ekkor azonban – (11)-et és (12)-t is figyelembe véve – $L_1(z(1-z-w))=c$ adódik, amiből – ismét a bizonyítás (a) része szerint – $L_1 \equiv 0$ következik. Tehát $L_1 \equiv L_2 \equiv L_3 = c = 0$, amit állítottunk.
Ezek után (8)-ból és (9)-ből az adódik, hogy

$$l_2(x,u,t) = (1-y)l_2\left(\frac{x}{1-y}, \frac{v}{1-u}, t\right), \quad \text{és} \tag{17}$$

$$l_1(x,u,t) = (1-x)\left[l_2\left(\frac{y}{1-x}, \frac{u}{1-v}, t\right) - l_1\left(\frac{y}{1-x}, \frac{u}{1-v}, t\right)\right], \tag{18}$$

ha $(x,y),(u,v) \in \Delta$ és $t \in]0,+\infty[$.
A továbblépéshez a (17)-(18) függvény-egyenletrendszert kell megoldani. Most a $t \in]0,+\infty[$ rögzítése mellett a

$$b_1(x,y)=l_1(x,u,t)\ , \qquad b_2(x,u)=l_2(x,u,t), \qquad x,u \in]0,1[$$

definíciókkal (18)-ból és (17)-ből azt kapjuk, hogy

$$b_1(x,u) = (1-x)\left[b_2\left(\frac{y}{1-x}, \frac{u}{1-v}\right) - b_1\left(\frac{y}{1-x}, \frac{u}{1-v}\right)\right], \tag{19}$$

$$b_2(x,u) = (1-y)b_2\left(\frac{x}{1-y}, \frac{v}{1-u}\right), \tag{20}$$

ha $(x,y),(u,v) \in \Delta$. Ennek a függvény-egyenletrendszernek a megoldásáról szól a következő

LEMMA.
Tegyük fel, hogy a $b_1,b_2 :]0,1[^2 \to \mathbf{R}$ függvényekre teljesül (19) és (20). Akkor van olyan $b \in \mathbf{R}$, hogy

$$b_1(x,u) = b(1-x), \qquad b_2(x,u) = bx, \qquad x,u \in]0,1[. \tag{21}$$

BIZONYÍTÁS.
Legyen $x,y,u,z\in]0,1[$. Akkor $(x(1-y),y),(u,v(1-u))\in\Delta$ és így (20)-ból

$$b_2(x\cdot(1-y),u) = (1-y)\cdot b_2(x,v),$$

ebből pedig

$$b_2(xy,u) = y\cdot b_2(x,v) \tag{22}$$

következik. Legyen itt $v=v_0\in]0,1[$ rögzített. Ekkor (22) bal oldalának szimmetriája miatt $y\cdot b_2(x,v_0)=x\cdot b_2(y,v_0)$, azaz $b_2(x,v_0)=x\cdot b_2(y_0,v_0)\cdot y_0^{-2}$, ahol $y_o\in]0,1[$ szintén rögzített. Ezek után a $b=b_2(y_0,v_0)\cdot y_0^{-2}$ jelöléssel (22)-ből következik, hogy $b_2(x,u)=b\cdot x$, ha $x,u \in]0,1[$.
Mivel $(x,y\cdot(1-x)),(u\cdot(1-v),v)\in\Delta$, ezért (19)-ből – b_2 alakját már ismerve –

$$b_1(x,u\cdot(1-v)) = (1-x)\cdot[by-b_1(y,u)],$$

azaz – v helyett 1-v-t írva –

$$b_1(x,uv) = (1-x)\cdot[by-b_1(y,u)] \tag{23}$$

adódik. Innen – a bal oldal szimmetriája miatt – következik, hogy b_1 nem függhet a második változójától, azaz $b\cdot 1(x,u)=b\cdot 1(x,u_0)$, ahol $u_0\in]0,1[$. Így – (23) szerint – $b_1(x,u)=b_0(1-x)$ valamilyen $b_0\in\mathbf{R}$ mellett, amelyről a (19)-be való visszahelyettesítés után kiderül, hogy azonos b-vel. Így tehát

