Kombinatorikus számok általánosításai

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szabó-Gyimesi Eszter

Témavezető: Dr. Nyul Gábor

Debreceni Egyetem
Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2019

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Explicit módszerek az algebrai számelméletben programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2019. április 25. ....

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy Szabó-Gyimesi Eszter doktorjelölt 2013–2016 között a fent megnevezett Doktori Iskola Explicit módszerek az algebrai számelméletben programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult.

Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2019. április 25. ....

a témavezető aláírása

Kombinatorikus számok általánosításai

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében a
matematika- és számítástudományok tudományágban

Írta: Szabó-Gyimesi Eszter okleveles
matematikatanár–informatikatanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok
Doktori Iskolája (Explicit módszerek az algebrai számelméletben
programja) keretében

Témavezető: Dr. Nyul Gábor

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Gaál István	....
tagok:	Dr. Bérczes Attila	....
	Dr. Bujtás Csilla	....

A doktori szigorlat időpontja: 2017. február 17.

Az értekezés bírálói:

	Dr.	....
	Dr.	....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

Az értekezés védésének időpontja: 2019. ....

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni a köszönetemet mindazoknak, akik bármilyen módon is hozzájárultak ezen dolgozat elkészítéséhez.

Mindenekelőtt témavezetőmnek, Nyul Gábornak szeretnék köszönetet mondani a belém vetett bizalmáért, folyamatos támogatásáért, barátságáért, valamint az elmúlt évek közös kutatással töltött időszakáért, amelyre mindig jó érzéssel fogok visszaemlékezni.

Ugyancsak köszönet illeti a Matematikai Intézet, különösképpen az Algebra és Számelmélet Tanszék mindazon oktatóit, akik segítették eddigi tanulmányaimat, bátorítottak, és hozzájárultak ahhoz, hogy idáig eljuthassak. Gaál Istvánnak és Bérczes Attilának pedig külön szeretném megköszönni azt is, hogy a tanszék vezetőiként lehetőséget biztosítottak arra, hogy a doktori képzésem során megkezdett munkámat befejezhessem.

Köszönettel tartozom általános és középiskolai matematikatanáraimnak is, kiváltképp Burom Mária tanárnőnek, amiért biztosította számomra azokat a nélkülözhetetlen alapokat, amelyekre az egyetemi éveim alatt építhettem.

Hálás vagyok a szüleimnek, amiért támogattak abban, hogy matematikát tanuljak és köszönöm nekik, valamint a testvéreimnek, Gergőnek, Pálmának, Hédinek és Dávidnak azt, hogy mindig számíthattam rájuk. Pálmát külön köszönet illeti azért is, amiért a közösen eltöltött egyetemi éveink a lehető legjobban teltek.

Szeretnék továbbá köszönetet mondani minden olyan barátomnak, családtagomnak, kollégámnak és egyetemi évfolyamtársamnak is, akik mellettem álltak az elmúlt években, és ezzel segítették az előrehaladásomat.

Végül, de nem utolsósorban pedig a férjemnek, Ferinek köszönöm a közös életünket, valamint mindazt a rengeteg szeretetet és támogatást, amit nap mint nap kapok tőle.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Az osztályozás a matematika egyik legalapvetőbb fogalma, amely alatt egy halmaz elemeinek páronként diszjunkt nemüres részhalmazokba sorolását értjük olyan módon, hogy a részhalmazok uniója megadja az eredeti halmazt.

Érdekes módon a halmazok osztályozásának első ismert alkalmazása egy japán teaszertartáshoz kötődő illatjáték, amely 1500 körül volt igen elterjedt, azonban számos változata létezik még mind a mai napig. Ezek közül az egyik legnépszerűbb az úgynevezett Gendzsi-kó, amelynek lényege röviden annyi, hogy miután 5 különböző illatú tömjénrudat 5 részre vágnak és a darabokat zsákokba helyezik, majd azok közül 5-öt véletlenszerűen kiválasztanak és elégetnek, a játékosoknak az illatuk alapján kell megállapítaniuk, hogy mely tömjének azonosak.

A játékokat az úgynevezett Kado szertartások mesterei vezényelték le, akik minden lehetséges eshetőséghez megalkottak egy-egy szimbólumot, amelyeket Gendzsi-monnak neveztek el. A szimbólumok mindegyike 5 függőleges vonalból áll, amelyek jobbról balra haladva sorban az elégetett tömjéneket jelképezik és a vonalak tetejét vízszintes vonal köti össze, amennyiben két tömjén azonos. Összesen 52 különböző szimbólumot készítettek el ilyen módon, amelyek egyik legfőbb érdekessége az, hogy időközben beépültek a japán kultúrába is. A könnyebb megjegyezhetőségük érdekében a japán irodalom népszerű klasszikusának, a Gendzsi szerelmeinek fejezeteivel azonosították őket. Később is népszerűek maradtak, többek között címerek és kimonók díszítésére is használták őket.

A Gendzsi-kó mesterei a szimbólumok elkészítésekor valójában nem mást tettek, mint egy 5 elemű halmaz összes osztályozását írták le. Amennyiben a függőleges vonalak a halmaz elemeit jelképezik és a felül összekötött vonalakat egy osztályban levőknek tekintjük, akkor máris kész a megfeleltetés. Tetszőleges elemszámra általánosítva a problémát pedig a Bell-számok fogalmához jutunk, ugyanis a B_n Bell-szám az

$\{1, \ldots, n\}$ halmaz összes osztályozásainak számát adja meg ($n \geq 0$). Ezen számok vizsgálatát az 1700-as évek elején egy japán matematikus, T. Seki és tanítványa, Y. Matsunaga kezdték meg, utóbbi elsőként adta meg a rájuk vonatkozó rekurziót is. Nyomtatásban először C. Kramp 1796-os munkájában jelentek meg, nevüket a skót származású E. T. Bellről kapták, aki az 1930-as években tanulmányozta őket.

Ha azt akarjuk összeszámolni, hogy hányféleképpen osztályozhatjuk az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz elemeit pontosan k darab osztályba, akkor az $\left\{ {n \atop k} \right\}$ másodfajú Stirling-számok fogalmához jutunk ($0 \leq k \leq n$). Ezeket a számokat J. Stirling vizsgálta elsőként 1730-ban, azonban teljesen másféle megközelítésből. Arra használta őket, hogy monomokat fejezzen ki süllyedő faktoriálisok segítségével. A Stirling-számok kombinatorikai jelentésének meghatározását és a rájuk vonatkozó rekurzió megadását a szakirodalom M. Sakának tulajdonítja.

J. Stirling nevéhez kötődnek az elsőfajú Stirling-számok is, amelyeket szintén a fent említett munkájában értelmezett, a másodfajú Stirling-számokhoz hasonló módon. Ezek valójában előjeles elsőfajú Stirling-számok voltak. Kombinatorikus jelentéssel az előjel nélküli $\left[{n \atop k} \right]$ elsőfajú Stirling-számok bírnak, ezek azon S_n-beli permutációk számát adják meg (ahol S_n az $1, \ldots, n$ számok permutációinak halmazát jelöli), amelyek k darab diszjunkt ciklus szorzatára bomlanak ($0 \leq k \leq n$).[1]

A Lah-számok közeli rokonai a Stirling-számoknak, időnként harmadfajú Stirling-számként is említik őket. Fogalmuk I. Lah [30], [31] szlovén matematikushoz köthető, aki az 1950-es években két cikkében is foglalkozott velük. Az $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ Lah-számok az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz elemeinek k darab rendezett osztályba történő osztályozásainak számát adják meg ($0 \leq k \leq n$).

A Stirling-típusú számoknak számos általánosítása létezik. Ezek közül az egyik leginkább ismert és vizsgált az úgynevezett r-általánosítás. Az r-általánosított kombinatorikus számok esetében mindig van r kitün-

[1] A Bell- és Stirling-számok történeti áttekintése [36] alapján készült.

tetett elem, amelyektől az osztályokba, ciklusokba és rendezett osztályokba sorolás során elvárjuk, hogy különböző osztályokba, ciklusokba, valamint rendezett osztályokba kerüljenek.

Az r-Stirling-számokat L. Carlitz [8] definiálta és tanulmányozta, majd A. Z. Broder [6] és később R. Merris [38] vizsgálta őket részletesen a rájuk vonatkozó kombinatorikus interpretáció segítségével. Az r-Lah-számokat a közelmúltban Nyul G. és Rácz G. [47] vezette be kombinatorikusan.

A Stirling-számok egy másik általánosítása T. A. Dowling [17] nevéhez köthető, aki az m-edrendű véges csoportokhoz konstruált hálójához kapcsolódóan értelmezte az első- és másodfajú Whitney-számokat. Ezek speciális esetben, a triviális csoport esetén, a Stirling-számokat adják vissza.

Az első- és másodfajú r-Whitney-számokat Mező I. [39] vezette be az r-Stirling- és a Whitney-számok közös általánosításaként. Az általa használt definíció a J. Stirling-féle értelmezés általánosításának tekinthető. G.-S. Cheon és J.-H. Jung [9] hálóelméleti megközelítésből foglalkozott ezekkel a számokkal, továbbá a segítségükkel definiálták az r-Whitney–Lah-számokat.

A Bell-polinomokat a másodfajú Stirling-számok felhasználásával a $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k$ módon értelmezhetjük. Kombinatorikus jelentés a polinomokhoz is társítható, amely speciális helyettesítéssel, $x = 1$ esetén, a korábban említett Bell-számok fogalmát adja vissza. Tekintettel arra, hogy a Bell-számok, valamint a Bell-polinomok fogalma is szorosan kapcsolódik a másodfajú Stirling-számokhoz, ezeknek is értelmezhetjük az eddig ismertetett általánosításait.

Az r-Bell-számok először szintén L. Carlitz [8] már említett cikkében jelentek meg. A kombinatorikus interpretációjukon alapuló átfogó vizsgálatukat Mező I. [40] végezte el, továbbá hozzá köthető az r-Bell-polinomok fogalmának bevezetése is. A közönséges Whitney-számokhoz kapcsolódóan M. Benoumhani [2], [3] értelmezte a Dowling-számokat és Dowling-polinomokat, amelyeket a Whitney-számok felfedezőjének tiszteletére nevezett el így. Az előzőek közös általánosításaként pedig G.-S. Cheon és J.-H. Jung [9] definiálták az r-Dowling-polinomokat.

A Bell-polinomokhoz hasonlóan értelmezhetőek olyan polinomok is, amelyek együtthatói a Lah-számok vagy az imént ismertetett általánosításaik. Az r-Lah-számok segítségével a közelmúltban Nyul G. és Rácz G. [48] vezette be az r-Lah-polinomok fogalmát.

Végül ismertetjük a Bell-számok egy másik irányú általánosítását is. Amennyiben az osztályozás során az osztályok elemszámára alsó korlátot adunk, az asszociált Bell-számok fogalmához jutunk. Az s-asszociált Bell-számokat az 1970-es évektől kezdve több cikkben is vizsgálták, viszont érdekes módon mindössze egy olyan van, amelyben asszociált r-Bell-számokkal foglalkoztak. Ez F. T. Howard [27] nevéhez köthető, aki azonban kizárólag a 2-asszociált r-Bell-számokat értelmezte. Megemlítjük még, hogy amennyiben a probléma permutációs változatát vizsgáljuk, és azt írjuk elő, hogy minden ciklus legalább 2 hosszúságú legyen, azaz a fixpontmentes permutációk számát akarjuk meghatározni, akkor a szubfaktoriálisok fogalmához jutunk.

Az értekezésben az eddigiek során ismertetett kombinatorikus számok általánosításainak vizsgálatával foglalkozunk. A dolgozat fejezeteit minden esetben az adott általánosítás szakirodalmának részletes áttekintésével kezdjük, majd azt követően ismertetjük az általunk elért eredményeket.

A 2. fejezetben a másodfajú r-Stirling-számok új kombinatorikus interpretációjaként megmutatjuk, hogy a segítségükkel miként adható meg a Ramsey-elméletben alapvető jelentőséggel bíró kombinatorikus alterek száma. Ez az eredmény a [20] cikkben található meg.

A 3. fejezet az r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számokkal foglalkozik. A fejezet egyik legfontosabb eredményeként ismertetjük ezen számok új kombinatorikus interpretációit, amelyek speciális esetben illeszkednek a Stirling- és a Lah-számok kombinatorikus értelmezéséhez. Ezt követően ezeket definícióként használva az r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számokra számos új összefüggést igazolunk a lehető legáltalánosabb formában, továbbá új bizonyításokat adunk néhány korábban már ismert tulajdonságukra is. A fejezetben alapvetően a [22] cikk eredményeit mutatjuk be, megjegyezzük azonban, hogy egyes állítások a [21] és [19] publikációkban szerepelnek.

A 4. fejezetben az r-Dowling-polinomok, valamint az általunk definiált r-Dowling–Lah-polinomok átfogó vizsgálatát adjuk a [21] és [19] cikkek alapján. A kétféle polinom tulajdonságait párhuzamosan tárgyaljuk. A bizonyítások során az r-Dowling-polinomok esetében többször tudjuk alkalmazni a kombinatorikus interpretációjukat, míg az r-Dowling–Lah-polinomoknál alapvetően más, különféle algebrai átalakításokat használó eszközök működnek, amelyek elsősorban az előző fejezet eredményein alapulnak.

A disszertáció 5. és egyben zárófejezete s-asszociált r-Dowling-típusú számokkal foglalkozik és a [23] cikk eredményeit tartalmazza. Először az úgynevezett r-kompozíciós formulát igazoljuk, amely segítségével egyszerűen meghatározhatjuk az r-Bell-típusú számok és az általánosításaik sorozatainak exponenciális generátorfüggvényét. Ezt követően bevezetjük és az exponenciális generátorfüggvényeikből kiindulva vizsgáljuk az s-asszociált r-Dowling-számokat, az s-asszociált r-Dowling-faktoriálisokat, valamint az s-asszociált r-Dowling–Lah-számokat.

2. r-Stirling- és r-Bell-típusú számok

Az r-Stirling-számokat L. Carlitz [8] definiálta és vizsgálta, továbbá az ő nevéhez köthető a kombinatorikus interpretációjuk meghatározása is. A napjainkban is használatos r-Stirling-szám elnevezés A. Z. Brodertől [6] ered, aki eltérő paraméterezéssel értelmezte őket, és a kombinatorikus jelentésükön alapuló részletes vizsgálatukat adta. A későbbiek során R. Merris [38] tőlük függetlenül újra definiálta, és szintén a kombinatorikus interpretációjuk felhasználásával tanulmányozta ezeket a számokat. Megemlítjük még, hogy a másodfajú r-Stirling-számok más formában már korábban is megjelentek a szakirodalomban, legelőször N. Nielsen [46] könyvében. Az $\left[{n \atop k}\right]_r$ elsőfajú r-Stirling-szám azon S_{n+r}-beli permutációk számát adja meg, amelyek $k+r$ diszjunkt ciklus szorzatára bomlanak úgy, hogy az $1, \ldots, r$ kitüntetett elemek különböző ciklusokba kerülnek, míg az $\left\{{n \atop k}\right\}_r$ másodfajú r-Stirling-szám az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz azon $k+r$ elemű osztályozásait számolja össze, amelyeknél az $1, \ldots, r$ kitüntetett elemek különböző osztályokba kerülnek ($0 \leq k \leq n, r \geq 0$).

A közelmúltban Nyul G. és Rácz G. [47] kombinatorikusan definiálta és egyúttal részletesen vizsgálta az r-Lah-számokat. Az $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r$ r-Lah-szám az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz azon $k+r$ darab rendezett osztályba történő osztályozásainak számát adja meg, ahol az $1, \ldots, r$ kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerülnek ($0 \leq k \leq n, r \geq 0$).

A $B_{n,r}$ n-edik r-Bell-szám az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz olyan osztályozásainak számát jelöli, ahol az $1, \ldots, r$ kitüntetett elemek különböző osztályokba kerülnek ($n, r \geq 0$), így valójában nem más, mint az $\left\{{n \atop k}\right\}_r$ másodfajú r-Stirling-számok összege ($k = 0, \ldots, n$). Az r-Bell-számok szintén L. Carlitz [8] már említett cikkében jelentek meg először. Az r-Bell-szám elnevezés és a kombinatorikus értelmezésen alapuló vizsgálatuk azonban Mező I. [40] nevéhez köthető, aki egyúttal a $B_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\}_r x^k$ r-Bell-polinomokat is definiálta.

A fentiek mintájára az összegzett r-Lah-számokat, valamint az r-Lah-polinomokat Nyul G. és Rácz G. [48] értelmezte és tanulmányozta. Az $L_{n,r}$-rel jelölt n-edik összegzett r-Lah-szám definíció szerint az $\{1,\ldots,n+r\}$ halmaz azon rendezett osztályokba történő osztályozásainak számát adja meg, amelyeknél az $1,\ldots,r$ kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerülnek ($n,r \geq 0$), míg az r-Lah-polinomok az $L_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k$ módon adódnak.

Végül megjegyezzük, hogy a közelmúltban a másodfajú r-Stirling- és r-Bell-számokat Kereskényi-Balogh Zs. és Nyul G. [29], míg az r-Lah- és összegzett r-Lah-számokat Nyul G. és Rácz G. [49] vizsgálták gráfelméleti eszközökkel.

Ebben a fejezetben a másodfajú r-Stirling-számok egy érdekes kapcsolatát ismertetjük a kombinatorikus alterekkel, amely egyúttal egy új kombinatorikus interpretációt is eredményez rájuk vonatkozóan.

2.1. Másodfajú r-Stirling-számok és kombinatorikus alterek

Legyen A egy r elemű halmaz és $*_1,\ldots,*_k \notin A$ további szimbólumok. Egy k dimenziós kombinatorikus alteret A^n-ben egy olyan $(A \cup \{*_1,\ldots,*_k\})^n$-beli sémával adhatunk meg, amelyben a $*_1,\ldots,*_k$ szimbólumok mindegyike legalább egyszer szerepel. Ekkor a séma által meghatározott kombinatorikus altér abból az r^k darab A^n-beli elemből áll, amelyeket úgy kapunk, hogy $*_i$ helyére, minden előfordulása esetén ugyanazt az A-beli elemet helyettesítjük ($i = 1,\ldots,k$).

Megjegyezzük azonban, hogy egy kombinatorikus altér nem kizárólag egyetlen sémával adható meg. Két különböző séma ugyanis leírhatja ugyanazt a kombinatorikus alteret, amennyiben azok csak a csillag-szimbólumok szerepének felcserélésében különböznek egymástól.

A kombinatorikus alterek fontos szerepet töltenek be a Ramsey-elméletben. A. W. Hales és R. I. Jewett [24] ismert tételének egy általánosított változata ugyanis kimondja, hogy bármely r, k, c pozitív egész számok esetén létezik olyan legkisebb $HJ(r, k, c)$ pozitív egész, hogy ha A egy r elemű halmaz, akkor $A^{HJ(r,k,c)}$ minden c színnel való színezése esetén keletkezik egyszínű k dimenziós kombinatorikus altér.

A k dimenziós kombinatorikus alterek száma meghatározható a szitaformula segítségével (ezt $|A| = 2$ esetben T. C. Brown [7] végezte el). A következőkben azonban megmutatjuk, hogy a kombinatorikus alterek száma megadható közvetlenül a másodfajú r-Stirling-számok segítségével is. A bizonyítás során bijektív kombinatorikus megfeleltetést alkalmazunk.

2.1. Tétel. ([20] Theorem)

Legyen $1 \le k \le n$, $r \ge 1$ *és* A *egy* r *elemű halmaz. Ekkor a* k *dimenziós kombinatorikus alterek száma* A^n*-ben* $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$.

Bizonyítás. Legyen adott az $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ halmaz.

Vegyünk egy k dimenziós kombinatorikus alteret A^n-ben, amelyet az $(s_1, \dots, s_n) \in (A \cup \{*_1, \dots, *_k\})^n$ sémával írunk le.

Rendeljük hozzá ehhez a sémához az alábbi halmazcsaládot:

$$\{\{a_i\} \cup \{j \mid 1 \le j \le n, s_j = a_i\} \mid 1 \le i \le r\}$$
$$\cup \{\{j \mid 1 \le j \le n, s_j = *_l\} \mid 1 \le l \le k\}.$$

Ez az $A \cup \{1, \dots, n\}$ halmaz osztályozása $k + r$ nem üres részhalmazba (a $\{j \mid 1 \le j \le n, s_j = *_l\}$ halmaz nem üres, mivel $*_l$ legalább egyszer szerepel a sémában) úgy, hogy A elemei különböző osztályokba kerülnek.

Ahogyan azt korábban is hangsúlyoztuk, különböző sémák ugyanazt a kombinatorikus alteret is leírhatják, mivel azonban az osztályok sorrendje nem számít, így az ezekhez rendelt osztályozások is egybeesnek. Ezáltal valójában a k dimenziós kombinatorikus alterekhez rendeltünk osztályozásokat.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a fenti hozzárendelés bijektív megfeleltetést ad az A^n-beli k dimenziós kombinatorikus alterek és az $A \cup \{1, \ldots, n\}$ halmaz azon $k + r$ elemű osztályozásai között, amelyeknél az $a_1, \ldots, a_r$ kitüntetett elemek különböző osztályokba kerülnek, így számuk $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$. $\square$

Példa. A hozzárendelés szemléltetésére vizsgáljuk meg az $n = 13$, $k = 3$, $r = 4$ és $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ esetet. Ekkor az

$$(a_1, a_4, *_1, a_1, *_3, a_4, *_2, *_2, a_3, *_1, a_1, a_1, *_2)$$

séma által meghatározott 3 dimenziós A^{13}-beli kombinatorikus altérhez az $\{a_1, a_2, a_3, a_4, 1, \ldots, 13\}$ halmaz alábbi hételemű osztályozása tartozik:

$$\{\{a_1, 1, 4, 11, 12\}, \{a_2\}, \{a_3, 9\}, \{a_4, 2, 6\}, \{3, 10\}, \{7, 8, 13\}, \{5\}\}.$$

Végül megjegyezzük, hogy a fenti eredmény érdekes hasonlóságot mutat azzal a tétellel, amely kimondja, hogy ha $1 \le k \le n$ és q prímhatvány, akkor a k dimenziós lineáris alterek száma $GF(q)^n$-ben az $\binom{n}{k}_q$ q-binomiális együtthatóval adható meg.

