



1949

# Számelméleti függvények a középiskolában

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

**Kézér Ildikó**

Témavezetők: **Dr. Ambrus András és  
Dr. Freud Róbert**

DEBRECENI EGYETEM

Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács  
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola  
Debrecen, 2021

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika (szakmódszertan) programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2021. március 11.

.....

Kézér Ildikó  
jelölt

Tanúsítom, hogy Kézér Ildikó doktorjelölt 2015-2021 között a fent megnevezett Doktori Iskola Didaktika (szakmódszertan) programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2021. március 11.

.....

Dr. Ambrus András  
témavezető

.....

Dr. Freud Róbert  
témavezető

# Számelméleti függvények a középiskolában

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében  
a Matematika- és Számítástudományok tudományágban

Írta: Kézér Ildikó okleveles matematika – fizika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok doktori iskolája  
(Didaktika programja) keretében

Témavezetők: Dr. Ambrus András és Dr. Freud Róbert

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. Hajdu Lajos .....  
tagok: Dr. Fried Katalin .....  
Dr. Pink István .....

A doktori szigorlat időpontja: 2019. november 29.

Az értekezés bírálói:

Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....  
tagok: Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....  
Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 20.... ..

# Köszönetnyilvánítás

Köszönöm és hálás vagyok családomnak, sok-sok középiskolai és egyetemi tanáromnak, mindenekelőtt témavezetőimnek, sok-sok diákomnak, kollégámnak, barátomnak, hogy szerettek, segítettek, tanítottak, mutattak meg sok csodát. Bízom benne, hogy ők mind tudják, annak ellenére, hogy ez itt csak alig néhány szó, milyen nagy szeretettel gondolok rájuk most is.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés .....</b>	<b>1</b>
<b>2. Számelméleti függvények a középiskolában .....</b>	<b>7</b>
2.1. Tananyag, tankönyvek, feladatgyűjtemények .....	7
2.2. Versenyek és KöMaL .....	12
2.2.1. Az osztók száma .....	12
2.2.2. Az osztók szorzata .....	25
2.2.3. Az osztók összege .....	27
2.2.4. Az Euler-féle $\varphi$ -függvény .....	30
<b>3. A különböző maradékosztályokba tartozó osztók eloszlásának összehasonlítása .....</b>	<b>36</b>
3.1. Páros és páratlan osztók .....	36
3.2. Közvetlen általánosítások .....	39
3.3. Osztók a $\pm 1$ maradékosztályokban .....	41
3.3.1. A különböző maradékosztályokba tartozó osztók számának összehasonlítása .....	43
3.3.2. A különböző maradékosztályokba tartozó osztók összegének összehasonlítása .....	48

3.3.3. A különböző maradékosztályokba tartozó osztók	
reciprokösszegének összehasonlítása .....	53
3.4. Átlagérték .....	55
3.5. Didaktikai megjegyzések .....	62
<b>4. Speciális egyenletek .....</b>	<b>65</b>
4.1. Az $f(x^2) + f(y^2) = f(z^2)$ egyenlet és általánosítása .....	65
4.2. Az $f(xy) + f(xz) = f(yz)$ egyenlet megoldhatóságának vizsgálata .....	70
4.2.1. Additív függvények .....	70
4.2.1.1. Erősen additív függvények .....	70
4.2.1.2. Teljesen additív függvények .....	71
4.2.2. Multiplikatív függvények .....	72
4.2.2.1. Az osztók száma függvény .....	74
4.2.2.2. Az Euler-féle $\varphi$ -függvény .....	77
4.2.2.3. Az osztók összege függvény .....	85
<b>5. Számelméleti függvények kompozíciójának kommutativitása ..</b>	<b>88</b>
<b>6. A szakkör .....</b>	<b>102</b>
6.1. A célok .....	102
6.2. A körülmények, a tervezés .....	103
6.3. A foglalkozások .....	104

6.4. További lehetőségek .....	117
<b>7. A disszertáció elméleti didaktikai háttere .....</b>	<b>125</b>
<b>8. Összefoglalás .....</b>	<b>131</b>
<b>9. Summary .....</b>	<b>137</b>
<b>Irodalomjegyzék .....</b>	<b>143</b>

# 1. fejezet

## Bevezetés

Gyakorló tanárként nagyon fontosnak tartom, hogy minél több olyan szituációt teremtsünk a gyerekek számára, amiben van alkalmuk kísérletezni, legyen szó a matematika bármely területéről. A dolgozat fő célja, hogy a gyerekek számára lehetőséget teremtsen a kísérletezésre a számelmélet egy szűkebb területén belül, hogy alkalmuk legyen nyílt végű problémákkal találkozni. Többször tapasztaltam már, hogy a tanulóknak van többkevesebb bátortalanság, félelem, ami a próbálkozást-kísérletezést, a tapasztalatgyűjtést illeti, egyfajta bizalmatlanság azt tekintve, hogy a próbálkozás-kísérletezés hatékony eszköz a problémamegoldásban. Van, hogy egy problémában tételektől, már ismert összefüggésektől „várják” a megoldást.

Persze a próbálkozások, a kísérletezés magában rejti a tévedés lehetőségét is, de fontos, hogy a tanulóknak az a kép alakuljon ki és erősödjön meg diákéveik során, hogy a tévutak is hozzátartoznak és természetes részei bármilyen típusú felfedező útnak, a matematikai felfedező utaknak is. A kalandozásoknak persze másfajta „veszélyei” is lehetnek, könnyen előfordulhat, hogy a diákok olyan kérdést tesznek fel, amire adott válasz nem csak a diák, de a tanár számára sincs elérhető közelségben. A számelmélet berkein belül ez hatványozottan igaz, igen gyakori jelenség, hogy egy, a tanulók számára is könnyen érthető, meglehetősen egyszerűnek tűnő kérdés évtizedekig, ha nem évszázadokig megválaszolatlan. Ahogy Erdős fogalmazott (a prímeikkel kapcsolatban): „a csecsemők is tudnak olyat kérdezni, amire a felnőttek sem tudják a választ.” Azt gondolom, jó, ha a gyerekek azt is megtapasztalják, hogy ez is egy természetes jelenség a matematikában, legyen szó akár a Goldbach-sejtésről vagy az ikerprímsejtésről, amelyek bármely 9. osztályos tanuló számára megérthetőek.

A felfedező úton lehetőségünk van a tanulókkal egy problémát több szempontból is körbejárni, megvizsgálni az általánosítás lehetőségeit, továbbgondolni egy feladatot. Alkalmunk van bemutatni egy probléma fejlődését, a gyerekek megtapasztalhatják, hogyan

alakul egy problémafelvetés. Ők maguk is aktív részesei lehetnek annak is, hogy mi legyen a vizsgált téma, lehetnek saját problémafelvetéseik, ami fontos motivációs forrás.

Az ilyen jellegű kutatási feladatok annak lehetőségét is biztosítják, hogy a tanulók a problémamegoldás különböző szintjeire érhessenek, például „értem a problémát”; „tudok adni egy megoldást”; „felismerem egy mintát”; „tudom bizonyítani, hogy a sejtésem igaz”; „tudok következtetéseket levonni”; „meg tudom adni az összes megoldást”; „tudok analóg feladatot megfogalmazni”; „tudok általánosítást megfogalmazni”. Ezáltal a differenciálás eszközei is lehetnek, különböző tanulók számára különböző célokat fogalmazhatunk meg.

Külön előnynek gondolom, ha a problémamegoldás közben, annak valamely fázisában valamilyen digitális segédeszköz használata is szükséges, ahogy a kidolgozott témák jó részében ez így van. A gyerekek mindennapjaihoz az online világ hozzátartozik, a számítógép természetes része mindennapjaiknak, jó, ha a diákok látnak példát arra, hogy a számítógépet, bizonyos matematikai szoftvereket hogyan állíthatnak a matematikai problémamegoldás szolgálatába. Vannak tanulók, akik az iskola falain kívül is szívesen foglalkoznak programozással, a matematikai problémán kívül a programozási feladat maga is lehet számukra kihívás.

Úgy gondolom, a számelmélet azon kevés témakör egyike a középiskolai matematikában, amelyhez viszonylag kevés előismeret szükséges. Korosztálytól függetlenül bármilyen középiskolás csoportban lehet foglalkozni oszthatósággal kapcsolatos problémákkal, a diákok a felső tagozaton már megismerkednek az osztó, a többszörös fogalmával, a prímekekkel, a számelmélet alaptételével, amely ismeretek tulajdonképpen elégségesek ahhoz, hogy például az osztók számával kapcsolatos problémákat lehessen vizsgálni. Egy a 7-8. osztály számára íródott feladatgyűjteményben találkozhatunk a következő feladattal: „Egy szállodában 50 szoba van. A szobák fűtését a portán a szoba sorszámával számozott gombok megnyomásával lehet bekapcsolni, és ugyanezen gomb ismételt megnyomásával kikapcsolni. Egy reggel a portás megnyom minden gombot, ezzel bekapcsolja a fűtést. Majd gondol egyet és minden második gombot újra megnyom. Ezután folytatva az eljárást, minden harmadik, majd minden negyedik, minden ötödik, ... , minden 25., 26. stb., 50. gombot nyomja meg.

Mely szobákban működik a fűtés a portás játszadozása után?”<sup>1</sup> Arról, hogy a négyzetszámoknak páratlan számú osztójuk van, vagy az osztók számával kapcsolatos érdekességként a tökéletes és a barátságos számokról 6. osztályos tankönyvben [6] is olvashatunk.

Természetesen bizonyos számelméleti függvényekkel kapcsolatos kérdések tanulmányozásához szükségesek lehetnek olyan algebrai ismeretek is, mint például egy összeg szorzattá alakítása, illetve alapvető kombinatorikai ismeretekre is támaszkodunk például már akkor, amikor az osztók számát meghatározzuk a prímtényező felbontásból, de ezzel a tudással már egy 9. osztályos diák is rendelkezik (a nem speciális matematika tagozaton is). Ha a diákok azt megelőzően, hogy ezzel a témával foglalkozunk, nem találkoznának még a mértani sorozat összegképletével általánosságban, azt akár a számrendszerekről tanult segítségével is el tudjuk magyarázni nekik, hogy egy prímszorzat esetén az osztók összegét hogyan lehet zárt alakban megadni. A függvények additív, illetve multiplikatív tulajdonságát véleményem szerint adott csoportban belátásunk szerint bizonyíthatjuk általában, vagy fogadhatjuk el konkrét példák, és azokból megelőlegezett általánosítás után. Tehát azt gondolom, a matematika iránt érdeklődő gyerekek számára a disszertációban szereplő kutatási feladatok akár már 9. osztályban tárgyalhatóak, de persze ez előismereteik függvénye. Az érdeklődő gyerekekkel ezekkel a problémákkal szakkörön foglalkoztam, tanórai keretek között nem tartom megvalósíthatónak a kutatást. A speciális matematika tagozaton tanuló diákok nem a szakkörön, hanem a reguláris órákon ismerkednek meg a számelméleti függvényekkel, hisz ez része a tananyagnak, de a kísérletezést esetükben is csak a szakkörön gondolom kivitelezhetőnek, illetve otthoni önálló munkájuk révén: egyrészt mindegyik problémakör igen szerteágazó, a reguláris óra szűkös időkeretébe csak néhány a témába vágó feladat férne be, másrészt pedig az egyik leglényegesebbnek éppen az ilyenfajta kutatásban rejlő kötöttségek nélküli, sok irányban történő szabad szellemi kalandozás lehetőségét tartom.

A számelméleti függvényekről tanultak több ponton kapcsolódnak más problémákhoz is a középiskolai matematikában, mint például az osztók száma függvény a diofantikus egyenletek megoldásszámához, az Euler-féle  $\varphi$ -függvény a kódolásban az RSA-sémához, vagy hogy egy geometriai példát is említsünk, a szabályos sokszögek szerkeszthetőségéhez.

---

<sup>1</sup>[2], 43.o.

A velük való ismerkedés tehát azon túl, hogy önmagában is érdekes, hasznos lehet későbbi problémák megoldásakor vagy a megoldás alapgondolatának ismertetésekor.

A második fejezetben egyrészt áttekintettem a tankönyvek közül többet, amelyek a középiskolák 9. osztálya számára készültek (köztük olyanokat is, amelyeket eddigi tanári pályámon használtam), valamint feladatgyűjteményeket is abból a szempontból, hogy milyen számelméleti függvényekkel kapcsolatos feladatokat tartalmaznak. Összevettem, hogy mi szerepel bennük a számelméleti függvényekről, illetve módszertani szempontból vizsgáltam a feladatgyűjteményekben található néhány probléma különböző megfogalmazásait is.

Másrészt több hazai tanulmányi verseny, illetve nemzetközi matematikaversenyek feladatait gyűjtöttem és válogattam össze a témában, oldottam meg, vizsgáltam meg az általánosítási lehetőségeket. Törekedtem arra, hogy a bemutatott feladatok között sok olyan szerepeljen, ami nem kizárólag a speciális matematika tagozaton tanuló diákok számára hozzáférhető. A hazai tehetséggondozásban a KöMaL nagyon fontos szerepet játszik, ebben is sokszor szerepelnek olyan számelmélet feladatok, amelyekben az oszthatóság, az osztókkal kapcsolatos valamely számelméleti függvény szerepel, ezek közül is többet szerepeltetek ebben a fejezetben. Leggyakrabban a KöMaLban és a hazai tanulmányi versenyeken is az osztók száma függvénnyel kapcsolatos problémák kapnak szerepet, hiszen ez a nem emelt óraszámban matematikát tanuló diákok számára is része a tananyagának.

A dolgozat harmadik, negyedik és ötödik fejezete önálló problémafelvetéseimből származik, amelyek a [K3], [K1] és [K2] cikkekben kerültek publikálásra. Az ezekben a fejezetekben használt matematikai jelöléseket, formalizmust természetesen a problémák gyerekekkel történő feldolgozása során nem szükségképpen ebben a formában használtam (használnám), ahogy ez a hatodik fejezetben majd kiderül, de a disszertációban az említett három fejezetben (is) a „hagyományos”, tömör, szimbólumokat tartalmazó formalizmust kívántam használni (legyen szó például összegek, szorzatok stb. jelöléséről).

A harmadik fejezetben abból az alapkérdésből indultam ki, hogy a páros és a páratlan osztók eloszlását vizsgáltam. Ezt szintén olyan problémának gondolom, amivel bátran fog-

lalkozhatunk egy szakköri órán. A kérdés többféle általánosítását is megvizsgáltam, és vizsgáltam nem csak az osztók darabszámának, de az osztók összegének, és reciprokösszegének eloszlását is. Egy másik általánosítási lehetőség adódott a 2 helyett más prím modulusra vizsgálni a kérdést, illetve a nulla és a nemnulla maradékosztályok helyett a  $\pm 1$  maradékosztályokba eső osztók eloszlását elemezni. Fontosnak tartom, hogy ha mód van rá, egy állítást többféle megközelítésből vizsgáljunk, és ha lehet, különböző bizonyításokat adjunk, így vannak tételek, amelyek speciális eseteire két bizonyítást adtam. Ezután két függvényre az átlagértéket is megvizsgáltam, a kérdések tanulmányozásához a GeoGebra szoftvert is használtam. A fejezet végén külön pontban foglaltam össze a módszertani elemzést.

A negyedik fejezet két alfejezetből áll, ezek speciális egyenleteket tartalmaznak. A fejezet első részében az  $f(x^2) + f(y^2) = f(z^2)$  egyenlet megoldásait vizsgálom a prímhatványok körében, ha  $f$  az osztók száma, az osztók összege, az Euler-féle  $\varphi$ -függvény, a prímosztók, vagy a különböző prímosztók száma függvény. A második alfejezet az  $f(xy) + f(xz) = f(yz)$  egyenlet megoldhatóságáról szól, ha  $f$  egy additív vagy multiplikatív függvény, majd a fentebb felsorolt függvények közül a multiplikatívok esetén keresem a megoldásokat, ha a számhármass minden tagja prímhatvány.

Az ötödik fejezetben a vizsgálat tárgya az  $f(g(n)) = g(f(n))$  egyenlet, ahol  $f$  és  $g$  a korábban említett számelméleti függvények valamelyike. Több szemszögből elemzem az egyenlet megoldhatóságát: létezik-e legalább egy megoldás, található-e végtelen sok megoldás, vagy például megadható-e az egyenlet összes megoldása valamely  $f$  és  $g$  függvenypárra. A tanulók számára a kommutativitás jól ismert fogalom, bár a fogalom teljes mélységének, egy „nem szokványos” művelet kommutativitásának, illetve asszociativitásának vizsgálatára vélhetően csak a matematikát emelt óraszámú tanulóknak van alkalma. Személyes tapasztalatom szerint az összetett függvény fogalmát a gyerekek igen gyorsan elsajátítják, és könnyen, egy-két példa után biztosan kezelik már 9. osztályban is. Ebben a fejezetben szerepelnek olyan kérdések is, amelyek a megoldhatóság vizsgálatát néhány prímeikkel kapcsolatos sejtéssel kapcsolják össze vagy olyan problémák, amelyek a prímekre vonatkozó nevezetes megoldott és megoldatlan sejtésekhez is kapcsolódnak. A fejezet problémáira építve egy szakkört szerveztem, ez a témája a hatodik fejezetnek.

A hatodik fejezetben tehát arról a szakkörrel számolok be részletesen, amit az Óbudai Árpád Gimnáziumban tartottam a speciális matematika tagozaton tanuló 9. osztályos tanulóknak a 2017/18-as tanévben, és amely szakkört az ötödik fejezetben felvetett probléma köré szerveztem. Beszámolok a foglalkozások céljáról, arról, hogy módszertanilag mit tartottam fontosnak a foglalkozások tervezésénél, a diákok szakköri munkájáról, ötleteikről, problémafelvetéseikről, a tapasztalatokról összességében. Illetve további lehetőségeket, kapcsolódási pontokat mutatok be, amikkel ugyan nem foglalkoztunk a gyerekekkel, de amiket szintén érdemesnek tartok arra, hogy a tanulókkal vizsgáljunk.

A hetedik fejezet a disszertáció elméleti didaktikai hátterét mutatja be. A tézis szándéka, szemlélete a problémamegoldást illetően leginkább a kutatás-alapú tanítás/tanulás céljaival rokon, így ebben a fejezetben bemutatom ennek a módszernek a keretrendszerét, legfőbb ismérveit. Ezek után áttekintek néhány a matematikai problémamegoldással kapcsolatos gondolatot, többek között Pólya György és Alan H. Schoenfeld munkáiból idézve.

A nyolcadik és kilencedik fejezet az értekezés magyar és angol nyelvű rövid összefoglalója.

## 2. fejezet

# Számelméleti függvények a középiskolában

### 2.1. Tananyag, tankönyvek, feladatgyűjtemények

A nem tagozatos tantervű osztályokban a számelmélet témakörben az alábbi ismeretek szerepelnek kötelező jelleggel: oszthatóság a természetes számok körében; a prímszám és az összetett szám fogalma; a számelmélet alaptétele; két szám legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének meghatározása prímtényezős felbontás alapján; oszthatósági szabályok (bizonyítás nélkül) a tízes alapú számrendszerben; számrendszerek.

A számelméleti függvények közül az osztók száma szerepel a 9.-es tankönyvek közül többben is ([8], [10], [11], [12], [21]). [8] és [10] külön fejezetben, [11] és [12] a számelmélet alaptétele után foglalkozik azzal, hogy tetszőleges pozitív egész esetén miként kell a prímtényezős felbontás segítségével meghatározni az osztók számát. Közülük [8]-ban több kidolgozott példa mellett számos feladat szerepel. [21]-ben az szerepel, miként kell a 275 osztóinak számát meghatározni (valamint ehhez kapcsolódóan egy-két kérdés), az, hogy általánosságban a kanonikus alak alapján az osztók számának meghatározása miként történik, nincs formalizálva. A feladatgyűjtemények közül [3] és [5] is bővelkedik különböző nehézségű és nem „alapfeladatnak” nevezhető problémákban is, amelyek megoldásához ténylegesen nincs más ismeretre szükség, mint arra, hogy a kanonikus alakból hogyan számolhatjuk ki az osztók számát. A tankönyvekben szereplő példák szinte mindegyike ezekben a feladatgyűjteményekben megtalálható – némelyik kisebb módosítással. Például:

*Valamely  $N$  természetes számra  $d(d(N)) = 3$ . Bizonyítsuk be,  
hogy ekkor  $N$  nem lehet osztható 30-cal.<sup>2</sup>*

---

<sup>2</sup>[5] 69.o./4.

Valamely  $N$  természetes számra  $d(d(N)) = 3$ . Hány különböző prímosztója lehet  $N$ -nek?<sup>3</sup>

Van olyan feladat is, amihez talán szerencsés, ha a tanulók találkoztak már diofantikus egyenletekkel korábban, de egy nagyon szép komplexebb feladat [5]-ben:

Legyen  $n$  egy pozitív egész szám, és jelölje  $p(n)$  az alábbi egyenlet  $(x; y)$  megoldásainak a számát:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n} \quad (x, y \in \mathbb{N}).$$

(Pl. ha  $n = 2$ , akkor a megoldások  $(3; 6)$ ,  $(6; 3)$ ,  $(4; 4)$ , tehát  $p(2) = 3$ .)

a) Mivel egyenlő  $p(15)$ ?    b) Milyen  $n$ -re lesz  $p(n) = 2005$ ?<sup>4</sup>

Mindenesetre tehát nagyon sok és nagyon változatos példát találunk ezekben a feladatgyűjteményekben az osztók számával kapcsolatban, amik egy nem feltétlen speciális matematika tagozatos, de a matematika iránt érdeklődő csoportban feldolgozhatóak.

Fontos az is, hogy ha lehetőség adódik valamit akár csak egy kicsit is játékosabb formában felfedeztetni a gyerekekkel, akkor ezekkel a lehetőségekkel éljünk. A számelmélet számos lehetőséget kínál arra (is), hogy a gyerekekkel játszva tanuljunk, legyen szó akár oszthatósági szabályokhoz köthető játékokról, számrendszerekről, de egy játékos feladat tanulságává tehetjük azt is, hogy  $d(n)$  pontosan akkor páratlan, ha  $n$  négyzetszám. Két gyerek felváltva mondhat egy megadott szám esetén osztókat, és az nyer, aki utolsóként tud olyan osztót mondani, ami korábban még nem hangzott el (azt a diák dönti el, hogy a játékban kezdeni szeretne vagy sem). Így a tanulók alkalmasan választott számokkal játszva maguk fedezhetik fel a tétel bizonyítását vagy ha ez nem történik meg, egy irányított játékkal, amiben a diák által választott osztóra a tanári válasz annak osztópárja. (Persze jó, ha a  $d(n)$  páratlanságának így adódó osztópáros bizonyítása mellett az eredményt a képlet segítségével is igazoljuk.)

---

<sup>3</sup>[8] 65.o./467.

<sup>4</sup>[5] 65.o./469. A disszertációban  $\mathbb{N}$  a nemnegatív,  $\mathbb{Z}^+$  a pozitív egész számok halmazát jelöli.

Az osztók összegéről szólva a tökéletes és a barátságos számok érdekességként kerülnek megemlítésre néhány tankönyvben ([6], [10]), de az osztók összegének a prímtényező felbontás segítségével történő kiszámolása nem szerepel egyik tankönyvben sem. Persze egy feladatgyűjtemény a tanár és a diák munkájának csak segítője, nem önmagában teljes egész, de azt is érdekes megfigyelni, hogy lényegileg azonos tartalmú feladatok között milyen különbség van a feladat kitűzésében a különböző feladatgyűjteményekben, például:

*Állapítsuk meg, hogy prímszám lehet-e tökéletes szám.*<sup>5</sup>

*Bizonyítsuk be, hogy prímszám nem lehet tökéletes szám.*<sup>6</sup>

Ebben az esetben az első megfogalmazás meghagyja azt a lehetőséget, hogy a diák maga fogalmazza meg a sejtést (akár, ha szükséges, egy-két konkrét számolási példa után), és így a bizonyítandó állítást mint saját felismerését igazolja. Ez mindenképp előnye a második megfogalmazással szemben.

Vagy:

*Határozzuk meg a 220 és a 284 pozitív osztóinak összegét. Milyen érdekességet tapasztalunk? Keressünk további ilyen számpárokat.*<sup>7</sup>

*Számítsuk ki  $S(220) - 220$  és  $S(284) - 284$  értékét. Milyen érdekességet tapasztal?*<sup>8</sup>

Itt az első, nem teljesen direkt megfogalmazás lehetővé teszi az önálló felfedezést, és így adhatja annak örömét, bár annak esélye nem elhanyagolhatóan csekély, hogy valamire egyetlen példát látva a tanuló nem tud megfogalmazni érdemi tapasztalatot, és így a példában rejlő önálló felfedezés adta sikerélményt nem éli át. Ez a feladat, akár órai bevezetése a barátságos számok fogalmának, akár otthoni önálló munkaként ismerkedik meg vele a diák, vélhetően csak további példákkal együtt garantálja azt a sikert, ami a felfedezettő tanulás célja. Persze további ilyen tulajdonsággal rendelkező számpárok kereséséhez valamiféle

---

<sup>5</sup>[3] 58.o./205.

<sup>6</sup>[5] 66.o./477.

<sup>7</sup>[3] 59.o./213.

<sup>8</sup>[5] 66.o./481. A feladatgyűjteményben  $S(n)$  jelöli az  $n$  pozitív egész pozitív osztóinak összegét.

segédeszköz (matematikai szoftver, programozás) bevonása szükséges, de ez egy nem túl nehéz kutatási feladat, így mindenképp ajánlható.

Olyan feladatmegfogalmazás is található, ami tartalmilag kevesebbet kér egyik, illetve másik szövegezésben:

*Igazoljuk, hogy egy tökéletes szám osztóinak reciprokának összege kettő.*<sup>9</sup>

*Bizonyítsuk be, hogy bármely  $2^k(2^{k+1} - 1)$  alakú tökéletes szám (ahol  $2^{k+1} - 1 = p$  prím) osztói reciprokának összege mindig 2.*<sup>10</sup>

Fontos, hogy az első változathoz egy nagyon jó feladatpár társul előzményként, amiből ráadásul sokkal több is adódik, mint a tökéletes számokra vonatkozó állítás – ami ezek után igazából már csak egy rutinfeladat a definíció alkalmazására –, és amennyiben a tanulónak teljesen önállóan kellene eljutnia a bizonyításig, ezzel a két megelőző feladattal ez kellően megtámogatott:

*Figyeljük meg a következő összeadásokat:*

$$a) 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3};$$

$$b) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4};$$

$$c) 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5};$$

$$d) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{12}{6};$$

$$e) 1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7};$$

$$f) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}.$$

*Milyen általános tételt lehetne leolvasni ebből?*<sup>11</sup>

---

<sup>9</sup>[3] 59.o./210.

<sup>10</sup>[5] 66.o./479.

<sup>11</sup>[3] 59.o./211.

Legyen  $n$  egy pozitív egész szám, osztói pedig  $d_1, d_2, \dots, d_k$ . Bizonyítsuk be, hogy:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \dots + \frac{1}{d_k} = \frac{S(n)}{n},$$

ahol  $S(n)$  az  $n > 0$  egész szám pozitív osztóinak összegét jelöli.<sup>12</sup>

Hasonló előzmények [5]-ben nem szerepelnek, így érthető, hogy ez a feladatgyűjtemény nem az általános megfogalmazásban tűzi ki a bizonyítást (mindamellett, hogy a sejtés szerint nem létezik páratlan tökéletes szám), és a feladatgyűjteményhez tartozó megoldáskötetben közölt megoldás sem a közös nevezőre hozás, majd a számlálóban az osztók összegének felismerésén alapul, hanem az osztók reciprokának egyes csoportosításán, majd a mértani sorozat összegképletének alkalmazásán. Ez szerves folytatása a megelőző feladatnak, amiben a páros tökéletes számokra vonatkozó állítás bizonyításában az összegképlet szerepel. Ez így természetesen egy teljesen koherens egész, és a páros tökéletes számokra nézve valóban teljes, de véleményem szerint mindenképp kívánatos megmutatni a tanulóknak azt az általános tételt, miszerint  $\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n}$ . Ezt nem külön bizonyítandó problémaként, hanem a tökéletes számokra vonatkozó állítás igazolása közben adódó fontos és szép „melléktermékként” tekinteném. A tökéletes számokra vonatkozó állításnál azért is részesíteném inkább előnyben ezt a gondolatmenetet (amelett, hogy egy általános összefüggést ad az osztók reciprokösszegére), mert ez a bizonyítás inkább „rájátszik” a tökéletes szám fogalmi lényegére, ami az osztó fogalma, nem pedig annak konkrét alakja. Az osztók osztópárba állítása – ami itt automatikusan adódik a közös nevezőre hozás miatt – sok számelméleti probléma megoldásában kulcsszerepet játszó gondolat, így célszerű nem kihagyni a lehetőséget, és ezt itt ismét hangsúlyozni, főleg ha ilyen szép általános eredményhez vezet.

Az általánosított feladat másfajta szövegezésével is találkozhatunk:

*Egy  $n$  természetes szám pozitív osztóinak összegét elosztottuk az osztók reciprokainak összegével. Igaz-e, hogy a kapott hányados értéke  $n$ ?<sup>13</sup>*

---

<sup>12</sup>[3] 59.o./212.

<sup>13</sup>[16] 21.o./120.

Más számelméleti függvényekről nem esik szó a tankönyvekben. A feladatgyűjtemények közül [3]-ben szerepel néhány az Euler-féle  $\varphi$ -függvénnyel kapcsolatos feladat.

## 2.2. Versenyek és KöMaL

A versenyfeladatok között is találunk igencsak változatos nehézségű feladatokat a témakörben, legyen szó matematikai diákolimpiák feladatairól, hazai tanulmányi versenyeken kitűzött problémákról vagy a KöMaLban megjelent feladatokról. Ezek között persze akad olyan, ami 9. osztályos tanulóknak valamilyen plusz szükséges ismeret mellett ajánlható, de vannak köztük olyanok, amikhez a függvénnyel kapcsolatos alapismereteken túl nem szükséges plusz tudás. Néhányat ezek közül bemutatunk. A fejezetben szereplő nemzetközi versenyfeladatok (elsődleges) forrása az [artofproblemsolving.com](http://artofproblemsolving.com) ([22]), ahol a feladatok angol nyelven olvashatóak, ezek magyar szövege a dolgozat szerzőjének fordítása.

### 2.2.1. Az osztók száma

Az alábbi két feladatot a tanulók vélhetően teljesen önállóan is meg tudják oldani, bevezető jellegű feladatoknak kiválóan alkalmasak. Lényegében a  $d(m) = 2 \Leftrightarrow m = p$ , illetve a  $d(m) = 3 \Leftrightarrow m = p^2$  (ahol  $p$  prím) alapösszefüggések, valamint egyszerű paritási megfontolások segítségével oldhatóak meg:

#### 2.2.1. Feladat

Adjuk meg az összes olyan  $n$  pozitív egészt, amire  $d(n) + d(n + 1) = 5$ .

(*Canadian Mathematical Olympiad Qualifying Repêchage, 2012*)

#### Megoldás

Az 5-öt két pozitív egész összegére négyféleképpen bonthatjuk:  $5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1$ . A lehetséges felbontások közül az  $1 + 4 = 4 + 1$  felbontások nem adnak megoldást, hiszen  $d(n) = 1 \Leftrightarrow n = 1$  és  $d(2) = 2$ , illetve  $d(0)$  nem értelmezett. Az  $5 = 2 + 3$  felbontásból az adódik, hogy  $n$  prím, miközben  $n + 1$  egy prímszám négyzetével egyenlő.

Figyelembe véve, hogy  $n$  és  $n + 1$  közül az egyik szám páros, a két egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha  $n$  egy páratlan prím és  $n + 1$  egy páros prím négyzete, amiből  $n = 3$ . Az  $5 = 3 + 2$  felbontásból az előző gondolatmenet megfelelő alkalmazásával adódik, hogy csak  $n = 4$  lehet megoldás, tehát a feladatnak összesen két megoldása van  $n_1 = 3$  és  $n_2 = 4$ .

Az egyenlőség bal oldalát változatlanul hagyva, közben a jobb oldalon szereplő konstans értékét más pozitív egésznek választva nem igazán érdemes a feladatot vizsgálni. A  $d(n) + d(n + 1) = c$  egyenletnek  $c \leq 2$ -re nincs megoldása,  $c = 3$ -ra az egyetlen megoldás  $n = 1$ , hasonlóképp  $c = 4$ -re is csak egy megoldást kapunk:  $n = 2$ -t. Ha  $c \geq 6$ , akkor vélhetően végtelen sok megoldás van, például  $c = 6$  esetén  $n = 7$ -en kívül minden olyan  $n = p$  prímszám megoldás, amire  $p = 2q - 1$ , ahol  $q > 2$  is prím. Az általánosítás egy másik lehetőségére, az egyenlőség bal oldalán szereplő egymást követő egészek számának növelésére a 2.2.3. Feladatban térünk vissza.

### 2.2.2. Feladat

Az  $n$  pozitív egész számnak pontosan két pozitív osztója van, az  $n + 1$ -nek pedig pontosan három. Hány pozitív osztója van az  $n + 2012$  számnak?

(Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2012/13, I. kategória, I. forduló)

### Megoldás

Ennek a problémának a megoldását az előző feladatban meg gondoltakkal azonos módon kapjuk,  $n = 3$  részeredménnyel adódik a válasz:  $d(2015) = 8$ .

A 2.2.2. Feladattal analóg problémákat a Mersenne-prímek segítségével alkothatunk, hiszen pontosan akkor teljesül egyszerre, hogy  $n > 2$  prím és  $n + 1$  teljes hatvány, ha  $n$  Mersenne-prím (azaz egy olyan prím, amely egy 2-hatványnál 1-gyel kisebb).

A következő négy feladatban szintén arra van szükség, hogy a  $d(m) = k$  ( $k \geq 2$ ) egyenlőségből következtessünk  $m$  kanonikus alakjára:

### 2.2.3. Feladat

Adjuk meg az összes olyan  $n \geq 3$  pozitív egészt, amelyre  $d(n - 1) + d(n) + d(n + 1) \leq 8$ .

(49th Austrian Mathematical Olympiad, 2018)

### Megoldás

A 2.2.1. Feladatban azt gondoltuk meg, hogy  $n$  és  $n + 1$  közül az egyik szükségképpen páros, ebben a problémában arra lesz szükségünk, hogy három egymást követő egész szám közül az egyik mindenképpen osztható 3-mal. Ha a 3-mal osztható szám páratlan, akkor két megoldás adódik:  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$ . Ha a 3-mal osztható szám páros, akkor  $n_3 = 6$ .

### 2.2.4. Feladat

Melyek azok a pozitív egészek, amelyeknek pontosan négy pozitív osztójuk van, és ezek összege 84?

(Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2006/07, II. kategória, I. forduló)

### Megoldás

Pontosan négy osztója azoknak a pozitív egészeknek van, amelyek  $n = p^3$  vagy  $n = pq$  alakúak, ahol  $p \neq q$  prímek. Mindkét esetben felsoroljuk az összes osztót, és ezek összegét vesszük: első esetben ez a  $p^3 + p^2 + p + 1 = 84$ , második esetben a  $pq + p + q + 1 = 84$  egyenletre vezet. Előbbi egyenlet nem oldható meg, mert csak  $p = 3$  jöhetne szóba megoldásként, hiszen  $p$ -nek páratlannak kell lennie, és  $5^3 > 84$  miatt  $p < 5$ . Arról, hogy  $p = 3$  esetén az egyenlőség nem teljesül, természetesen visszahelyettesítéssel is meggyőződhetünk, de mindenképp jobban általánosítható az a megfontolás, hogy  $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 84$  azért nem állhat fenn, mert az egyenlőség már mod 3 sem teljesül. Persze akár ügyes szorzattá alakítással is juthatunk eredményre: a  $(p + 1)(p^2 + 1) = 84$  egyenletnek nincs megoldása, hiszen a 84 két 2-nél nagyobb páros szám szorzataként csak egyféleképpen állhatna elő:  $84 = 6 \cdot 14$  alakban, amiből nem kapunk alkalmas  $p$  értéket (természetesen, ha megfontoljuk, hogy  $p = 3$  sem lehet, akkor a tényezőknél 4-nél is nagyobbaknak kell lenniük, de ez nem változtat azon, hogy egyetlen szorzattá bontás jöhetne csak szóba). A második esetben felírt  $(p + 1)(q + 1) = 84$  egyenletnek az iménti szorzattá bontásból adódó megoldása  $p = 5$ ,  $q = 13$ , tehát  $n = 5 \cdot 13 = 65$  a feladat egyetlen megoldása.

Mivel az ebben a kategóriában versenyző tanulók esetén az osztók összege függvény ismerete nem szerepel a kötelező tananyagban, így egy ilyen típusú feladat vélhetően csak olyan esetben adható fel, amikor az osztók száma prím vagy egy prím kétszerese, és így a

szorzattá alakítás nem okoz nehézséget.

### 2.2.5. Feladat

Mi lehet az a pozitív egész szám, amelynek összesen 10 pozitív osztója van, ebbe beleszámoltuk az 1-et és magát a számot is, és ennek a tíz számnak az összege 34 364?

(Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2018/19, II. kategória, I. forduló)

### Megoldás

A kanonikus alakra  $n = p^9$  vagy  $n = pq^4$  adódik, ahol  $p \neq q$  prímek. Első esetben az osztók összegére  $\sum_{i=0}^9 p^i = 34\,364$  felírt egyenletnek  $5^9 > 34\,364$ , valamint a bal oldal paritása miatt csak  $p = 3$  lehetne megoldása, de ez nem teheti igazzá az egyenletet, hiszen a jobb oldal 2 maradékot ad 3-mal osztva, miközben a bal oldal 1-et. Itt látjuk igazán előnyét annak, amit az előző feladatban az általánosíthatóságot szem előtt tartva megfogalmaztunk, tehát hogy visszahelyettesítés nélkül is tudjuk igazolni, hogy egy egyenlet nem teljesülhet (a visszahelyettesítés kétségkívül időigényesebb lenne, és több hibalehetőséget is hordozhatna magában, mint az egyenlet mod 3 vizsgálata). A második esetben az osztók összegének szorzattá alakításából a  $(p+1)(q^4+q^3+q^2+q+1) = 34\,364$  egyenlet adódik. Tekintve, hogy  $q^4+q^3+q^2+q+1$  bármely  $q$  prímmel egyenél nagyobb páratlan szám és  $34\,364 = 2^2 \cdot 11^2 \cdot 71$ , így  $q^4+q^3+q^2+q+1$  értékére öt lehetőség adódna, amiket egyesével mind megvizsgálhatunk, de azzal kiegészítve, hogy  $q^4+q^3+q^2+q+1$  bármilyen  $q > 2$  prímmel 1 maradékot ad 4-gyel osztva, az esetek számát redukálhatjuk kettőre (mert az összeg tehát nem lehet sem 11, sem 71, sem  $11^2 \cdot 71$ , amik 3-mal kongruensek mod 4). Mindkét megmaradt esetben megoldást kapunk: ha  $q^4+q^3+q^2+q+1 = 11^2$ , akkor  $q_1 = 3$  és a hozzá tartozó  $p+1 = 2^2 \cdot 71$ -ből  $p_1 = 283$  valóban prím; ha  $q^4+q^3+q^2+q+1 = 11 \cdot 71$ , akkor  $q_2 = 5$  és a hozzá tartozó  $p+1 = 2^2 \cdot 11$ -ből  $p_2 = 43$  valóban prím, tehát a megoldások:  $n_1 = 283 \cdot 3^4 = 22\,923$  és  $n_2 = 43 \cdot 5^4 = 26\,875$ .

### 2.2.6. Feladat

Tudjuk, hogy  $a + \frac{1}{a} = p$ , ahol  $p$  prímszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$A = a^4 + a^3 + a^2 + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^2}$$

egész szám! Mennyi a  $p$  értéke, ha  $A$ -nak négy pozitív osztója van?

(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011/12, Kezdők II. kategória, III. forduló)

### Megoldás

Ha  $a + \frac{1}{a}$  egész szám valamilyen  $a$  valós számra, akkor teljes indukcióval igazolható, hogy  $a^n + \frac{1}{a^n}$  egész szám bármely  $n$  pozitív egész kitevőre, hiszen

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) \left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right).$$

A speciális matematika tagozaton a magasabbfokú egyenletek témakörben a reciprokegyenletek tanításánál szükséges, hogy a tanulók az  $x^k + \frac{1}{x^k}$  alakú kifejezésekkel tudjanak dolgozni.

Mindezen megfontolások után adódik, hogy  $A = p^4 + p^3 - 3p^2 - 3p = p(p^3 + p^2 - 3p - 3)$ , aminek ha négy osztója van, akkor egy prím köbe vagy két különböző prím szorzata. Első esetben, tekintve, hogy  $p \mid A$ , csak  $A = p^3$  jöhetne szóba, de  $p^3 + p^2 - 3p - 3 = p^2$  nem teljesülhet, hiszen  $p^3 - 3p - 3 = 0$  miatt ebből  $3 \mid p$  adódna, amiből  $p = 3$ , de  $27 - 9 - 3 \neq 0$ . Második esetben a  $p^3 + p^2 - 3p - 3 = q$  egyenletnek kell teljesülnie valamilyen  $p \neq q$  prímekre. Ha  $p = 2$ , akkor  $q = 3$  megoldás, így  $a = 1$ ,  $A = 6$ , aminek valóban négy darab osztója van. Ha  $p > 2$ , akkor a  $p^3 + p^2 - 3p - 3 = (p+1)(p^2 - 3)$  szorzatban mindkét tényező egynél nagyobb, tehát nem lehet prím. Így a feladat egyetlen megoldása  $p = 2$ .

### 2.2.7. Feladat

Melyek azok az  $n$  pozitív egészek, amelyekre teljesül, hogy bármely  $t \mid n$ -re  $d(t) \mid d(n)$ ?

(45th Austrian Mathematical Olympiad, 2014)

## Megoldás

Az első húsz pozitív egészt megvizsgálva az  $n = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19$  értékek adódnak megoldásként. Azt persze azonnal igazolhatjuk, hogy a prímszámok megoldások lesznek, hiszen ha  $n = p$ , akkor a két triviális osztóra  $d(1) \mid d(p)$  és  $d(p) \mid d(p)$  fennáll. Az összetett számok közül a 6, 10, 14 és a 15 megoldás, a 8, 9, 12 és a 18 nem. A prímtényezős felbontásokat összehasonlítva azt tapasztaljuk, hogy a megoldásként kapott összetett számok négyzetmentesek. Megfogalmazhatjuk azt a sejtést, hogy a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele az, hogy  $n$  négyzetmentes legyen. Az elégségesség könnyen igazolható: ha  $n = \prod_{i=1}^k p_i$ , akkor  $d(n) = 2^k$ . Ekkor  $n$  bármely 1-nél nagyobb  $t$  osztója különböző prímekek szorzata (megengedve az egytényezős szorzatot is), tehát bármely  $t \mid n$ -re  $d(t)$  egy  $d(n)$ -nél nem nagyobb kettőhatvány, ami így biztosan osztója  $d(n) = 2^k$ -nak.

A szükségeség igazolásához térjünk vissza azokhoz az összetett számokhoz, amik nem voltak megoldásai az eredeti feladatnak, és nézzük meg, melyik osztókkal van probléma:  $n = 8 = 2^3$  esetén  $t = 4 = 2^2$ -ra  $d(4) \nmid d(8)$ , hiszen  $3 \nmid 4$ ;  $n = 9 = 3^2$  esetén  $t = 3 = 3^1$ -re  $d(3) \nmid d(9)$ , mivel  $2 \nmid 3$ ;  $n = 12 = 2^2 \cdot 3$  esetén  $t = 6 = 2 \cdot 3$ -ra  $d(6) \nmid d(12)$ , hiszen  $4 \nmid 6$ ;  $n = 16 = 2^4$  esetén  $t = 8 = 2^3$ -ra  $d(8) \nmid d(16)$ , mert  $4 \nmid 5$  és végül ha  $n = 18 = 2 \cdot 3^2$ , akkor  $t = 6 = 2 \cdot 3$ -ra  $d(6) \nmid d(18)$ , mivel  $4 \nmid 6$ . Ha  $n = 2^5 \cdot 11 \cdot 97$ , akkor  $t = 2^4 \cdot 11 \cdot 97$ -re biztosan nem teljesülhet, hogy  $d(t) \mid d(n)$ , hiszen  $5 \cdot 2 \cdot 2 \nmid 6 \cdot 2 \cdot 2$ , mert  $5 \nmid 6$ .

Ilyen előkészítés után a szükségeséget kontrapozícióval bizonyítjuk, tehát azt igazoljuk, hogy ha  $n$  nem négyzetmentes, akkor létezik olyan  $t \mid n$ , amelyre  $d(t) \nmid d(n)$ . Ha  $n$  nem négyzetmentes, azaz  $n = q^\gamma \cdot \prod_i p_i^{\alpha_i}$ , ahol  $q$  és  $p_i$ -k különböző prímekek,  $\gamma \geq 2$ , és  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ , akkor  $d(n) = (\gamma + 1) \cdot \prod_i (\alpha_i + 1)$ . Legyen  $t = q^{\gamma-1} \cdot \prod_i p_i^{\alpha_i}$ , ekkor  $d(t) = \gamma \cdot \prod_i (\alpha_i + 1)$ . A  $d(t) \mid d(n)$  reláció pontosan akkor teljesül, ha  $\gamma \mid \gamma + 1$ , ami nem állhat fenn, ha  $\gamma \geq 2$ .

Ezt a problémát érdemes meggondolni az osztók száma helyett az osztók összege függvényre is. A kísérlet pontosan ugyanazzal az eredménnyel zárulna, mint az előző probléma során: azok az  $n$  pozitív egész számok, amelyekre bármely  $t \mid n$ -re  $\sigma(t) \mid \sigma(n)$ , a négyzetmentes számok. Az elégségesség ismét könnyen igazolható: ha  $n = \prod_i p_i$ , akkor

$\sigma(n) = \prod_i (p_i + 1)$ . Ekkor  $n$  bármely 1-nél nagyobb  $t$  osztója különböző prímekek szorzata (megengedve az egytényezős szorzatot is), tehát bármely  $t \mid n$ -re  $\sigma(t)$  a  $\sigma(n)$  szorzatalakjában szereplő tényezők közül valahánynak a szorzata, így biztosan osztója  $\sigma(n)$ -nek. A szükségesség igazolásához ismét visszatérhetünk azokhoz az összetett számokhoz, amik nem megoldásai a feladatnak, és megállapíthatjuk, hogy azokkal az osztókkal biztosan probléma van, amikkel az előző példában: például ha  $n = 18 = 2 \cdot 3^2$ , akkor  $t = 6 = 2 \cdot 3$ -ra  $\sigma(6) \nmid \sigma(18)$ , hiszen  $(1 + 2) \cdot (1 + 3) \nmid (1 + 2) \cdot (1 + 3 + 3^2)$ , mert  $(1 + 3) \nmid (1 + 3 + 3^2)$ .

Ha  $n$  nem négyzetmentes, azaz  $n = q^\gamma \cdot \prod_i p_i^{\alpha_i}$ , ahol  $q$  és  $p_i$ -k különböző prímekek,  $\gamma \geq 2$ , illetve  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ , akkor  $\sigma(n) = \frac{q^{\gamma+1} - 1}{q - 1} \cdot \prod_i \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$ . Legyen  $t = q^{\gamma-1} \cdot \prod_i p_i^{\alpha_i}$ , ekkor  $\sigma(t) = \frac{q^\gamma - 1}{q - 1} \cdot \prod_i \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$ . A  $\sigma(t) \mid \sigma(n)$  reláció pontosan akkor teljesül, ha  $q^\gamma - 1 \mid q^{\gamma+1} - 1$ , ami nem állhat fenn, ha  $\gamma \geq 2$ , hiszen  $\frac{q^{\gamma+1} - 1}{q^\gamma - 1} = q + \frac{q - 1}{q^\gamma - 1}$ , ami csak  $\gamma = 1$  esetén lehetne egész.

Ugyanezt a problémát az Euler-féle  $\varphi$ -függvényre is megvizsgáljuk. Mivel minden  $a \mid b$ -re  $\varphi(a) \mid \varphi(b)$  teljesül, ebben az esetben bármely pozitív egész megoldása a feladatnak.

Végül a különböző prímosztók, illetve a prímosztók száma függvény esetén is érdemes megkeresni a megoldásokat. Mivel bármely  $n$  pozitív egészre  $1 \mid n$ , de  $\omega(1) = \Omega(1) = 0$  nem lehet osztója  $n > 1$  esetén az  $\omega(n)$ -nek, illetve az  $\Omega(n)$ -nek, így itt a feladatot a következőképpen kell átfogalmaznunk: melyek azok az  $n$  pozitív egész számok, amelyekre teljesül, hogy bármely 1-nél nagyobb  $t \mid n$ -re  $\omega(t) \mid \omega(n)$ , illetve  $\Omega(t) \mid \Omega(n)$ . A megoldás alapja mindkét esetben ugyanaz: legyen  $\omega(n) = k$ , illetve  $\Omega(n) = k$ , miközben  $k > 2$ . A  $t > 1$  osztót képezzük úgy, hogy az  $n$  kanonikus alakjában szereplő prímszámok, illetve prímekek közül elhagyunk egyet. Az így kapott  $t$  osztóra  $\omega(t) = k - 1$ , illetve  $\Omega(t) = k - 1$ , ahol  $k - 1 > 1$ , így  $\omega(t) \nmid \omega(n)$ , illetve  $\Omega(t) \nmid \Omega(n)$  nem teljesülhet. Tehát a megoldhatóságnak szükséges feltétele, hogy  $\omega(n) \leq 2$ , illetve az  $\Omega(n) \leq 2$  fennálljon. Ez elégséges feltétele is, hiszen ha  $t \mid n$ , akkor  $\omega(t) \leq \omega(n)$ , illetve  $\Omega(t) \leq \Omega(n)$ .

