DE TTK

1949

A GEOMETRIAI TÉRSZEMLÉLET SZÁMÍTÓGÉPPEL TÁMOGATOTT FEJLESZTÉSE A MŰSZAKI FELSŐOKTATÁSBAN

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: KATONA JÁNOS

Témavezető: VÁSÁRHELYI ÉVA

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2012

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2012. november 5.

…………………………
jelölt

Tanúsítom, hogy Katona János doktorjelölt 2006-2012-ben a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika-didaktika programja keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2012. november

………………………
témavezető

A GEOMETRIAI TÉRSZEMLÉLET SZÁMÍTÓGÉPPEL TÁMOGATOTT FEJLESZTÉSE A MŰSZAKI FELSŐOKTATÁSBAN

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
matematika és számítástudományok tudományágban

Írta: Katona János okleveles matematika-fizika-számítástechnika szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem Matematika és Számítástudományok Doktori Iskolája (matematika-didaktika programja) keretében

Témavezető: Dr. Vásárhelyi Éva

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Maksa Gyula	....
tagok:	Dr. Hortobágyi István	....
	Dr. Bácsó Sándor	....

A doktori szigorlat időpontja: 2011. november 10.

Az értekezés bírálói:

Dr.	....
Dr.	....
Dr.	....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr.	....
tagok:	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

Az értekezés védésének időpontja: 20… . ……………… … .

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Vásárhelyi Évának és szerzőtársaimnak, Bölcskei Attilának, Hídvégi Imrének, néhai Hídvéginé Miklós Katalinnak, Molnár Emilnek, Nagy Gyulának, Prok Istvánnak és Szirmai Jenőnek a segítségét, valamint az ELTE TTK matematika tanárszakos, valamint a BMGE GK és a SZIE YMÉK mérnökjelölt hallgatóinak a türelmét és megértését.

Tartalomjegyzék

A geometriai térszemlélet számítógéppel támogatott fejlesztése a műszaki felsőoktatásban

„Több száz szakma és hivatás műveléséhez elengedhetetlen képességről van szó..." (Séra, Kárpáti & Gulyás, 2002)

1. A témaválasztás indoklása

A következőkben látni fogjuk, hogy a legtöbb mérnök számára kiemelten fontos a jó térszemlélet. Több tanulmány és a saját tapasztalatom is utal arra, hogy a felsőoktatásba bekerülő hallgatók térszemlélete nem mindig kielégítő. Szerencsére a térszemlélet fejleszthető. Ennek hagyományos eszközei viszont revízióra szorulnak többek között a kompetencia alapú oktatás terjedésével, a felsőoktatás tömegesedésével és a XXI. század felgyorsult tempójával összefüggésben. Kutatásom témájául ezért választottam újszerű, vagy újszerűen összekapcsolt didaktikai módszerek és eszközök kidolgozását, vizsgálatát.

1.1. Sok szakmában nagyon fontos a jó térszemlélet

A legtöbb mérnök számára alapvető fontosságú a jó térszemlélet. Például az általam legjobban ismert építész szakmacsoportokban alapvető kompetencia, hogy a (papír jellegéből adódóan) kétdimenziós tervrajzok, vetületek, metszetek, nézetek; valamint a szintén 2D fotók és videófelvételek segítségével a hallgatók el tudják képzelni a háromdimenziós épületeket, épületelemeket. A rekonstrukcióval ellentétes kompetencia – a vetületek, metszetek készítése – is elvárás: a térbeli objektumokról elegendő számú nézetben elegendő számú méretet megadni ahhoz, hogy a modell a terv alapján egyértelműen visszaállítható legyen.

Az építész által az engedélyező szerveknek beadott tervdokumentációk és a közös munka során megosztott tervek legtöbbje papír alapú, tehát szükségképpen kétdimenziós. Az építésznek ezekből kell gondolatban felépítenie a háromdimenziós objektumot. Másrészt az építésznek a meglevő objektumokat (félkész vagy átépítendő épületeket) papíron kell dokumentálnia, illetve az általa megálmodott építményekről alaprajzokat, metszeteket, homlokzati nézeteket kell előállítania.

Ugyanakkor az épületek megrendelőjétől nem várható el, hogy alaprajz alapján képzelje el a leendő épületet, tehát valamiféle háromdimenziós modellre is szükség van. A többnyire gipszből, fából vagy kartonpapírból készült modelleket egyre inkább felváltják a számítógépes háromdimenziós modellek. Ez némileg ellentmondás, mert a hétköznapi számítógépek megjelenítője sík, tehát szükségképpen kétdimenziós, de a perspektíva, a mozgás, az árnyékolás vagy még inkább ezek együttesen megfelelő térélményt szoktak nyújtani.

Megállapíthatjuk tehát, hogy egy építésznek gondolatban is és a gyakorlatban is *folyamatosan oda-vissza kell konvertálnia a síkbeli dokumentáció és a valóságos világ 3D objektumai között*.

A fent leírtak természetesen igazak a legtöbb mérnök esetében: a gépészmérnök és a mechatronikai mérnök munkadarabjai, a terméktervező által megálmodott termékek, a lakberendező által tervezett szobabelsők mind két dimenzióban dokumentált 3D modellek. A villamosmérnöknek sem elegendő a kapcsolási rajzzal foglalkozni, mert a nyomtatott áramköri lapon elhelyezkedő „vezetékek” nem keresztezhetik egymást, illetve az autók, gépek, épületek belsejében futó vezetékek megfelelő vonalvezetéséről, illetőleg a gyengeáramú és az erősáramú objektumok szigorú elkülönítéséről is gondoskodnia kell.

Az orvosok számára is elengedhetetlen a jó térszemlélet, hogy lássák maguk előtt az emberi test belső szerveinek elhelyezkedését. Gondoljunk csak a szívre, amihez a szívsebész csak a bordák szétfűrészelése árán férhet hozzá. A műtétet végző orvosnak nagy segítségére lehet egy röntgen- vagy ultrahangfelvétel, amely legtöbbször csak kétdimenziós. Az orvosnak egy metszetből, vagy metszetek sorozatából kell elképzelnie a valós háromdimenziós valóságot.

A kiváló térszemlélet jól jön a hétköznapokban is: tájékozódás térkép alapján; navigáció az országúton vagy a természetben; eligazodás egy többszintes bevásárlóközpontban; egy szoba berendezése; ajándékok dobozba csomagolása; gépkocsi csomagtartójának telepakolása, csomagoláshoz szükséges fólia vagy papír mérete; a festéshez szükséges anyagmennyiség kiszámolása, stb.

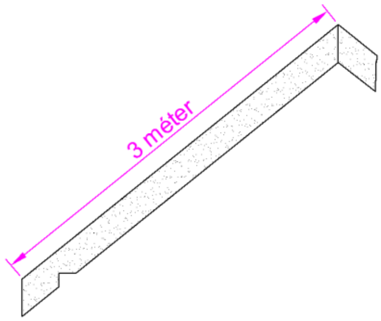
Számunkra, tanárok számára ezek annyiban érdekesek, hogy ha az óráinkat gyakorlatiasabbá szeretnénk tenni, vagy a hallgatók érdeklődését szeretnénk felkelteni, akkor ezekből a témakörökből bőségesen tudunk példákat meríteni.

1.2. A középiskolások térszemlélete általában nem kielégítő

10 éve főállásban tanítok a műszaki felsőoktatásban. Azt tapasztalom, hogy a frissen érettségizett diákok térszemlélete nem mindig kielégítő. Ezt a tényt jómagam és kollégáim mérései (vö. 5.5.1.3), valamint magyar és külföldi tanulmányok is megerősítik. (Nagy-Kondor, 2007) (Güven & Kosa, 2008) (Clements & Samara, 2011)

A rossz térszemlélet a hallgatók tanulmányai során és később a gyakorlati életben is számtalan problémát, félreértést indukál. Ezek közül most jónéhányat megemlítek:

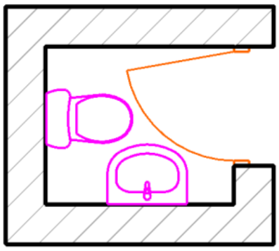
- Sok hallgató szerint egy ferde körhenger palástja paralelogramma.
- Vannak, akik szerint egy kockát nem lehet hatszögben, pláne nem lehet szabályos hatszögben metszeni.
- Vannak akik szerint egy trapéz alapú egyenes hasáb (pl. egy épület egyik helyisége) felmérésekor nem elég a négy oldalhossz és a magasság lemérése. (Gyakorlatilag azt állítják, hogy 4 oldalból nem lehet trapézt szerkeszteni.)
- Néhány hallgató úgy gondolja, hogy ha egy kör merőleges vetülete általában ellipszis, akkor egy ellipszis merőleges vetülete általában egy teljesen szabálytalan alakzat lesz, de kör semmiképpen sem.
- Vannak, akik szerint az alábbi ábrán látható szarufát egy 3 méter hosszú rönkfából ki lehet nyerni.



1. ábra

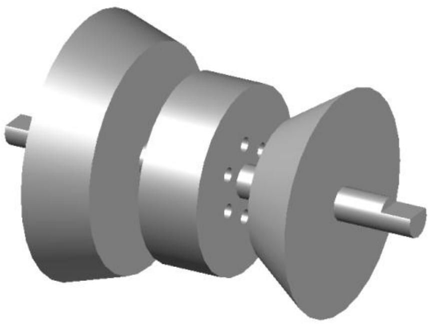
- Sokan nem értik, hogy miért kell ugyanabból az ajtótípusból és méretből kétfélét – úgynevezett jobbosat és balosat – gyártani. Vannak akik szerint viszont négyféle ajtólap kell, merthogy egy ajtó nyílhat kifelé és befelé, és mindkét esetben jobbra vagy balra.
- Sokan a gyakorlatból tudják, hogy létezik jobbos és egy balos ajtó, viszont nem tudják mi a feltétele annak, hogy ugyanaz a kilincs- és zárszerkezet a jobbos és balos ajtóhoz is megfelelő legyen.
- Sokan azt gondolják, hogy kétszárnyú szekrényajtó csak egyféle létezik (merthogy a szekrényajtók mindig csak kifelé nyílnak), nem veszik figyelembe, hogy nem mindegy a jobb és a bal szárny nyitási sorrendje.
- Néhányan egy téglalap alaprajzra olyan sátortetőt szeretnének illeszteni, amelynek mind a négy tetősíkja a vízszintessel ugyanakkora szöget zár be.

- Néhány hallgató úgy gondolja, hogy az alábbi ábrán látható mosdóhelyiség jó elrendezésű, pedig helyiségbe belépő személy nem tudja az ajtót becsukni maga után.



2. ábra

- Sokaknak nem világos, hogy egy rámpán az autónak az első és a hátsó lökhárítója, valamint a két kerék közötti küszöbrész is fenn tud akadni.
- Vannak, akik szerint egy négy lécből négy szög beütésével összeállított keret stabil.
- Sok hallgató szerint egy téglatesten álló egyenes körhengert (például egy asztallapra helyezett poharat) úgy tudjuk egy 90°-os elforgatással az asztalra fektetni, ha a forgatás tengelye vízszintes, és átmegy a henger súlypontján. Ennél is rosszabb, amikor tengelynek egy függőleges egyenest, a henger szimmetriatengelyét választják.
- Néhányan azt állítják, hogy az alábbi tengelyt (egy hagyományos esztergagéppel) egyetlenegy munkadarabból le lehet gyártani – a furatok elhelyezésére nem gondolnak.



3. ábra

A hallgatók nem kielégítő térszemlélete véleményem szerint az alábbiakra 3 fő okra vezethető vissza.

A Nemzeti Alaptanterv (a NAT) abból indul ki, hogy a térgeometria anyag teljes egészében a síkgeometriára épül, ezért addig nem is érdemes hangsúlyosan térszemléletet fejleszteni, ameddig a síkgeometria részt igen részletesen meg nem alapoztuk. A síkgeometria tanításával viszont elhasználjuk a geometriára fordítható szűkös óraszám nagy részét, és a térgeometriára már nem jut elegendő idő.*

Ez a szemlélet nem csak az én véleményem szerint helytelen: matematikából az időben egymástól elválasztott sík- és térgeometria-tanítás nem lehet jó hatásfokú (Kárteszi, 1972), (Dienes, 1999), (Clements & Samara, 2011).

A másik és a harmadik ok ennél sokkal általánosabb, a természettudományos oktatás és a tanulói attitűdök változásával kapcsolatos. (Radnóti, 2007), (Somfai, 2002)

1.3. A térszemlélet fejleszthető

Adott tehát egy helyzet, hogy a diákjaink egy részének a térszemlélete nem kielégítő, feladatunk tehát ennek fejlesztése. A szakirodalom szerint a térszemlélet fejleszthető. A tanszékünk által tanított tárgyak többségébe (pl. szabadkézi rajz, műszaki ábrázoló geometria, számítógépes épületmodellezés) ez jól beleillik, és igény is van rá. Az évek óta kikristályosodott módszerek és eszközök; óratervek, gyakorló feladatsorok, prezentációk; házi, szorgalmi és zárthelyi feladatok jó segítséget adnak a térszemlélet fejlesztéséhez.

Ugyanakkor be kell látnunk, hogy ha *a tanítási cél nem* is, de a módszerek és eszközök idővel revízióra szorulnak. A revízió szükségességét az oktatásban végbement három alapvető változás köré csoportosítva indokolom: változik a bejövő hallgatók előképzettsége és hozzáállása, például megváltozott a középiskolás tananyag, terjed a kompetencia alapú oktatás és változik a felvételi rendszer. A másik ok a felsőoktatás tömegesedése és a Bologna-folyamathoz való csatlakozása, a harmadik pedig a XXI. századi gyors technikai fejlődés. Ezeket vesszük most sorra.

1.3.1. A módszerek és eszközök változása szükségességének egyik oka: a középiskolai oktatás változása

A Nemzeti Alaptanterv bevezetésével változott a matematika tananyag is, például bekerült a statisztika és a valószínűségszámítás fejezet. A térszemlélet-fejlesztést ez közvetetten úgy érintette, hogy a geometriára kevesebb idő jut. A kompetencia alapú oktatás terjedésével az elsajátítandó lexikális ismeretekről a hangsúly áttevődik a megértésre, a logikai képességek fejlesztésére és az alkalmazásra. A

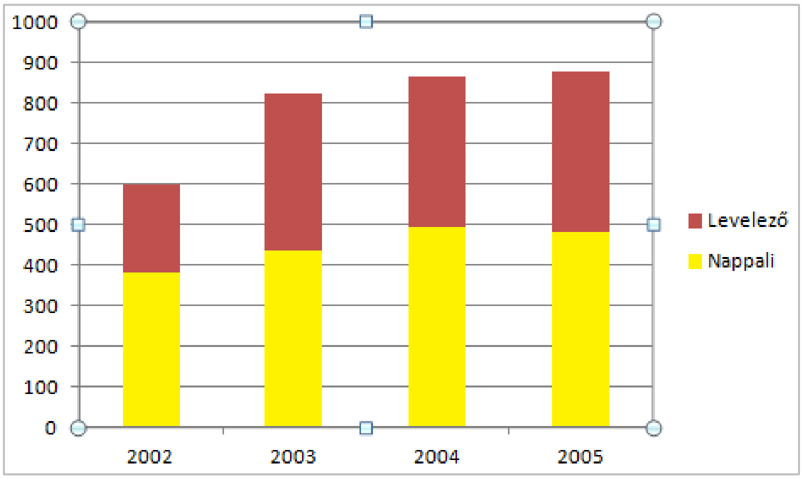
* Az utóbbi évek középszintű érettségi feladatsorait végigböngészve gyakran előfordul, hogy a feladatok között egyáltalán nincs térgeometria. Ha mégis előfordul felszín- és térfogatszámítás, akkor ezek a térgeometria feladatok a választható részben vannak. Ebből következik, hogy a diákok akár hibátlan érettségit is írhatnak úgy, hogy egyáltalán nem oldanak meg térgeometria feladatot.

matematika tanulás célja egyre inkább a komplex matematikai képességek elsajátítása. A matematikai képességek alatt a tárgyi tudás, a heurisztikus probléma-megoldó módszerek alkalmazása, metakognitív tudás és képességek valamint az úgynevezett szellemi beállítottság (helyzetfelismerés, logikus és pozitív gondolkodás, cselekvésre való hajlam, kitartás, érdeklődés) összességét értjük. (de Corte, 1997)

Az utóbbi időben többször változott a felvételi pontszámok kiszámításának a módja. A korábbinál nagyobb súllyal szerepel az érettségi vizsga és a „nem felvételi tárgyak" eredménye is. Ugyanakkor az is megemlítendő, hogy a legtöbb felsőoktatási intézmény nem követeli meg az emelt szintű érettségit, és igen rugalmasan lehet megválasztani a felvételi tárgyakat. Például a SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Karán az építőmérnök szakra jelentkezők esetében a fizika felvételi tárgy helyett választható a kémia, az informatika, a biológia vagy szakmai előkészítő tárgyként az elektronikai alapismeretek vagy akár a közlekedési ismeretek is!

1.3.2. A módszerek és eszközök változása szükségességének másik oka: a felsőoktatás tömegesedése és a Bolognai rendszerhez történő csatlakozás

Az utóbbi években érezhetően nőttek a hallgatói létszámok a tanórákon. (Polónyi, 2008), (Szabóné Mojzes, 2010) Ennek egyrészt gazdasági okai vannak. (Szolár, 2010) A másik létszámnövelő tényező, hogy egyes diákok ugyanazt a tárgyat kétszer-háromszor is felveszik (ezt a kreditrendszer lehetővé teszi), és csak a minimumot megcélozva próbálják teljesíteni.



4. ábra. A felvett hallgatók számának növekedése a
SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Karán

A létszám növekedésével is együtt jár, de ettől függetlenül is jellemző, hogy a tanulócsoportok minden téren egyre heterogénebbek. (Vö. 5.5.1.3) Nagy a különbség az egyes hallgatók tehetsége, adottsága, általános képességei, intelligenciája, motivációja, szorgalma, tárgyi tudása, szociális háttere között. Ezek persze nem egymástól független tulajdonságok, például a kiemelkedően jó szociális hátterű hallgatók sokszor az átlagnál motiválatlanabbak. Óriási motivációs tényező viszont az, ha valaki a tárgyat utoljára veheti fel. Az oktatási kísérletem során is azt tapasztaltam, hogy ezek a hallgatók minden órán jelen voltak, mindig az első sorokban ültek, a többieknél aktívabbak voltak, a követelményekkel kapcsolatban előre mindent pontosan tisztázni igyekeztek. Érezhető volt, hogy biztosra akartak menni. (Vö. 5.5)

A megnövekedett létszám miatt a kontakt órákon is és a konzultációkon is egyre kevesebb idő jut egy hallgatóra. Az is gyakran előfordul, hogy betegség vagy egyéb ok miatt nem tud a hallgató az órán megjelenni, levelezős hallgatók esetében pedig nincs is annyi kontakt óra, amennyi a tananyag feldolgozásához elegendő lenne. Mindezek miatt természetes igény, hogy a tanár ajánljon könnyen beszerezhető irodalmat, tegye hozzáférhetővé prezentációit; és egyébként is: lehetőség szerint bocsásson minél több (ingyenes) segédletet a hallgatói rendelkezésére. Ezzel részben megváltozik a tanár szerepe, egyre több e-learninges segédanyagot kell előállítania.

A módszerek és eszközök változtatását követeli a Bologna-folyamat által is fontosnak ítélt élethosszig való tanulási modell bevezetése. (Szolár, 2009) (Szolár, 2010) Nem tudhatjuk, hogy az élethosszig tartó tanulás során milyen életkorú, milyen előképzettségű, mennyi aktuális szabadidővel rendelkező, milyen tempóban haladni képes tanuló fogja az eszközöket használni, ugyanakkor gazdasági okból nem tehetjük meg, hogy minden korosztály, mindenféle előképzettség és minden oktatási forma kombinációjára más és más eszközt tervezzünk. Ezért előtérbe lépnek az univerzális rendszerek, és egyre nagyobb az igény a nemlineáris tananyagokra is. Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy önálló tanulásra való igény egyre fokozódik, és várhatóan még évek hosszú során keresztül tovább fog fokozódni. (Maróti, 2002)

1.3.3. A módszerek és eszközök változása szükségességének harmadik oka: életmódváltozás, óriási technikai fejlődés

Marc Prensky becslése szerint egy átlagos amerikai egyesült államokbeli gyerek 21 éves koráig 10.000 órát játszik elektronikus videójátékokkal, 200.000 elektronikus levelet illetve chat-üzenetet küld és kap, 20.000 órát nézi a televíziót, 500.000 reklámspottal találkozik; és jó esetben mindössze 5.000 órát tölt könyvek olvasásával. (Prensky, 2001) Szerinte ezektől a tevékenységektől nehezen lehet eltiltani, megóvni a fiatalokat; inkább ki kellene ezeket használni az oktatásban. Több kiadást is megért könyvében részletesen kifejti álláspontját, és ajánlásokat fogalmaz meg, hogy milyen típusú videójátékokkal milyen képességek (többek között a térszemlélet) fejleszthetők. (Prensky, 2007) Hasonló véleménye van James Paul Gee-nek, akinek több könyve is megjelent a témában. (Gee, 2007)

Jómagam napjainkban a számítógépet olyan hétköznapi eszköznek tartom, amelynek már régen nincs meg az érdeklődést fenntartó hatása. Ennek ellenére például a Honfoglaló játék óriási sikere azt mutatja, hogy viszonylag száraz, magolni való témákkal is szívesen foglalkoznak a tanulók, ha ezeket játékosan, látványosan dolgozzák fel, és versenyhelyzetet teremtve fokozzák a játékélményt.

A hagyományos oktatási eszközöket egyre jobban felváltják az elektronikus segédanyagok. A változás nem csak technológiai fejlődés, hanem ennél sokkal több: szemléletbeli változás. A közösségi portálokon megindul a spontán tudáscsere, a kooperatív tanulás; az ismeretszerzés decentralizálttá és többcsatornássá válik. (Kramarski & Liberman, 2003) (Kántorné & Kovács, 2007) (Forgó, 2009)

A technikai fejlődés létrehozott egy új oktatási formát, az e-learninget is. Ezen a távoktatás, a számítógéppel támogatott tanulás, és a világháló-alapú kommunikáció és együttműködés összességét értjük. Ez a forma ma már nemcsak lehetőség, hanem a Bologna-folyamatot – különösen az élethosszig tartó tanulást igényét tekintve – elvárás is. (Komenczi, 2004) Az e-learninget sokan az esélyegyenlőség egyik kulcsának tekintik, alkalmazásával ugyanis földrajzi távolságok eltűnnek, a kooperatív tanulásba a mozgásukban korlátozott vagy egyéb speciális igényű tanulók is bekapcsolódhatnak. Az ingyenesen rendelkezésre bocsátott elektronikus segédletek pedig mindenhová gyorsan eljutnak. (Kárpáti & Molnár, 2004) (Polónyi, 2008)

A mai diákok individualizmusa, valamint a szuverenitásra és az autonómiára való igénye egyre nagyobb mértékű, és ez megmutatkozik a tanuláshoz, illetőleg a tanórai viselkedéshez való hozzáállásukban is. Ugyanakkor jellemző rájuk a motiválatlanság, a klasszikus értékrendekkel szembeni kritikus hozzáállás, az identitás-válság. Gyakori tanári-oktatói hozzáállás, hogy már nem „noszogatjuk" a diákokat tanulásra, inkább minden segítséget megadunk annak, aki fejlődni szeretne. Ebből a szempontból is óriási jelentősége van az elektronikus tananyagoknak.

Az elektronikus tananyagok igen sokszínűek: szöveg, ábra, grafika, fotó, hangfelvétel, videófilm, prezentációk, animációk, stb. Ezek mindegyike számítógépen szerkeszthető, tárolható, megjeleníthető. (Régebben mindegyikhez speciális eszköz kellett, most már elég a számítógép. Ezt a folyamatot nevezzük médiakonvergenciának.) Ezek az elektronikus segítségek pedig nem csak az önálló tanulás során használhatók, hanem az aktív tábla megjelenésével most már a tanórán is. (Kárpáti, 2003) (Némethné Büki, 2009) (Katona, 2009)

A legújabb szoftverek lehetővé teszik azt is, hogy bármelyik tanuló a saját helyén ülve dolgozzon a kivetített képen, ezáltal időt nyerünk, mert nem kell megvárnunk, amíg a tanuló kimegy a táblához. További előny, hogy a diák nem lesz zavarban a táblánál, nem játszik szerepeket a többiek előtt, hanem kizárólag a feladatra koncentrálhat.

Marc Prensky a mai fiatalok és a számítógépek kapcsolatát 2*10 kulcsszóban foglalta össze. (Prensky, 2007) A bal oldalon látható a régebbi, konzervatívabb attitűd; a jobb oldalon pedig az újabb, a Prensky által „Játékos Generációnak” hívott fiatalok attitűdje, kognitív stílusa. (A fordítást én végeztem.)

KONZERVATÍV, HAGYOMÁNYOS KOGNITÍV STÍLUS	**AZ ÚJ GENERÁCIÓ KOGNITÍV STÍLUSA**
Állandó sebesség	**Rángatás**
Lineáris feldolgozás	**Párhuzamos feldolgozás**
Először szövegesen	**Először grafikusan**
Lépésről lépésre	**Véletlenszerű sorrendben**
Egyedül	**Közösségben**
Passzívan	**Aktívan**
Munkával	**Játékkal**
Türelmesen	**Azonnali eredményt várva**
Realitás	**Fantázia**
A technológia ellenfél	**A technológia barát**

5. ábra. Marc Prensky kulcsszavakba foglalt összehasonlítása
a kognitív stílusok változásáról (Prensky, 2007)

Marc Prensky mindezekből arra következtet, hogy ezek a változások igen jelentős és nehéz feladat elé állítják azokat, akik az oktatási folyamatokat tervezik; illetve nem csak őket, hanem a szülőket, a munkahelyi vezetőket, és az egész társadalmat is. Mondhatjuk úgy is, hogy nagy kihívás most szülőnek, tanárnak, munkahelyi vezetőnek – és természetesen diáknak – lenni.

Egy másik könyvben a következő táblázatot találjuk a szerzők által „Net generációnak” nevezett fiatalok általános kulturális értékeiről. (A fordítást én végeztem.)

TRADICIONÁLIS ÉRTÉKEK	SZOCIO-TECHNOLÓGIAI ÉRTÉKEK
Linearitás	Multidimenzionalitás
Stabilitás	Folytonos változás
Állandó struktúrák	Alkalmazkodó stuktúrák
Önállóság	Együttműködés
Következetesség	Dinamikus újraszabályozás

6. ábra. Carole Barone táblázata a „Net generáció” új értékrendjéről (Oblinger & Oblinger Szerk., 2005)

A technológia egy része már igazodott ezekhez az attitűdökhöz. Például a hipertextes oldalakat nem szükséges lineárisan olvasni, a közösségi hálók lehetővé teszik a kooperatív tanulást, a számítógépes grafika fejlődése pedig forradalmasította a grafikus szemléltetést.