$$b_1(x,u) = b_1(x,u_0) = b_0(1-x) = b(1-x) \qquad (x,u\in]0,1[),$$

amit állítottunk.
Térjünk most vissza az l_1 és az l_2 függvényekhez. A b_1 és a b_2 függvényekre, illetve az $l_1$és az l_2 függvényekre – definíciójukat figyelembe véve – az előző lemma alapján azt kapjuk, hogy

$$l_1(x,u,t) = -(1-x)\cdot l(t), \qquad l_2(t) = -x\cdot l(t) \tag{24}$$

minden $x,u\in]0,1[$ és $t>0$ mellett, ahol $l:]0,+\infty[\to\mathbf{R}$ – az l_i függvények logaritmikussága miatt – l maga is logaritmikus, azaz

$$l(ts) = l(t) +l(s), \qquad t,s\in] 0,+\infty [. \tag{25}$$

Célunk az E függvény meghatározása. Mivel E az l_1, az l_2 és az a függvényekkel (6) szerint fejezhető ki, (24)-ből

$$E(x,u,z) = -(1-x)\cdot l(1-z) - x\cdot l(z) + a(x,u) \tag{26}$$

adódik. A (III) nilpotens tulajdonságából következik, hogy $E(x,u,u)=0$, ami lehetővé teszi az a függvény meghatározását (26)-ból:

$$a(x,u) = x\cdot l(u) + (1-x)\cdot l(1-u), \qquad x,u\in]0,1[,$$

és így – ismét (26) miatt –

$$E(x,u,z)= -x\cdot l(z) - (1-x)\cdot l(1-z) + x\cdot l(u) + (1-x)\cdot l(1-u), \tag{27}$$

ha $x,u,z\in]0,1[$. Ez így még nem a D függvény általában, de hátra van még a (IV) korlátosság és az (V) aszimptotikus normáltság felhasználása. (IV) miatt ugyanis l korlátos]0,1[valamely pozitív hosszúságú részintervallumán, ezért l az „igazi" logaritmus függvény konstansszorosa (lásd például: Aczél-Dhombres [2]). Mivel $l\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, az (V) aszimptotikus normáltság miatt, csak $l=\log_2$ lehet. Tehát – (27) alapján –

$$E(x,u,z) = x\log_2\frac{u}{z} + (1-x)\log_2\frac{1-u}{1-z}, \qquad x,u,z\in]0,1[,$$

amiből E (2) definíciója és (I_n) rekurzivitása miatt következik hogy $(I_n) = (D_n)$.

A FŐ EREDMÉNY

Összefoglalva az eddigieket, azt igazoltuk, hogy egy $I_n:\Gamma_n^3\to\mathbf{R}$ $(n\geq3)$ függvényekből álló (I_n) függvénysorozat pontosan akkor azonos az irányított divergenciával, ha (I_n) rekurzív, szemi-szimmetrikus, nilpotens, korlátos és aszimptotikusan normált.

FELHASZNÁLT IRODALOM

[1] Aczél, J., Daróczy, Z., On measures of information and their characterizations, Academic Press, New York – San Francisco, 1975.
[2] Aczél, J., Dhombres, J., Functional equations in several variables, Cambridge University Press, Cambridge – New York – New Rochelle – Melbourne – Sydney, 1989.
[3] Ebanks, B., Sahoo, P., Sander, W., Characterizations of information measures, Word Scientific Publishing Co. Inc., River Edge. NJ, 1998.
[4] Kannappan, Pl., On various characterizations of generalized directed divergence , Indian J. Pure Appl. Math., **6**(1375), 655-667.
[5] Kannappan, Pl., Rathie, P.N., An axiomatic characterization of generalized directed divegence, Kybernetika (Prague), **9**(1973), 330-337.
[6] Maksa, Gy., Solution on the open triangle of the generalized fundamental equation of information with four unknown functions, Utilitas Math., **21**(1982), 267-282.
[7] Theil, H., Economics and information theory, North Holland, Amsterdam, Rand McNally, Chicago, 1967.

Summary. In this note we characterize the directed divergence that measures the distance of two estimations of a given n-ary probability distribution. We use mainly algebraic properties: recursivity, semi-simmetry, nilpotency and week regularity as boundedness on an interval of positive length and assimptotically normedness to prove that a sequence is the directed divergence. We apply the methods of the theory of functional equations.