Ez a feladat jól mutatja, hogy egy probléma különböző variánsai esetén olykor mennyire hasonló, néha pedig mennyire eltérő eredményeket kaphatunk. A gyerekek számára is hasznos, ha látják, hogyan alakul egy probléma, megtapasztalják a matematikai általánosítás folyamatát.

Az alábbi két feladat diofantikus egyenletre vezet:

### 2.2.8. Feladat

Melyek azok a pozitív természetes számok, amelyek reciprokának tizedes tört alakja véges, és a szám köbének 7-szer annyi osztója van, mint magának a számnak?

(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2015/16, Kezdők II. kategória, III. forduló)

### Megoldás

Az  $n$  pozitív egész reciprokának tizedes tört alakja pontosan akkor véges, ha  $n = 2^\alpha \cdot 5^\beta$ , ahol  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ . A szöveg alapján a  $(3\alpha + 1)(3\beta + 1) = 7(\alpha + 1)(\beta + 1)$  egyenletet kell megoldani, amiből rendezés és szorzattá alakítás után az  $(\alpha - 2)(\beta - 2) = 7$  adódik, így a megoldások:  $\alpha_1 = 9, \beta_1 = 3$ , azaz  $n_1 = 2^9 \cdot 5^3 = 64\,000$ , illetve  $\alpha_2 = 3, \beta_2 = 9$ , azaz  $n_2 = 2^3 \cdot 5^9 = 15\,625\,000$ .

Olyan feladattal, amelyben a keresett pozitív egésznek két különböző prímosztója van, és az osztók számára vonatkozó információ egy diofantikus egyenlet megoldására vezet, tankönyvben szereplő feladatok között is találkozhatunk ([8] 69.o./6.). Az alábbi feladat is ilyen problémára vezet, és ebben ismét használjuk a korábban már említett stratégiát az osztók párokba állításáról.

### 2.2.9. Feladat

Adott az  $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$  szám ( $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$ ). Határozzuk meg  $\alpha$  és  $\beta$  értékét, ha tudjuk, hogy az  $n^2$  számnak 2020 darab olyan osztója van, mely kisebb  $n$ -nél és nem osztója  $n$ -nek.

(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2012/13, Kezdők I. kategória, II. forduló nyomán)

### Megoldás

A feladatban annak, hogy  $n$  prímtényező felbontásában melyik két prím szerepel, nincs jelentősége, csak annak, hogy  $\omega(n) = 2$ . Legyen  $n = p^\alpha \cdot q^\beta$ , ahol  $p$  és  $q$  különböző prímek, valamint  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$ . Az  $n^2$  szám  $n$ -től különböző osztóinak osztópárokba rendezése azt adja, hogy bármely osztópárban az egyik osztó kisebb, mint  $n$ , a párja nagyobb, mint  $n$ . Így az  $n$ -től különböző osztók fele olyan, ami kisebb, mint  $n$ , tehát ezek száma  $\frac{(2\alpha + 1)(2\beta + 1) - 1}{2}$ . Ezek közül azok száma, amelyek  $n$ -nek is osztói  $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ .

Tehát a megoldandó egyenlet:

$$\frac{(2\alpha + 1)(2\beta + 1) - 1}{2} - (\alpha + 1)(\beta + 1) = 2020,$$

amiből rendezés után  $\alpha \cdot \beta = 2021$  adódik. Ez az egyenlőség négy számpár esetén teljesül, mivel  $2021 = 43 \cdot 47$ , így a megoldások:  $n_1 = 2^1 \cdot 3^{2021}$ ,  $n_2 = 2^{43} \cdot 3^{47}$ ,  $n_3 = 2^{47} \cdot 3^{43}$ , valamint  $n_4 = 2^{2021} \cdot 3^1$ .

A feladat 2020 helyett persze bármilyen évszámmal kitűzhető, a megoldások száma  $d(\text{évszám} + 1)$ -gyel egyenlő.

A versenyen kitűzött feladat a következőképp hangzott: Tudjuk, hogy  $n = 2^{30} \cdot 3^{20}$ . Hány olyan pozitív osztója van az  $n^2$  számnak, mely kisebb  $n$ -nél és nem osztója  $n$ -nek?

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok feladatai között is találkozhatunk olyan feladatokkal, amelyekben az osztók száma függvény szerepel, ezekből is bemutatunk néhányat a rég-, illetve a közelmúltból. A tagozatos diákok számára a KöMaL jól ismert, de valószínűleg a tanulók nem böngésznek múlt században vagy azt megelőzően megjelent problémák között, így egy „régibbi” feladat nem csak matematikai érdekesség lehet számukra, de van, amelyiknek akár a nyelvezete is kihívást jelenthet, illetve van, hogy a feladat szerzője miatt is érdemes egy-két feladatot bemutatni a diákoknak.

### 2.2.10. Feladat

Az alábbi feladat 1936-ban jelent meg:

**1227.** Legyen  $n$  oly páros szám, mely 2-nek éppen az  $r$ -ik hatványával osztható. Bizonyítsuk be, hogy  $n$  azon páros osztóinak száma, amelyeknek konjugáltjuk is páros

$$d(n) - d\left(\frac{n}{2^{r-1}}\right)$$

ahol a  $d(s)$  jel az  $s$  szám osztóinak számát jelenti, az osztók közé számítva 1-et és  $s$ -et is. Turán.

### Megoldás

Egy osztó konjugáltján az osztópárját értjük. Ha  $n = 2^r \cdot s$ , ahol  $(s, 2) = 1$  és  $r \in \mathbb{Z}^+$ , akkor azok a páros osztók, amelyeknek az osztópárja is páros  $2^\alpha \cdot t$  alakúak, ahol  $t \mid s$  és  $1 \leq \alpha \leq r - 1$ . Ezek száma  $(r - 1) \cdot d(s)$ . Azt kell igazolnunk, hogy ez megegyezik a megadott különbséggel:

$$d(n) - d\left(\frac{n}{2^{r-1}}\right) = (r+1) \cdot d(s) - d(2s) = (r+1-d(2)) \cdot d(s) = (r+1-2) \cdot d(s) = (r-1) \cdot d(s).$$

A feladat tetszőleges  $p$  prímre általánosítható: ha az  $n$  pozitív egész  $p$ -nek pontosan az  $r$ -dik hatványával osztható, akkor azoknak a  $p$ -vel osztható osztóknak a száma, amelyeknek a konjugáltja is  $p$ -vel osztható  $d(n) - d\left(\frac{n}{p^{r-1}}\right)$ -val egyenlő.

A  $d(n) \equiv 1 \pmod{2} \Leftrightarrow n = k^2$  tétellel kapcsolatos egzotikus feladat a közelmúltból (a tétel alkalmazását látjuk még a 2.2.14. és a 2.2.15. Feladatban):

### 2.2.11. Feladat

Az  $n$  pozitív egész számot egzotikusnak nevezzük, ha osztható a pozitív osztóinak számával. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

- Ha egy egzotikus szám páratlan, akkor ez a szám négyzetszám.
- Végtelen sok egzotikus szám van.

(KöMaL B.4651.)

*Megoldás*

a) Egy páratlan szám minden osztója páratlan, így ha egy  $n$  pozitív egész szám egzotikus, akkor ebből az következik, hogy  $d(n)$  páratlan, ami ekvivalens a bizonyítani kívánt állítással.

b) Például az  $n = p^{p-1}$  alakú számok bármely  $p$  prím esetén egzotikusak.

A következő négy feladatban valamiféle becslés szükséges:

### 2.2.12. Feladat

Jelölje  $d(n)$  az  $n$  pozitív egész szám pozitív osztóinak a számát. Határozzuk meg azokat az  $n$  számokat, amelyekre  $d(n^3) = 5 \cdot d(n)$ .

(KöMaL B.4582.)

*Megoldás*

Legyen  $n$  kanonikus alakja:  $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ , ahol  $p_i$ -k különböző prímekek és minden  $i$ -re  $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$  (ez feltehető, hiszen  $n = 1$  nem megoldás). Ekkor a  $\prod_i (3\alpha_i + 1) = 5 \cdot \prod_i (\alpha_i + 1)$  egyenlet megoldásait keressük. Rendezés után a  $\prod_i \frac{3\alpha_i + 1}{\alpha_i + 1} = 5$  egyenlet adódik. Mivel  $\frac{3\alpha_i + 1}{\alpha_i + 1} = \frac{3(\alpha_i + 1) - 2}{\alpha_i + 1} = 3 - \frac{2}{\alpha_i + 1}$  és  $\alpha_i \geq 1$ , ezért a bal oldali szorzatban minden tényező értéke legalább 2 és kisebb, mint 3. Ebből az következik, hogy a szorzat értéke csak akkor lehet 5, ha a tényezők darabszáma kettő. A  $\frac{3\alpha_1 + 1}{\alpha_1 + 1} \cdot \frac{3\alpha_2 + 1}{\alpha_2 + 1} = 5$  egyenletet rendezve  $(2\alpha_1 - 1) \cdot (2\alpha_2 - 1) = 5$  adódik, aminek az  $(1; 3)$  és a  $(3; 1)$  számpárok a megoldásai, azaz a megoldások kanonikus alakja  $n = p \cdot q^3$ , ahol  $p$  és  $q$  különböző prímekek.

Ezt a feladatot meggondolhatjuk az egyenletben szereplő konstans szorzó értékét 6-ra vagy 7-re változtatva is, előbbi esetben nem kapunk megoldást, utóbbi esetben  $n$  kanonikus alakjára  $n = p^3 \cdot q^9$  adódik, ahol  $p$  és  $q$  különböző prímekek.

### 2.2.13. Feladat

Adjuk meg az összes pozitív egészt, amelyre  $d(n) = \frac{n}{3}$ .

(Canadian Mathematical Olympiad, 1992)

#### Megoldás

Az  $n$  pozitív egész  $\frac{n}{5}$ -nél nagyobb osztóinak száma legfeljebb négy, vagyis  $d(n) \leq \frac{n}{5} + 4$ , amiből  $\frac{n}{3} \leq \frac{n}{5} + 4$ , így  $n \leq 30$ . Tehát ha az egyenletnek létezik megoldása, akkor az a 3-nak olyan többszöröse, ami nem nagyobb, mint 30. Ezek közül  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 18$  és  $n_3 = 24$  esetén teljesül az egyenlet.

Bemutatunk egy másik lehetőséget is a bizonyításra, amelyben szükségünk lesz az alábbi három állításra:

- (i)  $\delta + 1 < 2^{\delta-1}$ , ha  $\delta > 3$  egész;
- (ii)  $\delta + 1 < 3^{\delta-1}$ , ha  $\delta > 2$  egész;
- (iii)  $\delta + 1 < q^\delta$  bármely  $\delta > 0$  egészre, ha  $q \geq 5$ .

#### Bizonyítás

Mindhárom állítás egyszerűen adódik  $\delta$  szerinti teljes indukcióval, ezt nem részletezzük, helyette a binomiális tételen alapuló becsléseket használunk:

- (i)  $2^{\delta-1} = (1+1)^{\delta-1} > 1 + (\delta-1) + 1 = \delta + 1$ , ha  $\delta > 3$ ;
- (ii)  $3^{\delta-1} = (1+2)^{\delta-1} \geq 1 + (\delta-1) \cdot 2 = 2\delta - 1 > \delta + 1$ , ha  $\delta > 2$ ;
- (iii)  $q^\delta \geq 5^\delta = (1+4)^\delta \geq 1 + \delta \cdot 4 > \delta + 1$ , ha  $\delta > 0$

Megjegyezzük, hogy (ii)-t (i) felhasználásával is igazolhatjuk: ha  $\delta = 3$ , akkor  $4 < 3^{3-1} = 9$  valóban fennáll, ha  $\delta > 3$ , akkor  $\delta + 1 < 2^{\delta-1} < 3^{\delta-1}$  miatt az egyenlőtlenség valóban teljesül.

Legyen  $n$  kanonikus alakja  $n = 3^\alpha \cdot s$ , ahol  $(s, 3) = 1$  és  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  (hiszen a feltételből következik, hogy  $3|n$ ). Ekkor  $3(\alpha+1) \cdot d(s) = 3^\alpha \cdot s$ , amit 3-mal osztva  $(\alpha+1) \cdot d(s) = 3^{\alpha-1} \cdot s$  adódik. Tekintve, hogy  $d(s) < s$ , ha  $s > 2$ , ezért ha létezik az egyenletnek megoldása, akkor (ii) miatt  $\alpha \leq 2$  vagy  $s = 1$  vagy  $s = 2$ . Ha  $s = 1$  vagy  $s = 2$ , akkor  $\alpha = 2$ , és fordítva,

azaz  $n_1 = 9$  és  $n_2 = 18$  megoldása az egyenletnek. Ha  $\alpha = 1$ , akkor  $2d(s) = s$ , amiből  $2 \mid s$ . Legyen  $s$  kanonikus alakja  $s = 2^\beta \cdot \prod_i q_i^{\gamma_i}$ , ahol  $\beta \in \mathbb{Z}^+$ ,  $q_i$ -k különböző 3-nál nagyobb prímelek és  $\gamma_i \in \mathbb{N}$ . Ezt visszahelyettesítve  $(\beta + 1) \cdot \prod_i (\gamma_i + 1) = 2^{\beta-1} \cdot \prod_i q_i^{\gamma_i}$  adódik. Ebből (i) és (iii) alapján  $\beta \leq 3$ . A  $\beta_1 = 1$  és  $\beta_2 = 2$  esetek nem adhatnak megoldást, hiszen ekkor a bal oldal első esetben páros, második esetben osztható 3-mal, ami ellentmondás. Ha  $\beta_3 = 3$ , akkor (iii) miatt az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha  $\prod_i q_i^{\gamma_i}$  az üres szorzat.

Ebből az  $n_3 = 2^3 \cdot 3$  megoldás adódik.

Tehát a feladatnak összesen három megoldása van:  $n_1 = 9$ ,  $n_2 = 18$  és  $n_3 = 24$ .

#### 2.2.14. Feladat

Jelölje  $d(n)$  az  $n > 0$  egész szám pozitív osztóinak a számát. Tegyük fel, hogy  $d(k)^2 = d(k^4)$ . Bizonyítsuk be, hogy alkalmas  $j \geq 0$  egészre  $d(k) = 3^j$ .

(Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2019/20. III. kategória, I. forduló)

#### Megoldás

Mivel  $k^4$  négyzetszám, így a jobb oldal páratlan, amiből az következik, hogy  $d(k)$  is páratlan, tehát  $k$  négyzetszám. A  $k = 1$  megoldás, hiszen ekkor az egyenlet mindkét oldala 1-gyel egyenlő,  $j$ -re pedig  $j = 0$  adódik, mivel  $d(1) = 1$ . Legyen  $k > 1$  kanonikus alakja  $k = \prod_j p_j^{2\alpha_j}$ , ahol  $p_j$ -k különböző prímelek és  $\alpha_j \in \mathbb{Z}^+$ . Ebből  $\prod_j (2\alpha_j + 1)^2 = \prod_j (8\alpha_j + 1)$  adódik. Mivel  $(2\alpha_j + 1)^2 = 4\alpha_j^2 + 4\alpha_j + 1 > 4\alpha_j + 4\alpha_j + 1 = 8\alpha_j + 1$ , ha  $\alpha_j > 1$ , így az adódik, hogy minden  $j$ -re  $\alpha_j = 1$  (ekkor  $3^2 = 8 + 1$  valóban fennáll), azaz  $k = \prod_j p_j^2$ , amiből  $d(k) = 3^j$ , tehát az alkalmas  $j$  nem más, mint  $j = \omega(k)$ .

#### 2.2.15. Feladat

Adjuk meg az összes olyan  $n$  pozitív egész számot, amelyre  $n = d(n)^2$ .

(Canadian Mathematical Olympiad, 1999)

Megoldás

Ha  $n$  négyzetszám, akkor  $d(n)$  páratlan, amiből  $n = \prod_i p_i^{2\alpha_i}$ , ahol  $p_i$ -k különböző páratlan prímek és  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ . Ekkor a  $\prod_i p_i^{2\alpha_i} = \prod_i (2\alpha_i + 1)^2$  egyenlet adódik, ami ekvivalens a  $\prod_i p_i^{\alpha_i} = \prod_i (2\alpha_i + 1)$  egyenlettel. Ha  $p_i \geq 5$ , akkor  $p_i^{\alpha_i} > 2\alpha_i + 1$ , hiszen a binomiális tételből:  $(1 + (p_i - 1))^{\alpha_i} > 1 + (p_i - 1) \cdot \alpha_i \geq 1 + 4\alpha_i > 2\alpha_i + 1$ . Ha  $p_i = 3$ , akkor  $3^\alpha > 2\alpha + 1$ , ha  $\alpha > 1$  a binomiális tétel ismételt alkalmazásával. Tehát ha az egyenletnek létezik megoldása, akkor az csak  $\alpha_1 = 0$ , azaz  $n_1 = 1$ , illetve  $\alpha_2 = 1$ , azaz  $n_2 = 9$  lehet. Visszahelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy ezek valóban megoldásai a feladatnak.

### 2.2.2. Az osztók szorzata

Az osztók száma függvény tanításakor érdemes foglalkozni azzal is, hogy az  $n$  pozitív egész szám osztóinak szorzata  $(\sqrt{n})^{d(n)}$ -el egyenlő. Ezt szintén az osztók osztópárokba rendezésével bizonyítjuk. Ehhez kapcsolódik az alábbi két feladat (és a 2.2.22. Feladat is):

#### 2.2.16. Feladat

Az  $N$  pozitív egész szám pozitív osztóinak a szorzata  $3^{595}$ . Határozzuk meg az  $N$  szám utolsó számjegyét!

(Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny 2011/12, Kezdők I. kategória, I. forduló)

Megoldás

Az általánosítást oldjuk meg: ha  $N$  osztóinak szorzata prímszámhatvány, akkor  $N$  maga is ennek a prímszámhatvány a hatványa. Tehát ha  $d(N) = p^\alpha$  valamely  $p$  prímszámra és  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  kitevőre, akkor  $N = p^\beta$ , valamilyen  $0 < \beta \leq \alpha$  egész kitevőre, és fordítva. Ekkor  $d(N) = \beta + 1$ , tehát az osztók szorzata  $p^{\frac{1}{2}\beta(\beta+1)}$ -gyel egyenlő. Azaz bármilyen  $\frac{1}{2}\beta(\beta+1)$  alakú számot is válasszunk kitevőnek, a feladatnak lesz megoldása. A kitűzött feladatban  $\frac{1}{2}\beta(\beta+1) = 595$  és  $p = 3$ , így a megoldás  $N = 3^{34}$ , amelynek utolsó számjegye 9.

Ennek a típusú feladatnak egy nehezebb változatát találjuk egy feladatgyűjteményben:

### 2.2.17. Feladat

Mely  $n$ -re lesz  $n$  összes pozitív osztóinak szorzata  $2^{120} \cdot 3^{60} \cdot 5^{90}$ ?

(Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből, 21.o./118.)

### Megoldás

Ha  $n$  osztóinak szorzata három prímszorzata, akkor  $n$  kanonikus alakjában is pontosan ezek a prímek szerepelnek, legyen  $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ , ahol  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^+$ . Ekkor  $d(n) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$ , az osztók szorzata  $(2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma)^{\frac{1}{2}d(n)}$ -nel egyenlő, amiből az alábbi egyenletrendszer adódik:

$$(1) \quad 120 = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$$

$$(2) \quad 60 = \frac{1}{2}\beta(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$$

$$(3) \quad 90 = \frac{1}{2}\gamma(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1).$$

Az egyenleteket 2-vel szorozva adódik, hogy az  $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$  szorzat osztója  $(240, 120, 180) = 60$ -nak. A 60 azon osztói, amelyek három 1-nél nagyobb tényező szorzataként írhatóak: 12, 20, 30 és 60. Tehát maximum ezt a négy lehetőséget kell kipróbálnunk. Csak abban az esetben kapunk megoldást, ha  $(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = 60$ , azaz  $\alpha = 4, \beta = 2, \gamma = 3$ . Tehát  $n = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$  a feladat egyetlen megoldása.

### 2.2.18. Feladat

Legyen az 1024 összes pozitív osztóinak összege  $a$ , az 1024 összes pozitív osztóinak szorzata pedig  $b$ . Melyik igaz az alábbi egyenlőségek közül?

$$A) (a-1)^5 = b \quad B) (a+1)^5 = b \quad C) a^5 - 1 = b \quad D) a^5 + 1 = b \quad E) a^5 = b$$

(Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny 2019, 11-12. osztályosok versenye)

*Megoldás*

Mivel  $a = 2^{11} - 1$  és  $b = 2^{55}$ , a helyes válasz:  $B$ .

### 2.2.3. Az osztók összege

Az alábbi egy egyszerű, a  $\sigma$ -függvény értékészletére vonatkozó feladat:

#### 2.2.19. Feladat

Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok halmazán:  $\sigma(n) \cdot d(n) = 96$ .

(49th Austrian Mathematical Olympiad, 2018)

*Megoldás*

Mivel  $96 = 2^5 \cdot 3$ , így  $\sigma(n)$  értéke egy kettőhatvány vagy annak háromszorosa. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy  $\sigma(n)$  kettőhatvány legyen, az, hogy  $n$  különböző Mersenne-prímek szorzata. Ha  $n$  különböző (Mersenne-)prímek szorzata, akkor  $d(n)$  is kettőhatvány, ami ellentmondásra vezet, hiszen a 96 osztható 3-mal is. Tehát  $\sigma(n)$  egy kettőhatvány háromszorosa, azaz öt esetet kell megvizsgálni (illetve ha  $d(n) \leq \sigma(n)$ -et is kihasználjuk, akkor csak hármat). Ezek közül két esetben kapunk megoldást: ha  $\sigma(n) = 2^3 \cdot 3$ , akkor  $n_1 = 2 \cdot 7$ -re és  $n_2 = 3 \cdot 5$ -re  $d(n) = 2^2$ ; ha  $\sigma(n) = 2^4 \cdot 3$ , akkor  $n_3 = 47$ -re  $d(n) = 2$ , így a feladatnak ez a három megoldása van.

A következő problémában egy konstrukciós feladatot is találunk:

#### 2.2.20. Feladat

Az  $n$  pozitív egészt *magányosnak* nevezzük, ha nem létezik olyan  $m \neq n$  pozitív egész, amire  $\sigma_{-1}(n) = \sigma_{-1}(m)$ , ahol  $\sigma_{-1}(n)$  az  $n$  osztóinak reciprokösszegét jelöli. Bizonyítsuk be, hogy

- minden prím magányos;
- végtelen sok pozitív egész létezik, ami nem magányos.

(Team Selection Tests for the Junior Balkan Mathematical Olympiad, 2011)

Megoldás

Ahogy azt a 2.1. pontban tárgyaltuk,  $\sigma_{-1}(n) = \frac{\sigma(n)}{n}$ .

a) Tegyük fel indirekt, hogy létezik olyan  $p$  prím, amelyre a  $\sigma_{-1}(p) = \sigma_{-1}(m)$  egyenlet teljesül valamilyen  $m \neq p$ -re. Ez a  $\frac{p+1}{p} = \frac{\sigma(m)}{m}$  egyenlettel ekvivalens, amiből rendezés után  $(p+1)m = p \cdot \sigma(m)$  adódik. Tekintve, hogy  $(p, p+1) = 1$ , és a jobb oldal osztható  $p$ -vel, így  $p \mid m$ . Legyen  $m$  kanonikus alakja:  $m = p^\alpha \cdot k$ , ahol  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  és  $(p, k) = 1$ . Ezt visszahelyettesítve az egyenletbe, majd osztva  $p$ -vel és felhasználva a multiplikatív tulajdonságot a  $(p+1)p^{\alpha-1} \cdot k = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \cdot \sigma(k)$  egyenlet adódik. Mindkét oldalt  $(p-1)$ -gyel szorozva a  $(p^{\alpha+1} - p^{\alpha-1}) \cdot k = (p^{\alpha+1} - 1) \cdot \sigma(k)$  egyenlőségnek kellene teljesülnie. Ha  $\alpha > 1$ , akkor bármely  $p$  prímre  $p^{\alpha+1} - p^{\alpha-1} < p^{\alpha+1} - 1$  és közben bármely  $k$  pozitív egészre  $k \leq \sigma(k)$ , tehát a bal oldal biztosan kisebb, mint a jobb oldal. Következésképp, ha van megoldás, akkor  $\alpha = 1$ , így  $k = 1$ , amiből  $m = p$  adódik, ami azonban ellentmondás.

b) A  $\sigma_{-1}(n) = \frac{\sigma(n)}{n}$  egyenlőség miatt a  $\sigma_{-1}(n)$  függvény multiplikatív. Ha  $m \neq n$  tökéletes számok (például  $n = 6$  és  $m = 28$ ), akkor  $\sigma_{-1}(n) = \sigma_{-1}(m) = 2$ . Ebből és a multiplikativitásból következik, hogy bármilyen hozzájuk relatív prím  $k$  pozitív egészt véve  $\sigma_{-1}(kn) = \sigma_{-1}(km)$ . Ilyen  $k$  pozitív egész pedig biztosan végtelen sok van, például  $k = 5^\alpha$ , ahol  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ .

Az alábbi két feladatot becsléssel oldjuk meg:

### 2.2.21. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely  $n > 1$  páratlan számra teljesül a  $\sigma(n)^3 < n^4$  egyenlőtlenség.

(Hojoo Lee: *Problems in Elementary Number Theory*)

Megoldás

Az egyenlőtlenség a  $\sigma$ -függvény multiplikativitása miatt valóban bármely  $n > 1$  páratlan számra teljesül, ha igazoljuk, hogy minden  $p > 2$  és  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ -ra  $(\sigma(p^\alpha))^3 < (p^\alpha)^4$ .

A  $\left(\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\right)^3 < p^{4\alpha}$  egyenlőtlenséget rendezve  $(p^{\alpha+1}-1)^3 < (p-1)^3 \cdot p^{4\alpha}$  adódik. A bal oldalon minden  $p$ -re  $(p^{\alpha+1}-1)^3 < (p^{\alpha+1})^3$ . Megmutatjuk, hogy a jobb oldalra  $(p^{\alpha+1})^3 < (p-1)^3 \cdot p^{4\alpha}$ , ha  $p > 2$ . Ha mindkét oldalt  $(p^\alpha \cdot (p-1))^3$ -nel elosztjuk, a  $\left(\frac{p}{p-1}\right)^3 < p^\alpha$  egyenlőtlenség adódik. A bal oldal értéke legfeljebb  $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$ , a jobb oldal ennél nagyobb, ha  $p^\alpha > 3$ . Azt az egy esetet, amikor  $p = 3$  és  $\alpha = 1$  külön megvizsgáljuk:  $(\sigma(3))^3 < 3^4$  teljesül, hiszen  $64 < 81$ . Tehát valóban bármilyen páratlan prímszámra teljesül az egyenlőtlenség, így a multiplikatívítást felhasználva adódik, hogy a  $\sigma(n)^3 < n^4$  egyenlőtlenség bármilyen  $n > 1$  páratlan számra fennáll.

### 2.2.22. Feladat

Legyen  $n$  egynél nagyobb természetes szám. Jelölje  $n$  pozitív osztóinak számát  $d(n)$ , összegét pedig  $\sigma(n)$ . Mutassuk meg, hogy  $\sigma(n) > d(n)\sqrt{n}$ .

(KöMaL B.4990.)

### Megoldás

Ez a feladat az osztókra felírt számtani, mértani közép közötti egyenlőtlenségből és abból következik, amit az osztók szorzatára a 2.2.2. pont bevezetésében megfogalmaztunk:

$$\sqrt[d(n)]{(\sqrt{n})^{d(n)}} \leq \frac{\sigma(n)}{d(n)}, \quad \text{azaz}$$

$$\sqrt{n} \leq \frac{\sigma(n)}{d(n)}.$$

Az egyenlőség nem állhat fenn, hiszen ha  $n > 1$ , akkor nem lehet minden osztója egyenlő, így a közepek közötti egyenlőtlenség szigorú, tehát  $d(n)$ -nel való szorzás után adódik a bizonyítani kívánt állítás:  $d(n)\sqrt{n} < \sigma(n)$ .

### 2.2.23. Feladat

Nevezzünk három, nem feltétlen különböző, 1-nél nagyobb egész barátságos számhármast, ha bármely kettő önmagánál kisebb pozitív osztóinak az összege a harmadik szám.

Határozzuk meg az összes olyan barátságos számhármast, amelyben a(z egyik) legnagyobb szám páros.

(Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2004/05, III. kategória, I. forduló)

*Megoldás*

Ha az  $1 < x \leq y \leq z$  egész számokra

$$(1) \quad \sigma(x) - x + \sigma(y) - y = z$$

$$(2) \quad \sigma(y) - y + \sigma(z) - z = x \quad ,$$

$$(3) \quad \sigma(z) - z + \sigma(x) - x = y$$

akkor a három egyenletet összeadva, rendezve és (1)-be helyettesítve a  $2\sigma(z) = x + y + z$  összefüggés adódik. A feltétel szerint  $z$  páros, legyen  $z = 2s$ , ahol  $s \in \mathbb{Z}^+$ . Ha  $s > 2$ , akkor  $\sigma(z) \geq 1 + 2 + s + 2s$ , azaz  $x + y \geq 2z + 6$ . Ez az egyenlőtlenség azonban csak úgy állhat fenn, hogy  $x$  és  $y$  közül legalább az egyik változó értéke minimum  $z + 3$ , ami ellentmond annak, hogy  $z$  a számhármast egyik legnagyobb tagja. Tehát  $s = 1$  vagy  $s = 2$ . Ha  $s = 1$ , akkor  $z = 2$ , amiből  $x = y = 2$ . Abban az esetben, ha  $s = 2$ , azaz  $z = 4$ , nem létezik alkalmas  $x$  és  $y$ . Tehát egyetlen a feltételeknek eleget tevő barátságos számhármast van, az  $(x; y; z) = (2; 2; 2)$ .

## 2.2.4. Az Euler-féle $\varphi$ -függvény

### 2.2.24. Feladat

Egy KöMaL-feladat 1894-ből, amelyet a nyelvezete miatt mindenképp érdemes megmutatni a tanulóknak:

**Határoztassék meg  $x$  azon feltételből, hogy az  $5^x$  alakú egész számot 7812500 szám előzi meg, melyeknek  $5^x$ -nel közös osztójuk nincs.**

Megoldás

Azoknak az  $5^x$ -nél kisebb pozitív egészeknek a száma, amelyeknek az  $5^x$ -nel nincsen (1-nél nagyobb) közös osztójuk:  $\varphi(5^x) = 4 \cdot 5^{x-1}$  ( $x \geq 1$ ). A  $4 \cdot 5^{x-1} = 7812500$  egyenlet megoldása  $x = 10$ .

### 2.2.25. Feladat

Egy másik KöMaL-feladat 1934-ből Erdős Páltól:

**989.** Jelentsen  $n$  páratlan számot. Mutassuk meg, hogy ahány  $n$ -hez relatív prím szám van az  $n$ -nél kisebb számok között, ugyanannyi  $2n$ -hez relatív prím szám van a  $2n$ -nél kisebbek között. *Erdős Pál.*

Megoldás

Átfogalmazva az állítást, azt kell igazolni, hogy ha  $n$  páratlan, akkor  $\varphi(n) = \varphi(2n)$ . Ez a multiplikativitásból azonnal következik. A lapban közölt megoldás:

**Megoldás.** Legyen  $x$  egy  $n$ -nél kisebb szám, mely  $n$ -hez relatív prím:  $(x, n) \sim 1$ . Ha  $x$  páratlan szám, akkor egyszerűsítve  $(x, 2n) \sim 1$ ; de ha  $x$  páros, akkor  $(x, 2n) \sim 2$ . Azonban most  $x + n$  páratlan és  $(x + n, 2n) \sim 1$ ; tehát vagy  $x$  vagy  $x + n$  a  $2n$ -hez relatív prím.

Ezekkel azonban kimerítettük a  $2n$ -hez relatív prím számokat; mert ha  $y$  az  $n$ -hez nem relatív prím, akkor sem  $y$ , sem  $y + n$  nem relatív prím a  $2n$ -hez.

Megfordítva: ha  $(z, 2n) \sim 1$ , akkor  $z$  páratlan és  $(z, n) \sim 1$ . Két eset lehetséges:  $z < n$  vagy  $n < z < 2n$ . Utóbbi esetben  $z - n$  az  $n$ -nél kisebb páros szám, úgy hogy  $(z - n, n) \sim 1$ .

*Pulay Miklós (Bencés g. VII. o. Kőszeg).*

**Megoldották:** Buresch R., Csauádi Gy., Deutsch E., Erdő J., Fenyő I., Holló Ágnes, Kádár Gy. és Preezmayer K., Semadam K., Szele T., Személyi K.  $n$  törzsszám esetére megoldották: Gyopár L., Scheffer K., Villani F.

Az Euler-főle  $\varphi$  függvényvel megoldották: Böhm I., Czégé L., Pohlencz A., Vass T., Welszfeld E.

Egy egyszerűbb, az osztók száma függvényel kombinált feladat:

### 2.2.26. Feladat

Karakterizáljuk az összes olyan  $n$  pozitív egész számot, amelyre  $d(\varphi(n)) = p$ , ahol  $p$  prím.

(*artofproblemsolving.com* nyomán)

### Megoldás

Ha  $p$  prím, akkor a  $d(m) = p$  egyenlet összes megoldása  $m = q^{p-1}$  alakú, ahol  $q$  prím. Ha  $\varphi(n)$  prímszám, akkor csak 2-hatvány lehet, mivel az 1-nél nagyobb  $\varphi$ -értékek párosak. A  $\varphi(n) = 2^k$  (ahol  $k$  pozitív egész) egyenlet pontosan akkor teljesül, ha  $n = 2^\gamma \cdot \prod_i F_i$ , ahol  $\gamma \in \mathbb{N}$  és  $F_i$ -k különböző Fermat-prímek (Fermat-prímnak nevezzük az olyan prímszámot, amely egy 2-hatványnál 1-gyel nagyobb).

Az alábbi problémát a Catalan-sejtést felhasználva oldjuk meg. A Catalan-sejtés szerint két teljes hatvány különbsége egyetlen esetben lehet 1-gyel egyenlő:  $3^2 - 2^3 = 1$  (a sejtés megoldott, további ezzel kapcsolatos részletek a 83. oldalon).

#### 2.2.27. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy a  $\sigma(p^\alpha) \cdot \varphi(p^\alpha) = x^k$  egyenlet (ahol  $p$  prím,  $\alpha$ ,  $x$  és  $k > 1$  pozitív egészek) egyetlen megoldása  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $x = 2$ ,  $k = 3$ .

(Rakamazi Richárd ötlete nyomán)

### Megoldás

Ha az egyenletet  $(p^{\alpha+1} - 1)p^{\alpha-1} = x^k$  alakra hozzuk, a bal oldalon szereplő két tényező relatív prím, emiatt a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy mindkét tényező külön-külön is  $k$ -dik hatvány legyen. Ha  $p^{\alpha+1} - 1 = y^k$  és  $p^{\alpha-1} = z^k$  valamilyen  $y, z$  egészekre, akkor ebből a  $p^{\alpha+1} - y^k = 1$  egyenlet adódik, ahol  $\alpha + 1 > 1$  és  $k > 1$ . Ennek a Catalan-sejtés miatt csak a  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $y = 2$ ,  $k = 3$  a megoldása, ebből következően  $z = 1$ , így  $x = yz = 2$ .

### Megjegyzés

A feladat egy részét a Catalan-sejtésre történő hivatkozás nélkül is meg tudjuk oldani. Azt például, hogy a szorzat csak  $p = 3$ ,  $\alpha = 1$  esetén lehet 2-hatvány, könnyen igazolhatjuk. Ez csak akkor teljesülhet, ha mindkét tényező 2-hatvány, de mivel  $\varphi(p^\alpha)$  pontosan akkor 2-hatvány  $\alpha > 1$  esetén, ha  $p = 2$ ,  $\alpha = 1$  esetén pedig akkor, ha  $p$  Fermat-prím, és  $\sigma(p^\alpha)$  ezen esetek közül csak  $p^\alpha = 3$  mellett lesz 2-hatvány, így az egyenletnek  $x = 2$  esetén nincs más

megoldása. Ha létezik  $x > 2$  megoldás, akkor az a  $\varphi$ -függvény értékészlete miatt persze csak páros lehet. Ettől függetlenül megemlíthetjük a tanulóknak, hogy míg a  $\sigma(n) = 2^m$  egyenlet összes megoldását tudjuk karakterizálni, az is ismert, hogy nincs olyan  $m > 1$  egész, amelyre a  $\sigma(n) = 3^m$  egyenlet megoldható lenne <sup>14</sup>.

A következő feladatban az Euler-Fermat-tételt alkalmazzuk:

### 2.2.28. Feladat

Határozzuk meg az összes olyan  $n$  pozitív egész számot, amelyre  $1^{\varphi(n)} + 2^{\varphi(n)} + \dots + n^{\varphi(n)}$  és  $n$  relatív prím.

(*Balkan Mathematical Olympiad Shortlisted Problems, 2016*)

### Megoldás

Az első 14 pozitív egészre megvizsgálva az állítást, azt tapasztaljuk, hogy ha  $n$  négyzetmentes, akkor az összeg relatív prím  $n$ -hez, máskor viszont nem. Megmutatjuk, hogy általában is így van, tehát  $n$  és  $1^{\varphi(n)} + 2^{\varphi(n)} + \dots + n^{\varphi(n)}$  akkor és csak akkor relatív prímek, ha  $n = \prod_i p_i$ , ahol  $p_i$ -k különböző prímekek (megengedve az üres szorzatot is,  $n = 1$  megoldása a feladatnak).

Először az elégségességet vizsgáljuk: ha  $n > 1$  és  $n = \prod_i p_i$ , akkor  $\varphi(n) = \prod_i (p_i - 1)$ .

Megmutatjuk, hogy az  $n$  kanonikus alakjában szereplő  $p_i$  prímekek egyike sem osztója az  $1^{\varphi(n)} + 2^{\varphi(n)} + \dots + n^{\varphi(n)}$  összegnek, amiből következik, hogy az  $n$ -hez relatív prím. Tegyük fel indirekt, hogy  $n = \prod_i p_i$  és az  $n$  valamely  $p$  prímosztójára  $1^{\varphi(n)} + 2^{\varphi(n)} + \dots + n^{\varphi(n)} \equiv 0 \pmod{p}$ .

Azok a tagok az összegben, amelyek alapja  $p$ -nek többszöröse, 0-val kongruensek mod  $p$ . Azok a tagok pedig, amelyeknek alapja nem többszöröse  $p$ -nek, azaz amelyeknek alapja  $p$ -hez relatív prím, 1 maradékot adnak  $p$ -vel osztva. Ugyanis az Euler-Fermat-tétel szerint, ha  $(a, p) = 1$ , akkor  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , ebből és  $p-1 \mid \varphi(n)$ -ből következően ezek a tagok valóban 1-gyel kongruensek mod  $p$ . A 0 maradékot adó tagokból  $\frac{n}{p}$  darab van, az 1 maradékot adó

---

<sup>14</sup>[7], 664.o., illetve [20], 176.o.

tagok darabszáma  $(p-1)\frac{n}{p}$ , így az összeg  $(-1)\frac{n}{p}$ -vel kongruens mod  $p$ , ami nem lehet nulla, hiszen  $p \nmid \frac{n}{p}$ .

A szükségesség igazolásához tegyük fel, hogy létezik olyan  $q$  prím, amelyre  $q^2 \mid n$ , megmutatjuk, hogy ekkor  $1^{\varphi(n)} + 2^{\varphi(n)} + \dots + n^{\varphi(n)} \equiv 0 \pmod{q}$ , tehát az összeg nem lehet  $n$ -hez relatív prím. Ha  $q^2 \mid n$ , akkor  $\varphi(q^2) \mid \varphi(n)$ , azaz  $q(q-1) \mid \varphi(n)$ . Az előzőekben megfogalmazottak szerint a mod  $q$  0-val kongruens tagok száma  $\frac{n}{q}$ , az 1-gyel kongruens tagok darabszáma  $n - \frac{n}{q}$ , ami  $q^2 \mid n$  miatt  $q$ -nak többszöröse. Ha az 1 maradékot adó tagok darabszáma  $q$ -nak többszöröse, akkor ezek összege osztható  $q$ -val. Így  $1^{\varphi(n)} + 2^{\varphi(n)} + \dots + n^{\varphi(n)}$  nem lehet relatív prím  $n$ -hez.

Az alábbi feladatban a 2.2.13. Feladatban alkalmazott becslésekhez hasonlót kell használni:

### 2.2.29. Feladat

Adjuk meg az összes olyan  $n$  pozitív egész számot, amelyre  $\varphi(n) = d(n)$ .

(artofproblemsolving.com)

### Megoldás

Azt mutatjuk meg, hogy néhány kivételtől eltekintve  $\varphi(n) > d(n)$ . Legyen  $g(n) = \frac{\varphi(n)}{d(n)}$ . A definícióból következik, hogy  $g(n)$  multiplikatív (így  $g(1) = 1$ , azaz  $n = 1$  megoldása a feladatnak), tehát elég a prímszámokra megvizsgálni  $g(n)$  értékeit.

(i)  $g(2^\alpha) > 1$ , ha  $\alpha \geq 4$  egész,  $g(8) = 1$ ,  $g(4) = \frac{2}{3}$  és  $g(2) = \frac{1}{2}$ .

(ii)  $g(3^\beta) > 2$ , ha  $\beta \geq 3$  egész,  $g(9) = 2$  és  $g(3) = 1$ .

(iii) Ha  $q \geq 5$  prím, akkor  $g(q^\gamma) > 2$ , ha  $\gamma \geq 2$  egész vagy  $q > 5$  és  $g(5) = 2$ .

A szigorú egyenlőtlenségek lényegében azonosak a 2.2.13. Feladat megoldásában levezetett (i)-(iii) egyenlőtlenségekkel, de a könnyebb áttekinthetőség kedvéért újra elvégezzük a

bizonyítást a binomiális tétel segítségével:

$$(i) 2^{\alpha-1} = (1+1)^{\alpha-1} > 1 + (\alpha-1) + 1 = \alpha + 1, \text{ ha } \alpha \geq 4 \text{ egész.}$$

$$(ii) 2 \cdot 3^{\beta-1} = 2 \cdot (1+2)^{\beta-1} \geq 2 \cdot (1 + (\beta-1) \cdot 2) = 4\beta - 2 > 2(\beta+1), \text{ ha } \beta \geq 3 \text{ egész.}$$

$$(iii) (q-1)q^{\gamma-1} \geq (q-1)(1 + (q-1)(\gamma-1)) \geq 16\gamma - 12 \geq 2(\gamma+1), \text{ és egyenlőség csak } q=5 \text{ és } \gamma=1 \text{ esetén teljesül.}$$

Nézzük ezek alapján a  $\varphi(n) = d(n)$ , azaz a  $g(n) = 1$  egyenlet általános megoldásait. Az összes  $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$  alakú megoldás, amelyben  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ , (i) és (ii), valamint  $g(n)$  multiplikativitása alapján  $n = 3, 8, 18$  és  $24$ . Legyen most  $n$  olyan megoldás, amelynek van 3-nál nagyobb prímosztója, azaz  $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot \prod_{i=1}^r q_i^{\gamma_i}$ , ahol  $r \geq 1, q_i \geq 5$ . Ekkor

$$g(n) = g(2^\alpha) \cdot g(3^\beta) \cdot \prod_{i=1}^r g(q_i^{\gamma_i}) \geq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1, \text{ és egyenlőség csak az } \alpha = 1, \beta = 0 \text{ vagy } 1, \text{ és } r = 1, q_1 = 5, \gamma_1 = 1 \text{ esetben teljesül, azaz } n = 2 \cdot 5 = 10 \text{ és } 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

Tehát az egyenlet összes megoldása:  $n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 8, n_4 = 10, n_5 = 18, n_6 = 24$  és  $n_7 = 30$ .

## 3. fejezet

# A különböző maradékosztályokba tartozó osztók eloszlásának összehasonlítása

Ebben a fejezetben megvizsgáljuk, hogy mit tudunk mondani egy szám különböző maradékosztályokba tartozó osztóiról.

### 3.1. Páros és páratlan osztók

A legegyszerűbb eset, ha egy szám páros és páratlan osztóit nézzük. Nyilván feltehetjük, hogy maga a szám páros, így legyen  $n = 2^\gamma \cdot s$ , ahol  $(s, 2) = 1$  és  $\gamma \in \mathbb{Z}^+$ .

Először a páros és páratlan osztók darabszámával foglalkozunk. A páros osztók darabszáma:  $d\left(\frac{n}{2}\right) = \gamma \cdot d(s)$ , hiszen minden páros osztó egyértelműen előáll  $2d$  alakban, ahol  $d \mid \frac{n}{2}$ . A páratlan osztók darabszáma  $d(s)$ , hiszen  $d^* \mid n \Leftrightarrow d^* \mid s$ , ha  $d^* \equiv 1 \pmod{2}$ . Tehát a páros és a páratlan osztók darabszámának hányadosa:

$$\frac{\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 \pmod{2}}} 1}{\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 1 \pmod{2}}} 1} = \gamma.$$

Ez a hányados tetszőleges pozitív egész értéket felvehet, és azt is látjuk, hogy bármelyik értéket végtelen sok helyen felveszi (hiszen  $s$  prímosztóit és azok kitevőit tetszőlegesen megválaszthatjuk).

Az előbbiekből az is következik, hogy a páros és páratlan osztók darabszámának különbsége:

$$\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 \pmod{2}}} 1 - \sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 1 \pmod{2}}} 1 = (\gamma - 1) \cdot d(s).$$

A különbség csak abban az esetben egyenlő 1-gyel, ha  $\gamma = 2$  és  $s = 1$ , azaz  $n = 4$ . A páros és páratlan osztók darabszáma akkor és csak akkor egyenlő, tehát különbségük nulla, ha  $2 \mid n$ , és  $4 \nmid n$ , ami az osztók osztópárokba csoportosításából is könnyen adódik: ha  $2 \mid n$ , és  $4 \nmid n$ , akkor bármely osztópárban az egyik tag páros, a másik páratlan ( $4 \nmid n$ -ből következik, hogy  $n$  nem lehet négyzetszám), és fordítva.

Ez a különbség bármilyen nemnegatív egész értéket felvehet, és a képletből az is következik, hogy az 1 kivételével mindegyiket végtelen sokszor veszi fel.

Most áttérünk a páros és a páratlan osztók összegének vizsgálatára. A kanonikus alakból a páros osztók összege:  $(2 + 2^2 + \dots + 2^\gamma) \cdot \sigma(s) = (2^{\gamma+1} - 2) \cdot \sigma(s)$ , míg a páratlan osztóké  $\sigma(s)$ , tehát a páros és a páratlan osztók összegének hányadosa:

$$\frac{\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 (2)}} x}{\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 1 (2)}} x} = 2^{\gamma+1} - 2.$$

Láthatjuk, hogy ez a hányados minden felvett értéket végtelen sokszor felvesz, és csak azokat az értékeket veszi fel, amik egy kettőhatványnál kettővel kisebbek. Ebből például az is következik, hogy egy szám páros és páratlan osztóinak összege mindig különböző (hiszen ezek hányadosa egytől különböző).

A páros és a páratlan osztók különbségére a fenti képletek használatával kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 (2)}} x - \sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 1 (2)}} x = (2^{\gamma+1} - 3) \cdot \sigma(s).$$

A különbség csak akkor egyenlő 1-gyel, ha  $\gamma = 1$  és  $s = 1$ , azaz  $n = 2$ , egyébként nagyobb 1-nél. Az, hogy egy 1-nél nagyobb értéket hányszor kaphatunk meg eredményként, már változatosabb képet mutat. Az persze a kapott eredményből következik, hogy minden érték csak véges sok különböző helyen állhat elő, de például az 5 pontosan egyszer fordul elő az értékészletben, akkor ha  $5 = 5 \cdot 1$ , azaz  $n = 2^2$  (valóban: ha  $n = 4$ , akkor a páros és páratlan osztók összegének különbsége:  $2 + 4 - 1 = 5$ ), míg például a 13-at pontosan

két helyen kapjuk:  $13 = 13 \cdot 1 \Leftrightarrow n = 2^3$  (a különbség  $2 + 4 + 8 - 1 = 13$ ), illetve  $13 = 1 \cdot 13 \Leftrightarrow n = 2^1 \cdot 3^2$  (a különbség  $2 + 6 + 18 - 1 - 3 - 9 = 13$ ).