1.3.4. A térszemlélet-fejlesztés módszereinek és eszközeinek bővülése

Az előbbiekben megmutattuk, hogy – tantárgyaktól függetlenül – a korábban jól bevált eszközök és módszerek felülvizsgálatra szorulnak. A kérdést most megvizsgáljuk kifejezetten a térszemlélet-fejlesztés módszereinek és eszközeinek tekintetében. Tekintsük először az eszközöket:

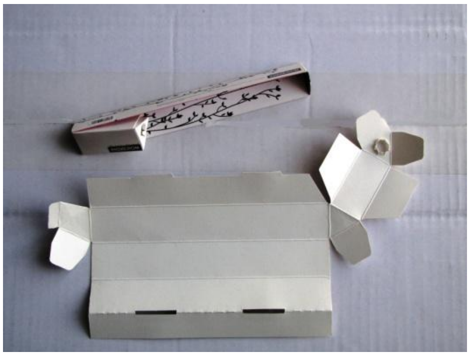
A térszemlélet fejlesztésében a hagyományos szemléltető eszközök (gipszből, papírból, drótból, fémből, fából vagy műanyagból készült modellek és játékok; valódi gépelemekből készített metszetek, stb.) igen jól használhatók. A diák kézbe tudja venni, megtapogathatja, minden oldalról megvizsgálhatja, szétszedheti-összerakhatja ezeket a modelleket. Összhangban Jerome Bruner felfedeztetéses tanulás-pszichológiájával és reprezentációs elméletével, (Bruner, 1968), (Bruner, 1974), a konkrét manipulatív tevékenységek igen fontosak a tanulás folyamatában, ezért a téri képességek fejlesztése során még a szemléltetésnél is hasznosabb, ha diák saját maga készít ilyen modelleket, fejlesztve ezzel kézügyességét, precizitását, türelmét is.

Klasszikus, a térszemléletet is remekül fejlesztő játékok a lyukas idomokból csavarozással építkező fémépítők, a többnyire fából készült egymásra helyezhető építőkockák, a LEGO, a Tüske és a Jáva építőkészlet. Kifejezetten matematikai-geometriai felhasználásra tervezett játék a Babylon (Varga, 1973), a Geomag és a Polydron.

7. ábra. A Babylon és a Jáva építőjáték

8. ábra. A Geomag és a Polydron építőjáték

Főleg Ázsiában igen népszerű a papírhajtogatás, az origami, ami szintén remek térszemlélet-fejlesztő játék, de még inkább művészet. A papírhajtogatás ezen felül ipari, mérnöki tudomány is. Újabban egyre jobban terjednek az olyan csomagolások, amelyeket egyetlen kartonpapírból, ragasztás nélkül készítenek, és amelyeket kizárólag a hajtogatás stabilizál.[*] Ezeknek a csomagolásoknak a megfigyelése nagyon tanulságos, eleget tesz a gyakorlatias matematikaoktatás szempontjainak, és az érdeklődés felkeltésére is kiváló.



9. ábra. Egyetlen papírból, ragasztás nélkül készült, összehajtva kívül-belül színesen nyomtatott, ízléses tolltartó kiterített és összeállított formában

[*] Ez rendkívül gazdaságos és környezetkímélő eljárás, újrafeldolgozott és újrafeldolgozható papírból készül, összeállítás előtt rendkívül kis helyet foglal el, nem használ a ragasztáshoz vegyi anyagokat, kellően stabil és rugalmas, a felületére könnyű nyomtatni, stb.

Összegezve: a hagyományos kézzelfogható modelleknek a térszemlélet fejlesztésében nincs párja, nem ezek helyett, hanem ezek mellett javasolom egy univerzális eszköz, a számítógép használatát. A számítógép képernyője ugyan kétdimenziós, de a perspektíva mellett nagyon jó térélményt ad a mozgás. A modern programok esetében a mozgás interaktív, tehát a tanulók tudják a nézőpontot változtatni (a modellt „forgatni", „közelíteni-távolítani"); valamint a mozgás és a modell paramétereit vezérelni. Van olyan szoftver, amelyik egy nagyszerű ötlettel összekapcsolja a számítógépes és a valódi, kézzelfogható modelleket: a számítógéppel konstruált poliéder hálója egyetlen egérkattintással elkészíthető, kinyomtatható, majd az ollóval kivágott hálóból valódi papírmodell hajtogatható, ragasztható.

A hagyományos modellek tárolása sok helyet igényel, és egy modell egyszerre csak egy helyen lehet jelen. A számítógépes modellek helytakarékosak, könnyen másolhatók, terjeszthetők. A hagyományos modellek többsége statikus. A számító-gépen könnyebb dinamikus modelleket készíteni, illetve a statikus és a dinamikus megjelenítést kombinálni. A számítógépes modellek kevés időráfordítással sokkal részletesebben kidolgozhatók, textúrázással szemléltethetjük az anyagokat, ami által a modellek szebbek, életszerűbben lesznek egy egyszínű famodellnél.

Elmondhatjuk tehát, hogy ha csupán a szemléltetést tűzzük ki célul, a számítógépeknek már akkor is van létjogosultsága, de kihasználva, hogy egy igen elterjedt és univerzális eszközzel van dolgunk, könnyen beleilleszthetjük a gépet a tanulási-tanítási folyamatba. Elektronikus jegyzettel helyettesíthetjük a nyomtatott anyagokat; hanganyagokat, videókat oszthatunk meg; kommunikálhatunk; gyakorol-tathatunk, számonkérhetünk; szerkeszthetünk, modellezhetünk a számítógép segítségével. A későbbiekben ezekre részletesen kitérünk, és nem feledjük el az elektronikus tananyagok hátrányai vizsgálatát sem.

Az eszközök és más, az előbbiekben részletezett külső környezeti hatások változása elkerülhetetlenné teszi a módszerek változását és a tanári szerep átértékelését is. A későbbi fejezetekben leírt oktatási kísérletemben például párhuzamosan használtuk a számítógépet és a vonalzót. A módszerek megváltozását indukálja a technológia fejlődése, ugyanakkor a technológiai fejlődés új lehetőségeket biztosít a tanár számára.

2. Kutatási célok és módszerek

„...nem az eszközhöz keresünk alkalmazási területet, hanem fordítva: adott tanulási – illetve tanítási – cél eléréséhez vagy didaktikai feladat megoldásához kell megválasztani az alkalmas eszközt.” (Hámori, 1983)

2.1. Az elméleti kutatás módszerei

Az elméleti kutatás során összegyűjtöttem, áttanulmányoztam, elemeztem és *összehasonlítottam a témához kapcsolódó könyveket és tudományos cikkeket, tudományos konferenciákon meghallgattam mások eredményeit*. A szakirodalmat áttanulmányozva több nyitott kérdésem is maradt, ezeket is szem előtt tartva határoztam meg a kutatásomnak az irányait és céljait.

Igyekeztem hazai és külföldi szerzők véleményét egyaránt megismerni.[*] Az irodalomjegyzék összeállításakor az alábbi konvenciókkal éltem: amennyiben egy műnek elérhető volt az idegen nyelvű és a magyar nyelvű változata is, minden esetben a magyar nyelvű változatot tüntettem fel. Amennyiben egy könyv több kiadást megért, vagy egy cikk több helyen is megjelent, akkor mindig a nyomtatott verziót részesítettem előnyben az elektronikussal szemben, illetve a nyomtatott verziók közül azt a kiadást, amelyik a saját könyveim között megtalálható volt.

Az illusztrációk válogatása során a bőség zavarával küzdöttem, de terjedelmi okokból szelektálnom kellett. A grafikák, táblázatok, rajzok, ábrák, fotók legtöbbjét én készítettem. A más szerzőktől átvett illusztrációk esetében a képaláírásban az irodalomjegyzékbeli forrást feltüntettem.

2.2. A gyakorlati kutatás módszerei

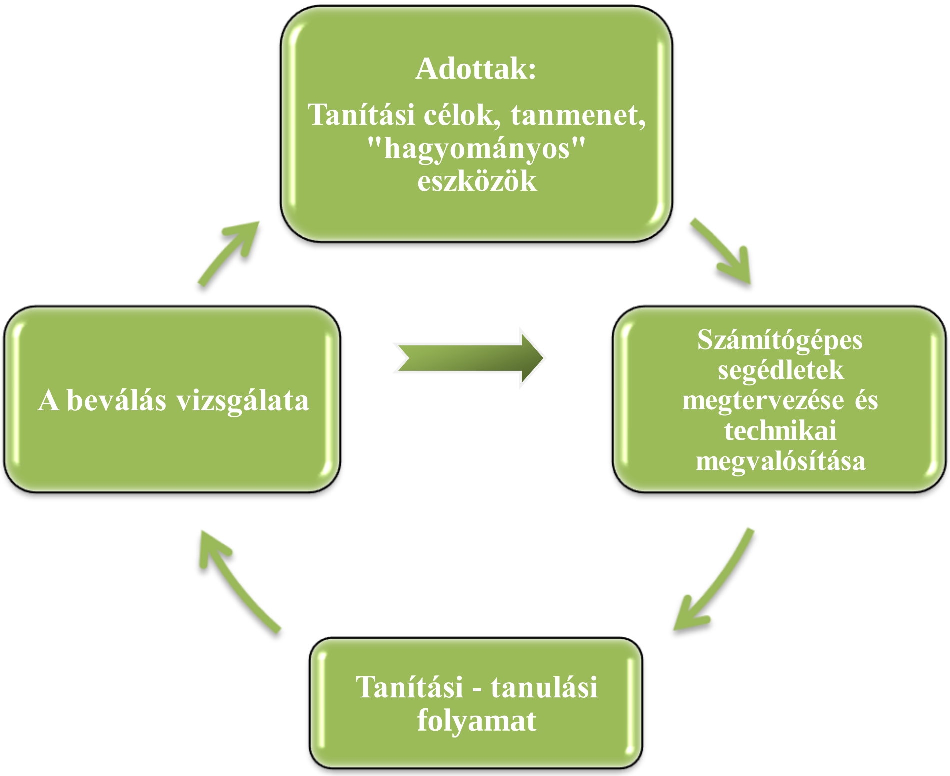
Mindenekelőtt saját tapasztalatokat igyekeztem gyűjteni arra vonatkozóan, hogy növelhető-e a térszemlélet-fejlesztés hatékonysága számítógép és számítógépes szoftverek segítségével. Érdekelt, hogy beilleszthető-e a számítógép a műszaki ábrázolás, az ábrázoló geometria, a műszaki informatika tanítási-tanulási folyamatába; és ha igen, akkor ez milyen előnyökkel, milyen hátrányokkal és milyen nehézségekkel jár a tanár és a diák szempontjából egyaránt.

[*] Az persze nem definiált, kit tekintünk hazainak és kit nem. Pólya György például magyar volt, de az Amerikai Egyesült Államokban élt, ott jelentek meg a könyvei, amiket azután magyarra fordítottak.

A későbbiekben részletezett módon megfigyeltem, és adatokat gyűjtöttem arra vonatkozóan, hogyan viszonyulnak a hallgatók a számítógéppel történő oktatáshoz, és hogy a technológia alkalmazása megváltoztatja-e a hallgatók feladat-megoldási és problémamegoldási stratégiáját; valamint a tanár szerepét.

Érdekelt, hogy az univerzális számítógépet milyen szerepkörökben érdemes, és mely szerepkörökben nem érdemes használni; hogy mely szoftvereket és milyen szerepkörben célszerű használni; és hogy milyen tárgyi feltételek mellett érdemes a geometriát számítógépteremben oktatni. Megfontoltam, hogy mely pontokon érdemes felülvizsgálni az óraterveket, és hogy célszerű-e megváltoztatni, modernizálni az általunk oktatott tananyagot.

A szakirodalom összegyűjtése, áttanulmányozása, összehasonlítása és elemzése; valamint saját, 10 éves tapasztalataim összegzése után következett a kutatás egy újabb gyakorlati részének, egy *összehasonlító tanítási kísérletnek* és a hozzá kapcsolódó összehasonlító mérésnek a kidolgozása. A kísérlet az alábbi séma szerint folyt, illetve folyik, hiszen ez egy véget nem érő folyamat.



10. ábra. Az oktatási kísérletem modellje

Az adott tanítási célokhoz terveztem és készítettem számítógépes oktatási anyagokat, azokat kipróbáltam, az eredményeket összevetettem egy kontrollcsoport eredményeivel. Ezután következett a visszacsatolás, amelyben egyrészt ajánlásokat fogalmaztam meg a tanmenet megváltoztatására, másrészről – hangsúlyosabban – revidiáltam és átterveztem a számítógépes segédleteket. (Vö. 5.6)

A kísérletet egy egész szemeszteren keresztül végeztem. Az egyik csoport (a kísérleti csoport) óráin új módszereket és eszközöket próbáltam ki, erőteljesen támaszkodva az órákon is és a házi feladatok elkészítése során is a számítógép segítségére. A másik csoport (a kontrollcsoport) óratervét nem én készítettem, hanem megtartottam az évek óta használt módszereket és eszközöket.

A számítógépes csoport számára új oktatóanyagokat, új segédanyagokat, új szemléltető eszközöket dolgoztam ki. A két csoport teljesítményének összehasonlítása érdekében egy térszemlélet-mérő tesztsort állítottam össze. Az oktatási kísérlet reprodukálásához szükséges tanmenetek, óratervek, instrukciók, feladatsorok, prezentációk, szerkesztések, videófilmek megtalálhatók a függelékben. Mindezekben segítséget kaptam a tantárgy előadójától, Bölcskei Attilától. (Utóbb több közös cikkünk és projektünk volt, illetve jelenleg is folyamatban van.) Szintén az előadó volt az, aki a zárthelyi feladatsorokat és a beadandó házi feladatokat (az évfolyam többi csoportjával egységesen) kitűzte. Bejártam az előadásra, hogy pontosan megtudjam, hogyan haladnak, mit hallhatnak a diákok az előadáson; a gyakorlati órákat pedig én tartottam meg.

Az oktatási kísérlet végrehajtása után az eredményeket összegeztem, kiértékeltem. Több javaslatot is megfogalmaztam a tantárgy jövőjével kapcsolatban, ugyanakkor a kísérletben alkalmazott néhány módszert elvetettem. Ezeket tanulságképpen ismertetem, de használatukat nem ajánlom. Dolgozatom további részében a bevált és csak részben sikeresnek ítélt módszerekről is részletesen szót fogok ejteni. A kutatás teljes publikálása tehát ez a dolgozat; de egyes tapasztalatok, részeredmények, egyes fontosabb és érdekesebb problémák publikálása tudományos folyóiratokban és konferenciákon folyamatosan történt illetve történik.

3. A kutatás elméleti háttere – szakirodalmi áttekintés

„Tér: a dolgok rendje egymás mellett, míg az idő a dolgok rendje egymás után. Ezek nem igazi meghatározások, csak körülírások; ily számunkra egyszerű, eredeti, a maguk nemében páratlan fogalmakat nem lehet meghatározni, mert alkotó részeiket nem lehet felmutatni, se felsőbb fogalomból leszármaztatni.” (Pallas Nagy Lexikona, 1897) (Révai Nagy Lexikona, 1927)

3.1. A térlátás és a térszemlélet

3.1.1. A térlátás fogalma és fiziológiája

A fenti idézet is mutatja a tér és a vele kapcsolatos fogalmak definiálásának nehézségét. Összehasonlítva a különböző meghatározásokat, az alábbi következtetéseket vonhatjuk le. A magyar nyelvben a térlátás, térérzékelés, mélységérzékelés szavakat a magasabb rendű állatoknál és az embernél rokon értelmű szavakként – főleg biológiai-fiziológiai vonatkozásban – használjuk; míg a térszemlélet, vizuális-téri képességek és téri intelligencia kifejezéseket szintén rokon értelmű szavakként kizárólag az embernél, és gondolati-pszichológiai-pedagógiai vonatkozásban használjuk. Ebben a szakaszban először a térlátást, mint fiziológiai képességet vizsgáljuk.

Igen sok állat és az ember legfontosabb érzékszerve a szeme. Becslések szerint az ember külvilágból származó információk 80%-át látás útján szerzi be. Nagyon sok állatnak is az emberhez hasonló felépítésű összetett szeme van. A látás információt ad a tárgyak alakjáról, méretéről és a térben egymáshoz viszonyított helyzetéről.

A közelebbi tárgyak távolságának és méretének becslése a binokuláris látáson, a két szemünk közötti konvergenciaszögnek és a szemlencsék akkomodációs fokának mérésén alapul. A távolabbi tárgyaknál a térlátás erősen tapasztalati úton történik a *takarások, az fény- és árnyékrendszer, a perspektíva, a levegőperspektíva* és a mozgások elemzésével.

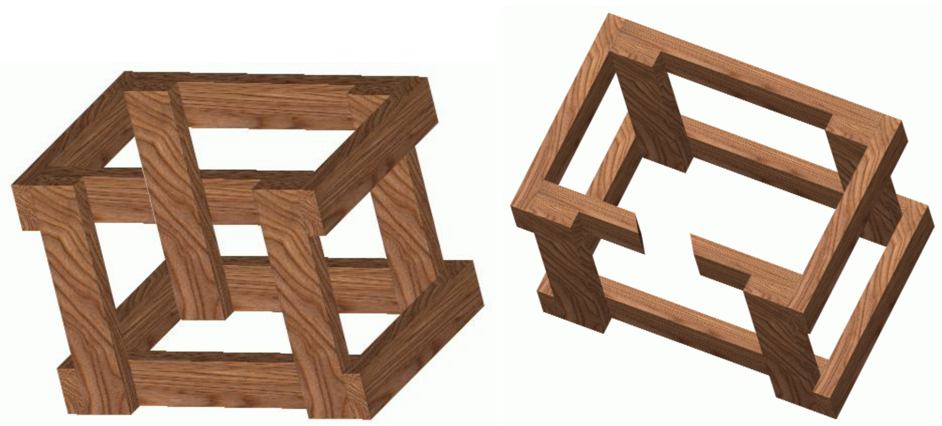
Ugyanakkor tisztában kell lennünk szemünk korlátaival, például az optikai csalódásokkal is. Például párhuzamos egyenes vonalakat egy sugárirányú vonalkázás miatt görbének látunk; ugyanolyan méretű objektumokat egy összetartó vonalazás miatt különböző méretűnek érzékelünk; pontokat vélünk látni egy vastag négyzetrács rácspontjaiban; vonalakat képzelünk oda, ahol nincs is; átfordulni látjuk a kocka drótvázát; stb. Témánkhoz szorosan kapcsolódik, hogy átélhetjük a mozgás élményét és a térélményt anélkül is, hogy valódi mozgást látnánk. (Wertheimer, 1912)

Mivel a két szemünk azonos magasságban helyezkedik el, ezért a bal-jobb irányú méreteket és távolságokat sokkal könnyebb becsülni, mint a fel-le irányú méreteket és távolságokat. Ebből adódik, hogy két egyforma tárgy közül a magasabban fekvőt távolabbinak érzékeljük az alacsonyabban fekvőnél.

Ha egy vízszintes, homogén tárgyat (például egy kötelet) figyelünk, akkor csak nehezen tudjuk a távolságát megbecsülni. Ennek az az oka, hogy a két szemünk nem tud egy fix viszonyítási pontra nézni, tehát nem tudjuk az akkomodációt a távolságbecslésben felhasználni. Ugyanakkor, ha van egy fix viszonyítási pont a kötélen, például egy csipesz, akkor rögtön megbízhatóbb lesz a távolságbecslésünk. Azzal is segíthetünk magunkon, hogy a fejünket az egyik vállunkra hajtjuk, mert akkor a két szemünk más magasságba kerül, és így a már tudunk a kötélre fókuszálni.

A fentiekből következik, de kísérletileg is könnyen bizonyítható, hogy a távolabbi tárgyak esetén a *térlátás prognosztikus, valószínűsítő* jellegű. Az egyik ilyen klasszikus kísérletet forgó, trapéz alakú ablakmodellekkel végezték, (Ames, 1951), (Ittelson, 1952), és amely kísérletet azóta többször is megismételtek (Pálffy, 1969).

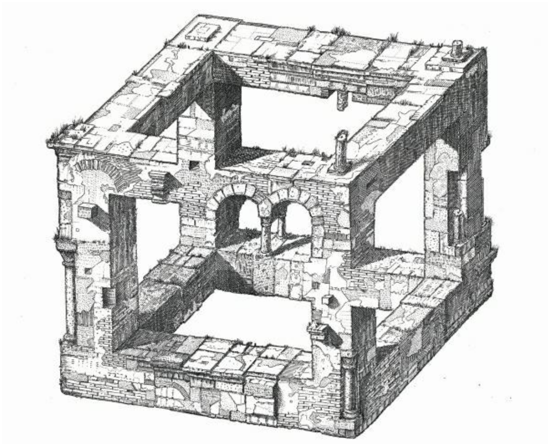
Ha tehát a térlátás tapasztalati, prognosztikus, valószínűsítő jellegű, akkor a szokásostól jelentősen eltérő elrendezésekben a szemünk könnyen becsapható. Az alábbi modell a takarásból adódó tapasztalatainkat írja felül.



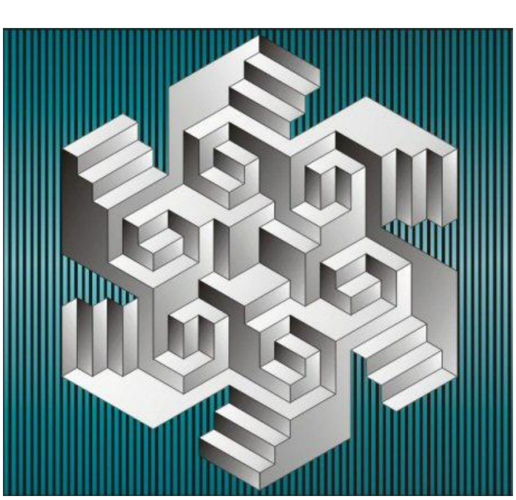
11. ábra. Speciális nézetből lehetetlen alakzatnak látszik, de valójában megépíthető modell.

Ha csak a bal oldali képet nézzük, akkor azt gondolhatjuk, hogy ez egy lehetetlen alakzat, mert egy lécekből összeállított tárgy elülső éle el kell takarja a hátsó éleket. A jobb oldali képen viszont látszik, hogy ez egy megépíthető modell, de ebből a nézetből lehetetlen alakzatnak tűnik. (Katona, 2005)

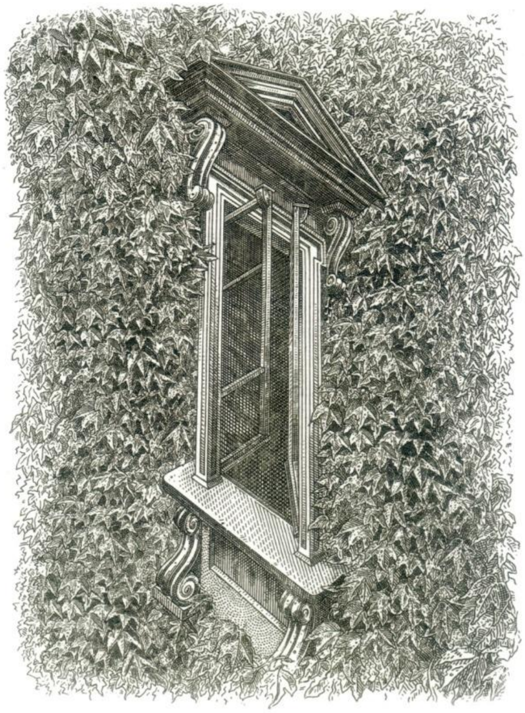
A térlátás prognosztikus jellegét kihasználják a művészek is. (Például a színházi díszletekben vagy az építészetben alkalmazott összetartó élek miatt a színpadot vagy a helyiséget mélyebbnek, nagyobbnak érzékeljük a valóságosnál.) Ezek a trükkök néha fokozzák a hatást, néha meghökkentőek, néha tréfásak vagy elgondolkodtatóak. A közismert M.C. Escher mellett én két magyar művész grafikáit szoktam példaként hozni: Orosz Istvánnak és F. Farkas Tamásnak is sok ilyen munkája van, amelyek nagyon alkalmasak a tanulók érdeklődésének a felkeltésére is.



12. ábra. Orosz István: A fal V. (The wall 5., rézkarc, 2008)



13. ábra. F. Farkas Tamás: Dimenzió (Dimension, grafika)



14. ábra. Orosz István: Abrakadablak (Magic window, rézkarc)

3.1.2. A térszemlélet és a geometriai térszemlélet fogalma

Ebben a szakaszban összevetjük a térszemléletre, a geometriai térszemléletre, a vizuális-téri képességre, és a téri intelligencia fogalmára adott különböző definíciókat. Ezek a fogalmak a térlátással ellentétben szinte kizárólag az emberre vonatkoznak. Például „... az állat általában nem képes arra, hogy ugyanazon tárgyat eltérő jellegű szituációkban azonosnak észleljen és kezeljen...” (Márkus, 1968)

Ahogyan a következő bekezdésekben látni fogjuk, a térszemlélet a biológiai-fizikai térlátáson túl magába foglalja a látás pszichológiáját, az ide vonatkozó lelki folyamatokat, a térbeli viszonyok gondolati visszatükröződését és ezzel együtt az ábrázolásra, a rekonstrukcióra, valamint a problémamegoldásra vonatkozó képességeket is.

A Magyar Nyelv Értelmező Szótára (Bárczi & Országh Szerk., 1966) szerint a térszemlélet „az a lelki képesség, tulajdonság, amelynek birtokában az ember a tárgyakat alakjuknak, kiterjedésüknek, nagyságuknak, illetve egymáshoz való viszonyuknak (...) megfelelően érzékeli, illetve egységes összképbe tudja állítani. ”

Séra László szerint a vizuális-téri képességek pedagógiai gyakorlatban meghonosodott neve a térszemlélet: „Két- és háromdimenziós alakzatok észlelésének és az észlelt információk és viszonylatok megértésének és téri problémák megoldására való felhasználásának képessége.” (Séra, Kárpáti & Gulyás, 2002), (Báthory & Falus Szerk., 1997)

Révai Nagy Lexikonában a térszemléletre a következő definíciót olvashatjuk: „az a lelki folyamat, amellyel a tárgyak térbeli viszonyait vesszük tudomásul. Erre vonatkozóan sokáig két szélsőséges elmélet állt egymással szemben, a nativista ... és az empirista (tapasztalati) ... A két felfogást egyesíti a genetikus magyarázat, amely szerint az összes érzékszervek adatai részt vesznek a térszemléletben, de azontúl még bizonyos összegző lelki aktus is, amely által az érzetek téries jelleget nyernek.”