3. r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számok

T. A. Dowling [17] konstruált egy hálót az m-edrendű véges csoportokhoz, és a rájuk vonatkozó Möbius-függvény segítségével bevezette a Whitney-számok fogalmát. Az úgynevezett Dowling-hálókhoz tartozó $w_m(n,k)$-val jelölt első-, illetve $W_m(n,k)$-val jelölt másodfajú Whitney-számok függetlenek magától a csoporttól, kizárólag annak rendjétől függnek ($0 \leq k \leq n$, $m \geq 1$). Amennyiben a triviális csoportot tekintjük, azaz $m = 1$ választással azt kapjuk, hogy $w_1(n,k) = \left[{n+1 \atop k+1}\right]$ és $W_1(n,k) = \left\{{n+1 \atop k+1}\right\}$. A Whitney-számok tulajdonságainak részletes vizsgálata M. Benoumhani [2] nevéhez köthető.

Mező I. [39] ötlete volt az, hogy közös általánosítását adja az r-Stirling- és a Whitney-számoknak. Az elsőfajú r-Whitney-számokat az

$$m^n x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)\,(mx-r)^k\,, \tag{1}$$

míg a másodfajú r-Whitney-számokat az

$$(mx+r)^n = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k) m^k x^{\underline{k}} \tag{2}$$

egyenlőséggel definiálta, ahol $x^{\overline{n}}$ és $x^{\underline{n}}$ rendre az x n-edik emelkedő és süllyedő faktoriálisát jelöli.

Megjegyezzük azonban, hogy bár eltérő neveken és más megközelítésekből, de az r-Whitney-számok már korábban is megjelentek a szakirodalomban. Egyrészt mint az L. C. Hsu és P. J.-S. Shiue [28] által bevezetett Stirling-típusú számpárok speciális esetei, amelyeket R. B. Corcino, C. B. Corcino és R. Aldema [12], [10] tanulmányozott (r,β)-Stirling-számok néven. Másrészt B. Voigt [60] egy másodfajú Stirling-számokra vonatkozó általánosításához köthetően, amelynél további paraméterként egy sorozat szerepel. Ez a változat ugyanis számtani sorozatok esetén szintén a másodfajú r-Whitney-számokat adja vissza (lásd A. Ruciński és B. Voigt [56]).

G.-S. Cheon és J.-H. Jung [9] a Dowling-hálókhoz kapcsolódó interpretációjuk felhasználásával részletesen vizsgálták az r-Whitney-számok mindkét fajtáját, továbbá a

$$WL_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} w_{m,r}(n,j)\, W_{m,r}(j,k) \tag{3}$$

összefüggéssel bevezették az r-Whitney–Lah-számok fogalmát. Értelemszerűen a $WL_m(n,k)$-val jelölt Whitney–Lah-számokat hasonló módon definiálhatjuk.

Megemlítjük továbbá, hogy szimmetrikus polinomok segítségével M. Merca [37] is vizsgálta az első- és másodfajú r-Whitney-számokat.

Érdekes módon az eddig ismertetett eredmények nem tartalmazzák az r-Whitney- és az r-Whitney–Lah-számok tisztán kombinatorikus jelentését, még az eredeti változatok esetében sem. Ezekre vonatkozóan az alábbi részleges eredményekkel találkozhatunk a szakirodalomban.

J. B. Remmel és M. L. Wachs [55] két kombinatorikus interpretációt adott az elsőfajú Whitney-számokra és egyet a másodfajúakra. Mező I. [41] pedig az utóbbi felhasználásával igazolt néhány összefüggést a másodfajú Whitney-számokra vonatkozóan.

M. Mihoubi és M. Rahmani [44] az r-Whitney- és az r-Whitney–Lah-számokhoz is rendelt kombinatorikus értelmezést, de mindhárom esetben kizárólag osztályozásokat használtak. Interpretációik az úgynevezett parciális r-Bell-polinomokon keresztül adódtak.

Végül megjegyezzük, hogy D. G. L. Wang [61] színezett osztályozásainak száma szintén a másodfajú r-Whitney-számokra vezet. H. Belbachir és I. E. Bousbaa [1] pedig bevezette mindhárom típusú szám egy-egy módosított változatát, az eltolt r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számokat, amelyek azonban egyszerűen az r-Stirling- és r-Lah-számok m^{n-k}-szorosai.

Ebben a fejezetben megadjuk az r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számok új kombinatorikus interpretációit. A közönséges másodfajú Whitney-számok esetén ez lényegében egybe fog esni J. B. Remmel és M. L. Wachs [55] interpretációjával, míg a másodfajú r-Whitney-számokra vonatkozóan hasonló M. Mihoubi és M. Rahmani [44] értelmezéséhez. Az elsőfajú r-Whitney- és az r-Whitney–Lah-számok esetében azonban teljesen újak, még az $r = 1$ választással adódó közönséges változatokra is, és egyúttal illeszkednek az r-Stirling- és r-Lah-számok klasszikus kombinatorikus definícióihoz.

Megemlítjük még, hogy újabban T. Mansour, J. L. Ramírez és M. Shattuck [53], [35], [54] az r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számok általuk értelmezett (p, q)-változatán keresztül hasonló kombinatorikus jelentéshez jutottak.

A fejezet felépítése a következő stratégiát követi. A kombinatorikus interpretációinkat az r-Whitney és r-Whitney–Lah-számok definícióiként fogjuk használni. Ezt követően – elsősorban ezekre a definíciókra alapozva – számos új eredményt bizonyítunk, továbbá néhány már ismert összefüggést is igazolunk tisztán kombinatorikus gondolatmenettel. Ezek között az azonosságok között megjelennek az (1), (2) és (3) egyenlőségek is, amelyek így igazolják, hogy az általunk használt definíciók ekvivalensek az eredetiekkel. Azoknál a tételeknél, amelyekben mindhárom számra közlünk eredményeket, a bizonyítást legtöbbször csak az elsőfajú esetben ismertetjük, szükség esetén azonban kitérünk a különbségekre a másik kettőre vonatkozóan is.

3.1. Kombinatorikus definíciók

Legelőször is megadjuk az r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számok új kombinatorikus definícióit.

3.1. Definíció. Legyen $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$, $n + r \geq 1$ és $m \geq 1$. Ekkor $w_{m,r}(n, k)$ jelölje azon S_{n+r}-beli színezett permutációk számát, amelyek $k + r$ diszjunkt ciklus szorzatára bomlanak fel úgy, hogy

- az $1, \ldots, r$ kitüntetett elemek különböző ciklusokba kerülnek,

- a ciklusok legkisebb elemei nincsenek színezve,
- azok az elemek, amelyek egy kitüntetett elem ciklusában vannak, nincsenek színezve, ha a kitüntetett elemtől az adott elemig tartó ciklusív nem tartalmaz nála kisebb számot,
- a további elemek mindegyike m színnel van színezve.

Legyen továbbá $w_{m,0}(0,0) = 1$. Ezeket a számokat **elsőfajú r-Whitney-számoknak**, és az ilyen permutációkat **r-Whitney-színezett permutációknak** nevezzük.

3.2. Definíció. Legyen $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$, $n + r \geq 1$ és $m \geq 1$. Ekkor $W_{m,r}(n,k)$ jelölje az $\{1, \ldots, n + r\}$ halmaz azon $k + r$ elemű színezett osztályozásainak számát, ahol

- az $1, \ldots, r$ kitüntetett elemek különböző osztályokba kerülnek,
- az osztályok legkisebb elemei nincsenek színezve,
- azok az elemek, amelyek egy kitüntetett elem osztályában vannak, nincsenek színezve,
- a további elemek mindegyike m színnel van színezve.

Legyen továbbá $W_{m,0}(0,0) = 1$. Ezeket a számokat **másodfajú r-Whitney-számoknak**, és az ilyen osztályozásokat **r-Whitney-színezett osztályozásoknak** nevezzük.

3.3. Definíció. Legyen $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$, $n + r \geq 1$ és $m \geq 1$. Ekkor $WL_{m,r}(n,k)$ jelölje az $\{1, \ldots, n + r\}$ halmaz azon $k + r$ darab rendezett osztályba történő színezett osztályozásainak számát, ahol

- az $1, \ldots, r$ kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerülnek,
- a rendezett osztályok legkisebb elemei nincsenek színezve,

- azok az elemek, amelyek egy kitüntetett elem rendezett osztályában vannak, nincsenek színezve, ha a kitüntetett elem és az adott elem között nincs nála kisebb szám,
- a további elemek mindegyike m színnel van színezve.

Legyen továbbá $WL_{m,0}(0,0) = 1$. Ezeket a számokat r-**Whitney–Lah-számoknak**, és az ilyen osztályozásokat r-**Whitney–Lah-színezett osztályozásoknak** nevezzük.

Abban az esetben, ha $r = 1$; $m = 1$; $m = 1$, $r = 0$ és $r = 0$, az r-Whitney-számok visszaadják a Whitney-számokat, az r-Stirling-számokat, a klasszikus Stirling-számokat és a Stirling-számok többszöröseit. Ezekkel a speciális paraméterekkel hasonló áll fenn az r-Whitney–Lah-számokra is. A kapcsolatokat az elsőfajú esetben részletezzük:

$$w_{m,1}(n,k) = w_m(n,k)\,,\ w_{1,r}(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r,$$

$$w_{1,0}(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix},\ w_{m,0}(n,k) = m^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

A fejezet eredményeinek bizonyítása során több esetben szükségünk lesz arra, hogy a kitüntetett elemet nem tartalmazó ciklusok, osztályok vagy rendezett osztályok legkisebb elemeit is színezzük m színnel. Ezekre *kiterjesztett* r-Whitney-színezett permutációkként, osztályozásokként és r-Whitney–Lah-színezett osztályozásokként hivatkozunk majd. Ha $k + r$ ciklusunk, osztályunk vagy rendezett osztályunk van, akkor ezek száma rendre $m^k w_{m,r}(n,k)$, $m^k W_{m,r}(n,k)$ és $m^k WL_{m,r}(n,k)$.

3.2. Tulajdonságok és azonosságok

Az értekezés eredményeinek ismertetéséhez szükségünk lesz az m differenciájú emelkedő és süllyedő faktoriálisok fogalmára, ezeket a következő módon értelmezzük:

$$(x|m)^{\overline{n}}=\prod_{j=0}^{n-1}(x+jm)\,,\ (x|m)^{\underline{n}}=\prod_{j=0}^{n-1}(x-jm)\,,$$

ahol $n\geq 0$ és $m\geq 1$. Speciálisan $(x|1)^{\overline{n}}=x^{\overline{n}}$ és $(x|1)^{\underline{n}}=x^{\underline{n}}$ a klasszikus emelkedő és süllyedő faktoriálisok. Továbbá számos esetben használjuk majd az $(mx|m)^{\overline{n}}=m^nx^{\overline{n}}$ és $(mx|m)^{\underline{n}}=m^nx^{\underline{n}}$ azonosságokat is.

A legkisebb és legnagyobb lehetséges k értékekre egyszerű kombinatorikus gondolatmenettel az alábbi speciális értékek adódnak:

- $w_{m,r}(n,0)=(r|m)^{\overline{n}},\ W_{m,r}(n,0)=r^n,\ WL_{m,r}(n,0)=(2r|m)^{\overline{n}}$
- $W_{m,r}(n,1)=\frac{1}{m}\left((m+r)^n-r^n\right)$,
  $WL_{m,r}(n,1)=\frac{1}{m}\left((m+2r|m)^{\overline{n}}-(2r|m)^{\overline{n}}\right)\ (n\geq 1)$
- $w_{m,r}(n,n-1)=W_{m,r}(n,n-1)=m\binom{n}{2}+rn$,
  $WL_{m,r}(n,n-1)=mn(n-1)+2rn\ (n\geq 1)$
- $w_{m,r}(n,n)=W_{m,r}(n,n)=WL_{m,r}(n,n)=1$

A következő polinomos azonosságok különböző változatait több publikációban is megtalálhatjuk, elsőfajú esetben a [17] ($r=1$-re), [9], [10], másodfajú esetben a [17] ($r=1$-re), [9], [12], míg r-Whitney–Lah-számok esetén a [9] cikkekben. Megjegyezzük, hogy az első két formula ekvivalens az (1) és (2) egyenlőségekkel, amelyek Mező I. [39] definícióiként szolgáltak.

3.4. Tétel. ([22] Theorem 3.1)

Ha $n,r\geq 0$ és $m\geq 1$, akkor

$$(x+r|m)^{\overline{n}}=\sum_{k=0}^{n}w_{m,r}(n,k)\,x^k,$$

$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)\,(x|m)^{\underline{k}},$$

$$(x+2r|m)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\,(x|m)^{\underline{k}}.$$

Bizonyítás. S_{n+r} azon m színes r-Whitney-színezett permutációit számoljuk össze, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó ciklusok legkisebb elemei is színezve vannak c színnel.

Ha a ciklusok száma $k+r$, akkor az m színes r-Whitney-színezett permutációk száma $w_{m,r}(n,k)$ $(k=0,\ldots,n)$. Továbbá, mivel k darab ciklus van, amely nem tartalmaz kitüntetett elemet, így ezen ciklusok legkisebb elemeit c^k-féleképpen színezhetjük c színnel. Ezek alapján $\sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)\,c^k$ lehetőség adódik.

A fenti színezett permutációkat másként is összeszámolhatjuk. Először helyezzük el a kitüntetett elemeket különböző ciklusokba. Ezt követően $r+i$ nyithat egy új ciklust, és ekkor színt kap a c szín közül $(i=1,\ldots,n)$. Ezenkívül $(r+i)$-t tehetjük egy kitüntetett elem mögé is, és ekkor nem kap színt, vagy egy korábban már elhelyezett nem kitüntetett elem mögé, és ebben az esetben m színnel színezzük. Ez azt jelenti, hogy $(r+i)$-t $(c+r+(i-1)\,m)$-féleképpen tudjuk elhelyezni és színezni, így a lehetőségek száma összesen $(c+r|m)^{\overline{n}}$.

A másodfajú r-Whitney-számok és az r-Whitney–Lah-számok esetében a fenti gondolatmenet ebben a formájában nem működik, mert nem elég egyszerűen a kiegészítő színezéssel ellátott r-Whitney-, illetve r-Whitney–Lah-színezett osztályozásokat vizsgálni. A bizonyítást az alábbiakban a másodfajú esetben részletezzük.

Az $\{1,\ldots,n+r\}$ halmaz azon m színes kiterjesztett r-Whitney-színezett osztályozásait számoljuk össze, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok legkisebb elemei másodlagosan is színezve vannak c színnel $(c \geq n)$ úgy, hogy a másodlagos színeik különbözőek.

Egyrészt az elemeket $m^k W_{m,r}(n,k)$-féleképpen osztályozhatjuk kiterjesztett r-Whitney-színezetten $k+r$ osztályba ($k = 0, \ldots, n$), majd a nem kitüntetett legkisebb elemeket $c^{\underline{k}}$ módon színezhetjük másodlagosan, így a lehetőségek száma $\sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)\,(mc|m)^{\underline{k}}$, mivel $m^k c^{\underline{k}} = (mc|m)^{\underline{k}}$.

Másrészt, először elhelyezhetjük az első r kitüntetett elemet különböző osztályokba, majd megvizsgálhatjuk a lehetőségeket $(r+i)$-re ($i = 1, \ldots, n$). Ehhez tegyük fel, hogy az első $r+i-1$ elemet $r+l$ osztályba osztályoztuk. Ha $r+i$ egy új osztályt nyit, akkor az elsődleges színe m-féle, a másodlagos színe $(c-l)$-féle lehet. Ha $(r+i)$-t kitüntetett elemet tartalmazó osztályba tesszük, akkor nem kap színt, míg ha a kitüntetett elemet nem tartalmazó l osztály valamelyikébe kerül, akkor m színnel színezzük. Összegezve az eddigieket $(r+i)$-t $m(c-l)+r+lm = (mc+r)$-féleképpen helyezhetjük el és színezhetjük, ami összesen $(mc+r)^n$ lehetőséget jelent. $\square$

A fenti egyenlőségekbe $(-x)$-et helyettesítve azonnal adódnak az alábbi fontos következmények.

3.5. Következmény. ([22] Corollary 3.1)

Ha $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$(x-r|m)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, w_{m,r}(n,k)\, x^k,$$

$$(x-r)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, W_{m,r}(n,k)\, (x|m)^{\overline{k}},$$

$$(x-2r|m)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\, WL_{m,r}(n,k)\, (x|m)^{\overline{k}}.$$

Megjegyzés. Speciálisan, $x = 1$ esetén, a 3.4 Tétel megadja az elsőfajú r-Whitney-számok összegét rögzített n esetén:

$$\sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k) = (r+1|m)^{\overline{n}}.$$

Az r-Whitney-számokra vonatkozó rekurziók már korábban megjelentek a szakirodalomban, az elsőfajú esetben a [17] ($r = 1$-re), [9], [10], [39], a másodfajú esetben a [2], [17] ($r = 1$-re), [9], [12], [39], [61], míg az r-Whitney–Lah-számokra vonatkozóan a [9] cikkekben. Most a kombinatorikus definícióinknak köszönhetően lehetőségünk adódik arra, hogy ezeket az összefüggéseket tisztán kombinatorikus gondolatmenettel igazoljuk.

3.6. Tétel. ([22] Theorem 3.2)

Ha $1 \leq k \leq n$, $r \geq 0$ *és* $m \geq 1$, *akkor*

$$w_{m,r}(n+1,k) = w_{m,r}(n,k-1) + (mn+r)\, w_{m,r}(n,k),$$

$$W_{m,r}(n+1,k) = W_{m,r}(n,k-1) + (mk+r)\, W_{m,r}(n,k),$$

$$WL_{m,r}(n+1,k) = WL_{m,r}(n,k-1) + (m(n+k)+2r)\, WL_{m,r}(n,k).$$

Bizonyítás. S_{n+r+1} azon m színes r-Whitney-színezett permutációit számoljuk össze, amelyek $k+r$ diszjunkt ciklus szorzatára bomlanak.

Ha $n+r+1$ egy 1 hosszú ciklust alkot, akkor a további $n+r$ elemet kell r-Whitney-színezetten $k-1+r$ diszjunkt ciklusba sorolni, ami $w_{m,r}(n,k-1)$ lehetőséget jelent.

Ha $n+r+1$ egy legalább 2 hosszú ciklusban van, akkor a többi elem $k+r$ ciklusba sorolása és m színnel való színezése $w_{m,r}(n,k)$-féleképpen történhet a szabályoknak megfelelően. Ezt követően pedig $(n+r+1)$-et elhelyezhetjük az n nem kitüntetett elem mögé, és ekkor m színnel színezzük, vagy valamelyik kitüntetett elem mögé, és ebben az esetben nem kap színt. $\square$

Az alábbiakban új függőleges rekurziókat ismertetünk az r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számokra vonatkozóan.

3.7. Tétel. ([22] Theorem 3.3)

Ha $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$ *és* $m \geq 1$, *akkor*

$$w_{m,r}(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (mn+r|m)^{\underline{n-j}} w_{m,r}(j,k),$$

$$W_{m,r}(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (m(k+1)+r)^{n-j} W_{m,r}(j,k),$$

$$WL_{m,r}(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (m(n+k+1)+2r|m)^{\underline{n-j}} WL_{m,r}(j,k).$$

Bizonyítás. A tétel bizonyításához S_{n+r+1} azon m színes r-Whitney-színezett permutációit kell összeszámolni, amelyek $k+r+1$ diszjunkt ciklus szorzatára bomlanak.

Legyen $j+r+1$ a ciklusok legkisebb elemei közül a legnagyobb ($j = k, \ldots, n$). Először az első $j+r$ elemet kell $k+r$ diszjunkt ciklusba sorolni r-Whitney-színezetten, ami $w_{m,r}(j,k)$-féleképpen tehető meg. Ezt követően, növekvő sorrendben tekintve a további elemeket, elhelyezhetjük őket egy nem kitüntetett elem mögé, és ekkor színt kapnak, vagy az r kitüntetett elem valamelyike mögé, és ebben az esetben nem színezzük őket. Ez összesen $((j+1)m+r|m)^{\overline{n-j}} = (mn+r|m)^{\underline{n-j}}$ lehetőséget jelent az utolsó $n-j$ elemre. □

A másodfajú r-Whitney-számokra vonatkozó explicit formulát többen is meghatározták az exponenciális generátorfüggvényükből kiindulva [2] ($r = 1$-re), [9], [12], [39]. A következőkben egy új bizonyítást ismertetünk, amelyben a kombinatorikus interpretációjukat és a szitaformulát használjuk fel. Az általunk alkalmazott gondolatmenet egyúttal arra is alkalmas, hogy a segítségével egy hasonló explicit formulát igazoljunk az r-Whitney–Lah-számokra.

3.8. Tétel. ([22] Theorem 3.4)

Ha $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$ *és* $m \geq 1$, *akkor*

$$W_{m,r}(n,k) = \frac{1}{m^k k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (m(k-j)+r)^n,$$

$$WL_{m,r}(n,k) = \frac{1}{m^k k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (m(k-j)+2r|m)^{\overline{n}}.$$

Bizonyítás. Tekintsük az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz azon m színes kiterjesztett r-Whitney-színezett osztályozásait, amelyeknél az osztályok legkisebb elemeit másodlagosan is színezzük $k+r$ színnel úgy, hogy ezek az elemek különböző színt kapnak, és minden másodlagos színt felhasználunk. Ezek számát kétféleképpen is meghatározhatjuk.

Egyrészt kiindulva abból, hogy a másodlagos színek közül mindet pontosan egyszer kell felhasználni, azt kapjuk, hogy az osztályok száma $k+r$. Ezáltal az m színes kiterjesztett r-Whitney-színezett osztályozások száma $m^k W_{m,r}(n,k)$, a legkisebb elemekhez pedig $(k+r)!$-féleképpen rendelhetjük hozzá a másodlagos színeket, így összesen $(k+r)!m^k W_{m,r}(n,k)$ lehetőség adódik.