Harmadik kérdésünk a páros és páratlan osztók reciprokösszegének vizsgálata. Nézzünk először egy konkrét példát, írjuk fel  $n = 60$ -ra a reciprokösszegek hányadosát:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{60}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}} = \frac{\frac{30+15+10+6+5+3+2+1}{60}}{\frac{15+5+3+1}{15}} = \frac{\frac{\sigma(30)}{60}}{\frac{\sigma(15)}{15}} = \frac{3}{4}$$

Ebből a számolásból kiindulva vizsgáljuk az általános esetet. Legyen  $n = 2^\gamma \cdot s$ , ahol  $s$  páratlan és  $\gamma \in \mathbb{Z}^+$ . Tekintsük először a számlálóban a páros osztók reciprokösszegét. Mivel  $n$  páros, az összegben szerepel tagként az  $\frac{1}{n}$ , így a számlálóban a közös nevező  $n$ . Egy páros osztó  $n$ -re nézve vett komplementer osztója  $2^\nu \cdot s^*$  alakú, ahol  $s^* \mid s$  és  $0 \leq \nu < \gamma$  egész. Tehát a közös nevezőre hozás után az összes ilyen alakú osztót kell összeadnunk, ez az összeg éppen  $\sigma\left(\frac{n}{2}\right)$ . A nevezőre áttérve a páratlan osztók reciprokösszegében szerepelni fog tagként az  $\frac{1}{s}$ , így a nevezőben a közös nevező  $s$ . A közös nevezőre hozás után a páratlan osztók  $s$ -re nézve vett komplementer osztóit kell összeadnunk, ez az összeg  $\sigma(s)$ -sel egyenlő.

Tehát a példa általánosításaként azt kapjuk, hogy a páros és páratlan osztók reciprokösszegének aránya:

$$\frac{\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 \pmod{2}}} \frac{1}{x}}{\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 1 \pmod{2}}} \frac{1}{x}} = \frac{\frac{\sigma\left(\frac{n}{2}\right)}{n}}{\frac{\sigma(s)}{s}} = \frac{(2^\gamma - 1) \cdot \sigma(s)}{\sigma(s)} \cdot \frac{s}{n} = \frac{2^\gamma - 1}{2^\gamma}.$$

Ugyanígy kapjuk a különbségre:

$$\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 \pmod{2}}} \frac{1}{x} - \sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 1 \pmod{2}}} \frac{1}{x} = \frac{\sigma\left(\frac{n}{2}\right)}{n} - \frac{\sigma(s)}{s} = \frac{(2^\gamma - 1) \cdot \sigma(s) - 2^\gamma \cdot \sigma(s)}{2^\gamma \cdot s} = \frac{-\sigma(s)}{2^\gamma \cdot s} = -\frac{\sigma(s)}{n}.$$

### 3.2. Közvetlen általánosítások

A páros és páratlan osztók eloszlásának vizsgálata után természetes módon merül fel a kérdés, hogy általánosíthatóak-e ezek a megfigyelések más modulusokra is, és ha igen, hogyan. Tetszőleges prím modulusra könnyen általánosíthatóak a megvizsgált problémák: bármely  $p$  prím modulusra a  $p$ -vel osztható és a  $p$ -vel nem osztható osztókat vizsgálva igazolhatóak az alábbi állítások a  $p = 2$  eset mintájára. Legyen  $n = p^\gamma \cdot s$ , ahol  $(p, s) = 1$ ,  $p$  prím és  $\gamma \in \mathbb{Z}^+$ .

Mivel  $\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 (p)}} 1 = \gamma \cdot d(s)$  és  $\sum_{\substack{x|n \\ x \not\equiv 0 (p)}} 1 = d(s)$ , a darabszámokra a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\frac{\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 (p)}} 1}{\sum_{\substack{x|n \\ x \not\equiv 0 (p)}} 1} = \gamma,$$

valamint

$$\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 (p)}} 1 - \sum_{\substack{x|n \\ x \not\equiv 0 (p)}} 1 = (\gamma - 1) \cdot d(s).$$

Mivel  $\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 (p)}} x = (p + p^2 + \dots + p^\gamma) \cdot \sigma(s) = \frac{p^{\gamma+1} - p}{p - 1} \cdot \sigma(s)$  és  $\sum_{\substack{x|n \\ x \not\equiv 0 (p)}} x = \sigma(s)$ , az osztók összegére vonatkozó formulák:

$$\frac{\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 (p)}} x}{\sum_{\substack{x|n \\ x \not\equiv 0 (p)}} x} = \frac{p^{\gamma+1} - p}{p - 1},$$

valamint

$$\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 (p)}} x - \sum_{\substack{x|n \\ x \not\equiv 0 (p)}} x = \frac{p^{\gamma+1} - 2p + 1}{p - 1} \cdot \sigma(s).$$

És végül mivel  $\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 \pmod{p}}} \frac{1}{x} = \frac{\sigma\left(\frac{n}{p}\right)}{n} = \frac{p^\gamma - 1}{p - 1} \cdot \frac{\sigma(s)}{n}$  és  $\sum_{\substack{x|n \\ x \not\equiv 0 \pmod{p}}} \frac{1}{x} = \frac{\sigma(s)}{s}$ , az osztók reciprokössze-  
gére vonatkozó képletek:

$$\frac{\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 \pmod{p}}} \frac{1}{x}}{\sum_{\substack{x|n \\ x \not\equiv 0 \pmod{p}}} \frac{1}{x}} = \frac{p^\gamma - 1}{(p - 1)p^\gamma},$$

valamint

$$\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 0 \pmod{p}}} \frac{1}{x} - \sum_{\substack{x|n \\ x \not\equiv 0 \pmod{p}}} \frac{1}{x} = \frac{2p^\gamma - p^{\gamma+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{\sigma(s)}{n}.$$

Összetett modulusra már nem látszanak az előzőekhez hasonló esztétikus összefüggések. Vizsgáljuk meg a kérdést például mod 6, legyen  $n$  kanonikus alakja  $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot s$ , ahol  $(s, 6) = 1$  és  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ . Ekkor a hattal osztható osztók száma:  $d\left(\frac{n}{6}\right) = \alpha\beta \cdot d(s)$ , hiszen minden hattal osztható osztó egyértelműen előáll  $6 \cdot d$  alakban, ahol  $d \mid \frac{n}{6}$ , a hattal nem osztható osztók száma a komplementermódszerrel („jó = összes - rossz”):  $d(n) - d\left(\frac{n}{6}\right) = (\alpha + 1)(\beta + 1) \cdot d(s) - \alpha\beta \cdot d(s) = (\alpha + \beta + 1) \cdot d(s)$ . A hattal osztható osztók összegére a  $6 \cdot \sigma\left(\frac{n}{6}\right)$ , a hattal nem oszthatókéra a  $\sigma(n) - 6 \cdot \sigma\left(\frac{n}{6}\right)$  összefüggés adódik. Ezek a megfontolások természetesen a 6 helyett bármilyen összetett modulusra alkalmazhatóak, de ezeknek az  $n$  kanonikus alakja alapján felírt explicit formája kevésbé jól használható.

### 3.3. Osztók a $\pm 1$ maradékosztályokban

A felvetett kérdések egy másik általánosítási lehetőségét adja, ha nem valamely modulus szerinti nulla és nemnulla maradékosztályokba eső osztók eloszlását vizsgáljuk, hanem a nemnulla maradékosztályokba esők közül bizonyosakat. A következőkben mod 3 fogjuk vizsgálni az  $(1)_3$  és a  $(-1)_3$  maradékosztályba tartozó osztók eloszlását (amik ebben az esetben az összes nemnulla maradékosztály). Megemlítjük, hogy már mod 5 ugyanez a vizsgálat számtalan nehézségbe ütközik, mert míg mod 3 két osztó szorzata csak egyféleképpen adhat  $-1$  maradékot, addig mod 5 ez többféleképpen adódhat, hiszen ekkor a triviális  $(-1) \cdot 1 \equiv -1 \pmod{5}$  kongruencián kívül  $2 \cdot 2 \equiv -1 \pmod{5}$  és  $3 \cdot 3 \equiv -1 \pmod{5}$  is fennáll. Néhány kapcsolatot a nemnulla maradékosztályokba eső osztók között 3-nál nagyobb modulusra is meg tudunk állapítani, például a 3.5. pont végén a mod 4 nemnulla maradékosztályokra adódó összefüggést.

A továbbiakban tehát

$$\text{az } R_f(n) = \frac{\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} f(x)}{\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} f(x)} \text{ hányadost és a } D_f(n) = \sum_{\substack{x|n \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} f(x) - \sum_{\substack{x|n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} f(x) \text{ különbséget}$$

vizsgáljuk, ahol  $f$  az  $f(x) = 1$ , az  $f(x) = x$ , vagy az  $f(x) = \frac{1}{x}$  függvény valamelyike.

Ezek a problémák elemi úton tárgyalhatóak, a problémafelvetés maga is középiskolai környezetben természetesen adódó kérdés, és a megoldás sem igényel felsőbb matematikai ismereteket.

Legyen  $n = 3^\gamma \cdot \underbrace{\prod_i q_i^{\alpha_i}}_A \cdot \underbrace{\prod_j p_j^{\beta_j}}_B$ , ahol  $q_i \equiv -1 \pmod{3}$ ,  $p_j \equiv 1 \pmod{3}$  prímelek, és  $\alpha_i, \beta_j, \gamma \in \mathbb{N}$ . Ekkor

$n$  bármelyik nemnulla maradékosztályba tartozó osztója az  $AB$  szorzat osztója, tehát:

$$\forall x \equiv \pm 1 \pmod{3}, x | n \Leftrightarrow x | AB.$$

Ebből az következik, hogy az  $R_f(n)$  hányadost és a  $D_f(n)$  különbséget elégséges a hárommal nem osztható pozitív egészekre megvizsgálni, tehát legyen  $n$  kanonikus alakja:

$$n = \underbrace{\prod_i q_i^{\alpha_i}}_A \cdot \underbrace{\prod_j p_j^{\beta_j}}_B, \text{ ahol } q_i \equiv -1 \pmod{3}, p_j \equiv 1 \pmod{3} \text{ prímek, és } \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}.$$

A hányados és a különbség egy fontos tulajdonságát igazoljuk:

### 3.3.1. Lemma

Legyen  $f$  multiplikatív függvény, azaz  $f(ab) = f(a)f(b)$  minden olyan  $a, b$  pozitív egészre, amelyre  $(a, b) = 1$ . Ha  $n = \prod_i q_i^{\alpha_i} \cdot \prod_j p_j^{\beta_j}$ , ahol  $q_i \equiv -1 \pmod{3}$ ,  $p_j \equiv 1 \pmod{3}$  prímek, és

$$\underbrace{\quad}_A \quad \underbrace{\quad}_B$$

$\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ , akkor

$$R_f(n) = \frac{\sum_{\substack{x|A \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} f(x)}{\sum_{\substack{x|A \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} f(x)} \quad \text{és} \quad D_f(n) = \left( \sum_{x|B} f(x) \right) \cdot \left( \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} f(x) - \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} f(x) \right).$$

### Bizonyítás

Az összes hárommal osztva  $-1$  maradékot adó osztó előáll  $x \cdot y$  alakban, ahol  $x | A$ ,  $x \equiv -1 \pmod{3}$  és  $y | B$ . Az  $(1)_3$  maradékosztályba tartozó osztók pedig  $x \cdot y$  alakúak, ahol  $x | A$ ,  $x \equiv 1 \pmod{3}$ , valamint  $y | B$ . Tekintve, hogy  $A$  minden  $x$  osztója relatív prím  $B$  bármely  $y$  osztójához, és  $f$  multiplikatív, így  $f(xy) = f(x)f(y)$  bármilyen  $x | A$ ,  $y | B$  számpárra. Ezeket figyelembe véve a  $\sum_{\substack{z|n \\ z \equiv -1 \pmod{3}}} f(z)$  összeget kibontjuk:

$$\sum_{\substack{z|n \\ z \equiv -1 \pmod{3}}} f(z) = \sum_{y|B} \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} f(xy) = \sum_{y|B} f(y) \cdot \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} f(x), \text{ valamint}$$

$$\sum_{\substack{z|n \\ z \equiv 1 \pmod{3}}} f(z) = \sum_{y|B} \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} f(xy) = \sum_{y|B} f(y) \cdot \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} f(x).$$

A hányadosra kapott képletet egyszerűsítés, a különbségre kapott összefüggést egy kiemelés után kapjuk. ■

Használni fogjuk az alábbi ekvivalens átfogalmazásokat:

### 3.3.2. Lemma

Ha  $f$  pozitív értékű függvény, azaz  $f(x) > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f$ -re, akkor

$$R_f(n) = 1 \Leftrightarrow D_f(n) = 0, R_f(n) > 1 \Leftrightarrow D_f(n) < 0, \text{ és } R_f(n) < 1 \Leftrightarrow D_f(n) > 0.$$

*Bizonyítás*

Ez a 3.3.1 Lemmából és a pozitivitásból következik. ■

### 3.3.1. A különböző maradékosztályokba tartozó osztók számának összehasonlítása

Először tehát a  $d \equiv \pm 1 \pmod{3}$  osztók darabszámának eloszlását vizsgáljuk. Mivel ehhez az  $f(x) = 1$  választásával jutunk, így a hányadost és a különbséget rendre  $R_1(n)$ -nel és  $D_1(n)$ -nel fogjuk jelölni. Ahhoz, hogy ezeket vizsgálni tudjuk, először belátjuk a következő állítást:

### 3.3.3. Lemma

Ha  $n = \prod_i q_i^{\alpha_i}$ , ahol  $q_i \equiv -1 \pmod{3}$  prímelek és  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ , akkor

$$D_1(n) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow n \text{ nem négyzetszám;} \\ 1 & \Leftrightarrow n \text{ négyzetszám.} \end{cases}$$

*Bizonyítás*

Először azt az esetet vizsgáljuk, ha  $n$  nem négyzetszám. Ekkor létezik legalább egy olyan  $q_j$  prímosztója, amelynek  $\alpha_j$  kitevője páratlan a prímtényezős felbontásban. Az  $n$  osztóit úgy

fogjuk felsorolni, hogy párokba rendezzük azokat  $q_j$  hatványai szerint: a pár egyik tagja az  $(1)_3$  maradékosztályba, a másik a  $(-1)_3$  tartozzon. Az alábbi listát készítjük el:

$$\begin{array}{cc} \equiv 1 (3) & \equiv -1 (3) \\ 1 & q_j \\ q_j^2 & q_j^3 \\ \vdots & \vdots \\ q_j^{\alpha_j-1} & q_j^{\alpha_j} \end{array}$$

Ha  $n$  prímtényező felbontásában szerepel egy  $q_j$ -től különböző  $q_m$  prím, akkor a további osztókat szintén a fenti szabály szerint soroljuk a két maradékosztályba, azaz az előző táblázat minden elemét megszorozzuk  $q_m$  hatványaival:

$$\begin{array}{cccccc} \equiv 1 (3) & \equiv -1 (3) & \equiv 1 (3) & \equiv -1 (3) & \equiv 1 (3) & \equiv -1 (3) \\ 1 & q_j & q_m q_j & q_m & q_m^2 & q_m^2 q_j \\ q_j^2 & q_j^3 & q_m q_j^3 & q_m q_j^2 & q_m^2 q_j^2 & q_m^2 q_j^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \dots \\ \underbrace{q_j^{\alpha_j-1}} & \underbrace{q_j^{\alpha_j}} & \underbrace{q_m q_j^{\alpha_j}} & \underbrace{q_m q_j^{\alpha_j-1}} & \underbrace{q_m^2 q_j^{\alpha_j-1}} & \underbrace{q_m^2 q_j^{\alpha_j}} \end{array}$$

Láthatjuk, hogy a  $q_m$  prím  $\alpha_m$  hatványkitevője a táblázat bizonyos tulajdonságát nem befolyásolja:  $\alpha_m$  nagyságától és annak paritásától függetlenül a táblázat  $q_m$ -mel való bővítésekor mindkét maradékosztályban a felsorolt osztók darabszáma egyenlő marad. Ezt az eljárást egészen addig folytatjuk, amíg  $n$ -nek van a korábbiaktól különböző  $q_i$  prímosztója. Látható, hogy az eljárás kiterjesztése tehát nem eredményezheti azt, hogy az eredetileg a két maradékosztályba tartozó osztók darabszámának egyenlősége megváltozna, következésképpen

$D_1 \left( \prod_i q_i^{\alpha_i} \right) = 0$  teljesül, ha  $n$  nem négyzetszám. A gondolatmenetből következik, hogy

ez nem csak elégséges, de szükséges feltétele is annak, hogy a  $D_1 \left( \prod_i q_i^{\alpha_i} \right) = 0$  egyenlőség fennálljon.

Most rátérünk arra az esetre, ha  $n$  négyzetszám. Ekkor is az előzőekhez hasonlóan gondolkodva készítjük el a táblázatot. Ha  $n = k^2$ , ahol  $k \in \mathbb{Z}^+$ , akkor  $n$  kanonikus alakjában

minden  $\alpha_i$  kitevő páros, tehát a táblázatunk ilyen alakot ölt (ha  $n$ -nek legalább két különböző prímosztója van):

$$\begin{array}{cccccc}
 \equiv 1 \pmod{3} & \equiv -1 \pmod{3} & \equiv 1 \pmod{3} & \equiv -1 \pmod{3} & \equiv 1 \pmod{3} & \equiv -1 \pmod{3} \\
 1 & q_1 & q_2 q_1 & q_2 & q_2^2 & q_2^2 q_1 \\
 q_1^2 & q_1^3 & q_2 q_1^3 & q_2 q_1^2 & q_2^2 q_1^2 & q_2^2 q_1^3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 q_1^{\alpha_1-2} & q_1^{\alpha_1-1} & q_2 q_1^{\alpha_1-1} & q_2 q_1^{\alpha_1-2} & q_2^2 q_1^{\alpha_1-2} & q_2^2 q_1^{\alpha_1-1} & \dots \dots \\
 q_1^{\alpha_1} & & \underbrace{q_2 q_1^{\alpha_1}} & \underbrace{q_2 q_1^{\alpha_1}} & \underbrace{q_2^2 q_1^{\alpha_1}} & \underbrace{q_2^2 q_1^{\alpha_1}} & 
 \end{array}$$

Tekintsük a táblázat első két oszlopát: az első oszlopban lévő 3-mal osztva 1 maradékot adó osztók száma pontosan 1-gyel több, mint a második oszlopban lévő  $-1$  maradékot adó osztók száma. A további oszlopokból képezzünk négyes csoportokat (ezt megtehetjük, hiszen a prímtényező felbontásban szereplő minden kitevő páros). Ezekben a négyes csoportokban a két maradékosztályba tartozó osztók darabszáma egyenlő. Az  $n$  esetleges további prímosztóival bővítve a táblázatot, minden soron következő négy oszlopban a  $(\pm 1)_3$  maradékosztályokba tartozó osztók száma egyenlő lesz.

Tehát  $D_1 \left( \prod_i q_i^{\alpha_i} \right) = 1$  valóban fennáll, ha  $n$  négyzetszám. A szükségesség a gondolatmenet megfordításából következik. ■

A 3.3.3. Lemma bizonyítása után rátérünk az általános eset vizsgálatára:

### 3.3.4. Tétel

Ha  $n = \underbrace{\prod_i q_i^{\alpha_i}}_A \cdot \underbrace{\prod_j p_j^{\beta_j}}_B$ , ahol  $q_i \equiv -1 \pmod{3}$ ,  $p_j \equiv 1 \pmod{3}$  prímek és  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ , akkor

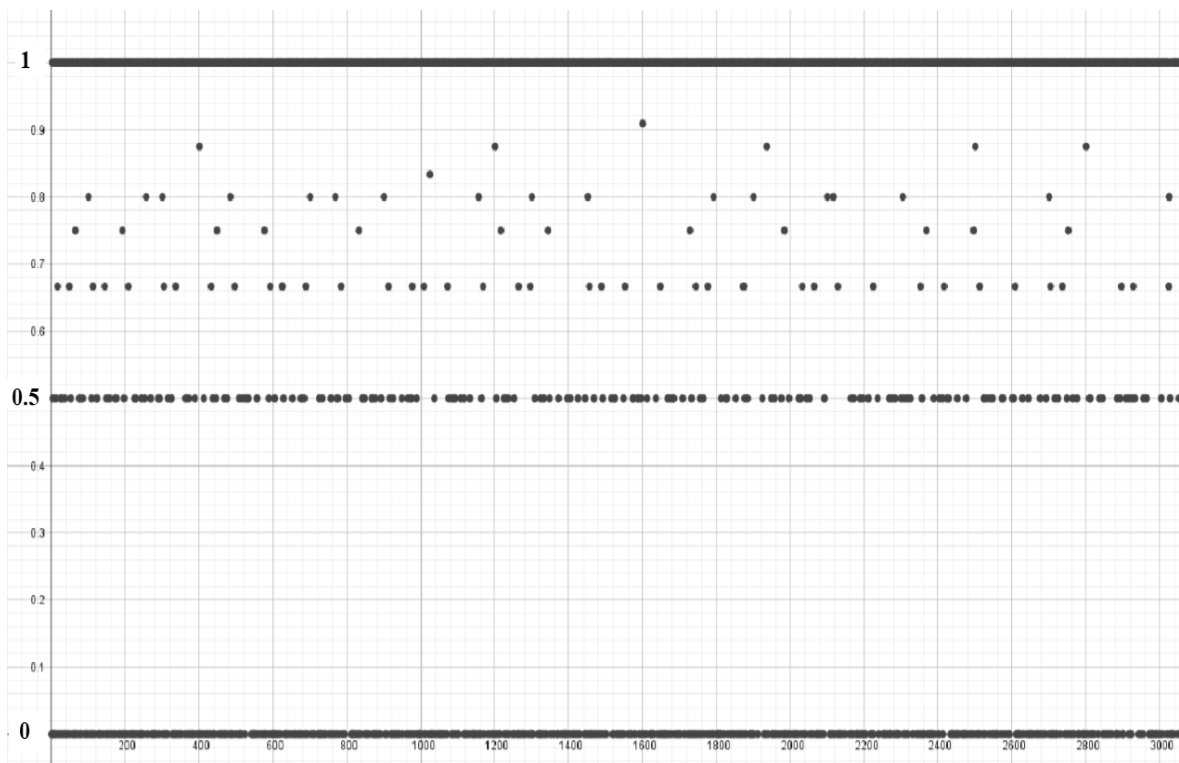
$$D_1(n) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow A \text{ nem négyzetszám} \\ d(B) & \Leftrightarrow A \text{ négyzetszám} \end{cases} .$$

### Bizonyítás

A 3.3.1. és 3.3.3. Lemma alapján  $D_1(n) = d(B) \cdot D_1(A) = d(B) \cdot 0 = 0$ , ha  $A$  nem négyzetszám, és  $D_1(n) = d(B) \cdot 1 = d(B)$ , ha  $A$  négyzetszám. ■

A 3.3.4. Tétel következménye, hogy a  $D_1(n) = k$  egyenletnek bármely  $k \in \mathbb{N}$ -re van megoldása, sőt,  $n$ -ben végtelen sok megoldása van bármely rögzített  $k \in \mathbb{N}$ -ra (hiszen  $A$ -ban és  $B$ -ben is végtelen sok megoldása van).

Most rátérünk az  $R_1(n)$  hányados értékeinek vizsgálatára. Az alábbi grafikon a felvett értékeket mutatja az első háromezer pozitív egészre.



Az  $R_1(n)$  hányados értékei, amint azt láthatjuk, nem lehetnek tetszőlegesek.

### 3.3.5. Tétel

Ha  $n = \underbrace{\prod_i q_i^{\alpha_i}}_A \cdot \underbrace{\prod_j p_j^{\beta_j}}_B$ , ahol  $q_i \equiv -1 \pmod{3}$ ,  $p_j \equiv 1 \pmod{3}$  prímek és  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ , akkor

$$R_1(n) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow A \text{ nem négyzetszám;} \\ \frac{d(A) - 1}{d(A) + 1} & \Leftrightarrow A \text{ négyzetszám.} \end{cases}$$

#### Bizonyítás

A 3.3.1. Lemma miatt az  $R_1(n)$  hányados értéke nem függ az  $n$  kanonikus alakjában szereplő 3-mal osztva 1 maradékot adó  $p_j$  prímek darabszámától, illetve azok hatványkitevőjétől sem. A 3.3.2. Lemma és a 3.3.4. Tétel miatt  $R_1(n) = 1 \Leftrightarrow D_1(n) = 0 \Leftrightarrow A$  nem négyzetszám, ezzel az állítás első felét igazoltuk.

A 3.3.3. Lemma miatt  $\sum_{\substack{x|A \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} 1 - \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} 1 = 1 \Leftrightarrow A$  négyzetszám, másrészt  $A$  összes osztója 3-mal osztva 1 vagy  $-1$  maradékot ad, tehát  $\sum_{\substack{x|A \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} 1 + \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} 1 = d(A)$ . Ebből a két

egyenlőségből azt kapjuk, hogy  $\sum_{\substack{x|A \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} 1 = \frac{d(A) - 1}{2}$  illetve  $\sum_{\substack{x|A \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} 1 = \frac{d(A) + 1}{2}$ , tehát

$R_1(n)$  valóban pontosan akkor írható a fent megadott alakban, ha  $A$  négyzetszám, ezzel a tételt beláttuk. ■

A tételből következik, hogy az  $R_1(n)$  hányados értéke pontosan akkor nulla, ha  $A = 1$ , azaz ha  $n$  kanonikus alakjában nem szerepel 3-mal osztva  $-1$  maradékot adó prím. Ha a felbontásban szerepel  $3k - 1$  alakú prím, akkor az  $\frac{1}{2} \leq R_1(n) \leq 1$  egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Ha ugyanis  $n$  kanonikus alakjában van olyan  $3k - 1$  alakú prím, aminek a kitevője páratlan, akkor  $R_1(n) = 1$ . Ha ilyen  $3k - 1$  alakú prím nem szerepel a prímtenyezős felbontásban, tehát minden 3-mal osztva  $-1$  maradékot adó prím kitevője pozitív páros szám, akkor  $R_1(n) = \frac{d(A) - 1}{d(A) + 1} = 1 - \frac{2}{d(A) + 1}$  alakban írható, ahol  $d(A) > 1$ . Így azt

kapjuk, hogy az ilyen számokra  $\frac{1}{2} \leq R_1(n) < 1$ . Mindebből például az is következik, hogy a hányados értéke pontosan akkor  $\frac{1}{2}$ , ha  $n = q^2 \cdot \prod_j p_j^{\beta_j}$  alakú, ahol  $q \equiv -1 \pmod{3}$ ,  $p_j \equiv 1 \pmod{3}$  prímelek és  $\beta_j \in \mathbb{N}$ .

### 3.3.2. A különböző maradékosztályokba tartozó osztók összegének összehasonlítása

Az  $f(x) = x$  függvényt választva megvizsgáljuk a  $d \equiv \pm 1 \pmod{3}$  osztók összegére vonatkoztatott  $R_{id}(n)$  hányadost és a  $D_{id}(n)$  különbséget.

#### 3.3.6. Lemma

Ha  $n = \prod_i q_i^{\alpha_i} \cdot \prod_j p_j^{\beta_j}$ , ahol  $q_i \equiv -1 \pmod{3}$ ,  $p_j \equiv 1 \pmod{3}$  prímelek és  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ , akkor

$$D_{id}(n) = \prod_j \frac{p_j^{\beta_j+1} - 1}{p_j - 1} \cdot \prod_i \frac{(-q_i)^{\alpha_i+1} - 1}{(-q_i) - 1}.$$

#### Bizonyítás

Legyen az  $n$  egy  $d$  osztója  $d = \prod_i q_i^{\mu_i} \cdot \prod_j p_j^{\nu_j}$ , ahol  $\forall i$ -re  $0 \leq \mu_i \leq \alpha_i$ , és  $\forall j$ -re  $0 \leq \nu_j \leq \beta_j$  egészek.

Ekkor  $d \equiv 1 \pmod{3}$  pontosan akkor teljesül, ha  $\sum_i \mu_i$  páros. Tehát a 3-mal osztva 1 maradékot adó osztók összegét megkapjuk, ha az összes lehetséges módon előállítjuk a  $[0; \sum_i \alpha_i]$  intervallum páros elemeit a  $\mu_i$  kitevők összegeként. A 3-mal osztva  $-1$  maradékot adó osztókra  $\sum_i \mu_i$  páratlan. Tehát  $d \equiv -1 \pmod{3}$  osztót csak úgy kaphatunk, ha páratlan sok  $\mu_i$  kitevőt páratlannak választunk, és ezt az összes lehetséges módon megtesszük, miközben  $\sum_i \mu_i$  befutja az  $[1; \sum_i \alpha_i]$  összes páratlan elemét. Ebből következően a  $D_{id}(n)$  különbséget

fel tudjuk írni az alábbi alakban:

$$D_{id}(n) = \prod_j \left(1 + p_j + p_j^2 + p_j^3 + \dots + p_j^{\beta_j}\right) \cdot \prod_i \left(1 - q_i + q_i^2 - q_i^3 + \dots + (-1)^{\alpha_i} q_i^{\alpha_i}\right).$$

Ebben a különbségben egy tag előjele valóban akkor és csak akkor pozitív, ha  $3k + 1$  alakú osztó, hiszen akkor páratlan kitevőjű  $q_i$  hatványt páros sokszor választottunk, tehát azok  $\mu_i$  kitevőinek összege páros, és egy tag előjele valóban akkor és csak akkor negatív, ha  $3k - 1$  alakú osztó, hiszen akkor páratlan kitevőjű  $q_i$  hatványt páratlan sokszor választottunk, tehát azok  $\mu_i$  kitevőinek összege páratlan. Közben a  $\sum_j \nu_j$  összeg befutja az összes lehetséges értéket a  $[0; \sum_j \beta_j]$  intervallumon. A mértani sorozat összegképletét használva a bizonyítani kívánt állítást kapjuk. ■

A fenti bizonyítást általánosíthatjuk is bármely nemnulla multiplikatív  $f$  függvényre:

$$D_f(n) = \prod_j \left(1 + f(p_j) + \dots + f(p_j^{\beta_j})\right) \cdot \prod_i \left(1 - f(q_i) + f(q_i^2) - f(q_i^3) + \dots + (-1)^{\alpha_i} f(q_i^{\alpha_i})\right).$$

Ezt az  $f(x) = 1$  függvényre alkalmazva, a 3.3.4. Tétel egy új bizonyítását kapjuk. Hiszen ez a szorzat akkor a

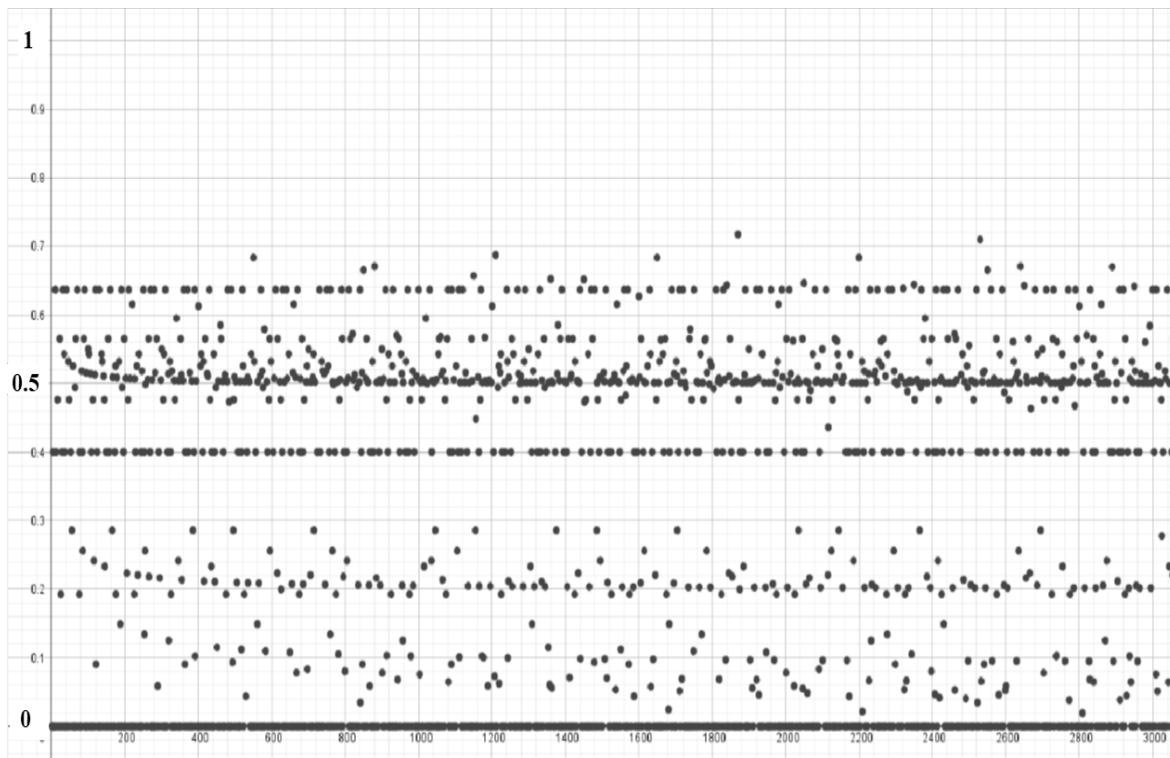
$$D_1(n) = \prod_j \underbrace{(1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1)}_{(\beta_j+1)} \cdot \prod_i (1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{\alpha_i})$$

alakot ölti, ahol  $\prod_i (1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{\alpha_i})$  értéke pontosan akkor 1, ha minden  $\alpha_i$  kitevő páros, minden más esetben nulla. Így  $D_1(n) = \prod_j (\beta_j + 1) = d(B)$ , ha  $A$  négyzetszám, minden más esetben nulla.

Ha  $f$  teljesen multiplikatív függvény, azaz  $f(ab) = f(a)f(b)$  minden  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ -ra, és bármely  $p$  prímre  $f(p) \neq 1$ , akkor az összegképletet használva:

$$D_f(n) = \prod_j \frac{f(p_j)^{\beta_j+1} - 1}{f(p_j) - 1} \cdot \prod_i \frac{(-f(q_i))^{\alpha_i+1} - 1}{(-f(q_i)) - 1}.$$

Az  $R_{id}(n)$  hányados értékkészletét vizsgálva úgy tapasztaljuk, hogy ellentétben az  $R_1(n)$  hányados értékkészletével, a felvett értékek között csak 1-nél nagyobb vagy 1-nél kisebb pozitív értékek szerepelnek, az 1 hiányzik.



### 3.3.7. Tétel

$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad R_{id}(n) \neq 1.$

*Bizonyítás*

Az állítás a 3.3.2. Lemmában megfogalmazott ekvivalens alakját bizonyítjuk:  $R_{id}(n) \neq 1 \Leftrightarrow D_{id}(n) \neq 0$ . A 3.3.6. Lemma szerint  $D_{id}(n)$  szorzat alakban írható, és ez egy olyan szorzat, amelyben bármely tényező számlálója nullától különböző, így  $D_{id}(n) \neq 0$ . ■

Abban a speciális esetben, ha  $n$  prímtényezős felbontásában nem szerepel egyetlen olyan  $3k - 1$  alakú  $q$  prím sem, aminek a négyzete osztója lenne  $n$ -nek, adunk egy másik bizonyí-

tást is arra, hogy  $R_{id}(n)$  nem veheti fel az 1-et. Legyen  $n$  kanonikus alakja  $n = \underbrace{\prod_{i=1}^m q_i}_A \cdot \prod_j p_j^{\beta_j}$ ,

ahol  $q_i \equiv -1 \pmod{3}$ ,  $p_j \equiv 1 \pmod{3}$  prímek és  $i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\beta_j \in \mathbb{N}$ .

Azt kell bizonyítanunk, hogy a  $D_{id}(A) = 0$  egyenlet nem teljesülhet, hiszen  $R_{id}(n) \neq 1 \Leftrightarrow D_{id}(n) \neq 0 \Leftrightarrow D_{id}(A) \neq 0$ . A bizonyítandó  $\sum_{\substack{x|A \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} x - \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} x \neq 0$  állítás helyett annak

ekvivalens átfogalmazását fogjuk igazolni:  $\sigma(A) = \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} x + \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} x \neq 2 \cdot \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} x$ .

Ha  $A = \prod_{i=1}^m q_i$ , akkor egyrészt  $\sigma(A) = \prod_{i=1}^m (1 + q_i)$ , másrészt

$$2 \cdot \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} x = 2 \cdot \left( 1 + \sum_{i,j} q_i q_j + \sum_{i,j,k,l} q_i q_j q_k q_l + \dots \right).$$

Ez a két összeg nem lehet egyenlő, mert  $3 \mid \prod_{i=1}^m (1 + q_i)$ , míg  $2 \cdot \sum_{\substack{x|A \\ x \equiv 1 \pmod{3}}} x \not\equiv 0 \pmod{3}$ , hiszen

$$2 \cdot \left( 1 + \sum_{i,j} q_i q_j + \sum_{i,j,k,l} q_i q_j q_k q_l + \dots \right) \equiv 2 \cdot \left( 1 + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \dots \right) = 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Ebből a bizonyításból az is következik, hogy ha  $n = \prod_{i=1}^m q_i$  és  $R_{id}(n) = c$  valamilyen  $c \in \mathbb{Z}^+$  számra, akkor  $c \equiv -1 \pmod{3^m}$ .

Tehát az  $R_{id}(n)$  hányados értéke nem lehet 1, csak annál kisebb vagy nagyobb pozitív valós szám.

### 3.3.8. Tétel

$R_{id}(n) > 1$  pontosan akkor teljesül, ha  $n \equiv -1 \pmod{3}$ .

### Bizonyítás

A 3.3.2 Lemmában megfogalmaztuk az  $R_{id}(n) > 1 \Leftrightarrow D_{id}(n) < 0$  ekvivalenciát. A 3.3.6 Lemmából következik, hogy a  $D_{id}(n) < 0$  egyenlőtlenség pontosan akkor áll fenn, ha a

$D_{id}(n) = \prod_j \frac{p_j^{\beta_j+1} - 1}{p_j - 1} \cdot \prod_i \frac{(-q_i)^{\alpha_i+1} - 1}{(-q_i) - 1}$  szorzatalakjában páratlan sok negatív tényező van, ami azzal egyenértékű, hogy páratlan sok olyan számláló van, amelyben  $\alpha_i$  páratlan, vagyis  $\sum_i \alpha_i$  páratlan, azaz  $n = \prod_i q_i^{\alpha_i} \cdot \prod_j p_j^{\beta_j} \equiv -1 \pmod{3}$ . ■

A tételt természetesen úgy is megfogalmazhattuk volna, hogy  $R_{id}(n) < 1$  pontosan akkor teljesül, ha  $n \equiv 1 \pmod{3}$ .

Megmutatjuk, hogy az  $R_{id}(n)$  hányados tetszőlegesen nagy és tetszőlegesen kis pozitív értékeket is felvehet.

#### 3.3.9. Tétel

$\forall K \in \mathbb{R}^+ - \text{ra } \exists n \in \mathbb{Z}^+, \text{ amelyre } R_{id}(n) > K.$

#### Bizonyítás

Legyen  $n = q^{2\alpha+1}$ , ahol  $q \equiv -1 \pmod{3}$  prím és  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Ekkor  $R_{id}(n) = q$ , és bármely  $K \in \mathbb{R}^+$ -ra végtelen sok olyan  $q$  prím létezik, amelyre  $q > K$ . ■

Ebből az is következik, hogy végtelen sok olyan  $c \in \mathbb{R}^+$  létezik, amire az  $R_{id}(n) = c$  egyenletnek  $n$ -ben végtelen sok megoldása van: bármilyen  $c \equiv -1 \pmod{3}$  prímre az  $R_{id}(n) = c$  egyenletnek végtelen sok megoldása van:  $n = c^{2\alpha+1}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$ .

#### 3.3.10. Tétel

$\forall k \in \mathbb{R}^+ - \text{ra } \exists n \in \mathbb{Z}^+, \text{ amelyre } R_{id}(n) < \frac{1}{k}.$

#### Bizonyítás

Legyen  $n = q^{2\alpha}$ , ahol  $q \equiv -1 \pmod{3}$  prím és  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ . Ekkor  $R_{id}(n) = \frac{q + q^3 + \dots + q^{2\alpha-1}}{1 + q^2 + \dots + q^{2\alpha}} < \frac{1}{q}$ ,

és bármely  $k \in \mathbb{R}^+$ -ra végtelen sok olyan  $q$  prím létezik, amelyre  $q > k \Leftrightarrow \frac{1}{q} < \frac{1}{k}$ . ■

### 3.3.3. A különböző maradékosztályokba tartozó osztók reciprokösszegének összehasonlítása

Az  $f(x) = \frac{1}{x}$  függvényt választva megvizsgáljuk a 3-mal osztva 1, illetve  $-1$  maradékot adó osztók reciprokösszegének  $R_{rec}(n)$  hányadosát és  $D_{rec}(n)$  különbségét.

A 3.1. pontban a páros és páratlan osztók reciprokösszegének vizsgálatakor használt gondolatot alkalmazzuk, amikor az  $R_{rec}(n)$  hányados vizsgálatát visszavezetjük az  $R_{id}(n)$ -nel kapcsolatos ismereteinkre.

#### 3.3.11. Tétel

$$R_{rec}(n) = \begin{cases} R_{id}(n) & \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod{3}; \\ \frac{1}{R_{id}(n)} & \Leftrightarrow n \equiv -1 \pmod{3}. \end{cases}$$

#### Bizonyítás

A komplementer osztókat használva:

$$R_{rec}(n) = \frac{\sum_{\substack{x|n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} \frac{1}{x}}{\sum_{\substack{y|n \\ y \equiv 1 \pmod{3}}} \frac{1}{y}} = \frac{\sum_{\substack{x \cdot x' = n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} \frac{x'}{n}}{\sum_{\substack{y \cdot y' = n \\ y \equiv 1 \pmod{3}}} \frac{y'}{n}} = \frac{\sum_{\substack{x \cdot x' = n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} x'}{\sum_{\substack{y \cdot y' = n \\ y \equiv 1 \pmod{3}}} y'}$$

Első eset:

$n \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow x' \equiv x$  és  $y' \equiv y \pmod{3}$ , tehát  $\sum_{\substack{x \cdot x' = n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} x' = \sum_{\substack{x|n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} x$  és  $\sum_{\substack{y \cdot y' = n \\ y \equiv 1 \pmod{3}}} y' = \sum_{\substack{y|n \\ y \equiv 1 \pmod{3}}} y$ , tehát ebben az esetben  $R_{rec}(n) = R_{id}(n)$ .

Második eset:

$$n \equiv -1 \pmod{3} \Leftrightarrow x' \equiv 1 \text{ és } y' \equiv -1 \pmod{3}, \text{ amiből } \sum_{\substack{x \cdot x' = n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} x' = \sum_{\substack{y|n \\ y \equiv 1 \pmod{3}}} y \text{ és } \sum_{\substack{y \cdot y' = n \\ y \equiv 1 \pmod{3}}} y' = \sum_{\substack{x|n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} x,$$

$$\text{azaz ebben az esetben } R_{rec}(n) = \frac{1}{R_{id}(n)}. \blacksquare$$

Ugyanezt a gondolatot használva kapjuk a  $D_{rec}(n)$  és  $D_{id}(n)$  közötti összefüggést.

3.3.12. Tétel

$$D_{rec}(n) = \begin{cases} \frac{D_{id}(n)}{n} & \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod{3}; \\ -\frac{D_{id}(n)}{n} & \Leftrightarrow n \equiv -1 \pmod{3}. \end{cases}$$

Bizonyítás

$$D_{rec}(n) = \sum_{\substack{x|n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} \frac{1}{x} - \sum_{\substack{y|n \\ y \equiv 1 \pmod{3}}} \frac{1}{y} = \sum_{\substack{x \cdot x' = n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} \frac{x'}{n} - \sum_{\substack{y \cdot y' = n \\ y \equiv 1 \pmod{3}}} \frac{y'}{n} = \frac{1}{n} \cdot \left( \sum_{\substack{x \cdot x' = n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} x' - \sum_{\substack{y \cdot y' = n \\ y \equiv 1 \pmod{3}}} y' \right).$$

$$\text{Első eset: ha } n \equiv 1 \pmod{3}, \text{ akkor } \sum_{\substack{x \cdot x' = n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} x' - \sum_{\substack{y \cdot y' = n \\ y \equiv 1 \pmod{3}}} y' = D_{id}(n).$$

$$\text{Második eset: ha } n \equiv -1 \pmod{3}, \text{ akkor } \sum_{\substack{x \cdot x' = n \\ x \equiv -1 \pmod{3}}} x' - \sum_{\substack{y \cdot y' = n \\ y \equiv 1 \pmod{3}}} y' = -D_{id}(n). \blacksquare$$

Megjegyezzük, hogy a 3.3.12. Tétel állítása a 3.3.6. Lemmában vázoltakból is következik.

Az értékészletekre vonatkozóan megállapíthatjuk, hogy  $R_{rec}(n)$  csak 1-nél kisebb, míg  $D_{rec}(n)$  csak 1-nél nagyobb értékeket vehet fel.

3.3.13. Tétel

Az  $R_{rec}(n) < 1$  és a  $D_{rec}(n) > 0$  egyenlőtlenségek bármely  $n \in \mathbb{Z}^+$ -re fennállnak.

### Bizonyítás

Az első állítás a 3.3.8. Tételből és a 3.3.11. Tételből következik. A második állítás a 3.3.8. Tételből és a 3.3.12. Tételből adódik. (A két állítás a 3.3.2. Lemma miatt ekvivalens.) ■

Abban a speciális esetben, ha  $n$  prímtényezős felbontásában nincs egyetlen olyan  $3k - 1$  alakú  $q$  prím sem, aminek a négyzete osztója lenne  $n$ -nek, adunk egy másik bizonyítást is arra, hogy  $D_{rec}(n) > 0$ . Legyen  $n$  kanonikus alakja  $n = \underbrace{\prod_{i=1}^m q_i}_A \cdot \prod_j p_j^{\beta_j}$ , ahol  $q_i \equiv -1 \pmod{3}$ ,

$p_j \equiv 1 \pmod{3}$  prímek és  $i \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\beta_j \in \mathbb{N}$ .

Azt kell bizonyítanunk, hogy  $D_{rec}(A) > 0$ , hiszen  $D_{rec}(n) > 0 \Leftrightarrow D_{rec}(A) > 0$ . Ha felírjuk a különbséget, akkor a

$$D_{rec}(A) = 1 - \sum_i \frac{1}{q_i} + \sum_{i,j} \frac{1}{q_i q_j} - \sum_{i,j,k} \frac{1}{q_i q_j q_k} + \sum_{i,j,k,l} \frac{1}{q_i q_j q_k q_l} - \dots = \prod_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) = \frac{\varphi(A)}{A}$$

hányadost kapjuk. Mivel a  $\frac{\varphi(A)}{A}$  hányados pozitív bármely  $A$ -ra, így az állítást bebizonyítottuk. ■

Ez a bizonyítás kiterjeszthető arra az esetre is, amikor  $A$  nem négyzetmentes.

## 3.4. Átlagérték

Mind az osztók száma, mind az osztók összege számelméleti függvény értékeit vizsgálva igaz, hogy ezek bármilyen nagy értékeket felvehetnek, a felvett értékek „közelről” nézve kiismerhetetlennek tűnnek, tetszőlegesen nagy ingadozások lépnek fel, de „távolabbról” nézve, az értékek átlaga már nem ilyen rapszodikus képet mutat. Azt fogjuk megvizsgálni, hogy ezeknek a függvényeknek a leszűkítése bizonyos maradékosztályokbeli osztókra szintén hasonló tulajdonságokkal rendelkezik-e.

### 3.4.1. Definíció

Legyen  $m \in \{-1; 0; 1\}$  és  $d_m(n) = \sum_{\substack{x|n \\ x \equiv m \pmod{3}}} 1$ , valamint  $\sigma_m(n) = \sum_{\substack{x|n \\ x \equiv m \pmod{3}}} x$ .

Például  $d_{-1}(40) = |\{2; 5; 8; 20\}| = 4$  és  $\sigma_0(12) = 3 + 6 + 12 = 21$ .

### 3.4.2. Definíció

Legyen  $D_m(n) = d_m(1) + d_m(2) + \dots + d_m(n)$  és  $\sum_m(n) = \sigma_m(1) + \sigma_m(2) + \dots + \sigma_m(n)$ .

Legyen  $f$  számelméleti függvény és  $F(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ . Az  $f$  függvény átlagértékfüggvényén az  $\frac{F(n)}{n} = \frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n}$  függvényt értjük.

Ismertek az általunk korábban vizsgált számelméleti függvények átlagértékére vonatkozó összefüggések:

1) Ha  $\sum(n) = \sigma(1) + \sigma(2) + \dots + \sigma(n)$ , akkor  $\frac{\sum(n)}{n} \sim \frac{\pi^2}{12}n$ .

2) Ha  $D(n) = d(1) + d(2) + \dots + d(n)$ , akkor  $\frac{D(n)}{n} \sim \log n$  (ahol  $\log n$  a természetes alapú logaritmust jelöli).