Az idegen nyelvű pedagógiai lexikonokban is teljesen hasonló a helyzet, teljesen hasonló definíciókat találunk a „Spatial skills”, a „Spatial thinkig”, a „Spatial ability”, a „Spatial intelligence” és a „Space perception” címszavak alatt. Howard Gardner többszörös intelligencia-elméletében hétféle intelligenciát különböztet meg, ezek közül az egyik a téri intelligencia: „a téri világról alkotott mentális modell kialakítására, és ennek a modellnek a használatával való tájékozódásra és cselekvésre való képesség.” (Gardner, 1983) (Husén & Postlethwaite Szerk., 1994)

Mary Hegarty szerint a vizuális intelligencia röviden: „alkalmazkodó téri gondolkodás.” A vizuális intelligenciának két komponensét különbözteti meg: az első komponens a flexibilis stratégiai választás a gondolkodásnak a mentális szimuláció és az analitikus formája között; a másik pedig meta-reprezentációs képességek. (Hegarty M., 2010). Robert Mckim megfogalmazásában a téri képességek: a térlátás, a rajzkészség és a gondolkodási műveletek komplex együttese. (McKim, 1980)

Louis Leon Thurstone az, aki Gardnerrel megegyezően az elsődleges mentális képességeket, az intelligenciát szegmensekre osztja, és szerinte is az egyik faktor a térszemlélet. Thurstone ezeket az intelligenciafaktorokat is tovább bontja, szerinte a téri képességeknek 3 fő része van (Thurstone, 1950). Peter Herbert Maier ezt még tovább bontotta, szerinte a téri képességek a következő 5 fő részből állnak: térérzékelés, vizualizáció, forgatás gondolatban, téri relációk és az orientáció. (Maier, 1998)

Bognár Cecil Pál a térszemlélet szót túlságosan félrevezetőnek tartja, mert ez a szó azt az érzetet kelti, hogy a térszemlélet csupán a térrel, a fizikai valósággal kapcsolatos, holott véleménye szerint legalább olyan fontos a „térbeliségre vonatkozó felidézett képek, képzetek” megjelenése az ember gondolkodási folyamatában. Megállapítja továbbá, hogy amíg a geometriai térben nincsen kitüntetett irány, addig a kísérletek szerint a pszichikai térben van ilyen, mégpedig a függőleges irány az. A függőleges nem más, mint a nehézségi erő iránya*, és ezt az ember a természeténél fogva csak nagyon nehezen képes figyelmen kívül hagyni.

Bognár leírja azt is, hogy geometriailag például a Nap és egy biliárdgolyó ugyanolyan mértékkel mérhető, de a pszichikai térben már nem. Például a Földön élő ember a biliárdgolyót gömbnek, a Föld felszínét pedig síknak tekinti, pedig annak is van görbülete. A Napot viszont – bár mérete a Földnél nagyságrendekkel nagyobb – megintcsak gömbnek érzékeli, mert az nagyon távol van tőlünk. Ezek szerint a pszichikai térben nem csak kitüntetett irány, hanem kitüntetett origó is van, méghozzá a megfigyelő ember. (Bognár C. P., 1932)

Pálffy Zoltán a forma- és térlátásnak 4 külső és hozzájuk kapcsolódó 4 belső szintjét írja le. A külső szintek: a fizikai valóság; a modellek; az élethű rajzok, festmények, fényképek; valamint a formák és a tér lényeges képi jegyeit kiemelő szkémák. Ezekhez a szintekhez kapcsolódnak az egyének belső képzetei. A fizikai valósághoz kapcsolódik az önállótlan visszatükröződés, a modellekhez a tárgyreprodukcióra alkalmas érzékelés. Az élethű rajzok, festmények és fényképek gondolati velejárója a rajzi formalátás, végül a formák és a tér lényeges képi jegyeit kiemelő szkémákhoz tartozik a perspektivikus látszat. (Pálffy, 1969)

Az előzőekből is kitűnik, hogy a térszemlélet definíciója nehéz, de a szerzők abban mind egyetértenek, hogy egy összetett, komplex képesség; illetve abban is teljes a konszenzus, hogy a térszemlélet összekapcsolja az észlelt, leképezett és az elképzelt, konstruktív 3D világot.

Mi most az általános, „hétköznapi” térszemlélet helyett egy kicsit specializáltabb térszemlélet-definíciót tekintünk mérvadónak, és a továbbiakban a geometriai térszemléletre az alábbi, Vásárhelyi Éva által megfogalmazott, az előzőeket jól összefoglaló, jól tükröző, részletes definíciót használjuk:

A geometriai térszemlélet képességek és készségek olyan matematikailag irányított komplex együttese, amely lehetővé teszi:

* Pontosítva: a függőleges irány az az irány, amit a függőón mutat, tehát a Föld tömegvonzásából származó gravitációs (nehézségi) erő és a Föld forgásából adódó centrifugális erő eredője. Ebből következően általában nem pontosan a Föld középpontja felé mutat.

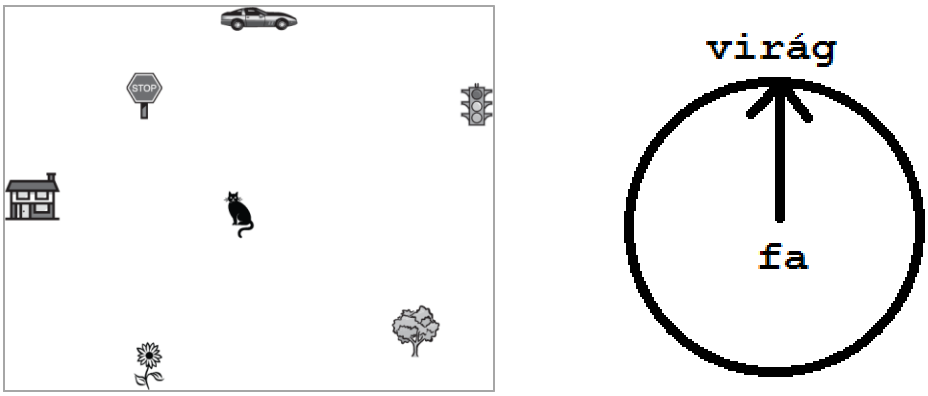
- a térbeli alakzatok alakjának, nagyságának, helyzetviszonyának pontos elképzelését
- a látott vagy elképzelt alakzatoknak a geometria törvényeire épülő egyértelmű ábrázolását
- az egyértelműen ábrázolt alakzatok helyes rekonstrukcióját
- a különböző térbeli (matematikai, műszaki, mérnöki, stb.) problémák konstruktív megoldását, a megoldás képi vagy nyelvi megfogalmazását.

3.1.3. A térszemlélet mérése

Nem csak a térszemlélet fogalmának a definiálása, hanem a térszemlélet mérése is nagy kihívás. Kisgyermekkorban a térszemlélet mérése megfigyelésekkel és célzott játékokkal történik. Az egyik széleskörűen elfogadott eszköz a „Block Box”. Ez egy formaillesztő játék, lényege, hogy a gyermek kézbe vesz különböző testeket, ezeket forgatgatja és megkeresi a helyét egy másik, üreges testben. (Campo, Taffoni, Formi & Guglielmelli, 2011)

15. ábra. Kisgyermekek számára készült, a térszemlélet fejlesztésére, mérésére alkalmas formaillesztő játékok

Kisiskolásoknál alkalmazott nagyon szellemes teszt például a „Perspective Taking/Spatial Orientation Test”. 2001-ben publikálták, (Hegarty & Kozhevnikov, 2001) majd 2004-ben javítottak rajta (Hegarty & Waller, 2004). Adott egy ábra közismert figurákkal (gyakorlatilag egy térkép), a feladat megmondja, hol állunk és merre nézünk, ezután meg kell mondani, hogy milyen irányba kell elindulnunk, ha egy adott másik tárgyhoz akarunk érkezni. Egy konkrét feladat az alábbi ábrán látható:

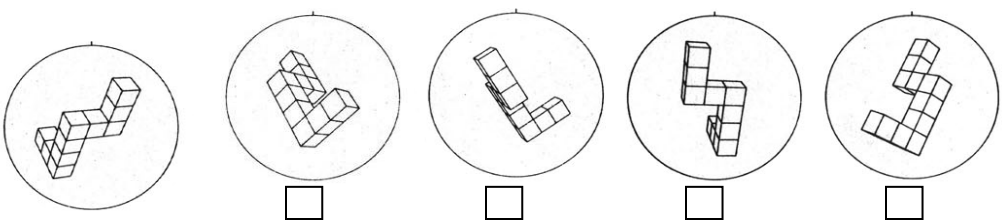


Képzeld el, hogy a fánál állsz, és a virág irányába nézel.
Jelöld be egy nyíllal a jobb oldali körön, hogy merre látod a házat!

16. ábra. Egy feladat a „Perspective Taking/Spatial Orientation Test”-ből
(Hegarty & Kozhevnikov, 2001) (Hegarty & Waller, 2004)

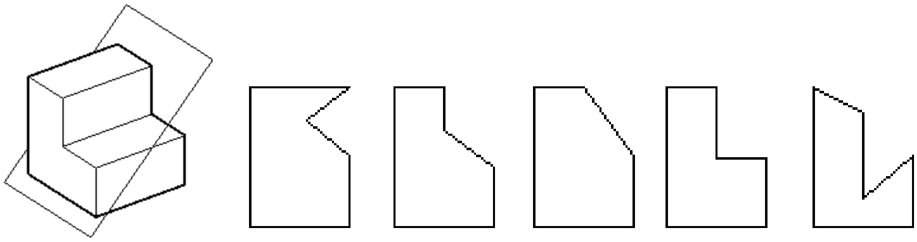
Nagyobb gyermekeknél és felnőtteknél a térszemlélet mérése leggyakrabban szintén tesztekkel történik. Három – igen széles körben alkalmazott – tesztet említünk, ezek a „Mental Rotation Test” (MRT), a „Mental Cutting Test” (MCT) és a „Surface Developing Test” (SDT). Mindhárom feleletválasztós teszt, tehát a kitöltőnek felajánlunk 3-4-5 lehetséges választ, és neki egyszerűen csak be kell jelölnie a szerinte helyes választ, válaszokat. A jellegéből adódóan mindhárom teszt erősen ábraigényes.

Az MRT eredeti változatában egybevágó kis kockákból építünk fel egy testet. A szomszédos kockák mindig teljes lapjukkal érintkeznek. Megadjuk a test egy axonometrikus képét, majd megkérjük a tesztalanyt, válogassa ki, hogy a másik négy megadott test közül melyik egybevágó a megadott alakzattal. A feladat megoldásához gondolatban el kell forgatnunk a testeket, innen ered a teszt elnevezése. (Vandenberg & Kuse, 1978) Egy konkrét feladat az ábrán látható:



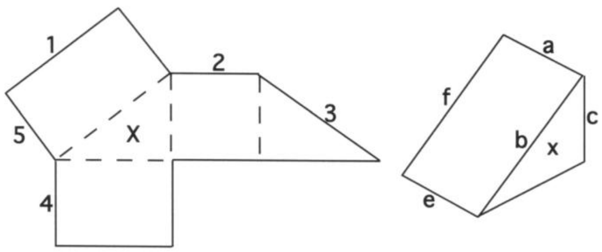
17. ábra. Egy feladat a Mental Rotational Test-ből
(Vandenberg & Kuse, 1978)

Az MCT-ben megadunk egy testet és egy síkot. A tesztalanynak a megadott lehetőségek közül kell kiválasztani a megadott test megadott síkkal való metszetét. A feladat viszonylag összetett, mert az axonometrikus kép alapján el kell képzelni a testet, vizsgálni kell a metszősík testhez viszonyított helyzetét, ez alapján magának a metszetnek az éleit, nem ritkán pedig még metrikus viszonyokat, hosszúságokat, szögeket is. Az MCT megalkotását nem tudjuk konkrét személyhez kötni, a College Entrance Examination Board-nál fejlesztették ki 1939-ben, egy felvételi alkalmassági vizsga részeként.



18. ábra. Egy feladat a Mental Cutting Test-ből
College Entrance Examination Board, 1939

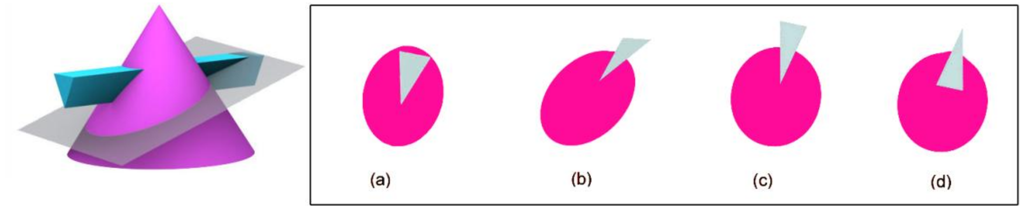
Az SDT tesztben egy test axonometrikus képét kell párosítanunk a test hálójával. Gyakorlatilag az a kérdés, hogy ha papírból kivágjuk a hálót és összehajtjuk a megadott testet, akkor a hajtogatás során melyik élek kerülnek fedésbe egymással. Az SDT szintén nem köthető egyetlen konkrét személyhez, a princetoni Educational Testing Service egy terméke 1976-ból. (Ekstrom, French, Harman & Derman, 1976)



19. ábra. Egy feladat a Surface Developing Test-ből, össze kell párosítani a számokat a betűkkel. Educational Testing Service, (Ekstrom, French, Harman & Derman, 1976)

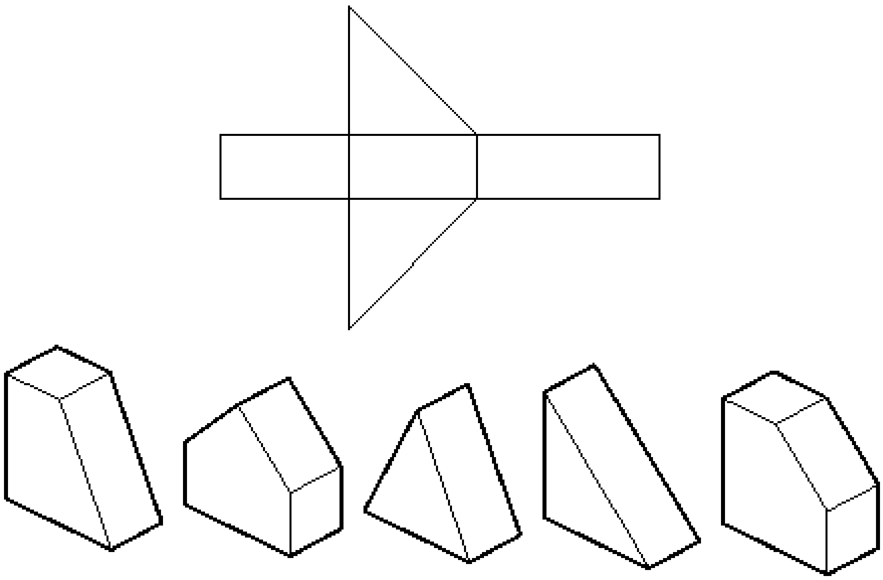
Természetesen ezeknek a teszteknek sok egyéb változatát kidolgozták, valamint jelentős számban használnak ezektől elviekben is lényegesen különböző teszteket. Nehezen lehetne színvonalasabb és teljesebb összefoglalót írni Eliot és Smith „An International Directory of Spatial Tests” („Térszemlélet-mérő tesztek nemzetközi adatbázisa”) című művénél. (Eliot & Smith, 1983) A szerzőpáros a térszemlélet-mérő teszteket kategorizálta (13 kategóriát különböztettek meg), és ezekben összesen 392-féle tesztet ismertetnek példafeladatokkal, elérhetőségekkel, stb. A könyv tartalmaz még történeti áttekintést és kiértékelési útmutatókat is.

Példaként tekintsük az MCT egy modern, színes változatát (Hegarty & Cohen, 2008). Itt a metszősík különleges látványstílusban látható, mintha üveg-szerű, félig átlátszó anyagból lenne.



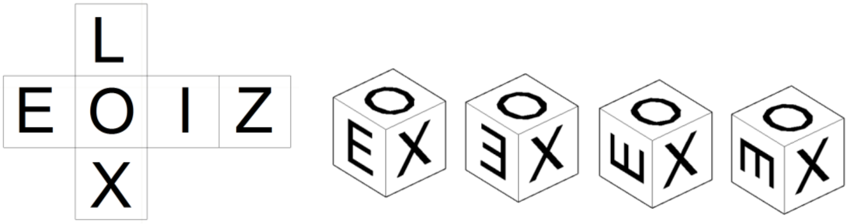
20. ábra. Egy feladat a Cross Section Test-ből (Hegarty & Cohen, 2008)

További két tanulságos példa, ezek most a „papírhajtogatós” teszt, az SDT változatai. Az egyikben testhálókból kell egy – nem feltétlenül síklapokkal határolt – testet összehajtogatni:



21. ábra. Az SDT egy másik változata

A másikban azt is figyelni kell, hogy a testháló összehajtása után mely lapok mely lapokkal kerülnek szomszédságba, és hogy az ezekre rajzolt ábrák egymáshoz képest milyen állásban jelennek meg.



22. ábra. Az SDT egy harmadik változata

3.2. A térszemlélet spontán fejlődése

„A térszemlélet fejlődéséhez idő kell. ... Az ábrázoló geometria tanításának kezdetén – és még elég sokáig – mindent szemléltetünk." (Csánk & Göndöcs, 1966)

A térszemlélet fejleszthető, bár ennek hatékonysága változó, például az életkor, a nemek, az intelligencia és egyéb képességek függvényében. Ugyanakkor a térszemlélet fejlesztésével párhuzamosan a memóriától kezdve (Scorupan, 1998) a logikus gondolkodáson át (Behzat Bektasli, 2006) az általános tanulási képességig (Newcombe, 2010) sok egyéb fontos képesség is fejlődik. Szerencsére a magyar hagyományok mindig előnyben részesítették a szemléletes, szintetikus geometriát az analitikussal szemben, és ez előnyös a téri képességek fejlesztése során is. (Kárteszi, 1966) (Hajós, 1979) (Reiman, 1986)

3.2.1. A térszemlélet spontán fejlődésének lépcsői Piaget és Inhelder szerint

A Jean Piaget - Barber Inhelder szerzőpáros több könyvében is foglalkozik a térszemlélet gyermekkori spontán fejlődésével. Az eredetileg francia nyelvű könyvek több tucat kiadást is megértek, és számtalan nyelvre lefordították ezeket. Természetesen magyarul is elérhetők: (Piaget & Inhelder, 1970), (Piaget & Inhelder, 1984), (Piaget & Inhelder, 1999). A következőkben bekezdésekben a szerzőpáros eredményeit foglaljuk össze.

Piaget és Inhelder szerint a térszemlélet kialakulása két külön síkon megy végbe, a szenzomotoros (érzékszervi-mozgásos, észleleti) síkon és a képzeti (értelmi) síkon. Az észlelés már születéstől fogva kezdődik, míg a képzeleti térszemlélet kezdeteit nagyjából a beszéd kialakulásával egyidőre teszik. Azt a meglepő állítást fogalmazzák meg, hogy a gyermek fejlődése során a képzeti tér kialakulása nem épít kellőképpen a tapasztalatra: „a képzet – noha felhasználja az észlelés ... eredményeit –

mégis mindent elölről kezd, mintha semmit sem tudna a metrikus és projektív viszonyokról, az arányokról, stb.” (Piaget & Inhelder, 1970) A képzet hajlamos a fizikai tapasztalat által sugallt vízszintes és függőleges irányt a koordináta-rendszer tengelyeiként kezelni, és a tárgyakat ebben a koordináta-rendszerben elhelyezni. Innentől a téri képzet bizonyos összefüggésekben túlhaladja a tapasztalatot, és a képzet irányítja a téri észlelési tevékenységet. Összefoglalva tehát: a geometriai térszemlélet nem csupán a közvetlen szenzomotorikus adatokra támaszkodik.

Jól ismert Piaget tanuláselmélete, amelyben a gyermek kognitív fejlődésében 4 szakaszt különböztet meg, sőt ezekhez még egy hozzávetőleges életkort is rendel: 0-2 éves életkorra jellemző az általános értelmi fejlődés szenzomotorikus szakasza; 2-7 éves életkorig tart a műveletek előtti gondolkodás szakasza; 7-12 éves korban jellemző a konkrét műveletek szakasza; végül 12-16 éves korig tart az absztrakt, formális gondolati műveletek kialakulásának szakasza. A szakaszok határán ugrásszerű, minőségi változás következik be, az új gondolkodásmód integrálja, rendszerezi a korábbi tapasztalatokat. Piaget és Inhelder ehhez kapcsolódva tagolja a téri képességek kialakulásának folyamatát is. Az alábbi szakaszokat írják le:

Az észleleti vagy más néven érzékszervi-mozgásos tér legelső szintjében csak a csecsemő reflexei működnek, ezután kezdődik az első szokások megtanulása. A legfőbb észlelt téri viszonyok ebben a szakaszban: szomszédosság, elkülönülés, sorrendiség (téri egymásutániság), határolás (bennfoglalás), zártság, folyamatosság. Itt tehát nem beszélhetünk metrikáról, ebben a periódusban a csecsemő geometriája topologikus. A téri viszonyok felfedezésének következő szakaszában kezdődik a tárgyak vizuálisan ellenőrzött manipulálása, tapintása, forgatása. Megtörténik a cselekvések egymáshoz igazítása, a látás és a fogás koordinálása, a formaelemzés, az alak- és a nagyságkonstancia kidolgozása. Geometriailag fogalmazva: ebben a periódusban tehát elkezdődik a projektív és metrikus viszonylatok egyidejű kialakulása. A fejlődés magasabb szintjére jellemző a téri formák belső rendeződése, a konkrét műveleti térből a formális műveleti térre történő minőségi ugrás.

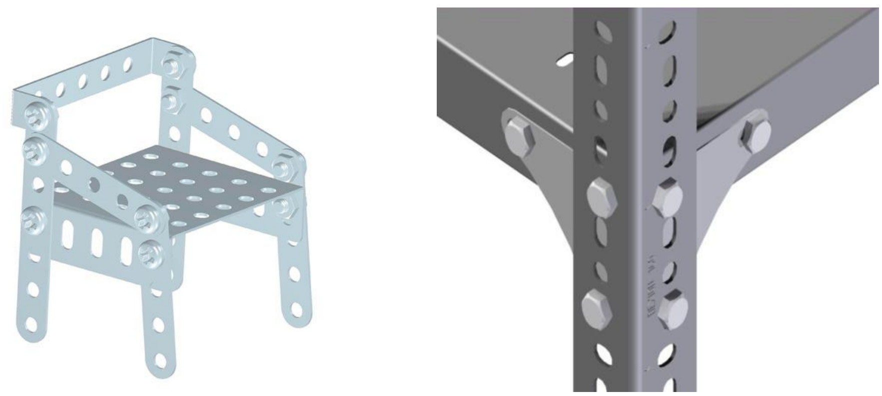
Piaget elméleteit sokan vitatják. Egyrészt felrójják neki, hogy egyes kísérleteit igen kis számú mintán (esetleg csak a saját gyerekein) végezte el; másrészt, hogy voltak ugyan igen pontosan dokumentált, nagy számú mintán elvégzett kísérletei, de ezekből néha rossz következtetést vont le. Az alábbi, óvatosan megfogalmazott állításával azonban nehéz vitatkozni: „Vagy azt mondjuk, hogy (a térszemlélet) szemléletes, intuitív a szó etimológiai értelmében, vagyis képszerű és majdnem érzékletes; vagy azt mondjuk, hogy (a térszemlélet) konstruktív ... Látjuk majd, hogy a fejlődés minden szintjén ez a második értelmezés tűnik igaznak...” (Piaget & Inhelder, 1970)

3.2.2. Különböző játékok spontán térszemlélet-fejlesztő hatása

Kisgyermekkorban a térszemlélet fejlődése-fejlesztése legtöbbször tapasztalatok útján, zömmel játékokkal történik. Megjegyzendő, hogy Magyarországon igen sok ilyen játékot találtak fel, gyártottak, és alkalmaztak az oktatás során. Ilyen például a Babylon építőjáték, a Jáva építőjáték (vö. 7. ábra) vagy a Rubik-kocka. (Varga, 1973)

Jól fejlesztik a térszemléletet a formaillesztő játékok (vö. 15. ábra), az építőkockák és a Lego is. Az építőkockák legtöbbször csak egymásra helyezhetők, más kapcsolat nincs az egyes építőelemek között, így a megépíthető modellek száma korlátozottabb a Legoból építhető modellekénél. Ugyanakkor az építőkockák többnyire jobban fejlesztik a térszemléletet, mert használatuk során alaposabb formaelemzést kell végezni; míg a Legoban igen sok modul (emberek, állatok, tárgyak) eleve készen kapható. (Az építőkockák az egyensúlyi-statikai tapasztalatainkat is jól bővítik.)

A műanyagból készülő Jáva építőkészlet elemei hengeresek, ezeket dugószerű idomokkal lehet egymáshoz kapcsolni. A Tüske elemei nem meglepő módon tüskések, ezek meglehetősen szabadon egymásba tolhatók, és igen sokféle helyzetben rögzíthetők. A fémépítők elemeit az iparban használatos csavarozással lehet összekapcsolni, legfeljebb a csavarok mérete valamelyest kisebb a iparban általánosan használt csavarok méreténél. A fémépítők hasonlítanak legjobban a mérnöki gyakorlatban használt valós objektumokhoz: hidakhoz, tornyokhoz, a hazánkban Salgó néven ismert polcrendszerhez, állványzatokhoz, zsaluzatokhoz.



23. ábra. Fémépítő játék és egy vele teljesen analóg,
professzionális modul polcrendszer egy csomópontja

A műanyagból készült Babylon nevű építőjátéknak az alakját és méretét tekintve mindössze kétféle alapeleme van: pálcikákból és gömbökből áll (bár ezek sokféle színben állnak rendelkezésre). A pálcikákat a gömbökbe fúrt lyukakba kell bedugni. (Vö. 7. ábra) Ezen a módon geometriai testek élváza, keretmodellje építhető meg, a gömböcskék felelnek meg a csúcsoknak, a pálcikák pedig az éleknek. (Kárteszi, 1966) (Varga, 1973) Amennyiben többféle hosszúságú pálcikára van szükségünk, egy gömböcskével összetoldhatunk két pálcikát, és így dupla, tripla, stb. hosszúságú éleket kaphatunk; viszont ekkor a gömböcskék nem csak a csúcsokban vannak, hanem az élek felező- harmadolópontjában is megtalálhatók.

Szintén élvázas modellek építhetők Geomag-ból. A csúcsok kis fémgömbök, az élek színes műanyag borítású hengerszerű alakzatok. (Vö. 8. ábra) A modellt a hengerek végében elhelyezett mágnesek tartják össze. Az alapmodellhez szabályos háromszög, négyzet, szabályos ötszög és rombusz alakú lapok is illeszthetőek. (Ezeket a színes, műanyag, középen lyukas lapocskákat a használati utasításban paneleknek nevezik.)