Másrészt a vizsgált színezett osztályozásokat a szitaformula segítségével is összeszámolhatjuk. Legyen X azon kiterjesztett r-Whitney-színezett osztályozások halmaza, amelyeknél az osztályok legkisebb elemeinek másodlagos színezéséhez nem feltétlenül használtuk fel az összes színt. Továbbá legyen Y_h az X halmaz azon részhalmaza, amely azokat a lehetőségeket tartalmazza, amelyeknél a h-adik másodlagos színt nem használtuk fel $(h = 1, \ldots, k+r)$.

X elemszámának meghatározásához először helyezzük el az első r kitüntetett elemet különböző osztályokba, majd színezzük őket másodlagosan. Ez összesen $(k+r)^{\underline{r}}$ lehetőséget jelent. Ezt követően, a 3.4 Tétel másodfajú r-Whitney-számokra vonatkozó bizonyításához hasonlóan, azt kapjuk, hogy $(r+i)$-t $(i=1,\ldots,n)$ $(mk+r)$-féleképpen helyezhetjük el és színezhetjük. Így $|X|=(k+r)^{\underline{r}}(mk+r)^n$.

Azáltal, hogy a kitüntetett elemek különböző osztályokba kerülnek, legalább r másodlagos színre van szükségünk, ezért j darab Y_h típusú halmaz metszete üres, ha $j=k+1,\ldots,k+r$. Továbbá az X halmaz elemszámának meghatározásához használt gondolatmenettel adódik, hogy j darab Y_h típusú halmaz metszetének elemszáma $(k+r-j)^{\underline{r}}(m(k-j)+r)^n$, ha $j=1,\ldots,k$. Ezt követően a szitaformula felhasználásával azt kapjuk, hogy a lehetőségek száma

$$\begin{aligned}&|X\setminus(Y_1\cup\cdots\cup Y_{k+r})|\\&\qquad=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k+r}{j}(k+r-j)^{\underline{r}}(m(k-j)+r)^n,\end{aligned}$$

az állítás pedig néhány egyszerű átalakítást követően adódik. □

Az r-Whitney–Lah-számokra a fentinél egyszerűbb explicit formula is létezik (lásd [9]), amelyet a kombinatorikus jelentésük felhasználásával igazolunk.

3.9. Tétel. ([22] Theorem 3.5)

Ha $0\le k\le n$ *és* $r,m\ge 1$, *akkor*

$$WL_{m,r}(n,k)=\binom{n}{k}\frac{(2r|m)^{\overline{n}}}{(2r|m)^{\overline{k}}}.$$

Bizonyítás. Az $\{1,\ldots,n+r\}$ halmaz $k+r$ darab rendezett osztályba történő m színes kiterjesztett r-Whitney–Lah-színezett osztályozásait kell összeszámolnunk. Ehhez először helyezzük el a kitüntetett elemeket különböző rendezett osztályokba, majd ezt követően válasszuk ki és színezzük m színnel a kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztályok első elemeit. Ezt $\binom{n}{k}m^k$-féleképpen tehetjük meg. Végül a további $n-k$ elemet növekvő sorrendben tekintve, a j-edik elem elhelyezésére és színezésére $2r+m(k+j-1)$ lehetőségünk van ($j=1,\ldots,n-k$), mivel színezetlenül marad, ha egy kitüntetett elem elé vagy mögé tesszük, és m színnel színezzük, ha a további $k+j-1$ hely valamelyikére kerül. Ezek alapján $m^k WL_{m,r}(n,k) = \binom{n}{k} m^k (2r+mk|m)^{\overline{n-k}}$, amiből az állítás egyszerűsítést követően azonnal adódik. (Megjegyezzük, hogy a formula ezen alakja $r=0$ esetén is igaz.) □

A következő állítás a továbbiakban számos tétel bizonyítása során hasznos lesz számunkra.

3.10. Tétel. ([22] Theorem 3.8)

Ha $0 \le k \le n$, $r \ge 0$ és $m, l \ge 1$, akkor

$$l^{n-k} w_{m,r}(n,k) = w_{ml,lr}(n,k)\,,$$
$$l^{n-k} W_{m,r}(n,k) = W_{ml,lr}(n,k)\,,$$
$$l^{n-k} WL_{m,r}(n,k) = WL_{ml,lr}(n,k)\,.$$

1. Bizonyítás. Az összefüggés a 3.4 Tétel alkalmazásával az alábbi módon adódik:

$$l^n \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)\, m^k x^k = (mlx + lr|ml)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} w_{ml,lr}(n,k)\, m^k l^k x^k.$$

□

2. Bizonyítás. A másodfajú r-Whitney-számok esetében kombinatorikus interpretáción alapuló bizonyítást is tudunk adni.

Legyen L egy másodlagos színeket tartalmazó l elemű halmaz. Az $\{1,\ldots,n+r\}$ halmaz azon $k+r$ elemű m színes r-Whitney-színezett osztályozásait vizsgáljuk, amelyeknél a legkisebb elemek kivételével az elemek minden osztályban másodlagosan is színezve vannak egy L-beli színnel. Ezen duplán színezett osztályozások száma $l^{n-k} W_{m,r}(n,k)$.

Egy fenti típusú osztályozáshoz rendeljük hozzá az $(\{1,\ldots,r\} \times L) \cup \{r+1,\ldots,n+r\}$ halmaz egy osztályozását a következőképpen. Az

$\{1, \ldots, r\} \times L$ halmaz elemeit tekintsük kitüntetett elemeknek. Egy további elem akkor kerüljön (i, λ) $(1 \leq i \leq r,\ \lambda \in L)$ osztályába, ha eredetileg i-vel közös osztályban szerepelt és a másodlagos színe λ volt, a többi osztályt pedig hagyjuk változatlanul. Így egy $n+lr$ elemű halmaz $k+lr$ osztályba történő ml színes lr-Whitney-színezett osztályozásához jutunk. Ez a hozzárendelés egy bijektív megfeleltetést ad a kétféle típusú osztályozások között. □

A következőkben egy Spivey-típusú formulát[2] adunk az r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számokra vonatkozóan.

3.11. Tétel. ([21] Lemma 3.1, [19] Lemma 3.1)

Ha $t, n, k, r, s \geq 0$, $k \leq t+n$ és $m, l \geq 1$, akkor

$$l^n m^k w_{m,r}(t+n,k) = \sum_{i=0}^{\min\{t,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} w_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} l^{k-i} m^{i+j} \cdot w_{l,s}(j,k-i) \left(mlt+lr-ms|ml\right)^{\overline{n-j}},$$

$$l^n m^k W_{m,r}(t+n,k) = \sum_{i=0}^{\min\{t,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} W_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} l^{k-i} m^{i+j} \cdot W_{l,s}(j,k-i) \left(mli+lr-ms\right)^{n-j},$$

$$l^n m^k WL_{m,r}(t+n,k) = \sum_{i=0}^{\min\{t,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} WL_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} l^{k-i} m^{i+j} \cdot WL_{l,s}(j,k-i) \left(ml(t+i)+2lr-2ms|ml\right)^{\overline{n-j}},$$

[2] Az elnevezés onnan ered, hogy M. Z. Spivey [57] a Bell-számokra bizonyított egy formulát, amely egyszerre általánosítja a definíciójukat és a rekurziójukat. Itt ennek az r-Whitney-típusú számokra vonatkozó megfelelőjét ismertetjük, a következő fejezetben pedig az eredeti formulát általánosítjuk r-Dowling-típusú polinomokra.

továbbá

$$w_{m,r}(t+n,k)=\sum_{i=0}^{\min\{t,k\}}\sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} w_{m,r}(t,i)\binom{n}{j} \cdot w_{m,s}(j,k-i)(mt+r-s|m)^{\overline{n-j}},$$

$$W_{m,r}(t+n,k)=\sum_{i=0}^{\min\{t,k\}}\sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} W_{m,r}(t,i)\binom{n}{j} \cdot W_{m,s}(j,k-i)(mi+r-s)^{n-j},$$

$$WL_{m,r}(t+n,k)=\sum_{i=0}^{\min\{t,k\}}\sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} WL_{m,r}(t,i)\binom{n}{j} \cdot WL_{m,s}(j,k-i)(m(t+i)+2r-2s|m)^{\overline{n-j}}.$$

1. Bizonyítás. A 3.4 Tételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(mlx+lr|ml)^{\overline{t+n}}=l^{t+n}(mx+r|m)^{\overline{t+n}}=l^{t+n}\sum_{k=0}^{t+n} w_{m,r}(t+n,k)\,m^k x^k.$$

Továbbá a 3.4 Tétel ismételt alkalmazásával és az emelkedő faktoriálisokra vonatkozó binomiális tétel felhasználásával az adódik, hogy

$$\begin{aligned}
(mlx+lr|ml)^{\overline{t+n}} &= l^t(mx+r|m)^{\overline{t}}(mlx+lr+mlt|ml)^{\overline{n}}\\
&= l^t\sum_{i=0}^{t} w_{m,r}(t,i)\,m^i x^i\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(mlx+ms|ml)^{\overline{j}}\\
&\quad\cdot(mlt+lr-ms|ml)^{\overline{n-j}}\\
&= l^t\sum_{i=0}^{t} w_{m,r}(t,i)\,m^i x^i\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}m^j(lx+s|l)^{\overline{j}}\\
&\quad\cdot(mlt+lr-ms|ml)^{\overline{n-j}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= l^t \sum_{i=0}^{t} w_{m,r}(t,i)\, m^i x^i \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} m^j \sum_{k=0}^{j} w_{l,s}(j,k)\, l^k x^k \\
&\quad \cdot (mlt + lr - ms|ml)^{\overline{n-j}} \\
&= l^t \sum_{i=0}^{t} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} w_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} m^{i+j} l^k w_{l,s}(j,k) \\
&\quad \cdot (mlt + lr - ms|ml)^{\overline{n-j}}\, x^{i+k} \\
&= l^t \sum_{i=0}^{t} \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=i}^{i+j} w_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} m^{i+j} l^{k-i} w_{l,s}(j,k-i) \\
&\quad \cdot (mlt + lr - ms|ml)^{\overline{n-j}}\, x^{k} \\
&= l^t \sum_{k=0}^{t+n} \sum_{i=0}^{\min\{t,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} w_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} l^{k-i} m^{i+j} w_{l,s}(j,k-i) \\
&\quad \cdot (mlt + lr - ms|ml)^{\overline{n-j}}\, x^{k}.
\end{aligned}
$$

Az utolsó három összefüggést az $l = m$ helyettesítéssel kapjuk. □

2. Bizonyítás. Abban az esetben, ha $lr \geq ms$, a másodfajú r-Whitney-számokra vonatkozóan kombinatorikus interpretáción alapuló bizonyítást is tudunk adni.

Az $\{1, \ldots, t+n+lr\}$ halmaz $k+lr$ elemű ml színes lr-Whitney-színezett osztályozásainak száma a 3.10 Tétel alapján

$$W_{ml,lr}(t+n,k) = l^{t+n-k} W_{m,r}(t+n,k).$$

Ezeket a színezett osztályozásokat más módon is összeszámolhatjuk. Először osztályozzuk az első $t+lr$ elemet ml színes lr-Whitney-színezetten $i+lr$ nemüres részhalmazba ($i = 0, \ldots, \min\{t,k\}$), majd ezt követően az $1, \ldots, ms$ kitüntetett elemeket azonosítsuk az osztályaikkal. Legyen j azon nem kitüntetett elemek száma az utolsó n elem közül, amelyek az $1, \ldots, ms$ kitüntetett elemek osztályában vannak, vagy olyan kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályban, amely még üres ($j = \max\{0, k-i\}, \ldots, n$). Ezeket $\binom{n}{j}$-féleképpen választhatjuk ki, majd $W_{ml,ms}(j, k-i)$ módon osztályozhatjuk őket az első ms kitüntetett elemmel együtt ml színes ms-Whitney-színezetten $ms+k-i$ osztályba. A további $n-j$ elemet elhelyezhetjük egyszerűen az $ms+1, \ldots, lr$ kitüntetett elemek osztályaiba, és ekkor nem kapnak színt, vagy a fenti i osztályba, és ez utóbbi esetben ml színnel színezzük őket. Ezek alapján a lehetőségek száma összesen

$$\sum_{i=0}^{\min\{t,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} W_{ml,lr}(t,i) \binom{n}{j} W_{ml,ms}(j, k-i) \cdot (mli + lr - ms)^{n-j}$$
$$= \sum_{i=0}^{\min\{t,k\}} \sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} l^{t-i} W_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} m^{j-k+i} W_{l,s}(j, k-i) \cdot (mli + lr - ms)^{n-j}$$

a 3.10 Tétel alkalmazását követően, amiből az állítás azonnal adódik. □

Ha az előző tételben $t = 0$, akkor az alábbi összefüggésekhez jutunk az m színes r-Whitney- és az l színes s-Whitney-számok, valamint az m színes r-Whitney–Lah- és az l színes s-Whitney–Lah-számok között. Az $l = m$ helyettesítéssel adódó utolsó három formula megtalálható a [9], illetve a másodfajú esetre vonatkozóan a [37] cikkekben.

3.12. Következmény. ([22] Theorem 3.6, Corollary 3.2)

Ha $0 \le k \le n$, $r, s \ge 0$ *és* $m, l \ge 1$, *akkor*

$$l^{n-k} w_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} m^{j-k} w_{l,s}(j,k) (lr - ms|ml)^{\overline{n-j}},$$

$$l^{n-k} W_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} m^{j-k} W_{l,s}(j,k) (lr - ms)^{n-j},$$

$$l^{n-k} WL_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} m^{j-k} WL_{l,s}(j,k) \, (2lr - 2ms|ml)^{\overline{n-j}},$$

továbbá

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} w_{m,s}(j,k) \, (r-s|m)^{\overline{n-j}},$$

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} W_{m,s}(j,k) \, (r-s)^{n-j},$$

$$WL_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} WL_{m,s}(j,k) \, (2r-2s|m)^{\overline{n-j}}.$$

Megjegyzés. A 3.11 Tétel és a 3.12 Következmény paramétereinek még speciálisabb megválasztásával számos további érdekes összefüggéshez juthatunk. Az m színes r-Whitney-számokat ki tudjuk fejezni l színes r-Whitney-számokkal ($s = r$ esetén), l illetve m színes Whitney-számokkal ($s = 1$ esetén), s-Stirling-számokkal ($l = 1$ esetén), r-Stirling-számokkal ($l = 1$ és $s = r$ esetén), továbbá klasszikus Stirling-számokkal ($l = 1$ és $s = 0$ esetén), és ugyanez fennáll az r-Whitney–Lah-számokra vonatkozóan is.

Ha a Spivey-típusú formulában $t = 1$, $l = m$ és $s = r$, akkor az alábbi rekurziós formulák adódnak. Megjegyezzük, hogy ez a következmény nem szerepel az értekezés alapjául szolgáló cikkek egyikében sem.

3.13. Következmény.

Ha $1 \le k \le n+1$, $r \ge 0$ *és* $m \ge 1$, *akkor*

$$w_{m,r}(n+1,k) = r \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} w_{m,r}(j,k) \, m^{n-j} (n-j)! + \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} w_{m,r}(j,k-1) \, m^{n-j} (n-j)!,$$

$$W_{m,r}(n+1,k) = r W_{m,r}(n,k) + \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} W_{m,r}(j,k-1) \, m^{n-j},$$

$$\begin{aligned}WL_{m,r}(n+1,k) &= 2r\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}WL_{m,r}(j,k)\,m^{n-j}(n-j)!\\&\quad+\sum_{j=k-1}^{n}\binom{n}{j}WL_{m,r}(j,k-1)\,m^{n-j}(n-j+1)!.\end{aligned}$$

A következő tételben újabb összefüggéseket ismertetünk az m színes r-Whitney- és l színes s-Whitney-számok, valamint az m színes r-Whitney–Lah- és az l színes s-Whitney–Lah-számok között. Ezek a formulák a 3.12 Következmény utáni megjegyzésben foglaltakhoz hasonlóan szintén számos további kapcsolatot magukba foglalnak. Az elsőfajú r-Whitney-számokra vonatkozó negyedik formula megtalálható a [37] cikkben.

3.14. Tétel. ([22] Theorem 3.7, Corollary 3.3)

Ha $0 \le k \le n$, $r, s \ge 0$ és $m, l \ge 1$, akkor

$$l^{n-k}w_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} m^{n-j}w_{l,s}(n,j)\binom{j}{k}(lr-ms)^{j-k},$$

$$l^{n-k}W_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} m^{n-j}W_{l,s}(n,j)\binom{j}{k}(lr-ms|ml)^{\underline{j-k}},$$

$$l^{n-k}WL_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} m^{n-j}WL_{l,s}(n,j)\binom{j}{k}(2lr-2ms|ml)^{\underline{j-k}},$$

továbbá

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} w_{m,s}(n,j)\binom{j}{k}(r-s)^{j-k},$$

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} W_{m,s}(n,j)\binom{j}{k}(r-s|m)^{\underline{j-k}},$$

$$WL_{m,r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} WL_{m,s}(n,j)\binom{j}{k}(2r-2s|m)^{\underline{j-k}}.$$

Bizonyítás. A 3.4 Tétel alapján adódik, hogy

$$(mlx+lr|ml)^{\overline{n}}=l^n\sum_{k=0}^{n}w_{m,r}\left(n,k\right)m^kx^k.$$

A 3.4 Tétel ismételt alkalmazásával és a binomiális tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(mlx+lr|ml)^{\overline{n}}&=m^n\left(l\left(x+\frac{lr-ms}{ml}\right)+s\middle|\,l\right)^{\overline{n}}\\&=m^n\sum_{j=0}^{n}w_{l,s}\left(n,j\right)\left(l\left(x+\frac{lr-ms}{ml}\right)\right)^j\\&=\sum_{j=0}^{n}m^{n-j}w_{l,s}\left(n,j\right)\left(mlx+lr-ms\right)^j\\&=\sum_{j=0}^{n}m^{n-j}w_{l,s}\left(n,j\right)\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\left(mlx\right)^k\left(lr-ms\right)^{j-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n}l^km^{n+k-j}w_{l,s}\left(n,j\right)\binom{j}{k}\left(lr-ms\right)^{j-k}x^k.\end{aligned}$$

Az utolsó három formula ismét az $l=m$ helyettesítéssel adódik. $\square$

A következőkben egy binomiális konvolúciós azonosságot igazolunk az m színes r-Whitney- és az l színes s-Whitney-, illetve az m színes r-Whitney–Lah- és az l színes s-Whitney–Lah-számokra.

3.15. Tétel. ([22] Theorem 3.9, Corollary 3.4)
Ha $n,k,h,r,s\geq 0$, $k+h\leq n$ és $m,l\geq 1$, akkor

$$\begin{aligned}\binom{k+h}{k}w_{ml,lr+ms}\left(n,k+h\right)=\sum_{j=k}^{n-h}&\binom{n}{j}l^{j-k}m^{n-j-h}w_{m,r}\left(j,k\right)\\&\cdot w_{l,s}\left(n-j,h\right),\end{aligned}$$

$$\binom{k+h}{k} W_{ml,lr+ms}(n,k+h) = \sum_{j=k}^{n-h} \binom{n}{j} l^{j-k} m^{n-j-h} W_{m,r}(j,k) \cdot W_{l,s}(n-j,h),$$

$$\binom{k+h}{k} WL_{ml,lr+ms}(n,k+h) = \sum_{j=k}^{n-h} \binom{n}{j} l^{j-k} m^{n-j-h} WL_{m,r}(j,k) \cdot WL_{l,s}(n-j,h),$$

továbbá

$$\binom{k+h}{k} w_{m,r+s}(n,k+h) = \sum_{j=k}^{n-h} \binom{n}{j} w_{m,r}(j,k)\, w_{m,s}(n-j,h),$$

$$\binom{k+h}{k} W_{m,r+s}(n,k+h) = \sum_{j=k}^{n-h} \binom{n}{j} W_{m,r}(j,k)\, W_{m,s}(n-j,h),$$

$$\binom{k+h}{k} WL_{m,r+s}(n,k+h) = \sum_{j=k}^{n-h} \binom{n}{j} WL_{m,r}(j,k)\, WL_{m,s}(n-j,h).$$

Bizonyítás. $S_{n+lr+ms}$ olyan ml színes $(lr+ms)$-Whitney-színezett permutációit vizsgáljuk, amelyek $k+h+lr+ms$ diszjunkt ciklus szorzatára bomlanak, ahol a ciklusok legkisebb elemei zölddel vagy pirossal vannak színezve úgy, hogy az első lr kitüntetett elem zöld, a további ms kitüntetett elem piros, és a zöld elemek száma $k+lr$.

Ezek száma $\binom{k+h}{k} w_{ml,lr+ms}(n,k+h)$, ugyanis miután $(lr+ms)$-Whitney-színezett módon elhelyeztük az elemeket a ciklusokba, ki kell választanunk közülük azokat, amelyek nem tartalmaznak kitüntetett elemet és a legkisebb elemük színe zöld.

A fenti színezett permutációkat másként is összeszámolhatjuk. Legyen j azon nem kitüntetett elemek száma, amelyek olyan ciklushoz tartoznak, ahol a legkisebb elem színe zöld ($j = k, \ldots, n-h$). Ezeket $\binom{n}{j}$-féleképpen választhatjuk ki. A 3.10 Tétel alapján ezt a j elemet az lr zöld kitüntetett elemmel együtt, továbbá a maradék $n-j+ms$ elemet $w_{ml,lr}(j,k) = l^{j-k}w_{m,r}(j,k)$, valamint $w_{ml,ms}(n-j,h) = m^{n-j-h}w_{l,s}(n-j,h)$ módon helyezhetjük el az előírásoknak megfelelően $k+lr$, illetve $h+ms$ diszjunkt ciklusba.

Az utolsó három összefüggés az $l=m$ helyettesítéssel és a 3.10 Tétel felhasználásával adódik. □

A következő tételben ismertetjük az r-Whitney- és r-Whitney–Lah-számok általánosított ortogonalitásáról szóló eredményeket.