Ezek bizonyításainak mintájára most meghatározzuk  $\sigma_0(n)$  és  $d_0(n)$  átlagértékét.

### 3.4.3. Tétel

$\sigma_0(n)$  átlagértéke:  $\frac{\sum_0(n)}{n} \sim \frac{\pi^2}{36}n$ .

*Bizonyítás*

$$\sum_0(n) = \sum_{i=1}^n \sigma_0(i) = \sum_{i=1}^n \sum_{3k:j=i} 3k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3j} \rfloor} (3k) = \sum_{j=1}^n \frac{\lfloor \frac{n}{3j} \rfloor \cdot \left(3 \lfloor \frac{n}{3j} \rfloor + 3\right)}{2}$$

A jobb oldali összeg becsléséhez felhasználjuk, hogy ha  $a > 0$ , akkor

$$(a-1)(3a) < [a] \cdot (3[a] + 3) \leq a(3a + 3).$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$|[a] \cdot (3[a] + 3) - 3a^2| < 3a,$$

amiből

$$\left| \sum_0(n) - \sum_{j=1}^n \frac{3n^2}{2(3j)^2} \right| < \sum_{j=1}^n \frac{3n}{2j}.$$

A jobb oldali összeget felülről becsülve:

$$\sum_{j=1}^n \frac{3n}{2j} = \frac{3n}{2} \cdot \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \leq \frac{3n}{2} \cdot (1 + \log n).$$

Tehát  $\sum_0(n) = \sum_{j=1}^n \frac{3n^2}{2(3j)^2} + U(n)$ , ahol  $|U(n)| < 2n \log n$ . Osszuk el mindkét oldalt  $n^2$ -tel,

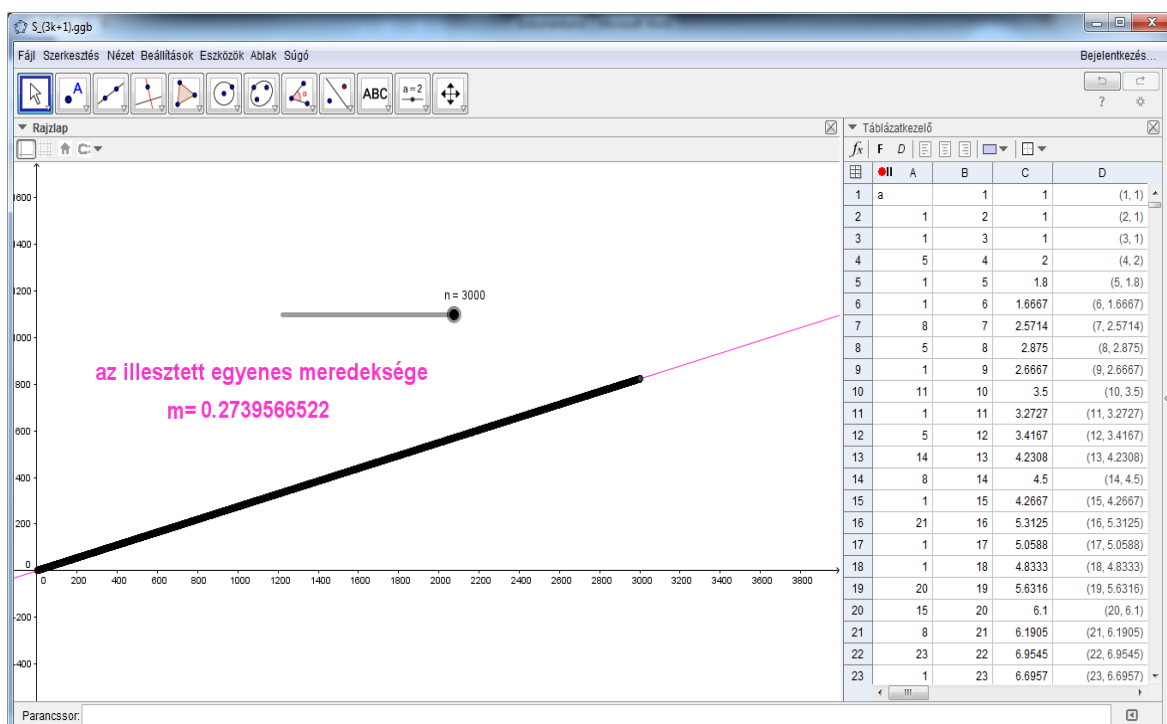
$$\frac{\sum_0(n)}{n^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{3n^2}{2(3j)^2}}{n^2} + \frac{U(n)}{n^2},$$

majd vegyük mindkét oldal határértékét, ha  $n \rightarrow \infty$ . Ekkor az összeg második tagja:  $\frac{U(n)}{n^2}$  0-hoz tart, míg az első tag határértéke:

$$\frac{3}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(3j)^2} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

Tehát  $\frac{\sum_0(n)}{n^2} \sim \frac{\pi^2}{36}$ , vagyis  $\frac{\sum_0(n)}{n} \sim \frac{\pi^2}{36}n$ . ■

Ez szemléletesen azt jelenti, hogy  $\sigma_0(n)$  átlagértékfüggvényének grafikonja olyan egyenessel közelíthető a legjobban, aminek meredeksége  $\frac{\pi^2}{36} \approx 0,274155$ . Ugyanígy módon bizonyítható, hogy a  $\sigma_1(n)$  és a  $\sigma_{-1}(n)$  átlagértékfüggvényeihez tartozó legjobban illeszkedő egyenes is  $\frac{\pi^2}{36}$  meredekségű. Az alábbi grafikon az első háromezer helyen számolt  $\frac{\sum_1(n)}{n}$  értékeket és az ezekre a pontokra illesztett egyenest mutatja, valamint annak meredekségét.



### 3.4.4. Tétel

$$d_0(n) \text{ \textit{\'atlag\textit{\'ert\textit{e}ke}}: } \frac{D_0(n)}{n} \sim \frac{\log n}{3}.$$

*Bizonyítás*

A  $\sigma_0$ -nál látott összeg\textit{\'atrendez\textit{e}si} m\textit{\'od}szert most – didaktikai c\textit{e}lb\textit{\'o}l – szeml\textit{e}letesebb \textit{e}s k\textit{o}z\textit{e}piskol\textit{a}soknak is k\textit{o}nyebben \textit{e}rthet\textit{o} m\textit{o}don fogalmazzuk meg.

K\textit{e}sz\textit{u}t\textit{u}k el azt az  $n \times n$ -es m\textit{a}trixot, amelyben az  $i$ -edik sor  $j$ -edik eleme pontosan akkor 1, ha  $j \equiv 0 \pmod{3}$  \textit{e}s }  $j$  oszt\textit{o}ja  $i$ -nek, egy\textit{e}bk\textit{e}nt 0.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j \equiv 0 \pmod{3} \text{ \textit{e}s } j \mid i \\ 0, & \text{ha } j \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ vagy } j \nmid i \end{cases}$$

Például  $n = 9$ -re a következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A soronkénti összegzés miatt  $D_0(9) = 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 2 + 0 + 0 + 2 = 5$ , másrészt az oszloponkénti összegzés azt adja, hogy  $D_0(9) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{9}{3} \rfloor} \lfloor \frac{9}{3j} \rfloor = 3 + 1 + 1 = 5$ . Az  $i$ -edik sorban annyi 1-es szerepel, ahány 3-mal osztható osztója van  $i$ -nek, vagyis az  $i$ -edik sor elemeinek összege  $d_0(i)$ . Tehát a soronkénti összegzéssel azt kapjuk, hogy  $D_0(n) = \sum_{i=1}^n d_0(i)$ . A  $j$ -dik oszlopban akkor vannak 1-esek, ha  $j = 3k$  alakú, ahol  $k \in \mathbb{Z}^+$ , és ezek a  $3k, 6k, \dots, 3k \cdot \lfloor \frac{n}{3k} \rfloor$  sorszámú helyeken állnak. Tehát a  $j = 3k$ -dik oszlop elemeinek összege  $\lfloor \frac{n}{3k} \rfloor$ . Innen az oszloponkénti összegzés azt adja, hogy  $D_0(n) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \lfloor \frac{n}{3k} \rfloor$ .

Az  $\frac{n}{3k} - 1 < \lfloor \frac{n}{3k} \rfloor \leq \frac{n}{3k}$  egyenlőtlenség miatt

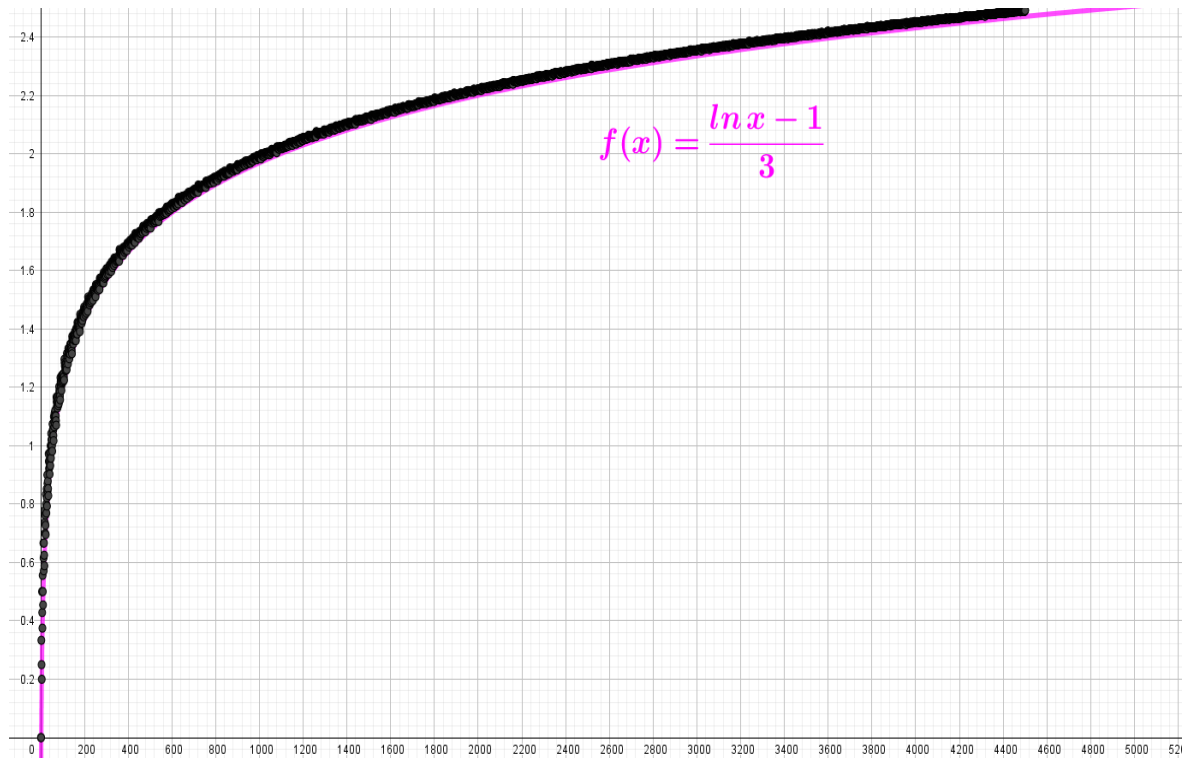
$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \left( \frac{n}{3k} - 1 \right) < D_0(n) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \frac{n}{3k}.$$

A bal oldalon  $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \left( \frac{n}{3k} - 1 \right) = \left( \frac{n}{3} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \frac{1}{k} \right) - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor > \frac{n}{3} \left( -1 + \log \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \right)$ .

A jobb oldalon  $\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \frac{n}{3k} = \frac{n}{3} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \frac{1}{k} \leq \frac{n}{3} \left(1 + \log \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)$ .

Az egyenlőtlenségeket  $n$ -nel osztva azt kapjuk, hogy  $\left| \frac{D_0(n)}{n} - \frac{\log \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}{\frac{n}{3}} \right| \leq 1$ .

Mivel  $\log \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \sim \log \frac{n}{3} \sim \log n$ , így  $\frac{D_0(n)}{n} \sim \frac{\log n}{3}$ .



Végül a függvényértékek ingadozásainak illusztrációjaként nézzük a völgytétel megfelelőjét  $d_m(n)$ -re. Mivel  $d_0(n)$  három egymást követő pozitív egész helyen csak egyetlen nullától különböző értéket vesz fel, ezért ezt a kérdést itt nem érdemes vizsgálni. Ugyanakkor a  $d_1(n)$  és  $d_{-1}(n)$  függvényekre fennáll a völgytétel, amit az eredeti állítás bizonyítási módszerével tudunk igazolni. Ezt  $d_1(n)$  völgytételére részletezzük, majd jelezzük a  $d_{-1}(n)$ -nél szükséges minimális módosítást.

### 3.4.5. Tétel

Tetszőleges  $K$  pozitív egészhez végtelen sok olyan  $n \in \mathbb{Z}^+$  található, amelyre

$$d_1(n-1) - d_1(n) > K \quad \text{és} \quad d_1(n+1) - d_1(n) > K$$

egyidejűleg teljesül.

#### Bizonyítás

Az  $n$ -et alkalmas  $3k-1$  alakú prímszámnak fogjuk választani, ekkor  $d_1(n) = 1$ . A két egyenlőtlenség azt jelenti, hogy  $n-1$ -nek és  $n+1$ -nek is legalább  $K+2$  darab  $3k+1$  alakú osztója van. Ez biztosan teljesül, ha  $2^\alpha \cdot 3^\gamma \cdot p_1^{K+1} \mid n+1$  és  $2^\beta \cdot p_2^{K+1} \mid n-1$ , ahol  $p_i \equiv 1 \pmod{3}$  különböző (rögzített) prímelek, és  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^+$ , és  $\alpha$  és  $\beta$  közül az egyik 1. Ez teljesül, ha  $n$  megoldása az

$$x \equiv -1 \pmod{2^\alpha \cdot 3^\gamma \cdot p_1^{K+1}}, \quad x \equiv 1 \pmod{2^\beta \cdot p_2^{K+1}}$$

szimultán kongruenciarendszernek. Ez a kongruenciarendszer biztosan megoldható, mert  $(2^\alpha \cdot 3^\gamma \cdot p_1^{K+1}, 2^\beta \cdot p_2^{K+1}) = 2$ , ami osztója az  $1 - (-1) = 2$  különbségnek. Az összes pozitív megoldás  $x \equiv x_0 \pmod{(2^{\alpha+\beta} \cdot 3^\gamma \cdot (p_1 p_2)^{K+1})}$ , azaz  $x = x_0 + s \cdot 2^{\alpha+\beta} \cdot 3^\gamma \cdot (p_1 p_2)^{K+1}$  alakba írható, ahol  $s \in \mathbb{N}$ . Azt kell még megmutatnunk, hogy ebben a számtani sorozatban végtelen sok  $3k-1$  alakú prím található. A Dirichlet-tétel szerint ez akkor teljesül, ha  $(x_0, 2^{\alpha+\beta} \cdot 3^\gamma \cdot (p_1 p_2)^{K+1}) = 1$ . Mivel  $x_0$  igazgá teszi a két kongruenciát, ezért  $x_0$  relatív prím a 2-höz, a 3-hoz és  $p_1, p_2$ -höz, így  $2^{\alpha+\beta} \cdot 3^\gamma \cdot (p_1 p_2)^{K+1}$ -hez is, és  $d_1(n+1) \geq d_1(p_1^{K+1}) = K+2$ , valamint  $d_1(n-1) \geq d_1(p_2^{K+1}) = K+2$ .

A  $d_{-1}(n)$  esetben csak annyi a módosítás, hogy az  $n$ -et  $3k+1$  alakú prímnek választjuk, ekkor  $d_{-1}(n) = 0$ ,  $d_{-1}(n+1) \geq d_{-1}(2 \cdot p_1^{K+1}) = K+2$  és  $d_{-1}(n-1) \geq d_{-1}(2 \cdot p_2^{K+1}) = K+2$  (így  $p_1$  és  $p_2$  kitevőjét most elég lett volna  $K$ -nak választani).

### 3.5. Didaktikai megjegyzések

Olyan problémákat igyekeztünk felvetni, amelyek meggondolásához az esetek legnagyobb részében nem szükséges a középiskolai tudásanyagot túli ismeret. Természetesen maga a kérdés megfogalmazása is többféle lehet attól függően, hogy a gyerekek mennyire tapasztaltak már abban, hogy teljesen önállóan induljanak útnak, hogy szándékunk-e ilyen szempontból őket rögtön a „mélyvízbe” dobni, vagy inkább a fokozatosság útját választjuk. Nyilván a „hogyan” megválaszolását mindenképp megelőzi annak felmérése, hogy ténylegesen mik a gyerekek előismeretei. A tudásuk is lehet eltérő mélységű, de még azonos szintű tudás esetén is lehet két tanuló számára más egy probléma feldolgozásának legideálisabb útja. Mindenesetre megfelelő tanári útmutatás, irányítás és differenciálás mellett azt gondoljuk, a problémák nehézségi foka, a bizonyításhoz vezető úton használt ötletek sokszínűsége vagy egyszerűsége lehetőséget ad arra, hogy tanulóknak sikerélményt adjunk.

Ahhoz persze, hogy az egyes feladatokat, problémákat a gyerekek vizsgálni tudják, könnyen lehet szükségük valamilyen segédeszközre a zsebszámológépen kívül. Ma, amikor a tanulók digitális kompetenciáinak fejlesztése igen fontos szerepet és hangsúlyt kap az oktatásban, kifejezetten ösztönzőnek gondoljuk, hogy olyan matematikai problémák megoldásába vonjuk be őket, amikben az előrejutáshoz kell (de mindenképpen ajánlott) valamiféle digitális segédeszköz és a felhasznált szoftver alapszintű ismerete. Ezen és a számelméleti alapokon túl igazán csak vállalkozókedvre van szükség az elinduláshoz. Nyilván az is igaz, hogy sok-sok gyermek számára ma már a programozás is része a mindennapoknak, és jóval haladóbb eszközöket használnak a problémamegoldáshoz, mint például az általam használt GeoGebra (vagy WolframAlpha). Ennek mindenképpen előnye, hogy nagyon könnyen és gyorsan elsajátítható a használata. Az első lépés tehát a problémamegoldás útján az, hogy tanulók adatokat gyűjtsenek. Nehezen képzelhető el úgy problémamegoldás, hogy a diák nem szerez kellő tapasztalatot a feladat adta szituációban, ez egy nyilván nélkülözhetetlen fázis, bár a diákok egy része lehet, hogy ezt a „szükséges rossz” kategóriába sorolja. Az adatokat ezután rendszerezni kell, bizonyos mértékig elemezni, meglátni bennük a közöset, majd megfogalmazni egy sejtést. Ugyanazok az adatok nem biztos, hogy két különböző diákot ugyanarra a sejtésre vezetnek, amit kifejezett előnynek gondolunk az ilyen nyíltvégű

problémáknál. A sejtés megfogalmazása után a hipotézist próbáknak kell kitenni, és ha az kellően sok próbát kiállt, akkor bizonyítani. Természetesen a tanári szerep ezen az úton minden fázisban jelen kell, hogy legyen, akár abban, hogy egy sejtés egyenértékű átfogalmazását ösztönözze annak érdekében, hogy a bizonyítás egyszerűbb formát öltjön vagy általánosítható legyen más esetekben, akár a bizonyítás többféle lehetőségének összehasonlításában. Azt gondoljuk, számos kérdés többféle általánosítási lehetőséget kínál (egészen a multiplikatív függvényekre vonatkozó általánosítási lehetőségig), és kiindulópontja lehet több más kérdésnek. Ez igazán alkalmas arra, hogy a gyerekek maguk is részeseivé váljanak magának a problémaalkotási folyamatnak is, hogy megtapasztalják, hogyan alakul ki, alakul át, és fejlődik egy probléma.

Ezt a fajta megközelítést és utat inkább gondoljuk konstruktívnak, mint azt, hogy a problémát nem nyíltvégű problémaként vezetjük be. Kitzűzhetünk egy feladatot úgy is, hogy „Bizonyítsuk be, hogy a páros és a páratlan osztók összege sosem lehet egyenlő!”, de véleményünk szerint ez kevésbé motiváló, mint az a fajta megfogalmazás, hogy „Vizsgáld meg a páros és páratlan osztók összegének hányadosát! Van-e olyan érték, ami nem fordul elő az értékészletben? Van-e olyan érték, ami biztosan előfordul? Tudsz-e mondani olyan értéket, ami végtelen sokszor előfordul? Meg tudod-e adni az összes értéket, ami előfordul? Van-e olyan érték, amire meg tudod adni az összes számot, ami esetén a hányados ezt az értéket veszi fel? Be tudod-e bizonyítani az ezekre a kérdésekre adott válaszaidat?” A kérdések variálása egyrészt annak is záloga, hogy minden diák találjon a maga számára megválaszolható feladatot, másrészt azt is megmutatja a gyerekeknek, hogy mennyire sokoldalúan érdemes körbejárni egy gondolatot.

Természetesen egy ilyen felfedező úton lesznek olyan nehézségek, amelyeket nem tudunk megoldani, de azt gondoljuk, az a legkevésbé sem baj, ha a gyerekek szembesülnek azzal, hogy bár a kiindulási probléma egy viszonylag egyszerűen megoldható kérdés volt, ennek variálásával is lehet olyan kérdéseket megfogalmazni, amelyeket (egyelőre) nem tudunk megoldani. Erre jó példa az  $(1)_5$  és  $(-1)_5$  maradékosztályokba tartozó osztók vizsgálatának problémája, amely éppoly ártatlannak tűnő kérdés, mint a mod 3 megfogalmazott, mégsem tudjuk a megoldását. Természetesen a mod 3 vizsgálatkor is merülnek fel olyan

kérdések, amelyekre a választ még nem találtuk, mint például: miután bebizonyítottuk, hogy  $R_{id}(n)$  sosem lehet egyenlő 1-gyel, tudunk-e megadni más pozitív egész számot, ami hiányzik  $R_{id}(n)$  értékészletéből? Vagy igaz-e, hogy a  $q \equiv -1 \pmod{3}$  prímek és kizárólag azok adják az összes értékészletben előforduló egész értéket? Vagy: ha  $n$  legalább két prímosztója 3-mal osztva  $-1$  maradékot ad, akkor ebből következik-e, hogy  $R_{id}(n)$  nem lehet egész? A nehézségek mellett persze könnyen le lehetünk egyszerűen megválaszolható kérdésekre is az alapfeladat variálása során, például mod 4 néhány konkrét számolási példában összehasonlítva a nemnulla maradékosztályba tartozó osztók összegét, a következő összefüggés több-kevesebb idő alatt felfedeztethető (még ha ehhez esetleg irányítani is kell a felfedezést):

$$2 \cdot \frac{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv -1(4)}} d}{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1(4)}} d} + 2 = \frac{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 2(4)}} d}{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1(4)}} d}.$$

A sejtés megfogalmazása után ez egy olyan bizonyítás, ami nem igényel lényegi új ötletet:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv -1(4)}} d}{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1(4)}} d} + 2 &= 2 \cdot \left( \frac{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv -1(4)}} d}{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1(4)}} d} + 1 \right) = 2 \cdot \left( \frac{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv -1(4)}} d + \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1(4)}} d}{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1(4)}} d} \right) = \\ &= \frac{2 \cdot \left( \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv -1(4)}} d + \sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1(4)}} d \right)}{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1(4)}} d} = \frac{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 2(4)}} d}{\sum_{\substack{d|n \\ d \equiv 1(4)}} d}. \end{aligned}$$

Amikor egy tételre több bizonyítást tudunk adni, időközben összekapcsolva olykor a diákok szemében a matematika különállónak tűnő területeit (például a kombinatorikát és a számelméletet a 3.3.6 Lemmában), az mindenképp jó lehetőség arra, hogy a tanulók lássák, és megtapasztalják (újfent), hogy a matematika valójában nem egymástól elszigetelt területek összessége, ezek a területek szorosan kapcsolódnak egymáshoz.

## 4. fejezet

# Speciális egyenletek

Ebben a részben speciális egyenleteket vizsgálunk, amelyek megoldásait elsősorban a prímszámhatványok körében keressük.

### 4.1. Az $f(x^2) + f(y^2) = f(z^2)$ egyenlet és általánosítása

Ha  $f$  az osztók száma függvény, akkor a  $d(x^2) + d(y^2) = d(z^2)$  egyenletnek nincsen megoldása nem csak a prímszámhatványok, de a pozitív egész számok körében sem, hiszen a bal és a jobb oldal különböző paritású. Ebből az is következik, hogy a  $d(x^{2m}) + d(y^{2m}) = d(z^{2m})$  egyenlet sem oldható meg semmilyen  $m, x, y, z$  pozitív egészekre. Az osztók száma függvény esetén nem csak a páros kitevő esetén nem kapunk megoldást:  $d(x^k) + d(y^k) = d(z^k)$  semmilyen  $k > 1$  egész kitevőre és  $x, y$  pozitív egészre sem oldható meg, hiszen a bal oldali összeg 2-vel kongruens modulo  $k$ , miközben a jobb oldal 1-gyel. Ha a bal oldalon lévő összegben a tagok számát (kettő helyett) páratlannak választjuk, akkor a  $\sum_{i=1}^n d((p_i^{\alpha_i})^2) = d((q^\beta)^2)$  egyenlet bármilyen páratlan  $n$ -re, illetve  $p_i$  és  $q$  prímeke, valamint  $\alpha_i \geq 1$  egész kitevőre megoldható, a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele:  $\sum_{i=1}^n (2\alpha_i + 1) = 2\beta + 1$ .

Ha az általánosított egyenletet tekintjük: a  $\sum_{i=1}^n d(x_i^k) = d(z^k)$  egyenlet akkor és csak akkor megoldható, ha  $n \equiv 1 \pmod{k}$ . Ekkor az összes prímszámhatványmegoldás  $x_i = p_i^{\alpha_i}$ ,  $z = q^\beta$  alakú, ahol  $p_i$ , valamint  $q$  prímeke,  $\alpha_i \geq 1$  egészek és  $\sum_{i=1}^n (k\alpha_i + 1) = k\beta + 1$ .

Ha  $f$  az osztók összege függvény, akkor a  $\sigma(x^{2m}) + \sigma(y^{2m}) = \sigma(z^{2m})$  egyenlet sem oldható meg semmilyen  $m$  pozitív egészre az iméntivel azonos indoklás miatt. Az osztók száma függvénynel ellentétben ebben az esetben páratlan kitevőre létezhet az egyenletnek

megoldása az egészek körében, például  $k = 3$  esetén:  $\sigma(3^3) + \sigma(10^3) = \sigma(13^3)$  fennáll. Ha a tagok száma az összegben páratlan, találhatunk olyan megoldást is, amelynek minden tagja prím, például  $\sigma(11^2) + \sigma(17^2) + \sigma(23^2) = \sigma(31^2)$ .

Olyan számhármass, amelynek minden tagja prím, nem lehet az  $\omega(x^2) + \omega(y^2) = \omega(z^2)$  vagy az  $\Omega(x^2) + \Omega(y^2) = \Omega(z^2)$  egyenlet megoldása. Mivel  $\omega(x) = \omega(x^k)$  és  $\Omega(x^k) = k \cdot \Omega(x)$ , az általánosított  $\omega(x^k) + \omega(y^k) = \omega(z^k)$ , valamint  $\Omega(x^k) + \Omega(y^k) = \Omega(z^k)$  egyenleteknek szintén nincs a prímekek körében semmilyen pozitív egész  $k$ -ra megoldása. Előbbi a prímsványok körében sem megoldható. Utóbbi egyenletnek végtelen sok olyan megoldása van, amelyben mindhárom tag prímsvány, és legalább az egyik nem négyzetmentes, az összes ilyen megoldás  $x = p_1^\alpha$ ,  $y = p_2^\beta$ ,  $z = p_3^{\alpha+\beta}$  alakú, ahol  $p_i$ -k prímekek, valamint  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$  tetszőleges pozitív egészek. Ha a tagok számára vonatkoztatott általánosítást tekintjük: a  $\sum_{i=1}^n \omega(x_i^k) = \omega(z^k)$  egyenletnek nincsen megoldása a prímsványok körében semmilyen

$n \geq 2$  és  $k > 0$  egészekre, míg a  $\sum_{i=1}^n \Omega(x_i^k) = \Omega(z^k)$  egyenlet összes prímsványmegoldása

$x_i = p_i^{\alpha_i}$ ,  $z = q^\beta$  alakú, ahol  $p_i$ , valamint  $q$  prímekek,  $\alpha_i \geq 1$  egészek és  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \beta$ .

A  $\varphi(x^2) + \varphi(y^2) = \varphi(z^2)$  egyenlet megoldásait vizsgálva a megoldásként kapott számhármassok bármelyikét is nézzük, annak mindhárom tagja nem lehet prím.

#### 4.1.1. Tétel

A  $\varphi(x^2) + \varphi(y^2) = \varphi(z^2)$  egyenlet nem oldható meg a prímekek körében.

#### Bizonyítás

Mivel bármely pozitív egész  $x$ -re  $\varphi(x) > 0$ , így  $y \neq z$ . Tegyük fel, hogy  $x, y$  és  $z$  prímekek, ekkor az  $x(x-1) + y(y-1) = z(z-1)$  egyenletet kapjuk, innen  $z > y$ . Rendezés és szorzattá alakítás után  $x(x-1) = (z-y)(z+y-1)$  alakra hozunk. Ha  $x$  prím, akkor csak úgy oszthatja a jobb oldalon álló szorzatot, hogy valamelyik tényezőt osztja, tehát két esetet kell vizsgálnunk:

I. eset:  $x|z - y \Leftrightarrow kx = z - y$ , ahol  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

Ebből az következik, hogy  $x - 1 = k(kx + 2y - 1)$ , ami ellentmondás, hiszen a jobb oldal  $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ -ra nagyobb, mint a bal oldal.

II. eset:  $x|z + y - 1 \Leftrightarrow kx = z + y - 1$ , ahol  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

Ebből az következik, hogy  $x - 1 = k(kx - 2y + 1)$ , amiből rendezés után:

$$y = \frac{(k+1)((k-1)x+1)}{2k} \quad \text{és} \quad z = \frac{k^2x+x+k-1}{2k}$$

Feltevésünk szerint  $y$  és  $z$  is prím. Mivel  $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ -ra  $(k, k+1) = 1$ , így  $y$  akkor és csak akkor lehet prím, ha

a)  $\frac{k+1}{2} = 1$  és  $\frac{(k-1)x+1}{k}$  prím, ami ellentmondás, hiszen az első egyenlőségből  $k = 1$ , így  $y = 1$ , ami nem prím;

b)  $\frac{k+1}{2}$  prím és  $\frac{(k-1)x+1}{k} = 1$ , ami ellentmondás, hiszen a második egyenlőséget

$(k-1)(x-1) = 0$  alakra hozva, abból  $k = 1$  vagy  $x = 1$  adódik, utóbbi esetben  $x$  nem prím, előbbi esetben  $\frac{k+1}{2} = 1$  szintén nem prím;

c)  $k+1$  prím és  $\frac{(k-1)x+1}{2k} = 1$

A második egyenlőségből adódik, hogy  $k \neq 1$ , így  $x = 2 + \frac{1}{k-1}$ . Feltevésünk szerint  $x$  prím, ami akkor és csak akkor lehet, ha  $k = 2$ , és így  $x = 3$ , hiszen minden más esetben  $2 < x < 3$  nem egész. Helyettesítés után tehát azt kapjuk, hogy ha  $x = 3$ , akkor  $y = 3$ , valamint  $z = 4$ , ami nem prím, így ebben az esetben is ellentmondásra jutunk. ■

Azt gondoljuk, a gyerekekkel való feldolgozás során célszerű a vizsgáldást az  $\omega(n)$  és  $\Omega(n)$  függvényekkel kezdeni, ezek szinte semmilyen előkészítést nem igényelnek. Rátérve a multiplikatív függvényekre az osztók száma esetén kérhetjük a tanulókat, hogy próbáljanak megoldást találni  $k = 2$  esetén a prímelek körében. Azonnal adódik, hogy olyan megoldás nem létezik, amelynek minden tagja prím, hiszen  $3+3 \neq 3$ . Ezután kereshetjük a megoldást a prímhatványok, a két prím szorzataként előálló egészek vagy bármilyen más (akár a ta-

mulók által javasolt) speciális halmazon, és hosszab-rövidebb számolásokkal igazolhatjuk, hogy az egyenlet semelyik esetben sem megoldható. Végül a „küzdelmek” után egy sorban összegezhethetjük a tanulságot, és adhatjuk a bizonyítását annak, hogy a két oldal eltérő paritása miatt az egyenlet nem megoldható a pozitív egészek halmazán. Ezután vizsgálhatjuk a  $k = 3$  esetet, és fogalmazhatjuk meg, hogy egy köbszám esetén az osztók száma 1-gyel kongruens mod 3, így szintén nincs megoldás, hiszen a bal oldali összeg 2-t, míg a jobb oldal 1-et ad maradékkal 3-mal osztva. Fontos kiemelni azt a különbséget a két vizsgált eset között, hogy míg  $d(n)$  akkor és csak akkor páratlan, ha  $n$  négyzetszám, az nem igaz, hogy  $d(n)$  akkor és csak akkor lehet 1-gyel kongruens mod 3, ha  $n$  köbszám, hiszen például az osztók száma akkor is 1 maradékot ad 3-mal osztva, ha  $n$  páros sok különböző prím szorzata. Ezen esetek vizsgálata után célszerű megfogalmazni az általánosítást, és igazolni, hogy tetszőleges  $k > 1$  egész kitevő esetén az egyenletnek nincs megoldása a  $k$ -dik hatványok körében.

Ezzel ellentétben az osztók összege esetén páratlan  $k$  kitevőre tehát találtunk megoldásokat. Az azonban, hogy rögzített páratlan  $k$  kitevőre minden megoldást megadjunk vagy akár csak minden olyan megoldást, amelynek tagjai relatív prímelek, reménytelenül nehéznek látszik.

Az Euler-féle  $\varphi$ -függvény esetében a tanulók könnyen rátalálhatnak olyan megoldásokra, mint például  $\varphi(2^2) + \varphi(3^2) = \varphi(4^2)$  vagy  $x = 4, y = 6$  és  $z = 5$ . Matematikai szoftvereket használva adhatjuk az egyenletnek olyan megoldását is, amelyben a változók realitv prímelek, például  $x = 3, y = 25$  és  $z = 23$  vagy olyan számhármast, amelyre ugyan  $(x, y, z) = d > 1$ , de az mégsem áll elő egy másik számhármassá számszorosaként, például  $\varphi(3^2) + \varphi(12^2) = \varphi(9^2)$ . A  $(2; 3; 4)$  számhármason kívül is találhatunk olyan megoldást, amely két prímet tartalmaz, például  $\varphi(2^2) + \varphi(10^2) = \varphi(7^2)$ . Ezek megtalálása után természetesen merül fel a kérdés, hogy létezik-e olyan megoldás, amelynek minden tagja prím. Először célszerű  $x$  valamilyen rögzített értékére bizonyítani, hogy ilyen számhármass nem létezik, például  $x = 2$ -re. Feltéve, hogy  $y$  és  $z$  is prím, a  $2 + y^2 - y = z^2 - z$  egyenlet adódik. Ezt tekinthetjük egy  $y$ -ra felírt másodfokú egyenletnek, amelyben  $z$  a paraméter. Tehát rendezés után az  $y^2 - y - (z^2 - z - 2) = 0$  egyenletre alkalmazva a megoldóképletet  $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4(z^2 - z - 2)}}{2}$  adódik. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy

$y$  egész legyen az, hogy az  $1 + 4(z^2 - z - 2)$  kifejezés egy páratlan négyzetszám. Mivel  $1 + 4(z^2 - z - 2) = (2z - 1)^2 - 8$ , és két (páratlan) négyzetszám különbsége csak abban az esetben lehet 8, ha ezek a 9 és az 1, így  $(2z - 1)^2 = 9$ . Ebből  $z = 2$  és  $y = 1$  adódik, ami ellentmondás, hiszen  $y$  nem prím. Másképp is igazolhatjuk, hogy  $x = 2$  esetén nincs olyan megoldás, amelyben  $y$  és  $z$  is prím: a  $2 = z^2 - y^2 - (z - y)$  egyenletet rendezve és szorzattá alakítva  $2 = (z - y)(z + y - 1)$  adódik. Az egyetlen lehetséges faktorizációból  $z = 2$ ,  $y = 1$  adódik, ami tehát nem megoldás. Ez utóbbi módszer az, aminek általánosításával bizonyíthatjuk, hogy nem csak  $x = 2$ -re, de  $x$  értékét tetszőleges prímszámmak választva nincs az egyenletnek olyan megoldása, amelyben a másik két változó is prím.

A kérdést magasabb kitevőkre is vizsgálhatjuk, kereshetjük például a  $\varphi(x^3) + \varphi(y^3) = \varphi(z^3)$  egyenlet megoldásait. Meglepő módon, ha a két oldalon az értékek nem nagyobbak, mint  $\max(\varphi(n^3); 0 < n < 10^5 + 1)$ , a „legkisebb” megoldás  $x = 107$ ,  $y = 354$  és  $z = 251$ . Az osztók számára és összegére felírt egyenletekhez hasonlóan ebben az esetben is vizsgálhatjuk a megoldhatóságot, ha a tagok száma a bal oldalon nem kettő, és találhatunk akár csupa prímekből álló megoldásokat is, például  $\varphi(3^2) + \varphi(11^2) + \varphi(13^2) = \varphi(17^2)$ , de az általánosított problémák megoldása ebben az esetben sem tűnik elérhetőnek.

Megjegyezzük, hogy természetesen bármelyik multiplikatív függvényre felírt egyenletet is tekintjük, ha annak létezik megoldása, akkor végtelen sok megoldása is létezik, hiszen egy  $(x_0; y_0; z_0)$  megoldás mindhárom tagját bármely a mindhárom taghoz relatív prím pozitív egésszel megszorozva az egyenlet egy újabb megoldását kapjuk.

## 4.2. Az $f(xy) + f(xz) = f(yz)$ egyenlet megoldhatóságának vizsgálata

### 4.2.1. Additív függvények

Először általánosságban vizsgáljuk a problémát, ha  $f$  egy pozitív egész értékű erősen additív, illetve teljesen additív függvény (azt, hogy  $f$  pozitív egész értékű, úgy értjük, hogy  $f(1) = 0$ -tól eltekintve csak pozitív egész értékeket vesz fel), majd alkalmazzuk az eredményeket a különböző, illetve az összes prímosztók száma függvényekre:  $\omega(n)$ -re és  $\Omega(n)$ -re.

#### 4.2.1.1. Erősen additív függvények

##### 4.2.1. Definíció

Az  $f$  számelméleti függvény erősen additív, ha  $f(p^\alpha) = \alpha f(p)$  minden  $p$  prímre és  $\alpha \geq 1$  egész kitevőre, és  $(a, b) = 1$ -ből  $f(ab) = f(a) + f(b)$  következik.

A definícióból azonnal adódik:

##### 4.2.2. Állítás

Ha  $n$  kanonikus alakja  $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ , és  $f$  erősen additív, akkor  $f(n) = \sum_{p|n} f(p)$ .

##### 4.2.3. Tétel

Ha  $f$  egy pozitív egész értékű erősen additív függvény, akkor az  $f(xy) + f(xz) = f(yz)$  egyenlet összes megoldását azok az  $(1; y; z)$  számhármak adják, amelyekben  $(y, z) = 1$ .

##### Bizonyítás

A bal oldalon:  $f(xy) + f(xz) = \sum_{p|xy} f(p) + \sum_{p|xz} f(p) \geq \sum_{p|y} f(p) + \sum_{p|z} f(p)$ , hiszen például az első tagot tekintve, minden olyan  $p$  prím, ami  $y$ -nak osztója, az osztója az  $xy$  szorzatnak is, tehát ha  $y$  prímosztóira végezzük az összegzést, tekintve, hogy  $f$  pozitív értékű, nem növeljük a tag értékét, azaz  $\sum_{p|xy} f(p) \geq \sum_{p|y} f(p)$  valóban bármely  $x, y \in \mathbb{Z}^+$ -ra fennáll. Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha  $x$  minden prímosztója  $y$ -nak is osztója. Tehát

azt kapjuk, hogy az  $f(xy) + f(xz) \geq f(y) + f(z)$  egyenlőtlenség bármely  $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$  esetén fennáll, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha  $x$  minden prímosztója közös osztója  $y$ -nak és  $z$ -nek is.

A jobb oldalon:  $f(yz) = \sum_{q|yz} f(q) \leq \sum_{q|y} f(q) + \sum_{q|z} f(q)$ , hiszen bármely  $y, z \in \mathbb{Z}^+$ -ra

$\sum_{q|yz} f(q) = \sum_{q|y} f(q) + \sum_{q|z} f(q) - \sum_{q|y \wedge q|z} f(q)$ , és tekintve, hogy  $f$  pozitív értékű, nem csökkentjük az összeget, ha a harmadik tagot elhagyjuk. Egyenlőség akkor és csak akkor áll

fenn, ha  $\sum_{q|y \wedge q|z} f(q) = 0$ , azaz  $y$ -nak és  $z$ -nek nincs közös  $q$  prímosztója. Tehát azt kap-

juk, hogy az  $f(yz) \leq f(y) + f(z)$  egyenlőtlenség bármely  $y, z \in \mathbb{Z}^+$  esetén fennáll, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha  $y$  és  $z$  relatív prímek.

Ebből az következik, hogy az  $f(xy) + f(xz) = f(yz)$  egyenlet akkor és csak akkor oldható meg, ha mindkét oldali becslésben az egyenlőség teljesül. A bal oldali kifejezés becslése miatt ebből  $(y, z) > 1$ , a jobb oldali kifejezés becslése miatt  $(y, z) = 1$  következne, ami ellentmondás. Abban az egyetlen esetben nem jutunk ellentmondásra, ha  $x$  prímosztóinak halmaza valójában az üres halmaz, azaz  $x = 1$ . Így az összes megoldást valóban megkapjuk, ha  $x = 1$ , valamint  $y$  és  $z$  tetszőlegesen választott relatív prím számpár. ■

A vizsgált számelméleti függvények közül a különböző prímosztók száma függvény erősen additív, így a tétel következménye, hogy az  $\omega(xy) + \omega(xz) = \omega(yz)$  egyenlet összes egész megoldását azok az  $(1; y; z)$  számhármak adják, amelyekben  $(y, z) = 1$ .

#### 4.2.1.2. Teljesen additív függvények

##### 4.2.4. Definíció

Az  $f$  számelméleti függvény teljesen additív, ha bármely  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ -ra  $f(ab) = f(a) + f(b)$ .

A definícióból azonnal adódik:

##### 4.2.5. Állítás

Ha  $n$  kanonikus alakja  $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ , és  $f$  teljesen additív, akkor  $f(n) = \sum_i \alpha_i \cdot f(p_i)$ .

#### 4.2.6. Tétel

Ha  $f$  egy pozitív egész értékű teljesen additív függvény, akkor az  $f(xy) + f(xz) = f(yz)$  egyenlet összes megoldását az  $(1; y; z)$  számhármások adják.

#### Bizonyítás

Ha az  $f$  függvény teljesen additív, akkor az  $f(x)+f(y)+f(x)+f(z) = f(y)+f(z)$  egyenletet kapjuk, ami akkor és csak akkor teljesül, ha  $f(x) = 0$ , azaz pozitív értékű függvény esetén:  $x = 1$ . A számhármás másik két tagja tetszőlegesen megválasztható. ■

A vizsgált számelméleti függvények közül az  $\Omega$ -függvény teljesen additív, így a tétel következménye, hogy az  $\Omega(xy) + \Omega(xz) = \Omega(yz)$  egyenlet összes megoldását az  $(1; y; z)$  számhármások adják.

Megjegyezzük, hogy módszertanilag a téma szakköri feldolgozását nem deduktív, hanem induktív módon képzeljük: először azt a két konkrét egyenletet és megoldhatóságukat vizsgálánk, amiket a prímosztók száma, illetve a prímosztók száma multiplicitással esetben felírhatunk. Majd az  $\omega(xy) + \omega(xz) = \omega(yz)$ , valamint az  $\Omega(xy) + \Omega(xz) = \Omega(yz)$  egyenletek vizsgálata közben tapasztalatra építve, a bizonyításban lényegi szerepet játszó függvénytulajdonságra összpontosítva mondanánk ki az általános tételeket.

#### 4.2.2. Multiplikatív függvények

Most áttérünk a pozitív egész értékű multiplikatív függvények vizsgálatára. Egy  $f$  számelméleti függvény multiplikatív, ha  $(a, b) = 1$  esetén  $f(ab) = f(a)f(b)$ , és teljesen multiplikatív, ha ez minden  $a, b$ -re teljesül.

Az alábbi állítás, amelyet többször fel fogunk használni, azonnal adódik a definíciókból.

#### 4.2.7. Állítás

(A) Legyen  $f$  egy pozitív egész értékű teljesen multiplikatív számelméleti függvény, és tekintsük az  $f(xy) + f(xz) = f(yz)$  egyenletet.

(i) Az egyenletnek nem létezik olyan megoldása, amelyben  $x = y$  vagy  $x = z$ .

(ii) Az egyenlet ekvivalens alakjai:

$$(4.2.7.a) \quad f^2(x) = (f(y) - f(x))(f(z) - f(x)),$$

$$(4.2.7.b) \quad f(x) = \frac{f(y)f(z)}{f(y) + f(z)},$$

$$(4.2.7.c) \quad f^2(x) = (f(y) - f(x))(f(z) - f(x)).$$

(B) A fentiek teljesülnek multiplikatív  $f$  esetén is olyan megoldásokra, ahol  $x, y$  és  $z$  páronként relatív prímek.

Mielőtt rátérünk a konkrét egyenletek vizsgálatára, ha  $f$  az osztók száma, az osztók összege vagy az Euler-féle  $\varphi$ -függvény, kimondunk egy segédállítást.

4.2.8. Lemma

Az  $a, b : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ -n értelmezett  $\frac{ab}{a+b}$  kifejezés pontosan akkor egész, ha  $a = r(r+s)k$  és  $b = s(r+s)k$  alakban írható, ahol  $(r, s) = 1$  és  $k$  tetszőlegesen választott pozitív egészek.

*Bizonyítás*

A megfogalmazott feltétel elégséges, hiszen, ha  $a$  és  $b$  felírhatóak ebben az alakban, akkor a hányados  $\frac{ab}{a+b} = \frac{rs(r+s)^2k^2}{k(r+s)^2} = rsk$ , ami egész. A szükségesség igazolásához jelöljük  $a$  és  $b$  legnagyobb közös osztóját  $d$ -vel, ekkor  $a = rd$ , valamint  $b = sd$ , ahol  $(r, s) = 1$ . Így  $\frac{ab}{a+b} = \frac{rsd^2}{d(r+s)} = \frac{rsd}{r+s}$ . Tekintve, hogy  $(r, s) = 1$ -ből  $(r+s, rs) = 1$  következik, az  $\frac{rsd}{r+s}$  hányados pontosan akkor lehet egész, ha  $r+s \mid d$ , tehát ha létezik olyan  $k$  pozitív egész, hogy  $d = (r+s)k$ . Ezt visszahelyettesítve kapjuk a bizonyítani kívánt állítást. ■

Most megvizsgáljuk az egyenletet néhány alapvető multiplikatív függvény esetén, nevezetesen az osztók száma, az osztók összege és az Euler-féle  $\varphi$ -függvényre. Elsőként az osztók száma függvényt nézzük.

### 4.2.2.1. Az osztók száma függvény

#### 4.2.9. Tétel

Tekintsük a  $d(xy) + d(xz) = d(yz)$  egyenletet.

(i) A prímszámok körében az összes megoldás:

$$(4.2.9.a) \quad x = p_1^{rsk-1}, y = p_2^{r(r+s)k-1}, z = p_3^{s(r+s)k-1},$$

ahol  $p_i$ -k különböző prímszámok,  $r, s, k$  pozitív egészek, nem mindegyikük 1, és  $(r, s) = 1$ , valamint

$$(4.2.9.b) \quad x = p_1^{\frac{k\beta-1}{2}}, y = p_2^\beta, z = p_1^{\frac{k(\beta+2)-1}{2}},$$

ahol  $p_i$ -k különböző prímszámok,  $k$  és  $\beta$  pedig páratlan pozitív egészek és nem mindkettő egyenlő 1-gyel;

(ii)  $x$ -et tetszőlegesen rögzítve az összes páronként relatív prím megoldás előállítható.

#### Megjegyzés

Ebből következik, hogy nincs olyan megoldás, ahol mindhárom változó prím. Azonban  $x$  és  $y$  lehetnek egyszerre prímszámok (és  $z$  prímszám): (4.2.9.b)-ben  $k = 3, \beta = 1$ .

#### Bizonyítás

(i) Három esetet vizsgálunk aszerint, hogy a változók kanonikus alakjában összesen hány különböző prím szerepel.