Minden olyan játék fejleszti a térszemléletet, amely összerakható és szétszedhető, csak ennek a hatékonysága változó, illetve az elemekből kirakható modellek száma erősen korlátozott. Ezzel szemben az előző bekezdésekben említett játékok változatossága szinte végtelen, legfeljebb elfogynak a dobozból az elemek, és egy másik ugyanolyan dobozból tudjuk a modellt továbbépíteni.

A logikai játékokat is árusító játékboltokban igen sokféle ördöglakat és logikai összerakójáték kapható. Az ördöglakatok tanulmányozása nem csak térszemléletünket, hanem topológiai tapasztalatainkat is gyarapítja.

24. ábra. Ördöglakatok.

A logikai összerakójátékok között is nagyon sok térbeli van. A cél egy térbeli konstrukció megépítése, de sok esetben a szétszedés is legalább olyan nehéz. Az ördöglakatok és térbeli logikai összerakójátékok egyik hátránya, hogy ha egyszer rájövünk a megoldásra, akkor onnantól kezdve a dolog már nem szórakoztató. A következő bekezdésben viszont olyan játékot ismertetünk, amelynek több, mint 43 trillió variációs lehetősége van, tehát sokkal nehezebb megunni.

25. ábra. Térbeli logikai összerakójátékok

Különleges térszemlélet-fejlesztő játék Rubik Ernő találmánya, a bűvös kocka. A nemzetközi kereskedelmi forgalomban Rubik-kockaként árulják, a szabadalmi leírása szerint egyféle „térbeli logikai játék”. Lényeges, hogy ez egy dinamikus, forgatható modell. Ha az egyik kis kockát át akarjuk egy másik pozícióba forgatni, akkor ez több (szám szerint összesen 9) kis kocka helyzetét is megváltoztathatja, ezért bonyolult mozgáskombinációk szükségesek például két elem felcseréléséhez úgy, hogy a többi elem a helyén maradjon.

A Rubik-kockának azóta sokféle változata jelent meg. A hagyományos változat elérhető 2*2*2-estől az 5*5*5-ösig, de vannak különböző, a kocka lapjait nem egybevágó négyzetekre felvágó megoldások is. Természetesen felvetődik a többi szabályos test hasonló feldarabolása: a tetraéderes verzió fantázianeve Piramix, az oktaéderesé Skewb gyémánt, a dodekaéderesé a Megamix, az ikozaéderesé pedig Dogic. Rubik Ernőnek azelőtt is és azóta is sokféle térszemléletet is fejlesztő játéka jelent meg, például a Rubik-kígyó, a karikavarázs, a Rubik dominó és a Rubik óra. Az alábbi honlapon egy négydimenziós Rubik kockával játszhatunk:

www.superliminal.com/cube/applet.html

(vö. 5.4.2.1).

Külön kategóriát képeznek a táblás játékok, például a malomjáték vagy a dáma. Különösen a sakkot dicsérik, amelyik a térszemléleten kívül nagymértékben fejleszti például a kombinációs képességet is. A sakk nem csak játék, hanem sport is. Ide kapcsolódik, hogy nagyon sok sport, különösen a csapatjátékok/labdajátékok sok egyéb más előnyükön túl jól fejlesztik a térszemléletet is. A pályán a társak megtalálása, a labda ívének kiszámolása, a pingponglabda pattogásának megfigyelése mind hasznos tapasztalatokkal gazdagítja a gyermekeket.

Jól fejlesztik a térszemléletet bizonyos típusú elektronikus, számítógépes játékok is. (Vö. 1.3.3) (Prensky, 2007) (Gee, 2007) Ilyenek például a különböző szimulátorok: a kerékpár, a gördeszka, a motorkerékpár, az autó, a hajó, a harckocsi, stb. irányítását és mozgását utánzó játékok. A repülőgép-szimulátorok és a tengeralattjáró szimulátorok azért említendők meg külön csoportban, mert ezek az eszközök nem kötődnek a föld vagy a víz felszínéhez, ebben az esetben tehát a navigációt is 3 dimenzióban kell elvégeznünk.

Nagyon népszerűek az úgynevezett RF autó-, helikopter és repülőmodellek. Ezek valódi, saját meghajtással rendelkező, rádiófrekvenciás (RF) távirányítóval irányítható modellek. Egy távirányítható műrepülő egészen különleges módon fejleszti a térszemléletet. Például, amikor a repülőgép a hossztengelye körül merőlegesen elfordul, akkor a magassági kormánnyal lehet oldalirányba kormányozni, az oldalkormánnyal pedig a repülési magasságot változtatni. Újabb 90 fokos fordulat után a gép a hátán repül, ekkor felcserélődik a fent és a lent, tehát a szokásos mozdulatok – meghúzom a botkormányt, és a gép emelkedik – most pontosan az ellenkező hatást fejtik ki: meghúzom a botkormányt, és a gép süllyedni kezd.

Jól fejleszti a térszemléletet a mászkálós, gyűjtögetős, lövöldözős számító-gépes játékok jelentős része. A leggyakoribb esetben egy bonyolult labirintusban kell a játékosunkat irányítani, amely megköveteli a helyszínek felfedezését, az útvonalak pontos megjegyzését, amolyan mentális 3D térkép konstruálását, és a pontos, gyors navigációt. További elektronikus játékokról is lesz szó a következő fejezetben.

3.2.3. Dimenziós analógián alapuló térszemlélet-fejlesztő játékok

Az előző fejezetben olyan játékokat ismertettem, amelyek fejlesztik a térszemléletet is. Ezt a sort most folytatom, viszont a most következő játékok olyanok, amelyek valamilyen síkban játszott játék *térbeli általánosításának* tekinthetők. (Vö. 5.4.2.1) Mindez abból a szempontból jelentős, hogy kutatásaim során az analógia

– különösen a dimenziós analógia – mint módszer jól bevált a térszemlélet-fejlesztésben.

A gyermekek körében igen népszerű játék például az amőba.* A két játékos négyzethálós papíron felváltva helyezi el a saját jelét, és az nyer, akinek először sikerül 5 saját jelet egyvonalban elhelyeznie, akár vízszintesen, akár függőlegesen, akár átlósan. Analóg módon többféle térbeli amőbát gyártanak. Az egyiknél rudakra kell a saját (tórusz-szerű vagy lyukas henger alakú) figuránkat felfűzni. Ha már van a rúdon egy figura, akkor annak a tetejére egy másik figurát tehetünk, tehát építkezhetünk függőlegesen, vagy pedig átlósan fölfelé is.

Az előző bekezdésben említett általánosítás esetén például alulról nézve a 3. sorba csak akkor tehetünk figurát, ha alatta már van kettő. Egy másik játékban nem rudakat használunk, hanem egy előre elkészített, átlátszó műanyagból gyártott, oldalról nyitott, kocka alakú vázat, amelynek egyes szintjeihez oldalról hozzáférhetünk, és oda helyezhetjük el a figuránkat. Ebben az esetben akár rögtön az első figurát is rakhatjuk alulról a 3. sorba, mert azt nem egy másik figura, hanem a váz tartja.

26. ábra. Az amőba háromdimenziós általánosításai közül kettő. A cél, hogy négy saját színű figurát helyezzünk el egy vonalban: vízszintesen, függőlegesen, átlósan vagy átlósan fölfelé

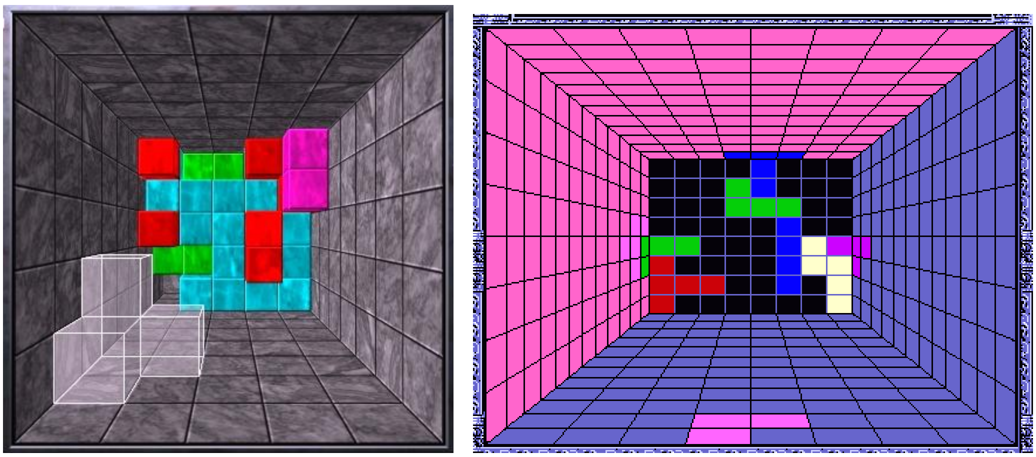
A puzzle esetében egy felszabdalt képet kell részeiből összeraknunk. Természetesen létezik térbeli puzzle is. Az egyik verzió esetén a megépítendő alakzat egy gömb, és a lényeg itt is egy kép – például a Glóbuszunk domborzati térképe – összeállítása. Ebben az esetben a puzzle darabkák gyakorlatilag „csipkés szélű”

* Nevét a végállás igen szabálytalan körvonaláról kapta.

gömbsüvegek. Egy másik verzió esetében egy ismert épületet modelljét kell összeraknunk. Ez inkább hasonlít a hagyományos építőkockákra, mert a modell oldalfalai gyakorlatilag csipkézett szélű téglatestek, csak az építőkockákkal szemben itt még a felületük festésére, mintázatára is figyelnie kell a játékosnak.

Léteznek igen magas költségvetéssel készülő számítógépes játékok. A gyártók alkalmaznak zeneszerzőket, zenészeket, grafikusokat, rajzolókat, animátorokat, látványtervezőket, programozókat, marketingeseket, stb. Éppen ezért nagy meglepetést keltett az egészen egyszerű és puritán Tetris óriási népszerűsége, ami esetében csak néhány egyszerű geometriai alakzatot kell jobbra balra mozgatni és 90 fokkal elforgatni, miközben az alakzatok lefelé esnek. A cél, hogy az alakzatok hézagmentesen illeszkedjenek egymáshoz. Maguk az alakzatok egybevágó kis négyzetek összeillesztésével jönnek létre, van például 2*2-es négyzet, 1*4-es téglalap, L alakú, U alakú elem is. Nagyon hasznos játék, például mindenki gyorsan rájön, hogy 4 kis négyzetből kétféle L alakú idom rakható össze, amelyek a síkbeli forgatással nem hozhatók fedésbe.

A Tetrisnek is többféle háromdimenziós általánosítása létezik. Az egyik esetében egy felülről nyitott téglatestbe esnek bele egybevágó kis kockákból álló alakzatok. Különlegesen hasznos tapasztalat, hogy amíg a síkbeli verzióban a kétféle L alakú idom van, addig a 3D változatnál ezek (pontosabban ezeknek a 3 kis kockából összeállított térbeli analogonjai) térbeli forgatással fedésbe hozhatók.



27. ábra. A Tetris nevű elektronikus játék 3D változatai

A Tetris egy másik háromdimenziós általánosítása is igen szellemes. A pálya szintén egy felülről nyitott téglatest, de az alakzatok most papírszerű (lényegében kétdimenziós) figurák, amelyek a téglatest belső felületén csúsznak le.

Szintén népszerű az úgynevezett 15-ös játék. Egy 4*4-es négyzethálós keretben 15 kis négyzet helyezkedik el, tehát egy kis négyzet lefedetlen marad, miáltal a 4 szomszédja (oldalfalnál csak kettő) mozgathatóvá válik. Az eredeti játékban az a cél, hogy a számozott kis négyzeteket nagyság szerinti sorrendbe állítsuk, de az újabb verziók esetében inkább valamilyen képet kell kiraknunk. Léteznek olyan verziók is, amelyekben a tábla és/vagy az alakzatok változatosabbak, például különféle téglalapok is lehetnek. További általánosítási lehetőség, hogy bizonyos elemek bizonyos helyzetekben 90 fokkal elfordíthatók.

A 15-ös játék térbeli általánosítása egy olyan, átlátszó műanyagból készült, zárt, belül üreges kocka, amelyben harmadakkora oldalhosszúságú kis kockákat helyeztek el, szám szerint 26-ot. Itt is üresen marad egy hely, amelyikbe a kocka döntögetésével bármelyik szomszédját átmozgathatjuk. A cél az, hogy a két színnel színezett kis kockák mozgatásával olyan helyzetet érjünk el, hogy az egyik szín egyáltalán ne látszódjon, tehát az ezzel a színnel festett lapok mindegyike belülre kerüljön, míg a másik színnel festett lapok mind kívül helyezkedjenek el.

3.3. A térszemlélet tudatos, iskolai fejlesztése

„A térszemlélet – akárcsak a zenei hallás – nagymértékben fejleszthető. A fejlődés azonban csak évekig tartó, alapos foglalkoztatásnak és a korszerű pedagógiai eljárások hozzáértő alkalmazásának gyümölcseként jelentkezik.” (Kárteszi, 1966)

A térszemlélet fejlesztésének ideális módja a személyiség fejlődése során szerzett tapasztalatok kognitív integrálása. A felnőttek, esetünkben az egyetemi hallgatók térszemléletének fejlesztése nehezebb. A folyamat sokváltozós, de a megfelelő térszemlélet kialakulása lényegében négy dologgal korrelál, ezeket tüntetjük fel az alábbi felsorolásban (Potegal Szerk., 1982), (Alias, Black & Gray, 2002):

- a biológiai nem (férfi vagy nő)
- adottságok (általános intelligencia)
- a kognitív fejlettség (szenzomotorikus és képzeleti érettség) (Vö. 3.2.1)
- tapasztalatok.

Az első faktort természetesen nem változtathatjuk, a második is nagyon nehezen fejleszthető, de a harmadik és a negyedik faktort jelentős mértékben növelhetjük. Ha pedig kifejezetten a Vásárhelyi Éva által adott *geometriai* térszemlélet definíciót fogadjuk el, amelyben a téri alakzatok képi megfogalmazása, a konstruktív geometriai problémamegoldás és az egyértelműen ábrázolt alakzatok rekonstrukciója is hangsúlyosan szerepel, akkor azt mondhatjuk, hogy a mérnökjelöltek sok esetben az egyetemi tanórákon találkoznak először ezeket a képességeket tudatosan, tervszerűen, sokoldalúan és rendszeresen fejlesztő feladatokkal.

A következő fejezetekben először összefoglaljuk a hagyományos iskolai térszemlélet-fejlesztő módszereket. Ezt követően áttekintjük a számítógéppel támogatott tanulási módszereket. Végül pedig *összekapcsoljuk a kettőt*, és megvizsgáljuk a számítógéppel (is) támogatott térszemlélet-fejlesztést.

3.3.1. A térszemlélet-fejlesztés hagyományos módszerei a közoktatásban

Az óvodában és az általános iskolában is sikerrel alkalmazzák az előző fejezetekben említett játékokat (építőkockákat, fémépítőket, formaillesztőket, stb.) többek között a térszemlélet fejlesztésére. (Vö. 3.2.2) Ezeken kívül gyakori tanórai tevékenység a gyurmázás, vagy pedig a papír tépése, vágása, hajtogatása, ragasztása, ezek kombinációi. Az Origamit is oktató matematika tanárok kedvező tapasztalatokról számoltak be a tanulóik fejlődését illetően. (Boakes, 2008) (Boakes, 2009) (Kántor Sándorné, 1995)

Amíg az Origamik legkedveltebb témái az állatok, addig a matematika tanításakor inkább geometriai testek hálóját rajzoljuk meg papírból, majd ezt kis fülekkel ragasztjuk egymáshoz. (Pusztai, 2008) Ez különösen a testek felszínének tanításakor hasznos: síklapú testek esetében a felszín a határoló lapok területének összege, de például a henger vagy a kúp felszíne is jól mérhető, mert palástjuk síkba teríthető. A tapasztalat szerint a kocka hálóját nagyon sokan ismerik, viszont sok olyan gyerekkel találkoztam, aki csak egyféle kocka-hálót ismert. Kárteszi Ferenc olyan szabásmintát is közöl, amelyikből ragasztás nélkül lehet stabil kockát hajtogatni. (Kárteszi, 1966)

A műszaki szakközépiskolákban sokféle módon történik a térszemlélet fejlesztése, de erre nem alapozhatunk, mert a hallgatók jelentős része gimnáziumból jelentkezik a felsőoktatásba. A gimnáziumokban a rajzpedagógusok aktívan hozzájárulhatnak a diákok jó térszemléletéhez, sok tantervi program ezt kiemelt célként kezeli. (Kárpáti, 2005) (Miller & Mohler, 2008)

A középiskolákban matematika órákon előfordul némi térgeometria, ezeket a ritka alkalmakat tudatosan fel kell használnunk a térszemléletének fejlesztésére. A sokféle feladat mindegyike hatékony: mértani testek tanulmányozása és ábrázolása; felszín- és térfogatszámítás; metszetek és különböző vetületi ábrák készítése;

testhálók síkba terítése; térbeli transzformációk tanítása; stb. (Kárteszi, 1951) (Skanderáné, 1987) (Széplakiné, 2008) (Macfarlane Smith, 1964) (Potegal Szerk., 1982) (Parsons, 1987) A matematika és a rajz órákon kívül is sok lehetőség nyílik a téri képességek fejlesztésére: kémiában például az atommodellek, molekulamodellek, kristályszerkezetek tanulmányozása során; a fizika órákon a csillagászat, földrajz órákon a térképolvasás témakörben.

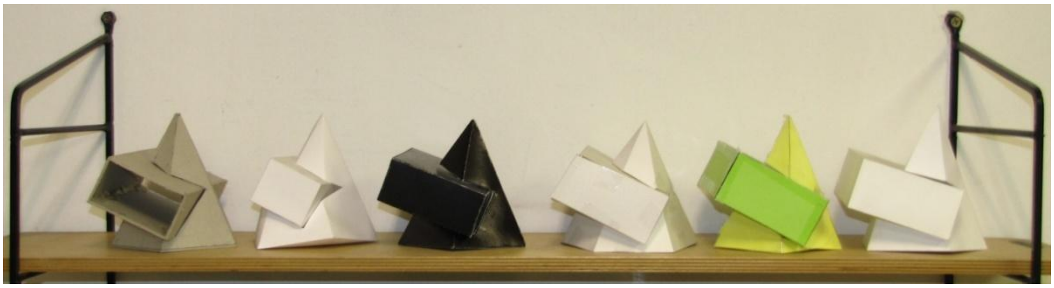
3.3.2. A térszemlélet-fejlesztés hagyományos módszerei a műszaki felsőoktatásban

„... mint minden gyakorlati dolog, utánzással és gyakorlással tanulható.” (Pólya, 1988)

A műszaki felsőoktatásban a térszemlélet fejlesztésének leggyakoribb módszerei: vetületek készítése (szabadkézzel, szerkesztéssel, fotózással); vetületeken szerkesztési műveletek végrehajtása; metszetek, szelvények készítése; rekonstrukció, rajzolvasás, modellezés. Ezek a tevékenységek nem köthetők egyetlen tantárgyhoz és egyetlen szemeszterhez. A térszemlélet-fejlesztés szempontjából legjellemzőbb tantárgyak − esetenként más névvel, de hasonló tematikával − a következők: ábrázoló geometria, műszaki ábrázolás, mérnöki ábrázolás, műszaki rajz, géprajz, építészeti rajz, szabadkézi rajz, geodézia, térinformatika, műszaki informatika, számítógépes modellezés, stb. Ezek a tárgyak természetesen nem mindegyik mérnökjelöltnek kötelezőek, értelemszerűen a szakiránynak megfelelőt tanulják.

Fontos megemlíteni, hogy a tanítás során rengeteg illusztrációt használunk: fotókat, rajzokat, számítógépes modelleket; valamint valódi, kézzelfogható, esetenként szétszedhető-összerakható testmodelleket, amelyek készülhetnek gipszből, drótból, papírból, fából, műanyagból, stb. Ezek szemléltetésre, bemutatásra szolgáló alakzatok, amelyeket a hallgató passzívan szemlél. A következő bekezdésekben viszont az aktív cselekvésekről esik szó, összhangban például Széplaki Györgyné tanácsaival: „építsd meg, rajzold le, próbáld meg elképzelni.” (Széplakiné, 2008)

A felsőoktatásban is komoly kihívást jelenthet egy papírmodell elkészítése, a lapok pontos méretének megszerkesztése, amit az áthatások bonyolíthatnak. Ezután jól meg kell válogatni a ragasztási fülek helyét, majd türelmünket és kézügyességünket próbára téve következik a rajz körbevágása, a papír élek mentén történő pontos összehajtása és végül az összeragasztása. Nem síklapú, pontosabban síkba nem kiteríthető testek esetén a testhálózatok helyett lemezes modelleket készíthetünk papírból, ezeket esetenként még ragasztani sem szükséges. (Kárteszi, 1966) (Horváth, Kiss & Horváth, 1991) (Kántor Sándorné, 1993)



28. ábra. Egy órai szerkesztési feladat alapján azonos méretben készült papírmodellek. Balról a második a legrosszabb modell, több szempontból is hibás: rossz a téglatest mérete, az oldallapokat nem sikerült pontosan szerkeszteni, ezért a gúla alaplapja domborúvá deformálódik; illetőleg az áthatásnál a kelleténél nagyobb lyuk keletkezett

Nagyon jó és népszerű modellezési lehetőség a felsőoktatásban az úgynevezett tésztahíd-építő verseny.* Ezenkívül változatos élvázas modellek építhetők szívószálak és cérna (vagy vékony gumizsinór) felhasználásával. A szívószálak színesek, olcsók, könnyen darabolhatók. A cérnaszálakat vagy a gumizsinórokat átfűzhetjük a szívószálakon, majd a csúcsoknál megköthetjük ezeket. A kész modell jól deformálható; miáltal az nem törékeny, és esetenként igen kis helyen elfér.

A legnagyobb előnye ezeknek a modelleknek, hogy tanulmányozható rajtuk az acélvázas, üvegborításos (úgynevezett függönyfalas) épületek merevítése. Maga az épület váza, vagy annak egy része (például a kupola váza), egymáshoz rögzített acélgerendákból áll, majd ezt a vázat üvegtáblákkal burkolják. A dilatáció miatt fontos a csomópontok, és a csomópontokban a rögzítések gondos megtervezése. Az ilyen rendszerek tulajdonságait tanulmányozzuk merev rudakból és csuklókból álló absztrakt modellekkel, amelyeknek a vizsgálata érdekes geometriai és gráfelméleti problémákat vet fel. (Katona & Nagy, 2010)

* A versenyen zömmel építőmérnök-jelölt hallgatók indulnak saját tervezésű és építésű híddal. A spagettitésztából és ragasztóból építhető híd maximum 1 kilogrammos lehet, a ragasztó nem haladhatja meg az össztömeg 10%-át, a hídon pedig lennie kell egy 5 centiméter széles „útnak". Az nyer, akinek a hídja a legnagyobb terhelést kibírja. A világrekordot magyarok tartják, 2009-ben az 1 kilogrammos híd 442 kilogramm terhelést még elbírt, és csak 443 kilogrammos terhelés hatására tört el és omlott össze.

3.3.3. Számítógéppel támogatott oktatás

> *„A komputer a gépek Proteusza. Lényege az univerzialitás, ereje a szimuláció képességében rejlik. Számtalan formát ölthet, számtalan feladatra alkalmas, tehát számtalan féle ízlésnek meg tud felelni.” (Papert, 1988)*

A tanulást a tanórán segítő eszközöknek két legfontosabb típusa a szemléltetőeszközök és a kísérleti eszközök. Szemléltető eszköz például egy térkép, egy földgömb, egy kitömött állat, vagy éppen egy geometriai test famodellje. Kísérleti eszköz például fizikában a Mikola-cső, a kémiában a lombik, a matematikában pedig a Varga Tamás-féle logikai készlet, a Dienes-féle színes rúdkészlet és újabban a dinamikus geometriai program. (Varga, 1973) (Dienes, 1999) (Katona, 2008)

A leggyakoribb tanítást segítő univerzális eszköz évszázadok óta a tábla, fejlődik, de nem váltja ki semmi. Fejlődése: fekete tábla, zöld tábla, szárazon törölhető tábla, flipchart, aktív tábla. Amíg a tábla a tanórai munka egyik legfontosabb eszköze, addig az otthoni önálló tanulás legjelentősebb eszköze még ma is a nyomtatott könyv. Ezek a tanulást segítő eszközök is fejlődnek, fejlődésük követi az adott kor technikai színvonalát, de ezzel együtt újabb eszközök is megjelennek. A fénykép, a mozgókép, a hangrögzítés feltalálása után megjelentek az ezeket a technikákat alkalmazó taneszközök is. Nincs ez másképpen a számítógép esetében sem, egyre inkább beépül az oktatási folyamatba.

A számítógép kivételes, semmihez sem hasonlítható erejét univerzialitása adja. Olyan szemléltetőeszköz, amely egyesíti a diavetítő, az írásvetítő, a filmvetítő, a magnetofon, a lemezjátszó, és a videómagnó funkcióit. A hálózatba kötött multimédiás számítógépek kiváltják a nyelvi laboratóriumot. A pedagógiai cél szerint a komputer kísérleti eszköz is lehet, szabadon változtathatjuk a bemenő paramétereket és megfigyeljük a végeredményt. Ha akarjuk, vizsgáztató eszköz; ha akarjuk feladatgenerátor. Az alábbi táblázatban pontokba foglaltam, hogy az oktatási folyamat különböző szervezeti kereteiben milyen funkciókat láthat el egy modern, internet-eléréssel rendelkező, projektorhoz kapcsolt, multimédiás számítógép.[*]

[*] A felsorolás sorrendje nem tükröz fontossági sorrendet. A felsorolásban hangsúlyosabban szerepelnek e dolgozat témájához kapcsolódó funkciók.

A számítógép lehetséges szerepei a tanítási-tanulási folyamatban:

- A tanár előkészítő munkáját segítő eszköz
    - pontos és dinamikus szerkesztőeszköz
    - dinamikus ábrakészítő eszköz
    - prezentáció készítéséhez használható eszköz
    - feladatgenerátor (Katona, 1997)
    - adatbázis, információforrás
    - oktatásmenedzser
- Az tanár órai munkáját segítő eszköz
    - dinamikus modellező, kísérletező, szimulációs rendszer szemléltetéshez és kísérletezéshez
    - pontos és dinamikus szerkesztőeszköz
    - multimédiás tudásközvetítő, ismeretközlő, vetítőeszköz
    - adatbázis, információforrás
    - a számonkérés eszköze
- A hallgató órai munkáját segítő eszköz
    - dinamikus modellező, kísérletező, szimulációs rendszer
    - problémamegoldási segédeszköz
    - adatbázis, információforrás
    - pontos és dinamikus szerkesztőeszköz
- Az önálló tanulást segítő eszköz
    - multimédiás tudásközvetítő, ismeretközlő eszköz
    - problémamegoldási segédeszköz
    - dinamikus modellező, kísérletező, szimulációs rendszer
    - pontos és dinamikus szerkesztőeszköz
    - tudásszintmérő eszköz
    - adatbázis, információforrás
    - tanulásmenedzser

Bár a számítógép a tanulási-tanítási folyamat minden fázisában használható eszköz, de véleményem szerint nem pótolhatja a személyes pedagógiai ráhatást, és nem helyettesítheti, csak kiegészítheti a többi jól bevált eszköz használatát.