3.16. Tétel. ([22] Theorem 3.10, Corollary 3.5)

Legyen $0 \leq k \leq n$, $r,s \geq 0$ és $m,l \geq 1$. Ekkor

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n-j} m^{j-k} w_{m,r}(n,j) W_{l,s}(j,k) = \binom{n}{k} (lr-ms|ml)^{\overline{n-k}},$$

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n-j} m^{j-k} W_{m,r}(n,j) w_{l,s}(j,k) = \binom{n}{k} (lr-ms)^{n-k},$$

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n-j} m^{j-k} WL_{m,r}(n,j) WL_{l,s}(j,k) = \binom{n}{k} (2lr-2ms|ml)^{\overline{n-k}},$$

továbbá

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} w_{m,r}(n,j) W_{m,s}(j,k) = \binom{n}{k} (r-s|m)^{\overline{n-k}},$$

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} W_{m,r}(n,j) w_{m,s}(j,k) = \binom{n}{k} (r-s)^{n-k},$$

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} WL_{m,r}(n,j) WL_{m,s}(j,k) = \binom{n}{k} (2r-2s|m)^{\overline{n-k}}.$$

Bizonyítás. A 3.4 Tétel és a 3.5 Következmény felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
(mlx+lr-ms|ml)^{\overline{n}} &= l^n \left(m\left(x-\frac{s}{l}\right)+r\middle| m\right)^{\overline{n}}\\
&= l^n \sum_{j=0}^{n} w_{m,r}(n,j)\, m^j \left(x-\frac{s}{l}\right)^j = \sum_{j=0}^{n} l^{n-j} m^j w_{m,r}(n,j)\,(lx-s)^j\\
&= \sum_{j=0}^{n} l^{n-j} m^j w_{m,r}(n,j) \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} W_{l,s}(j,k)\, l^k x^{\overline{k}}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n+k-j} m^j w_{m,r}(n,j)\, W_{l,s}(j,k)\, x^{\overline{k}}.
\end{aligned}
$$

Továbbá, a fenti kifejezésre alkalmazva az emelkedő faktoriálisokra vonatkozó binomiális tételt az adódik, hogy

$$
\begin{aligned}
(mlx+lr-ms|ml)^{\overline{n}} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (mlx|ml)^{\overline{k}} (lr-ms|ml)^{\overline{n-k}}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} l^k m^k (lr-ms|ml)^{\overline{n-k}} x^{\overline{k}}.
\end{aligned}
$$

Az utolsó három összefüggést az $l=m$ helyettesítést követően kapjuk. □

Megjegyzés. Ha az utolsó három formulában feltesszük azt is, hogy $s=r$, akkor az összefüggések jobb oldalán a Kronecker-féle $\delta_{n,k}$ adódik, ezért nevezzük az azonosságokat általánosított ortogonalitásnak. Ez a speciális eset részben megjelenik a [17] ($r=1$-re) és a [9], [39] cikkekben.

Az alábbiakban további kapcsolatokat ismertetünk az r-Whitney- és az r-Whitney–Lah-számok között. Megjegyezzük, hogy az utolsó három formula mátrixos alakban megjelenik a [42] cikkben is.

3.17. Tétel. ([22] Theorem 3.10, Corollary 3.5)

Legyen $0 \leq k \leq n$, $r, s \geq 0$ *és* $m, l \geq 1$. *Ekkor*

$$w_{ml,2lr-ms}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} l^{n-j} m^{j-k} WL_{m,r}(n,j)\, w_{l,s}(j,k),$$

ha $2lr \geq ms$,

$$W_{ml,2ms-lr}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} l^{n-j} m^{j-k} W_{m,r}(n,j)\, WL_{l,s}(j,k),$$

ha $2ms \geq lr$,

$$WL_{ml,\frac{lr+ms}{2}}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} l^{n-j} m^{j-k} w_{m,r}(n,j)\, W_{l,s}(j,k),$$

ha lr *és* ms *azonos paritású, továbbá*

$$w_{m,2r-s}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} WL_{m,r}(n,j)\, w_{m,s}(j,k), \text{ ha } 2r \geq s,$$

$$W_{m,2s-r}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} W_{m,r}(n,j)\, WL_{m,s}(j,k), \text{ ha } 2s \geq r,$$

$$WL_{m,\frac{r+s}{2}}(n,k) = \sum_{j=k}^{n} w_{m,r}(n,j)\, W_{m,s}(j,k), \text{ ha } r \text{ és } s \text{ azonos paritású.}$$

Bizonyítás. A 3.4 Tétel többszöri alkalmazásával és a 3.5 Következmény felhasználásával az állítás a következő módon adódik:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} w_{ml,2lr-ms}(n,k)\, m^k l^k x^k &= (mlx + 2lr - ms|ml)^{\overline{n}} \\
&= l^n \left(m\left(x - \frac{s}{l}\right) + 2r \middle| m \right)^{\overline{n}} \\
&= l^n \sum_{j=0}^{n} WL_{m,r}(n,j)\, m^j \left(x - \frac{s}{l}\right)^{\underline{j}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n} l^{n-j} m^j WL_{m,r}(n,j)\,(lx-s|l)^{\underline{j}} \\
&= \sum_{j=0}^{n} l^{n-j} m^j WL_{m,r}(n,j) \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k}\, w_{l,s}(j,k)\, l^k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k}\, l^{n+k-j} m^j WL_{m,r}(n,j)\, w_{l,s}(j,k)\, x^k.
\end{aligned}$$

Az utolsó három azonosságot ismét az $l = m$ helyettesítéssel, valamint a 3.10 Tétel segítségével kapjuk. □

Megjegyzés. Amennyiben az utolsó összefüggésben feltesszük azt is, hogy $s = r$, a (3) egyenlőséget kapjuk, amely az r-Whitney–Lah-számok G.-S. Cheon és J.-H. Jung [9] által megadott eredeti definíciója. A továbbiakban ennek az eredménynek a kombinatorikus hátterét ismertetjük.

A formula bizonyításához az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz $k+r$ darab rendezett osztályba történő m színes r-Whitney–Lah-színezett osztályozásait állítjuk elő a következő módon: Először r-Whitney-színezetten $j+r$ diszjunkt ciklusba soroljuk az elemeket, amit $w_{m,r}(n,j)$-féleképpen tehetünk meg ($j = k, \ldots, n$). Ezt követően a ciklusokat a legkisebb elemeikkel azonosítjuk, majd $k+r$ osztályba osztályozzuk őket r-Whitney-színezett módon. Erre $W_{m,r}(j,k)$ lehetőségünk van. Végül, ha a ciklusokat osztályonként kanonikus alakba rendezzük (ciklusonként a legkisebb elem kerül előre, magukat a ciklusokat pedig a kezdő elemük szerint csökkenőleg rendezzük), és utána a kitüntetett elemek ciklusait az osztályaik elejére helyezzük fordított sorrendben, akkor az így adódó halmazokat tekinthetjük egyszerűen a bennük lévő számok rendezett osztályának. A konstrukció pedig biztosítja, hogy az elemek örökölt színei egybeessenek az r-Whitney–Lah-szabály szerinti színeikkel.

A [2], [14] ($r = 1$-re) és [9], [12], [37] cikkekben az r-Whitney-számokat szimmetrikus polinomok segítségével állították elő. Az alábbiakban hasonló eredményt közlünk az r-Whitney–Lah-számokra vonatkozóan is, és megadjuk az összefüggések kombinatorikus jelentését.

3.18. Tétel. ([22] Theorem 3.11)
Ha $0 \leq k \leq n$, $r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k} \leq n-1} \prod_{j=1}^{n-k} (i_j m + r),$$

$$W_{m,r}(n,k) = \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{n-k} \leq k} \prod_{j=1}^{n-k} (i_j m + r),$$

$$WL_{m,r}(n,k) = \sum_{0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{n-k} \leq k} \prod_{j=1}^{n-k} ((2i_j + j - 1)m + 2r),$$

vagyis $w_{m,r}(n,k)$ az $r, m+r, \ldots, (n-1)m+r$ számok $(n-k)$-adik elemi szimmetrikus polinomja, míg $W_{m,r}(n,k)$ az $r, m+r, \ldots, km+r$ számok $(n-k)$-adik teljes szimmetrikus polinomja.

Bizonyítás. S_{n+r} egy olyan r-Whitney-színezett permutációjában, amely $k+r$ diszjunkt ciklus szorzatára bomlik, jelölje $r+1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k} \leq n+r$ azokat az elemeket, amelyek nem a legkisebbek az őket tartalmazó ciklusokban.

Először helyezzük el a $k+r$ minimális elemet különböző ciklusokba. Ezt követően j_h-t tehetjük egy kitüntetett elem mögé, és ekkor nem színezzük, vagy a korábban már elhelyezett $j_h - r - 1$ nála kisebb elem mögé, és ebben az esetben m színnel színezzük ($h = 1, \ldots, n-k$). Mindezek alapján

$$w_{m,r}(n,k) = \sum_{r+1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-k} \leq n+r} \prod_{h=1}^{n-k} ((j_h - r - 1)m + r),$$

az állítás pedig átindexelést követően adódik. □

Ismert, hogy az elsőfajú r-Whitney-számok [14] ($r = 1$-re), [10] és a másodfajú r-Whitney-számok [4], [14], [59] ($r = 1$-re), [9], [12], [61] véges sorozata rögzített n esetén szigorúan log-konkáv. Az explicit formula lehetővé teszi számunkra, hogy ugyanezt az állítást az r-Whitney–Lah-számokra is igazoljuk.

3.19. Tétel. ([22] Theorem 3.12)

Legyen $n, m \geq 1$ és $r \geq 0$. Ekkor a $\left(WL_{m,r}\left(n,k\right)\right)_{k=0}^{n}$ sorozat szigorúan log-konkáv, így unimodális.

Bizonyítás. $1 \leq k \leq n-1$ esetén a 3.9 Tétel szerint a bizonyítandó $WL_{m,r}^{2}\left(n,k\right) > WL_{m,r}\left(n,k-1\right)WL_{m,r}\left(n,k+1\right)$ egyenlőtlenség ekvivalens a $\left(k+1\right)\left(n-k+1\right)\left(2r+km\right) > k\left(n-k\right)\left(2r+\left(k-1\right)m\right)$ egyenlőtlenséggel. □

A következő tétel az első- és másodfajú r-Whitney-transzformáció, az r-Whitney–Lah-transzformáció, valamint az inverzeik közötti kapcsolatokat írja le. A második összefüggés megjelent a [17] cikkben, de csak az $r = 1$ esetben.

3.20. Tétel. ([22] Theorem 3.13)

Legyenek $\left(a_n\right)_{n=0}^{\infty}$, $\left(b_n\right)_{n=0}^{\infty}$ komplex számsorozatok és legyen $r \geq 0$, $m \geq 1$. Ekkor

- $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_{m,r}\left(n,k\right)a_k$ $\left(n \geq 0\right)$ *akkor és csak akkor teljesül, ha*

  $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(-1\right)^{n-k} W_{m,r}\left(n,k\right)b_k$ $\left(n \geq 0\right)$,

- $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} W_{m,r}\left(n,k\right)a_k$ $\left(n \geq 0\right)$ *akkor és csak akkor teljesül, ha*

  $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(-1\right)^{n-k} w_{m,r}\left(n,k\right)b_k$ $\left(n \geq 0\right)$,

- $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, a_k$ $(n \geq 0)$ *akkor és csak akkor teljesül, ha* $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} WL_{m,r}(n,k)\, b_k$ $(n \geq 0)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)\, a_k$ $(n \geq 0)$. A 3.16 Tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} W_{m,r}(n,k)\, b_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} W_{m,r}(n,k) \sum_{j=0}^{k} w_{m,r}(k,j)\, a_j$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} W_{m,r}(n,k)\, w_{m,r}(k,j)\, a_j = \sum_{j=0}^{n} \delta_{n,j} a_j = a_n.$$

A második állítás ugyanezen iránya hasonlóan igazolható. Végül ezeket az összefüggéseket alkalmazva a $\left((-1)^n b_n\right)_{n=0}^{\infty}$ és a $\left((-1)^n a_n\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozatokra, az ellentétes irányok is következnek. □

L. L. Liu [32] bebizonyította, hogy a Whitney-transzformációk mindkét típusa megőrzi a log-konvexitást. Az alábbiakban ezt az eredményt terjesztjük ki az r-Whitney- és az r-Whitney–Lah-transzformációkra.

3.21. Tétel. ([22] Theorem 3.14)

Nemnegatív valós log-konvex számsorozatok első- és másodfajú r*-Whitney-transzformáltja, valamint* r*-Whitney–Lah-transzformáltja szintén log-konvex.*

Bizonyítás. Legyen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ egy nemnegatív valós számsorozat, amelynek elsőfajú 0-Whitney- és r-Whitney-transzformáltját jelölje $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, illetve $(c_n)_{n=0}^{\infty}$. Legyen továbbá $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ az $(a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ sorozat elsőfajú 0-Whitney-transzformáltja. Ezek alapján $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_{m,0}(n,k)\, a_k$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)\, a_k$ és $d_n = \sum\limits_{k=0}^{n} w_{m,0}(n,k)\, a_{k+1}$ $(n \geq 0)$.

Először N szerinti teljes indukcióval azt látjuk be, hogy ha az $(a_n)_{n=0}^N$ sorozat log-konvex, akkor a $(b_n)_{n=0}^N$ sorozat is az. Az állítás könnyen ellenőrizhető $N = 1$-re és $N = 2$-re, majd feltesszük, hogy N esetén igaz, és ezt követően bizonyítjuk $(N+1)$-re.

Legyen az $(a_n)_{n=0}^{N+1}$ sorozat log-konvex. Ekkor az indukciós feltevés alapján a $(b_n)_{n=0}^N$ és $(d_n)_{n=0}^N$ sorozatok is log-konvexek.

A 3.13 Következmény $r = 0$ speciális esetének felhasználásával megmutatható, hogy a $(b_{n+1})_{n=0}^N$ sorozat az $(m^n n!)_{n=0}^N$ és a $(d_n)_{n=0}^N$ log-konvex sorozatok binomiális konvolúciója, mivel

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} w_{m,0}\left(n+1,k\right) a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} w_{m,0}\left(j,k-1\right) m^{n-j} \left(n-j\right)! a_k \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} m^{n-j} \left(n-j\right)! \sum_{k=0}^{j} w_{m,0}\left(j,k\right) a_{k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} m^{n-j} \left(n-j\right)! d_j. \end{aligned}$$

Ekkor a Davenport–Pólya-tétel [15] alapján a $(b_{n+1})_{n=0}^N$ sorozat, és így a $(b_n)_{n=0}^{N+1}$ sorozat is log-konvex.

Végül alkalmazva a 3.12 Következményt $l = m$ és $s = 0$ választással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}\left(n,k\right) a_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} w_{m,0}\left(j,k\right) \left(r|m\right)^{\overline{n-j}} a_k \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(r|m\right)^{\overline{n-j}} \sum_{k=0}^{j} w_{m,0}\left(j,k\right) a_k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(r|m\right)^{\overline{n-j}} b_j, \end{aligned}$$

és a $(c_n)_{n=0}^\infty$ sorozat log-konvexitása ismét a Davenport–Pólya-tételből következik, mivel a $(b_n)_{n=0}^\infty$ és $((r|m)^{\overline{n}})_{n=0}^\infty$ sorozatok log-konvexek. $\square$

4. r-Dowling- és r-Dowling–Lah-polinomok

A másodfajú Whitney-számokhoz kapcsolódóan a Dowling-számok és Dowling-polinomok fogalmát M. Benoumhani [2], [3] vezette be. A $D_{n,m}$-mel jelölt Dowling-számokat ($n \geq 0$, $m \geq 1$) a $W_m(n,k)$ másodfajú Whitney-számok összegeként értelmezte ($k = 0, \ldots, n$), míg a Dowling-polinomokat a $D_{n,m}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} W_m(n,k)\, x^k$ módon definiálta.

Az r-Bell- és a Dowling-polinomok közös általánosításaként adódó $D_{n,m,r}(x)$ r-Dowling-polinomok együtthatói a másodfajú r-Whitney-számok. Fogalmuk G.-S. Cheon és J.-H. Jung [9] nevéhez köthető, akik egyúttal számos tulajdonságukat is meghatározták. Megjegyezzük azonban, hogy ezek a polinomok az r-Whitney-számokhoz hasonlóan már korábban is megjelentek a szakirodalomban. L. C. Hsu és P. J.-S. Shiue [28] munkáját alapul véve R. B. Corcino, C. B. Corcino és R. Aldema [11], [12] értelmezték és vizsgálták őket (r, β)-Bell-polinom, illetve $x = 1$ helyettesítés mellett (r, β)-Bell-szám néven. Továbbá M. M. Mangontarum, A. P. Macodi-Ringia és N. S. Abdulcarim [34] foglalkozott az $r = 0$ esetén adódó eltolt változattal.

Érdekes módon eddig kizárólag a Dowling-számokhoz társítottak kombinatorikus jelentést. Ez Mező I. [41] nevéhez köthető, aki J. B. Remmel és M. L. Wachs [55] másodfajú Whitney-számokra adott interpretációján keresztül kombinatorikusan értelmezte és vizsgálta őket. Megemlítjük még, hogy velünk párhuzamosan C. B. Corcino, R. B. Corcino, Mező I. és J. L. Ramírez [13] is részletesen foglalkoztak az r-Dowling-polinomokkal.

Az r-Whitney–Lah-számok segítségével az r-Lah-polinomoknak is megadhatjuk a Dowling-típusú általánosítását. Ezeket r-Dowling–Lah-polinomoknak fogjuk nevezni, és $DL_{n,m,r}(x)$-szel fogjuk jelölni.

Jelen fejezetben átfogóan vizsgáljuk az r-Dowling- és az r-Dowling–Lah-polinomok tulajdonságait. Először ismertetjük a rájuk vonatkozó kombinatorikus interpretációinkat, amelyek a másodfajú r-Whitney-, valamint az r-Whitney–Lah-számok kombinatorikus definícióin alapulnak. Ezt követően ezeket, továbbá a 3. fejezet eredményeit felhasználva bizonyítunk azonosságokat és összefüggéseket. Ezek az általunk definiált r-Dowling–Lah-polinomokra nézve természetesen új eredmények, míg az r-Dowling-polinomokra vonatkozóan részben ismertek. A bizonyításokat elsősorban az r-Dowling–Lah-polinomokra ismertetjük, azonban felhívjuk a figyelmet arra, hogy az általunk alkalmazott gondolatmenetek az r-Dowling-polinomok esetében is újak.

4.1. Definíciók és kombinatorikus interpretációk

Az alábbiakban ismertetjük az r-Dowling-polinomok G.-S. Cheon és J.-H. Jung [9] által megadott definícióját, valamint bevezetjük az r-Dowling–Lah-polinomok fogalmát.

4.1. Definíció. Legyen $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$. Ekkor a

$$D_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)x^k$$

polinomot r-**Dowling-polinomnak** nevezzük.

4.2. Definíció. Legyen $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$. Ekkor a

$$DL_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, x^k$$

polinomot r-**Dowling–Lah-polinomnak** nevezzük.

Ha feltesszük, hogy $n+r \geq 1$, akkor a 3.2 Definíció és a 3.3 Definíció felhasználásával az r-Dowling-, valamint az r-Dowling–Lah-polinomokra az alábbi kombinatorikus interpretációk adhatóak:

$D_{n,m,r}(c)$ és $DL_{n,m,r}(c)$ az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz azon m színes r-Whitney-színezett, illetve r-Whitney–Lah-színezett osztályozásainak a számát adja meg, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok, valamint rendezett osztályok legkisebb elemei is színezve vannak c színnel ($c \geq 1$).

Ha a fenti interpretációkban $c = 1$, akkor a legkisebb elemek egy színnel történő kiegészítő színezése lényegében egybeesik azzal, hogy egyáltalán nem színezzük őket. Ekkor $D_{n,m,r} = D_{n,m,r}(1)$-et r-Dowling-számnak, míg $DL_{n,m,r} = DL_{n,m,r}(1)$-et r-Dowling–Lah-számnak nevezzük. Ebben a fejezetben az állításainkat alapvetően a polinomokra vonatkozóan mondjuk ki, azonban ezzel a speciális helyettesítéssel könnyen adódnak a számokra vonatkozó megfelelő eredmények is.

Nyilvánvaló, hogy $r = 1$; $m = 1$; $m = 1$ és $r = 0$ esetén

$$D_{n,m,1}(x) = D_{n,m}(x), \quad D_{n,1,r}(x) = B_{n,r}(x), \quad D_{n,1,0}(x) = B_n(x).$$

Továbbá hasonló áll fenn az r-Dowling–Lah-polinomokra is, esetükben az $r = 1$-re adódó polinomokat nevezhetjük egyszerűen Dowling–Lah-polinomoknak.

4.2. Tulajdonságok és azonosságok

Az alábbi tétel számos eredmény bizonyítása során hasznos lesz számunkra.

4.3. Tétel. ([21] Theorem 3.1, [19] Theorem 3.7)

Ha $n, r \geq 0$ és $m, l \geq 1$, akkor

$$D_{n,ml,lr}\left(lx\right) = l^n D_{n,m,r}\left(x\right),$$

$$DL_{n,ml,lr}\left(lx\right) = l^n DL_{n,m,r}\left(x\right).$$

1. Bizonyítás. Az állítás azonnal adódik a 3.10 Tétel alapján:

$$DL_{n,ml,lr}\left(lx\right) = \sum_{k=0}^{n} WL_{ml,lr}\left(n,k\right) l^k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} l^n W L_{m,r}(n,k)\, x^k = l^n D L_{n,m,r}(x)\,.$$

□

2. Bizonyítás. Az r-Dowling-polinomok esetében kombinatorikus interpretáción alapuló bizonyítást is tudunk adni.

Legyen $c \geq 1$ és L egy másodlagos színeket tartalmazó l elemű halmaz. Tekintsük az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz azon m színes r-Whitney-színezett osztályozásait, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok legkisebb elemei is színezve vannak c színnel, továbbá minden nem kitüntetett elem másodlagosan L színeivel. Ezek száma $l^n D_{n,m,r}(c)$.

Az alábbi módon megadható egy bijektív megfeleltetés a fenti színezett osztályozások, valamint az $(\{1, \ldots, r\} \times L) \cup \{r+1, \ldots, n+r\}$ halmaz azon ml színes lr-Whitney-színezett osztályozásai között, ahol a kitüntetett elemek a direkt szorzat elemei, és a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok legkisebb elemei lc színnel vannak színezve.