I. eset:  $x = p_1^\alpha, y = p_2^\beta$  és  $z = p_3^\gamma$ , ahol  $p_i$ -k különböző prímszámok és  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^+$

(4.2.7.b) alapján  $\alpha + 1 = \frac{(\beta + 1)(\gamma + 1)}{(\beta + 1) + (\gamma + 1)}$  adódik, hiszen  $d(n^\alpha) = \alpha + 1$ , ha  $n$  prím. Ennek összes megoldása a 4.2.8. Lemma szerint  $\alpha + 1 = rsk, \beta + 1 = r(r+s)k$ , és  $\gamma + 1 = s(r+s)k$ , ahol  $r, s, k$  pozitív egészek és  $(r, s) = 1$ . Mivel  $\alpha$  pozitív egész, így az  $rsk > 1$  feltételnek is teljesülnie kell, ami valóban fennáll, ha  $r, s$  és  $k$  nem mind 1-gyel egyenlők. Rendezés után kapjuk (4.2.9.a)-t.

II./A eset:  $x = p_1^\alpha, y = p_2^\beta$  és  $z = p_2^\gamma$ , ahol  $p_i$ -k különböző prímszámok és  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^+$ . Helyettesítés és kiemelés után  $(\alpha + 1)(\beta + \gamma + 2) = \beta + \gamma + 1$  adódik, ami ellentmondás, mivel a bal oldal mindig nagyobb, mint a jobb oldal.

II./B eset:  $x = p_1^\alpha$ ,  $y = p_2^\beta$  és  $z = p_1^\gamma$ , ahol  $p_i$ -k különböző prímekek és  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^+$ . Helyettesítés, rendezés és kiemelés után  $\beta(\alpha - \gamma) + 2\alpha + 1 = 0$  adódik. Ebből következik, hogy  $\beta \mid 2\alpha + 1$ , tehát létezik  $k \in \mathbb{Z}^+$ , hogy  $k\beta = 2\alpha + 1$ , ahol  $\beta$  és  $k$  is páratlan, és legalább az egyik 1-nél nagyobb. Rendezés után  $\alpha = \frac{k\beta - 1}{2}$ . A  $\beta \cdot \left( \frac{k\beta - 1}{2} - \gamma + k \right) = 0$  egyenlet csak  $\gamma = \frac{k(\beta + 2) - 1}{2}$  esetén teljesül, hiszen  $\beta$  pozitív egész. Visszahelyettesítve a kitevőkre kapott kifejezéseket, kapjuk (4.2.9.b)-t.

Mivel  $y$  és  $z$  szerepe szimmetrikus, így más esetet nem kell vizsgálnunk, ha összesen két prím szerepel a változók kanonikus alakjában.

III. eset:  $x = p^\alpha$ ,  $y = p^\beta$  és  $z = p^\gamma$ , ahol  $p$  prím és  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^+$

Helyettesítés és összevonás után  $2\alpha + \beta + \gamma + 2 = \beta + \gamma + 1$  adódik, ami ellentmondás, mivel a bal oldal mindig nagyobb, mint a jobb oldal.

(ii) Feltételezzük, hogy  $(x, y) = (x, z) = (z, y) = 1$ . (4.2.7.c)-ből  $d^2(x) = (d(y) - d(x)) \cdot (d(z) - d(x))$  adódik, azaz  $d(y) - d(x)$  és  $d(z) - d(x)$  komplementer osztói  $d^2(x)$ -nek. Tehát  $d^2(x) = u_1 u_2$  összes lehetséges szorzattá bontásából kapjuk  $d(y) = u_1 + d(x) = v_1$  és  $d(z) = u_2 + d(x) = v_2$  értékét. Ebből  $v_1 = k_1 \cdot \dots \cdot k_r$  összes lehetséges faktorizációja (ahol  $r \geq 1$  és minden  $i$ -re  $k_i > 1$ ) meghatározza  $y$  egy lehetséges kanonikus alakját:  $y = p_1^{k_1-1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r-1}$  (ahol  $p_i$ -k prímekek). Hasonlóképp adódik  $v_2$  lehetséges szorzattá bontásaiból  $z$  kanonikus alakja. Az  $(x, y) = (x, z) = (z, y) = 1$  feltételnek eleget tevő összes megoldást úgy kapjuk, ha  $x$ ,  $y$  és  $z$  kanonikus alakjában nem szerepeltetünk azonos prímtenyezőket. Ebből az algoritmusból az is következik, hogy bármely  $x$ -re az egyenletnek már a páronként relatív prím egészek körében is végtelen sok megoldása van. ■

Megjegyezzük, hogy míg  $x$  értékét tetszőlegesen megválasztva tehát végtelen sok megoldást tudunk megadni, az azonban már nem igaz, hogy két változó értékét tetszőlegesen megválasztva is mindig találhatunk megoldást. Például ha  $x$  és  $y$  is négyzetszám, akkor az egyenlet nem megoldható, mert  $z$  akár négyzetszám, akár nem, az egyenlet két oldala mindenképpen különböző paritású.

Az egyenletet vizsgálva a a tanulók bizonytalannak találhatják véletlenszerűnek nevezhető megoldásokat, de célszerű a multiplikatívítást kihasználva a páronként relatív egészekre szorítkoznunk. Ha a páronként relatív prím egészek körében keressük a megoldást, (4.2.7.b) átrendezés ahhoz a vizsgált egyenlettől független, önmagában is érdekes kérdéshez vezet, amit 4.2.8. Lemmában mondtunk ki. Ennek segítségével a tanulók végtelen sok megoldást találhatnak, de emellett ajánlatos szisztematikusan megadni az összes megoldást  $x$  valamely rögzített értékére. Ha első lépésben az  $x = 1$  esetet vizsgáljuk, a  $d(y) + d(z) = d(y)d(z)$  egyenlet adódik, amelyet  $(d(y) - 1)(d(z) - 1) = 1$  alakra hozhatunk. Innen  $d(y) = d(z) = 2$ , azaz  $y$  és  $z$  két különböző prímszám kell, hogy legyen. Tovább lépve, ha  $x = 2$ , azaz  $2(d(y) + d(z)) = d(y)d(z)$ , akkor  $(d(y) - 2)(d(z) - 2) = 4$ , amiből  $d(y) = d(z) = 4$  vagy  $d(y)$  és  $d(z)$  közül az egyik a 3-mal, míg a másik 6-tal egyenlő. Tehát ennek az egyenletnek már kaphatjuk olyan megoldásait is, amelyek nem prímhatványok, hiszen például a  $d(y) = d(z) = 4$  egyenlőség akkor is teljesül, ha  $y$  és/vagy  $z$  két-két különböző (jelen esetben páratlan) prím szorzata. Ezeket a konkrét példákat megvizsgálva a gyerekek maguktól felfedezhetik (4.2.7.c) átrendezést, és hogy miképp lehet  $x$  valamely rögzített értékére az összes  $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$  megoldást megadni. Hasznos, ha a diákok megtapasztalják, hogy az összes megoldás karakterizálása nem feltétlen egy explicit formula megadását jelenti, hanem jelenthet egy algoritmikus leírást is. Másrészt mindeközben a tanulók azt is elsajátítják, hogyan kell az  $uv + au + bv + c = 0$  alakú diofantikus egyenletek összes megoldását megadni  $u$ -ban és  $v$ -ben, miközben  $a, b$  és  $c$  rögzített egészek.

Az osztók összege és az Euler-féle  $\varphi$ -függvénnyel kapcsolatban olyan eredményeket is megfogalmazunk, amelyek néhány jól ismert, prímekekre vonatkozó sejtéssel is kapcsolatosak.

#### 4.2.2.2. Az Euler-féle $\varphi$ -függvény

##### 4.2.10. Tétel

Tekintsük a  $\varphi(xy) + \varphi(xz) = \varphi(yz)$  egyenletet.

(i) A prímszámok körében végtelen sok megoldás létezik;

(ii) ha  $x = 2^\alpha$  és  $y = 2^\beta$ , ahol  $\alpha, \beta \geq 0$  egészek, akkor csak  $\beta = \alpha + 1$  esetén létezik megoldás;

(iii) bármely rögzített  $k > 31$  egészre, az egyenletnek legalább 31 darab olyan megoldása van, amelyben  $x = 2^k$  és  $y$  kettőshatvány, de  $z > 1$  nem az;

(iv) nincs olyan megoldás, amelyben  $x$  és  $y$  is a 2 helyett más prímnek a hatványa;

(v) a  $(p_1; p_2; p_3)$  prímszámokból álló számszoros pontosan akkor megoldás, ha  $p_i$ -k különböző prímszámok és  $(p_1 - 1)^2 = (p_2 - p_1)(p_3 - p_1)$ ;

(vi) bármely  $(2k + 1; 3k + 1; 6k + 1)$  alakú prímszámokból álló számszoroshoz tartozik egy megoldás;

(vii) bármely ikerprímszámhoz tartozik egy megoldás.

##### Bizonyítás

(i) Az  $x = 2^\alpha$ ,  $y = z = 2^{\alpha+1}$  számszoros bármilyen  $\alpha$  nemnegatív egész kitevőre megoldás, hiszen  $2 \cdot \varphi(2^{2\alpha+1}) = \varphi(2^{2\alpha+2})$  valóban fennáll.

(ii) Megmutatjuk, hogy ha  $x$  és  $y$  is kettőshatvány, és valamely  $z$ -vel együtt megoldást alkotnak, akkor  $x$  és  $y$  csak szomszédos kettőshatványok lehetnek.

Legyen  $x = 2^\alpha$  és  $y = 2^\beta$  és  $z = 2^s \cdot t$ , ahol  $s \in \mathbb{N}$  és  $(t, 2) = 1$ . Az egyenletbe visszahelyettesítés, majd rendezés után azt kapjuk, hogy  $\varphi(t) = \frac{2^{\alpha+\beta-1}}{2^{\beta+s-1} - 2^{\alpha+s-1}} = \frac{2^{\alpha+\beta-1}}{2^{\alpha+s-1} \cdot (2^{\beta-\alpha} - 1)}$ . Mivel  $(2^{\alpha+\beta-1}, 2^{\beta-\alpha} - 1) = 1$ , a hányados akkor és csak akkor egész, ha  $2^{\beta-\alpha} - 1 = 1$ , azaz  $\beta = \alpha + 1$  és  $0 \leq s \leq \alpha + 1$ .

Ekkor  $z$ -nek a ( $z$   $y$ -től különböző) lehetséges értékeit a  $\varphi(t) = 2^{\alpha-s+1}$  egyenlet páratlan megoldásaiból kapjuk majd. Például ha  $\alpha = 2$ , azaz  $x = 4$ ,  $y = 8$ , akkor  $0 \leq s \leq 3$  miatt azt kell megnézni, hogy a  $\varphi(t) = 1$ ,  $\varphi(t) = 2$ ,  $\varphi(t) = 4$  és  $\varphi(t) = 8$  egyenleteknek vannak-e  $t$ -ben páratlan megoldásai. Ezek rendre:  $t = 1$ ,  $t = 3$ ,  $t = 5$ , valamint  $t = 15$ . Tehát az egyenlet összes megoldása  $x = 4$  és  $y = 8$  esetén a  $z_1 = 2^3 \cdot 1 = 8$ ,  $z_2 = 2^2 \cdot 3 = 12$ ,

$z_3 = 2^1 \cdot 5 = 10$  és  $z_4 = 2^0 \cdot 15 = 15$ , azaz így összesen négy számhármast kapunk:  $(4; 8; 8)$ ,  $(4; 8; 10)$ ,  $(4; 8; 12)$  és  $(4; 8; 15)$ .

(iii) Ha  $x = 2^k$ , és  $y$  kettőhatvány, akkor  $y = 2^{k+1}$ . Ha  $z > 1$  nem kettőhatvány, akkor  $z = 2^s \cdot t$  alakban írható, ahol  $s \in \mathbb{N}$ ,  $t > 1$  és  $(t, 2) = 1$ . Az egyenlet akkor oldható meg, ha a  $\varphi(t) = 2^{k+1-s}$  egyenletnek van valamilyen  $0 \leq s < k + 1$ -re páratlan  $t$  megoldása.

Mivel  $t$  páratlan, így  $\varphi(t)$  pontosan akkor kettőhatvány, ha  $t$  különböző Fermat-prímek szorzata. Jelenleg öt Fermat-prímet ismerünk, ezek:  $2^m + 1$  alakúak, ahol  $m \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$ .

Ebből az következik, hogy a  $\varphi(t) = 2^n$  egyenletnek létezik  $t > 1$  páratlan megoldása, ha  $1 \leq n \leq 31$  egész, és bármely ilyen  $n$ -hez pontosan egy  $t$  tartozik. Ugyanis minden

$1 \leq n \leq 31$  egész egyértelműen előáll kettes számrendszerben felírt  $n = \sum_{i=0}^4 \varepsilon_i \cdot 2^i$  alakban,

ahol  $\varepsilon_i \in \{0; 1\}$ . Tehát az  $1 \leq k + 1 - s \leq 31$  egyenlőtlenség figyelembe vételével adódó  $2^s$  és a hozzá tartozó  $\varphi(t) = 2^{k+1-s}$ -ből nyert  $t$  szorzataként  $z$ -re legalább 31 darab értéket kapunk.

(iv) Ha  $x = p^\alpha$ ,  $y = p^\beta$  és  $z = p^s \cdot t$ , ahol  $s \in \mathbb{N}$ ,  $p > 2$  prím és  $(t, p) = 1$ , akkor helyettesítés és rendezés után  $\varphi(t) = \frac{p^{\alpha+\beta-1}}{p^{\beta+s-1} - p^{\alpha+s-1}} = \frac{p^{\alpha+\beta-1}}{p^{\alpha+s-1}(p^{\beta-\alpha} - 1)}$ . Ez a hányados  $p > 2$  esetén nem lehet egész, mert  $p - 1$  osztója a nevezőnek, de a számlálónak nem.

(v) Az egyenletnek olyan megoldása nem létezik, amelyben a három prím közül kettő azonos, hiszen ez csak  $y = z$  lehetne, és ha  $x = p$  és  $y = z = q$ , akkor  $2(p - 1)(q - 1) = q(q - 1)$ , ami ellentmondásra vezet, mert csak  $p = q = 2$ -re teljesül. Ezért  $x = p_1$ ,  $y = p_2$  és  $z = p_3$  páronként relatív prímek, így a bizonyítandó egyenlőség (4.2.7.a)-ból adódik, hiszen  $\varphi(n) = n - 1$ , ha  $n$  prím.

Az állítás segítségével konstruálhatunk megoldásokat: az  $x = p$ ,  $y = p + 2$  és  $z = \frac{p^2 + 1}{2}$  számhármásra az egyenlet fennáll. Ilyen prímekből álló számhármások léteznek, például  $x = 5$ ,  $y = 7$ ,  $z = 13$ .

(vi) Ha  $x = 2k + 1$ ,  $y = 3k + 1$  és  $z = 6k + 1$  prímek, akkor (4.2.7.b)-ben felírt hányados alakot használva a  $2k = \frac{3k \cdot 6k}{3k + 6k}$  egyenlőség valóban fennáll.

Ilyen prímekből álló számhármások léteznek, például  $k = 2, 6, 26, 90$  vagy  $200$  esetén. Ha

$k > 2$ , akkor  $k$  lehetséges értékeit a mod 30 maradékosztályok közül csak négyből, a  $(0)_{30}$ ,  $(6)_{30}$ ,  $(20)_{30}$ ,  $(26)_{30}$  maradékosztályokból választhatjuk, máskülönben  $x$ ,  $y$  vagy  $z$  összetett lesz.

Ezeket a megoldásokat a 4.2.8. Lemma segítségével konstruáltuk ( $r = 1$ ,  $s = 2$  választása mellett). Ilyen típusú megoldásokat más, a feltételeknek eleget tevő  $r, s$  pozitív egészek választásával is készíthetünk. Például ha  $r = 1$ ,  $s = 3$ , és  $x = 3k+1$ ,  $y = 4k+1$  és  $z = 12k+1$  mind prímek valamilyen  $k$  pozitív egészre, akkor megoldásai az egyenletnek.

Ha végtelen sok olyan  $k$  pozitív egész szám létezik, amelyre  $2k+1$ ,  $3k+1$  és  $6k+1$ , vagy  $3k+1$ ,  $4k+1$  és  $12k+1$  prímek – ami megoldatlan probléma –, akkor a  $\varphi(xy)+\varphi(xz) = \varphi(yz)$  egyenletnek végtelen sok megoldása van a prímek körében.

(vii) Ha  $x = 2p$ ,  $y = pq$ ,  $z = 2q$ , ahol  $p < q$  ikerprímek, akkor az egyenlet egy megoldását kapjuk, hiszen a  $p(p-1)(p+1) + 2(p-1)(p+1) = (p+2)(p-1)(p+1)$  egyenlőség valóban fennáll. Ha az ikerprímek száma végtelen, akkor végtelen sok olyan megoldás van, amelyben  $x, y$  és  $z$  is két prímszám szorzata. ■

Ennek a kérdésnek a vizsgálatát az osztók számánál mondottakhoz hasonlóképp gondoljuk. A problémamegoldás közben a tanulók maguk fedezhetik fel a két függvény közötti néhány lényegi különbséget. Ismét csak a páronként relatív prím egészek körében az  $x = 1$  esettel kezdve a vizsgálódást, az  $1 = (\varphi(y) - 1)(\varphi(z) - 1)$  egyenlet adódik, amiből  $\varphi(y) = \varphi(z) = 2$ . A  $\varphi(n) = 2$  egyenlet összes megoldása  $n = 3, 4$  és  $6$ , de ezek közül csak a  $3$  és a  $4$  relatív prímelek, így ha  $x = 1$ , akkor az egyetlen megoldás:  $y = 3$ ,  $z = 4$ , vagy fordítva. Mivel  $\varphi(2) = 1$ , így  $x = 2$  esetén nem kaphatunk (páronként relatív prím) megoldást.

Ez utóbbi észrevétel azt is előrevetíti, hogy célszerű  $x$  helyett  $\varphi(x)$  rögzített értékeire vizsgálni az egyenlet megoldhatóságát és együtt kezelni az  $x = 3, 4$  és  $6$  eseteket, hiszen ezekre  $\varphi(x) = 2$ . Ekkor a  $4 = (\varphi(y) - 2)(\varphi(z) - 2)$  egyenlet adódik. Az osztók számához viszonyítva az egyik különbség és nehézség, hogy ebben az esetben a tényezők csak párosak lehetnek, hiszen  $\varphi(n)$  páros, ha  $n > 2$ . Emiatt a  $4$ -nek csak egyetlen szorzattá bontásából, nevezetesen a  $4 = 2 \cdot 2$  faktorizációból kaphatunk megoldásokat. Ebből  $\varphi(y) = \varphi(z) = 4$ , tehát  $y$  és  $z$  az  $\{5; 8; 10; 12\}$  négyelemű halmaz két olyan eleme kell, hogy legyen, amelyek

egymáshoz és  $x$ -hez is relatív prímeik. Tehát azt kapjuk, hogy ha  $x = 3$ , akkor az egyetlen megoldás:  $y = 5$ ,  $z = 8$ , vagy fordítva, illetve ha  $x = 4$  vagy  $x = 6$ , akkor nem létezik (páronként relatív prím) megoldás.

Ezen a ponton azt is érdemes megbeszélni a tanulókkal, hogy ha valamilyen rögzített  $k$  pozitív egészre egy páratlan  $n$  megoldása a  $\varphi(n) = k$ -nak, akkor  $2n$  is megoldása az egyenletnek. Ha  $x$  páros, akkor nem lehetünk benne bizonyosak, hogy a lehetséges értékek alkotta halmaznak van két páratlan eleme, tehát hogy találunk megoldást  $y$ -ban és  $z$ -ben. Az a kérdés is felmerül, hogy vajon vannak-e olyan pozitív egészek a  $\varphi$ -függvény értékei között, amelyekre garantálható, hogy a függvény azt az értéket egy páratlan helyen is felveszi. Ennek a problémának a kapcsán beszélhetünk a Fermat-prímekről.

Miközben  $\varphi(x)$  rögzített értékei mellett az egyenlet megoldásait keressük, fontos hangsúlyoznunk, hogy ellentétben az osztók számánál mondottakkal, ahol  $d(x) = k$  egyenletnek  $x$ -ben végtelen sok megoldása van, ha  $k > 1$ ,  $x$ -ben csak véges sok lehetőség adódik  $\varphi(x)$  értékének rögzítése esetén. Miután nem találtunk páronként relatív prím megoldást, ha  $x = 2, 4$  vagy  $6$ , azt persze mindenképp tisztáznunk kell, hogy ez nem azt jelenti, hogy az egyenletnek egyáltalán nincs megoldása  $y$ -ban és  $z$ -ben ezekben az esetekben. Ha nem szorítkozunk páronként relatív prím számhármásokra, könnyen találhatunk megoldást, ha  $x = 2$ , például:  $x = 2$ ,  $y = 4$  és  $z = 5$ ; vagy  $x = 2$ ,  $y = 6$  és  $z = 3$ ; vagy  $x = 2$ ,  $y = 4$  és  $z = 4$ . Vélhetően a gyerekek az utóbbi két megoldás valamelyikét megtalálják, annak az általánosításnak a bizonyítása pedig egy szép és nem nehéz feladat, hogy bármely pozitív egész  $k$ -ra a  $(k; k(k+1); k+1)$ , illetve a  $(2^k; 2^{k+1}; 2^{k+1})$  számhármások az egyenlet megoldásai. A legutóbbi nyomán próbálhatunk olyan számhármásokat is keresni, amelyekben legalább két tag ugyanannak a páratlan prímnek a hatványa, majd a sikertelen kísérletek után bizonyítani, hogy ilyen megoldás nem létezik.

Az egyenlet megoldhatóságának kérdését összehasonlítva az osztók száma függvényénél tapasztaltakkal, egy másik fontos különbségről is érdemes szót ejteni: a  $\varphi$ -függvény esetén nem minden páros szám szerepel az értékészletben, például a  $14, 26, 34, 38\dots$  stb. (az bizonyított, hogy végtelen sok ilyen páros szám létezik). Ez azt is jelenti, hogy előfordulhat, hogy  $\varphi(x)$  rögzített értékére az elvileg lehetséges faktorizációk közül nem mind ad megoldást, például  $\varphi(x) = 12$ -re a  $144 = (\varphi(y) - 12)(\varphi(z) - 12)$  egyenletet kapjuk, amely esetén a  $144 = 2 \cdot 72$  szorzatból biztosan nem kaphatunk megoldást, mert a  $\varphi(n) = 14$

egyenletnek nincs megoldása.

A következő két tétel arra vonatkozik, amikor a  $\varphi(xy) + \varphi(xz) = \varphi(yz)$  egyenlet megoldásait úgy keressük, hogy  $x$  és  $y$  két különböző alapú prímszámok.

#### 4.2.11. Tétel

Ha a  $\varphi(xy) + \varphi(xz) = \varphi(yz)$  egyenletnek az  $x = p^\alpha$ ,  $y = q^\beta$  és  $z \in \mathbb{Z}^+$  úgy megoldása, hogy  $p$  és  $q$  különböző prímszámok,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$  és  $z$  osztható  $pq$ -val, akkor vagy  $x = 8$  és  $y = 9$ ; vagy  $x$  Mersenne-prím és  $y = x + 1$ ; vagy  $y$  Fermat-prím és  $x = y - 1$ .

#### Bizonyítás

Legyen  $x = p^\alpha$  és  $y = q^\beta$ , ahol  $p$  és  $q$  különböző prímszámok,  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$  és keressük  $z$ -t úgy, hogy az egyik változóhoz sem relatív prím, azaz  $z = p^a \cdot q^b \cdot t$  alakú, ahol  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  és  $(t; pq) = 1$ . Ebből visszahelyettesítés, egyszerűsítés, majd rendezés után azt kapjuk, hogy 
$$\varphi(t) = \frac{p^{\alpha-1} \cdot q^{\beta-1}}{p^{a-1} \cdot q^{b-1} \cdot (q^\beta - p^\alpha)},$$
 ami csak akkor nem vezet ellentmondásra, ha  $q^\beta - p^\alpha = 1$ , így  $\varphi(t) = p^{\alpha-a} \cdot q^{\beta-b}$ . A továbbiakban ezeket az egyenleteket elemezzük, és bontjuk esetekre a megoldhatóság vizsgálatát.

I. eset:  $\alpha, \beta > 1$

Először megmutatjuk, hogy a  $q^\beta - p^\alpha = 1$  egyenletnek ebben az esetben egyetlen megoldása van:  $q = 3$ ,  $p = 2$ ,  $\beta = 2$ ,  $\alpha = 3$ .

Mivel a két prímszám különbsége páratlan szám, így  $p$  és  $q$  különböző paritásúak, tehát  $p = 2$ , míg  $q$  egy páratlan prím, vagy fordítva.

Tegyük fel, hogy  $p = 2$ . Ekkor a  $q^\beta - 1 = (q - 1)(q^{\beta-1} + q^{\beta-2} + \dots + q + 1) = 2^\alpha$  egyenlet adódik. Ha  $\beta > 1$  páratlan, akkor a szorzat második tényezője 1-nél nagyobb egész, ami ellentmondás. Ha  $\beta > 1$  páros, akkor  $q^\beta - 1 = (q^{\frac{\beta}{2}} - 1)(q^{\frac{\beta}{2}} + 1)$  szorzat mindkét tényezője akkor és csak akkor lehet 2-hatvány, ha  $q^{\frac{\beta}{2}} - 1 = 2$ , így  $q = 3$ ,  $\beta = 2$ , és  $\alpha = 3$ .

Megmutatjuk, hogy  $p$  nem lehet páratlan. Tegyük fel ugyanis, hogy  $q = 2$ , ekkor  $2^\beta = p^\alpha + 1$  adódik. Ha  $\alpha > 1$  páratlan, akkor  $2^\beta = (p + 1)(p^{\alpha-1} - p^{\alpha-2} + \dots + p^2 - p + 1)$ , azaz a

szorzat második tényezője 1-nél nagyobb egész, ami ellentmondás. Ha  $\alpha > 1$  páros, akkor  $p^\alpha + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ , de  $2^\beta \equiv 0 \pmod{4}$  bármely  $\beta > 1$  egészre, tehát ismét ellentmondásra jutunk.

Tehát valóban  $q = 3$ ,  $p = 2$ ,  $\beta = 2$ ,  $\alpha = 3$  az egyetlen megoldás, amiből  $\varphi(t) = 2^{3-a} \cdot 3^{2-b}$  adódik. Az  $(a; b)$  számpárra hat lehetőség kínálkozik:

- A)  $(a; b) = (3; 2)$ , amiből  $\varphi(t) = 1$ , és így  $t = 1$ ;
- B)  $(a; b) = (3; 1)$ , amiből  $\varphi(t) = 3$ , aminek nincs megoldása;
- C)  $(a; b) = (2; 2)$ , amiből  $\varphi(t) = 2$ , de ennek nincsen  $(t, 6) = 1$  megoldása;
- D)  $(a; b) = (2; 1)$ , amiből  $\varphi(t) = 6$ , és így  $t = 7$ ;
- E)  $(a; b) = (1; 2)$ , amiből  $\varphi(t) = 4$ , és így  $t = 5$ ;
- F)  $(a; b) = (1; 1)$ , amiből  $\varphi(t) = 12$ , és így  $t = 13$ .

Tehát ha  $x = 2^3$ ,  $y = 3^2$ , akkor  $z_1 = 2^3 \cdot 3^2$ ,  $z_2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ ,  $z_3 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$  és  $z_4 = 2 \cdot 3 \cdot 13$ .

II. eset:  $\alpha = 1, \beta > 1$

Ekkor  $q = 2$ ,  $p$  Mersenne-prím és  $a = 1$ . Például:  $x = 7$ ,  $y = 2^3$ -re a  $\varphi(t) = 2^{3-b}$  egyenletet kell megoldani  $b$  lehetséges értékei mellett, miközben a  $(t, 14) = 1$  feltétel teljesül. Az ennek eleget tevő megoldások rendre  $t_1 = 5$ ,  $t_2 = 3$ , és  $t_3 = 1$ . Tehát ha  $x = 7$ ,  $y = 2^3$ , akkor  $z_1 = 2 \cdot 7 \cdot 5$ ,  $z_2 = 2^2 \cdot 7 \cdot 3$ , illetve  $z_3 = 2^3 \cdot 7$ .

Ha  $x$  tetszőleges Mersenne-prím és  $y$  a nála 1-gyel nagyobb kettőhatvány, akkor az  $a = 1$ ,  $b = \beta$  értékek mindenképpen adnak megoldást: ekkor  $\varphi(t) = 1$ , így  $t = 1$ , innen  $z = xy$ .

III. eset:  $\alpha > 1, \beta = 1$

Ekkor  $q$  Fermat-prím,  $p = 2$  és  $b = 1$ . Például:  $x = 2^4$ ,  $y = 17$ -re a  $\varphi(t) = 2^{4-a}$  egyenletet kell megoldani  $a$  lehetséges értékei mellett, miközben a  $(t, 34) = 1$  feltétel teljesül. Az ennek eleget tevő megoldások rendre  $t_1 = 15$ ,  $t_2 = 5$ ,  $t_3 = 3$ , és  $t_4 = 1$ . Tehát ha  $x = 2^4$ ,  $y = 17$ , akkor  $z_1 = 2 \cdot 17 \cdot 15$ ,  $z_2 = 2^2 \cdot 17 \cdot 5$ ,  $z_3 = 2^3 \cdot 17 \cdot 3$ , illetve  $z_4 = 2^4 \cdot 17$ .

Ha  $y$  tetszőleges Fermat-prím és  $x$  a nála 1-gyel kisebb kettőhatvány, akkor a  $b = 1$ ,  $a = \alpha$  értékek mindenképpen adnak megoldást: ekkor  $\varphi(t) = 1$ , így  $t = 1$ , innen  $z = xy$ . Ez tehát azt is jelenti, hogy nem csak a Mersenne-prímekhez, de a Fermat-prímekhez is mindig tartozik a  $\varphi(xy) + \varphi(xz) = \varphi(yz)$  egyenletnek legalább egy megoldása.

IV. eset:  $\alpha = \beta = 1$

Ekkor  $q = 3$ ,  $p = 2$  és  $a = b = 1$ . A  $\varphi(t) = 1$ -ből a  $(t, 6) = 1$  feltételnek eleget tevő egyetlen megoldás  $t = 1$ . Tehát ha  $x = 2$ ,  $y = 3$ , akkor  $z = 6$ . ■

A bizonyítás vélhetően legnehezebb része annak igazolása volt, hogy a 8 és a 9 az egyetlen egymást követő prímszámok, annak ellenére, hogy ennek igazolása lényegében csak a nevezetes azonosságok alkalmazását igényelte. A tanulók ezeknek az azonosságoknak a szépségét talán kevésbé látják, bár például oszthatósági feladatokban vagy a másodfokú függvényekről tanultakkal kapcsolatban gyakran használják ezeket. Ez a bizonyítás mindenestre jó példaként szolgál arra, hogy az „agyongyakorolt” azonosságok milyen jó szolgálatot tehetnek egy olyan probléma megoldásában (is), amelyet a gyerekek bizonyosan nem neveznének rutinfeladatnak. A vizsgált egyenlet megoldásait a prímszámok körében kerestük, az általánosított probléma, hogy két egymást követő teljes hatványt keresünk. A sejtést, miszerint az általánosított kérdés megoldását is csak a 8 és a 9 adja, 1844-ben Catalan fogalmazta meg. Több, mint egy évszázaddal később, 1976-ban Tijdeman igazolta, hogy ha  $n$  „elég nagy”, akkor  $n$  és  $n + 1$  egyszerre nem lehetnek teljes hatványok. Azonban az „elég nagy” olyan nagyságrendű volt, hogy az összes lehetőség ellenőrzése (számítógépek segítségével) gyakorlatilag lehetetlen volt. Végül a sejtést 2002-ben Mihailescu bizonyította, tehát a 8 és a 9 az egyetlen egymást követő két teljes hatvány. ([25])

Azt a kérdést, hogy ha  $x$  és  $y$  különböző alapú prímszámok, miközben  $z$  legalább az egyik változóhoz relatív prím, az alábbi konkrét példán mutatjuk be, ami jelzi a probléma általánosításának nehézségét is.

#### 4.2.12. Tétel

Ha  $x = 3^\alpha$  és  $y = 11^\beta$ , ahol  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$ , akkor a  $\varphi(xy) + \varphi(xz) = \varphi(yz)$  egyenlet csak  $\alpha = 1, \beta = 2$  esetén oldható meg és a megoldások  $z_1 = 93$  és  $z_2 = 186$ .

#### Bizonyítás

I. eset:  $z = 3^a \cdot t$ , ahol  $a \in \mathbb{Z}^+$  és  $(t, 33) = 1$ .

Ekkor helyettesítés, egyszerűsítés és rendezés után a  $\varphi(t) = \frac{10 \cdot 3^{\alpha-a} \cdot 11^{\beta-1}}{10 \cdot 11^{\beta-1} - 3^\alpha}$  egyenletet

kapjuk. Mivel a nevező bármely  $\alpha, \beta, a \in \mathbb{Z}^+$  kitevők választása esetén relatív prím a számlálóhoz, így a hányados csak akkor lehet egész, ha a nevező értéke 1. A  $10 \cdot 11^{\beta-1} - 3^\alpha = 1$  egyenlet megoldása:  $\beta = 1, \alpha = 2$ . Ha  $\beta > 1$ , akkor a megoldhatóság szükséges feltétele, hogy  $3^\alpha \equiv -1 \pmod{11}$ . Ez a kongruencia semmilyen  $\alpha$  kitevőre nem teljesülhet, mert a 3 hatványai mod 11 rendre 3, -2, 5, 4, illetve 1 maradékot adnak. Ha  $\beta = 1, \alpha = 2$ , akkor a  $\varphi(t) = 10 \cdot 3^{2-a}$  egyenletet kell megoldani a lehetséges  $a = 1$  és  $a = 2$  értékek mellett, miközben a  $(t, 33) = 1$  feltétel teljesül. Csak az előbbi ad megfelelő megoldást:  $t_1 = 31$ , illetve  $t_2 = 2 \cdot 31$ . Tehát ekkor  $x = 3^2, y = 11, z_1 = 3 \cdot 31$ , illetve  $z_2 = 3 \cdot 2 \cdot 31$ .

II. eset:  $z = 11^b \cdot t$ , ahol  $b \in \mathbb{Z}^+$  és  $(t, 33) = 1$ .

Ekkor helyettesítés, egyszerűsítés és rendezés után a  $\varphi(t) = \frac{2 \cdot 3^{\alpha-1} \cdot 11^{\beta-b}}{11^\beta - 2 \cdot 3^{\alpha-1}}$  egyenletet kapjuk. Mivel a nevező bármely  $\alpha, \beta, b \in \mathbb{Z}^+$  kitevők választása esetén relatív prím a számlálóhoz, így a hányados csak akkor lehet egész, ha a nevező 1-gyel egyenlő. A  $11^\beta - 2 \cdot 3^{\alpha-1} = 1$  egyenlet már mod 5 sem teljesülhet: a 11 hatványai 1 maradékot adnak, a kivonandó pedig nem osztható 5-tel.

III. eset:  $(z, 33) = 1$

Ekkor helyettesítés, egyszerűsítés és rendezés után a  $\varphi(t) = \frac{10 \cdot 3^{\alpha-1} \cdot 11^{\beta-1}}{5 \cdot 11^{\beta-1} - 3^{\alpha-1}}$  egyenletet kapjuk. Ez pontosan abban a két esetben lenne megoldható, ha a nevező 1-gyel vagy 2-vel egyenlő. Az első eset nem lehetséges, hiszen bárhogy is választjuk meg a kitevőket, a nevező páros. A második esetben  $\varphi(t)$  egy 1-nél nagyobb páratlan szám lenne, ami szintén nem lehetséges. ■

Látjuk tehát, hogy még abban az igen speciális esetben is, amikor  $x$  és  $y$  prímszámok és  $z$  legalább az egyikhez relatív prím, a probléma konkrét prímszámokra is lényegesen eltérő esetek vizsgálatát igényli.

### 4.2.2.3. Az osztók összege függvény

#### 4.2.13. Tétel

Tekintsük a  $\sigma(xy) + \sigma(xz) = \sigma(yz)$  egyenletet.

(i) Nincs olyan megoldás, amelyben a három változó ugyanannak a prímmek lenne a hatványa;

(ii)  $(p_1; p_2; p_3)$  prímekből álló számhármias pontosan akkor megoldás, ha  $p_i$ -k különböző prímekek és  $(p_1 + 1)^2 = (p_2 - p_1)(p_3 - p_1)$ ;

(iii) bármely  $(4k - 1; 5k - 1; 20k - 1)$  alakú prímekből álló számhármashoz tartozik az egyenletnek megoldása.

#### Bizonyítás

(i) Ha  $x = p^\alpha$ ,  $y = p^\beta$ , és  $z = p^\gamma$ , ahol  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^+$ , akkor ebből  $\frac{p^{\alpha+\beta+1} - 1}{p - 1} + \frac{p^{\alpha+\gamma+1} - 1}{p - 1} = \frac{p^{\beta+\gamma+1} - 1}{p - 1}$  következne. Ez nem teljesülhet, hiszen mod  $p$  a bal oldal 2-vel, a jobb oldal 1-gyel kongruens.

(ii) Az egyenletnek nem létezik olyan megoldása, amelyben a három prím közül kettő azonos, hiszen ez csak  $x = p$  és  $y = z = q$  lehetne, és ekkor a  $2(p + 1)(q + 1) = q^2 + q + 1$  egyenletnek kellene teljesülnie, ami ellentmondás, mivel a bal oldal bármilyen  $p, q$  választása mellett páros, míg a jobb oldal páratlan. Ezért  $x = p_1, y = p_2$  és  $z = p_3$  páronként relatív prímekek, így a bizonyítandó egyenlőség (4.2.7.a)-ból adódik, hiszen  $\sigma(n) = n + 1$ , ha  $n$  prím.

Az állítás segítségével konstruálhatunk megoldásokat:  $x = p, y = p + 2$  és  $z = \frac{p^2 + 4p + 1}{2}$  számhármiasra az egyenlet fennáll. Ilyen prímekből álló számhármiasok léteznek, például  $p = 5, q = 7, z = 23$ .

(iii) Ha  $x = 4k - 1, y = 5k - 1$  és  $z = 20k - 1$  prímekek, akkor a (4.2.7.b) hányados alakot használva a  $4k = \frac{5k \cdot 20k}{5k + 20k}$  egyenlőség valóban fennáll.

Ezeket a megoldásokat a 4.2.8. Lemma alapján  $r = 1, s = 4$  megválasztásával konstruáltuk. Ilyen típusú megoldásokat más, a feltételeknek eleget tevő  $r, s$  pozitív egészek választásával is készíthetünk. Például ha  $r = 2, s = 3$ , és  $x = 6k - 1, y = 10k - 1$  és  $z = 15k - 1$  mind

prímek valamilyen  $k$  pozitív egészre, akkor megoldásai az egyenletnek.

Ha végtelen sok olyan  $k$  pozitív egész szám létezik, amire  $4k - 1$ ,  $5k - 1$  és  $20k - 1$ , vagy  $6k - 1$ ,  $10k - 1$  és  $15k - 1$  prímek, akkor a  $\sigma(xy) + \sigma(xz) = \sigma(yz)$  egyenletnek végtelen sok megoldása van a prímek körében. ■

Az osztók száma függvényénél igazoltuk, hogy olyan számhármass nem lehet megoldása a  $d(xy) + d(xz) = d(yz)$  egyenletnek, amelyben két változó négyzetszám. Szintén paritásvizsgálattal és felhasználva, hogy  $\sigma(n)$  pontosan akkor páratlan, ha  $n = m^2$  vagy  $n = 2m^2$  alakú valamilyen  $m \in \mathbb{Z}^+$ -ra, azonnal adódik, hogy a  $\sigma(xy) + \sigma(xz) = \sigma(yz)$  egyenletnek biztosan nem létezik olyan megoldása, amelyben két változó egy négyzetszám vagy egy négyzetszám kétszeresével egyenlő.

Végül egy konkrét kérdés vizsgálatával bemutatjuk, hogy két ismeretlent rögzítve a megoldásszám igen változatos képet mutat.

#### 4.2.14. Tétel

Ha  $x = 2$ , akkor létezik olyan  $y$ , amelyre  $z$ -ben a megoldások száma

- (i) végtelen;
- (ii) egy;
- (iii) nulla.

#### Bizonyítás

(i) Ha  $x = 2$ ,  $y = 3$ , akkor  $z = 3^\alpha \cdot 11$  bármely  $\alpha \in \mathbb{N}$ -re megoldása az egyenletnek.

Elvégezve a helyettesítést:  $12 + 36 \cdot \frac{3^{\alpha+1} - 1}{2} = 12 \cdot \frac{3^{\alpha+2} - 1}{2}$ , majd egyszerűsítés és rendezés után  $12 + 18 \cdot (3^{\alpha+1} - 1) - 6 \cdot (3 \cdot 3^{\alpha+1} - 1) = 0$  adódik, ami valóban bármely  $\alpha \in \mathbb{N}$ -re teljesül.

(ii) Ha  $x = 2$  és  $y = 11$ , akkor az előző esetből – mivel  $y$  és  $z$  szerepe felcserélhető – tudjuk, hogy  $z = 3$  megoldás, most megmutatjuk, hogy ebben az esetben más megoldás nincs.

Keressük  $z$ -t  $z = 2^\alpha \cdot 11^\beta \cdot t$  alakban, ahol  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  és  $(t, 22) = 1$ .

Elvégezve a helyettesítést:  $(2^{\alpha+2} - 1) \cdot \frac{11^{\beta+1} - 1}{10} \cdot \sigma(t) + 36 = (2^{\alpha+1} - 1) \cdot \frac{11^{\beta+2} - 1}{10} \cdot \sigma(t)$ ,

majd egyszerűsítés és rendezés után  $180 = [11^{\beta+1} \cdot (9 \cdot 2^\alpha - 5) + 2^\alpha] \cdot \sigma(t)$  adódik.

Itt a jobb oldal értéke  $\beta \geq 1$ -re legalább 485, így csak  $\beta = 0$  jöhet szóba. Ekkor  $180 = [100 \cdot 2^\alpha - 55] \cdot \sigma(t)$ , amiből csak  $\alpha = 0$  esetben kapunk megoldást:  $180 = 45 \cdot \sigma(t)$ -ből  $\sigma(t) = 4$ , így  $t = 3$ , azaz  $z = 3$  valóban az egyetlen megoldás, ha  $x = 2$  és  $y = 11$ .

(iii) Ha  $x = 2, y = 5$ , akkor nincs megoldás.

Keressük  $z$ -t  $z = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot t$  alakban, ahol  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  és  $(t, 10) = 1$ .

Elvégezve a helyettesítést:  $(2^{\alpha+2} - 1) \cdot \frac{5^{\beta+1} - 1}{4} \cdot \sigma(t) + 18 = (2^{\alpha+1} - 1) \cdot \frac{5^{\beta+2} - 1}{4} \cdot \sigma(t)$ ,

majd egyszerűsítés és rendezés után  $36 = [5^{\beta+1} \cdot (3 \cdot 2^\alpha - 2) + 2^\alpha] \cdot \sigma(t)$  adódik.

Itt a jobb oldal értéke  $\beta \geq 2$ -re legalább 126, így két lehetőséget kell ellenőriznünk.

Ha  $\beta = 0$ , akkor  $36 = [16 \cdot 2^\alpha - 10] \cdot \sigma(t)$ , amiből csak  $\alpha = 0$  jöhet szóba, ekkor  $\sigma(t) = 6$ -ból  $t = 5$ , ami nem relatív prím a 10-hez, így nem megoldás.

Ha  $\beta = 1$ , akkor  $36 = [76 \cdot 2^\alpha - 50] \cdot \sigma(t)$ , amiből nem adódik semmilyen  $\alpha$ -ra megoldás.

Tehát egyetlen megoldást sem kapunk, ha  $x = 2$  és  $y = 5$ .

Az egyenletek vizsgálata  $\varphi(n)$  és  $\sigma(n)$  esetén több hasonlóságot is mutat. Megbeszélhetjük a gyerekekkel, hogy a két függvény további rokon vonásokat is mutat, például az  $|f(n) - n| = 1$  egyenlőség mindkét függvény esetén akkor és csak akkor teljesül, ha  $n$  prím vagy megemlíthetjük nekik, hogy mindkét függvény átlagos nagyságrendje szimmetrikus  $n$ -re:  $\frac{6}{\pi^2}n$ , valamint  $\frac{\pi^2}{6}n$ . Illetve mesélhetünk a tanulóknak olyan matematikatörténeti vonatkozásokról, amelyek ezeket a függvényeket híres (akár máig megoldatlan) antik problémákhoz kötik, úgy mint a szabályos sokszögek szerkeszthetősége vagy a tökéletes számok.

## 5. fejezet

# Számelméleti függvények kompozíciójának kommutativitása

Ebben a részben olyan kérdéseket vetünk fel, amelyek a számelméleti függvények kompozíciójának kommutativitását vizsgálják. A diákok a középiskolai matematika tanulmányaik során számtalanszor találkoznak olyan szituációval, amikor egy számukra újonnan megismert művelet tulajdonságait kell megvizsgálni. Az általános iskolában a valós számok körében végzett műveletekről megtapasztalják, megtanulják, milyen tulajdonságokkal rendelkeznek, és az ott tapasztaltakat összevetik az újonnan tanultakkal, legyen szó halmazműveletekről, vektorműveletekről, függvények összetételéről, logikai műveletekről vagy speciális matematika tagozaton például a mátrixműveletekről. A speciális matematika tagozatos tananyagban szerepelnek csoportelméleti ismeretek is, ami mindezek egyfajta szintézise.

Mind a négy lehetséges helyzettel találkozhatnak, adódik szituáció, amelyben egy művelet asszociatív és kommutatív is (például az unióképzés művelete vagy a konjunkció), amikor nem asszociatív és nem is kommutatív (például halmazok különbségét vagy két vektor vektoriális szorzatát venni), amikor nem asszociatív, de kommutatív (például a számtani közép képzése), és végül amikor egy művelet asszociatív, de nem kommutatív (például függvények kompozíciója vagy az azonos méretű kvadratikusan mátrixok szorzása). Természetesen számtalan egyéb műveletet definiálhatunk, amelyet vizsgálat tárgyává tehetünk, hogy a gyerekekben rögzüljön, a két tulajdonság között nincs ok-okozati összefüggés, tehát ezek egymástól független műveleti tulajdonságok. A középiskolai nem tagozatos tananyagban előforduló helyzetekben megvizsgáljuk, hogy az adott művelet (legyen az a fentiek bármelyike) kommutatív-e, azaz ellenpéldát igyekszünk adni, ha nem az, illetve bizonyítani (megengedve természetesen a szemléletes bizonyítást), ha a művelet eredménye valóban független a műveletben szereplők sorrendjétől. Nemleges válasz esetén, tehát ha egy  $\diamond$  művelet egy  $H$  halmazon nem kommutatív, persze azért kereshetünk olyan  $a, b \in H$  elemeket,

amelyekre teljesül, hogy  $a \diamond b = b \diamond a$ . A legtöbb esetben nem túl nehéz azt megvizsgálni, hogy az adott nem kommutatív művelet esetén mi annak szükséges és elégséges feltétele, hogy  $a \diamond b = b \diamond a$  fennálljon. Például a valós számok körében végzett kivonás, osztás, vagy a halmazok különbségének képzése esetén a gyerekek könnyen meg tudják fogalmazni a szükséges és elégséges feltételt. Persze olyan helyzet is adódik, amikor ezt nem tudjuk megtenni, például a négyzetes mátrixok szorzásának vagy függvények összetételének vizsgálatakor.

Az összetett függvény fogalma, speciálisan a geometriai transzformációk kompozíciójának vizsgálata is része az emelt szintű tananyagának. Azt, hogy a függvények szorzása asszociatív, de nem kommutatív művelet, a gyerekek igen hamar megtapasztalják. Az, hogy két tengelyes tükrözés egymás utáni alkalmazása esetén a sorrend lényeges, vagy az, hogy a nemnulla valós számokra  $-x^2 \neq (-x)^2$ , igen könnyen látható. Természetesen kérhetjük a diákokat, hogy adjanak meg olyan nem triviális  $f$  és  $g$  függvényeket, amelyekre  $f(g(x)) = g(f(x))$  fennáll minden  $x \in \mathbb{R}$ -re. Triviális megoldás például, ha a két függvény közül valamelyik az identitás, vagy ha  $f = h^{(k)}$  és  $g = h^{(l)}$ , ahol  $h^{(m)}$  a  $h$  függvény  $m$ -szeres összetételét jelenti. Nem triviális megoldás például:  $f(x) = x^2$  és  $g(x) = |x|$ .

A számelméleti függvények kompozíciójának kommutativitása is természetesen felmerülő kérdés. Ebben a fejezetben vizsgálatunk tárgya az  $f(g(n)) = g(f(n))$  egyenlet, ahol  $f$  és  $g$  a már megismert számelméleti függvények valamelyike:  $d(n), \varphi(n), \sigma(n), \omega(n)$ , vagy  $\Omega(n)$ . A megoldhatóság különböző aspektusait vizsgáljuk, úgy mint: megadható-e legalább egy megoldás, megadható-e végtelen sok megoldás, megadható-e az egyenlet összes megoldása. Hasonló szemszögből vizsgáljuk az  $f(g(n)) = g(f(n)) = k$  egyenletet rögzített  $k$ -ra, ahol  $k \in \mathcal{R}_f \cap \mathcal{R}_g$ .