A fentebb felsorolt szerepek közül ebben az értekezésben is és az oktatási kísérlet során is a számítógép tudásszintmérő szerepét teljesen mellőztem; adatbázisként és oktatásmenedzserként csak kevésbé hangsúlyosan alkalmaztam; ugyanakkor a dinamikus modellezőképességét és a problémamegoldásban használható alkalmasságát intenzíven kihasználtam, és a hallgatóimat is erre biztattam. (Katona, 2008), (Katona, 2009), (Katona, 2012)

A számítógéppel támogatott oktatásnak jelentős, terjedelmes irodalma van. A függelékben felsorolok 16 olyan tudományos folyóiratot, amely kifejezetten a számítógépes tanulással, tanítással foglalkozik. (Vö. 12.1) Például a Journal of Computer Assisted Learning (a Számítógéppel Támogatott Tanulás Folyóirata) 1985 óta jelenik meg rendszeresen. Szinte minden oktatással foglalkozó folyóiratban esik szó a számítógéppel támogatott oktatásról, csak úgy záporoznak az új hangzatos elnevezések: multimedia tutoring, e-learning, virtual mentoring, online instruction és ezek mindenféle kombinációi. (Az e-learninget nem szoktuk lefordítani, de a távmentorálás és a virtuális pedagógia kifejezések a magyarban is használatosak.) Terjedelmi okokból ezek elemzésére nem térek ki, a következőkben inkább csak megemlítem a fő áramlatokat:

A Sulinova Adatbank és a Sulinet Digitális Tudásbázis (SDT) óriási adatbázisok, bennük sokoldalú információk: lexikonszerű leírások, multimédiás oktatóanyagok, tanmenetek, feladatlapok, tesztek, stb. Felölelik a közoktatás, a szakképzés, a felsőoktatás és a közművelődés egyes területeit. Hátrányuk talán éppen a sokszínűség: minőségük nem egységes, bizonyos témakörök túlsúlyban vannak, míg másokhoz alig lehet valami anyagot találni. (Így például a „térszemlélet” kulcsszóra mindössze 3 találatot kapunk, kettőt művészettörténeti, egyet pedig matematikatörténeti témában.) Többen az SDT-t nem csak önálló tanulásra, hanem intenzív órai felhasználásra is ajánlják. (Hunya, Dancsó & Tartsayné, 2006) (Dancsó, 2007)

Kárpáti Andrea sokféle kutatást végzett a számítógéppel támogatott oktatás témájában, kedvező tapasztalatairól egy tucatnyi cikkben számolt be. Például (Kárpáti, 1999) (Kárpáti, 2003) (Kárpáti & Molnár, 2004). Nem mindig csak a számítógéppel támogatott oktatás előnyeiről ír, hanem megemlíti a hátrányokat, nehézségeket is. Vizsgálja az oktatóanyagok minőségét, ajánlásokat fogalmaz meg a digitális tananyagot készítők számára.

Richard E. Mayer szintén a téma szakértőjének tekinthető. Ő is tucatnyi cikket és könyvet is írt a témában, sokan és sokszor hivatkoznak rá. Például (Mayer R. E., 1999) (Mayer & Moreno, 2002) (Mayer R. E., 2002). Tanulságos kísérletek egész sorát végezte el, és megállapította, hogy nem minden diáknál válik be a módszer, sőt, előfordulhat olyan tanuló is, akinél kifejezetten visszafogó hatása volt a kezdetleges multimédiával támogatott oktatásnak. (Mayer & Sims, 1994) (Mayer R. E., 1997)

Szerencsére a legtöbb szerző nem elégedett meg azzal, hogy leírta a kísérleteit, hanem kritikusan szemlélte az eredményeket, és leírta, hogyan érdemes multimédiás oktatóanyagokat fejleszteni. Nem lepődünk meg azon, hogy a digitális tananyagok fejlesztésének alapelvei megegyeznek az általános pedagógiai alapelvekkel. (Joyes & Frize, 2005) (Sorden, 2005) (Tempelman-Kluit, 2006) (Shrestha, May & Edirisingha, 2009) Sokan ezt nem veszik figyelembe, megelégednek a technika nyújtotta lehetőségek öncélú kihasználásával, és emiatt például ilyen kritikák jelennek meg a pedagógiai szaklapokban: „A ma multimédiáinak döntő többsége hitvány, és a fejlődésnek nyomát sem látni.” (Hanczár, 2007)

Komenczi Bertalan szerint ez azért van így, mert sokan megelégedtek a hagyományos tananyag egyszerű digitalizálásával, és nem történt meg az új médiumhoz illeszkedő didaktikai tervezés és a lehetőségek integrálása. (Komenczi, 2004)

A helyzet azért nem ennyire elszomorító, például Bancsik Zsolt - Juhász Imre - Lajos Sándor „Ábrázoló geometria szemléletesen” című kiváló színes elektronikus könyve kinyomtatható, hagyományos tankönyvként is használható; ugyanakkor számítógépen olvasva az ábrák „megelevenednek”, interaktív 3D illusztrációkká válnak. (Bancsik, Juhász & Lajos, 2006)

Vegyük figyelembe, hogy a számítógépet nem csak multimédia tartalomszolgáltatónak lehet használni. Remek példák vannak az internet segítségével végrehajtott kooperatív tanulásra, (McLoughlin & Lee, 2008) (Molnár P., 2009) a számítógéppel támogatott kreativitás fejlesztésére, (Veenema & Gardner, 1996) a számítógéppel támogatott problémamegoldásra is. (Kramarski & Liberman, 2003) (Fried & Simonovits, 2005) (Zheng & Zhou, 2006)

A szimulációs oktatási és vizsgálati módszer kifejezetten olyan terület, amelyet komputer nélkül nagyon körülményes lenne művelni. A számítógépes szimulációt az oktatásban a kísérletek elvégzése helyett alkalmazzuk, ha a kísérlet túl veszélyes lenne, ha túl drága lenne, ha a megfigyelendő objektumok túlságosan kicsik vagy nagyok, ha a folyamat túl lassan vagy túl gyorsan játszódik le, vagy ha nem állnak rendelkezésre a megfelelő eszközök. Nem csak a természettudományokban használatos, hanem a társadalomtudományokban és a gazdaságtudományokban is a sokparaméterű folyamatok eredményeinek becslésére.

A számítógépet tehát sokoldalúan használják a kutatásban, az iparban és az oktatásban is. Az előző fejezetekben már megemlítettem néhány számítógépes játék előnyeit, de ezen túlmenően a következő fejezetekben láthatunk egészen más jellegű, biztató kezdeményezéseket a számítógéppel támogatott térszemlélet-fejlesztésre is.

3.3.4. Számítógéppel támogatott térszemlélet-fejlesztés

Az előző pontokban ismertettem a térszemlélet-fejlesztés hagyományos eszközeit és módszereit, valamint a számítógéppel támogatott oktatás elméleti és gyakorlati alapjait. *A kettő összekapcsolásának, a számítógéppel támogatott térszemlélet-fejlesztésnek* az egyik technikai feltétele, hogy informatikai eszközökkel is tudjunk megfelelő térélményt biztosítani. Erről lesz szó a következő pontban.

3.3.4.1. A térélmény biztosításának technikai lehetőségei

Bármilyen fejlett is a számítógépek és az egyéb eszközök grafikája, a megjelenítőjük, a kijelzőjük többnyire sík. Hogyan fokozhatjuk akkor a felhasználók számára a térélményt? Ebben a pontban látni fogjuk, hogy erre számtalan lehetőség van, és ezek külön-külön is, de együttesen alkalmazva még inkább a tér illúzióját keltik.

A két szemünkkel látott kép háromdimenziós élményének a magja a binokuláris látás. (Vö. 3.1.1) Ha tehát valahogyan elérjük, hogy a két szemünk ugyanarról a tárgyról egyidőben mást és mást lásson, akkor máris biztosítottunk egyfajta térélményt. Ennek előnye, hogy a háromdimenziós kép a megfigyelő akaratától függetlenül jön létre, mert az agyunk a két különböző képet összeintegrálva dolgozza fel. Ezt a hatást sokféleképpen el lehet érni:

- sztereó dianézővel
- virtuális valóság sisakkal
- polárszűrős szemüveggel
- holográfiával
- analglif technikával (Pál, 1961)
- nyomtatott ábrapár segítségével (Nagy B. , 2004).

Ha az előzőekben ismertetett lehetőségektől eltekintünk, és csak a hagyományos monitort vagy kijelzőt használjuk, akkor is kellő térélményt tudunk biztosítani a takarások, a fények és árnyékok, a perspektíva és a mozgásparallaxis segítségével. (Vö. 3.1.1) Különösen hatásos a módszer, ha a felhasználó saját maga tudja irányítani a modell forgatását, a nézőpont megváltoztatását. Ekkor saját maga vezérli a modell mozgásának irányát és sebességét, és érzékszervei összekapcsolják az élményt.

A virtuális 3D modellekből 3D nyomtatók segítségével valódi 3D tárgyakat készíthetünk.

Ahogyan a 3D-képes hardverek egyre többet és egyre olcsóbban tudnak, azt a szoftveripar is igen jól kihasználja. Egyre több programtípus képes kiváló minőségű, kicsinyíthető, nagyítható, forgatható 3D modellek előállítására. Régebben ez leginkább a játékprogramok és a CAD rendszerek egy fontos tulajdonsága volt, manapság a legtöbb matematikai programcsomagnak létezik 3D-képes verziója: Derive, Maple, MuPAD, Mathematica. Ugyanez igaz a Logo teknőcgrafikára (Elica), a dinamikus geometriai programokra (Cabri 3D, GeoGebra) és az animációszerkesztőkre (3D Studio) is.

3.3.4.2. Korábbi eredmények

A számítógéppel támogatott térszemlélet-fejlesztéssel kapcsolatban az én vizsgálataimmal párhuzamosan is folytak és folynak kísérletek, mások is 10-20 éve gyűjtik a tapasztalatokat. Példaként 5 cikket említek: (Lamit & Paige, 1986), (Paukowitsch, 1988), (Davis, 1999), (Papp, 2010) és (Kovács & Hoffmann, 1997). Ezek a kísérletek zömmel egyedileg fejlesztett szoftverekkel történtek, és a térszemlélet-fejlesztés egy kisebb, jól körülhatárolt részét vették célba. Például az utoljára említett szerzőpáros a Monge-projekcióval kapcsolatos tudnivalók egy részét szemléltette vele. Ahogyan majd a következőkben látni fogjuk, az én vizsgálataim az általános célú szoftverek használhatóságára, és a komplex térszemlélet-fejlesztésere irányulnak.

A mérnöki gyakorlatban az utóbbi két évtizedben a számítógépes szerkesztések (nevezzük inkább számítógépes modellezéseknek) kerülnek előtérbe. A régebbi szoftverek a háromdimenziós modelleket a két dimenzió felől közelítették meg, például nézetekből építették fel. A hardver feltételek jelentős javulása lehetővé tette, hogy az újabb szoftverek ezzel szemben éppen fordított logikával dolgozzanak: a háromdimenziós modellt készítjük el például szilárdtest-primitívekből kiindulva, és a számítógép generálja ezeknek az alakzatoknak a nézeteit, vetületeit, metszeteit; az axonometrikus és perspektív képeket, valamint a látványterveket is.

Itt tehát egy igen lényeges, minőségi ugrás figyelhető meg számítógépi grafikában és vele párhuzamosan a számítógéppel támogatott térszemlélet-fejlesztésben. Hellmuth Stachel, a bécsi Technical University of Vienna professzora 1993-ban a „German-Austrian University-Software Award” díjat nyerte el egy oktatási célú 3D-CAD szoftver kifejlesztéséért.

A számítógépet feltalálása óta használják problémamegoldásra. Az első, számítógép segítségével bizonyított tétel a négyszín-tétel volt, 1976-ban. Ebben a bizonyításban több hibát találtak, amelyeket 1996-ra sikerült kijavítani, de az esetek nagy száma miatt (633 eset) a bizonyítás még mindig komputert igényel. Ugyancsak számítógéppel bizonyították be 2010-ben azt a tételt, hogy a Rubik-kocka bármelyik összekevert állásából legfeljebb 20 forgatással kirakható. (www.cube20.org) (Vö. 3.2.2)

A számítógép gyors műveletvégző képességét leginkább a számelméletben és az analízisben tudjuk jól kihasználni. Például az alábbi két, magyar nyelven is elérhető, kifejezetten a számítógépes problémamegoldással foglalkozó könyvben egyetlen geometria feladat – pláne térgeometria feladat – sincs: (Nievergelt, Farrar & Reingold, 1977) (Fried & Simonovits, 2005) Amióta azonban a hardver feltételek alaposan megváltoztak, és a grafika is rengeteget fejlődött, lehetőségünk nyílik térgeometriai problémák esetében is a komputer segítségét igénybe venni: (Katona, 2008), (Katona, 2009), (Katona, 2012).

3.3.4.3. A térszemlélet fejlesztését célzó szoftverek

A számítógépi grafikában megfigyelhető minőségi változás a térszemlélet-fejlesztésben való felhasználási lehetőségeinket és a tanítás hatékonyságát egyaránt növelheti. Egy számítógépes 3D modellező rendszernél ma már alapvető követelmény és igény a valós időben elérhető valósághűhöz közeli minőségű megjelenítés, a modell szabadon forgatható, közelíthető-távolítható. Az alábbiakban megemlítünk néhány ilyen számítógépes alkalmazást.

Adott feladattípusra készült térszemlélet-fejlesztő szoftvereket fog össze a DALEST projekt. (Developing an Active Learning Environment for the Learning of Stereometry.) Az alkalmazások között van 3D virtuális építőjáték, megforgatással szilárdtesteket konstruáló szoftver, metszetkészítő, testháló-készítő, stb. (Jones és mtsai., 2007), (Pittalis, Mousoulides & Christou, 2008). Egy ELTE munkacsoport szoftvere az alsó tagozatosok térszemlélet-fejlesztését célozza meg játékos módon, gyerekeknek szóló mesével, grafikával. (Munkácsy & Bontovics, 2010)

Egy további térszemlélet-fejlesztő szoftvert készített egy maláj munkacsoport. Témánk szempontjából ez azért érdekes, mert a szerzőhármas kifejezetten a mérnökjelölt hallgatók számára készítette az alkalmazást, és ki is próbálták azt egy 136 fős mintán. (Ahmad, Khairul & Azniah, 2006.) Hasonló kísérletet végzett egy kínai team. Virtual Geometry Learning System névre keresztelt szoftverüket próbálták ki egy 55 fős főiskolai csoporton, míg a kontrollcsoport létszáma 51 fő volt. (Yun, Xi & Li, 2006.) Mindkét munkacsoport kedvező tapasztalatokról számolt be.

Spanyolországban az eCIGRO és eREFER névre keresztelt alkalmazásokat 150 mérnökhallgató használta. A szokásos CAD megoldásokkal ellentétben ezek a szoftverek a hagyományos kézi rajzolás logikája alapján képesek 3D modellezésre. A bemenő és a kimenő mérést összehasonlítva az eredmények kedvezőnek mondhatók.

(Contero, Company, Saorin & Naya, 2006) Egy másik célszoftver az anyagszerkezettel foglalkozó mérnököknek kíván segítséget nyújtani. A „Materials in Focus" nevű alkalmazás segítségével a kristályos anyagok felépítését, atom- és molekulaszerkezeteket tanulmányozhatunk. (Mohler, 2001)

Nagyné Szilvási Márta, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem tanára több térszemlélet-fejlesztő szoftvert is készített (N.Szilvási, 2012). Az egyik program, a Compoly (Composition of Polyhedra) egyik érdekessége, egyik különlegessége, hogy a modellezett testek az előző fejezetben ismertetett anaglif szemüveg segítségével 3D-ben is megtekinthetők. (Vö. 3.3.4.1)

Az én vizsgálataim annyiban különböznek a fentebb említettektől, hogy egyrészt én egy egész szemeszter anyagát lefedtem különböző és sokszínű segédletekkel, másrészt én nem egyedileg fejlesztett szoftverekkel dolgoztam, hanem két univerzális szoftverrel. Ezekről lesz szó a következő két pontban.

3.3.4.4. Általános célú, a térszemlélet-fejlesztésben is jól használható CAD/CAM szoftverek

Az általános célú szoftverek közül a CAD/CAM rendszerek jól használhatók a térszemlélet fejlesztéséhez (Mohler, 2006), (Bognár & Kaczur, 2008), (N. Szilvási, 1991), (N. Szilvási, 1997). Nagy előnyük, hogy összekapcsolják az elméletet a gyakorlattal, ugyanis ezeket a szoftvereket ipari felhasználásra, tervezésre, gyártáselőkészítésre tervezték.[*] Ezek a programok síkbeli műszaki rajzok elkészítésére és 3D modellezésre egyaránt alkalmasak. Igen nagy pontossággal lehet velük szerkeszteni, az alapalakzatokat igen sokféle adattal megadhatjuk.

A CAD rendszerek objektumai változatosak: pontok, egyenesek, görbék, spline-ok, lemezek, felületek, hálók, szilárdtestek. A szoftver szinte minden objektuma paraméterezhető, és ismeri a geometriai kényszereket is. A szoftver kiszámítja egy testmodell fizikai jellemzőit, például tömegét, térfogatát, tömegközéppontját, stb. A kész modellek azonnal gyártásba küldhetők, léteznek olyan marógépek, illetve 3D nyomtatók, amelyek képesek a CAD fájlokat közvetlenül olvasni.

[*] A CAD/CAM jelentése: Computer Aided Design / Computer Aided Manufacturing, azaz számítógéppel segített tervezés / számítógéppel segített gyártás. Néhány iparban használt CAD szoftver:

- Graphisoft ArchiCAD,
- Autodesk AutoCAD,
- Autodesk Revit Arhitecture,
- Kubotek CADkey,
- Nemetschek AllPlan.

A térszemlélet fejlesztése szempontjából lényeges, hogy a modellt bármilyen nagyításban, bármelyik oldalról megtekinthetjük; elkészíthetjük bármely metszetét és vetületét. A modell megjelenítése történhet élvázzal, takartvonalasan, valósághűen, vagy újabban úgynevezett röntgen látványstílusban, azaz félig átlátszóan, mintha kicsit szennyezett üvegből lenne. A program megszerkeszti az áthatásokat is.

Én is vizsgáltam a CAD rendszerek hasznosságát a geometriai térszemlélet fejlesztésében. Eredményeimről a későbbi fejezetekben számolok be. (Vö. 5.6.2)

3.3.4.5. Általános célú, a térszemlélet-fejlesztésben is jól használható dinamikus geometriai szoftverek *

Az általános célú szoftverek közül a dinamikus geometriai szoftvereket is sikerrel alkalmazzák a geometria oktatása során. A dinamikus geometriai programok (Dynamic Geometry System, DGS-rendszerek) olyan, elsősorban oktatási célra tervezett szoftverek, amelyek tartalmazzák a geometriai alapalakzatokat és transzformációkat. Segítségükkel az alapvető szerkesztési műveletek gyorsan és pontosan elvégezhetők.

A DGS fő erejét a dinamikus jellege adja. A szoftver megjegyzi a szerkesztés menetét, és a közben keletkezett kényszereket végig megtartja. Ilyen kényszer például, hogy egy egyenes áthalad egy ponton és merőleges egy másik egyenesre. Ha most az alapalakzatok helyzetét változtatjuk, az egész szerkesztés követi a változtatásokat. Ily módon gyakorlatilag végtelen sok konfigurációt vizsgálhatunk egyetlen szerkesztéssel. Gyakori példa, hogy megszerkesztjük egy hegyesszögű háromszög három magasságvonalát, majd a háromszög egyik csúcsát az egér segítségével vonszoljuk (közelítőleg a szemközti oldallal párhuzamosan). A háromszög három magasságvonala mindvégig egy ponton halad keresztül, viszont ez a magasságpont először a háromszög

---

* Néhány dinamikus geometriai szoftver:

- Cabri (www.cabri.com)
- Euklides (www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPdigitalis.php?op=euklides)
- Cinderella (www.cinderella.de)
- GeoGebra (www.geogebra.org)
- Geometer's Sketchpad (www.keycurriculum.com/products/sketchpad)

3D-képes dinamikus geometriai szoftverek:

- Cabri3D (www.cabri.com)
- Euler3D (www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPdigitalis.php?op=euler3d)
- GeoGebra 3D beta (www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp)

egyik csúcsába, majd a háromszögön kívülre „vándorol”, ahogyan a háromszög egyik szöge derékszög, majd tompaszög lesz.

Ily módon a DGS kiválóan használható gyors szerkesztésre, szemléltetésre, geometriai konfigurációk elemzésére, diszkusszióra, tételek megsejtésére és problémamegoldásra is. A legtöbb DGS-ről szóló cikk az euklideszi síkgeometria sikeres tanításáról számol be, de vannak a geometriai térszemlélet fejlesztéséről és kifejezetten mérnökjelöltek tanításáról szerzett jó tapasztalatok is. (Vásárhelyi, 1999) (Berta & Stankov, 2004)

A DGS-sel támogatott geometria oktatással kapcsolatban a szerzők kiemelik, hogy a szoftver igen sokféle módon és igen sokféle célra használható az alsó tagozattól kezdve a felsőoktatásig. (Árki, 2003), (Árki & Német, 2004) Az alkalmazást a táblázat-kezelőkhöz is hasonlítják, mindkettő a megadott alapadatokból, a megadott szabályok alapján valamilyen produktumot „gyárt”. A táblázatkezelő adatsorokból adatsorokat, diagramokat; a DGS pedig adott pontokból, szakaszokból, egyenesekből, stb. további pontokat, szakaszokat, egyeneseket, illetve más geometriai alakzatokat. Az eredmény minden esetben egyértelmű hozzárendelésen (függvényeken) alapul, így mindkét alkalmazástípus erősíti a funkcionális gondolkodást. (Oldenburg, 2008)

A DGS szoftverek segítik tételek, állítások, feladatok és problémák eredményének megsejtését. Egyrészt egy szerkesztéssel számtalan különböző konfigurációt tanulmányozhatunk, másrészről a szerkesztés pontossága, gyorsasága általában felülmúlja a körzős-vonalzós szerkesztését. További előny, hogy a DGS rendszerek jól kezelik a koordinátákat, tehát összekapcsolják az analitikus geometriát a szintetikus geometriával. Ebből következően új problémamegoldó, kísérletező eszközzel van dolgunk. (Ambrus G. , 2001) (Katona, 2008)

Ripco Sípos Elvira aktívan használja a DGS programokat a felsőoktatásban, tucatnyi cikke jelent meg a témában, sok pozitív tapasztalatról és sok nagyszerű alkalmazási lehetőségről számol be. A szoftvereket felhasználja a sík- és a térgeometria tárgyalásához is. (R. Sípos, 2007) (R. Sípos, 2009) (R. Sípos, 2010) Nagyné Kondor Rita szintén aktívan használja a DGS programokat a műszaki felsőoktatásban, tapasztalatai kedvezőek. (Nagy-Kondor, 2007) (Nagy-Kondor, 2010)

Egy másik kísérletben matematika tanárjelöltek 8 héten keresztül, heti 2 órá-ban tanultak feladatmegoldást 3D-képes dinamikus geometriai program segítségével. (A cikk szerzői ezt azért tartották fontosnak, mert a felsőoktatásba kerülő hallgatók térszemlélete messze elmaradt az elvárástól.) A kurzus eredményesen zárult, a tesztek eredménye alapján elmondható, hogy a hallgatók térszemlélete javult. (Güven & Kosa, 2008)

4. A kutatás hipotézisei

„A formális matematikatanítás elhagyása szükségszerűen sok hibával jár majd, és csak évek múlva tisztázódik, hogy mi a legjobb, ..., ha ugyan egyáltalán létezik egyetlen legjobb.” (Dienes, 1999)

A 3. fejezetben ismertettem azokat az eredményeket, amelyek a kutatásom elméleti alapjait képezték. Mások eredményeit megismerve is maradtak számomra nyitott kérdések. Mindezek alapján és saját 10 éves tapasztalataim, kísérleteim alapján a következő hipotéziseket fogom vizsgálni egy empirikus oktatási kísérlet megtervezésével és végrehajtásával:

H0 főhipotézis
Az általam kidolgozott és használt matematikadidaktikai eszközrendszer alkalmazásakor a jó térszemléletű mérnökjelölt hallgatók tartalmas, sikeres és hasznos munkát tudnak végezni, ugyanakkor a fejlesztésre szorulóknak is eredményesen tudunk segíteni.

Egy olyan rendszert dolgoztam ki a térszemlélet fejlesztéséhez, ami könnyen beilleszthető volt a mérnökképzés ábrázoló geometria oktatásába. Ennek a matematikadidaktikai eszközrendszernek a domináns összetevői a probléma-orientált és empirikus matematikatanítás didaktikai elvére és az analógiára épülő tananyag-szervezés, valamint a belső differenciálás módszerének számítógéppel támogatott megvalósítása. Az általam fejlesztett eszközrendszer fő jellemzői:

- Spirális felépítés. Az ismeretek később újra felbukkannak, de akkor már magasabb szinten.
- Az analógiák tudatos, széleskörű használata.
- Teljesség. A segédanyagok lefedik az egész szemeszter tananyagát.
- Sokszínűség. Többféle teljes segédlet felajánlása, amelyek mindegyike többféle munkamódszerrel feldolgozható. Legfontosabb, hogy önálló tanulásra is alkalmas legyen.
- Gyakorlatorientáltság. Az anyagban az érdeklődés felkeltése és a problémafelvetés megelőzi az új ismeretek közlését. A tananyag lehetőség szerint szorosan kapcsolódik valamilyen gyakorlati problémához.
- Problémaorientáltság. Az általános térszemlélet fejlesztése és a térgeometria problémák megoldására vonatkozó kompetencia növelése hangsúlyosabb a szerkesztési algoritmusok megtanulásánál.

- Lehetőség a differenciálásra. A segédanyagok lehetővé teszik a belső differenciálást.
- A segédanyagok ingyenesek, könnyen terjeszthetőek; hardverigényük nem magas; nem kívánják meg nehezen elérhető szoftverek telepítését.
- Nyitottság. Mindig megemlítem az aktuális anyaghoz kapcsolódó általánosítási lehetőségeket, az éppen tanultakon túlmutató problémákat.
- A manuális készségek és a számítógépes modellezés párhuzamos fejlesztése.

H1 hipotézis

A mérnökképzésben a számítógéppel támogatott ábrázoló geometria oktatás hatékonysága – az ismeretanyag elsajátítását illetően – eléri a hagyományosét, ugyanakkor alkalmas a széleskörűen használható számítógépes 3D modellezési kompetencia fejlesztésére is.