Ha j $(r+1 \leq j \leq n+r)$ eredetileg az i $(1 \leq i \leq r)$ kitüntetett elem osztályában szerepelt és a másodlagos színe $\lambda \in L$ volt, akkor helyezzük el (i, λ) osztályába, a kitüntetett elemeket nem tartalmazó osztályokat pedig hagyjuk változatlanul. Ezt követően a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok legkisebb elemeinek színezésére valóban lc, míg ugyanezen osztályok további elemeinek színezésére ml lehetőség adódik. □

A következőkben megadjuk az r-Dowling- és r-Dowling–Lah-polinomokra vonatkozó Spivey-típusú formulát a lehető legáltalánosabb alakban.

4.4. Tétel. ([21] Theorem 3.2, [19] Theorem 3.2)

Ha $t, n, r, s \geq 0$ és $m, l \geq 1$, akkor

$$l^n D_{t+n,m,r}(mx) = \sum_{i=0}^{t} \sum_{j=0}^{n} W_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} m^j D_{j,l,s}(lx) \cdot (mli + lr - ms)^{n-j} (mx)^i\,,$$

$$l^n DL_{t+n,m,r}(mx) = \sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{n} WL_{m,r}(t,i)\binom{n}{j} m^j DL_{j,l,s}(lx)$$
$$\cdot \left(ml(t+i)+2lr-2ms|ml\right)^{\overline{n-j}}(mx)^i,$$

továbbá

$$D_{t+n,m,r}(x) = \sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{n} W_{m,r}(t,i)\binom{n}{j} D_{j,m,s}(x)$$
$$\cdot (mi+r-s)^{n-j}x^i,$$
$$DL_{t+n,m,r}(x) = \sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{n} WL_{m,r}(t,i)\binom{n}{j} DL_{j,m,s}(x)$$
$$\cdot \left(m(t+i)+2r-2s|m\right)^{\overline{n-j}}x^i.$$

1. Bizonyítás. A 3.11 Tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$l^n DL_{t+n,m,r}(mx) = l^n \sum_{k=0}^{t+n} WL_{m,r}(t+n,k)\, m^k x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{t+n}\sum_{i=0}^{\min\{t,k\}}\sum_{j=\max\{0,k-i\}}^{n} WL_{m,r}(t,i)\binom{n}{j} l^{k-i} m^{i+j} WL_{l,s}(j,k-i)$$
$$\cdot \left(ml(t+i)+2lr-2ms|ml\right)^{\overline{n-j}}x^k$$
$$= \sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=i}^{i+j} WL_{m,r}(t,i)\binom{n}{j} l^{k-i} m^{i+j} WL_{l,s}(j,k-i)$$
$$\cdot \left(ml(t+i)+2lr-2ms|ml\right)^{\overline{n-j}}x^k$$
$$= \sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{n} WL_{m,r}(t,i)\binom{n}{j} m^{i+j}\left(ml(t+i)+2lr-2ms|ml\right)^{\overline{n-j}}$$
$$\cdot \sum_{k=0}^{j} WL_{l,s}(j,k)\, l^k x^{k+i}$$

$$= \sum_{i=0}^{t} \sum_{j=0}^{n} WL_{m,r}(t,i) \binom{n}{j} m^j \left(ml(t+i) + 2lr - 2ms|ml\right)^{\overline{n-j}}$$
$$\cdot DL_{j,l,s}(lx)(mx)^i .$$

Az utolsó két formula az $l = m$ helyettesítéssel adódik. □

2. Bizonyítás. Ha $lr \geq ms$, akkor az r-Dowling-polinomokra vonatkozó állítást a kombinatorikus jelentésük segítségével is igazolhatjuk.

Legyen c egy pozitív egész szám, és vizsgáljuk az $\{1, \ldots, t+n+lr\}$ halmaz azon ml színes lr-Whitney-színezett osztályozásait, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok legkisebb elemei is színezve vannak mlc színnel. Ezek száma a 4.3 Tétel alapján

$$D_{t+n,ml,lr}(mlc) = l^{t+n} D_{t+n,m,r}(mc) .$$

A fenti színezett osztályozások számát az alábbi módon is meghatározhatjuk. Először csak az $1, \ldots, t+lr$ elemeket osztályozzuk ml színes lr-Whitney-színezetten $i+lr$ osztályba ($i = 0, \ldots, t$). Ez $W_{ml,lr}(t,i)$-féleképpen tehető meg, majd a kitüntetett elemet nem tartalmazó i darab osztály legkisebb elemeinek kiegészítő színezésére $(mlc)^i$ lehetőség adódik.

A következő lépést megelőzően az $1, \ldots, ms$ kitüntetett elemeket ideiglenesen azonosítsuk az osztályaikkal, majd jelöljük j-vel azon elemek számát a $t+1+lr, \ldots, t+n+lr$ nem kitüntetett elemek közül, amelyek ezzel az ms kitüntetett elemmel közös osztályban szerepelnek, vagy olyan kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályban vannak, amely különbözik a fenti i osztálytól ($j = 0, \ldots, n$). Ezeket $\binom{n}{j}$-féleképpen választhatjuk ki, majd $D_{j,ml,ms}(mlc)$ lehetőségünk van ml színes ms-Whitney-színezetten osztályozni őket az első ms kitüntetett elemmel együtt úgy, hogy a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok legkisebb elemei is színezve vannak mlc színnel. A további $n-j$ elemet elhelyezhetjük a korábbi i osztály valamelyikébe, és ekkor színt kapnak ml szín közül, vagy egyszerűen kerülhetnek az $ms+1, \ldots, lr$ kitüntetett elemek osztályaiba, és ebben az esetben nem színezzük őket. Összegezve az eddigieket, a 3.10 Tétel és a 4.3 Tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy a lehetőségek száma

$$\sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{n} W_{ml,lr}(t,i)(mlc)^i \binom{n}{j} D_{j,ml,ms}(mlc)(mli+lr-ms)^{n-j}$$
$$= l^t \sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{n} W_{m,r}(t,i)(mc)^i \binom{n}{j} m^j D_{j,l,s}(lc)(mli+lr-ms)^{n-j},$$

amiből az állítás azonnal adódik. □

Megjegyzés. Ha $n=0$, akkor a Spivey-típusú formula az r-Dowling- és r-Dowling–Lah-polinomok fogalmát adja eredményül.

Amennyiben a tételben $t=0$, az alábbi kapcsolatokhoz jutunk az m színes r-Dowling- és l színes s-Dowling-polinomok, valamint az m színes r-Dowling–Lah- és l színes s-Dowling–Lah-polinomok között.

4.5. Következmény. ([21] Corollary 3.1, [19] Corollary 3.3)

Ha $n,r,s\geq 0$ és $m,l\geq 1$, akkor

$$l^n D_{n,m,r}(mx) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} m^j D_{j,l,s}(lx)(lr-ms)^{n-j},$$

$$l^n DL_{n,m,r}(mx) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} m^j DL_{j,l,s}(lx)\,(2lr-2ms|ml)^{\overline{n-j}},$$

továbbá

$$D_{n,m,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D_{j,m,s}(x)(r-s)^{n-j},$$

$$DL_{n,m,r}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DL_{j,m,s}(x)\,(2r-2s|m)^{\overline{n-j}}.$$

Megjegyzés. A 4.4 Tétel és a 4.5 Következmény paramétereinek még speciálisabb megválasztásával az m színes r-Dowling-polinomokat ki tudjuk fejezni az l színes r-Dowling-polinomokkal ($s = r$ esetén), az l és m színes Dowling-polinomokkal ($s = 1$ esetén), az s-Bell-polinomokkal ($l = 1$ esetén), az r-Bell-polinomokkal ($l = 1$ és $s = r$ esetén), valamint a Bell-polinomokkal ($l = 1$ és $s = 0$ esetén). Továbbá hasonló összefüggések adódnak az r-Dowling–Lah-polinomok esetében is. Végül megemlítjük, hogy az r-Dowling-polinomokra ezen speciális változatok közül kettő már korábban is megjelent a [9] és [52] cikkekben.

A Spivey-típusú formula $t = 1$, $l = m$ és $s = r$ esetén egy rekurziós formulát ad eredményül. Az r-Dowling-polinomok esetében ez az eredmény megjelent a [2], [41] ($r = 1$ és $x = 1$ esetén), [3] ($r = 1$-re) és [9], [11] cikkekben.

4.6. Következmény. ([21] Corollary 3.2, [19] Corollary 3.4)

Ha $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$D_{n+1,m,r}(x) = rD_{n,m,r}(x) + x\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}D_{j,m,r}(x)\,m^{n-j},$$

$$\begin{aligned} DL_{n+1,m,r}(x) = {} & 2r\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}DL_{j,m,r}(x)\,m^{n-j}(n-j)! \\ & + x\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}DL_{j,m,r}(x)\,m^{n-j}(n-j+1)!. \end{aligned}$$

Végül a 4.4 Tétel és a 4.5 Következmény felhasználásával egy Carlitz-típusú formula[3] is adódik.

4.7. Következmény. ([21] Corollary 3.3, [19] Corollary 3.5)

Ha $t, n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$D_{t+n,m,r}(x) = \sum_{i=0}^{t}W_{m,r}(t,i)\,D_{n,m,r+mi}(x)\,x^{i},$$

[3] Az elnevezés magyarázata, hogy L. Carlitz [8] bizonyított ilyen jellegű formulát az r-Bell-számokra.

továbbá ha azt is feltesszük, hogy m páros, akkor

$$DL_{t+n,m,r}\left(x\right)=\sum_{i=0}^{t}WL_{m,r}\left(t,i\right)DL_{n,m,r+\frac{mi+mt}{2}}\left(x\right)x^{i}.$$

Az r-Dowling–Lah-polinomokra vonatkozóan a következő másodrendű rekurziós formula adható.

4.8. Tétel. ([19] Theorem 3.6)

Ha $r\geq 0$ és $n,m\geq 1$, akkor

$$\begin{aligned}&DL_{n+1,m,r}\left(x\right)\\&\quad=\left(x+2mn+2r\right)DL_{n,m,r}\left(x\right)-mn\left(mn+2r-m\right)DL_{n-1,m,r}\left(x\right).\end{aligned}$$

Bizonyítás. A 4.6 Következmény többszöri alkalmazásával, továbbá a faktoriálisok és binomiális együtthatók alapvető tulajdonságainak felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&DL_{n+1,m,r}\left(x\right)\\&=2r\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}DL_{n-j,m,r}\left(x\right)m^{j}j!+x\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}DL_{n-j,m,r}\left(x\right)m^{j}\left(j+1\right)!\\&=\left(x+2r\right)DL_{n,m,r}\left(x\right)+2nr\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}DL_{n-j,m,r}\left(x\right)m^{j}\left(j-1\right)!\\&\quad+nx\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}DL_{n-j,m,r}\left(x\right)m^{j}j!+x\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}DL_{n-j,m,r}\left(x\right)m^{j}j!\\&=\left(x+2r\right)DL_{n,m,r}\left(x\right)+2mnr\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}DL_{n-1-j,m,r}\left(x\right)m^{j}j!\\&\quad+mnx\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}DL_{n-1-j,m,r}\left(x\right)m^{j}\left(j+1\right)!\\&\quad+x\sum_{j=1}^{n}n^{\underline{j}}DL_{n-j,m,r}\left(x\right)m^{j}\end{aligned}$$

$$= (x + mn + 2r)\, DL_{n,m,r}(x) + x \sum_{j=1}^{n} n^{\underline{j}} DL_{n-j,m,r}(x)\, m^{j}.$$

Végül az előző egyenlőségből adódik, hogy

$$\begin{aligned}
&DL_{n+1,m,r}(x) - mnDL_{n,m,r}(x) \\
&= (x + mn + 2r)\, DL_{n,m,r}(x) + x \sum_{j=1}^{n} n^{\underline{j}} DL_{n-j,m,r}(x)\, m^{j} \\
&\quad - mn\,(x + m\,(n-1) + 2r)\, DL_{n-1,m,r}(x) - x \sum_{j=2}^{n} n^{\underline{j}} DL_{n-j,m,r}(x)\, m^{j} \\
&= (x + mn + 2r)\, DL_{n,m,r}(x) + xmnDL_{n-1,m,r}(x) \\
&\quad - mn\,(x + m\,(n-1) + 2r)\, DL_{n-1,m,r}(x).
\end{aligned}$$

□

Az alábbi addíciós tételben egy binomiális konvolúciós összefüggést adunk meg az m színes r-Dowling- és az l színes s-Dowling-, valamint az m színes r-Dowling–Lah- és az l színes s-Dowling–Lah-polinomokra.

4.9. Tétel. ([21] Theorem 3.4, [19] Theorem 3.8)

Ha $n, r, s \geq 0$ és $m, l \geq 1$, akkor

$$D_{n,ml,lr+ms}(ml\,(x+y)) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} l^{j} m^{n-j} D_{j,m,r}(mx)\, D_{n-j,l,s}(ly),$$

$$DL_{n,ml,lr+ms}(ml\,(x+y)) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} l^{j} m^{n-j} DL_{j,m,r}(mx)\, DL_{n-j,l,s}(ly),$$

továbbá

$$D_{n,m,r+s}(x+y) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D_{j,m,r}(x)\, D_{n-j,m,s}(y),$$

$$DL_{n,m,r+s}(x+y) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DL_{j,m,r}(x)\, DL_{n-j,m,s}(y).$$

1. Bizonyítás. A binomiális tétel és a 3.15 Tétel alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
& DL_{n,ml,lr+ms}\left(ml\left(x+y\right)\right) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n} WL_{ml,lr+ms}\left(n,i\right) m^i l^i \left(x+y\right)^i \\
&\quad = \sum_{i=0}^{n} WL_{ml,lr+ms}\left(n,i\right) m^i l^i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} x^k y^{i-k} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} WL_{ml,lr+ms}\left(n,i\right) m^i l^i x^k y^{i-k} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{n-k} \binom{k+h}{k} WL_{ml,lr+ms}\left(n,k+h\right) m^{k+h} l^{k+h} x^k y^h \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n} \sum_{h=0}^{n-k} \sum_{j=k}^{n-h} \binom{n}{j} l^{j+h} m^{n-j+k} WL_{m,r}\left(j,k\right) WL_{l,s}\left(n-j,h\right) x^k y^h \\
&\quad = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} l^j m^{n-j} \sum_{k=0}^{j} WL_{m,r}\left(j,k\right) m^k x^k \sum_{h=0}^{n-j} WL_{l,s}\left(n-j,h\right) l^h y^h \\
&\quad = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} l^j m^{n-j} DL_{j,m,r}\left(mx\right) DL_{n-j,l,s}\left(ly\right).
\end{aligned}
$$

□

2. Bizonyítás. Legyen $c, d \geq 1$, és tekintsük az $\{1, \ldots, n + lr + ms\}$ halmaz azon ml színes $(lr+ms)$-Whitney–Lah-színezett osztályozásait, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztályok legkisebb elemei is színezve vannak $ml\left(c+d\right)$ színnel. Ezek száma az interpretáció alapján $DL_{n,ml,lr+ms}\left(ml\left(c+d\right)\right)$.

A vizsgált színezett osztályozások számát a következő módon is meghatározhatjuk. $\binom{n}{j}$ lehetőségünk van arra, hogy kiválasszuk azt a j nem kitüntetett elemet, amelyek az első lr kitüntetett elem rendezett osztályaihoz tartoznak, vagy olyan kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztályban vannak, ahol a legkisebb elem kiegészítő színe az első mlc szín valamelyike ($j = 0, \ldots, n$). Ezeket az $1, \ldots, lr$ kitüntetett elemekkel együtt $DL_{j,ml,lr}\,(mlc)$-féleképpen, míg a további $n-j$ nem kitüntetett elemet és az $lr+1, \ldots, lr+ms$ kitüntetett elemeket $DL_{n-j,ml,ms}\,(mld)$ módon osztályozhatjuk és színezhetjük az előírásoknak megfelelően. Ezek alapján a 4.3 Tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy a lehetőségek száma

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} DL_{j,ml,lr}\,(mlc)\, DL_{n-j,ml,ms}\,(mld)$$
$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} l^j m^{n-j} DL_{j,m,r}\,(mc)\, DL_{n-j,l,s}\,(ld)\,.$$

Az utolsó két formula az $l = m$ helyettesítést követően a 4.3 Tétel segítségével adódik. □

A Dowling-számokra és a Dowling-polinomokra vonatkozó Dobiński-típusú formulát[4] az exponenciális generátorfüggvényükből kiindulva a [2] és [3] cikkekben határozták meg, míg az r-Dowling-polinomok esetében megkaphatjuk [28] egy általánosabb eredményéből. A következőkben az r-Dowling–Lah-polinomokra vonatkozó formulát is ismertetjük, és két közvetlen bizonyítást adunk. Az elsőben az előző fejezet eredményeit használjuk, míg a másodikban valószínűségszámítási eszközökkel igazoljuk az állítást a számokra vonatkozóan, azaz az $x = 1$ speciális esetben.

4.10. Tétel. ([21] Theorem 3.5, [19] Theorem 3.9)

Ha $n, r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$D_{n,m,r}\,(x) = \exp\left(-\frac{x}{m}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(mj+r)^n}{m^j j!}x^j,$$

$$DL_{n,m,r}\,(x) = \exp\left(-\frac{x}{m}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(mj+2r|m)^{\overline{n}}}{m^j j!}x^j.$$

[4] Az elnevezés onnan adódik, hogy a formula Bell-számokra vonatkozó jól ismert változatát G. Dobiński [16] adta meg.

1. Bizonyítás. Legyen $WL_{m,r}(n,k)=0$, ha $k>n$. A 3.4 Tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(mj+2r|m)^{\overline{n}} &= \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, m^k j^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} WL_{m,r}(n,k)\, m^k j^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{j} WL_{m,r}(n,k)\, m^k \frac{j!}{(j-k)!} = \sum_{k=0}^{j} WL_{m,r}(n,k)\, m^j j! \frac{m^{k-j}}{(j-k)!}.\end{aligned}$$

A fentiekből világos, hogy $\left(\frac{(mj+2r|m)^{\overline{n}}}{m^j j!}\right)_{j=0}^{\infty}$ a $(WL_{m,r}(n,j))_{j=0}^{\infty}$ és $\left(\frac{m^{-j}}{j!}\right)_{j=0}^{\infty}$ sorozatok konvolúciója, ezért a generátorfüggvényeikre teljesül, hogy

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(mj+2r|m)^{\overline{n}}}{m^j j!} x^j = DL_{n,m,r}(x) \exp\left(\frac{x}{m}\right).$$

□

2. Bizonyítás. Legyen ξ egy $\lambda>0$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. A 3.4 Tétel alkalmazásával az adódik, hogy

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(m\xi+2r|m)^{\overline{n}} &= \sum_{j=0}^{\infty} (mj+2r|m)^{\overline{n}}\, \mathsf{P}(\xi=j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (mj+2r|m)^{\overline{n}} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, m^k j^{\underline{k}} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, m^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} j^{\underline{k}} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, m^k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, m^k \lambda^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, m^k \lambda^k = DL_{n,m,r}(m\lambda).$$

A $\lambda = \frac{1}{m}$ választással pedig azt kapjuk, hogy

$$DL_{n,m,r} = \mathsf{E}\left(m\xi + 2r|m\right)^{\overline{n}} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(mj + 2r|m\right)^{\overline{n}} \frac{1}{m^j j!} e^{-\frac{1}{m}}.$$

□

Az alábbi tételben megadjuk az r-Dowling- és r-Dowling–Lah-polinomok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét, majd két különböző bizonyítást ismertetünk. Megjegyezzük, hogy a formulát az r-Dowling-számok esetében a [12], [61], míg az r-Dowling-polinomokra vonatkozóan a [2], [3] ($r = 1$-re) és [9] cikkekben is meghatározták.

4.11. Tétel. ([21] Theorem 3.6, [19] Theorem 3.10)

Ha $r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{n,m,r}(x)}{n!} y^n = \exp\left(ry + \frac{\exp(my) - 1}{m} x\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{DL_{n,m,r}(x)}{n!} y^n = \exp\left(\frac{xy}{1 - my}\right) (1 - my)^{-\frac{2r}{m}}.$$

1. Bizonyítás. A $\left(WL_{m,r}(n,k)\right)_{n=k}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvényének (lásd [9]) felhasználásával az állítás az alábbi módon adódik:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{DL_{n,m,r}(x)}{n!} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{WL_{m,r}(n,k)}{n!} x^k y^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{WL_{m,r}(n,k)}{n!} y^n = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{(1 - my)^{-\frac{2r}{m}}}{k!} \left(\frac{y}{1 - my}\right)^k$$

$$= (1 - my)^{-\frac{2r}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{xy}{1 - my}\right)^k = (1 - my)^{-\frac{2r}{m}} \exp\left(\frac{xy}{1 - my}\right).$$

□

2. Bizonyítás. A 4.5 Következményből $l = 1$ és $s = 0$ választással azt kapjuk, hogy $\left(DL_{n,m,r}(x)\right)_{n=0}^{\infty}$ az $\left(m^n L_n\left(\frac{x}{m}\right)\right)_{n=0}^{\infty}$ és $\left((2r|m)^{\overline{n}}\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozatok binomiális konvolúciója.

A Lah-polinomok exponenciális generátorfüggvényének ismeretében (lásd [48]) pedig egyszerűen adódik, hogy az $\left(m^n L_n\left(\frac{x}{m}\right)\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvénye $\exp\left(\frac{xy}{1-my}\right)$. Továbbá a binomiális sor felhasználásával meghatározhatjuk a $\left((2r|m)^{\overline{n}}\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat exponenciális generátorfüggvényét is:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2r|m)^{\overline{n}}}{n!}y^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n\left(\frac{2r}{m}+n-1\right)^{\underline{n}}}{n!}y^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\frac{2r}{m}+n-1}{n}(-my)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{2r}{m}}{n}(-my)^n\\ &= (1-my)^{-\frac{2r}{m}}.\end{aligned}$$

□

Ismert, hogy az r-Dowling-polinomok gyökei valósak, egyszeresek és nempozitívak (lásd [4] ($r = 1$-re) és [9], [12], [61]). Az alábbiakban hasonló állítást igazolunk az r-Dowling–Lah-polinomok gyökeire vonatkozóan.