**5.1.** Először azzal a két egyenlettel foglalkozunk, amelyek esetén az  $f(g(n)) = g(f(n))$  egyenlet összes megoldását meg tudjuk adni.

### 5.1.1. Tétel

Az  $\Omega(\varphi(n)) = \varphi(\Omega(n))$  egyenlet összes megoldása:  $n = 2^q$ ,  $n = 3$ , vagy  $n = 2^\gamma \cdot 3^{q-\gamma}$ , ahol  $q$  prím, és  $1 \leq \gamma \leq q - 1$  egész.

### Bizonyítás

Először megmutatjuk, hogy ezek a számok valóban megoldások:

- ha  $n = 2^q$ , akkor  $\Omega(\varphi(2^q)) = \Omega(2^{q-1}) = q - 1$ , és  $\varphi(\Omega(2^q)) = \varphi(q) = q - 1$ .

- ha  $n = 3$ , akkor  $\Omega(\varphi(3)) = \Omega(2) = 1$ , és  $\varphi(\Omega(3)) = \varphi(1) = 1$ .

- ha  $n = 2^\gamma \cdot 3^{q-\gamma}$ , ahol  $q$  prím és  $1 \leq \gamma \leq q-1$ , akkor  $\Omega(\varphi(2^\gamma \cdot 3^{q-\gamma})) = \Omega(2^{\gamma-1} \cdot 2 \cdot 3^{q-\gamma-1}) = q - 1$ , és  $\varphi(\Omega(2^\gamma \cdot 3^{q-\gamma})) = \varphi(q) = q - 1$ .

Most megmutatjuk, hogy a fenti alakban megadott számoktól különböző szám nem lehet megoldása az egyenletnek.

Ehhez először belátjuk, hogy 3-nál nagyobb páratlan szám nem lehet megoldás.

(i) Legyen  $3 \nmid n$ , azaz  $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ , ahol  $r \geq 1$ ,  $p_i > 3$  és  $\alpha_i \geq 1$  minden  $i \in \mathbb{Z}^+$ -re.

A jobb oldalon:

$$\varphi(\Omega(n)) = \varphi\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i\right), \text{ mivel } \varphi(k) \leq k \text{ teljesül minden } k \in \mathbb{Z}^+ \text{-ra.}$$

A bal oldalon:

$\Omega(\varphi(n)) \geq \left(\sum_{i=1}^r (\alpha_i - 1)\right) + 2r = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i\right) + r$ , hiszen  $\varphi(n) = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i-1} (p_i - 1)$ . Mivel  $p_i > 3$ , így  $p_i - 1$  páros és legalább két prímtényező szorzata, tehát  $\Omega(p_i - 1) \geq 2$  minden  $i \in \mathbb{Z}^+$ -re. Ebből azt kapjuk, hogy  $\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i\right) + r \leq \Omega(\varphi(n)) = \varphi(\Omega(n)) \leq \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i\right)$ , ami ellentmondás, hiszen  $r \geq 1$ .

(ii) Legyen  $3 \mid n$  úgy, hogy  $n$  nem 3-hatvány, azaz  $n = 3^\delta \cdot \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ , ahol  $\delta \geq 1$ ,  $r \geq 1$ ,  $p_i > 3$  és  $\alpha_i \geq 1$  minden  $i \in \mathbb{Z}^+$ .

A jobb oldalon:  $\varphi(\Omega(n)) = \varphi\left(\delta + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i\right)\right) \leq \delta + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i\right)$ .

A bal oldalon:  $\Omega(\varphi(n)) \geq 1 + \delta - 1 + \left(\sum_{i=1}^r (\alpha_i - 1)\right) + 2r = \delta + \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i\right) + r$ , mivel  $\Omega(\varphi(3^\delta)) = \Omega(2 \cdot 3^{\delta-1}) = 1 + \delta - 1$ .

Tehát ismét ellentmondásra jutunk, a jobb oldal mindig kisebb, mint a bal oldal.

(iii) Ha  $n > 3$  egy 3-hatvány, azaz  $n = 3^\delta$ , ahol  $\delta > 1$ , akkor  $\varphi(\Omega(3^\delta)) = \varphi(\delta) \leq \delta - 1$ , de  $\Omega(\varphi(3^\delta)) = \Omega(2 \cdot 3^{\delta-1}) = \delta$ .

Most megvizsgáljuk, hogy  $n$  lehet-e páros.

(iv) Ha  $n > 2$  egy 2-hatvány, azaz  $n = 2^\gamma$ , ahol  $\gamma > 1$ , akkor  $\varphi(\Omega(2^\gamma)) = \varphi(\gamma) \leq \gamma - 1$ , de  $\Omega(\varphi(2^\gamma)) = \Omega(2^{\gamma-1}) = \gamma - 1$ , tehát az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a  $\gamma$  kitevő prím, jelöljük ezt  $q$ -val, tehát  $n = 2^q$ .

(v) Tegyük fel, hogy  $3 \nmid n$ , de  $n$  nem egy kettőhatvány, azaz  $n = 2^\gamma \cdot \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ , ahol  $\gamma \geq 1$ ,  $r \geq 1$ ,  $p_i > 3$  és  $\alpha_i \geq 1$  minden  $i \in \mathbb{Z}^+$ -re.

A jobb oldalon:  $\varphi(\Omega(n)) \leq \gamma + \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i \right) - 1$ .

A bal oldalon:  $\Omega(\varphi(n)) \geq \gamma - 1 + \left( \sum_{i=1}^r (\alpha_i - 1) \right) + 2r = \gamma + \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i \right) + r - 1$ , ami ellentmondás, hiszen  $r \geq 1$ .

(vi) Ha  $3 \mid n$  és  $n$  prímtényezői között szerepel 3-nál nagyobb prím, azaz  $n = 2^\gamma \cdot 3^\delta \cdot \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ , ahol  $\gamma \geq 1$ ,  $\delta \geq 1$ ,  $r \geq 1$ ,  $p_i > 3$  és  $\alpha_i \geq 1$  minden  $i \in \mathbb{Z}^+$ -re.

A jobb oldalon:  $\varphi(\Omega(n)) \leq \delta + \gamma + \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i \right) - 1$ .

A bal oldalon:  $\Omega(\varphi(n)) \geq \gamma - 1 + \delta - 1 + 1 + \left( \sum_{i=1}^r (\alpha_i - 1) \right) + 2r = \gamma + \delta + \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i \right) + r - 1$ , ismét ellentmondásra jutunk.

(vii) Végül tegyük fel, hogy  $n = 2^\gamma \cdot 3^\delta$  alakú, ahol  $\gamma \geq 1$ ,  $\delta \geq 1$ . Mivel  $\varphi(\Omega(n)) = \varphi(\gamma + \delta) \leq \gamma + \delta - 1$  és  $\Omega(\varphi(n)) = \Omega(2^{\gamma-1} \cdot 2 \cdot 3^{\delta-1}) = \Omega(2^\gamma \cdot 3^{\delta-1}) = \gamma + \delta - 1$ , az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha  $\gamma + \delta$  prím, jelöljük ezt  $q$ -val, azaz  $n = 2^\gamma \cdot 3^{q-\gamma}$ . ■

### 5.1.2. Tétel

$\Omega(\omega(n)) = \omega(\Omega(n)) = k \Leftrightarrow n = \prod_{i=1}^a r_i^{\gamma_i}$  és  $\sum_{i=1}^a \gamma_i = b$ , ahol  $r_i$ -k különböző prímek,  $b \geq a$  pozitív egészek, és  $\Omega(a) = \omega(b) = k$ .

#### Bizonyítás

Ha  $n = \prod_{i=1}^a r_i^{\gamma_i}$  a fenti feltételeknek eleget tesz, akkor  $\Omega(\omega(n)) = \Omega(a) = k$  és  $\omega(\Omega(n)) = \omega(b) = k$  valóban teljesül.

Most megmutatjuk, hogy  $n$  szükségképpen ilyen alakú kell, hogy legyen:

$\Omega(\omega(n)) = k$  akkor és csak akkor áll fenn, ha  $n = \prod_{i=1}^a p_i^{\alpha_i}$ , ahol  $p_i$ -k különböző prímek úgy, hogy  $\Omega(a) = k$ .

$\omega(\Omega(n)) = k$  akkor és csak akkor áll fenn, ha  $n = \prod_{j=1}^s q_j^{\beta_j}$ , ahol  $q_j$ -k különböző prímek úgy,

hogy  $\sum_{j=1}^s \beta_j = b$  és  $\omega(b) = k$ .

Tehát az  $\Omega(\omega(n)) = \omega(\Omega(n)) = k$  egyenlet megoldásai szükségképpen  $n = \prod_{i=1}^a r_i^{\gamma_i}$  alakúak úgy, hogy  $\sum_{i=1}^a \gamma_i = b$ , ahol  $\Omega(a) = \omega(b) = k$  és  $b \geq a$ . ■

Ez a karakterizáció azt is jelenti, hogy az egyenletnek minden rögzített  $k \geq 0$ -ra  $n$ -ben végtelen sok megoldása van.

**5.2.** Ebben a szakaszban olyan egyenletekkel foglalkozunk, amelyeknek habár az összes megoldását nem tudjuk megadni, de minden  $k \in \mathcal{R}_f \cap \mathcal{R}_g$ -re végtelen sok megoldását tudjuk adni, vagy legalább az  $f(g(n)) = g(f(n))$  egyenletnek végtelen sok megoldását tudjuk megadni.

### 5.2.1. Tétel

Az  $\omega(d(n)) = d(\omega(n)) = k$  egyenletnek minden  $k \in \mathbb{Z}^+$ -ra végtelen sok megoldása van.

*Bizonyítás*

$n = p_1 \cdot p_2^{q_1-1} \cdot p_3^{q_2-1} \cdot \dots \cdot p_k^{q_{k-1}-1} \cdot p_{k+1} \cdot \dots \cdot p_{2^{k-1}}$  megoldások, ha  $p_i$  és  $q_j > 2$ -k különböző prímelek, mivel  $\omega(d(n)) = \omega\left(d\left(2 \cdot q_1 \cdot \dots \cdot q_{k-1} \cdot 2^{2^{k-1}-k}\right)\right) = k$  és  $d(\omega(n)) = d(2^{k-1}) = k$ . ■

A 6. fejezetben erre az egyenletre még visszatérünk, és bemutatjuk, hogy semmilyen  $k \in \mathbb{Z}^+$ -ra nem létezik négyzetmentes megoldás.

### 5.2.2. Tétel

Az  $\Omega(d(n)) = d(\Omega(n)) = k$  egyenletnek minden  $k \in \mathbb{Z}^+$ -re végtelen sok megoldása van.

*Bizonyítás*

Minden  $n = p_1 \cdot p_2^{q^{k-1}-1}$  megoldás, ha  $p_1 \neq p_2$  és  $q$  prímelek, hiszen  $\Omega(d(n)) = \Omega(2 \cdot q^{k-1}) = k$  és  $d(\Omega(n)) = d(q^{k-1}) = k$ . ■

### 5.2.3. Tétel

A  $\varphi(d(n)) = d(\varphi(n))$  egyenletnek végtelen sok megoldása van.

*Bizonyítás*

Minden  $n = 2^{p-1}$  megoldás, ha  $p$  prím, mivel  $\varphi(d(n)) = \varphi(p) = p - 1$  és  $d(\varphi(n)) = d(2^{p-2}) = p - 1$ .

Szintén megoldások az  $n = 2^{p-1} \cdot 3^{p-1}$  alakú számok, ha  $p$  prím, mert  $\varphi(d(n)) = \varphi(p^2) = (p - 1) \cdot p$  és  $d(\varphi(n)) = d(2^{p-2} \cdot 2 \cdot 3^{p-2}) = d(2^{p-1} \cdot 3^{p-2}) = p(p - 1)$ .

Az  $n = 2^{2^\alpha-1} \cdot 3$  alakú számok is igazgá teszik az egyenletet, ha  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ , mivel  $\varphi(d(n)) = \varphi(2^\alpha \cdot 2) = \varphi(2^{\alpha+1}) = 2^\alpha$  és  $d(\varphi(n)) = d(2^{2^\alpha-2} \cdot 2) = d(2^{2^\alpha-1}) = 2^\alpha$ . ■

### 5.2.4. Tétel

A  $\omega(\omega(n)) = \omega(\varphi(n)) = 2$  egyenletnek végtelen sok megoldása van.

*Bizonyítás*

Minden  $n = 2^k \cdot 3 \cdot 7$  megoldás, ha  $k$  pozitív egész, mivel  $\varphi(\omega(n)) = \varphi(3) = 2$  és  $\omega(\varphi(n)) = \omega(2^{k-1} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3) = \omega(2^{k+1} \cdot 3) = 2$ . ■

**5.3.** A következőkben olyan egyenleteket vizsgálunk, amelyekre az  $f(g(n)) = g(f(n)) = k$  egyenlet nem minden  $k \in \mathcal{R}_f \cap \mathcal{R}_g$ -re oldható meg (a legkisebb olyan  $k \in \mathcal{R}_f \cap \mathcal{R}_g$  értéket keresve, amelyre az egyenletnek nincs megoldása).

*5.3.1. Tétel*

A  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = 2^m$  egyenlet semmilyen  $m \in \mathbb{Z}^+$ -ra sem oldható meg.

*Bizonyítás*

Azt tudjuk, hogy  $\sigma(n) = 2^m \Leftrightarrow n = \prod_i M_{p_i}$ , ahol  $M_{p_i}$ -k különböző Mersenne-prímek (ez meghatározza  $m$  azon lehetséges értékeit, amelyekre  $2^m$  eleme a  $\sigma$ -függvény értékkészletének).

Ebből következik, hogy  $\sigma(\varphi(n)) = 2^m \Leftrightarrow \varphi(n) = \prod_i M_{p_i}$ , ami ellentmondásra vezet, hiszen  $\varphi(n)$  páros, ha  $n > 2$ , és  $\varphi(\sigma(2)) \neq \sigma(\varphi(2))$ . ■

*5.3.2. Tétel*

A  $\sigma(d(n)) = d(\sigma(n)) = 7$  egyenletnek nincs megoldása.

*Bizonyítás*

A bal oldalon:  $\sigma(d(n)) = 7 \Leftrightarrow d(n) = 4 \Leftrightarrow$  (i)  $n = p_1 \cdot p_2$ , vagy (ii)  $n = p^3$ , ahol  $p_1 \neq p_2$  és  $p$  prímek.

(i) Ha  $n = p_1 \cdot p_2$ , akkor  $d(\sigma(n)) = d((p_1 + 1)(p_2 + 1)) = 7 \Leftrightarrow (p_1 + 1)(p_2 + 1) = q^6$ .

Mivel  $p_1$  és  $p_2$  közül legalább az egyik páratlan, így  $q = 2$ . Ebből viszont az következik, hogy  $p_1$ -nek és  $p_2$ -nek az alábbi Mersenne-prímek egyikének kell lennie:  $2^2 - 1$ ,  $2^3 - 1$ , vagy  $2^5 - 1$ . Azonban a  $(p_1 + 1)(p_2 + 1)$  szorzat egyik esetben sem lesz  $2^6$ .

(ii) Ha  $n = p^3$ , akkor  $d(\sigma(n)) = d(p^3 + p^2 + p + 1) = 7 \Leftrightarrow p^3 + p^2 + p + 1 = q^6 \Leftrightarrow \frac{p^4 - 1}{p - 1} = q^6$ .

Az ismert ([4]), hogy az  $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^m$  egyenletnek nincsen olyan  $x, y > 1$  egész megoldása, amire  $m \geq 2$ , ha  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , amiből az következik, hogy a  $p^3 + p^2 + p + 1 = q^6$  egyenlet nem oldható meg. ■

### 5.3.3. Tétel

A  $d(\varphi(n)) = \varphi(d(n)) = 44$  egyenlet nem megoldható.

#### Bizonyítás

A stratégiánk a következő: megadjuk a jobb, majd a bal oldal által meghatározott összes lehetséges alakot  $\varphi(n)$ -re, majd megmutatjuk, hogy ezek között nincs egyező, tehát az egyenlőség nem állhat fenn semmilyen pozitív egészre.

A jobb oldalon:  $\varphi(d(n)) = 44$  akkor és csak akkor állhat fenn, ha

(A)  $d(n) = 3 \cdot 23$ , vagy

(B)  $d(n) = 2^2 \cdot 23$ , vagy

(C)  $d(n) = 2 \cdot 3 \cdot 23$ .

Ezekből  $n$  kanonikus alakjára a következő lehetőségek adódnak:

(A)  $d(n) = 3 \cdot 23 \Leftrightarrow (A1) n = p^{68}$ , vagy  $(A2) n = p_1^2 \cdot p_2^{22}$

(B)  $d(n) = 2^2 \cdot 23 \Leftrightarrow (B1) n = p^{91}$ , vagy  $(B2) n = p_1^3 \cdot p_2^{22}$ , vagy  $(B3) n = p_1 \cdot p_2^{45}$ , vagy  
 (B4)  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^{22}$

(C)  $d(n) = 2 \cdot 3 \cdot 23 \Leftrightarrow (C1) n = p^{137}$ , vagy  $(C2) n = p_1^5 \cdot p_2^{22}$ , vagy  $(C3) n = p_1^2 \cdot p_2^{45}$ ,  
 vagy  $(C4) n = p_1 \cdot p_2^{68}$ , vagy  $(C5) n = p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3^{22}$ , ahol  $p_i$ -k különböző prímelek, és  $p$  is prím.

Most írjuk fel minden esetben, hogy mit kapunk  $\varphi(n)$ -re:

(A1)  $\varphi(n) = (p - 1) \cdot p^{67}$ , vagy (A2)  $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot p_1 \cdot (p_2 - 1) \cdot p_2^{21}$

(B1)  $\varphi(n) = (p - 1) \cdot p^{90}$ , vagy (B2)  $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot p_1^2 \cdot (p_2 - 1) \cdot p_2^{21}$ ,

vagy (B3)  $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot p_2^{44}$ , vagy (B4)  $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot (p_3 - 1) \cdot p_3^{21}$   
(C1)  $\varphi(n) = (p - 1) \cdot p^{136}$ , vagy (C2)  $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot p_1^4 \cdot (p_2 - 1) \cdot p_2^{21}$ ,  
vagy (C3)  $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot p_1 \cdot (p_2 - 1) \cdot p_2^{44}$ , vagy (C4)  $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot p_2^{67}$ ,  
vagy (C5)  $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot p_2 \cdot (p_3 - 1) \cdot p_3^{21}$ .

Tekintsük a bal oldalt:  $d(\varphi(n)) = 44$ . Ez az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

(I)  $\varphi(n) = q^{43}$ , vagy

(II)  $\varphi(n) = q_1^3 \cdot q_2^{10}$ , vagy

(III)  $\varphi(n) = q_1 \cdot q_2^{21}$ , vagy

(IV)  $\varphi(n) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3^{10}$ , ahol  $q_i$ -k különböző prímekek és  $q$  is prím.

Most hasonlítsuk össze a két oldal alapján kapott lehetőségeket:

1)  $n$  nem lehet a felsoroltak közül (A1), (B1), (B3), (C1), (C3), sem (C4) alakú, hiszen  $\varphi(n)$  szorzatalakjában nem lehet prímkitevő, amelyik nagyobb, mint 43.

2)  $n$  nem lehet (B2) vagy (C2) alakú sem, mivel  $\varphi(n)$  szorzatalakjában nem lehet két különböző prím, amelyek közül az egyik kitevője legalább 21, a másik kitevője pedig több, mint 1.

3)  $n$  nem lehet (A2) vagy (C5) alakú sem, mert ebben az esetben  $\varphi(n)$  az (I)-(IV)-ben felsorolt szorzatalakoktól mind különbözik.

4)  $n$  nem lehet (B4) alakú, habár  $\varphi(n) = (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot (p_3 - 1) \cdot p_3^{21}$  lehetne  $\varphi(n) = q^{43}$  alakú, ha  $p_3 = q = 2$  és  $p_1, p_2$  Fermat-prímekek, de ha  $p_1 = 2^a + 1$  és  $p_2 = 2^b + 1$  különböző prímekek úgy, hogy  $a$  és  $b$  különböző 2-hatványok, akkor az  $a + b = 22$  egyenletnek teljesülnie kellene, de ilyen  $a$  és  $b$  2-hatványok nincsenek. ■

Bizonyítható, hogy nemcsak a  $d(\varphi(n)) = \varphi(d(n)) = 44$  egyenlet nem oldható meg, hanem a  $d(\varphi(n)) = \varphi(d(n)) = 4s$  sem, amennyiben  $s$  és  $2s + 1$  prímekek, valamint  $2s$  nem áll elő két 32-nél kisebb kettőhatvány összegeként. Hasonlóképpen a  $d(\varphi(n)) = \varphi(d(n)) = 8s$  egyenletnek sincs megoldása abban az esetben, ha  $s$  és  $4s + 1$  prímekek, illetve  $4s$  nem áll elő két 32-nél kisebb kettőhatvány összegeként.

**5.4.** Ebben a szakaszban olyan eredményeket fogalmazunk meg, amelyek néhány jól ismert, prímeekre vonatkozó sejtéssel is kapcsolatosak.

#### 5.4.1. Tétel

Bármely  $M_p$  Mersenne-prímhez tartozik az  $\omega(\sigma(n)) = \sigma(\omega(n))$  egyenletnek megoldása. Hasonlóképp, bármely  $p^2 + p + 1$  alakú prímhez is, ahol  $p$  maga is prím.

Ez tehát azt is jelenti, hogy ha végtelen sok Mersenne-prím vagy végtelen sok olyan  $p$  prím létezik, amire  $p^2 + p + 1$  is prím, akkor az  $\omega(\sigma(n)) = \sigma(\omega(n))$  egyenletnek végtelen sok megoldása van.

#### Bizonyítás

Ha  $M_p = 2^p - 1$  Mersenne-prím, akkor  $n = 2^{p-1}$  megoldása az egyenletnek, mivel  $\omega(\sigma(2^{p-1})) = \omega(2^p - 1) = \omega(M_p) = 1$  és  $\sigma(\omega(2^{p-1})) = \sigma(1) = 1$ .

Ha  $q = p^2 + p + 1$  prím, és  $p$  is a prím (például  $p = 3, 5, 17$ -re  $q = 13, 31, 307$ ), akkor  $n = p^2$  megoldás, hiszen  $\omega(\sigma(p^2)) = \omega(p^2 + p + 1) = \omega(q) = 1$  és  $\sigma(\omega(p^2)) = \sigma(1) = 1$ . ■

Két hasonló állítást fogalmazunk meg az alábbiakban.

#### 5.4.2. Tétel

Bármely  $q = \frac{p+1}{4}$  alakú páratlan prímhez, ahol  $p \neq 43$  prím, tartozik a  $d(\sigma(n)) = \sigma(d(n))$  egyenletnek megoldása.

Annak ellenére, hogy az ismert, hogy az  $a_k = 4k - 1$  számtani sorozat végtelen sok  $p$  prímet tartalmaz, azt nem tudjuk, hogy ez végtelen sokszor előfordul-e úgy, hogy  $k$  maga is prím.

#### Bizonyítás

$n = 3^4 \cdot p$  megoldása az egyenletnek, ha  $p$  teljesíti a fenti feltételeket, hiszen  $d(\sigma(3^4 \cdot p)) = d(11^2 \cdot (p+1)) = d(11^2 \cdot 4q) = d(2^2 \cdot 11^2 \cdot q) = 18$ , és  $\sigma(d(3^4 \cdot p)) = \sigma(10) = 18$ . ■

#### 5.4.3. Tétel

Bármely  $q = \frac{p+1}{4}$  prímhez, ahol  $p$  prím, tartozik az  $\Omega(\sigma(n)) = \sigma(\Omega(n))$  egyenletnek megoldása.

*Bizonyítás*

$n = 2^2 \cdot p$  megoldása az egyenletnek, ha  $p$  teljesíti a fenti feltételeket, hiszen  $\Omega(\sigma(2^2 \cdot p)) = \Omega(7 \cdot (p + 1)) = \Omega(7 \cdot 4q) = \Omega(2^2 \cdot 7 \cdot q) = 4$ , és  $\sigma(\Omega(2^2 \cdot p)) = \sigma(3) = 4$ . ■

Az 5.4.3. Tétel nagymértékben általánosítható:

*5.4.4. Tétel*

Ha minden pozitív egész  $l$ -hez létezik  $p > 2$  és  $q$  prím, amelyre  $q = \frac{p+1}{2^l}$ , akkor az  $\Omega(\sigma(n)) = \sigma(\Omega(n)) = k$  egyenletnek létezik legalább egy megoldása minden olyan  $k$  pozitív egészre, ami a  $\sigma$ -függvény értékkészletének eleme.

*Bizonyítás*

Legyen  $n = 2^s \cdot p$  alakú, ahol  $p$  egy páratlan prím és  $s$  pozitív egész. Mivel  $k$  a  $\sigma$ -függvény értékkészletének eleme, a  $\sigma(\Omega(2^s \cdot p)) = \sigma(s + 1) = k$  egyenlet meghatároz legalább egy  $s$ -értéket, amire az összefüggés fennáll. Másrészt  $\Omega(\sigma(2^s \cdot p)) = \Omega((2^{s+1} - 1)(p + 1)) = \Omega(2^{s+1} - 1) + \Omega(p + 1)$ .

$\Omega(2^{s+1} - 1)$  értékét  $s$  meghatározza, jelöljük ezt  $t$ -vel:  $\Omega(2^{s+1} - 1) = t$ , másképp kifejezve  $\Omega(p + 1) = k - t$ . Mivel  $k \geq s + 1$  és  $\Omega(2^{s+1} - 1) \leq \log_2(2^{s+1} - 1) < s + 1$ , ezért  $k - t \geq 1$  minden  $s \in \mathbb{Z}^+$ -re. Ha bármely  $k - t - 1 = l \in \mathbb{N}$ -re léteznek olyan  $p, q$  prímek, amelyekre  $p + 1 = 2^l \cdot q$ , akkor  $n = 2^s \cdot p$  megoldása az egyenletnek, hiszen  $\Omega(\sigma(n)) = \Omega((2^{s+1} - 1) \cdot (p + 1)) = \Omega(2^{s+1} - 1) + \Omega(p + 1) = t + \Omega(2^l \cdot q) = t + (l + 1) = t + (k - t - 1 + 1) = k$ . És  $\sigma(\Omega(2^s \cdot p)) = \sigma(s + 1) = k$  szintén teljesül, hiszen így adtuk meg  $s$  értékét. ■

Mielőtt rátérnénk a következő problémára, szükségünk lesz arra, hogy tudjuk, hogy az  $F_i$  Fermat-prímekhez,  $0 \leq i \leq 4$ , létezik olyan  $p_i$  prímkitevő, amelyre az  $\frac{F_i^{p_i} - 1}{F_i - 1}$  számok különböző prímek, például  $p_0 = p_1 = p_2 = 3, p_3 = 23$ , és  $p_4 = 7$ .

*5.4.5. Tétel*

Legyen  $0 \leq k \leq 4$ , és legyenek  $p_i$ -k olyan prímek, hogy az  $F_i$  Fermat-prímekkel képezett  $\frac{F_i^{p_i} - 1}{F_i - 1}$  számok különböző prímekeket adnak minden  $0 \leq i \leq k$ -ra. Ekkor  $n = \prod_{i=0}^k F_i^{p_i - 1}$  megoldása a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n))$  egyenletnek.

*Bizonyítás*

A bal oldalon:

$$\varphi \left( \sigma \left( \prod_{i=0}^k F_i^{p_i-1} \right) \right) = \varphi \left( \prod_{i=0}^k \frac{F_i^{p_i} - 1}{F_i - 1} \right) = \prod_{i=0}^k \left( \frac{F_i^{p_i} - 1}{F_i - 1} - 1 \right) = \prod_{i=0}^k \frac{F_i^{p_i-1} - 1}{F_i - 1} \cdot \prod_{i=0}^k F_i.$$

Az utolsó egyenlőség az alábbi algebrai átalakításból adódik:  $\frac{F_i^{p_i} - 1}{F_i - 1} - 1 = \frac{(F_i^{p_i-1} - 1)F_i}{F_i - 1}$ .

A jobb oldalon:

$$\begin{aligned} \sigma \left( \varphi \left( \prod_{i=0}^k F_i^{p_i-1} \right) \right) &= \sigma \left( \prod_{i=0}^k F_i^{p_i-2} \cdot (F_i - 1) \right) = \sigma \left( \prod_{i=0}^k F_i^{p_i-2} \cdot 2^{2^i} \right) = \\ &= \sigma \left( \prod_{i=0}^k F_i^{p_i-2} \cdot \prod_{i=0}^k 2^{2^i} \right) = \sigma \left( \prod_{i=0}^k F_i^{p_i-2} \right) \cdot \sigma \left( \prod_{i=0}^k 2^{2^i} \right) = \\ &= \sigma \left( \prod_{i=0}^k F_i^{p_i-2} \right) \cdot \sigma \left( 2^{2^k+2^{k-1}+\dots+1} \right) = \prod_{i=0}^k \frac{F_i^{p_i-1} - 1}{F_i - 1} \cdot \sigma \left( 2^{2^{k+1}-1} \right) = \\ &= \prod_{i=0}^k \frac{F_i^{p_i-1} - 1}{F_i - 1} \cdot (2^{2^{k+1}} - 1) = \prod_{i=0}^k \frac{F_i^{p_i-1} - 1}{F_i - 1} \cdot (F_{k+1} - 2) = \prod_{i=0}^k \frac{F_i^{p_i-1} - 1}{F_i - 1} \cdot \prod_{i=0}^k F_i. \blacksquare \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy ez Golomb egy állításának ([9], 99.o.) általánosítása:  $n = 3^{p_0-1}$  megoldása a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n))$  egyenletnek, ha  $p_0$  és  $\frac{3^{p_0}-1}{2}$  prímek. Valóban,  $\varphi(\sigma(3^{p_0-1})) = \varphi \left( \frac{3^{p_0} - 1}{2} \right) = \frac{3^{p_0} - 3}{2}$ , és  $\sigma(\varphi(3^{p_0-1})) = \sigma(2 \cdot 3^{p_0-2}) = 3 \cdot \left( \frac{3^{p_0-1} - 1}{2} \right) = \frac{3^{p_0} - 3}{2}$ .  $F_0 = 3$ -ra létezik olyan kitevő, amire  $\frac{3^{p_0} - 1}{2}$  prím, például  $p_0 = 3, 7, 13, 71$ , és  $103$ .

A további Fermat-prímekre:  $F_1 = 5$  és  $F_2 = 17$  esetén ilyen kitevő például  $p_1 = p_2 = 3$ , ezért  $n = 3^6 \cdot 5^2$  és  $n = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17^2$  megoldásai a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n))$  egyenletnek.

$F_3 = 257$ -ra és  $F_4 = 65537$ -re például a WolframAlpha segítségével találhatunk ilyen kitevőket,  $F_3$ -ra például  $p_3 = 23$ ,  $F_4$ -re például  $p_4 = 7$  alkalmas. Tehát az eredeti egyenletünknek létezik négy vagy öt különböző prímfaktorral rendelkező megoldása is.

Azt, hogy vajon végtelen sok alkalmas  $p_i$  prímkitevő létezik-e, amelyre az  $\frac{F_i^{p_i} - 1}{F_i - 1}$  hányadosok különböző prímekek, nem tudjuk. Ha igen, akkor a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n))$  egyenletnek végtelen sok megoldása van.

**5.5.** Ebben a szakaszban külön foglalkozunk az  $f(g(n)) = g(f(n)) = 1$  egyenlettel. Ezt azért gondoljuk külön egységként tárgyalni, mert egy esetet leszámítva az egyenletek összes megoldását meg tudjuk adni, a gyerekek számára ezeket a megoldásokat könnyen hozzáférhetőnek gondoljuk, a megoldások igen változatos képet mutatnak. Illetve már ennek a speciálisan megválasztott, és talán ezért lehet, hogy egyszerűnek vélt probléma megoldásának kapcsán is szembetalálkozunk nem várt nehézséggel, ami jól illusztrálja, hogy a legegyszerűbbnek tűnő kérdés is olyan problémákhoz vezethet, amik máig megoldatlanok, bár részeredmények ismertek.

#### 5.5.1. Feladat

Bizonyítsuk be, hogy  $\omega(\varphi(n)) = \varphi(\omega(n)) = 1$  összes megoldása:  $n = F_i$ , vagy  $n = F_i \cdot F_j$ , vagy  $n = 2^\alpha$ , vagy  $n = 2^\alpha \cdot F_i$ , ahol  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$  és  $F_i \neq F_j$  Fermat-prímekek.

#### Bizonyítás

$\varphi(\omega(n)) = 1 \Leftrightarrow (A) \omega(n) = 1$  vagy  $(B) \omega(n) = 2$ .

(A)  $\omega(n) = 1 \Leftrightarrow n = p^\alpha$ , ahol  $p$  prím és  $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ .

Mivel  $\omega(\varphi(p^\alpha)) = \omega((p-1)p^{\alpha-1}) = 1 \Leftrightarrow (p-1)p^{\alpha-1} = q^\gamma$ , ahol  $q$  prím és  $\gamma \in \mathbb{Z}^+$ , ebből következik, hogy:

(A1) ha  $\alpha = 1$ , akkor  $p-1 = q^\gamma \Leftrightarrow q = 2$ , tehát  $p = 2^\gamma + 1$  prím, amiből  $n = F_i$ , vagy

(A2) ha  $\alpha > 1$ , akkor  $p = 2$ , ebből következik, hogy  $n = 2^\alpha$ .

(B)  $\omega(n) = 2 \Leftrightarrow n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$ , ahol  $p_1 \neq p_2$  prímekek és  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}^+$ .

Mivel  $\omega(\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2})) = \omega((p_1-1)p_1^{\alpha_1-1} \cdot (p_2-1)p_2^{\alpha_2-1}) = 1 \Leftrightarrow (p_1-1)p_1^{\alpha_1-1} \cdot (p_2-1)p_2^{\alpha_2-1} = q^\gamma$ , ahol  $q$  prím és  $\gamma \in \mathbb{Z}^+$ , ebből következik, hogy:

(B1) ha  $\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1$ , akkor nincs megoldás, vagy

(B2) ha  $\alpha_1 > 1, \alpha_2 = 1$ , akkor  $n$  szükségképpen  $n = 2^\alpha \cdot F_i$  alakú, vagy

(B3) ha  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ , akkor  $n$  kanonikus alakja:  $n = F_i \cdot F_j$ . ■

A következő bizonyítási feladatok igen egyszerűek, ezek közül többet a 6. fejezetben említünk, itt csak az eredményeket közöljük:

### 5.5.2. Feladatok

Bizonyítsuk be, hogy

(i)  $\omega(d(n)) = d(\omega(n)) = 1 \Leftrightarrow n = p^{q^\beta - 1}$ , ahol  $p, q$  prímek és  $\beta \in \mathbb{Z}^+$ .

(ii)  $\Omega(d(n)) = d(\Omega(n)) = 1 \Leftrightarrow n = p$ , ahol  $p$  prím.

(iii)  $\varphi(d(n)) = d(\varphi(n)) = 1 \Leftrightarrow n = 1$  vagy  $n = 2$ .

(iv)  $\sigma(d(n)) = d(\sigma(n)) = 1 \Leftrightarrow n = 1$ .

(v)  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = 1 \Leftrightarrow n = 1$ .

(vi)  $\Omega(\sigma(n)) = \sigma(\Omega(n)) = 1 \Leftrightarrow n = 2$ .

(vii)  $\Omega(\varphi(n)) = \varphi(\Omega(n)) = 1 \Leftrightarrow n = 3, 4$  vagy  $6$ .

(viii)  $\Omega(\omega(n)) = \omega(\Omega(n)) = 1 \Leftrightarrow n = \prod_{i=1}^q p_i^{\alpha_i}$  és  $\sum_{i=1}^q \alpha_i = r^\beta$ , ahol  $p_i$ -k különböző prímek,  $q, r$  prímek, és  $\alpha_i, \beta \in \mathbb{Z}^+$ .

### 5.5.3. Probléma

Végül rátérünk az  $\omega(\sigma(n)) = \sigma(\omega(n)) = 1$  egyenletre, aminek csak részeredményét ismerjük.

$$\sigma(\omega(n)) = 1 \Leftrightarrow \omega(n) = 1 \Leftrightarrow n = p^\alpha, \text{ ahol } p \text{ prím és } \alpha \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\omega(\sigma(p^\alpha)) = \omega\left(\frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} = q^\beta, \text{ ahol } q \text{ prím és } \beta \in \mathbb{Z}^+.$$

Ha  $\beta = 2$ , akkor ismert, hogy az egyetlen megoldás a  $p = 3$ ,  $\alpha = 4$ , és  $q = 11$  ([4]). Az általánosabb Nagell-Ljunggren egyenlet:  $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^m$ , ahol  $x, y > 1$  és  $n > 2, m \geq 2$  megoldhatóságával kapcsolatban ismertek részeredmények, de ezek nem segítenek abban, hogy olyan megoldásokat találjunk, amik esetén  $\beta > 2$ . Már az sem világos, hogy létezik ilyen megoldás. A  $\beta = 1$  esetben kapott részeredmények a 6. fejezetben találhatóak.

## 6. fejezet

# A szakkör

### 6.1. A célok

Ahogy azt a bevezetésben említettük, a speciális matematika tagozaton a számelméleti függvények szerepelnek a reguláris órák tananyagában. De még a tagozatos csoportokban is igencsak korlátozott annak lehetősége a tanórákon, hogy a gyerekek önálló kisebb kutatásokat végezzenek (bármilyen témában), hiszen erre tipikusan nem áll rendelkezésre elegendő idő. A tanórákon többnyire nem nyíltvégű problémákkal foglalkozunk. Szakköri keretek között erre inkább adódik lehetőség. Természetesen a matematika tagozatra járó diákok életében a matematika szakkör állandó jelenség a hat év alatt. A szakkör céljai többfélék, az azokon folyó munka például hol egy matematikaversenyre való készülést segíti, hol az órai keretekbe már be nem férő témákat tárgyalunk. A szakkörön inkább adódik alkalom egy adott témában való kalandozásra, mert persze egy tanórai feladat kapcsán is lehetősége van a gyerekeknek arra, hogy maguk vessenek fel problémákat, és kezdjük el az általuk kijelölt irányban gondolkodni tovább, de azt nem mondhatjuk, hogy ez lenne a tipikus. A szakkörön ez inkább megvalósítható. A tagozatos tanórákon megismerkedünk tehát a számelméleti függvényekkel, számos remek feladat segíti a függvényekről tanultak elmélyülését, de érthető okok miatt azt a fajta önálló kísérletezést, amit a szakkör a céljául tűzött ki, egy tanóra keretein belül nehéz megvalósítani. A szakkör tehát arra tett kísérletet, hogy a gyerekeknek olyan problémákat vessen fel, amik lehetővé teszik a divergens gondolkozást, a cél az volt, hogy a probléma feldolgozása lehetőséget adjon a teljesen önálló kísérletezésre, hogy ki-ki kreativitásához, matematikai és egyéb készségeihez mérten teret kaphasson az alkotásra. Természetesen az is cél volt, hogy egy-két olyan tanult problémamegoldási stratégiát felelevenítsék ebben az új környezetben, ami többször, sok különböző szituációban alkalmazható, és amiknek további elmélyítése hasznos. Azt is szerettem volna, ha új, akár a tagozatos kereteken is túlmutató ismeretekkel is gyarapszik a gyerekek tudása. Ami nem volt cél: nem kívántam frontális munka formájában feldolgozni a problémákat, a kimon-

dott tételek bizonyításait megtanítani vagy adott kérdés esetén a saját konstrukcióimat a gyerekekkel megismertetni, a legfőbb cél az volt, hogy az önálló felfedezést szorgalmazzam és segítsen.

## 6.2. A körülmények, a tervezés

A szakkört a gimnázium speciális matematika tagozatán tanuló néhány 9. osztályos gyerekeknek (a létszám változó volt) szerveztem heti rendszerességgel. Tekintve, hogy erre a 2017/18-as iskolai tanév utolsó hónapjaiban került sor, nem voltak vérmes reményeim azt tekintve, hogy a gyerekek - egyébként is sok kötelezettségük mellett - heti sok-sok órát tudnak majd szentelni az otthoni teljesen önálló kutakodásnak, de reméltem, hogy felkeltem majd érdeklődésüket a probléma iránt, és lesznek, akik önállóan is dolgoznak a feladatokon, illetve hogy lesznek saját problémafelvetéseik is. A szakkör tehát inkább abba kívánt betekintést adni a gyerekeknek, hogy hogyan is nézhet ki a kutatómunka, részleteiben nem egy lényegében teljesen új és eddig ismeretlen témát kívántam megismertetni a gyerekekkel (bár az, hogy a részleteket ilyen formán raktuk egymás mellé, nyilván teljesen új volt számukra). Természetesen a tervezésnél azt gondoltam, hogy a kutakodásban hol inkább, hol kevésbé lesz szükség tanári irányításra. A foglalkozásoknak tehát természetesen volt előzetes terve, de azokat igyekeztem tudatosan, a gyerekekre figyelve (az adott foglalkozáson belül is) rugalmasan alakítani, a soron következő foglalkozás tervét pedig mindig úgy készíteni, hogy az reflektáljon az előző órai történésekre, a gyerekek gondolataira. A gyerekek a szakköri órákon történekről a foglalkozást követően prezentációt kaptak e-mailben (az eredetileg készített prezentáció megfelelő módosítása után). A prezentáció tipikusan a „házi feladatként” kapott néhány kérdést is tartalmazta, amiken a gyerekek a következő alkalomig gondolkodhattak, de ha ezekben nem volt lényegi előrehaladás, azt nem tekintettem problémának.

A szükséges előismeretekről: a gyerekek tehát mind a 9.-es tagozatos osztályból kerültek ki (nem a saját tanítványaim közül), önkéntes alapon vettek részt a szakkörön, a „válogatás” egyetlen szempontja az volt, hogy ezek a diákok a számelméleti függvényekről nem a szakkörön hallottak először, azokról tanórai keretek között már tanultak, így az

azokkal kapcsolatos alapvető ismeretekkel már rendelkeztek (és mivel különböző évfolyamokon tanulók esetében órarendileg összeegyeztetni egy közös szakkört igen nagy kihívást jelent, majdhogynem a lehetetlent, így, habár a közvetlenül felettük lévő évfolyam diákjait is bevonhattam volna a munkába, ezt végül nem tettem). Másra igazán nem volt szükség, a kommutativitás fogalma ekkorra természetesen már része a gyerekek eszköztárának, addigi matematikai tanulmányaik során már sokszor találkoztak vele, több különböző matematikai környezetben vizsgálták műveletek tulajdonságait. A diákokról tudtam, hogy előzetes ismeretük az összetett függvényről közvetve volt: úgy találkoztak már ezzel a fogalommal, hogy például ha adott az  $f(x) = 3x + 7$  függvény, akkor ennek a függvénynek az „ $x + 1$ ” helyen vett helyettesítési értéke  $f(x + 1) = 3(x + 1) + 7$ . Tehát rutinjuk a kompozíció műveletének alkalmazásában bizonyítanál nem volt, de – mint ahogy arról később lesz szó, és mint ahogy azt előzetesen feltételeztem – a bevezető foglalkozáson igen könnyen elsajátították ezt a fogalmat általánosságban.

Amikor ezeket a diákokat kérdeztük meg arról, részt vennének-e ebben a szakköri munkában, tulajdonképpen tehát „csak” a számelméleti ismereteik megléte volt szempont. Persze (a leginkább) a matematikatanárunktól származó információk alapján azt is tudtam róluk, hogy matematikából (is) tehetséges, a matematika iránt (is) érdeklődő, de általában véve is szorgalmas gyerekek.

### 6.3. A foglalkozások

A foglalkozásoknak tehát, ahogy azt korábban említettem, volt előzetes terve, de természetesen nem mindig az eredeti terv valósult meg, volt, hogy a gyerekek kérdései, felvetései más irányba vitték a tervezett menetet, de ezt örvendetesnek gondoltam. A felépítést tekintve persze arra törekedtem, hogy kezdetben olyan problémát tűzzek ki, aminek vizsgálata várhatóan azonnali sikerélményt garantál. Ahhoz, hogy a gyerekeket „megnyerjem” a szakkörnek, ez szükséges volt, mindamelllett, hogy a gyerekek már az első órára is lelkesen érkeztek. A későbbiekben persze olyan kérdések, bizonyítások is terítékre kerültek, amik már komplexebbek voltak, de a fokozatosság fontos tervezési szempont kellett, hogy legyen ebben a munkában is. A továbbiakban ebből a munkából idézek, a foglalkozáson

történeteket kronologikus sorrendben felelevenítve.

A bevezető foglalkozás leginkább a gyerekek ismereteinek feltérképezéséről és az elvileg meglévő ismereteik felelevenítéséről szólt. Valamint a munkalétkör megteremtéséről, tekintve, hogy ezekkel a gyerekekkel korábban még sosem dolgoztam együtt, némelyiküket látásból ismertem. Átismételtük az öt vizsgált számelméleti függvény definícióját és azt, hogy a kanonikus alakból hogyan határozzuk meg az értéküket. Az Euler-féle  $\varphi$ -függvény esetén a formula többféle alakját is megbeszéltük. Kiemeltük a különbséget  $\omega$  és  $\Omega$  között. Felelevenítettünk egy-két feladatot, amikben ezek a függvények előfordultak, mint a bizonyítás kulcs gondolata. Felidézttünk olyan fogalmakat mint multiplikatívitas, és megvitattuk, hogy ebből a szempontból függvényeink hogyan viselkednek (illetve, hogy tulajdonképpen ezen tulajdonság és a definíció segítségével hogyan adódnak az ismert képletek).

Az első foglalkozáson már szó volt arról, hogy mi mindent tudunk a függvények értékkészletéről, a következőkben nem feltétlen különválasztva, hogy mi az, ami ismétlésnek, mi az, elvileg ismert gondolat „újráfelfedezésének” és mi az, ami újdonságnak számított. A gyerekek természetesen minden nehézség nélkül tudták, hogy  $d(n)$ ,  $\omega(n)$  és  $\Omega(n)$  bármely pozitív egész értéket felvesz, utóbbi kettő a nullát is. Azt is megbeszéltük, hogy  $d(n)$  esetén az 1-et, utóbbi kettő esetén a 0-át leszámítva bármelyik értéket végtelen sokszor vesz fel. Ők is szorgalmazták az összehasonlítást, hogy ezzel szemben a másik két számelméleti függvény, a  $\sigma(n)$  és  $\varphi(n)$  nem minden pozitív egész számot vesz fel helyettesítési értéként, hoztak példát arra, hogy melyik pozitív egész számot nem találjuk egyik, illetve másik értékkészletében. Arra, hogy  $\varphi(n)$  értékkészletéből nem csak „néhány” érték marad ki, megbeszéltük annak bizonyítását, hogy  $\varphi(n)$  páros, ha  $n \geq 3$ . Didaktikailag fontosnak tartom, hogy ha lehet, egy tételre több bizonyítást adjunk, így itt is megbeszéltük, hogy ez a tétel hogyan következik a képletből, illetve hogy a képlet mint „nagyágyú” nélkül is igazolható az állítás, felhasználva a legnagyobb közös osztó azon tulajdonságát, hogy minden  $n > 1$  egészre teljesül, hogy  $(a, n) = (n - a, n)$ , ahol  $1 \leq a < n$ . Az egyik tanuló felvetette, hogy a páros számok közül azok, amik  $p - 1$  alakúak, ahol  $p$  páratlan prím, biztosan előfordulnak az értékkészletben, egy másik diák pedig emlékezett arra, hogy  $\varphi(n) = 2^k$  biztosan teljesül valamilyen  $k \in \mathbb{Z}^+$ -ra, ha  $n = 2^{k+1}$ .

A gyerekek ügyesen összeszedtek néhány dolgot, és ezeket megpróbáltuk teljesen kiaknázni, illetve tovább is vinni: némi tanári irányítással egy gyerek fogalmazta meg a kérdést, hogy vajon igaz-e, hogy  $\varphi(n)$  értékészletében minden páros szám szerepel-e. Erre a választ és a legkisebb ellenpéldát is megbeszéltük. A kettőhatványok kapcsán egy másik irányba is elkalandoztunk: az, hogy  $n$  kettőhatvány, valóban elégséges feltétele annak, hogy  $\varphi(n)$  kettőhatvány legyen, ahogy az egyik diák ezt felelevenítette, de azt is megbeszéltük, hogy ez nem szükséges feltétel, tisztáztuk a Fermat-prím definícióját, és ezután megfogalmaztuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy  $\varphi(n)$  kettőhatvány legyen. Ezen a ponton természetesen adódott a kérdés a kettőhatványokkal kapcsolatban, hogy vajon  $\sigma(n)$  is lehet-e kettőhatvány. Az egyik tanuló még korábban megfogalmazta, hogy a  $\sigma(n) = 2$  egyenletnek nincs megoldása, erre visszatérve megbeszéltük, hogy van olyan kettőhatvány, amire az egyenlet megoldható. Felelevenítettük a Mersenne-számokat, a Mersenne-prímek kapcsán tanult szükséges, de nem elégséges feltételt a kitevőre ( $M_{11}$ -t faktorizáltuk is). Módszertanilag mindig fontos, hogy kihangsúlyozzuk az összehasonlítást, összefoglaljuk a párhuzamokat, különbségeket:  $\varphi(n)$  tehát bármilyen kettőhatvány értéket felvehet,  $\sigma(n)$  nem. A másik fontos összehasonlítást is megtettük: míg  $d(n)$  bármely 1-től,  $\omega(n)$ , és  $\Omega(n)$  bármely 0-tól különböző pozitív egész értéket végtelen sok különböző helyen felvesz, addig  $\sigma(n)$  és  $\varphi(n)$  a felvett értékeket csak véges sok különböző helyen veszi fel.