Úgy ítélem meg, hogy napjainkban a számítógépet a frissen érettségizett diákok nagy többsége jól kezeli, hallgatóinknak tehát nem okoz gondot a háromdimenziós modellezés gyors elsajátítása. Mindeközben nem sérülnek a műszaki ábrázoló geometria hagyományos értékei, tehát a tantárgy által megkövetelt célok, kompetenciák továbbra is elérhetők: „A térbeli formák és azok összefüggéseinek felismerése. Térszemlélet fejlesztése, konstruktív térszemlélet kialakítása. Építészeti problémák geometriai megfogalmazása és azok szerkesztő-rajzolással való kivitelezése.”*

H2 hipotézis

A számítógépes modellezési eszközrendszer használatával kibővül a felvethető problémák köre és fejlődik a hallgatók problémamegoldó potenciálja.

Hallgatóink a számítógépes modelleket jól hasznosíthatják a térgeometriai problémák felvetése, elemzése, megoldása, diszkussziója közben is.

* A SZIE YMÉK Építészmérnök BSc szak Ábrázoló geometria (SGYMASZ214XXX kódú) és az Építőmérnők BSc szak Ábrázoló geometria (SGYMASZ2021XA kódú) tantárgy oktatási céljainak szó szerinti és teljes átvétele. Lásd az alábbi dokumentumok 14. oldalán: http://www2.ymmf.hu/sites/default/files/kepzesek/tanterv/bsc_epitesz_2011.pdf és http://www2.ymmf.hu/sites/default/files/kepzesek/tanterv/bsc_epito_2011.pdf

H3 hipotézis

A számítógéppel támogatott oktatással fejleszthető az információk önálló megkeresésének, rendszerezésének és elsajátításának képessége, az élethosszig tanulás kulcskompetencia.

Napjainkban nehéz az önálló tanulást informatikai háttér nélkül elképzelni, de például a világhálón rendelkezésre álló (nem mindig megbízható) óriási információ-mennyiség miatt hallgatóink segítségre szorulnak ezen a téren.

H4 hipotézis

A számítógéppel támogatott műszaki ábrázoló geometria oktatása során az SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Kar tananyag- és elvárásrendszerének eredményes teljesítésén túl fejleszthető a térszemlélet, amely az építész szakmacsoportokban alapvető kompetencia.

A háromdimenziós modellező- és dinamikus térgeometriai programokkal dolgozva jól fejleszthető a geometriai térszemlélet. Ezekkel a programokkal dolgozva a hallgatók a későbbi tanulmányaik és a gyakorlati munkájuk szempontjából is igen hasznos plusz tudást szereznek, miközben a műszaki ábrázoló geometria tárgy további céljai (lásd előző oldal lábjegyzet) sem szorulnak háttérbe.

H5 hipotézis

A differenciált műszaki ábrázoló geometria oktatásban részt vevő tanár a tanítási-tanulási segédletek megtervezését, elkészítését és gondozását informatikai háttérrel – többek között az általunk készített, kipróbált és közzétett elektronikus segédanyagokkal – hatékonyabban végezheti mint más eszközökkel.

Az órai differenciálással és a segédletek színesítésével megnövekedő oktatói terheket az informatikai háttér (feladatlapok, videók, mintaszerkesztések, leírások és egyéb e-tananyagok) használatával lehet csökkenteni. Ezek a SZIE YMÉK Ábrázolás és Számítástechnika Tanszék honlapján érhetők el*, de a dolgozathoz csatolt DVD is tartalmazza.

* www.asz.ymmf.hu/geometria
www.asz.ymmf.hu/elearning
www.asz.ymmf.hu/katona

5. A térszemlélet fejlesztésére vonatkozó empirikus kutatás

„Az iskolai oktatás keretében a tanár és a tanuló közös munkáját kell megszerveznünk. A közös munkának szervezett formája a tanítási óra. Két egyformán fontos tényezője van: a tanár munkája és a tanulók aktív közreműködése.” (Csánk & Göndöcs, 1966)

Újításaim egyes részleteit az évek során sokszor kipróbáltam és csiszoltam az ábrázoló geometria, a műszaki informatika, a számítógépes szerkesztés és a dinamikus geometria tantárgyak keretében a SZIE YMÉK és a BMGE mérnökjelölt hallgatóival, valamint az ELTE TTK matematika szakos tanárjelöltjeivel.* Mintegy összefoglalásként, szintetizálásként elvégeztem egy egész szemesztert felölelő, komplex, összehasonlító oktatási kísérletet is.

5.1. Az oktatási kísérlet célja

Modern korunkra jellemző a munkavégzéshez szükséges ismeretek sokrétűsége és gyors avulása, ezért is kívánatos az élethosszig való tanulás. (Maróti, 2002). Az egyének a munkájukhoz szükséges tudás nagyobb részét már nem az iskolában szerzik meg, mert egyrészt az iskola nem győzi átadni a rendelkezésre álló hatalmas információmennyiséget, másrészt az iskolának szüksége van bizonyos időre az új ismereteknek a tanítási-tanulási folyamatba való beépítéséhez. Az egyetem elvégzése után is újabb és újabb technológiák születnek, ezeket a diplomás mérnököknek munka mellett kell megtanulniuk.

Ebből következik, hogy az egyik legfontosabb tanítási cél az általános képességek fejlesztése. Ilyen például, hogy megtanítjuk a diákokat tanulni és az információkat önállóan megkeresni, rendszerezni és elsajátítani. Mérnökhallgatók esetében hasonlóan általános, nagyon fontos fejlesztendő képesség a geometriai térszemlélet.

A kísérlet szempontjából *fölérendelt tanítási cél tehát a geometriai térszemlélet minél magasabb szintre emelése*; ezen kívül pedig a rendszerességre, a türelemre, a precizitásra és az igényes munkavégzésre való ösztönzés. Az alárendelt tanítási cél a műszaki ábrázolás, a vetítések és a metszések alapvető törvényszerűségeinek a megismertetése.

---

* Ugyanezekkel a módszerekkel és eszközökkel kapcsolatban a szerzőtársaim is gyűjtötték a tapasztalatokat, természetesen az ő visszajelzéseiket is figyelembe vettem.

5.2. A kísérletbe bevont hallgatók

Összehasonlító oktatási kísérletet végeztem a SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Kar 66 fő elsőéves BSc mérnökjelölt, 19-20 éves, nappali tagozatos hallgatójának bevonásával. A kísérletet az Ábrázoló Geometria tárgy első szemeszterének gyakorlatain végeztem el. A hallgatók a heti egy óra előadásra közösen jártak, de a heti két órás gyakorlatot két különböző csoportban látogatták. Ideálisak voltak tehát a feltételek egy összehasonlító oktatási kísérlethez. Ebből a két csoportból lett kísérleti és kontrollcsoport.

A kísérleti csoportra később „számítógépes" csoportként is fogok hivatkozni, míg a kontrollcsoportra a „hagyományos" vagy „papír-ceruzás" jelzőt is használom.

A hallgatók úgy jelentkeztek a csoportokba, hogy jelentkezéskor még nem tudták: oktatási kísérletben vesznek részt; pláne nem tudták, hogy melyik lesz a „hagyományos" módszerrel tanuló kontrollcsoport és melyik lesz a „kísérleti" csoport. (Az órarendkészítőktől mindig megköveteljük, hogy az előadás megelőzze a gyakorlatot, jelen esetben az előadások hétfőnként, a gyakorlatok pedig kedden kerültek megtartásra.)

Nem mindenki volt elsőéves, mert többen közülük már nem először vették fel a tárgyat. Szerencsére ezek a hallgatók minkét csoportban hasonló létszámban voltak jelen, így az összehasonlítás eredményét ez nem befolyásolta. Egyik csoportban sem volt különleges elbánást igénylő, testi vagy mentális problémával küzdő hallgató.

A kísérlet szempontjából lényeges a körző és a vonalzó használata, a számítógépes csoportban ezen felül a billentyűzet és az egér készségszintű használata. Ezek a motorikus előfeltételek mindkét csoportban elég jók voltak.

Kicsit előreszaladva jegyzem meg, hogy ez utóbbi – a számítógéphez kapcsolódó – motorikus előfeltételekkel mindenki maximálisan rendelkezett, senkinek soha még a legkisebb gondja sem volt. Ezzel szemben a körzővel és a vonalzóval egyesek kezdetben nehezen boldogultak.

5.3. Az oktatási kísérlet matematikai tartalma

Tantervi előfeltételek gyakorlatilag nincsenek, minden felvett hallgató érettségizett matematikából, a középiskolás geometria anyag egy részére támaszkodunk. Ezek nagy része elemi geometriai ismeret: párhuzamosság, merőlegesség, szögek, szerkeszthetőség, síkidomok, mértani testek; geometriai transzformációk, hosszúság, terület, térfogat, mértékegységek, méretarányok; valamint az analitikus geometria egyes elemei: a koordináta-rendszerek és helyvektorok.

Adottnak tekintettem az Ábrázoló Geometria tárgy első szemeszterének követelményrendszerét, tanmenetét, tantervét, heti ütemezését, a házi feladatok listáját, a zárthelyi és pótzárthelyi dolgozatok tematikáját és időpontját.

A tantárgyleírás, a követelményrendszer, a konkrét házi feladatok, a zárthelyik, a kiadott segédletek, valamint a hallgatók által elért eredmények a függelékben megtalálhatók. Az első szemeszter lényegében a párhuzamos vetítések alapvető tulajdonságaival, gyakorlatban a Monge-projekcióval és az axonometriával foglalkozott.

Az évek óta jól bevált óraterven nem változtattam, és a kísérlet változóinak redukálása végett a számonkérés módszerein sem, tehát zárthelyik és a házi feladatok körzővel és vonalzóval készített – keretezett és megfejelt – rajzok beadásából álltak. A rajzok többsége A/4-es lapon elvégzett egyetlen szerkesztés, a többi A/3-as méretben készült, és esetenként több részfeladat megoldásából állt. (A keretezés szabályai és a konkrét feladatok szintén a függelékben találhatók.)

5.3.1. A feldolgozott tananyag leírása és elemzése

A szemeszter tanmenetét a tantárgy felelőse és előadója készítette. A félév során feldolgozott témák:

- Monge-féle kétképsíkos ábrázolás alapelve, alapvető térelemek ábrázolása, térelemek kölcsönös helyzete, illeszkedés és párhuzamosság
- Speciális helyzetű térelemek definíciója és tulajdonságai Monge-rendszerben
- Képsíktranszformáció, testépítés transzformációval, képies kép készítése transzformációval
- Metrikus alapfeladatok
- Sík és egyenes döféspontja, síkok metszésvonala
- Láthatóság eldöntése Monge-rendszerben
- Kúpszeletek, tulajdonságaik, szerkesztési eljárások
- Axonometriák, síklapú testek axonometrikus képei
- Síklapú testek és körök ábrázolása Monge-rendszerben és axonometriában
- Poliéderek és forgásfelületek metszése síkokkal, poliéderek és síkok áthatása

Az alábbi táblázatban látható a szemeszter heti ütemezése. Ebből az is kiderül, hogy a zárthelyi dolgozatok (a két benti rajz) időpontja már a félév elején ismert, a röpdolgozatok viszont bejelentés nélkül íródnak. (Egy-egy jellemző röpdolgozat megtalálható a függelékben.) A félév során 10 házi feladatot kell beadni.

HÉT	ELŐADÁS	GYAKORLAT	HÁZI FELADATOK
1	Térgeometriai összefoglalás. A platoni (szabályos) testek.	Alapvető szerkesztési eljárások. Alakzatok geometriai transzformációi.	1. Házi feladat (H1): Alakzatok geometriai transzformációi.
2	Az ábrázoló geometria jelentősége. Képalkotási módszerek. A párhuzamos vetítés tulajdonságai.	A kétképsíkos (Monge-féle) ábrázolás elve. Térelemek ábrázolása. Speciális térelemek. Illeszkedés és párhuzamosság	
3	Képsíktranszformáció és alkalmazásai.	Speciális térelemek, térelemek kölcsönös helyzete, illeszkedés kétképsíkos ábrázolásban. Képies kép szerkesztése transzformációval.	H2: Képies kép szerkesztése transzformációval.
4	Metszési feladatok térgeometriai tárgyalása. Egyenesek és síkok kölcsönös metsződése.	Testépítés transzformációval.	H3: Testépítés transzformációval.
5	Bevezetés a kótás ábrázolásba.	Döféspont szerkesztés. Síkok, síkidomok metszésvonala.	H4: Síkidomok metszésvonala.
6	A merőleges tengelyes affinitás. Ellipszis-szerkesztési eljárások.	Speciális helyzetű kör ábrázolása két képsíkon. Az első benti rajz.	H5: Ellipszis szerkesztése.
7	ŐSZI SZÜNET	ŐSZI SZÜNET	
8	Az axonometrikus ábrázolás elve. Gyakorlati tengelykeresztek. A merőleges axonometrikus kép.	Síklapú testek és kör ábrázolása merőleges és ferde axonometriában.	H6: Síklapú test axonometrikus képe.
9	Poliéder síkmetszete.	Poliéder síkmetszete vetítősíkkal és általános síkkal.	H7: Poliéder síkmetszete.
10	Forgásfelületek síkmetszése.	Forgásfelület síkmetszése vetítősíkkal.	H8: Forgásfelület síkmetszete.
11	Poliéderek áthatása.	Poliéderek áthatása. A második benti rajz.	H9: Poliéderek áthatása.
12	Forgásfelületek áthatása.	Forgásfelületek áthatása.	H10: Forgásfelületek áthatása.
13	Az első benti rajz pótlása.	A gyakorlati perspektíva rendszere. Egyszerű ábrázolások.	
14	A második benti rajz pótlása.	Összefoglalás, konzultáció.	

Úgy gondolom, hogy a tananyag ennél részletesebb elemzése nem szükséges, ez a feldolgozási sorrend és haladási tempó nem különbözik lényegesen a többi műszaki felsőoktatási intézményben alkalmazott szisztémától. A kísérletben tehát a tananyagon nem változtattam, hanem a feldolgozási módszereket színesítettem, bővítettem; hatékonyabbá és változatosabbá tettem az önálló tanulásra is alkalmas eszközöket; illetve saját eszközöket fejlesztettem és azokat a meglevőkkel kombinálva használtam.

5.4. Az oktatás során használt kísérleti, illetve hagyományos módszerek és eszközök

Megterveztem azokat a tevékenységsorozatokat, amelyekkel célomat el kívánom érni. A kísérlet elméleti hátterében leírt hagyományos módszerek és eszközök mellett újabb és újszerűen kombinált szemléltető eszközöket készítettem és próbáltam ki; önálló tanulásra alkalmas e-learning anyagokkal is segítettem a hallgatók munkáját; valamint az új ismeretek tanítása és a feladatmegoldások során a konstruktív megközelítést és az analógiákat hangsúlyosabban alkalmaztam.

Az általam fejlesztett oktatóanyagokban például a szerkesztések áttekinthetősége javult azáltal, hogy színeket használtam és erre hivatkoztam, mert a tapasztalat szerint a piros pontot a hallgatók hamarabb megtalálták, mint az „*A*” pontot. Az áttekinthetőséget tovább javította, hogy a szerkesztés minden egyes lépését külön-külön meg lehetett tekinteni, magyarázatokkal együtt.

Megszülettek tehát az óravázlatok, a szemléltetésre alkalmas számítógépes dinamikus modellek, az önálló tanulásra alkalmas interaktív szerkesztések és modellezések, valamint a honlapok és az oktatóvideók; ezek mindegyikét saját kezűleg készítettem.

Természetesen az órákon az általam készített eszközök nem voltak kizárólagosak, ugyanúgy használtam az évek óta jól bevált hagyományos eszközöket is.

Az oktatási segédletek tekintetében lényeges különbség volt a két csoport között. Az egyik gyakorlati csoport esetében a szerkesztések mindegyikét a fekete táblánál, körzővel és háromszögvonalzókkal mutattam be, a hallgatók is ezzel a módszerrel szerkesztettek. A táblán fehér krétával dolgoztam, a kihúzáshoz és a láthatóság szemléltetéséhez használtam csak színes krétát. Szemléltetéshez fizikai modelleket használtam, jó részüket körbeadtam.

A másik gyakorlati csoport óráit a legszellősebb számítógépterembe kértem, hogy minden hallgatónak jusson számítógép, és a padon is elég hely maradjon a körzős-vonalzós szerkesztések elvégzéséhez. A szerkesztéseket projektoron kivetítve magyaráztam el (az előadáson továbbra is többségében voltak a körzős-vonalzós szerkesztések), a szemléltetéshez javarészt számítógépes modelleket használtam.

(Ezek mindegyike megtalálható a mellékelt DVD lemezen.) A hallgatóknak szabad volt a számítógépet használniuk, de mint azt a későbbiekben részletesen leírjuk, a számonkérések mindig körzővel és vonalzóval végzett szerkesztések voltak. A hallgatók számára a számítógép használatát nem azzal a céllal tettük lehetővé, hogy a körzős-vonalzós módszernél nagyobb pontosságú szerkesztést végezzenek, hanem hogy az általam az Internetre feltöltött számítógépes 3D-modelleket tanulmányozhassák, valamint önállóan tudjanak modellezni és kísérletezni. A számítógépes laborban volt egy szárazon törölhető tábla színes filcekkel, de ezt utóbb csak kivételes esetekben használtuk.

A számítógépeken rendelkezésre álló szoftverek ezek voltak[*]:

- böngésző (Internet Explorer, PDF olvasóval és Cabri 3D megjelenítő plug-innel)
- vektorgrafikus modellező (AutoCAD 2010 magyar verzió és ArchiCAD 13 magyar verzió)
- dinamikus geometriai szoftver (Cabri 3D v2. magyar verzió)
- computer algebra rendszer (Derive6).

Utóbb az ArchiCAD-et és a Derive6-ot nem használtuk, tulajdonképpen azért, mert az AutoCAD-del és a Cabri3D-vel minden felmerülő problémát meg tudtunk oldani. A szoftverek használhatóságának részletes elemzésére a későbbiekben még visszatérek: vö. 5.6.2.

Heti két óra személyes konzultációt tartottam, amikor a hallgatók konkrét kérdésekkel és rajzokkal kerestek meg. A tárgy előadója szintén tartott konzultációt. A hallgatók sok más időpontban is megkerestek: óraközi szünetekben, lyukas órákon; illetve még a folyosón is meg-megállítottak egy-két kérdés erejéig. E-mailben is konzultáltam, a kérdésekre a választ egy-két napon belül küldtem, illetőleg csatoltam a számítógépes 3D-szerkesztéseket és modelleket vagy ezek URL címét.

Minden információ megtalálható volt a tanszék honlapján. Az információk egy része már a félév megkezdése előtt rendelkezésre állt: a követelményrendszer, a tematika heti bontásban, a zárthelyi témák és időpontok, a határidők, a pontozás; az aláírás és a jegy megszerzésének feltételei, az ajánlott irodalmak jegyzéke, stb. Az információk másik része is már előzetesen rendelkezésre állt, minden héten frissült az aktuális hét anyagával: az előadás prezentációja, a kitűzött házi és órai feladatok, a

[*] Nagy eredmény, hogy ezen szoftverek mindegyike a hallgatók számára otthon is ingyenesen elérhető volt. A böngésző és a PDF olvasó egyébként is mindenki számára ingyenes; az AutoCAD-re és az ArchiCAD-re általában is igaz, hogy mérnökjelölt hallgatóink ingyenesen letölthetik; a Cabri3D és a Derive6 esetében pedig intézményünk olyan licenszet vásárolt, ami korlátlan számú számítógépre lehetővé teszi, hogy hallgatóink ezeket használják.

gyakorlathoz készített szerkesztések, modellek, videók, stb. Az információk harmadik része utólag került fel a világhálóra: a zárthelyi feladatok a megírás után, a gyakorlaton elkészített szerkesztések és modellek a gyakorlat után; a házi feladatokra és a benti rajzokra kapott pontszámok a javítás után; a szorgalmi feladatok, a megoldások a beadás után, stb.

Az előadások és a gyakorlatok látogatottsága a korábbi évekkel összehasonlítva átlagos volt, de a mulasztó hallgatók az Interneten is minden információt és segítséget megkaptak az eredményes tanuláshoz.

5.4.1. A belső differenciálás módszerének alkalmazása

Már a témaválasztás indoklásánál is utaltam arra a tendenciára, hogy a gyakorlati órákon is növekszik a csoportlétszám, illetve, hogy a csoport összetétele rendkívül heterogén. Óriási a tudásszintbeli és a motivációs különbség is.

Úgy kellett tehát az órákat terveznem, hogy lehetőség szerint *minden tanulótípus és tudását tekintve bármilyen szinten álló hallgató megfelelő segítséget kapjon tőlem*. Mindezekből következik, hogy erősen differenciálnom kellett, ami a magas csoportlétszám és a csoportok heterogén összetétele igen komoly fejtörést okozott nekem.

A legfőbb differenciálási eszközök a papíron vagy elektronikusan közzétett feladatlapok voltak. Ezek részletesen tartalmazták egy feladat megoldásának lépéseit. Ezeken a lépéseken mindenki a saját tempójában haladhatott végig. Mindig voltak nálam tartalék gyakorlólapok, tehát ha valaki másoknál gyorsabban megoldotta a kötelező feladatokat, tudtam neki adni érdekes problémákat, gondolkodtató kérdéseket és nehezebb modelleznivalót.

A következő differenciálási lehetőség az általam felajánlott különböző segítségek használata illetve mellőzése: volt, aki önállóan rajzolta fel vagy modellezte meg számítógép segítségével a feladat által megkövetelt konfigurációt, míg mások igénybe vették az általam előre elkészített videókat, dinamikus ábrákat.

A közérdeklődésre számot tartó új szerkesztéseket általában megbeszélés keretében, a kérdve-kifejtő módszerrel közösen oldottuk meg. Csoportmunkában is dolgoztunk, a tanterem sajátosságai miatt hárman ültek egy hosszú asztalnál, ezért hármas csoportokat alkottunk. Gyakran spontán is kialakultak csoportok, mert ha önálló munkában valaki elakadt, sokszor a padtársát kérdezte meg. Ennek egyik oka lehetett, hogy én akkor éppen egy másik hallgatónak segítettem, de előfordulhatott, hogy szégyelltek valami olyat megkérdezni, amit a korábbi órák alapján már tudni kellett volna. Néha időnyerés céljából a tanári magyarázathoz (a frontális módszerhez) folyamodtam. Ez annyiban különbözött egy előadástól, hogy időben sokkal rövidebb volt, és gyakoribb volt a szemléltetés.

Az előzőekben említett munkaformákban tehát nem voltak újításaim, viszont a különböző munkaformák alkalmazásának aránya eltért a szokásos átlagtól. Ugyanakkor a tanítási-tanulási folyamatba igyekeztem beépíteni a matematika oktatás új tendenciáit, illetve igen sokféle új eszközt biztosítottam a hallgatóimnak. Az eszközök sokfélesége egyrészt változatosabbá teszi a tanulást, másfelől mindegyik tanulótípus (az auditív, a kinesztétikus, a verbális és a vizuális típus is) megtalálhatja a számára legtesthezállóbb eszközöket. Ezekről lesz szó a következő fejezetekben.

5.4.2. A realisztikus és a problémaorientált tanulási irányzat elemeinek felhasználása

Az utóbbi időben sok új matematikatanítási irányzat bukkant fel, ezek többségét jelenleg is tesztelik, finomítják. Ilyen irányzat például a projektszemléletű, a realisztikus vagy a problémaorientált oktatás. (de Corte, 1997) (Ambrus A., 2004) Igyekeztem ezen az irányzatok pozitív elemeit a tanításomba beépíteni.

A *projektmódszert* csak néhány szorgalmi feladatnál tartottam célravezetőnek. Ebben az esetben is csak egyszemélyes projektekben gondolkodtam. Például: készítsük el egy rombikus triakontaéder modelljét. Itt a projekt több részből áll, először is fel kell kutatni, hogy egyáltalán milyen testről van szó (tapasztalatom szerint ez nem egy közismert alakzat), utána el kell dönteni, hogy mely tulajdonságok alapján, milyen típusú (hálós, élvázas vagy lemezes, vö. 3.3.2) és milyen anyagú modellt (papír, karton, fa, furnér, hungarocell, gipsz, hurkapálca, fémdrót, szívószál, stb.) építünk. Meg kell választani a modell anyagához illő kötőanyagot (megfelelő típusú ragasztót, celluxot, cérnát, stb., drót esetén pedig inkább forrasztani kell), be kell szerezni az anyagokat, majd nagy türelemmel és precizitással végre is kell hajtani a feladatot. Ezután, ha az idő engedte, be is kellett mutatni a modellt a csoportnak.

Ennél nagyobb projekteket az idő rövidsége miatt elvetettem. Szintén nem adtam ki többszemélyes, csoportmunkában elvégzendő feladatot, mert a legelső szemeszterben még elég nehéz a csoportok megalakítása, hiszen én sem ismerem eléggé a hallgatókat, és ők sem ismerik eléggé egymást.

A *problémaorientált és a realisztikus* oktatási módszerekkel kapcsolatban több szerzőhöz hasonlóan (Molnár G., 2001) (Beacham & Shambaugh, 2007) én is jó tapasztalatokat szereztem. Úgy tűnik, hogy a hallgatók figyelmét az új ismeretek közlésével nehéz lekötni. Ezért érdemesnek találtam egy gyakorlati problémát felvetni, és amikor a megoldás során elakadtunk – egy új problémával találtuk szemben magunkat – már szívesebben hallgatták meg a probléma megoldására szolgáló új módszereket. Példaképpen az alábbi fotón egy modern templom fényképét mutatom, amikor szóba kerülnek a síklapú testek áthatásai.

29. ábra. Síklapokból összeállított tetőhéjalások

Itt lehetőségünk nyílt a tantárgyak közötti koncentrációra is, például az „Építőanyagok" tantárgyhoz kapcsolódva megbeszélhettük a különböző tetőfedő anyagok használatát: fémlemez, cserép, pala, zsindely, stb. Ha az építész a harangtoronyra egy barokk hagymasisakot tervez, akkor annak kivitelezése, ácsolata is igen drága, ezenkívül a fenti anyagokból csak a fémlemez jöhet szóba. Az építész ebben az esetben valószínűleg költségtakarékossági okokból csak tetősíkokban gondolkodhatott, amelyek már készülhetnek hagyományos ácsolattal és cserépfedéssel is.

A tervező mindezek ellenére valami különlegesre törekedett, ennek eredménye a képen látható megoldás. Itt következhet egy formaelemzés, és már rá is térhetünk egy négyzetes oszlop és egy szabályos négyoldalú gúla áthatásának a vizsgálatára.