4.12. Tétel. ([19] Theorem 3.11)

Legyen $r \geq 0$ és $n, m \geq 1$. Ekkor a $DL_{n,m,r}(x)$ polinom gyökei valósak és egyszeresek, továbbá $r \geq 1$ esetén mindegyik gyök negatív, míg $r = 0$ esetén az egyik gyök 0 és a többi negatív.

Bizonyítás. Az állítást $r \geq 1$-re igazoljuk n szerinti teljes indukcióval, az $r = 0$ eset hasonló gondolatmenettel adódik.

Ha $n = 1$, akkor $DL_{1,m,r}(x) = x + 2r$. Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, majd bizonyítsuk $n + 1$ esetén. Felhasználva az r-Whitney–Lah-számok speciális értékeit, valamint a 3.6 Tételben szereplő rekurzióju-kat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
DL_{n+1,m,r}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} WL_{m,r}(n+1,k)\, x^k \\
&= (2r|m)^{\overline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} WL_{m,r}(n,k-1)\, x^k \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} (m(n+k)+2r)\, WL_{m,r}(n,k)\, x^k + x^{n+1} \\
&= x\sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, x^k + (mn+2r)\sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, x^k \\
&\quad + mx\sum_{k=1}^{n} kWL_{m,r}(n,k)\, x^{k-1} \\
&= xDL_{n,m,r}(x) + (mn+2r)\, DL_{n,m,r}(x) + mxDL'_{n,m,r}(x)\,.
\end{aligned}$$

Ha ezt megszorozzuk $e^x x^{mn+2r-1} DL_{n,m,r}^{m-1}(x)$-nel, akkor az

$$e^x x^{mn+2r-1} DL_{n,m,r}^{m-1}(x)\, DL_{n+1,m,r}(x) = \left(e^x x^{mn+2r} DL_{n,m,r}^{m}(x)\right)'.$$

összefüggéshez jutunk.

Az indukciós feltétel szerint $DL_{n,m,r}(x)$-nek n valós gyöke van, amelyek mindegyike egyszeres és negatív. Ebből adódóan az $x^{mn+2r} DL_{n,m,r}^{m}(x)$ polinom különböző valós gyökeinek száma $n+1$, amelyek közül a 0 $(mn+2r)$-szeres, míg a többi m-szeres és negatív.

Mivel $e^x > 0$ $(x \in \mathbb{R})$, így $e^x x^{mn+2r} DL_{n,m,r}^{m}(x)$-nek $n+1$ zérushelye van, az egyik 0, a többi negatív, továbbá $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x x^{mn+2r} DL_{n,m,r}^{m}(x) = 0$. Ekkor a deriváltjának, azaz $e^x x^{mn+2r-1} DL_{n,m,r}^{m-1}(x)\, DL_{n+1,m,r}(x)$-nek a Rolle-tétel szerint $n+1$ darab negatív zérushelye van, amelyek eltérnek $DL_{n,m,r}(x)$ gyökeitől. Így a $DL_{n+1,m,r}(x)$ polinomnak $n+1$ darab különböző negatív gyöke van. □

Megjegyzés. A fenti eredmény azonnali következménye az r-Whitney–Lah-számok sorozatának log-konkavitásáról szóló 3.19 Tétel.

Megemlítjük még, hogy az r-Dowling- és az r-Dowling–Lah-polinomok gyökeinek nagyságrendjére a közelmúltban Rácz G. [51] adott becsléseket.

A következő tételben különböző kapcsolatokat ismertetünk az r-Dowling- és r-Dowling–Lah-polinomok között.

4.13. Tétel. ([19] Theorem 3.13)
Legyen $n, r, s \geq 0$ és $m, l \geq 1$. Ekkor

$$D_{n,ml,2ms-lr}(mlx) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} l^{n-j} m^j W_{m,r}(n,j) DL_{j,l,s}(lx),$$

ha $2ms \geq lr$,

$$DL_{n,ml,\frac{lr+ms}{2}}(mlx) = \sum_{j=0}^{n} l^{n-j} m^j w_{m,r}(n,j) D_{j,l,s}(lx),$$

ha lr és ms azonos paritású, továbbá

$$D_{n,m,2s-r}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} W_{m,r}(n,j) DL_{j,m,s}(x), \text{ ha } 2s \geq r,$$

$$DL_{n,m,\frac{r+s}{2}}(x) = \sum_{j=0}^{n} w_{m,r}(n,j) D_{j,m,s}(x), \text{ ha } r \text{ és } s \text{ azonos paritású.}$$

Bizonyítás. Az első két összefüggés a 3.17 Tétel második, illetve harmadik formulájának felhasználásával az alábbi módon adódik:

$$\begin{aligned} D_{n,ml,2ms-lr}(mlx) &= \sum_{k=0}^{n} W_{ml,2ms-lr}(n,k) m^k l^k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} l^{n-j} m^{j-k} W_{m,r}(n,j) WL_{l,s}(j,k) m^k l^k x^k \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} l^{n-j} m^j W_{m,r}(n,j) \sum_{k=0}^{j} WL_{l,s}(j,k) l^k x^k$$
$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} l^{n-j} m^j W_{m,r}(n,j) DL_{j,l,s}(lx),$$

valamint

$$DL_{n,ml,\frac{lr+ms}{2}}(mlx) = \sum_{k=0}^{n} WL_{ml,\frac{lr+ms}{2}}(n,k) m^k l^k x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k}^{n} l^{n-j} m^{j-k} w_{m,r}(n,j) W_{l,s}(j,k) m^k l^k x^k$$
$$= \sum_{j=0}^{n} l^{n-j} m^j w_{m,r}(n,j) \sum_{k=0}^{j} W_{l,s}(j,k) l^k x^k$$
$$= \sum_{j=0}^{n} l^{n-j} m^j w_{m,r}(n,j) D_{j,l,s}(lx).$$

Az utolsó két állítást az előzőekből az $l = m$ helyettesítéssel és a 4.3 Tétel alkalmazásával kapjuk. □

Megjegyzés. Az utolsó összefüggés $s = r$ esetén rávilágít arra, hogy az r-Dowling–Lah-polinomok sorozata az r-Dowling-polinomok sorozatának elsőfajú r-Whitney-transzformáltja.

Végül három különböző módon igazoljuk azt, hogy az r-Dowling- és az r-Dowling–Lah-számok sorozata log-konvex.

4.14. Tétel. ([21] Theorem 3.7, [19] Theorem 3.14)

Legyen $r \geq 0$ és $m \geq 1$. Ekkor a $(D_{n,m,r})_{n=0}^{\infty}$ és a $(DL_{n,m,r})_{n=0}^{\infty}$ sorozatok log-konvexek.

1. Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $(1)_{n=0}^{\infty}$ log-konvex, így a 3.21 Tételből adódóan $(DL_{n,m,r})_{n=0}^{\infty}$ is az. □

2. Bizonyítás. Először N szerinti teljes indukcióval belátjuk azt, hogy a $(DL_{n,m,0})_{n=0}^{N}$ sorozat log-konvex.

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az állítás $N=1$ és $N=2$ esetén igaz, majd feltesszük, hogy N-re is teljesül. Ekkor a 4.6 Következményből $r=0$ választással azt kapjuk, hogy $(DL_{n+1,m,0})_{n=0}^{N}$ a $(DL_{n,m,0})_{n=0}^{N}$ és $(m^n\,(n+1)!)_{n=0}^{N}$ log-konvex sorozatok binomiális konvolúciója, ezért a Davenport–Pólya-tétel alapján szintén log-konvex, és így $(DL_{n,m,0})_{n=0}^{N+1}$ is az.

Hasonló gondolatmenettel adódik $(DL_{n,m,r})_{n=0}^{\infty}$ log-konvexitása is, mivel a 4.5 Következményből $l=m$ és $s=0$ esetén az következik, hogy a $(DL_{n,m,0})_{n=0}^{\infty}$ és $\left((2r|m)^{\overline{n}}\right)_{n=0}^{\infty}$ log-konvex sorozatok binomiális konvolúciójaként áll elő. □

3. Bizonyítás. Felhasználva az r-Whitney–Lah-számok speciális értékeit, valamint a 3.6 Tételben szereplő rekurziójukat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
DL_{n+1,m,r} &= \sum_{k=0}^{n+1} WL_{m,r}\,(n+1,k) \\
&= (2r|m)^{\overline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} WL_{m,r}\,(n,k-1) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} (m\,(n+k)+2r)\,WL_{m,r}\,(n,k) + 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}\,(n,k) + \sum_{k=0}^{n} (m\,(n+k)+2r)\,WL_{m,r}\,(n,k) \\
&= DL_{n,m,r} + \sum_{k=0}^{n} (m\,(n+k)+2r)\,WL_{m,r}\,(n,k)\,,
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
&DL_{n+2,m,r} - DL_{n+1,m,r} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (m\,(n+1+k)+2r)\,WL_{m,r}\,(n+1,k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2r|m)^{\overline{n+2}} + \sum_{k=1}^{n} (m(n+1+k)+2r)\, WL_{m,r}(n,k-1) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} (m(n+k)+2r|m)^{\overline{2}}\, WL_{m,r}(n,k) + (2m(n+1)+2r) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (m(n+k)+2r|m)^{\overline{2}}\, WL_{m,r}(n,k) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} (m(n+k+2)+2r)\, WL_{m,r}(n,k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (m(n+k)+2r|\, m)^{\overline{2}} WL_{m,r}(n,k) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} (m(n+k)+2r)\, WL_{m,r}(n,k) + 2m\sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (m(n+k)+2r|m)^{\overline{2}}\, WL_{m,r}(n,k) + DL_{n+1,m,r} \\
&\quad + (2m-1)\, DL_{n,m,r}.
\end{aligned}$$

Továbbá a súlyozott számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenségből kiindulva belátható, hogy

$$\left(\left.\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (m(n+k)+2r)\, WL_{m,r}(n,k)}{DL_{n,m,r}}\right| m\right)^{\overline{2}} \le \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} (m(n+k)+2r|m)^{\overline{2}}\, WL_{m,r}(n,k)}{DL_{n,m,r}}.$$

Végül a fenti összefüggések felhasználásával az egyenlőtlenségben szereplő törtek számlálóit kifejezhetjük az r-Dowling–Lah-számok segítségével, így

$$\begin{aligned}&\left(DL_{n+1,m,r}-DL_{n,m,r}\right)\left(DL_{n+1,m,r}+\left(m-1\right)DL_{n,m,r}\right)\\&\quad\leq\left(DL_{n+2,m,r}-2DL_{n+1,m,r}-\left(2m-1\right)DL_{n,m,r}\right)DL_{n,m,r},\end{aligned}$$

$$DL_{n+1,m,r}^{2}\leq DL_{n+2,m,r}DL_{n,m,r}-mDL_{n,m,r}\left(DL_{n+1,m,r}+DL_{n,m,r}\right),$$

ami egy erősebb egyenlőtlenség annál, mint a bizonyítandó. □

Megjegyzés. L. L. Liu és Y. Wang [33] egyik tételének azonnali következményeként adódik az előző eredmény polinomokra vonatkozó változata is, miszerint ha $r \geq 0$ és $m \geq 1$, akkor $\left(D_{n,m,r}\left(q\right)\right)_{n=0}^{\infty}$ és $\left(DL_{n,m,r}\left(q\right)\right)_{n=0}^{\infty}$ q-log-konvex sorozatok, azaz például az r-Dowling-polinomok esetén a $D_{n,m,r}^{2}\left(q\right)$ polinom együtthatói nem nagyobbak, mint a $D_{n-1,m,r}\left(q\right)D_{n+1,m,r}\left(q\right)$ polinom azonos fokú tagjainak együtthatói ($n \geq 1$).

5. s-asszociált r-Dowling-típusú számok

Leszámláló kombinatorikai vizsgálatok során az osztályok és rendezett osztályok elemszámára, valamint a ciklusok hosszára is előírhatunk megszorításokat. Ha például alsó korlátot adunk rájuk, akkor a különféle kombinatorikus számok asszociált változataihoz jutunk.

A $B_n^{\geq s}$ s-asszociált Bell-szám az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz azon osztályozásainak számát adja meg, amelyeknél minden osztály elemszáma legalább s ($n \geq 0$, $s \geq 1$). Ezek a számok több tulajdonságukkal együtt E. A. Enneking és J. C. Ahuja [18], F. T. Howard [25], [26], valamint V. H. Moll, J. L. Ramírez és D. Villamizar [45] cikkeiben jelentek meg. Az $s = 2$ esetben Bóna M. és Mező I. [5] vizsgálták őket, továbbá a 2-asszociált Bell-számok az [50] könyv feladataiban is szerepelnek.

Asszociált r-Bell-számok egyedül F. T. Howard [27] munkájában lelhetőek fel, aki azonban kizárólag a 2-asszociált változatukat értelmezte és vizsgálta. Az általa adott definíciót tetszőleges s-re általánosítva adódik, hogy a $B_{n,r}^{\geq s}$-sel jelölt s-asszociált r-Bell-szám az $\{1, \ldots, n + r\}$ halmaz olyan osztályozásait számolja össze, amelyeknél az $1, \ldots, r$ kitüntetett elemek különböző osztályokba kerülnek, és a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok legalább s elemet tartalmaznak ($n, r \geq 0$, $s \geq 1$).

Ahogyan a 3.5 Következmény utáni megjegyzésben láttuk, az elsőfajú r-Whitney-számok összegeként adódó Bell-típusú számok egyszerűen m differenciájú emelkedő faktoriálisokkal fejezhetők ki, speciálisan az elsőfajú Stirling-számok összege a faktoriálisokkal egyenlő, ezért vizsgálatuk kevéssé érdekes. Az asszociált változataik esetében azonban nem ez a helyzet. Az $A_n^{\geq s}$ s-asszociált faktoriális azon S_n-beli permutációk számát adja meg, amelyek ciklusfelbontásában minden ciklus hossza legalább s ($n \geq 0$, $s \geq 1$). Megjegyezzük, hogy az n-edik 2-asszociált faktoriálist gyakran nevezik n szubfaktoriálisnak is.

Az előzőek mintájára bevezethetjük az s-asszociált r-faktoriális fogalmát is. $A_{n,r}^{\geq s}$-sel az olyan S_{n+r}-beli permutációk számát jelöljük, amelyeknél az $1, \dots, r$ kitüntetett elemek különböző ciklusokba kerülnek, és minden kitüntetett elemet nem tartalmazó ciklus legalább s hosszúságú ($n, r \geq 0$, $s \geq 1$). Ennek az általánosításnak egy másik változatát a közelmúltban a [62] és [43] cikkekben vizsgálták, ezekről a későbbiek során ejtünk még szót.

Természetesen az $L_n^{\geq s}$ s-asszociált összegzett Lah-számokat, valamint az $L_{n,r}^{\geq s}$ s-asszociált összegzett r-Lah-számokat is értelmezhetjük, ezekkel a számokkal azonban eddig még nem foglalkoztak. Előbbi az $\{1, \dots, n\}$ halmaz olyan rendezett osztályokba történő osztályozásainak számát adja meg, amelyeknél minden rendezett osztály legalább s elemet tartalmaz ($n \geq 0$, $s \geq 1$), míg utóbbi az $\{1, \dots, n+r\}$ halmaz azon rendezett osztályokba történő osztályozásait számolja össze, ahol az $1, \dots, r$ kitüntetett elemek különböző rendezett osztályokba kerülnek, és minden kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztály elemszáma legalább s ($n, r \geq 0$, $s \geq 1$).

Ebben a fejezetben a lehető legáltalánosabban értelmezzük az r-általánosított kombinatorikus számok s-asszociált változatait, így bevezetjük az s-asszociált r-Dowling-számok, az s-asszociált r-Dowling-faktoriálisok, valamint az s-asszociált r-Dowling–Lah-számok fogalmát. Megjegyezzük azonban, hogy az eredményeink nemcsak ilyen általánosságban számítanak újnak, hanem az s-asszociált r-Bell-számok, az s-asszociált r-faktoriálisok és az s-asszociált összegzett r-Lah-számok esetében is. Először egy nagyon hasznosnak bizonyuló eszközt igazolunk, az úgynevezett r-kompozíciós formulát. Ezt követően ennek segítségével meghatározzuk a vizsgált számok sorozatainak exponenciális generátorfüggvényét, amely felhasználásával további összefüggéseket és tulajdonságokat látunk be. A bizonyításokat az esetek többségében az s-asszociált r-Dowling-számokra közöljük.

5.1. Az r-kompozíciós formula

A következő tételben megadjuk az exponenciális generátorfüggvényekre vonatkozó jól ismert kompozíciós formula r-általánosítását. A továbbiakban $\mathbb{N}_0$-val a nemnegatív egész számok halmazát, míg $\mathbb{K}$-val egy 0 karakterisztikájú testet jelölünk.

5.1. Tétel. ([23] Theorem 2.1)

Legyenek $f_1, f_2, g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$ olyan függvények, melyekre $f_2(0) = 0$ és $g(0) = 1$. Az exponenciális generátorfüggvényüket jelölje rendre $F_1(x)$, $F_2(x)$ és $G(x)$. A $h\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$ függvényt definiáljuk a következőképpen: $h(0) = 1$, és $n \geq 1$ esetén legyen

$$h(n) = \sum f_1(|Y_1|) \cdots f_1(|Y_r|) f_2(|Z_1|) \cdots f_2(|Z_k|) g(k),$$

ahol az összegzést az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz összes $\{Y_1 \cup \{1\}, \ldots, Y_r \cup \{r\}, Z_1, \ldots, Z_k\}$ alakú osztályozására végezzük el. Ekkor h exponenciális generátorfüggvénye

$$H(x) = (F_1(x))^r G(F_2(x)).$$

Bizonyítás. Először definiáljuk a $h_k\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$ $(k \geq 0)$ függvényeket. Legyen

$$h_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0 \\ 0, & \text{ha } n \geq 1 \end{cases}.$$

Legyen továbbá $k \geq 1$ esetén $h_k(0) = 0$ és

$$h_k(n) = \sum f_1(|Y_1|) \cdots f_1(|Y_r|) f_2(|Z_1|) \cdots f_2(|Z_k|) g(k),$$

ha $n \geq 1$, ahol az összegzést az $\{1, \ldots, n+r\}$ halmaz összes $k+r$ elemű $\{Y_1 \cup \{1\}, \ldots, Y_r \cup \{r\}, Z_1, \ldots, Z_k\}$ alakú osztályozására végezzük el. Mivel $f_2(0) = 0$, megengedhetjük, hogy a Z_j $(j = 1, \ldots, k)$ halmazok üresek legyenek, ezért

$$h_k(n) = \frac{g(k)}{k!} \sum f_1(|Y_1|) \cdots f_1(|Y_r|) f_2(|Z_1|) \cdots f_2(|Z_k|),$$

ahol az összegzést az $\{r+1,\ldots,n+r\}$ halmaz összes $k+r$ elemű $(Y_1,\ldots,Y_r,Z_1,\ldots,Z_k)$ gyenge rendezett osztályozására végezzük el. Ekkor az úgynevezett szorzatformula felhasználásával azt kapjuk, hogy h_k exponenciális generátorfüggvénye

$$H_k(x)=\frac{g(k)}{k!}\left(F_1(x)\right)^r\left(F_2(x)\right)^k.$$

Végül világos, hogy $h(n)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}h_k(n)$ (megjegyezzük, hogy ez az összeg minden n esetén véges), ezért

$$H(x)=\sum_{k=0}^{\infty}H_k(x)=\left(F_1(x)\right)^r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g(k)}{k!}\left(F_2(x)\right)^k=\left(F_1(x)\right)^r G\left(F_2(x)\right).$$

□

Megjegyzés. Az r-kompozíciós formula segítségével számos r-általánosított kombinatorikus számsorozat exponenciális generátorfüggvénye egyszerűen meghatározható, így többek között a 4.11 Tétel r-Dowling- és r-Dowling–Lah-számokra vonatkozó változata is azonnal adódik.

5.2. Kombinatorikus definíciók

Az alábbiakban kombinatorikusan definiáljuk az s-asszociált r-Dowling-számokat, az s-asszociált r-Dowling-faktoriálisokat, valamint az s-asszociált r-Dowling–Lah-számokat. Az egyszerűség kedvéért ezekre a továbbiakban s-asszociált r-Dowling-típusú számokként hivatkozunk majd.

5.2. Definíció. Legyen $n,r\geq 0$, $n+r\geq 1$ és $s,m\geq 1$. Ekkor $D_{n,m,r}^{\geq s}$ jelölje az $\{1,\ldots,n+r\}$ halmaz azon m színes r-Whitney-színezett osztályozásainak számát, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok elemszáma legalább s. Legyen továbbá $D_{0,m,0}^{\geq s}=1$. Ezeket a számokat **s-asszociált r-Dowling-számoknak** nevezzük.

5.3. Definíció. Legyen $n, r \geq 0$, $n+r \geq 1$ és $s, m \geq 1$. Ekkor $DA^{\geq s}_{n,m,r}$ jelölje S_{n+r} azon m színes r-Whitney-színezett permutációinak számát, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó ciklusok hossza legalább s. Legyen továbbá $DA^{\geq s}_{0,m,0} = 1$. Ezeket a számokat s-**asszociált** r-**Dowling-faktoriálisoknak** nevezzük.

5.4. Definíció. Legyen $n, r \geq 0$, $n + r \geq 1$ és $s, m \geq 1$. Ekkor $DL^{\geq s}_{n,m,r}$ jelölje az $\{1, \ldots, n + r\}$ halmaz azon m színes r-Whitney–Lah-színezett osztályozásainak számát, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó rendezett osztályok elemszáma legalább s. Legyen továbbá $DL^{\geq s}_{0,m,0} = 1$. Ezeket a számokat s-**asszociált** r-**Dowling–Lah-számoknak** nevezzük.

Értelemszerűen $s = 1$; $m = 1$; $m = 1$ és $r = 0$ esetén

$$D^{\geq 1}_{n,m,r} = D_{n,m,r}, \quad D^{\geq s}_{n,1,r} = B^{\geq s}_{n,r}, \quad D^{\geq s}_{n,1,0} = B^{\geq s}_{n},$$

továbbá hasonló kapcsolatok állnak fenn az s-asszociált r-Dowling-faktoriálisokra, valamint az s-asszociált r-Dowling–Lah-számokra vonatkozóan is.