Egy másik kérdést is felelevenítettünk a paritással kapcsolatban: habár  $\varphi(n)$  értékei között 1-nél nagyobb páratlan szám nem szerepel,  $d(n)$  értékei között minden pozitív páratlan szám előfordul. Megbeszéltük az alábbi feladatot: „Egy kegyetlen várúr börtönének 400 szűk cellájában egy-egy rab sínylődik. A cellák ajtaján levő zár úgy működik, hogy egy elfordítás esetén nyílik, még egy elfordítás esetén ismét bezárul stb. Jelenleg természetesen minden ajtó zárva van. A várúr a születésnapján elhatározza, hogy nagylelkű lesz, és megparancsolja az egyik őrnek, hogy fordítson egyet valamennyi záron. Közben azonban meggondolja magát, és utánaküld egy másik őrt, akit azzal bíz meg, hogy minden második záron fordítson egyet. Ezt követi a harmadik őr, aki minden harmadik záron változtat stb., végül a négyszázadik őr a négyszázadik cella zárjának az állását módosítja. Azok a rabok szabadulnak ki, akiknek most nyitva áll az ajtaja. Hány rabot bocsátott szabadon a

várúr?”.<sup>15</sup> Az a kérdésekre adott válaszok nyomán számomra nem derült ki egyértelműen, hogy a gyerekek találkoztak-e már korábban ezzel a feladattal, mindenesetre ezen a foglalkozáson úgy tűnt, a diákok nem emlékezetből oldották meg a feladatot. Az első észrevételek egyike az volt, hogy a prímek nem szabadulnak ki, majd a szisztematikus próbálkozás után eljutottunk ahhoz a sejtéshez, hogy  $d(n)$  akkor és csak akkor páratlan, ha  $n$  négyzetszám. Ezt a kanonikus alakból felírt képlettel, és anélkül is igazoltuk, az osztópárok fogalmát használva, hogy lássuk, lehet  $d(n)$  ezen tulajdonságát akár úgy is bizonyítani, hogy a szám prímtényezőss felbontását nem használjuk.

Hogy a vizsgálni kívánt számelméleti függvények által felvett értékekről valami újdonság is elhangozzék, és ízelítőt kapjanak a gyerekek abból, mi minden kérdést lehet ezzel kapcsolatban még vizsgálni, megismertettem őket a ( $d(n)$ -re vonatkozó) hegy- és völgytéttel. Természetesen az nem volt célom, hogy a bizonyítást is megbeszéljem velük - még nagy vonalakban sem (még ha ez lehetséges is lett volna, mert rendelkeztek a szükséges előismeretekkel). Illetve ennek szerves folytatásaként arról is meséltem nekik, mit jelent egy számelméleti függvény átlagértéke.

Az értékészlettel kapcsolatos kérdések sorát két, a felvett értékre adható triviális becsléssel zártuk:  $\varphi(n) \leq n - 1$  és  $\sigma(n) \geq n + 1$  minden 1-nél nagyobb természetes számra. Ezeket a becsléseket, habár azok az előre elkészített prezentációban szerepeltek, a gyerekek vetették fel, még mielőtt arra az általam kigondolt haladási tervben sor került volna. Ez ismét csak örvendetes volt, a gyerekek igazán motiváltak voltak, és minden tanári ösztökélés nélkül is azon gondolkodtak, mi mindent tudnak adott kérdést tekintve. Egyikőjük a szükséges és elégséges feltételt is megfogalmazta arra vonatkozólag, hogy az egyenlőség mikor teljesül (mindkét esetben). Ennél jobb becslésekről nem beszéltünk, illetve a nem említett három másik függvény esetében egyáltalán nem foglalkoztunk a kérdéssel.

A számelméleti függvényekkel kapcsolatos ismeretek után rátértünk az összetett függvény fogalmára. Ahogy korábban említettem, a diákok ezt általánosságban nem, de közvetve ismerték, így tulajdonképpen a szakkörön vezettük be a kompozíció fogalmát. A

---

<sup>15</sup>[7], 50.o.

gyerekek számára két példa elégséges volt ahhoz, hogy megértsék és alkalmazni tudják saját maguk által választott példákon a definíciót. Az általuk elsőként választott függvények:  $f(x) = x + 8$  és  $g(x) = \frac{6}{x}$  voltak. Itt természetesen adódott a kérdés, hogy a választott két függvény esetén a szorzat eredménye vajon függ-e a sorrendjüktől. A gyerekek megállapították, hogy az általuk javasolt két függvényre  $f \circ g \neq g \circ f$ , de arra a kérdésre, hogy  $f$ -et megtartva tudnak-e olyan  $h$  függvényt adni, amelyre  $f \circ h = h \circ f$  szintén minden nehézség nélkül tudtak példát mondani,  $h(x) = x + 6$ -ot választva. Azt is megbeszéltük, hogy habár a kompozíció ezek szerint nem kommutatív művelet (ami persze nem azt jelenti - fenti második példa birtokában -, hogy ne létezhetne két olyan függvény, ami esetén a sorrendre invariáns a szorzat), de asszociatív.

Mielőtt felvezettem volna, hogy miről fog szólni a kísérletezés, még tettünk egy kitérőt, hogy mi mindent tanultak a gyerekek korábban kommutativitásról, illetve asszociativitásról. A diákok sok-sok példát hoztak kommutatív, illetve nem kommutatív műveletekre (az asszociativitás vizsgálatát sem feledve időközben), az alpműveletektől kezdve a logikai műveletekig. Néhány esetben (például a kivonás, az osztás, halmazok különbsége) megbeszéltük, hogy egy adott  $\diamond$  művelet esetén meg tudják-e fogalmazni annak szükséges és elégséges feltételét, hogy  $a \diamond b = b \diamond a$ , és azt is megemlítettük, hogy a kompozíció műveletén kívül is vannak (és későbbi tanulmányaikban majd lesznek még) olyan műveletek, amelyeknél ez általánosságban nézve nem is annyira egyszerű kérdés.

Ezután megbeszéltük, miről fog szólni a kutakodás, hogy az  $f(g(n)) = g(f(n))$  egyenletet fogjuk vizsgálni több szempontból, ahol  $f$  és  $g$  az általunk kiválasztott öt számelméleti függvény valamelyike.



„tiltás” oka az 5.5.3 Problémából kiderül.) Hiszen ezekről azt gondoltam korábban, hogy némelyiket bármiféle tanári útmutatás nélkül is meg tudják oldani a gyerekek, és mivel a tanulók őszintén érdeklődtek, nem kellett őket noszogatni, hogy együtt gondolkodjunk, nem lett volna jó, ha „házi feladat” nélkül távoznak.

A második foglalkozást azzal kezdtük, hogy az egyik tanuló elmesélte, hogy hogyan és mire jutott a  $d(\omega(n)) = \omega(d(n))$  egyenlet vizsgálatával. A diák írt egy programot (ennek mikéntjére nem tértünk ki), és megvizsgálta, hogy  $1 \leq n \leq 10\,000$  esetén mely számok a megoldásai az egyenletnek. Az (természetesen külön erre a célra írt program nélkül is) világos, hogy a prímszámok mind megoldást adnak, hiszen  $d(\omega(p)) = d(2) = 1$  és  $\omega(d(p)) = \omega(2) = 1$ . Erre később visszatértünk. A tanuló megvizsgálta, hogy az általa kapott megoldások közül azokról, amelyek összetett számok, meg tud-e fogalmazni egy igaz állítást (az első néhány megoldásként adódó összetett szám: 4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 25, 27, 28, 44, 45, 48, 49). Ezeknek az összetett számoknak megadta a prímtényező felbontását, és ezeket vizsgálva azt a sejtést fogalmazta meg, hogy az egyenletnek olyan összetett szám nem lehet a megoldása, amelyik négyzetmentes. A sejtését bebizonyította, és azt elmesélte a többi diáknak. Tehát: ha  $n$  olyan összetett szám, amire  $\omega(d(n)) = d(\omega(n))$ , akkor  $n$  nem lehet négyzetmentes, azaz létezik olyan  $p$  prím, amire  $p^2 | n$ . A bizonyítás: tegyük fel indirekt, hogy  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$  úgy, hogy  $k > 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$  és  $p_i$ -k különböző prímelek. Ekkor  $\omega(d(n)) = \omega(2^k) = 1$ , míg  $d(\omega(n)) = d(k)$ , ami nem lehet 1-gyel egyenlő, hiszen feltevésünk szerint  $k > 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , és bármely 1-nél nagyobb számnak 1-nél több osztója van. Nem csak az osztálytársak hallgatták ezt az elbeszélést lelkendezve, és biztosították elismerésükről a diákokot.

A tanuló azt is megosztotta a többiekkel, hogy nem ez volt az eredeti célja, hisz ő az egyenlet összes megoldását szeretne volna megtalálni, amivel tulajdonképpen adós maradt, és azt a tapasztalatát is elmesélte a többieknek, hogy a probléma nehézségét abban látja, hogy két multiplikatív függvény kompozíciója nem szükségképpen multiplikatív, mint az jelen esetben is igaz. Ezt a többiekkel is megbeszéltük példát adva arra, hogy ha  $(a, b) = 1$  valamilyen  $a$  és  $b$  pozitív egészekre, abból nem szükségképpen következik, hogy  $f(g(ab)) = f(g(a))f(g(b))$  még ha  $f$  és  $g$  multiplikatívak is.

Tekintve, hogy a diák ezzel a problémával foglalkozott, és hogy az eredetileg kitűzött, jóval egyszerűbb  $\omega(d(n)) = d(\omega(n)) = 1$  egyenletnek részben megoldását adta, amikor azt mondta, a prímek igazsá teszik az  $\omega(d(n)) = d(\omega(n))$  egyenletet, rátértünk arra, hogy vajon az  $\omega(d(n)) = d(\omega(n)) = 1$  egyenlet összes megoldását meg tudjuk-e határozni. Hiszen az világos volt, hogy a prímek csak a megoldás egy részhalmazát adják, mert a tanuló által vizsgált problémában az összetett számok közül például  $n = 4$  is megoldása ennek az egyenletnek. Ezt az egyenletet azzal a céllal mutattam meg a tanulóknak, hogy lássák, egyáltalán hogyan kell elindulni, ha egy ilyen jellegű feladatot kapnak. Ezután több lehetőség is akadt, hogy némi rutinra tegyenek szert az ilyen típusú, igen egyszerűen megoldható egyenletek megoldásában, és ez nem is okozott nekik gondot, a kapcsolódó egyenletek közül jó néhányat megoldottak. A hosszabb távú célok egyike persze az volt ezeknek a megoldásoknak a megbeszélésével (tekintve, hogy valóban a várakozásnak megfelelően ezeknek a megoldása nem okozott a gyerekeknek problémát az első közös példa megbeszélése után), hogy kellő önbizalommal álljanak majd a következő, komplexebb feladatok előtt.

## Számelméleti függvények kompozíciójának kommutativitása

$$\omega(d(n)) = d(\omega(n)) = 1 \Leftrightarrow n = p^{q^\beta - 1}, \text{ ahol } p, q \text{ prímek és } \beta \in \mathbb{Z}^+.$$

*Bizonyítás*

$$d(\omega(n)) = 1 \Leftrightarrow \omega(n) = 1 \Leftrightarrow n = p^\alpha, \text{ ahol } p \text{ prím és } \alpha \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\omega(d(p^\alpha)) = \omega(\alpha + 1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + 1 = q^\beta, \text{ ahol } q \text{ prím és } \beta \in \mathbb{Z}^+.$$

$$\text{Tehát } n = p^{q^\beta - 1}.$$

Akt  
Aktív

Az  $\omega(\Omega(n)) = \Omega(\omega(n)) = 1$  egyenletet is megmutattam a gyerekeknek, nem a technikai részletek miatt, amiken gyorsan áthaladtunk, hanem egyrészt azért, hogy lássanak olyan esetet, amikor a megoldást nem explicit alakban adjuk meg, hanem karakterizáljuk. Ez nyilván az a fajta megadás, ami a gyerekek számára kevésbé megszokott, de hasznosnak gondoltam, hogy ilyennel is találkozzanak. Másfelől szerettem volna, ha látják, hogy ezek az egyenletek a megoldásaikat tekintve milyen változatosak.

## Számelméleti függvények kompozíciójának kommutativitása

$$\Omega(\omega(n)) = \omega(\Omega(n)) = 1 \Leftrightarrow n = \prod_{i=1}^q p_i^{\alpha_i} \text{ és } \sum_{i=1}^q \alpha_i = r^\beta, \text{ ahol } p_i, q, r \text{ prímek és } \beta \in \mathbb{Z}^+.$$

*Bizonyítás*

$$\Omega(\omega(n)) = 1 \Leftrightarrow \omega(n) = q \Leftrightarrow n = \prod_{i=1}^q p_i^{\alpha_i}.$$

$$\omega\left(\Omega\left(\prod_{i=1}^q p_i^{\alpha_i}\right)\right) = \omega\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i\right) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^q \alpha_i = r^\beta.$$

És hogy azt is lássák a gyerekek, hogy a megoldások sokféleségén túl az is igaz, hogy már ebben az egyszerűnek tűnő esetben is van olyan variáns, aminek a megoldását egyelőre csak részben ismerjük, beszélgettünk az  $\omega(\sigma(n)) = \sigma(\omega(n)) = 1$  egyenletről. Itt rátaláltunk a Mersenne-prímekre mint megoldásokra, és elméltünk egy kicsit közösen arról, hogy mi mindent tudunk még az általánosabb probléma kapcsán (ahogy mindez az 5.5.3. Problémában szerepel).

A foglalkozás azzal ért véget, hogy az egyik tanuló azt kérdezte, foglalkoz(z)unk-e az-  
zal a problémával, hogy  $f(g(n)) = g(f(n)) = p^\alpha$  mikor áll fenn valamilyen  $p$  prímre és

$\alpha$  pozitív egészre. És még ha ezzel a későbbiekben nem is foglalkoztunk, mivel korábban speciálisan a kettőhatványokkal és a  $\varphi(n)$  és  $\sigma(n)$  függvényekkel szóba került valami hasonló, úgy döntöttem, ezt a kérdést ebben a speciális formában felvesszük az aznapi „házi feladatok” közé. A szándék ezzel kettős volt. Egyrészt arra gondoltam, hogy olyan példát is érdemes lenne megmutatni a gyerekeknek, amely olyan állítást bizonyít, hogy valamilyen érték kimarad a kompozíció értékészletéből, habár külön-külön mindkét függvény értékészletének eleme. Másrészt szerettem volna, ha a tanuló úgy érzi, hogy tulajdonképpen - kis módosítással - ő adja a „házi feladatot”. (És habár a következő foglalkozáson én terveztem ezt a feladatot megbeszélni, a gyerekek mást terveztek.) Tehát mások mellett ezen a kérdésen is gondolkodhattak a következő alkalomra:

Ajánlott kutakodni való:

**I)** Az órai: mit tudunk mondani a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = 2^m$  (ahol  $m \in \mathbb{Z}^+$ ) egyenletről?

**II)** Aki nem programozó manócska: megalkotni GeoGébrában egy olyan eszközt, ami valamelyik nem beépített számelméleti függvény, tehát:  $\varphi$ ,  $\omega$ , vagy  $\Omega$ -ra kitalálni valamit.

**III)**  $\omega(\varphi(n)) = \varphi(\omega(n)) = 1$  egyenlet összes megoldását felkutatni (akár bizonyítással :)).

**IV)**  $\varphi(\Omega(n)) = \Omega(\varphi(n))$  egyenlet összes megoldását felkutatni (ennek a bizonyítása kicsit nagyobb falat :))

**V)** bármi egyéb ötlet, kérdés :)

A soron következő foglalkozásra némileg megváltoztatott stratégiával is készültem, mert azt feltételeztem, könnyen lehet, hogy nem minden diák gondolkozott a kérdéseken, pedig a cél az volt, hogy mindenkit bevonjak a gondolkozásba. Úgy véltem, ha a kutakodásnak azt a részét, ami az adatgyűjtés, megspórolom a gyerekeknek, és készen kapják a nyers-

adatokat, akkor még azok is bekapcsolódnak a gondolkozásba, akik önállóan egyedül ezt nem tették. Mint utólag kiderült, a feltételezés helyesnek bizonyult, és az is beigazolódott, hogy a gyerekek az adatok birtokában tudnak előrehaladni a problémákban önállóan. Ez az óra azzal kezdődött, hogy az egyik diák (aki a megelőző alkalomra még nem készített „házi feladatot”) megmutatta, mire jutott az  $\omega(\varphi(n)) = \varphi(\omega(n)) = 1$  egyenlettel. A bizonyításába némi hiba csúszott, a tanuló nem kapta meg az összes megoldást, amit a helyben alkalmazott előre elkészített segédprogram segítségével illusztráltam. Illetve rögtön ezután a gyerekek megkapták az egyenlet összes olyan megoldását, amire  $n < 3000$ . A gyerekek a kanonikus alakok felírása után ráismertek a Fermat-prímekre, megfogalmaztak egy sejtést arra vonatkozólag, hogy mely számok biztosan megoldásai az egyenletnek, és igazolták, hogy ezek valóban megoldások. A szükségességet még bizonyítanunk kellett, ezt közösen megtettük, felderítve, hol történt a hiba a tanuló önálló bizonyításában, és hogyan maradt el esetek vizsgálata. Ennek a feladatnak a hibátlan (teljes) bizonyítása nem hiszem, hogy reális elvárás lehetett volna a gyerekektől a megelőző foglalkozás után, de az öröndetes volt, hogy a tanuló házi feladatként nekikezdett a bizonyításnak, és hogy tanári segítséggel értette, és látta, hogy miként lehet teljessé tenni a bizonyítását. Ennek a feladatnak a megoldása arra is jó alkalom volt, hogy a gyerekek ismét megtapasztalják, hogy az általuk korábban már megismert nevezetes prímek (mint például a Fermat-prímek) nem csak a matematikatörténeti könyvek lapjain bukkannak elő, hanem már a sokadik feladatmegoldásban.

Ezek után már elhagyva a kedvcsinálónak (is) szánt és a 10 esetből 8-ban nem túl komplexnek számító egyenleteinket, a gyerekek kézhez kapták az  $\Omega(\varphi(n)) = \varphi(\Omega(n))$  egyenlet összes olyan megoldását, amire  $n < 3000$ , ezek: 3, 4, 6, 8, 12, 18, 32, 48, 72, 108, 128, 162, 192, 288, 432, 648, 972, 1458, 2048. Felismerték, és igazolták, hogy azok a kettőhatványok, amikben a kitevő prím, megoldásai az egyenletnek. Majd azt is megfogalmazták ketten együtt gondolkodva, hogy az  $n = 2^a \cdot 3^b$  alakú számok is megoldások, amikre  $a + b$  prím és  $a$  pozitív. Ezt a sejtést ellenőriztük. Arról, hogy az egyenlet összes megoldását tehát a 3, az általuk megtalált kettőhatványok és kéttényezős szorzatok adják, igazolni kellett volna, de ez esetben nem volt céлом, hogy a gyerekekkel bizonyítsuk azt, hogy az általuk megtalált feltétel nem csak elégséges, de a megoldhatóság szükséges feltétele is, hiszen az egy nagyon

hosszas bizonyítás. Annyit elmeséltem a diákoknak, hogy a bizonyítás tulajdonképpen a 2-vel és 3-mal való oszthatóság szempontjából különböztet meg eseteket, és azt a korábban már megbeszélte becslést használja, hogy  $\varphi(m) \leq m$  bármely  $m$  pozitív egészre.

A következő feladatot és a gyerekek által javasolt ötleteket azért ismertetem, mert fontosnak tartom, hogy habár a gyerekek nagyon sokszor ügyesen, azonnal helyesen ismertek fel mintákat, és találtak rá megoldásokra, természetesen voltak tévutak. Ez persze minden gondolkozási folyamatnak velejárója, és kifejezetten hasznos, hogy a gyerekek azt is megtapasztalták, nem mindig az első ötlet a helyes, és azt is, hogy ez egyáltalán nem probléma. A feladat a  $\varphi(d(n)) = d(\varphi(n))$  egyenlet vizsgálata volt, amelynek első néhány megoldását a gyerekek kézhez kapták: 1, 2, 4, 6, 16, 24, 30, 36, 64, 384, 408, 480, 510, 1024, 1296, 1560, 1680, 2304, 2640, 3480. Az egyik diák az első néhány kettőhatványt látva azt a sejtést fogalmazta meg, hogy a kettő páros kitevőjű hatványai mind megoldások. Ez nem bizonyult igaznak, hisz a  $2^8$ -t nem találta a sorban, mert  $\varphi(d(2^8)) = \varphi(9) = 6 \neq 8 = d(2^7) = d(\varphi(2^8))$ . A következő ötlet az volt, hogy vizsgáljuk meg, hogy azok a kettőhatványok, amelyek kitevői egy Fibonacci-típusú sorozat egymást követő elemei  $F_0 = 2$  és  $F_1 = 4$  kezdőtaggal (a jó kitevők sorozatának első elemei: 2, 4, 6, 10) megoldások-e. Ez szintén nem bizonyult a helyes útnak, a  $2^{26}$  nem megoldás, hiszen  $\varphi(d(2^{26})) = \varphi(27) = 18 \neq 26 = d(2^{25}) = d(\varphi(2^{26}))$ . Miután ezeket a tévutakat bejártuk, végül azt fogalmaztuk meg – némi tanári iránymutatással –, hogy egy kettőhatvány akkor és csak akkor megoldás, ha kitevője eggyel kisebb egy prímmél. Ennek igazolására és további megoldások keresésére a következő szakkörön visszatértünk. Ekkor a gyerekek olyan megoldásokat is találtak, amelyek  $n = 2^{p-1} \cdot 3^{p-1}$  alakúak, ahol  $p$  prím, illetve  $n = 2^{2^k-1} \cdot 3$  is megoldása az egyenletnek bármely  $k$  pozitív egészre. Mindezeket a gyerekek igazolták. Ezzel persze nem adtuk meg az egyenlet összes megoldását, mindenesetre konstruáltunk az első néhány megismert megoldás alapján végtelen sokat.

Miután megoldásokat tanulmányozva a gyerekek már maguk tudtak alkalmas pozitív számokat konstruálni, amik megoldásait adták egy egyenletnek, a következő kérdés az volt, hogy valamelyest megedződve a korábbi feladatokon, meg tudjuk-e konstruálni egy egyenlet összes megoldását. Erre az  $\Omega(\omega(n)) = \omega(\Omega(n))$  egyenlet vizsgálata remek lehetőséget

teremtett, amivel korábban már a  $\Omega(\omega(n)) = \omega(\Omega(n)) = 1$  speciális formában találkoztunk. Az egyenlet összes megoldásának megkonstruálásában ez esetben a nyers adatok vizsgálata nem segített volna, ellenben az a jól ismert és gyakran alkalmazott problémamegoldási stratégia igen, hogy konkrét eseteket megvizsgálunk, majd ezekből következtetünk a megoldás általános alakjára. A gyerekek – amikor még nem hangzott el semmiféle segítő instrukció – felvetették a kérdést, hogy vajon van-e a 2-n kívül más kettőhatvány, amely megoldása az egyenletnek, majd megválaszták, hogy nincs. Ezek után rátértünk annak a konkrét esetnek a vizsgálatára, hogy  $\Omega(\omega(n)) = \omega(\Omega(n)) = 2$ . Ennek a megoldásához vezető úton az első lépés ismételt az volt, hogy csak egy speciális esetet vizsgáltunk, tehát, hogy választottunk alkalmas  $m$  és  $k$  pozitív egészeket, amelyre  $\Omega(m) = \omega(k) = 2$ , és amelyekre létezik olyan  $n$ , hogy  $m = \omega(n)$  és  $k = \Omega(n)$ . A gyerekek  $m = k = 6$ -ot javasolták, és azt mondták, hogy ebben az esetben az összes megoldást az adja, ha  $n$  hat különböző prímszám szorzata. Itt egy általánosítást is megfogalmaztak: legyen  $m = k = q_1 \cdot q_2$  két különböző prím szorzata, ekkor  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{q_1 q_2}$  formula írja le az összes megoldást. A gyerekek látták, hogy az általuk javasolt eljárást bármilyen konstans esetén tudnák megfelelőképpen adaptálni, és az  $\Omega(\omega(n)) = \omega(\Omega(n)) = c$  egyenletnek megoldásait adni bármilyen  $c$  pozitív állandóra. Ezzel együtt azt is értették, hogy ezzel még nem teljesítettük nemhogy az eredeti, de a specializált célkitűzésünket sem, ami egyelőre a  $\Omega(\omega(n)) = \omega(\Omega(n)) = 2$  összes megoldásának megadása volt. Azt kérdeztem tőlük, elképzelhető-e, hogy  $m \neq k$ , és akkor még sok-sok megoldás van? Lehetne-e például, hogy  $m = 9$  és  $k = 6$ ? Egyikőjük rögtön mondta, hogy ez lehetetlen, és fel is írta a táblára, hogy  $\omega(n) \leq \Omega(n)$  minden  $n$ -re. Erre egy másik tanuló azt írta fel a táblára, hogy ebből következne, hogy  $\Omega(\omega(n)) \leq \omega(\Omega(n))$  is mindig teljesül, de az osztálytársak (is) kifejezték kételyeiket ezt tekintve, így ezt nem fogadtuk el. Következő lépésben a gyerekek  $m = 4$  és  $k = 6$ -ot választották, és találtak ehhez alkalmas prímtényezőss alakot:  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3^2 \cdot p_4^2$  formájában. Megbeszéltük, hogy lehetne a kanonikus alak ettől különböző is, hiszen a 6-ot fel lehet bontani 4 pozitív összeadandóra másképp is. Arra, hogy hányféleképpen, az egyik tanuló felvetette az ismétléses kombináció fogalmát, de megbeszéltük, hogy az annyiban eltér ettől a kérdéstől, hogy ott az összeadandó 0 értéke is megengedett, ami itt nem lehetőség (megemlítettem nekik a partíció fogalmát, de erre nem kalandoztunk el). Ez is örvendetes példája volt annak, hogy a gyerekek tudtak kapcsolatban gondolkodni, és egy probléma kapcsán nem

csak egy szűkebb matematikai környezetben létezni. Eljutottunk tehát végül oda, hogy az  $\Omega(\omega(n)) = \omega(\Omega(n)) = 2$  egyenlet összes megoldását tehát nem más adja, mint az összes lehetséges  $(m; k)$  számpár meghatározása ( $m \leq k$  és  $\Omega(m) = \omega(k) = 2$  feltételek mellett), majd ezek alapján  $n$  összes lehetséges kanonikus alakjának felírása:  $m$  darab prímtényező szorzataként úgy, hogy a kitevők összege  $k$  legyen. Az általános egyenlet megoldását innen már értették, nem formalizáltuk az 5.1.2. Tételt, hiszen pontosan értették azt, hogy *hogyan* kell az összes megoldást karakterizálni. Ezt ebben az esetben fontosabbnak gondoltam, mint azt, hogy ezek után leírva is lássák azt, ami az előre elkészített prezentációban szerepelt, így arra nem került sor, hogy az 5.1.2. Tételt abban a kompakt formában leírjuk, ahogyan az a korábbi fejezetben olvasható.

Az utolsó foglalkozást úgy terveztem, hogy egyfelől a gyerekektől ne igényeljen túlzott szellemi aktivitást (tekintve, hogy az évvégi jegylezárás előtti utolsó napok egyikén volt), másfelől, hogy valamiképp összefoglaljam azt, hogy számomra miről is szól a kutatás. Az, ami számomra összefoglalja ezt, az 5.4.5. Tétel, így erről beszélgettünk, a matematikai tartalom mellett megosztottam a gyerekekkel néhány személyes gondolatot is arról, hogy miképp is alakult ez a tétel, milyen út vezetett addig, amíg megszületett. És természetesen megköszöntem a munkájukat, mert mindvégig ügyesek, szorgosak és lelkesek voltak.

Összességében a tanulók szakkörön mutatott munkája, valamint a későbbi visszajelzések alapján is úgy értékeltem, a szakkör a kitűzött célját elérte. Természetesen a gyerekektől tanulva, a velük való munka során szerzett tapasztalatokkal gazdagabban terveznék a későbbiekben hasonló jellegű szakkört.

## 6.4. További lehetőségek

Úgy gondolom, számtalan lehetőség van arra, hogy a témában további kérdéseket tegyünk fel, legyenek azok az eddigiekhez képest teljesen újak vagy akár egy korábbi kérdés általánosításai vagy éppen speciális esetei. És habár az alábbi a kérdésekkel a szakkörön a gyerekekkel nem foglalkoztunk, ezeket is számukra könnyen hozzáférhetőnek, érdekesnek gondolom, olyasminek, amivel lehet kísérletezni.

**6.4.1.** A tanulók a kompozíció műveletének megismerésekor tudtak találni olyan  $f$  és  $g$  függvényt, amire  $f(g(x)) = g(f(x))$  teljesül  $\forall x \in \mathbb{R}$ -re. Az általuk választott függvények elsőfokúak voltak:  $f(x) = x + 8$  és  $g(x) = x + 6$ . Természetesen ezeknek a valós számok halmazán értelmezett függvényeknek a pozitív egész számokra vett leszűkítése olyan számelméleti függvényeket ad, amelyekre  $f(g(n)) = g(f(n))$  minden  $n \in \mathbb{Z}^+$ -re. A pozitív egészeken értelmezett elsőfokú függvényektől elszakadva azt is kérdezhetnénk, hogy vajon bármely  $f$  számelméleti függvényhez létezik-e olyan  $g$ , amelyre  $f \circ g = g \circ f$ . A triviális megoldásokon kívül: mert a fenti egyenlet persze bármilyen  $f$  függvény választása esetén teljesül, ha például  $g$  az identitás vagy  $g = f$ . A tanulók maguk is felfedezhetik az utóbbi példát továbbgondolva, hogy bármilyen  $f$  függvény esetén az egyenlet megoldását adja, ha  $g = f^{(m)} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{m db}$ , ahol  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

Ez utóbbi gondolat segítségével persze tetszőlegesen tudunk olyan  $f$  és  $g$  függvényt párokat konstruálni, amelyre  $f(g(n)) = g(f(n))$  minden  $n \in \mathbb{Z}^+$ -ra: legyen  $f = h^{(k)}$  és  $g = h^{(l)}$ , ahol  $h$  egy tetszőlegesen választott függvény,  $k$  és  $l$  pedig pozitív egészek. A korábban a gyerekek által választott  $f(x) = x + 8$  és  $g(x) = x + 6$  példát akár így is tekinthetjük: ha  $h(x) = x + 2$ , akkor  $f = h^{(3)}$  és  $g = h^{(4)}$ .

A tanulók 9. osztályban már nagyon jól ismerik az első- és másodfokú függvényeket, így ezekkel akár tovább is foglalkozhatunk. Az elsőfokú függvényeket vizsgálva könnyen megadhatjuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az  $f(x) = ax + b$  és a  $g(x) = px + q$  ( $a, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , és  $b, q \in \mathbb{R}$ ) függvényekre mikor teljesül az  $f \circ g = g \circ f$  egyenlőség. Az együtthatók összehasonlításából azt kapjuk, hogy ez pontosan akkor áll fenn, ha  $q(a - 1) = b(p - 1)$ . Ez alapján például igazolhatjuk, hogy bármely elsőfokú  $f$  függvényhez létezik olyan elsőfokú  $g$  függvény is, amire az  $f \circ g = g \circ f$  egyenlőség úgy teljesül, hogy  $g$  nem áll elő  $g = f^{(m)}$  alakban ( $m \in \mathbb{Z}^+$ ). De akár további kérdéseket is megfogalmazhatunk, például a szabadon választható paraméterek számáról. Érdekes az az összehasonlítás, ha ugyanezt a kérdést a másodfokú függvények körében megvizsgáljuk, ahol az adódik, hogy  $f(x) = ax^2 + bx + c$  és a  $g(x) = px^2 + qx + r$  ( $a, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , és  $b, c, q, r \in \mathbb{R}$ ) függvényekre pontosan akkor teljesül az  $f \circ g = g \circ f$  egyenlőség, ha  $f = g$ .

Ha visszatérünk az általunk vizsgált öt számelméleti függvényhez, az  $f \circ g = g \circ f$  egyenlőség minden pozitív egészre teljesül például akkor, ha  $f = \sigma(n)$  vagy  $f = d(n)$  vagy  $f = \varphi(n)$ , miközben  $g = 1$ . De olyan példák keresésére is ösztönözhetjük a tanulókat, ami nem „csak” egy-egy a valós számok halmazán értelmezett folytonos függvény leszűkítése vagy amelyekben egyik függvény sem konstans. Egy ilyen példa:

$$f(n) := \begin{cases} 1 & \text{ha } n \text{ páros;} \\ 2 & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases},$$

és

$$g(n) := \begin{cases} n & \text{ha } n \leq 2; \\ 2k & \text{ha } n > 2 \text{ és páros;} \\ 2m - 1 & \text{ha } n > 2 \text{ és páratlan.} \end{cases}$$

ahol  $k$  és  $m$  tetszőlegesen megválasztott pozitív egészek.

Akár a másik szélső esetet is vizsgálhatjuk: tudunk-e találni olyan  $f$  és  $g$  számelméleti függvényeket, amelyekre az  $f(g(n)) = g(f(n))$  egyenlőség semmilyen  $n \in \mathbb{Z}^+$ -ra nem teljesül. Természetesen itt is adhatunk triviális megoldásokat, például legyen  $f(n) = k$  és  $g(n) = m$ , ahol  $k$  és  $m$  különböző pozitív egészek. De tekintve, hogy a  $\sigma(n)$  és  $\varphi(n)$  függvények értékkészletében nem szerepel minden pozitív egész, ezek segítségével is konstruálhatunk olyan példákat, hogy  $f \circ g = g \circ f$  egyenlőség egyetlen pozitív egészre se teljesüljön: legyen  $f = \sigma(n)$  és  $g = 2$  vagy  $f = \varphi(n)$ , miközben  $g = 3$ . Persze itt is kereshetünk olyan megoldásokat, amelyekben egyik függvény sem konstans.

**6.4.2.** Az 5.2.4. Tételben a  $\varphi(\omega(n)) = \omega(\varphi(n)) = 2$  egyenletnek végtelen sok megoldását adtuk meg  $n = 2^t \cdot 3 \cdot 7$  alakban (ahol  $t$  tetszőleges pozitív egész). Természetesen ezektől lényegesen különböző megoldást is adhattunk volna, hogy mégis miért ezeket választottuk, ahhoz írjuk ezeket a számokat  $n = 2^t \cdot (2^1 + 1) \cdot (2^1 \cdot 3^1 + 1)$  alakban, és ennek mintájára vizsgáljuk meg azt, hogy vajon létezik-e  $n$ -ben végtelen sok megoldása a  $\varphi(\omega(n)) = \omega(\varphi(n)) = k$

egyenletnek minden olyan  $k$ -ra, amelyre  $k \in \mathcal{R}_\varphi$ . Nézzük meg például a  $k = 8$  esetet, azaz a  $\varphi(\omega(n)) = \omega(\varphi(n)) = 8$  egyenletet. A  $\varphi(\omega(n)) = 8$  egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha  $\omega(n) = 15, 16, 20, 24, 30$ . Válasszuk például az  $\omega(n) = 15$  esetet. Ez pontosan akkor áll fenn, ha  $n$  kanonikus alakja:  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_{15}^{\alpha_{15}}$ , ahol  $p_i$ -k különböző prímekek és az  $\alpha_i$  kitevők pozitív egészek. Azt kell megvizsgálnunk, hogy a  $p_i$  prímekek és az  $\alpha_i \geq 1$  kitevőket meg tudjuk-e úgy választani, hogy az  $\omega(\varphi(n)) = 8$  egyenlőség is teljesüljön.

Próbáljunk meg olyan speciális megoldásokat keresni, amelyekben  $p_1 = 2, \alpha_1 \geq 1$ , a többi kitevő pedig mind 1-gyel egyenlő, tehát  $n$  kanonikus alakja  $n = 2^{\alpha_1} \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{15}$ . Ezek szerint olyan alkalmas prímekek, illetve  $\alpha_1 \geq 1$  kitevőt kellene találnunk, amelyre a  $\varphi(n) = 2^{\alpha_1-1} \cdot (p_2 - 1) \cdot \dots \cdot (p_{15} - 1)$  szorzatnak pontosan nyolc különböző prímtenyezője van. Definiáljuk a  $p_i$  prímekek közül az első nyolcat a következőképpen:  $p_2 = 2^{\beta_1} + 1, p_3 = 2^{\beta_2} \cdot 3^{\gamma_1} + 1, p_4 = 2^{\beta_3} \cdot 5^{\delta_1} + 1, \dots, p_8 = 2^{\beta_7} \cdot 17^{\eta_1} + 1$ , és  $p_9 = 2^{\beta_8} \cdot 19^{\zeta_1} + 1$ , ahol a görög betűkkel jelölt kitevők pozitív egészek. Ebben az esetben  $1 \leq i \leq 9$ -re a  $p_i - 1$  tényezők szorzata éppen nyolc különböző prímeket tartalmaz, tehát az  $n$  kanonikus alakjában szereplő további  $p_i$  ( $10 \leq i \leq 15$ ) prímekeknek olyanoknak kell lenniük, hogy belőlük új tényezők ne adódjanak  $\varphi(n)$ -ben. Azaz ha  $10 \leq i \leq 15$ , akkor  $p_i = 2^{a_i} \cdot 3^{b_i} \cdot 5^{c_i} \cdot 7^{d_i} \cdot 11^{e_i} \cdot 13^{f_i} \cdot 17^{g_i} \cdot 19^{h_i} + 1$  alakú kell, hogy legyen, ahol  $a_i \geq 1$  és a latin betűkkel jelölt kitevők nemnegatív egészek. Ilyen prímekek léteznek, például:  $p_2 = 3, p_3 = 7, p_4 = 11, p_5 = 29, p_6 = 23, p_7 = 53, p_8 = 137, p_9 = 1217$  és  $p_{10} = 5, p_{11} = 17, p_{12} = 257, p_{13} = 65\,537, p_{14} = 13, p_{15} = 97$ .

Ez a konstrukció bármely olyan értékre működne, ami a  $\varphi$ -függvény értékkészletében szerepel – és egyben azt is jelentené, hogy bármely ilyen értékre valóban  $n$ -ben végtelen sok megoldását kapnánk az egyenletnek, hiszen az  $\alpha_1$  kitevőt tetszőlegesen nagynak megválaszthatjuk –, ha a fenti osztályok mindegyikébe tartozik legalább egy prím, és van(nak) olyan osztály(ok), ami(k)ben nem csak egy, hanem „néhány” további prím is van.

**6.4.3.** Az 5.3.1. Tételben bebizonyítottuk, hogy a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = k$  egyenlőség nem minden  $k \in \mathcal{R}_\varphi \cap \mathcal{R}_\sigma$ -ra oldható meg, például nincs megoldása, ha  $k$  kettőhatvány. De nem csak a kettőhatványokra nem adódik megoldás, vizsgáljuk meg például a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = 6$  egyenlet megoldhatóságát. A  $k = 6$  valóban eleme mindkét függ-

vény értékkészletének, hiszen  $\sigma(5) = 6 = \varphi(7)$ . Ennek ellenére a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = 6$  egyenletnek nincs megoldása, mert  $\sigma(\varphi(n)) = 6$  akkor és csak akkor teljesülhetne, ha  $\varphi(n) = 5$ , ami ellentmondás, mivel  $\varphi(n)$  páros, ha  $\varphi(n) > 1$ .

Ezt a kérdést általánosítva vizsgálhatjuk a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = p + 1$  egyenlet megoldhatóságát, ahol  $p$  és  $p + 2$  ikerprímek, mint az 5 és a 7 a megelőző példában. Ha  $p$  és  $p + 2$  prím, akkor  $p + 1$  valóban eleme a két függvény értékkészletének, hiszen  $\sigma(p) = p + 1$  és  $p + 1 = \varphi(p + 2)$ . Ha  $p + 1 = 6$ -ra imént megvizsgáltuk a problémát, akkor a következő kérdés, hogy vajon létezik-e megoldása az egyenletnek, ha  $p + 1 = 12$ ? A  $\sigma(\varphi(n)) = 12$  egyenlet csak akkor teljesülhet, ha  $\varphi(n) = 6$  vagy  $\varphi(n) = 11$ . Utóbbi ellentmondás, előbbiből a következő lehetséges értékeket kapjuk  $n$ -re: 7, 9, 14, vagy 18. Tehát erre a négy lehetséges értékre kell ellenőriznünk, hogy a  $\varphi(\sigma(n)) = 12$  egyenlőség fennáll-e. Ez a négy esetből egyedül  $n = 9$  esetén teljesül, tehát a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = 12$  egyetlen megoldása  $n = 9$ . Az 5.4.5. Tételből a  $k = 0, p_0 = 3$  speciális esetben adódik, hogy  $n = 3^2$  megoldása a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n))$  egyenletnek, most azt is beláttuk, hogy ez az egyetlen megoldása a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = 12$  egyenletnek.

A  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = p + 1$  egyenletet vizsgálva, ahol  $p$  és  $p + 2$  továbbra is prímek, úgy találtuk, hogy  $p + 1$  azon értékei, amikre az egyenlet megoldható, meglehetősen ritkák: az első 40 ikerprímet tesztelve csak két alkalommal adódott megoldás, a korábban említett  $p + 1 = 12$  és a  $p + 1 = 1092$  esetben. Utóbbiból az egyenlet megoldásaként  $n = 3^6$ -t kapjuk, ami szintén adódik az 5.4.5. Tétel  $k = 0, p_0 = 7$  speciális eseteként mint a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n))$  egyenlet egy megoldása, ezek szerint a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = 1092$  egyenlet egyetlen gyöke  $n = 729$ .

Ezeket a vizsgálatokat a GeoGebra és a WolframAlpha segítségével végeztem, és azt gondolom, ezekkel akár a programozni nem tudó gyerekeket is be lehet vonni a kísérletezésbe. Ha például azt az esetet szeretnénk vizsgálni, amikor  $p + 1 = 42$ , akkor akár a GeoGebra szoftver segítségével is megkaphatjuk azokat a  $\varphi(n)$  helyeket, amelyekre  $\sigma(\varphi(n)) = 42$ . Nyilván ez legfeljebb 41 hely ellenőrzését jelenti. Természetesen ezeket a helyeket megkaphatjuk számolás útján, segédprogramok alkalmazása nélkül is, de ha az egyenletmegoldás a

tervünk, nem pedig a  $\sigma$ -függvény „invertálásának” gyakorlása, akkor eltekinthetünk attól, hogy a képlet és papír, ceruza segítségével keressük meg ezeket a  $\varphi(n)$ -re kapott értékeket. Azt találjuk, hogy  $\sigma(m) = 42$  akkor és csak akkor áll fenn, ha  $m = 20, 26$ , vagy  $41$ . Mivel  $\varphi(n)$  páros, így csak az  $m = \varphi(n) = 20$  és az  $m = \varphi(n) = 26$  eseteket kell tovább vizsgálnunk. A WolframAlpha segítségével visszakereshetjük, hogy ezek az egyenletek milyen  $n$ -ekre teljesülnek:  $\varphi(n) = 20$  megoldásai  $n = 25, 33, 44, 50$ , illetve a  $66$ , míg a  $\varphi(n) = 26$  egyenletnek nincsen megoldása. Tehát  $n$ -re összesen öt lehetőség adódik, ezeket ismételtén a GeoGebrát vagy a WolframAlphá-t használva ellenőrizhetjük, hogy a  $\varphi(\sigma(n)) = 42$  egyenlőség is fennáll-e, de azt kapjuk, hogy a listázott öt lehetőség közül egyik sem teszi igazgá az egyenletet. Tehát a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = 42$  egyenletnek nincsen megoldása.

A technikai részleteket illetően megjegyezzük, hogy a WolframAlphá-ban mind az öt számelméleti függvény, köztük a  $\sigma$  és a  $\varphi$  is elérhető beépített parancsok (és ezek bármely kompozíciója is), a GeoGebrában csak az osztók száma és az osztók összege található meg, de bármely másik létrehozása a rendelkezésre álló funkciók segítségével nem nehéz feladat. Azt is megemlítjük, hogy a WolframAlpha segítségével a  $\varphi(x) = 20$  típusú egyenlet megoldásai megkaphatóak, a  $\sigma(x) = 42$  típusú egyenletét így nem sikerült.

Azért a  $\varphi(\sigma(n)) = \sigma(\varphi(n)) = p + 1$  egyenlet vizsgálatára esett a választásunk, mert az ikerprímsejtés szerint valószínűleg ezek a  $p + 1$  értékek végtelen sokszor előfordulnak mindkét függvény értékkészletében. Természetesen arra is szükségünk van, hogy a  $\sigma$ -függvény ezeket az értékeket a  $p$ -n kívül legalább egy olyan helyen is felvegye, ami páros, ekkor lehet esélyünk arra, hogy az egyenlet egy megoldását találjuk. Azt, hogy habár ez a konstrukció ígéretesnek tűnt, a vizsgált esetek igen csekély százalékában járt végül sikerrel, és vezetett az egyenlet egy megoldásának megtalálásához, nem értékeljük kudarcként, de arra mindenképp érdemesnek tartjuk, hogy a gyerekekkel megosszuk. Hogy ők is lássák, természetesen egy kutatás során vélhetőleg mindig lesznek ötletek, amelyek végül nem vezetnek eredményre, és emiatt új utakat kell keresnünk, de ettől még érdemes volt ezzel a gondolattal is megpróbálkoznunk.

**6.4.4.** Az 5.4.5. Tétel kimondásában és bizonyításában szükségünk volt arra, hogy az  $F_i$  Fermat-prímekhez létezzen olyan  $p_i$  prímkitevő, hogy az  $\frac{F_i^{p_i} - 1}{F_i - 1}$  számok különböző príme-  
ket adjanak. Felmerül a kérdés, hogy vajon a kapott hányadosok semmilyen prímkitevőkre  
sem adnak-e azonos eredményt, tehát valóban minden választott párra és prímkitevőre min-  
dig különböző értékeket kapunk-e. Ezért megvizsgáljuk az  $\frac{F_i^{p_i} - 1}{F_i - 1} = \frac{F_j^{p_j} - 1}{F_j - 1}$  egyenletet  
valamilyen  $0 \leq i < j \leq 4$  párra.

A gyerekek 9. osztályban ugyan általában véve (valós kitevőjű) exponenciális egyen-  
lettel még nem találkoznak, de ez nem jelent ebben az esetben problémát, mert egész  
kitevőket keresünk. A megoldás során csak oszthatósággal kapcsolatos gondolatokat hasz-  
nálunk, maradékokkal számolunk, ami a gyerekek számára ekkor már ismert, több olyan  
feladattal találkoztak már, amiben a kitevőben ismeretlent tartalmazó kifejezéseket kell  
oszthatósági szempontból vizsgálni. A tanulók a diofantikus egyenletekkel már ismerked-  
nek ekkorra, bár javarészt ezek polinomiális problémák, de hosszas bevezetés és előzmé-  
nyek nélkül tudják vizsgálni például olyan diofantikus egyenletek megoldhatóságát, mint  
 $1992^x + 1993^y = 1994^z$ <sup>16</sup>. Az, hogy egy ilyen egyenlőség az ismeretlenek semmilyen (pozi-  
tív egész) értékére nem teljesülhet, „tipikusan” valamilyen alkalmas modulus megtalálását  
jelenti, és annak bizonyítását, hogy az egyenlőségben szereplő kifejezések osztási maradéka  
nem azonos a modulus szerint.

Célszerű a probléma vizsgálatát a legegyszerűbbnek bizonyuló esettel kezdeni: legyen  
 $i = 0$  és  $j = 2$ , azaz  $F_0 = 3$  és  $F_2 = 17$ . Bizonyítjuk, hogy semmilyen  $p, q$  prímkitevőkre  
nincs a  $\frac{3^p - 1}{2} = \frac{17^q - 1}{16}$  egyenletnek megoldása. Rendezés után a  $8 \cdot (3^p - 1) = 17^q - 1$   
egyenlet adódik. Az alkalmas modulus megtalálásához elsőként az alapokat vagy az alapok  
valamely hatványát javasolt választani, és megpróbálni ellentmondásra jutni. Ha ez nem  
járna sikerrel, ezután célszerű azokat a modulusokat tesztelni, amik az alapoknál eggyel  
nagyobb illetve kisebb számok osztói. És persze vannak még különböző stratégiák, de jelen  
esetben ezekre nincs szükség, hiszen mod 9 rögtön adódik az ellentmondás: a bal oldal  
bármilyen  $p \geq 2$  egész kitevőre 1-gyel kongruens mod 9, a jobb oldal  $q = 2$  esetén 0,

---

<sup>16</sup>[16] 29.o./239.

bármilyen  $q > 2$  prím esetén  $-2$  maradékot ad 9-cel osztva. A 9 mint modulus azért igen szerencsés választás, mert egyrészt az egyik alap hatványa ( $3^2 = 9$ ), másrészt a másik alapnál 1-gyel nagyobb szám osztója is ( $9 \mid 17 + 1$ ), így a két oldal 9-cel vett osztási maradékai „nem túl változatosak”, ami igencsak megkönnyíti a bizonyítást.