5.4.2.1. Analógiák a problémamegoldásban, dimenziós analógiák a geometriában

„E problémamegoldó fogások megismertetésére nem ismerünk más módszert, mint a példákon való bemutatást.” (Nievergelt, Farrar & Reingold, 1977)

Az univerzális dinamikus geometriai szoftverek nemeuklideszi geometriák tanulmányozására is alkalmasak. A Cinderellában lehetőségünk nyílik gömbi szerkesztéseket is végezni, sőt a szoftver beépítve tartalmazza a hiperbolikus geometria Poincaré-féle körmodelljét. (Nagy-Kondor, 2003) Amennyiben más DGS rendszerekkel dolgozunk, az univerzialitást kihasználva azokkal is könnyen implementálhatjuk a nemeuklideszi geometriákat.

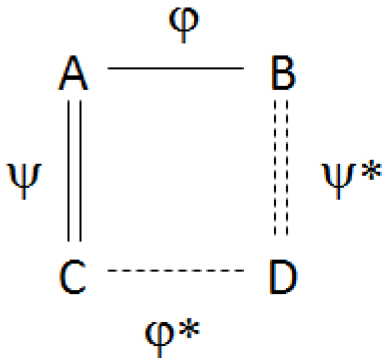
Én magam egy másik általánosítási lehetőséget vizsgáltam: a magasabb dimenziós geometriákat. A dimenziós analógia, és általában az analógia mint módszer nem csak a definíciók megfogalmazásában, hanem a fogalmak tanítása során és a problémamegoldásban is hasznos. Mivel alkalmazásával én is kedvező tapasztalatokat szereztem, az oktatási kísérletben is tudatosan használtam az analógiákat. Erről lesz szó ebben fejezetben.

A matematikában, a mérnöki gyakorlatban és a hétköznapi életben is az egyik leghasznosabb gondolkodási művelet az analógia. Pólya György több száz oldalt szentel a témának: Mathematics and Plausible Reasoning című kétkötetes könyve (magyarul: A matematikai gondolkodás művészete) első kötetének címe: Indukció és analógia. (Pólya, 1988)

Az analógia nem tisztán matematikai fogalom, hétköznapi értelemben is használjuk. Görög eredetű szó, hasonlóságot, egyezést jelent. A Természettudományi kislexikon szerint: „Az analógia két fogalom, ítélet vagy következtetés közötti hasonlóság. Analógia van például egyes síkbeli alakzatok, másrészt egyes térbeli alakzatok között (például a háromszög és a tetraéder között). Nem minden síkbeli tételnek, bizonyításmódnak érvényes a térbeli megfelelője, vagyis az analógiának nincs bizonyító ereje, a kutatásnak mégis fontos eszköze.” (Kicsi Szerk., 1971)

Az analógia tehát szubjektív hasonlóságon alapuló megegyezés két dolog között. A hasonlóság alapja a két dolog valamely közös tulajdonsága. Ha nem határozzuk meg a közös tulajdonságot, akkor az analógia nem biztos, hogy egyértelmű. Egy hétköznapi példával alátámasztva: ami Magyarországnak Budapest, az Svájcnak mi lehet? Itt más-más a válasz attól függően, hogy a tulajdonság a főváros (Bern), vagy a legnépesebb város (Zürich).

Matematikai analógia fogalmát megközelíthetjük neuropszichológiai és tanuláspszichológiai oldalról. (Vásárhelyi, Astleitner, Herber & Parisot, 1996) Az analógiás következtetés sémája:



30. ábra. Az analógia sémája (Vásárhelyi, Astleitner, Herber & Parisot, 1996)

Az egyik rendszer az *A*-ból és a *B*-ből áll, közöttük a φ reláció áll fenn. A másik rendszer a *C*-ből és a *D*-ből áll. Ha sikerül a két rendszer között kapcsolatot találni, például a ψ és ψ* által, akkor az analóg következtetés szerint a *C* és a *D* között a φ* reláció teljesül.

Pólya György a homomorfizmust (az olyan egyértelmű leképezést, amely bizonyos tulajdonságokat változatlanul hagy) az analógia egy speciális esetének tekinti (Pólya, 1977). Az izomorfizmus a homomorfizmus egy speciális esete amikor is a leképezés kölcsönösen egyértelmű. Végül az automorfizmus az izomorfizmus egy speciális esete, amikor is a leképezés értelmezési tartománya és értékkészlete megegyezik.

Például a téglalap minden oldala párhuzamos pontosan egy másik oldallal, és merőleges a többire. A téglatest minden lapja párhuzamos pontosan egy másik lappal, és merőleges az összes többire. Ez egy dimenziós analógia, de nem beszélhetünk egyértelmű leképezésről, hiszen a téglalapnak 4 oldala, míg a téglatestnek 8 lapja van, tehát nincs szó izomorfizmusról. Izomorfizmusra nagyon szép példa a hiperbolikus sík Poincare-féle körmodellje, vagy a Cayley-Klein modell. (G. Horváth & Szirmai, 2004)

Példák az analógia sokoldalú felhasználására:

- Fogalmak tanítása analógiák felhasználásával.
- Definíciók megfogalmazása analógia segítségével.

- Állítások, sejtések megfogalmazása analógia segítségével.
- Bizonyítások analógia segítségével.
- Problémamegoldás analógia segítségével.
- Mérnöki modellezés, szoftverkezelés elsajátítása analógiák segítségével.

Az analógia tehát igen sokoldalú és hasznos eszköz, a már említett Pólya Györgyön kívül több pedagógus szerint is kiemelten fontos a fejlesztése. (Takács G., 1993) (Takácsné & Takács G., 2000) (Nagy L., 2000) (Nagy L., 2006) A mindennapi életben is gyakran és jó eredménnyel használható. (Maus & Vásárhelyi, 2007)

A térgeometria tanítása során *kiemelten fontos a dimenziós analógia*. Sok térbeli fogalmat, problémát tudunk bevezetni segítségével; illetve sok térbeli konfigurációnak csak a síkbeli megfelelőjét tudjuk a tábla síkjában szemléltetni, és megkérjük a tanulókat, hogy gondolják át ennek térbeli analógját.

A síkbeli probléma 3D általánosítására számtalan lehetőségünk van. Például a háromszög analogonja lehet háromszög alapú (egyenes vagy ferde) hasáb, tetraéder, három oldalú testszöglet vagy pedig gömbháromszög is.

Sok esetben a térbeli feladat egy az egyben megoldható a síkbeli módon, ha a térbeli feladat síkmetszete megegyezik a síkbeli feladattal. (Mondhatjuk úgy is, hogy a térbeli feladat a síkbeli feladat „kihúzásával", illetve „megforgatásával" adódik.) Ha ez nem működik, akkor is rengeteg ötletet meríthetünk a síkbeli feladatok megoldásából a térre vonatkozóan is. (Vásárhelyi, 1994) Igen sok, középiskolában is tárgyalható analóg definíció, feladat, állítás és bizonyítás szerepel Fitos László: „Analóg tételek és feladatok sík-és térgeometriában" című könyvében. (Fitos, 1984) Ez a méltatlanul mellőzött mű a klasszikus euklideszi két- és háromdimenziós geometria analógiáinak valószínűleg legteljesebb magyar nyelvű gyűjteménye.

A fentiek szerint a dimenziós analógia jól használható a sík- és térgeometria tanításakor, de ha továbblépünk a magasabb dimenziók felé, akkor szinte nélkülözhetetlenné válik. Például egy (egydimenziós) szakaszból úgy kapunk négyzetet, hogy egy a szakaszra merőleges irányba meghúzzuk a szakaszt, éppen ugyanolyan távolságra, mint az eredeti szakasz hossza. A súrolt terület egy négyzetlap. Ebből a (kétdimenziós) négyzetből úgy kapunk kockát, hogy a négyzet minden oldalára merőleges irányban meghúzzuk a négyzetet, az oldalhosszával pontosan megegyező távolságra. A súrolt térfogat egy kocka. Ebből a (háromdimenziós) kockából úgy kapunk (négydimenziós) hiperkockát, hogy veszünk egy olyan irányt, ami a kocka minden élére merőleges, és ebben az irányban meghúzzuk a kockát az oldalhosszával megegyező távolságra.

Másik lehetőség, hogy analitikus geometriával dolgozunk. Egy origó csúcsú, (a tengelyek pozitív felére két oldalával illeszkedő) egységnégyzet csúcsainak koordinátái: az összes olyan számpár, amelynek mindkét tagja vagy 0 vagy 1. Egy origó csúcsú (a tengelyek pozitív felére három élével illeszkedő) egységkocka csúcsainak koordinátái: az összes olyan számhármas, amelynek mindhárom eleme vagy 0 vagy 1. Egy origó csúcsú (a tengelyek pozitív felére négy élével illeszkedő) hiper-egységkocka csúcsainak koordinátái: az összes olyan számnégyes, amelynek mind a négy eleme vagy 0 vagy 1.[*]

Mivel a magasabb dimenziós euklideszi geometria jól kezelhető analitikusan, ezt a geometriát nem nehéz számítógéppel vizsgálni, szemléltetni. (Katona & Molnár, 2007) (Katona, Molnár & Prok, 2008) A mérnökjelölt hallgatóim szerint a magasabb dimenzióknak a gyakorlati jelentősége csekély, de a természettudós és tanárjelölt hallgatóim élénken érdeklődtek a magasabb dimenziók iránt.

Egy másik lehetőség illetve szükségszerűség a nemeuklideszi geometriák vizsgálata. Ez már a mérnökjelölteket is érdekelheti: a leghosszabb hidak, és a még ezeknél is hosszabb alagutak építésekor a Föld görbületét már nem lehet figyelmen kívül hagyni. (Ismeretes például, hogy az alagutak többségét a két végéről kezdve egyszerre, szemben haladva fúrják.)

Magyarul is több kiadást megért Mansfield és Thomson: Matematika új felfogásban című négykötetes tankönyvsorozata. (Mansfield & Thompson, 1972-1974) Az első kötet második fejezetének címe: „Geometriák (beleértve az euklideszit is). Koordináták. Egyszerű alakzatok. Szögek.” A szerzőpáros tehát többféle geometriának ismerteti az alapjait, majd egy speciális esetként kezeli az euklideszi geometriát.

A mérnöki gyakorlatban és ennek megfelelően az ábrázoló geometriában is nagy jelentősége van a különböző vetítéseknek, ezért ha a képzési idő megengedné, akkor a gömbi geometrián kívül a projektív geometriának is lenne helye a mérnök-jelöltek képzésekor. Tovább bonyolódik a helyzet, ha a nemeulideszi geometriákat is háromnál magasabb dimenzióban tárgyaljuk. Ezekkel a témakörökkel azért érdemes foglalkozni, mert a geometriai térszemléletet és az analógiás gondolkodást jól fejlesztik. (Katona & Molnár, 2009) (Katona, Molnár, Prok & Szirmai, 2011)

[*] A fentiekből például azonnal adódik, hogy a négydimenziós hiperkockának 16 csúcsa van. Egyrészt, ha a 8 csúcsú kockát elhúzzuk, akkor újabb 8 csúcs keletkezik, és mivel az elhúzás iránya merőleges az összes előző oldalra, ezért ez a 8 csúcs nem esik egybe semelyik előzővel. Analitikusan: a 0-ból és az 1-ből képezhető számnégyesek száma nyilván $2^4=16$. A konstrukciókból adódóan megadhatjuk a hiperkockák definícióját is: olyan konvex geometriai testek (politópok), amelyek bármely két éle egyenlő hosszúságú, és vagy párhuzamos egymással vagy merőleges egymásra.

5.4.2.2. A dimenziók összekapcsolásának szükségessége

A geometria rendszerezése során – útban az axiomatika felé – a síkgeometriát sokszor egyszerűbb tárgyalni, vizsgálni, tanítani, mint a térgeometriát; ha másért nem is, azért, mert az alakzatokat jól le tudjuk rajzolni a táblára vagy a füzetbe. Most mégis amellett fogok érvelni – megtámogatva néhány általam nagyra becsült szerző szó szerinti idézésével – hogy lehetőség szerint *a sík- és a térgeometriát párhuzamosan tanítsuk*.

Több szerző szerint a valóságos háromdimenziós tér közelebb áll a tanulókhoz, mint annak a két dimenziós leszűkítése. Dienes Zoltán így ír erről: „A valóságos tárgyaknak egyetlen fajtája van: a háromdimenziós, térbeli tárgyak. Józan ésszel úgy tűnik, hogy a geometria tanulmányozását a háromdimenziós, vagyis valóságos tárgyak tanulmányozásával kell kezdeni. A sík a valóságban nem létezik, és így nem lehet kétdimenziós, vagyis síkgeometriára vonatkozó tapasztalatokat szerezni. Mégis, józan ész ide vagy oda, az első geometria órákon általában egyenesek, pontok, és az ezekkel kapcsolatos mérések szerepelnek. ... a gyerekeket megzavarhatja a konkrét és absztrakt dolgok állandó összekeverése ...” (Dienes, 1999)

Ha először tanítjuk a síkgeometriát, és csak utána a térbelit, akkor egész hosszú időszak eltelhet egy gyermek életében a térszemlélet egyfajta tudatos, iskolai fejlesztése nélkül. „Az időben és ismeretanyagban szétválasztott sík- és térgeometria tanítása nemcsak a térszemlélet optimális életkorban való fejlesztésének elmulasztására vezetett, hanem gátlásokat előidéző szemléleti beidegződéseket is létrehozott.” (Kárteszi, 1972)

(A térszemléletet illető) „hiányok és nehézségek okát nemcsak a tanár módszerében, de a tantervi anyagban is megtalálhatjuk. Matematikai oktatásunkat még mindig erősen áthatja a síkbeli szemlélet, s az ebből származó túlzások károsan hatnak a térszemlélet fejlődésére.” (Csánk & Göndöcs, 1966)

Igen sok olyan geometriai probléma (feladat, bizonyítás) úgy oldható meg (vagy úgy oldható meg egyszerűbben), ha összekapcsoljuk a dimenziókat. Vannak olyan síkbeli állítások, tételek, amelyeket térben bizonyítunk; és fordítva, vannak olyan térbeli problémák, amiket alkalmasan választott metszősíkban, vagy síkokban oldunk meg. Vegyük például D'Alembert tételét: három (egysíkú) kör páronként közös külső érintőinek 3 metszéspontja egy egyenesbe esik; és három (egysíkú) kör páronként közös 1 külső és 2 belső érintőinek 3 metszéspontja egy egyenesbe esik. Ezeket a síkbeli állításokat a térben bizonyítjuk, gyakorlatilag azt látjuk be, hogy a három pont nem csak a körök síkjára, hanem egy másik alkalmas síkra is illeszkedik. Mivel a két sík metszésvonala egyenes, a pontok kollineárisak.

További közismert példák a Desargues-tétel vagy a Pascal-Brianchon tétel bizonyítása, amikor a síkbeli konfigurációkat egy térbeli vetületeként kezeljük, és úgy bizonyítunk illeszkedési állításokat. Nagyszerű példa Bolyai János Appendixe is, amelyben a hiperbolikus egyenesek közötti párhuzamosság tranzitivitását először térben igazolja. (Bolyai, 1977)

Fordított eset, amikor térbeli problémákat síkban oldunk meg. A már említett metszősíkok módszerén kívül szép példák a poliéderek határoló lapjainak a síkba terítésével megoldható problémák. Még jobb a helyzet, ha a térbeli és a síkbeli bizonyítás szó szerint megegyezik, például vektorok használatánál vagy az analitikus módon történő bizonyításoknál.

Az oktatási kísérletben hangsúlyosabban alkalmazott *módszerek* áttekintése után most az általam készített és felhasznált, új, vagy nem széleskörűen elterjedt *eszközöket* vesszük sorra.

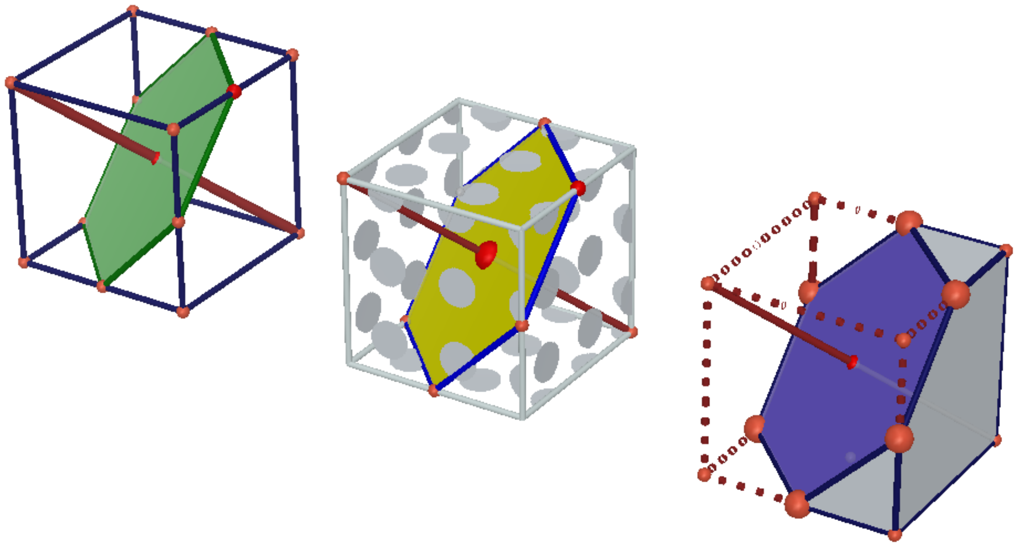
5.4.3. A szerkesztés menetének leírása az egyes lépések szemléltetésével és ezek indoklásával a Cabri3D szoftver használatával

„A térgeometriai szerkesztések csak gondolatban végezhetők el." Vermes Imre: Geometria (Vermes, 2005)

Nos, a fenti idézetben tett megállapítás ma már nem teljesen igaz, mert például a Cabri3D dinamikus geometriai programmal – igaz, hogy csak virtuálisan,– de elvégezhetjük a térgeometriai szerkesztéseket és transzformációkat.

A Cabri3D egy háromdimenziós modellezésre is képes dinamikus geometriai szoftver (DGS), kifejezetten oktatási célokra fejlesztették ki. A dinamikus jellege miatt könnyen változtathatjuk a bemenő adatokat, alakzatokat; miközben a szerkesztés kényszerei miatt a kimenő adatok, alakzatok is követik a változást. Kész eszközök vannak a leggyakoribb síkbeli objektumok és testmodellek rajzolására, de ami a legfontosabb: a program a leggyakrabban alkalmazott síkbeli és térbeli geometriai transzformációkat is beépítve tartalmazza.

A program kirajzolja a mértani helyeket. Lehetőségünk van alakzatokat animálni. A poliéderek két kattintással síkba teríthetők, a testhálók kinyomtathatók, amiből valódi papírmodellek készíthetők. A 3D modelleket számtalan vetítési móddal, sokféle megjelenítési stílusban és számtalan különböző nézőpontból vizsgálhatjuk.

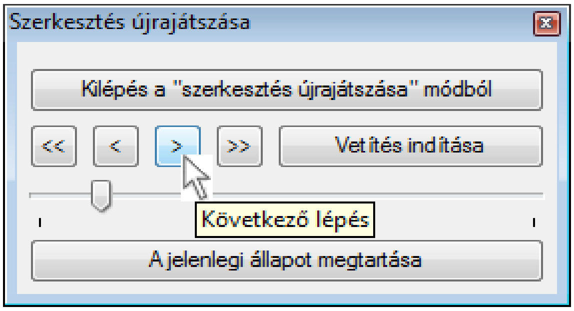


31. ábra. A Cabri3D néhány látványstílusa

A szerkesztések önálló tanulása során az egyik legnagyobb nehézség abból származik, hogy a kész ábrán a hallgatók nem tudják, hogy az egyes lépések milyen sorrendben következnek egymás után, és hogy melyik lépés miért helyes.[*] Ennek az áthidalására három módszert is alkalmaztam, ezek közül az első a Cabri szoftver által kínált nagyszerű lehetőségeket használja ki:

A szerkesztés menetének követése ebben a szoftverben automatikus: létezik egy „a szerkesztés visszajátszása” funkció, amivel az üres modelltérből kiindulva egyesével tekinthetjük meg a szerkesztés lépéseit, és ha az oktatóanyagot készítő szakember leírást is mellékelt, akkor a lépés indoklása is megjelenik. Bármelyik szerkesztési lépésnél megállhatunk, nézőpontot válthatunk, és a dinamikus jelleget kihasználva átmozgathatjuk az alakzatokat, ezáltal a lépések diszkussziója is könnyebben elvégezhető. (A szerkesztések megtalálhatók a mellékelt DVD lemezen.)

[*] Például a Monge projekciónál a rendezőkre szoktunk egy nyilat tenni, ami arra utal, hogy a pont melyik képéből következik a másik, de ez kevés. A másik lehetőség a lépések megszámozása, de ez gyakran nem egyértelmű, és nem változtat azon a tényen, hogy a kész ábrából kell nagy figyelemmel visszakövetkeztetnünk a lépéseket.



32. ábra. A szerkesztés újrajátszása mód vezérlő ablaka a Cabri3D-ben

A Cabri3D egy másik funkciója a szerkesztés lépéseinek szöveges leírása, ami még a készítő tanárnak is automatikus. Ha például kiválasztjuk az „eltolás” eszközt, egérrel rákattintunk az „*ABC*” háromszögre mint az eltolni kívánt objektumra, majd a transzformációt definiáló „v_1” vektorra, akkor a szoftver végrehajtja az eltolást, másrészt a szerkesztés szöveges leírásába beilleszt egy sort: „*ABC* háromszög eltolása ezzel: vektor v_1”.

További jelentős segítség, hogy ha a rajzterület bármelyik objektumára rámutatunk az egérrel, akkor a szerkesztés szöveges leírásában kiemelődik az aktuális objektum első előfordulása, azaz az alakzat definiáló sora. Például rámutatunk egy olyan „*P*” pontra, amelyen egy „*k*” kör és három egyenes („*a*”, „*b*”, és „*e*” egyenes) halad át, akkor a szerkesztés leírásában ezt látjuk: a „*P*” pont az egyenes „*e*” és a kör „*k*” metszéspontja. Ebből rögtön tudjuk, hogy a „*P*” pontot az „*e*” és a „*k*” definiálja, az „*a*” és a „*b*” csak egy következő szerkesztési lépésben keletkezett.

5.4.4. A szerkesztés menetének leírása az egyes lépések szemléltetésével és ezek indoklásával az AutoCAD szoftver használatával

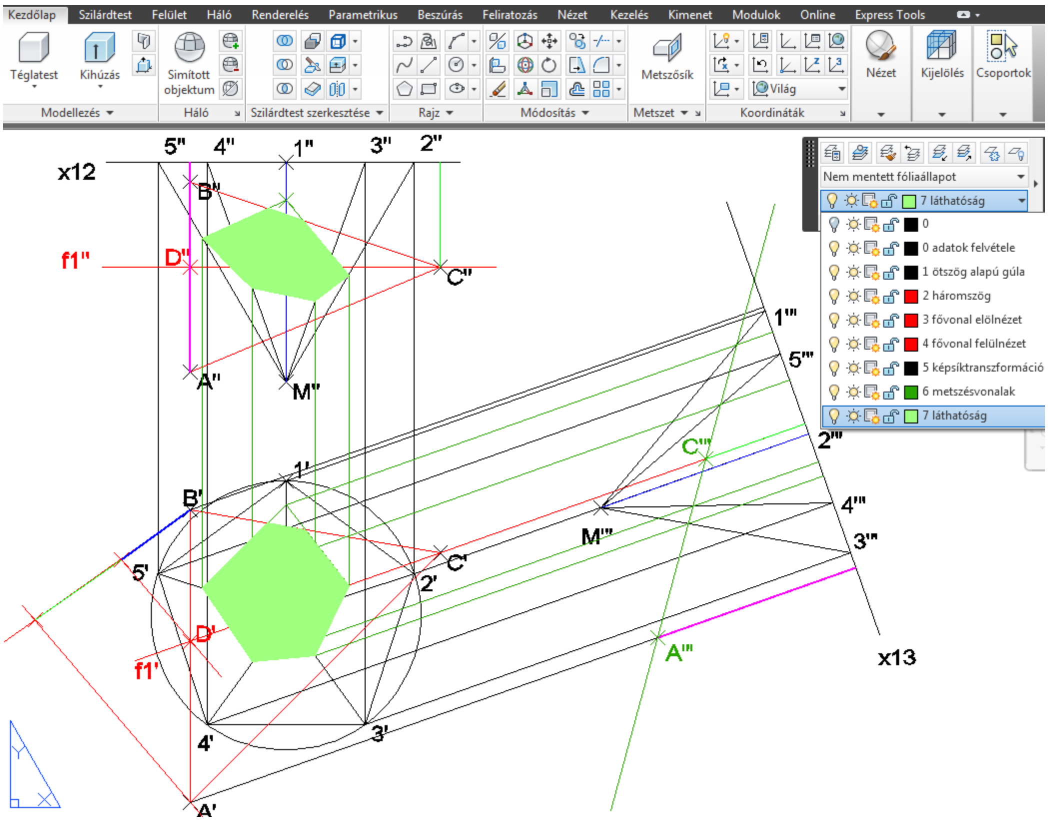
„Sokkal megbízhatóbb eljárás, ha ...újból elkészítjük az ábrákat. Ha ugyanis előttünk születik meg a rajz a maga egymásutánjában, akkor egyrészt könnyebben megértjük, másrészt jobban be is véssük emlékezetünkbe” (Vigassy, 1970)

Az AutoCAD egy általános célú, 3D-képes szerkesztő-rajzoló-modellező szoftver, elsősorban mérnöki tervezésre fejlesztették ki.* Előnye a nagyfokú pontosság,

* Erre utal a szoftvercsalád neve is: CAD = Computer Aided Design = számítógéppel segített tervezés.

az eszközök óriási száma és változatossága, valamint a gyakorlatiassága, profizmusa. További előny az alakzatok sokszínűsége: vonalak, vonalláncok, lemezek, felületek, hálók és szilárdtestek is definiálhatók benne.