Végül megemlítjük, hogy az s-asszociált r-Dowling-típusú számokat egy másik lehetséges módon is értelmezhettük volna. Ha azt írjuk elő, hogy az összes osztály, ciklus, illetve rendezett osztály (és nem csak a kitüntetett elemet nem tartalmazók) legalább s elemet tartalmazzon, akkor a fenti számok alternatív változatainak fogalmához jutunk. A közelmúltban a [62] és [43] cikkek szerzői az alternatív 2-asszociált és alternatív s-asszociált r-faktoriálisokat vizsgálták.

A fogalmak bevezetése során többek között azért részesítettük előnyben a definíciókban szereplő változatot, mivel ezek illeszkednek a 2-asszociált r-Bell-számok eredeti, F. T. Howard-féle [27] értelmezéséhez.

5.3. Tulajdonságok és azonosságok

Ahogyan korábban is említettük, az r-kompozíciós formula segítségével meghatározhatjuk az általunk vizsgált számok sorozatainak exponenciális generátorfüggvényét.

5.5. Tétel. ([23] Theorem 3.1)

Ha $r \geq 0$ és $s, m \geq 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_{n,m,r}^{\geq s}}{n!} x^n = \exp\left(rx + \frac{\exp(mx) - 1}{m}\right) \exp\left(-\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{j!} (mx)^j\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{DA_{n,m,r}^{\geq s}}{n!} x^n = (1 - mx)^{-\frac{r+1}{m}} \exp\left(-\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{j} (mx)^j\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{DL_{n,m,r}^{\geq s}}{n!} x^n$$

$$= (1 - mx)^{-\frac{2r}{m}} \exp\left(\frac{1}{m}\left(\frac{1}{1 - mx} - 1\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{m} \sum_{j=1}^{s-1} (mx)^j\right).$$

Bizonyítás. A bizonyítás során az 5.1 Tétel jelöléseit alkalmazzuk.

Az s-asszociált r-Dowling-számok fogalmából adódóan, ha

$$f_1(n) = 1, \quad f_2(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \leq s-1 \\ m^{n-1}, & \text{ha } n \geq s \end{cases}, \quad g(n) = 1,$$

akkor $h(n) = D_{n,m,r}^{\geq s}$. Ezek exponenciális generátorfüggvénye

$$F_1(x) = \exp(x), \quad F_2(x) = \frac{1}{m}\left(\exp(mx) - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{j!} (mx)^j\right),$$

$$G(x) = \exp(x),$$

amiből az 5.1 Tétel alapján azonnal adódik az állítás.

Hasonlóan $h(n) = DA^{\geq s}_{n,m,r}$, ha

$$f_1(n) = (1|m)^{\overline{n}}, \quad f_2(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \leq s-1 \\ (n-1)!m^{n-1}, & \text{ha } n \geq s \end{cases}, \quad g(n) = 1$$

és

$$F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1|m)^{\overline{n}}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{m}}{n} (-mx)^n = (1-mx)^{-\frac{1}{m}},$$

$$F_2(x) = \frac{1}{m} \left(\ln\left(\frac{1}{1-mx}\right) - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{j} (mx)^j \right), \quad G(x) = \exp(x).$$

Végül $h(n) = DL^{\geq s}_{n,m,r}$, ha

$$f_1(n) = (2|m)^{\overline{n}}, \quad f_2(n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \leq s-1 \\ n!m^{n-1}, & \text{ha } n \geq s \end{cases}, \quad g(n) = 1$$

és

$$F_1(x) = (1-mx)^{-\frac{2}{m}}, \quad F_2(x) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{1-mx} - \sum_{j=0}^{s-1} (mx)^j \right),$$

$$G(x) = \exp(x).$$

□

Megjegyzés. Megemlítjük, hogy az r-kompozíciós formula segítségével az alternatív módon értelmezett s-asszociált r-Dowling-típusú számok sorozatainak exponenciális generátorfüggvényét is meghatározhatjuk az előző bizonyításban látottakhoz hasonlóan.

Az alábbiakban rekurziós összefüggéseket igazolunk az s-asszociált r-Dowling-típusú számokra.

5.6. Tétel. ([23] Theorem 3.2)

Ha $r \geq 0$, $s, m \geq 1$ *és* $n \geq s-1$, *akkor*

$$D^{\geq s}_{n+1,m,r} = rD^{\geq s}_{n,m,r} + \sum_{j=0}^{n-s+1} \binom{n}{j} D^{\geq s}_{j,m,r} m^{n-j},$$

$$\begin{aligned} DA^{\geq s}_{n+1,m,r} &= r\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DA^{\geq s}_{j,m,r} m^{n-j} (n-j)! \\ &+ \sum_{j=0}^{n-s+1} \binom{n}{j} DA^{\geq s}_{j,m,r} m^{n-j} (n-j)!, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DL^{\geq s}_{n+1,m,r} &= 2r\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DL^{\geq s}_{j,m,r} m^{n-j} (n-j)! \\ &+ \sum_{j=0}^{n-s+1} \binom{n}{j} DL^{\geq s}_{j,m,r} m^{n-j} (n-j+1)!. \end{aligned}$$

1. Bizonyítás. Jelöljük $d^{\geq s}_{m,r}(x)$-szel a $\left(D^{\geq s}_{n,m,r}\right)_{n=0}^{\infty}$ sorozat 5.5 Tételben meghatározott exponenciális generátorfüggvényét. Ennek formális deriváltja

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^{\geq s}_{n+1,m,r}}{n!} x^n &= d^{\geq s}_{m,r}(x) \left(r + \exp(mx) - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{(j-1)!} (mx)^{j-1} \right) \\ &= r d^{\geq s}_{m,r}(x) + d^{\geq s}_{m,r}(x) \left(\sum_{j=s-1}^{\infty} \frac{1}{j!} (mx)^j \right) \\ &= r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^{\geq s}_{n,m,r}}{n!} x^n + \sum_{n=s-1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n-s+1} \frac{D^{\geq s}_{j,m,r}}{j!} \frac{1}{(n-j)!} m^{n-j} \right) x^n, \end{aligned}$$

amiből már következik az állítás. □

2. Bizonyítás. Az s-asszociált r-Dowling-számokra vonatkozó formulát kombinatorikus gondolatmenettel is igazolhatjuk.

Az $\{1, \dots, n+r+1\}$ halmaz azon m színes r-Whitney-színezett osztályozásait számoljuk össze, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok legalább s elemet tartalmaznak. Ennek során két esetet különböztetünk meg.

Ha $n+r+1$ kitüntetett elemet tartalmazó osztályban van, akkor először nélküle osztályozzuk az első $n+r$ elemet m színes r-Whitney-színezetten úgy, hogy minden kitüntetett elemet nem tartalmazó osztály legalább s elemű legyen. Ezt követően $(n+r+1)$-et elhelyezhetjük a kitüntetett elemet tartalmazó r darab osztály valamelyikébe, így a lehetőségek száma $rD^{\geq s}_{n,m,r}$.

Ha $n+r+1$ kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályban van, akkor jelöljük j-vel a többi osztályban lévő nem kitüntetett elemek számát ($j = 0, \dots, n-s+1$). Ezt a j elemet $\binom{n}{j}$-féleképpen választhatjuk ki, és $D^{\geq s}_{j,m,r}$ lehetőségünk van arra, hogy a kitüntetett elemekkel együtt r-Whitney-színezetten osztályozzuk őket úgy, hogy a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok elemszáma legalább s legyen. Végül az $(n+r+1)$-et tartalmazó $n-j+1$ elemű osztályban m színnel színezzük az elemeket a legkisebb kivételével. Összegezve az eddigieket, adott j esetén $\binom{n}{j} D^{\geq s}_{j,m,r} m^{n-j}$ lehetőség adódik. $\square$

Az előző eredmény felhasználásával rögzített rendű rekurziós formulákat is megadhatunk az s-asszociált r-Dowling-faktoriálisokra és az s-asszociált r-Dowling–Lah-számokra vonatkozóan.

5.7. Tétel. ([23] Theorem 3.3)

Ha $r \geq 0$, $s, m \geq 1$ és $n \geq s-1$, akkor

$$DA^{\geq s}_{n+1,m,r} = (mn+r)\, DA^{\geq s}_{n,m,r} + (mn|m)^{\underline{s-1}}\, DA^{\geq s}_{n-s+1,m,r}.$$

Ha $r \geq 0$, $s, m \geq 1$ és $n \geq s$, akkor

$$\begin{aligned} DL^{\geq s}_{n+1,m,r} &= (2mn+2r)\, DL^{\geq s}_{n,m,r} + s\,(mn|m)^{\underline{s-1}}\, DL^{\geq s}_{n-s+1,m,r} \\ &\quad - mn\,(mn-m+2r)\, DL^{\geq s}_{n-1,m,r} - (s-1)\,(mn|m)^{\underline{s}}\, DL^{\geq s}_{n-s,m,r}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az 5.6 Tételt kétszer alkalmazva, valamint a faktoriálisok és a binomiális együtthatók tulajdonságait felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & DL^{\geq s}_{n+1,m,r} \\ &= 2r \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DL^{\geq s}_{n-j,m,r} m^j j! + \sum_{j=s-1}^{n} \binom{n}{j} DL^{\geq s}_{n-j,m,r} m^j\,(j+1)! \\ &= 2r DL^{\geq s}_{n,m,r} + s\,(mn|m)^{\underline{s-1}}\, DL^{\geq s}_{n-s+1,m,r} \\ &\quad + 2nr \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} DL^{\geq s}_{n-j,m,r} m^j\,(j-1)! \\ &\quad + n \sum_{j=s}^{n} \binom{n-1}{j-1} DL^{\geq s}_{n-j,m,r} m^j j! + \sum_{j=s}^{n} \binom{n}{j} DL^{\geq s}_{n-j,m,r} m^j j! \\ &= 2r DL^{\geq s}_{n,m,r} + s\,(mn|m)^{\underline{s-1}}\, DL^{\geq s}_{n-s+1,m,r} \\ &\quad + 2mnr \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} DL^{\geq s}_{n-1-j,m,r} m^j j! \\ &\quad + mn \sum_{j=s-1}^{n-1} \binom{n-1}{j} DL^{\geq s}_{n-1-j,m,r} m^j\,(j+1)! \\ &\quad + \sum_{j=s}^{n} (mn|m)^{\underline{j}}\, DL^{\geq s}_{n-j,m,r} \\ &= (mn+2r)\, DL^{\geq s}_{n,m,r} + s\,(mn|m)^{\underline{s-1}}\, DL^{\geq s}_{n-s+1,m,r} \\ &\quad + \sum_{j=s}^{n} (mn|m)^{\underline{j}}\, DL^{\geq s}_{n-j,m,r}. \end{aligned}$$

Ezt követően az előző összefüggésből a következő módon adódik az állítás:

$$
\begin{aligned}
&DL^{\geq s}_{n+1,m,r} - mnDL^{\geq s}_{n,m,r}\\
&= (mn+2r)\, DL^{\geq s}_{n,m,r} + s\,(mn|m)^{\underline{s-1}}\, DL^{\geq s}_{n-s+1,m,r}\\
&\quad + \sum_{j=s}^{n} (mn|m)^{\underline{j}}\, DL^{\geq s}_{n-j,m,r} - mn\,(m\,(n-1)+2r)\, DL^{\geq s}_{n-1,m,r}\\
&\quad - s\,(mn|m)^{\underline{s}}\, DL^{\geq s}_{n-s,m,r} - \sum_{j=s+1}^{n} (mn|m)^{\underline{j}}\, DL^{\geq s}_{n-j,m,r}\\
&= (mn+2r)\, DL^{\geq s}_{n,m,r} + s\,(mn|m)^{\underline{s-1}}\, DL^{\geq s}_{n-s+1,m,r}\\
&\quad - mn\,(m\,(n-1)+2r)\, DL^{\geq s}_{n-1,m,r} - (s-1)\,(mn|m)^{\underline{s}}\, DL^{\geq s}_{n-s,m,r}.
\end{aligned}
$$

□

Az alábbiakban az s-asszociált r-Dowling- és s-asszociált r'-Dowling-típusú számok közötti kapcsolatokat igazoljuk tisztán kombinatorikus gondolatmenettel.

5.8. Tétel. ([23] Theorem 3.4)

Ha $n \geq 0$, $r \geq r' \geq 0$ és $s, m \geq 1$, akkor

$$
D^{\geq s}_{n,m,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} D^{\geq s}_{j,m,r'}\,(r-r')^{n-j}\,,
$$

$$
DA^{\geq s}_{n,m,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DA^{\geq s}_{j,m,r'}\,(r-r'|m)^{\overline{n-j}}\,,
$$

$$
DL^{\geq s}_{n,m,r} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} DL^{\geq s}_{j,m,r'}\,(2r-2r'|m)^{\overline{n-j}}\,.
$$

Bizonyítás. Az $\{1,\dots,n+r\}$ halmaz olyan m színes r-Whitney-színezett osztályozásainak számát határozzuk meg, amelyeknél a kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályok elemszáma legalább s.

Legyen j azon nem kitüntetett elemek száma, amelyek az első r' kitüntetett elem osztályában szerepelnek, vagy kitüntetett elemet nem tartalmazó osztályban vannak ($j = 0, \ldots, n$). Ezeket $\binom{n}{j}$-féleképpen választhatjuk ki, és $D^{\geq s}_{j,m,r'}$ módon osztályozhatjuk őket az $1, \ldots, r'$ kitüntetett elemekkel együtt m színes r'-Whitney-színezetten az előírásoknak megfelelően. Végül a további $n-j$ elem elhelyezésére $(r-r')^{n-j}$ lehetőségünk adódik.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az s-asszociált r-Dowling-faktoriálisok, valamint az s-asszociált r-Dowling–Lah-számok esetében az utolsó lépésben az elemeket növekvő sorrendben szükséges vizsgálni a színezési és elhelyezési lehetőségeik szempontjából. $\square$

Az s-asszociált r-Dowling-típusú számokra vonatkozó Dobiński-típusú formulák jóval összetettebbek, mint azok a 4. fejezetbeli változatok, ahol nincs alsó korlát előírva az elemek számára. Az eredmények bizonyításához a vizsgált számok sorozatainak exponenciális generátorfüggvényét használjuk fel.

5.9. Tétel. ([23] Theorem 3.5)

Ha $n, r \geq 0$ és $s, m \geq 1$, akkor

$$D^{\geq s}_{n,m,r} = e^{-\frac{1}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^k k!} \sum_{*} \frac{n!}{l!} (mk+r)^l \prod_{j=1}^{s-1} \frac{1}{i_j!} \left(-\frac{m^{j-1}}{j!}\right)^{i_j},$$

$$DA^{\geq s}_{n,m,r} = \sum_{*} \frac{n!}{l!} (r+1|m)^{\bar{l}} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{1}{i_j!} \left(-\frac{m^{j-1}}{j}\right)^{i_j},$$

$$DL^{\geq s}_{n,m,r} = e^{-\frac{1}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^k k!} \sum_{*} \frac{n!}{l!} (mk+2r|m)^{\bar{l}} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{1}{i_j!} \left(-m^{j-1}\right)^{i_j},$$

ahol a $*$ szimbólummal jelölt összegzést az összes olyan nemnegatív egészekből álló $(i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}, l)$ rendezett s-esre végezzük el, amelyre teljesül, hogy $i_1 + 2i_2 + \cdots + (s-1)\, i_{s-1} + l = n$.

Bizonyítás. Az állítás az 5.5 Tétel felhasználásával az alábbi módon adódik:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_{n,m,r}^{\geq s}}{n!}x^n$$
$$=\exp(rx)\exp\left(\frac{\exp(mx)}{m}\right)\exp\left(-\frac{1}{m}\right)\prod_{j=1}^{s-1}\exp\left(-\frac{m^{j-1}}{j!}x^j\right)$$
$$=\exp\left(-\frac{1}{m}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp((mk+r)x)}{m^k k!}\prod_{j=1}^{s-1}\exp\left(-\frac{m^{j-1}}{j!}x^j\right)$$
$$=\exp\left(-\frac{1}{m}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(mk+r)^l}{m^k k! l!}x^l\prod_{j=1}^{s-1}\sum_{i_j=0}^{\infty}\frac{1}{i_j!}\left(-\frac{m^{j-1}}{j!}\right)^{i_j}x^{ji_j}$$
$$=\exp\left(-\frac{1}{m}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{m^k k!}\sum_{*}\frac{1}{l!}(mk+r)^l\prod_{j=1}^{s-1}\frac{1}{i_j!}\left(-\frac{m^{j-1}}{j!}\right)^{i_j}x^n.$$

□

Érdekes következménye az eddigieknek, hogy a 2-asszociált r-Dowling-számok megegyeznek az $(r-1)$-Dowling-számokkal. Ez a kapcsolat azonnal látszik az 5.5, 5.6, 5.9, valamint a 4.11, 4.6, 4.10 Tételek összevetéséből is, az alábbiakban azonban egy közvetlen kombinatorikus bizonyítást adunk. Megjegyezzük, hogy speciális esetben, a 2-asszociált r-Bell-számokra ez az eredmény megjelent a [27] cikkben.

5.10. Következmény. ([23] Corollary 3.6)

Ha $n\geq 0$ *és* $r,m\geq 1$, *akkor* $D_{n,m,r}^{\geq 2}=D_{n,m,r-1}$.

Bizonyítás. Az $\{1,\ldots,n+r\}$ halmaz olyan m színes r-Whitney-színezett osztályozásait vizsgáljuk, amelyekben minden kitüntetett elemet nem tartalmazó osztály legalább 2 elemű. Ha töröljük r-et, és az osztályát szétbontjuk egyelemű halmazokra, majd minden nem kitüntetett elem értékét 1-gyel lecsökkentjük, akkor az $\{1,\ldots,n+r-1\}$ halmaz egy $(r-1)$-Whitney-színezett osztályozásához jutunk. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a hozzárendelés bijektív, ami bizonyítja az egyenlőséget. □

Megjegyzés. A fenti következmény $r=0$ esetén is igaz marad abban az értelemben, hogy a 2-asszociált 0-Dowling-számok (-1)-Dowling-számokként viselkednek. Ez az észrevétel érdekes hasonlóságot mutat R. P. Stanley [58] kromatikus polinomokról szóló híres tételével, amely azt mondja ki, hogy ha G egyszerű irányítatlan gráf, akkor az irányított körmentes irányításainak száma $(-1)^{|V(G)|}p_G(-1)$, ahol $p_G(x)$ a G kromatikus polinomját jelöli.

Összefoglaló

Az $\left\{ {n \atop k} \right\}$ másodfajú Stirling-számok és a B_n Bell-számok a leszámláló kombinatorika alapvető fogalmai, amelyek az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz osztályozásainak számát adják meg k darab, illetve tetszőleges számú osztályba. Ha S_n azon permutációit akarjuk összeszámolni, amelyek k darab diszjunkt ciklus szorzatára bomlanak, akkor az $\left[{n \atop k} \right]$ elsőfajú Stirling-számok fogalmához jutunk, míg ha azt szeretnénk tudni, hogy az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz elemeit hányféleképpen osztályozhatjuk k darab rendezett osztályba, akkor az $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ Lah-számokat kapjuk eredményül.

Ezeknek a számoknak számos általánosítása létezik, ezek közül az egyik leginkább ismert és vizsgált az úgynevezett r-általánosítás. Az r-általánosított kombinatorikus számok esetében a vizsgált halmaz elemei között mindig szerepel r darab kitüntetett, amelyeknek különböző osztályokba, ciklusokba, valamint rendezett osztályokba kell kerülnie. Az $\left[{n \atop k} \right]_r$ elsőfajú és az $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$ másodfajú r-Stirling-számok L. Carlitz [8], A. Z. Broder [6] és R. Merris [38] nevéhez köthetők, az $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$ r-Lah-számokat pedig Nyul G. és Rácz G. [47] definiálták. A másodfajú r-Stirling-számok összegeként adódó $B_{n,r}$ r-Bell-számokat L. Carlitz [8], valamint Mező I. [40] értelmezték, utóbbi szerző bevezette a $B_{n,r}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_r x^k$ r-Bell-polinomokat is. Ennek mintájára az $L_{n,r}$ összegzett r-Lah-számokat és az $L_{n,r}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r x^k$ r-Lah-polinomokat Nyul G. és Rácz G. [48] definiálta.

A 2. fejezetben ezeket az r-általánosított kombinatorikus számokat mutatjuk be, továbbá a másodfajú r-Stirling-számok új kombinatorikus interpretációjaként megadjuk a kapcsolatukat a Ramsey-elméletben fontos szereppel bíró kombinatorikus alterekkel. Bijektív megfeleltetés segítségével igazoljuk, hogy egy r elemű halmaz feletti k dimenziós kombinatorikus alterek száma a halmaz elemeiből képzett rendezett n-esek körében $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$.

A Stirling-számok egy másik általánosítását, a Whitney-számokat az m-edrendű véges csoportokhoz kapcsolódóan hálóelméleti megközelítésből T. A. Dowling [17] értelmezte. A $w_m(n,k)$-val, illetve $W_m(n,k)$-val jelölt első- és másodfajú Whitney-számok a triviális csoport esetén adják vissza a Stirling-számokat. Később Mező I. [39] az r-Stirling-számok és a Whitney-számok közös általánosításaként bevezette a $w_{m,r}(n,k)$ elsőfajú és $W_{m,r}(n,k)$ másodfajú r-Whitney-számok fogalmát, amelyek segítségével G.-S. Cheon és J.-H. Jung [9] definiálta a $WL_{m,r}(n,k)$ r-Whitney–Lah-számokat. Az r-Whitney-típusú számokat számos cikkben vizsgálták, tisztán kombinatorikus jelentésükkel kapcsolatban azonban csak részleges eredményekkel találkozhatunk a szakirodalomban.