Az  $F_0 = 3$ -ra és valamely másik Fermat-prímre felírható mind a négy egyenlet mod 9 vizsgálatából az adódik, hogy a felírt egyenletek nem oldhatóak meg. Még egy példát bemutatunk erre: ha  $i = 0$  és  $j = 1$ , azaz a  $\frac{3^p - 1}{2} = \frac{5^q - 1}{4}$  egyenletet, illetve a rendezés után adódó  $2 \cdot (3^p - 1) = 5^q - 1$  alakot tekintjük, akkor  $q > 2$  esetén a jobb oldal mod 9 maradékai már nem egy egyelemű halmazt adnak. Az 5 hatványainak 9-cel vett osztási maradékai rendre: 5,  $-2$ ,  $-1$ ,  $-5$ , 2, 1. Ha  $q$  egy 3-nál nagyobb prím, akkor csak  $6k \pm 1$  alakú lehet, tehát  $5^q - 1 \equiv 4 \pmod{9}$  vagy  $5^q - 1 \equiv 1 \pmod{9}$ , miközben a bal oldalon  $2 \cdot (3^p - 1)$  bármilyen  $p \geq 2$  egészre  $-2$  maradékot ad 9-cel osztva. Ha  $q > 3$ , akkor tehát a két oldal maradéka mod 9 különböző, az a két eset pedig, ha  $q = 2$ , illetve  $q = 3$  (miközben  $p$  tetszőleges prím), szintén nem ad megoldást. A gyerekek már általános iskolás korukban is több olyan példával találkoznak, amiben a megoldás nyitja annak felfedezése (nem feltétlen igazolása), hogy egy egynél nagyobb egész hatványainak utolsó számjegye valamilyen periódus szerint ismétlődik (legyen szó akár egy egy-hosszú periódusról). Tudatosítva, hogy a hatványoknak nem csak a 10-zel vett osztási maradékait vizsgálhatjuk, még ha nem is vezetjük be az elem rendjének a fogalmát, ezeknél az egyenleteknél is jó lehetőség mutatkozik arra, hogy általánosítsuk a korábban vizsgált „mi az utolsó számjegy” kérdést és 10 (vagy annak osztói) helyett más modulusok esetén is tanulmányozzuk a problémát.

Végül megemlítjük, hogy például az  $\frac{5^p - 1}{4} = \frac{257^q - 1}{256}$  egyenletet mod 25 vizsgálva jutunk ellentmondásra.

## 7. fejezet

# A disszertáció elméleti didaktikai háttere

A harmadik, negyedik és ötödik fejezetben felvetett problémákról azt gondoljuk, megteremtik annak lehetőségét a diákok számára, hogy az adott kérdéskört tekintve kisebb kutatásokat végezzenek. Mindhárom fejezet arra tesz kísérletet, hogy ilyen kutatási anyagokat mutasson be. Ahogy azt a szakköri foglalkozásokról szóló hatodik fejezetben említettük, természetesen minden tanórát tekintve fontos célnak tartjuk, hogy a gyerekek teret kapjanak az alkotásra, a gondolkodásra, a kísérletezésre, hogy a matematikatanulás, a matematika-tanítás, a matematikával való foglalkozás során valóban a matematika valós természetéről kapjanak képet. Mindemellett tanórai keretek között arra tipikusan nincs lehetőség, hogy a gyerekek valamilyen tárgykörben elmélyedve néhány órát maguk kutatással töltsenek, de fontos, hogy - ha ugyan nem is heti vagy havi rendszerességgel, de - lehessen alkalmuk kisebb felfedező utakra a matematika világában. „Egy feladat önálló megoldása: felfedezés. Ha a feladat nem nehéz, nem nagy felfedezés, de felfedezés. Ha már egyszer felfedeztünk valamit, akármilyen szerény dolgot is, nem szabad elmulasztanunk, hogy utánanézzünk, nincs-e mögötte valami több.”<sup>17</sup>

A harmadik fejezetben abból az alapkérdésből indulunk ki, hogy a páros és páratlan osztók darabszámának eloszlását vizsgáljuk. A kutatás egyik lehetséges iránya, hogy a páros és páratlan osztók más függvényeinek eloszlását vizsgáljuk, ezután ismét egy másik irány, ha a páros és páratlan osztók helyett egy  $p$  prím modulusra nézzük a  $p$ -vel osztható, illetve  $p$ -vel nem osztható osztók viszonyát. Egy újabb lehetőség a modulo 3 két nemnulla maradékosztályba eső osztók tanulmányozása. Ez utóbbi problémakört természetesen más modulusok esetén is vizsgálhatjuk, és fedezhetünk fel szép összefüggéseket (például a 3.5. pontban mod 4 megfogalmazott állítást), de mint azt a 3. fejezetben említettük, az előrehaladás már modulo 5 olyan nehézségekbe ütközik, amelyeket egyelőre nem tudunk megoldani. Ez azonban egyáltalán nem baj, hiszen egyrészt sok olyan kérdés is adódik,

---

<sup>17</sup>[14] 183.o.

ami a gyerekek számára elérhető közelségben van, már az általánosított, illetve a modulo 3 speciális esetet tekintve is, másrészt fontos, hogy a gyerekekben ne alakuljon ki olyan téves kép, hogy ha egy kérdést nem tudunk megválaszolni, akkor az nem érte meg a vele való foglalkozást.

A negyedik fejezetben leginkább az  $f(xy) + f(xz) = f(yz)$  egyenletet vizsgáltuk, ennek kapcsán szintén igen sok mindent lehet a tanulókkal feldolgozni, persze meghagyva annak lehetőségét, hogy ők maguk is vessenek fel kérdéseket. Például az  $\omega$  és  $\Omega$  függvényekre kapott eredmények azonnal kiterjeszthetők tetszőleges erősen, illetve teljesen additív függvényekre (lásd a 4.2.3 és 4.2.6 Tételket). A többi számelméleti függvény esetében is bőven vannak olyan kérdések, amelyek megválaszolása érdekes kutatási feladat lehet a tanulók számára, illetve az időközben adódó segédállítások (például a 4.2.8. Lemma vagy a 4.2.11. Tételben a szomszédos prímszámokra vonatkozó állítás) igazolása önmagában is kihívás. Bizonyos, hogy a gyerekek a felvetett problémákban legalább részeredményeket, részsikeret tudnak elérni.

Azt, hogy az ötödik fejezetben szereplő problémákat miképp dolgoztuk fel a szakköri foglalkozáson, mik voltak a célok, tapasztalatok, részletesen kifejtettük a hatodik fejezetben.

A disszertáció szemléletét, céljait nagyrésztben a kutatás-alapú tanulás/tanítás foglalja össze. Ez egyike az utóbbi két évtizedben új virágkorát élő pedagógiai módszereknek, amelyek alapvető gondolatai a XX. században gyökereznek. Ezek célja a „hagyományosnak” nevezett oktatás megújítása (ilyen oktatási módszer például a probléma-alapú és a projekt-alapú tanulás is).

A kutatás-alapú tanulás („inquiry based learning”, IBL) Spronken-Smith szerint egy olyan pedagógia, amely a leginkább biztosítja, hogy a tanulók átéljék a tudásalkotás folyamatait.<sup>18</sup> Ahogy Hattie fogalmaz: „A kutatás-alapú tanítás annak művészete, hogy miként teremtsünk a diákok számára olyan kihívást jelentő szituációkat, amelyekben egy jelensé-

---

<sup>18</sup>[23] 31.o.

get meg kell figyelniük, azt tanulmányozniuk kell, a megvizsgált jelenséggel kapcsolatban magyarázatokat kell keresniük; kigondolniuk és levezényelniük kísérleteket, amelyekben az általuk gyűjtött adatok segítségével a hipotéziseiket alátámasztják, vagy épp cáfolják; adatokat kell elemezniük; a kísérleti adatokból következtetéseket levonniuk; modelleket tervezniük és kivitelezniük; vagy ezek bármely kombinációja. Az ilyen tanulási szituációknak nyíltvégűeknek kell lennie olyan értelemben, hogy egy kérdésre nem egy egyedüli „helyes” válasz megadása a cél, hanem inkább az, hogy a diák bekapcsolódjon abba a folyamatba, amit a megfigyelés, kérdésfelvetés, a kísérletezésben, felfedezésben való részvétel, az adatok analízise és az érvelés jelent.”<sup>19</sup>

A kutatás-alapú tanítás legfontosabb lényegi jellemzőinek összefoglalását - amelyekben a disszertáció célkitűzéseire ismerünk - olvashatjuk például a PRIMAS-projektben ([26]) (ez a projekt egy 12 európai országot, köztük Magyarországot tömörítő nemzetközi program volt 2010 és 2013 között, amelynek célja a kutatás-alapú tanítás előmozdítása volt a matematika és más természettudományos tárgyak oktatásában, és amelyben magyar pedagógusok is dolgoztak ki oktatási anyagokat), ezek:

- a tanár arra bátorítja a tanulókat, hogy érveljenek, a diákok tapasztalataira épít, ahhoz kapcsolódik, legkevésbé a „megmondom” attitűd jellemzi, a diákokat abban támogatja, amiben azt ők igénylik, facilitátor szerepet játszik
- a diák kérdéseket fogalmaz meg, kutat: elmerül valamiben, felfedez, magyaráz, általánosít, értékkel, mindezt társaival együttműködve
- a tantermi környezet a párbeszédet, nem csak a helyes hozzászólásokat, de a hibákat is támogatja. A cél megszüntetni a hibázástól való rettegést azáltal, hogy a hibákra tanulási lehetőségként és nem problémaként tekintünk, amit érdemes elkerülni. Ahogy Ambrus András fogalmaz: „A hibás megoldásokban is észre kell venni a lehető legkisebb jó részt. A próbálkozások, tévutak a matematikai alkotómunka szerves részei. Igen fontos a tanár beleérző, empátikus, segítő magatartása.”<sup>20</sup>

---

<sup>19</sup>[24] 208.o.

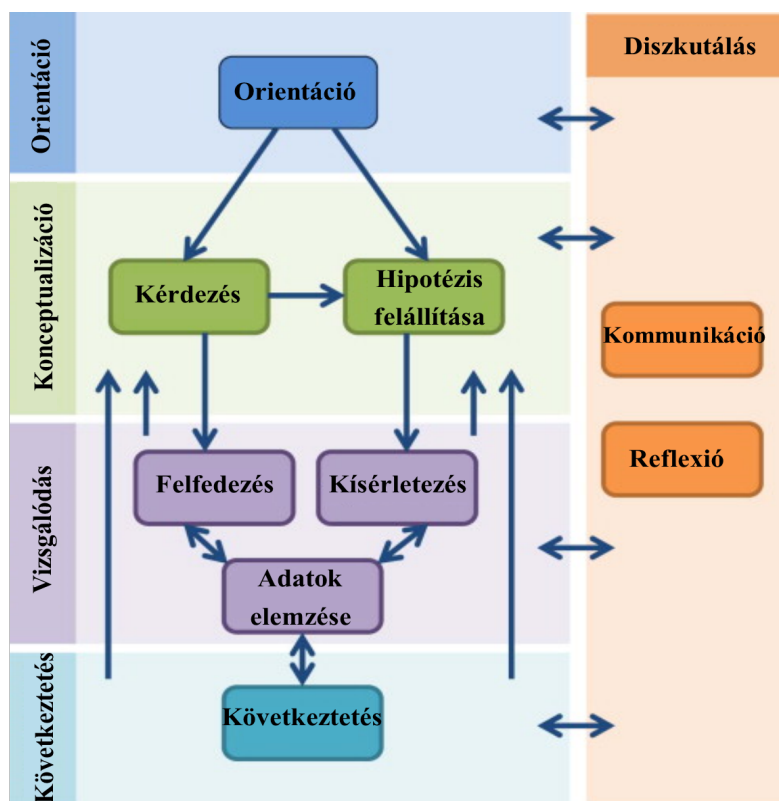
<sup>20</sup>[1] 26.o.

- a tanulási környezet legfontosabb jellemzője, hogy problémaközpontú, a problémák nyílt-végűek, a tanulás a kutatás által stimulált, kérdésekkel vagy problémákkal vezetett; a tanulás nem a példaadás, majd ennek gyakorlása mentén valósul meg, hanem a probléma, majd ennek magyarázata mentén

- a kimenetel, a cél pedig: kutató elmék képzése, akik kritikus szemlélettel és kreatívan állnak a problémákhoz; az élethosszig tartó tanulásra való felkészülés; a matematika valamint más tudományok természetének megismerése.

A disszertáció 3. – 5. fejezetében felvetett kutatási témák ezen szellemiségű tanítás/tanulás eszközei kívánnak lenni.

A kutatás-alapú tanulás főbb szakaszait az alábbi ábra foglalja össze (forrás: [27]).



A kutatás (tipikusan nem lineáris) folyamata tehát az orientációval kezdődik, a kutatás tárgyának megismerésével; ezt a kérdezés fázisa követi, amihez persze elengedhetetlen (ahogy Schoenfeld fogalmaz<sup>21</sup>) a kutatáshoz szükséges ismeretekről egyfajta leltár készítése, a kutatni kívánt probléma definiálása, majd a megfigyelés, az adatgyűjtés, a tervkészítés; a kísérletezés, a minták azonosítása, a megfigyelték rendszerezése, analízise, a sejtés megfogalmazása, a hipotézis alátámasztása vagy cáfolata a gyűjtött adatok segítségével; végül a megfigyelték szintézise, a következmények levonása, azok igazolása, megengedve az eredeti hipotézis finomítását is. Ezeket a fázisokat mindvégig kíséri az ezekről történő kommunikáció, az érvelés, a vita, a reflektálás, az új tudás összevetése a korábbival.

A kutatás-alapú tanulás mindenképpen tehát legalább részben irányítatlan tanulási-tanítási folyamatot feltételez. Ugyanakkor biztosítani kell a tanulók számára a kiinduláshoz szükséges alapismereteket, továbbá figyelni kell arra, hogy egy adott szakaszban mennyi tanári jelenlét szükséges és a diákok előrehaladásának előmozdításához mennyi direkt vagy indirekt segítség kell, hogy a gyerekek ne maradjanak magukra a problémával és ne veszítsék el motivációjukat. Fontos, hogy a diákok terveikhez igazítva tudjunk adott ponton az irányítottság mértékén rugalmasan változtatni (akár már a kezdeti fázisban is, például: milyen iránnyal ne foglalkozzunk inkább). Arra is ügyelni kell, hogy - ahogy Pólya fogalmaz - „a munkának ésszerű hányada jusson a diákra”<sup>22</sup>, tehát például, ahogy erről a szakköri foglalkozásokat tárgyaló fejezetben szó van, a többedszeri adatgyűjtést (a folyamat lényegét érintő veszteség nélkül) adott esetben megspórolhatjuk a diákoknak.

Arról, hogy mit tekinthetünk problémának, és mi különböztet meg problémát feladattól, Schoenfeld így ír: „Definíció szerint problémának azokat a szituációkat nevezhetjük, amelyekben az egyén nem rendelkezik kész hozzáféréssel a megoldáshoz szükséges többé-kevésbé előrecsomagolt eszközökhöz.”<sup>23</sup>

Fontos, hogy a diákok megéljék, miképp alakul, hogyan válik egy kezdeti kérdés további kérdések kiindulópontjává, milyen lehetőségei vannak a probléma variálásának, specializá-

---

<sup>21</sup>[19] 55.o.

<sup>22</sup>[14] 21.o.

<sup>23</sup>[19] 54.o.

lásának, illetve általánosításának, és hogyan kapcsolódnak, épülnek egymásra a kérdések. „A tanárnak egyik legfontosabb kötelessége vigyázni, nehogy diákjainak az legyen a benyomásuk, hogy a matematikai feladatoknak kevés közülük van egymáshoz, és hogy csak úgy a levegőben lógnak.”<sup>24</sup>

Schoenfeld a jó problémamegoldó jellemzői közé sorolja<sup>25</sup> többek között azt, hogy a problémamegoldás nem „terv vezérelt” („plan driven”), hanem „történés vezérelt” („event driven”): a jó problémamegoldó, habár van elgondolása arról, mit kíván vizsgálni, meglátja a problémamegoldás közben adódó lehetőséget, és kimeríti azt még akkor is, ha az nem teljesen esett egybe eredeti szándékaival. Fontos segíteni a tanulót abban, hogy ezt a „viselkedésformát” elsajátítsa, ahogy erre törekedtünk a szakkörön. Schoenfeld szerint<sup>26</sup> a jó problémamegoldót a pozitív kontroll is jellemzi, amely tehát azt az attitűdöt is jelenti, hogy ha egy sejtés az ellenőrzése után tévedésnek bizonyul, akkor a jó problémamegoldó nem riad meg a folytatástól, nem tántorodik el újabb gondolatok felkutatásától, számára a tévedés pozitív motiváció abba az irányba, hogy tovább gondolkodjon. Pedagógusként mindenképp fontos feladatunk azt erősíteni a gyerekekben, ismét Pólya Györgyöt idézve - akinek mindig aktuális gondolatai fontos iránymutatást jelentettek akkor is, amikor a szakköri munkát terveztük -, hogy „Semmiféle gondolat sem rossz, csak rosszá válhat, ha kritika nélkül fogadjuk. Csak az rossz igazán, ha semmi gondolatunk nincs.”<sup>27</sup>

A disszertáció igyekezett olyan problémákat felvetni, amelyek kiindulópontjai lehetnek további érdekes gondolatoknak.

---

<sup>24</sup>[14] 35.o.

<sup>25</sup>[19] 134.o.

<sup>26</sup>[19] 125.o.

<sup>27</sup>[14] 244.o.

## 8. fejezet

# Összefoglalás

A disszertáció fő célja olyan problémák felvetése és vizsgálata, amelyek kapcsán a tanulóknak lehetősége nyílik kísérletezésre és kisebb-nagyobb felfedező utakra a számelméleti függvények világában. Ez olyan kérdéseket jelent, amelyek a középiskolások számára hozzáférhetőek, általában nem igényelnek a középiskolai matematikán túlmutató ismereteket, ugyanakkor érdekesek, változatos témájúak és nehézségűek, különböző mélységű részekre bonthatók, sokféle módszert mutatnak be, és tág teret engednek a kreativitásnak.

A számelméleti függvények közül az osztók száma része a középiskolai matematika tananyagának, az osztók összege és az Euler-féle  $\varphi$ -függvény pedig szerepel a speciális matematika tagozat reguláris óráin, de tárgyalható szakkörön a matematikát nem emelt óraszámú tanuló csoportokban is a matematika iránt érdeklődő tanulókkal. Ehhez a három függvényhez érdemes időnként hozzávenni a különböző, illetve az összes prímosztó száma  $\omega$  és  $\Omega$  függvényeket is, mert ezek megértése, képlete semmilyen nehézséget sem okoz, ugyanakkor számos tulajdonságban a másik háromhoz képest igen eltérő vonásokat mutatnak. A függvényekről mesélhetünk érdekességképpen, vagy néhány probléma meg gondolásán keresztül, vagy pedig megismerkedhetünk velük alaposabban is. Számos matematikatörténeti ínyencséggel is fűszerezhetjük az ismereteket, a gyerekek számára ezek vélhetően közelebb hozzák a számelméletet. Ehhez a munkához feladatgyűjtemények, különböző matematika-versenyek, valamint a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok idevágó feladatai bőségesen rendelkezésünkre állnak (ezekből egy szubjektív válogatás szerepel a bevezetést követő második fejezetben, lásd alább). A dolgozat további része arra kíván kísérletet tenni, hogy az ilyen típusú feladatmegoldás jellegétől eltérően, nagyobb lélegzetű problémacsokrokat járjon körül, módszertanilag bemutassa, miként érdemes ezeket a diákok közé bevinni, és az adott kérdéskörben milyen továbblépési lehetőségek vannak.

A 2. fejezet első részében azokat a tapasztalatokat összegzem, amelyeket a középisko-

lai feladatgyűjtemények, tankönyvek áttekintése, összehasonlítása jelentett. A tankönyvek közül többet használtam már speciális matematika tagozatos és nem tagozatos csoportokban egyaránt, így természetesen merült fel, hogy ezeken kívül még más, a középiskola 9. osztálya számára íródott tankönyvek számelmélettel foglalkozó fejezeteit is megvizsgáljam. Érdeemesnek tartottam azt is, hogy módszertanilag összevessem az azonos tartalmú feladatok különböző megfogalmazását más-más feladatgyűjteményben, tankönyvben, hogy megvizsgáljam egyik, illetve másik megfogalmazás esetleges előnyeit, illetve hátrányait.

A 2. fejezet második része szubjektív válogatás különböző hazai és nemzetközi versenyek, példatárak és a KöMaL feladataiból (a 2.2.27. Feladattól eltekintve). Ezzel azt szeretném illusztrálni, milyen sokféle jellegű és nehézségű kérdés adódik ebben a témakörben. A feladatok között az osztók számára vonatkozóak dominálnak, de előjön az osztók összege és szorzata, valamint a  $\varphi$ -függvény is. A megoldás során esetenként a képlet ügyes alkalmazására (pl. 2.2.8.), máskor az osztópáros ötletre (pl. 2.2.17.), időnként ügyes becslésekre (pl. 2.2.13.) van szükség, de megjelennek a Fermat-prímek (2.2.26), az Euler–Fermat-tétel (2.2.28.) és a Catalan-sejtés (2.2.27.) is. Néhány feladat különböző függvényeket kapcsol össze (pl. 2.2.27. vagy 2.2.29.). Beválogattam néhány olyan régi KöMaL-feladatot is, amelynek kitűzője világhírű magyar matematikus (2.2.10. Turán Pál, 2.2.25. Erdős Pál). A 2.2.7. Feladat jó példája annak, miként nőhet ki egy konkrét feladatból egy egész variációsorozat, és a különböző variánsok vizsgálata egyik esetben miként vezethet akár ugyanarra a válaszra, mint az eredeti kérdés, egy másik esetben azonban miként eredményez a korábbtól lényegesen eltérő választ. A gyerekek számára is hasznos, ha minél többször érzékelik, hogy egy feladat nem feltétlen ott kell, hogy véget érjen, amikor a feltett kérdésre megtaláltuk és bebizonyítottuk a választ. Persze az nem garantált, hogy az analóg problémára is megleljük a megoldást, de egy kísérletet mindenképp megér annak megfontolása, hogy a probléma átfogalmazása, általánosítása vajon hova vezet. Fontos, hogy az ilyen lehetőségeket a diákok lássák, hogy tudjanak párhuzamokat találni, válaszokat összehasonlítani, és megoldások alap gondolatát adaptálni egy megváltozott szituációban.

A 3. fejezet kiindulópontja, hogy egy szám páros és páratlan osztóinak darabszámá-

ra, összegére és reciprokösszegére, ezek arányára, illetve különbségére milyen összefüggések teljesülnek. Természetesen merülnek fel például olyan kérdések, hogy lehet-e a páros és páratlan osztók számának különbsége tetszőlegesen nagy, vagy külön-külön vett összegük aránya tetszőlegesen pozitív egész. Ezután az analóg kérdéseket először közvetlen általánosításként a kettő helyett bármely prím modulusra, majd a nulla és a nemnulla maradékosztályok helyett a két modulo 3 nem nulla maradékosztály vonatkozásában válaszolom meg. A két maradékosztályba eső osztók számának különbségét, illetve arányát a 3.3.4. és 3.3.5. Tételek írják le, az osztók összegére vonatkozó eredmények pedig a 3.3.6. – 3.3.10. Tételekben szerepelnek. Az osztók reciprokösszegének vizsgálata az osztópárok segítségével visszavezethető az osztók összegére (3.3.11. és 3.3.12. Tételek). Bizonyos tételek speciális eseteire több bizonyítást adok (pl. 3.3.7. Tétel), amit azért is tartok fontosnak, mert összekapcsolhatja a tanulóknak a matematika különállónak érzékelt területeit.

A középiskolában ugyan nem foglalkozunk (még a speciális matematika tagozaton sem) a megismert számelméleti függvények átlagértékével vagy olyan „jelenségekkel”, mint a hegy- és völgytétel, de ezeknek a problémáknak a megfelelő variánsait is megvizsgálom (3.4.3. – 3.4.5. Tételek). Itt és az értekezés több más helyén is a GeoGebra szoftvert is használom, amit könnyű kezelhetősége miatt kifejezetten alkalmasnak gondolok arra, hogy középiskolai diákok segítségére legyen a matematikai problémamegoldásban, és tanítom is a használatát a diákjaimnak is. Mint sok más digitális segédeszköz, az ilyen jellegű matematikai szoftver használata sok esetben az adatok összegyűjtésén túl, azok vizuális megjelenítése által megkönnyíti valami lényegi tulajdonság meglátását, mint például a 3.3.5. Tételben, amikor a 3-mal osztva 1, illetve  $-1$  maradékot adó osztók számának hányadosát vizsgálom. Persze jó, ha a szoftver segítségével megtalált sejtést bizonyítás követi, de a diákok számára (is) könnyebben hozzáférhető a sejtés maga, ha nem csak papírt és ceruzát használnak.

A 3. fejezet végén külön részben elemzem a kérdés didaktikai vonatkozásait, beleértve a továbblépés lehetőségeit.

A 4. fejezet első részében az  $x^2 + y^2 = z^2$  egyenlet analógiájaként az  $f(x^2) + f(y^2) = f(z^2)$  egyenletet és annak magasabb hatványokra, illetve több tagra történő általánosításait vizsgálom. Ez a probléma is igen változatos képet mutat attól függően, hogy  $f$  melyik választott számelméleti függvény: az osztók száma és összege esetén az alapegyenlet magasabb hatványokra sem oldható meg, a különböző és összes prímosztók esetén végtelen sok megoldás van, az utóbbinál a prímhatalványok körében is, de a  $\varphi$ -t is beleértve egyik függvény esetén sincs olyan megoldás, ahol mindhárom ismeretlen prímszám.

A 4. fejezet második része az  $f(xy) + f(xz) = f(yz)$  egyenlettel foglalkozik. Itt először pozitív értékű erősen, illetve teljesen additív függvényekre megadom az összes megoldást (4.2.3. és 4.2.6. Tételek). Ahogy az adott résznél is jelzem, a probléma gyerekekkel való feldolgozásában nem ezt az utat tartom célszerűnek, hanem először konkrét  $f$  függvény, jelen esetben a különböző, illetve az összes prímosztó számára érdemes vizsgálni és a bizonyításban kihasznált tulajdonságok alapján lehet általánosítani. A multiplikatív függvények sokkal izgalmasabb és változatosabb képet mutatnak. Az osztók számára megadom az összes prímhatalvány megoldást (4.2.9/(i) Tétel), a  $\varphi$  esetén pedig belátom, hogy végtelen sok prímhatalvány megoldás létezik (4.2.10/(i) Tétel). Az osztók összege és  $\varphi$  függvényénél a kérdés kapcsolódik az ikerprímsejtéshez és a prímszámokra vonatkozó más megoldatlan problémákhoz is (4.2.13/(iii) és 4.2.10/(vi),(vii) Tételek). A  $\varphi$  esetében meghatározom az összes olyan megoldást, ahol  $x$  és  $y$  két különböző prímhatalványa és  $z$  osztható mindkét prímmel (4.2.11. Tétel), de jóval bonyolultabb a helyzet, ha  $z$  legfeljebb az egyik prímmel osztható (4.2.12. Tétel).

Az 5. fejezet két dolgot ötvöz: a gyerekek által középiskolás éveikre vélhetően már jól ismert kommutativitást, és a talán kevésbé jól ismert, és biztosan kevesebb matematikai helyzetben előkerülő, de a tapasztalat alapján a tanulók által könnyen elsajátítható függvénykompozíciót. A tanulók már találkoztak néhány szituációban hasonló problémával, még ha nem is általánosságban fogalmazták meg a vizsgált kérdést, vagy használták egyáltalán a kommutativitás vagy kompozíció kifejezéseket. Például a függvénytranszformációknál vagy a sík egybevágóságainak egymás utáni alkalmazásánál tapasztalhatták, hogy tipikusan nem ugyanaz az eredmény, ha a transzformációk sorrendjét felcserélik. Ide tartoznak olyan, több

tanuló által feltett kérdések, hogy például a  $\sin(2x) = 2 \sin x$  átalakítás megengedett-e, ez is jó alkalom annak tudatosítására, hogy a kompozíció tipikusan nem kommutatív.

Az 5. fejezetben ennek alapján az  $f(g(n)) = g(f(n))$  egyenletet vizsgálom, ahol  $f$  és  $g$  is a már megismert öt számelméleti függvény valamelyike (az osztók száma  $d$ , az osztók összege  $\sigma$ ,  $\varphi$ , a különböző, illetve az összes prímosztó száma  $\omega$  és  $\Omega$ ). Ebben az esetben is a megoldhatóság több különböző aspektusát tanulmányozom: létezik-e legalább egy megoldás ( $n$ -ben); található-e végtelen sok megoldás; van-e végtelen sok megoldás, amikor mindkét oldal értéke egy adott  $k$  szám; megadható-e az összes megoldás. Attól függően, hogy  $f$  és  $g$  melyik függvényt alkotja, itt is igen változatos kép rajzolódik ki, ezek közül néhányat itt is felsorolok. Az  $\Omega, \varphi$  és  $\Omega, \omega$  párra az összes  $n$ -et meg tudom adni (5.1.1. és 5.1.2. Tételek). Az  $\omega, d$  és  $\Omega, d$  párra minden  $k$  esetén végtelen sok olyan  $n$  van, amikor az egyenlet két oldalának közös értéke  $k$  (5.2.1. és 5.2.2. Tételek). A  $\varphi, d$  párra végtelen sok megoldás van (5.2.3. Tétel), de pl. a 44 nem lép fel a két oldal közös értékeként (5.3.3. Tétel). Ez utóbbi általánosítható is és a bizonyítása talán a fejezet legösszetettebb gondolatmenete. Ebben a fejezetben is több eredmény kapcsolódik prímekre vonatkozó nevezetes sejtésekhez (5.4.1. – 5.4.4. Tételek), illetve a Fermat-prímekhez (5.4.5. Tétel). Külön rész foglalkozik azzal, amikor az egyenlet két oldalának közös értéke 1. Ez a 10 függvényt alkotó közül 9 esetben feladat szintű (5.5.1. – 5.5.2. Feladatok), az  $\omega, \sigma$  esetén viszont nagyágyúval is csak részeredményeket lehet elérni (5.5.3. Probléma). Ez is jó alkalom arra, hogy a gyerekek lássák, a hasonlóknak tűnő kérdések nehézsége között is óriási különbségek lehetnek.

A 6. fejezetben részletesen beszámolok arról a szakkörrel, amit iskolámban, az Óbudai Árpád Gimnáziumban tartottam a 2017/18-as tanév utolsó hónapjaiban a speciális matematika tagozaton tanuló 9. osztályos diákok számára. Ahogy azt a bevezetésben már említettem, azért választottam a szakköri keretet, mert a tanórákon nincs idő és lehetőség, hogy a tanulók tanári irányítás mellett, de teljesen szabadon és önállóan kísérletezhessenek. A szakkört az 5. fejezetben szereplő problémák köré szerveztem, a célom tehát az volt – amellett, hogy még inkább megkedveltessem a gyerekekkel a számelméletet –, hogy ezeknek a kérdéseknek a vizsgálatával motiváljam őket az önálló problémafelvetésre, hogy megéljék

és megérezzék, mit jelenthet a kutatás.

Az előzetes célok mellett összegzem a szakkör tervezésének folyamatát, a gyerekek felkérését, a módszertani előkészítést, hogy didaktikailag mit tartottam fontosnak az órák tervezésénél, hogy miként valósult meg ez a gyakorlatban, vagy hogy miként kellett adott ponton stratégiát változtatnom. Részletezem a diákok szakköri munkáját, ötleteit, saját problémajavasolataikat és megoldásaikat (amik közül kétségkívül az egyik tanulónak az 5.2.1. Tétellel kapcsolatos munkája volt a szakkör egyik fénypontja), és azt a sok-sok nagyon pozitív tapasztalatot és élményt, amit ezek a foglalkozások számomra, illetve reményeim és néhány visszajelzés szerint a diákok számára is jelentettek.

A 6. fejezet záró részében bemutatok további lehetőségeket, kapcsolódási pontokat, amelyekről való gondolkodásra ugyan a szakköri órákon már nem került sor, de amelyeket szintén érdemesnek tartok arra, hogy a tanulókkal vizsgáljunk.

A 7. fejezet a disszertáció elméleti didaktikai háttérét mutatja be. A dolgozat szemléletét nagyrésztben a kutatás-alapú tanulás/tanítás („inquiry based learning”, IBL) foglalja össze, amelynek ismertetem keretrendszerét, legfőbb célkitűzéseit és lényegi jellemzőit. Ezután a disszertáció céljait többek között azzal hasonlítom össze, amit a problémamegoldásról Pólya György és Alan H. Schoenfeld munkáiban olvashatunk.

## 9. fejezet

# Summary

The main goal of this thesis is to propose and investigate some problems related to arithmetic functions and give students opportunity to experiment and to have smaller or larger voyages of exploration in the world of these functions. Most of these problems do not require higher mathematical knowledge and are accessible for high school students. These questions are interesting, provide various topics and different grades of difficulty, and – from a teacher’s point of view – most of them can be divided into parts of different depth. They open up many problem solving methods and provide enough space of creativity for students.

Among the arithmetic functions, the number of divisors is part of the high school curriculum. Students in the special maths program learn also about the sum of divisors and Euler’s totient function  $\varphi$  in class, but these can be discussed in group study sessions with other students, too, who are interested in maths. It is also worth to introduce the number of distinct and all prime factors,  $\omega$  and  $\Omega$ , as it is easy to understand their definition and basic properties whereas their behavior differs in many aspects from the other three functions mentioned above. We can just talk about these five functions, or present them through solving some problems, or get to know them thoroughly. Adding some interesting stories from the history of maths might bring number theory closer to students. The teacher is supported by lots of exercise books, collections of maths contest problems, and the Mathematical and Physical Journal for High Schools (KöMaL) offering a wide range of exercises (Chapter 2 contains a subjective selection, see below). Somewhat differently, the rest of the dissertation proposes larger packages of problems, investigates the didactic methods of disseminating them among students, and sketches some possibilities for further extensions.

The first part of Chapter 2 summarizes my experiences in surveying and comparing high

school textbooks and exercise books. I have been using several textbooks both in ordinary and special maths classes, so it was natural to check the number theory parts of other 9th grade textbooks, too. From a didactic point of view, it was interesting to contrast the various formulations of essentially identical problems and to discuss the possible advantages and disadvantages of the different presentations.

The second part of Chapter 2 is a selection of problems from monographs, KöMaL, and various Hungarian and international mathematical competitions (except for Problem 2.2.27). These problems illustrate not only the diversity of this topic, but also the various grades of difficulty regardless of which arithmetic function we investigate. Most problems refer to the number of divisors, but some deal with the sum of divisors and Euler's totient function. Solving these problems may require the clever use of formulas (e.g. 2.2.13), or the idea of pairing divisors (e.g. 2.2.17), or estimates (e.g. 2.2.13), but also the Fermat primes (e.g. 2.2.26), the Euler-Fermat theorem (e.g. 2.2.28), and the Catalan conjecture (e.g. 2.2.27) pop up. Some problems connect different functions (e.g. 2.2.27 or 2.2.29). I compiled a few problems from KöMaL posed by world famous Hungarian mathematicians (2.2.10 by Pál Turán and 2.2.25 by Pál Erdős). Problem 2.2.7 serves as a good example how one can develop and extend a question, how this can build up a series of variations, and how these variants can sometimes result in exactly the same answer as the original problem, and how they can lead to a totally different outcome in other cases. I think it is useful for the students to experience that the study of a problem does not necessarily terminate with the solution being found and proved. Of course, it is not granted that we can solve the analogue problem, but it is worth an attempt to consider where the reformulation and generalization of the original problem could lead. It is important to make pupils notice these kinds of opportunities, so they can manage to find similarities, to compare solutions, and to adapt the main ideas of a certain solution in a modified situation.

The starting point of Chapter 3 is the investigation of the difference and the ratio of the numbers, the sums, and the sums of reciprocals of the even and odd divisors of a given integer. Naturally arising questions are e.g. whether the difference of the numbers of even and odd divisors can be arbitrary large or whether the ratio of their sums can

equal any integer. A straightforward first generalization is to change the modulus 2 to any prime, and then a different direction is to replace the categories divisible and non-divisible by considering the two non-zero residue classes mod 3. The difference and the ratio of the numbers of these divisors are discussed in Theorems 3.3.4 and 3.3.5, and the results about their sums are contained in Theorems 3.3.6 – 3.3.10. The behavior of the sum of reciprocals can be derived from the sum of divisors by using divisor pairs (Theorems 3.3.11 and 3.3.12). In some special cases I intentionally give more than one proof (e.g. Theorem 3.3.7) to connect various parts of maths that seem to be remote areas for the students.

Though the mean value of an arithmetic function or phenomena like the canyon and peak theorems, are not discussed even in special maths classes, I study their relevant variants here (Theorems 3.4.3 – 3.4.5). In investigating these and other problems, I relied partly on the mathematical software GeoGebra. I find it a handy and an easy to use tool for high school students, and a really useful help in the process of mathematical problem solving, so I teach it to my students. As many other digital aids, it not only helps in the phase of data collection, but through the visual representation of data, it eases to notice some essential feature. This happened e.g. in Theorem 3.3.5, when I observed the ratio of the numbers of divisors in residue classes  $+1$  and  $-1 \pmod{3}$ . Of course the best is if, after establishing the conjecture, we are able to prove it, but we can formulate the conjecture definitely easier using the software than just working with paper and pencil.

The last section of Chapter 3 is a didactic analysis of the topic including also some possible extensions.

In the first part of Chapter 4, as an analogy to  $x^2 + y^2 = z^2$ , I study the equation  $f(x^2) + f(y^2) = f(z^2)$  and its generalization to higher degrees and more terms. The situation is multifarious depending on which arithmetic function we choose: for the number and sum of divisors, there is no solution for any degree; for  $\omega$  and  $\Omega$ , we have infinitely many solutions, and regarding the latter there exist infinitely many solutions even among prime powers; but there are no solutions in primes for any of the five functions, including  $\varphi$ .

The second part of Chapter 4 deals with the equation  $f(xy) + f(xz) = f(yz)$ . First

I determine all solutions for positive strongly or completely additive functions (Theorems 4.2.3 and 4.2.6). As I mention, a different approach is desirable when working on this problem with students: we should consider first the question for a specific function, i.e.  $\omega$  or  $\Omega$  in this case, and based on the essential properties used in the proofs, we can move on to formulate the generalizations. The analogue question for multiplicative functions gives rise to a more exciting and diversified behavior. For the number of divisors I determine all solutions in prime powers (Theorem 4.2.9/(i)), and I present infinitely many solutions in prime powers for  $\varphi$  (Theorem 4.2.10/(i)). The equation for the sum of divisors and for  $\varphi$  is related to the twin prime conjecture and some other unsolved problems concerning primes (Theorems 4.2.13/(iii) and 4.2.10/(vi), (vii)). For  $\varphi$  I determine all solutions where  $x$  and  $y$  are powers of two distinct primes and  $z$  is divisible by both of these primes (Theorem 4.2.11). The situation gets much more complicated when  $z$  is relatively prime to at least one of the two primes (Theorem 4.2.12).

Chapter 5 combines two notions: commutativity, probably well known by students in high school, and composition of functions, being less familiar to them, but according to my personal experience, they can understand it quickly. They must have met these notions in certain situations, even if not studying them in general or using the terms „commutativity” and „composition”. For instance they could have experienced that transforming functions in two steps or applying two congruences of the plane, the result is typically not the same if we change the order of the two transformations. We can use this opportunity to highlight again that the commutative law typically does not apply to composition of functions, e.g. when students wonder whether  $\sin(2x) = 2 \sin(x)$  is valid or not.

So in Chapter 5 I study the equation  $f(g(n)) = g(f(n))$  where each of  $f$  and  $g$  is one of the five functions listed earlier (the number of divisors  $d$ , the sum of divisors  $\sigma$ ,  $\varphi$ , and the number of distinct and all prime factors  $\omega$  and  $\Omega$ ). I examine various aspects of solvability: does there exist a solution (in  $n$ ); are there infinitely many solutions; are there infinitely many solutions when both sides equal a given integer  $k$ ; can we determine all solutions? The results are manifold depending on  $f$  and  $g$ , I mention some of these here, too. I determine all solutions for the pairs  $\Omega, \varphi$  and  $\omega, \Omega$  (Theorems 5.1.1 and 5.1.2).

Considering  $\omega, d$  and  $\Omega, d$ , there exist infinitely many solutions when both sides equal any given integer  $k$  (Theorems 5.2.1 and 5.2.2). There are infinitely many solutions for  $\varphi, d$  (Theorem 5.2.3), but e.g. 44 does not occur as a common value of both sides (Theorem 5.3.3). This latter can be generalized and its proof might be the most complex argument of the chapter. Several propositions are related to famous conjectures concerning primes (Theorems 5.4.1 – 5.4.4) and Fermat primes pop up, too (Theorem 5.4.5). A separate section investigates the equation when the common value of both sides is 1. The complete solution is nearly a routine exercise for nine out of the ten possible pairs (Exercises 5.5.1 and 5.5.2), but we can achieve only partial results for the pair  $\omega, \sigma$  even using really strong machinery (Problem 5.5.3). This is another good occasion for students to experience that there can be huge differences between seemingly similar problems.

Chapter 6 provides a detailed summary of the group study sessions I conducted in my school over the last months of school year 2017/18 for kids in 9th grade in the special maths program. As I already mentioned it in the Introduction, I chose this format without the time limit of regular classes to ensure the opportunity for students to experiment (under the teacher's guidance but) freely on their own. The sessions were held in the topic of Chapter 5, and the main goal was to motivate students to propose questions while working on the material, to give them some insight on what a research could be, and – if possible – to improve their positive attitude towards number theory.

In addition to the preliminary goals, I summarize the process of planning, the invitation of the students, the didactic preparations, the stuff I thought to be crucial while planning, and how this was realized in practice, including how I had to change strategy sometimes. I give details about the work of the pupils, the ideas they came up with, the problems they proposed and the solutions they suggested (the performance of a student related to Theorem 5.2.1 was definitely one of the highlights of these sessions). I describe the very positive experience I gained while working with these students that hopefully and according to some feedbacks was also shared by them.

In the last section of the chapter I present some further ideas which were not part of

the sessions but are worth studying them with students.

Chapter 7 provides a theoretical didactic background for the dissertation. The approach of the thesis, the way I desire to work on the problems presented in Chapters 3 – 5 meet the framework of inquiry based learning (IBL). I present IBL's essential features and goals, and compare the dissertation's objectives with György Pólya's and Alan H. Schoenfeld's works on problem solving.

# Irodalomjegyzék

- [1] Ambrus A., *Bevezetés a matematikadidaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest (1995)
- [2] Dr. András Tiborné - Dr. Czegléd Istvánné - Dr. Czegléd I. - Dr. Hajdu S. - Novák Lászlóné - Dr. Sümegi Lászlóné - Szalontay T., *Matematika feladatgyűjtemény*, Calibra Kiadó, Budapest (1994)
- [3] Bartha G. - Bogdán Z. - Csúri J. - Duró Lajosné dr. - dr. Gyapjas Ferencné - dr. Kántor Sándorné - dr. Pintér Lajosné, *Matematika feladatgyűjtemény I. a középiskolák tanulói számára*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (1995)
- [4] Y. Bugeaud, P. Mihailescu, *On the Nagell-Ljunggren equation  $\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q$* , *Mathematica Scandinavica* **101** (2007), 177-183.
- [5] Czapáry E. - Czapáry Endréné - Csete L. - Hegyi Györgyné - Iványiné Harró Á. - Morvai É. - Reiman I., *Matematika. Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2005)
- [6] Csordás M. - Konfár L. - Kothencz Jánosné - Kozmáné Jakab Á. - Pintér K. - Vincze Istvánné, *Sokszínű matematika 6.*, Mozaik Kiadó, Budapest (2018)
- [7] Freud R., Gyarmati E., *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2000)
- [8] Dr. Fried K. - Dr. Gerőcs L. - Számadó L., *Matematika (A középiskolák 9. évfolyama számára)*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest (2009)
- [9] R.K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York (1994)

- [10] Hajdu S. - Czeglédy I. - Hajdu Sándor Z. - Kovács A. - Róka S., *Matematika 9.*, Műszaki Kiadó, Budapest (2009)
- [11] Juhász I. - Orosz Gy. - Paróczay J. - Szászné dr. Simon J., *Matematika 9. Az érthető matematika*, Eszterházy Károly Egyetem (Oktatókutatató és Fejlesztő Intézet), Eger (2019)
- [12] Kosztolányi J.- Kovács I.- Pintér K.- dr. Urbán J.- Vincze I., *Sokszínű matematika 9.*, Mozaik Kiadó, Budapest (2018)
- [13] F. Luca, C. Pomerance, *On some problems of Makowski-Schinzel and Erdős concerning the arithmetic functions  $\phi$  and  $\sigma$* , *Colloquium Mathematicum* **92** (2002), 111–130.
- [14] Pólya Gy., *A gondolkodás iskolája*, Gondolat Kiadó, Budapest (1971)
- [15] C. Pomerance, *On the composition of the arithmetic functions  $\varphi$  and  $\sigma$* , *Colloquium Mathematicum* **58** (1989), 11–15.
- [16] Róka S., *2000 feladat az elemi matematika köréből*, Typotex, Budapest (2006)
- [17] J. Sándor, *On the composition of some arithmetic functions*, *Studia Univ. Babeş-Bolyai Mathematica* **34** (1989), 7–14.
- [18] J. Sándor, *On the composition of some arithmetic functions, II*, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* **6** (3), (2005), 73.
- [19] A. H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Academic Press, Inc., Orlando, (1985)
- [20] W. Sierpinski, *Elementary Theory of Numbers*, Pwn-Polish Scientific Publishers (1988)
- [21] Tamásné Kollár Magdolna, Kelemenné Kiss Ilona, *Matematika 9. tankönyv I. kötet*, Eszterházy Károly Egyetem (Oktatókutatató és Fejlesztő Intézet), Eger (2016)

Online források:

[22] [www.artofproblemsolving.com](http://www.artofproblemsolving.com)

[23] <http://epa.oszk.hu/00000/00011/00153/pdf/2010-12.pdf>

utolsó letöltés: 2021.február 10.

[24] [https://apprendre.auf.org/wp-content/opera/13-BF-References-et-biblio-RPT-2014/Visible%20Learning\\_A%20synthesis%20or%20over%20800%20Meta-analyses%20Relating%20to%20Achievement\\_Hattie%20J%202009%20...pdf](https://apprendre.auf.org/wp-content/opera/13-BF-References-et-biblio-RPT-2014/Visible%20Learning_A%20synthesis%20or%20over%20800%20Meta-analyses%20Relating%20to%20Achievement_Hattie%20J%202009%20...pdf)

utolsó letöltés: 2021.február 10.

[25] [https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan's\\_conjecture](https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan's_conjecture)

utolsó letöltés: 2021.február 10.

[26] [https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/primas\\_final\\_publication.pdf](https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/primas_final_publication.pdf)

utolsó letöltés: 2021.február 10.

[27] <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1747938X15000068#bib0140>

utolsó letöltés: 2021.február 10.

## A szerzőnek a disszertációhoz kapcsolódó publikációi

[K1] I. Kézér, *Some Pythagorean type equations concerning arithmetic functions*, közlésre elfogadva, megjelenik: Teaching Mathematics and Computer Science **18** (2), (2020)

[K2] I. Kézér, *On some problems on composition of arithmetic functions*, Teaching Mathematics and Computer Science **16** (2), (2018), 161-181.

[K3] I. Kézér, *Comparing various functions of the divisors of an integer in different residue classes*, Teaching Mathematics and Computer Science **14** (2), (2016), 247-258.

## A szerzőnek a disszertációhoz nem kapcsolódó publikációja

[K4] Kézér I., *Egy csoda a sok közül, avagy a köbszámok összege*, in „Használni akartam, nem tündökölni” tanulmánykötet, (2018), 179-190. (ISBN 978-615-00-1636-8)

## A szerzőnek a disszertációhoz kapcsolódó előadásai

- *Néhány újabb eredmény számelméleti függvények kompozíciójáról*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Hajdúszoboszló, 2018.
- *Számelméleti függvények kompozíciójának vizsgálata*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Budapest, 2017.
- *Some problems on the sum-of-divisors function*, Spring School at the University of Wuerzburg - Perspectives on Research in Mathematics Education in the next Decade, Wuerzburg, 2016.
- *Az osztók összegével kapcsolatos néhány probléma*, Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Pozsony, 2016.