A 3. fejezetben az r-Whitney- és az r-Whitney–Lah-számokkal foglalkozunk. Először ismertetjük ezen számok új, bizonyos színezési szabályokat használó kombinatorikus interpretációit, amelyek speciális esetben illeszkednek a Stirling- és Lah-számok kombinatorikus értelmezéséhez. Ezt követően ezeket használjuk definícióként, ami lehetővé teszi, hogy számos tulajdonságukat tisztán kombinatorikus gondolatmenettel igazoljuk. Többek között bizonyítunk egy polinomos azonosságot, többféle rekurziós formulát, egy binomiális konvolúciós összefüggést, a szimmetrikus polinomokkal történő előállításukat, az általánosított ortogonalitásukról szóló eredményt, továbbá a másodfajú r-Whitney- és az r-Whitney–Lah-számok esetében a rájuk vonatkozó explicit formulát is. Mindezek mellett a lehető legáltalánosabb formában levezetünk egy Spivey-típusú formulát, amely következményeként megadja az r-Whitney- és az s-Whitney-típusú számok közötti kapcsolatot, valamint egy további rekurziós összefüggést is eredményez. Végül megmutatjuk, hogy az r-Whitney–Lah-számok sorozata rögzített n esetén log-konkáv, vizsgáljuk az első- és másodfajú r-Whitney-, valamint az r-Whitney–Lah-transzformációkat, majd igazoljuk, hogy ezek megőrzik a sorozatok log-konvexitását.

A másodfajú Whitney-számok összegeként M. Benoumhani [2], [3] értelmezte a $D_{n,m}$ Dowling-számokat, valamint hozzájuk kapcsolódóan a $D_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n} W_m(n,k)\, x^k$ Dowling-polinomok fogalmát is bevezette. Az r-Bell-polinomok és a Dowling-polinomok közös általánosításaként adódó $D_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)\, x^k$ r-Dowling-polinomokat pedig G.-S. Cheon és J.-H. Jung [9] definiálta.

A 4. fejezetben az r-Lah-polinomok Dowling-típusú általánosításaként bevezetjük a $DL_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, x^k$ r-Dowling–Lah-polinomok fogalmát, amelyeket ezt követően az r-Dowling-polinomokkal párhuzamosan vizsgálunk. A kombinatorikus interpretációjuk ismertetését követően a lehető legáltalánosabb formában megadjuk a rájuk vonatkozó Spivey-típusú formulát, majd bemutatjuk annak néhány fontos következményét, az r-Dowling- és s-Dowling-típusú polinomok közötti kapcsolatot, egy rekurziós és egy Carlitz-típusú formulát. Az r-Dowling–Lah-polinomok esetében igazolunk egy másodrendű rekurziós összefüggést, továbbá mindkét polinomra vonatkozóan megadjuk az addíciós és Dobiński-típusú formulákat, valamint meghatározzuk a sorozataik exponenciális generátorfüggvényét. Végül bebizonyítjuk, hogy az r-Dowling–Lah-polinomok gyökei, az r-Dowling-polinomok gyökeihez hasonlóan, valósak, egyszeresek és nempozitívak, továbbá hogy a $(D_{n,m,r}(1))_{n=0}^{\infty}$ és a $(DL_{n,m,r}(1))_{n=0}^{\infty}$ sorozatok log-konvexek.

Ha az osztályozás során az osztályok elemszámára egy s alsó korlátot adunk, akkor a $B_n^{\geq s}$ s-asszociált Bell-számok fogalmához jutunk. Habár ezek a számok több cikkben is megtalálhatóak, a $B_{n,r}^{\geq s}$ s-asszociált r-Bell-számokkal egyedül F. T. Howard [27] foglalkozott, aki kizárólag az $s = 2$ esetet vizsgálta. Az asszociált Bell-számok permutációs változataként adódó $A_n^{\geq s}$ s-asszociált faktoriálisokat általánosított szubfaktoriálisoknak nevezik a szakirodalomban. Ezek egyfajta r-általánosítását a közelmúltban a [62] és [43] cikkekben vizsgálták. Hasonlóan értelmezhetjük az $L_n^{\geq s}$ s-asszociált összegzett Lah-, valamint az $L_{n,r}^{\geq s}$ s-asszociált összegzett r-Lah-számokat is, ezekkel azonban eddig még nem foglalkoztak.

Az 5. fejezetben az s-asszociált Bell-típusú számok r-Dowling-típusú általánosításával foglalkozunk. Először az r-kompozíciós formulát igazoljuk, amelynek segítségével egyszerűen meghatározhatjuk a vizsgált számok, azaz a $D_{n,m,r}^{\geq s}$ s-asszociált r-Dowling-számok, a $DA_{n,m,r}^{\geq s}$ s-asszociált r-Dowling-faktoriálisok, valamint a $DL_{n,m,r}^{\geq s}$ s-asszociált r-Dowling–Lah-számok sorozatának exponenciális generátorfüggvényét. Ezeket, valamint a kombinatorikus definíciókat felhasználva különböző rekurziós összefüggéseket és egy Dobiński-típusú formulát is bizonyítunk, továbbá megadjuk a kapcsolatot az s-asszociált r-Dowling-típusú és az s-asszociált r'-Dowling-típusú számok között. Végül megmutatjuk, hogy a 2-asszociált r-Dowling-számok megegyeznek az $(r-1)$-Dowling-számokkal.

Summary

Stirling numbers of the second kind $\left\{{n \atop k}\right\}$ and Bell numbers B_n are fundamental in enumerative combinatorics. They give the number of partitions of the set $\{1,\ldots,n\}$ into k or an arbitrary number of nonempty subsets, respectively. If we want to count the number of permutations in S_n which are the product of k disjoint cycles, then we arrive at the notion of Stirling numbers of the first kind $\left[{n \atop k}\right]$, while if we are interested in the number of partitions of $\{1,\ldots,n\}$ into k nonempty ordered subsets, then we obtain Lah numbers $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor$.

These numbers have several generalizations. One of the most known and studied among them is the so-called r-generalization. In the case of r-generalized combinatorial numbers, there exist r distinguished elements, which have to belong to distinct blocks, cycles or ordered blocks. The r-Stirling numbers of the first kind $\left[{n \atop k}\right]_r$ and the r-Stirling numbers of the second kind $\left\{{n \atop k}\right\}_r$ were defined by L. Carlitz [8], A. Z. Broder [6] and R. Merris [38], while the r-Lah numbers $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r$ by G. Nyul and G. Rácz [47]. The r-Bell numbers $B_{n,r}$, which are the sum of r-Stirling numbers of the second kind, were introduced by L. Carlitz [8] and I. Mező [40]. The latter author also defined the r-Bell polynomials $B_{n,r}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\}_r x^k$. Similarly, the summed r-Lah numbers $L_{n,r}$ and r-Lah polynomials $L_{n,r}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor_r x^k$ are due to G. Nyul and G. Rácz [48].

In Section 2, we discuss these r-generalized combinatorial numbers. As a new combinatorial interpretation of r-Stirling numbers of the second kind, we present their connection with combinatorial subspaces, which play a fundamental role in Ramsey theory. With the help of a bijective correspondence, we prove that the number of k-dimensional subspaces among n-tuples of an r-element set is $\left\{{n \atop k}\right\}_r$.

Another generalizations of Stirling numbers are Whitney numbers, which were defined in connection with finite groups of order m using lattice theory by T. A. Dowling [17]. Whitney numbers of the first kind $w_m(n,k)$ and Whitney numbers of the second kind $W_m(n,k)$ give back Stirling numbers for the trivial group. Later, I. Mező [39] introduced r-Whitney numbers of the first kind $w_{m,r}(n,k)$ and r-Whitney numbers of the second kind $W_{m,r}(n,k)$ as a common generalization of r-Stirling numbers and Whitney numbers, with the help of which, G.-S. Cheon and J.-H. Jung [9] defined the r-Whitney–Lah numbers $WL_{m,r}(n,k)$. The r-Whitney-type numbers were studied in numerous papers, however only partial results can be found in the literature regarding their purely combinatorial meaning.

In Section 3, we study r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers. First, we give their new combinatorial interpretations with the help of certain colouring rules, which correspond better with the combinatorial meaning of Stirling and Lah numbers. We use them as definitions, which enable us to derive some of their properties in a purely combinatorial manner. Among others, we prove a polynomial identity, recurrence relations, a binomial convolutional formula, their expression with symmetric polynomials, their generalized orthogonality, and explicit formulas for r-Whitney numbers of the second kind and r-Whitney–Lah numbers, as well. In addition, we present a Spivey-type formula in its most general form, which gives a connection between r-Whitney- and s-Whitney-type numbers, and a further recurrence relation as consequences. Finally, we show that the finite sequence of r-Whitney–Lah numbers is log-concave for a fixed n, we investigate r-Whitney transformations of the first and second kinds, along with the r-Whitney–Lah transformation, and then prove that they preserve log-convexity of sequences.

M. Benoumhani [2], [3] introduced the Dowling numbers $D_{n,m}$ as the sums of Whitney numbers of the second kind, and the Dowling polynomials $D_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n} W_m(n,k)\, x^k$ in connection with them. The definition of r-Dowling polynomials $D_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)\, x^k$, as the common generalization of r-Bell and Dowling polynomials, are due to G.-S. Cheon and J.-H. Jung [9].

In Section 4, we define the r-Dowling–Lah polynomials $DL_{n,m,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} WL_{m,r}(n,k)\, x^k$ as the Dowling-type generalization of r-Lah polynomials, and study them together with r-Dowling polynomials. After describing their combinatorial interpretation, we give their Spivey-type formula in its most general form, and show some important consequences, including the connection between r-Dowling- and s-Dowling-type polynomials, a recurrence relation and a Carlitz-type formula. We prove a second-order recurrence for r-Dowling–Lah polynomials, addition and Dobińnski-type formulas for both polynomials, and determine the exponential generating functions of their sequences. Finally, we prove that the roots of r-Dowling–Lah polynomials are simple, real and nonpositive, similarly to those of r-Dowling polynomials, and show that the sequences $(D_{n,m,r}(1))_{n=0}^{\infty}$ and $(DL_{n,m,r}(1))_{n=0}^{\infty}$ are log-convex.

If a lower bound s is prescribed for the cardinality of the blocks, then we get to the notion of s-associated Bell numbers $B_n^{\geq s}$. Although, these numbers are discussed in several papers, the s-associated r-Bell numbers $B_{n,r}^{\geq s}$ occur only in the article of F. T. Howard [27], but simply for the case $s = 2$. The s-associated factorials $A_n^{\geq s}$ defined as the permutational variant of associated Bell numbers are called generalized subfactorials in the literature. A certain r-generalization of them was studied recently in [62] and [43]. The s-associated summed Lah numbers $L_n^{\geq s}$ and s-associated summed r-Lah numbers $L_{n,r}^{\geq s}$ can be defined analogously, but were not studied yet.

The subjects of Section 5 are the r-Dowling-type generalizations of s-associated Bell-type numbers. First, we prove the so-called r-compositional formula, a useful tool that allows us to derive exponential generating functions of the sequences of s-associated r-Dowling numbers $D_{n,m,r}^{\geq s}$, s-associated r-Dowling factorials $DA_{n,m,r}^{\geq s}$ and s-associated

r-Dowling–Lah numbers $DL^{\geq s}_{n,m,r}$. Using these and the combinatorial definitions, we show various recurrence relations and a Dobiński-type formula, and give the connection between s-associated r-Dowling-type and s-associated r'-Dowling-type numbers. Finally, we prove that the 2-associated r-Dowling numbers coincide with $(r-1)$-Dowling numbers.

Irodalomjegyzék

[1] H. Belbachir and I. E. Bousbaa, *Translated Whitney and r-Whitney numbers: a combinatorial approach*, J. Integer Seq. **16** (2013), Article 13.8.6.

[2] M. Benoumhani, *On Whitney numbers of Dowling lattices*, Discrete Math. **159** (1996), 13–33.

[3] M. Benoumhani, *On some numbers related to Whitney numbers of Dowling lattices*, Adv. in Appl. Math. **19** (1997), 106–116.

[4] M. Benoumhani, *Log-concavity of Whitney numbers of Dowling lattices*, Adv. in Appl. Math. **22** (1999), 186–189.

[5] M. Bóna and I. Mező, *Real zeros and partitions without singleton blocks*, European J. Combin. **51** (2016), 500–510.

[6] A. Z. Broder, *The r-Stirling numbers*, Discrete Math. **49** (1984), 241–259.

[7] T. C. Brown, Affine and combinatorial binary m-spaces, *J. Combin. Theory Ser. A* **39** (1985), 25–34.

[8] L. Carlitz, *Weighted Stirling numbers of the first and second kind I*, Fibonacci Quart. **18** (1980), 147–162.

[9] G.-S. Cheon and J.-H. Jung, *r-Whitney numbers of Dowling lattices*, Discrete Math. **312** (2012), 2337–2348.

[10] R. B. Corcino and C. B. Corcino, *On the maximum of generalized Stirling numbers*, Util. Math. **86** (2011), 241–256.

[11] R. B. Corcino and C. B. Corcino, *On generalized Bell polynomials*, Discrete Dyn. Nat. Soc. (2011), Article 623456.

[12] R. B. Corcino, C. B. Corcino and R. Aldema, *Asymptotic normality of the (r, β)-Stirling numbers*, Ars Combin. **81** (2006), 81–96.

[13] C. B. Corcino, R. B. Corcino, I. Mező and J. L. Ramírez, *Some polynomials associated with the r-Whitney numbers*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **128** (2018), Article 27.

[14] E. Damiani, O. D'Antona and F. Regonati, *Whitney numbers of some geometric lattices*, J. Combinatorial Theory Ser. A **65** (1994), 11–25.

[15] H. Davenport and G. Pólya, *On the product of two power series*, Canad. J. Math. **1** (1949), 1–5.

[16] G. Dobiński, *Summirung der Reihe* $\sum \frac{n^m}{n!}$ *für* $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, Arch. Math. Phys. **61** (1877), 333–336.

[17] T. A. Dowling, *A class of geometric lattices based on finite groups*, J. Combinatorial Theory Ser. B **14** (1973), 61–86; erratum, **15** (1973), 211.

[18] E. A. Enneking and J. C. Ahuja, *Generalized Bell numbers*, Fibonacci Quart. **14** (1976), 67–73.

[19] E. Gyimesi, *The r-Dowling–Lah polynomials*, közlésre benyújtva.

[20] E. Gyimesi and G. Nyul, *A note on combinatorial subspaces and r-Stirling numbers*, Utilitas Math. **105** (2017), 137–139.

[21] E. Gyimesi and G. Nyul, *A comprehensive study of r-Dowling polynomials*, Aequationes Math. **92** (2018), 515–527.

[22] E. Gyimesi and G. Nyul, *New combinatorial interpretations of r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers*, Discrete Appl. Math. **255** (2019), 222–233.

[23] E. Gyimesi and G. Nyul, *Associated r-Dowling numbers and some relatives*, közlésre benyújtva.

[24] A. W. Hales and R. I. Jewett, Regularity and positional games, *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963), 222–229.

[25] F. T. Howard, *Numbers generated by the reciprocal of* $e^x - x - 1$, Math. Comp. **31** (1977), 581–598.

[26] F. T. Howard, *Associated Stirling numbers*, Fibonacci Quart. **18** (1980), 303–315.

[27] F. T. Howard, *Weighted associated Stirling numbers*, Fibonacci Quart. **22** (1984), 156–165.

[28] L. C. Hsu and P. J.-S. Shiue, *A unified approach to generalized Stirling numbers*, Adv. in Appl. Math. **20** (1988), 366–384.

[29] Zs. Kereskényi-Balogh and G. Nyul, *Stirling numbers of the second kind and Bell numbers for graphs*, Australas. J. Combin. **58** (2014), 264–274.

[30] I. Lah, *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*, Bol. Inst. Actuár. Port. **9** (1954), 7–15.

[31] I. Lah, *Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik*, Mitteilungsbl. Math. Statist. **7** (1955), 203–212.

[32] L. L. Liu, *Linear transformations preserving log-convexity*, Ars Combin. **100** (2011), 473–483.

[33] L. L. Liu and Y. Wang, *On the log-convexity of combinatorial sequences*, Adv. in Appl. Math. **39** (2007), 453–476.

[34] M. M. Mangontarum, A. P. Macodi-Ringia and N. S. Abdulcarim, *The translated Dowling polynomials and numbers*, Int. Scholarly Res. Not. (2014), Article 678408.

[35] T. Mansour, J. L. Ramírez and M. Shattuck, *A generalization of the* r*-Whitney numbers of the second kind*, J. Comb. **8** (2017), 29–55.

[36] T. Mansour and M. Schork, Commutation Relations, Normal Ordering, and Stirling Numbers, CRC Press, 2016.

[37] M. Merca, *A note on the r-Whitney numbers of Dowling lattices*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **351** (2013), 649–655.

[38] R. Merris, *The p-Stirling numbers*, Turkish J. Math. **24** (2000), 379–399.

[39] I. Mező, *A new formula for the Bernoulli polynomials*, Results Math. **58** (2010), 329–335.

[40] I. Mező, *The r-Bell numbers*, J. Integer Seq. **14** (2011), Article 11.1.1.

[41] I. Mező, *A kind of Eulerian numbers connected to Whitney numbers of Dowling lattices*, Discrete Math. **328** (2014), 88–95.

[42] I. Mező and J. L. Ramírez, *The linear algebra of the r-Whitney matrices*, Integral Transforms Spec. Funct. **26** (2015), 213–225.

[43] I. Mező, J. L. Ramírez and C.-Y. Wang, *On generalized derangements and some orthogonal polynomials*, Integers **19** (2019), Article A6.

[44] M. Mihoubi and M. Rahmani, *The partial r-Bell polynomials*, Afr. Mat. **28** (2017), 1167–1183.

[45] V. H. Moll, J. L. Ramírez and D. Villamizar, *Combinatorial and arithmetical properties of the restricted and associated Bell and factorial numbers*, J. Comb. **9** (2018), 693–720.

[46] N. Nielsen, Traité Élémentaire des Nombres de Bernoulli, Gauthier-Villars, 1923.

[47] G. Nyul and G. Rácz, *The r-Lah numbers*, Discrete Math. **338** (2015), 1660–1666.

[48] G. Nyul and G. Rácz, *Sums of r-Lah numbers and r-Lah polynomials*, közlésre benyújtva.

[49] G. Nyul and G. Rácz, *Matchings in complete bipartite graphs and the r-Lah numbers*, publikálás alatt.

[50] G. Pólya and G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis, Volume I, Springer-Verlag, 1972.

[51] G. Rácz, *On the magnitude of the roots of some well-known enumerative polynomials*, Acta Math. Hungar., DOI: 10.1007/s10474-019-00925-6.

[52] M. Rahmani, *Some results on Whitney numbers of Dowling lattices*, Arab J. Math. Sci. **20** (2014), 11–27.

[53] J. L. Ramírez and M. Shattuck, *Generalized r-Whitney numbers of the first kind*, Ann. Math. Inform. **46** (2016), 175–193.

[54] J. L. Ramírez and M. Shattuck, *A (p, q)-analogue of the r-Whitney-Lah numbers*, J. Integer Seq. **19** (2016), Article 16.5.6.

[55] J. B. Remmel and M. L. Wachs, *Rook theory, generalized Stirling numbers and (p, q)-analogues*, Electron. J. Combin. **11/1** (2004), Article R84.

[56] A. Ruciński and B. Voigt, *A local limit theorem for generalized Stirling numbers*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **35** (1990), 161–172.

[57] M. Z. Spivey, *A generalized recurrence for Bell numbers*, J. Integer Seq. **11** (2008), Article 08.2.5.

[58] R. P. Stanley, *Acyclic orientations of graphs*, Discrete Math. **5** (1973), 171–178.

[59] J. R. Stonesifer, *Logarithmic concavity for a class of geometric lattices*, J. Combinatorial Theory Ser. A **18** (1975), 216–218.

[60] B. Voigt, *A common generalization of binomial coefficients, Stirling numbers and Gaussian coefficients*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Suppl. No. 3 (1984), 339–359.

[61] D. G. L. Wang, *On colored set partitions of type B_n*, Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), 1372–1381.

[62] C. Wang, P. Miska and I. Mező, *The r-derangement numbers*, Discrete Math. **340** (2017), 1681–1692.

Publikációs lista

1. E. Gyimesi and G. Nyul, *A note on Golomb's method and the continued fraction method for Egyptian fractions*, Ann. Math. Inform. **42** (2013), 129–134.

2. E. Gyimesi and G. Nyul, *A note on combinatorial subspaces and r-Stirling numbers*, Utilitas Math. **105** (2017), 137–139.

3. E. Gyimesi and G. Nyul, *A comprehensive study of r-Dowling polynomials*, Aequationes Math. **92** (2018), 515–527.

4. E. Gyimesi and G. Nyul, *New combinatorial interpretations of r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers*, Discrete Appl. Math. **255** (2019), 222–233.

5. E. Gyimesi, *The r-Dowling–Lah polynomials*, közlésre benyújtva.

6. E. Gyimesi and G. Nyul, *Associated r-Dowling numbers and some relatives*, közlésre benyújtva.

Előadáslista

1. *Racionális számok előállítása egységtörtek összegeként*, Matematika és Informatika Didaktikai Konferencia, 2014. január 24–26., Eger.

2. *Log-convexity of combinatorial sequences*, International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, 2014. március 27–30., Malenovice (Csehország).

3. *Kombinatorikus sorozatok log-konvexitása*, Komáromi Számelméleti és Kriptográfiai Napok, 2014. május 24., Komárom (Szlovákia).

4. *A new combinatorial interpretation of r-Whitney numbers*, 5th Polish Combinatorial Conference, 2014. szeptember 22–26., Będlewo (Lengyelország).

5. *A new combinatorial interpretation of r-Whitney and r-Whitney–Lah numbers*, 33. Kolloquium über Kombinatorik, 2014. november 7–8., Ilmenau (Németország).

6. *Recent results on r-Whitney numbers*, International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics, 2015. április 23–26., Kočovce (Szlovákia).

7. *Combinatorial study of r-Whitney and r-Dowling numbers*, 8th Slovenian Conference on Graph Theory, 2015. június 21–27., Kranjska Gora (Szlovénia).

8. *On properties of the r-Dowling polynomials*, 29th Journées Arithmétiques, 2015. július 6–10., Debrecen.

9. *The r-Dowling numbers and polynomials (poszter)*, 2nd Algorithmic and Enumerative Combinatorics Summer School, 2015. július 27–31., Hagenberg (Ausztria).

10. *The r-Dowling and r-Dowling–Lah polynomials*, 27th 3in1 Workshop on Graph Theory and Combinatorics, 2018. november 21–24., Stryszawa (Lengyelország).