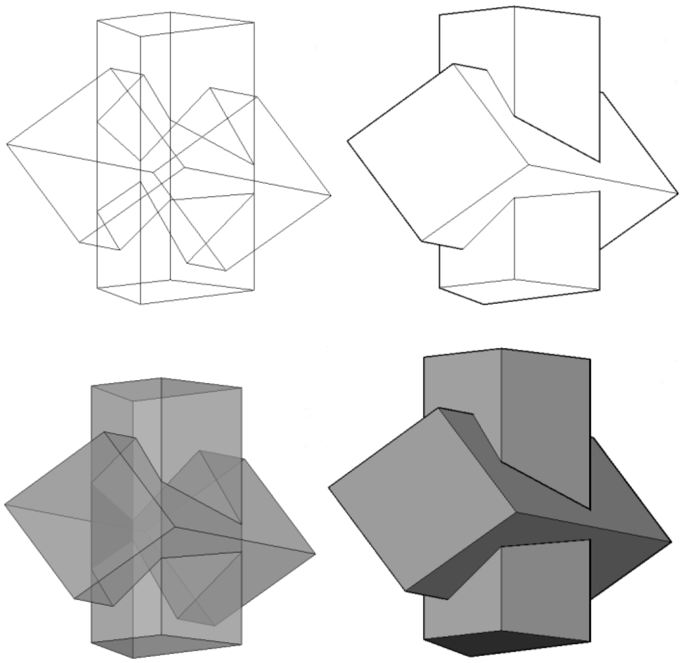
A szerkesztés lépéseinek bemutatása kapcsán többek között azt a szolgáltatását használhatjuk ki, hogy az egyes rajzelemeket külön-külön fóliákra helyezhetjük, és ezeknek a fóliáknak a láthatóságát ki-be tudjuk kapcsolni.[*] Megsorszámoztam és elneveztem tehát a fóliákat a szerkesztés lépéseinek megfelelően, és minden egyes fólián egy újabb szerkesztési lépést végeztem el, ennek a lépésnek az indoklásával egyetemben. Ezután a rajzot úgy mentettem el, hogy csak a 0 sorszámú fólia volt látható, amin a kezdőadatokat vettem fel. A hallgatók a fájl megnyitása után sorban bekapcsolták az 1-es, majd a 2-es, stb. fólia láthatóságát, miáltal mindig egy újabb szerkesztési lépés jelent meg az indoklással együtt.



33. ábra. Az AutoCAD fóliakezelése

[*] Ez a munka a Hídvégi házaspárral korábban közösen vitt projekten alapul: (Hídvégi & Katona, 2004), (Hídvégi, Hídvéginé, & Katona, 2004).

Ezzel párhuzamosan a 3D-modellen is megjelenik az aktuális szerkesztési lépés, így segítve a megértést és a megjegyzést. A 3D modell eközben bármelyik lépésnél „megforgatható”, több irányból megnézhető. Ez a forgatás először is térélményt ad, másrészt a modellt két speciális helyzetbe forgatva megtekinthető a felülnézet és az elölnézet, ezáltal a 3D modell közvetlen kapcsolatba kerül a Monge-vetületekkel. További előnyként mutatkozott a látványstílusok használata: a 3D modelleket megtekinthetjük többek között drótvázban, takartvonalas vagy tanulmánytervi ábrázolásban (tömör testként), és röntgenfelvételen is. (A rajzok megtalálhatók a mellékelt DVD lemezen.)



34. ábra. Az AutoCAD néhány látványstílusa: drótváz, takartvonalas, röntgen és tanulmánytervi

5.4.5. A szerkesztés menetének leírása az egyes lépések szemléltetésével és ezek indoklásával oktatóvideók felhasználásával

Ebben az esetben a szerkesztést videóra vettem, miközben élőszóval magyaráztam el és indokoltam meg a szerkesztési lépéseket, valamint 3D modellekkel is szemléltettem a lépések helyességét. A videók nem csak szerkesztéseket mutatnak meg, hanem felkeltik az érdeklődést, problémákat vetnek fel és oldanak meg, definíciókat szemléltetnek, tételeket bizonyítanak, stb.

A videó egyik előnye a gyorsaság. Például a hallgatónak nem kell az ábrában megkeresnie az „R” pontot, mert egérrel rámutatok, és nem kell elolvasnia a leírást, mert az élőszóval mondom el. A számítógépes videókban könnyű előre-hátra mozogni („beletekerni”), bármikor megállíthatjuk majd folytathatjuk a lejátszást („pillanat-állj”), és nem kell speciális szoftver a lejátszásához, mert a lejátszóprogram minden modern operációs rendszer része.

Az oktatóanyagot készítő tanár szempontjából előny, hogy nem kell a lépések leírását begépelni, elég elmondani. Ennek ellenére a videók készítése sokkal időigényesebb és szoftverigényesebb, mint az előző két módszer. Először is, a szerkesztést ugyanúgy el kell végezni, méghozzá „élőben”, hanggal kísérve, az esetleges bakik miatt akár többször is, majd a jól sikerült részeket össze kell vágni. A videó nagyon gondos, didaktikailag jól átgondolt terveket igényel.*

A videók egyik hátránya az eszközigény és a nagy terjedelem, de a hatékonysága jónak mondható, és a hallgatók nagy többsége szívesen használta. A másik hátrány, hogy a hang miatt órákon csak frontálisan, bemutatásra lehet használni; vagy pedig minden hallgatónak külön fejhallgatót kell biztosítani.

5.4.6. A 3D-képes szoftverek felhasználása szemléltetésre

A közismert, középiskolásoknak ajánlott Geometriai feladatok gyűjteménye I. kötet térgeometria fejezetében 1636 feladat található, ezek közül mindössze 27-hez tartozik ábra. (Horvay & Reiman, 1977) A feladatok döntő többségét tehát úgy kell megoldani, hogy a tanulóknak saját ábrát kell készíteniük. Ez nagyon jól jöhet, hiszen fejleszti a szövegértési képességet és a konstruktív geometriai szemléletet. Ezért a kísérleti csoportban sem rajzoltam plusz ábrákat a feladatokhoz, – ezt továbbra is önállóan végezték el a hallgatók, – viszont a kísérleti csoportban az ábrakészítéshez lehetett komputert is használni.

Tapasztalatom szerint sok előnnyel járt, ha az ábrákat 3D-képes szoftverrel állítottuk elő, pontosabban: ha a geometriai konfigurációnak nem valamelyik (vagy több) vetületét rajzoltuk meg, hanem 3 dimenziós számítógépes modellt készítettünk. (A felsorolás nem fontossági sorrendet tükröz.)

* A videókhoz a forgatókönyveket a tárgy előadójával, Bölcskei Attilával együtt készítettük. A videók és a videókról szóló lektori vélemény megtalálhatók a mellékelt DVD-lemezen.

- Számítógéppel – ha a hallgatók a kellő gyakorlatot már megszerezték – a modell gyorsabban készült el, mint a hagyományos módszer esetében.
- A számítógéppel kivitelezett (közelítő) szerkesztések a gyakorlatban pontosabbak a hagyományos eszközökkel elkészített rajzoknál. Megsejthető például, hogy két objektum egymásra merőleges, vagy éppen fordítva: amely lapszögről a tanuló esetleg feltételezi, hogy 90°, arról ránézésre megállapítható, hogy tompaszög.
- A dinamikus modellekkel a diszkusszió sokkal könnyebb, meg tudjuk vizsgálni az eredményt a szerkesztési alapadatok felvétele változásának függvényeként.
- A számítógépes modellek több nézetből megtekinthetők, megforgathatók, ami jelentősen fokozza a térélményt.
- A szabadkézzel készített rajzok terjedelmét jelentősen behatárolja a papír illetve a tábla mérete, számítógépes modell esetén ilyen korlát nincs, az objektumoknak mindig elég hely áll a rendelkezésére, és a modell „távoli” részeire is szabadon ránagyíthatunk. (Az AutoCAD szóhasználatában ez a „zoom” funkció.)
- A papíros síkbeli rajzon is tudunk távolságokat és szögeket mérni. Térbeli modell esetében ez már nem olyan könnyű, Monge projekció esetében ez komoly szerkesztési munkát, például képsíktranszformációt igényel. A számítógépes testmodellen mindez egy mozdulat, ráadásul a gép területet, felszínt, térfogatot, térszöget is kijelezhet, ami egyrészt a későbbi mérnöki munkában fontos lehet, illetve ez segíthet megsejteni az eredményt. A gép kiszámítja a tömör test súlypontját, tehetetlenségi nyomatékát is.
- A modellből nagyon könnyen előállíthatjuk a megfelelő metszeteket és vetületeket. Ez utóbbi például a Monge-ábrázolásban is alapvető jelentőségű.
- A modell megadja a döféspontokat, a metszetgörbéket, az áthatásokat, a láthatóságot.
- A modellt megfelelően megvilágítva megkapjuk az árnyékokat.

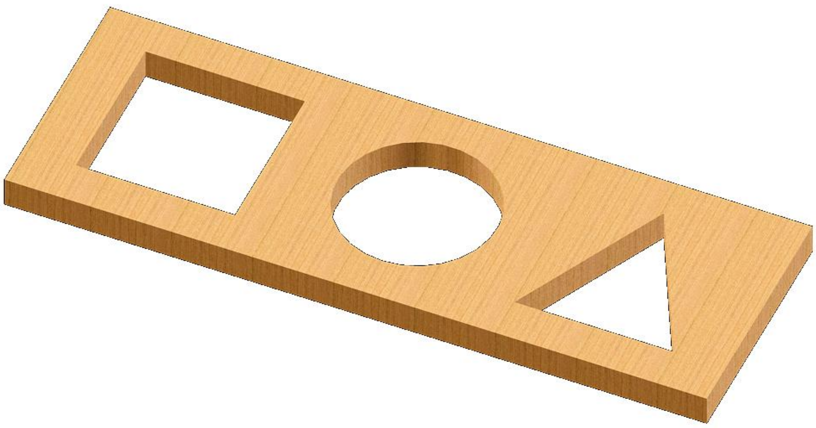
A fenti felsorolás utolsó három pontjából különösen látszik, hogy ha a zárthelyi dolgozatok alkalmával is lehetett volna használni a számítógépet, akkor a kísérleti csoport hallgatói nagy előnyt szereztek volna azokkal szemben, akiknek nem áll rendelkezésére ez a segédeszköz.

A számítógépes modellezés hátrányai:

- Nagyon kötődik egy adott technikai felszereltséghez, hiszen egy papírlap és egy ceruza sokkal könnyebben a kezünkbe akad, mint egy számítógép a megfelelő szoftverrel.
- A hallgatók elkényelmesednek, hozzászoknak a 3D kép azonnali megjelenítéséhez, nem kell mentális szerkesztést, modellezést végezni.

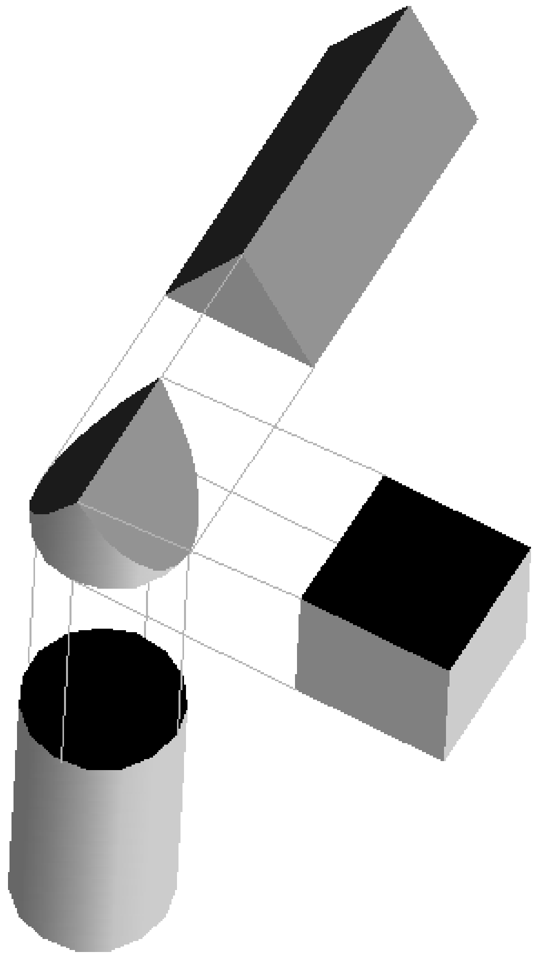
5.4.7. A 3D-képes szoftverek felhasználása problémamegoldásra

A 3D modellező szoftverek jól használhatók problémamegoldásra is. Olyan modellek is „legyárthatók”, amelyeket a leírás alapján el sem tudunk képzelni, vagy amelyekről nehéz szabadkézzel jó ábrát rajzolni. Példaként tekintsük a következő feladatot: Konstruálható-e olyan test, amely vetületi kontúrja lehet kör, négyzet és háromszög is? Más szavakkal: Létezik-e olyan test, amely pontosan átfér egy kör, egy négyzet és egy háromszög alakú lyukon?



35. ábra. Konstruáljunk olyan testet, amely pontosan átfér egy négyzet, egy kör, és egy háromszög alakú lyukon is!

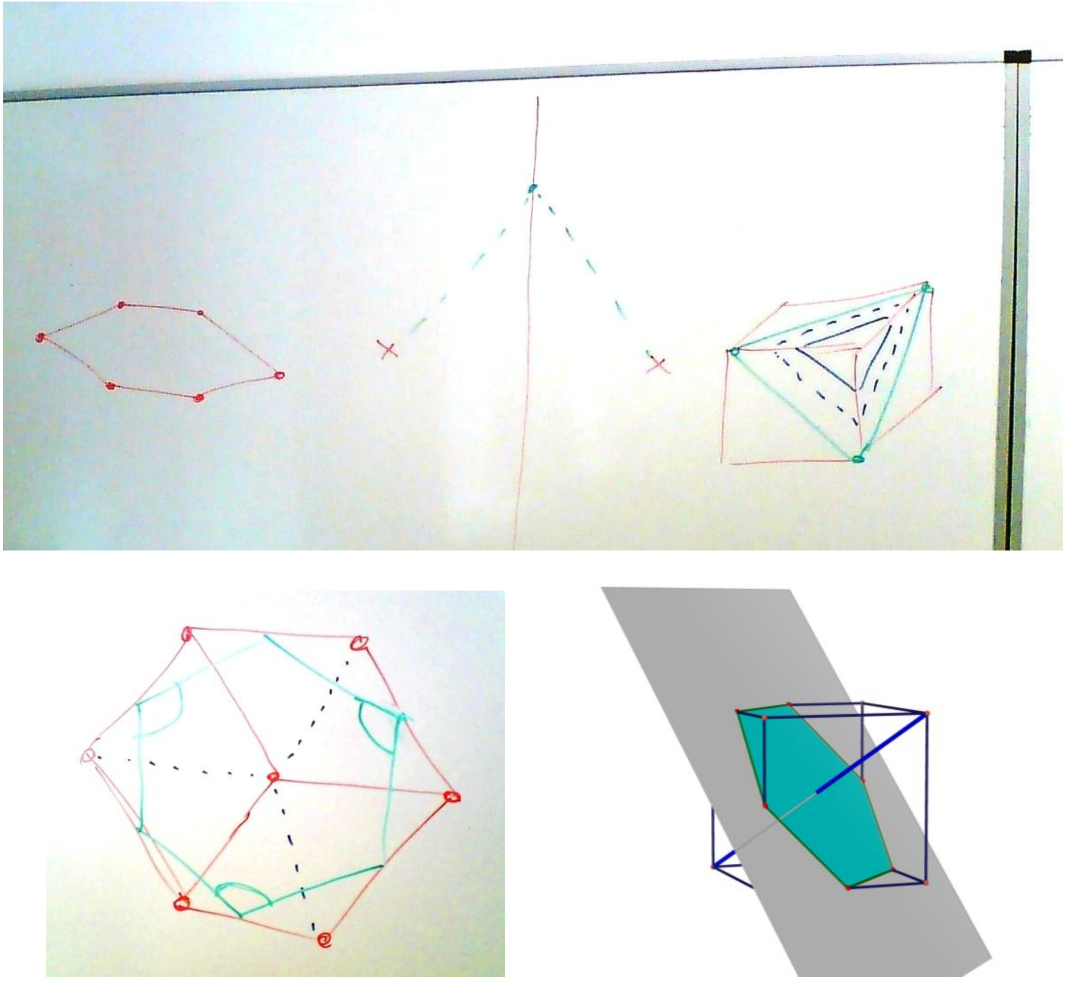
Ha nem tudjuk elképzelni a testet, például AutoCAD-del könnyedén megszerkeszthetjük. Annyit tudunk, hogy a test egyik vetületi kontúrja kör, tehát a test pontosan beleillik egy hengerbe. Hasonlóképpen, egy másik nézetből a test pontosan beleilleszthető egy négyzetes oszlopba, illetve egy háromszög alapú egyenes hasábba. Ennek a három alakzatnak a közös része (halmazelméleti metszete) a megoldás, amelyet a szoftver egy kattintásra előállít az ábrán látható módon.



36. ábra. Az előző ábrán feltett kérdés megválaszolása

Egy másik példa megoldása ezúttal Cabri 3D-vel: Mi azoknak a pontoknak a mértani helye egy kockán, amelyek egy testátló két végpontjától egyenlő távolságra vannak?

Szokatlan feladat, de mindenki hamar rájön a megoldás kulcsára. Ha egy szakasz két végpontjától egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a síkban a szakaszfelező merőleges, akkor analóg módon (vö. 5.4.2.1) a térben a mértani hely a szakaszfelező merőleges sík lesz. A végeredményt tehát a kocka testátlója felezőmerőleges síkjának és a kockának a közös pontjai adják. Ezt viszont tapasztalatom szerint nehezen tudják a hallgatók elképzelni. Az alábbi ábrán láthatunk egy-két szabadkézzel készített órai vázlatot és végül a megoldást Cabri3D-vel modellezve.



37. ábra. Mi azoknak a pontoknak a mértani helye egy kockán, amelyek egy testátló két végpontjától egyenlő távolságra vannak? Órán szabadkézzel készített vázlatok, és egy Cabri3D modell.

Sok hallgató a modellre rátekintve biztos abban, hogy a mértani hely egy szabályos hatszög és ezt indoklás nélkül el is fogadja. A bizonyítás igényének ébrentartása és a szabatos bizonyítások megbeszélése kompenzációs feladat. A jelen példa előnye, hogy elegáns bizonyítás adható a húrhatszög segítségével: A testátló két végpontja körül a metszett hat él valamelyikének a felezőpontja körül (kongruens) gömböket írunk. A két gömb metszete kör és ebbe van írva a vizsgált hatszög. A húrhatszög szabályosságához már csak az oldalak egyenlősége szükséges, ez pedig a kocka szimmetriáiból következik. Ráadásul az oldalhossz is könnyen adódik, a kocka lapátlójának a fele.

5.4.8. Általános térszemlélet-fejlesztő feladatsorok

A 3D-képes szoftverek lehetővé teszik olyan szerkesztési feladatok megoldását, amelyeket korábban csak vetületeikkel tudtunk megoldani. A 3D-képes dinamikus geometriai programokkal remekül lehet mértani helyeket is szemléltetni, amelyek természetesen alapvető fontossággal bírnak a szerkesztési feladatok megoldása során.

Példaképpen tekintsük a közismert kétkötetes középiskolás geometriai példatár 1708-as feladatát: „Bizonyítsuk be, hogy három olyan egyeneshez, amelyek közül bármely kettő kitérő, számtalan olyan egyenes vehető fel, amelyik mindhármat metszi. Egy ilyen egyenest ábrázoljunk, ha az adatokat a képeivel adjuk meg.” (Horvay & Reiman, 1977) A 3D-képes dinamikus geometriai programmal nem csak vetületben, hanem valódi 3D modellen is elvégezhetjük a szerkesztést, és a dinamikus jelleget kihasználva nem csak egyetlen megoldást, hanem az összeset is tudjuk szemléltetni. A feladatot így az alábbi egyszerű megfogalmazásban is feladhatjuk: „Adott három, páronként kitérő egyenes. Szerkesszünk olyan egyenest, amely mindhármat metszi.”

Összeállítottam egy olyan feladatlap sorozatot, amelyik a 3D-képes dinamikus geometriai programok fent említett sajátosságait kihasználva fejleszti a térszemléletet. Ez a feladatsor nem kapcsolódik szorosan a klasszikus ábrázoló geometriához, gyakorlatilag minden olyan tantárgy esetén használható, ahol cél a térszemlélet fejlesztése és a konstruktív geometriai szemlélet kialakítása. Én ezeket a feladatsorokat például azoknak a hallgatóknak adtam ki, akik órákon társaiknál hamarabb lettek készen a körzős-vonalzós szerkesztési feladatokkal. Mivel ebből következően a feladatsorokat önállóan kellett feldolgozniuk, sok feladathoz megoldási útmutatót is mellékeltem, vagy pedig olyan egymásra épülő feladatokat adtam, amelyek segítségével apró lépésenként önállóan el tudtak jutni a megoldáshoz.

Példaképpen tekintsük az alábbi feladatokat:

- Adott egy négyzet. Szerkesszünk olyan kockát, amelynek a megadott négyzet az egyik síkmetszete.
- Adott egy téglalap Szerkesszünk olyan kockát, amelynek a megadott téglalap az egyik síkmetszete.
- Adott egy háromszög Szerkesszünk olyan kockát, amelynek a megadott háromszög az egyik síkmetszete.

Ezek egyre nehezedő, egymásra épülő, elemi geometriai ismeretekkel megoldható feladatok, de hasonló feladatokat keresve eljuthatunk a felsőbb matematikához is. Például:

- Adott egy síknégyszög. Szerkesszünk olyan gúlát, amelynek a megadott négyszög az alaplapja, és a gúlát el lehet metszeni négyzetben is. (Katona, 2008), (Katona, 2012)

A feladatok és a megoldások megtalálhatók a függelékben.

5.5. Az oktatási kísérlet végrehajtása

5.5.1. Az előzetes mérés, felmérő teszt

Rögtön az első gyakorlaton a hallgatók egy feladatsort oldottak meg. Ez meglepetésként hatott különösen azoknak, akik már nem először vették fel a tárgyat, mert ilyen korábban nem volt. Akkor a hallgatók még nem tudták, hogy ugyanezt a feladatsort (a válaszok sorrendjét megkeverve) az utolsó héten majd újra megíratom. A bemenő mérés célja annak lemérése, hogy a két csoport térszemlélete között van-e lényeges eltérés (ezt a hallgatóknak is kihirdettem), illetőleg ez a teszt szolgáltatja a bázist a kimenő mérésekhez. Annak érdekében, hogy a hallgatók a tesztet nagyon komolyan vegyék, a jól sikerült megoldásokra pluszpontokat ajánlottam.

5.5.1.1. Az előzetes mérés alapvetései

Az előzetes felmérés feladatlapját önállóan állítottam össze. A feladatsort a kollégákkal átnézettem, egy másik intézményben leteszteltem. A tapasztalatok alapján bizonyos feladatok szövegezését pontosítottam, illetőleg néhány helyen könnyítettem illetve nehezítettem a feladatokat.

Az összeállítás elméleti alapját a következő irodalmak képezték: (Peters és mtsai., 1995), (Branoff, 2000), (Séra, Kárpáti & Gulyás, 2002), (Kárpáti, 2003), (Barke, Tóth & Kiss, 2003). Igyekeztem változatos és érdekes feladatokat választani.

A legtöbb feladat a széleskörűen alkalmazott Vandenberg-féle „Mental Rotational Test” (VMRT vagy MRT) átfogalmazása. (Vandenberg & Kuse, 1978) Ilyen feladat a 3., a 4., az 5., a 6., a 7. és a 8. feladat. (Vö. 3.1.3) A megoldás lényege, hogy egy (legtöbbször axonometrikus képével) megadott alakzatot egy másik irányból kell elképzelnünk, tehát vagy gondolatban nézőpontot kell váltanunk, vagy pedig gondolatban a testet el kell forgatnunk a térben.

Az első feladat a szintén klasszikusnak számító „Surface Developing Test” (SDT, papírhajtogatós teszt) egy átfogalmazása. (Ekstrom, French, Harman & Derman, 1976) (Vö. 3.1.3)

A második feladat az egyetlen, amelynél a metrikus viszonyokat, konkrétan a pontok közötti távolságokat és esetleg bizonyos szakaszok közötti szöget is figyelembe kellett venni. Ebben a feladatban szükség volt a szabályos háromszög, a négyzet és a téglalap fogalmának ismeretére.

Az előzetes felmérés feladatainak döntő része feleletválasztós volt. A találgatás kiszűrése végett minden kérdésre több helyes válasz is elképzelhető, ezek mindegyikét be kellett jelölni. A négy felsorolt válasz között azonban mindig van legalább egy jó, illetve legalább egy rossz válasz.

Elméletileg tehát $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 4 + 6 + 4 = 14$ lehetőség közül lehetett választani. Hagyományosan a találgatást a legtöbb tesztben úgy szűrik ki, hogy több (esetenként igen sok) ugyanolyan típusú feladatot adnak. A megoldáshoz szükséges idő rövidsége miatt ezt a módszert most elvetettem.

A feladatok kisebb hányada rajzolós: egy előre elkészített keretbe kellett a megfelelő vonalakat szabadkézzel behúzni. A feladatok itt 2-3 részfeladatból álltak, 2-3 különböző nézetet kellett a keretekbe elkészíteni, az egyik probléma esetében láthatósággal.

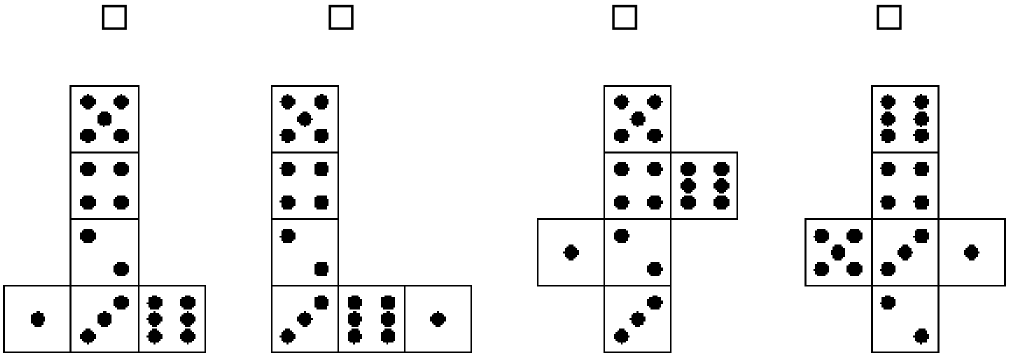
A feladatlapokra bármit lehetett rajzolni, a meglevő ábrákat ki lehetett egészíteni, stb. Csak a megadott helyre írt X jeleket értékeltem, illetve a rajzolós feladatoknál csak az előre elkészített keretbe rajzolt vonalakat. Ha egy részfeladatnál utólag jött rá valaki, hogy elrontotta, akkor azt javíthatta, de a javítás egyértelmű kellett legyen.

5.5.1.2. A felmérő teszt feladatainak részletes elemzése

A teszt kitöltése közben figyeltem a hallgatókat, és a beadott megoldásokat is elemeztem. Néhány hallgatói feladatlapot a függelékben szerepeltetek, ezek alapján jónéhány jellegzetes megoldási stratégiát és típushibát felfedezhetünk. Ezek alapján elmondhatjuk, hogy a feladatok többségénél a megoldáshoz sokféle úton is eljuthatunk. Ezek bemutatása következik most.

1. feladat: A dobókockát úgy készítik, hogy a szemközti lapokon levő pöttyök összege 7 legyen, tehát a hatossal szemközti lapon van az egyes; az ötössel átellenben van a kettes és végül a négyessel szemközti lapon van a hármas. Jelöljük meg a kis négyzetbe tett X-szel az alábbi hálók közül azokat, melyekből lehet dobókockát összehajtogatni!

(Minden kérdésre több helyes válasz lehetséges, de mindig van legalább egy helyes, és legalább egy helytelen válasz.)

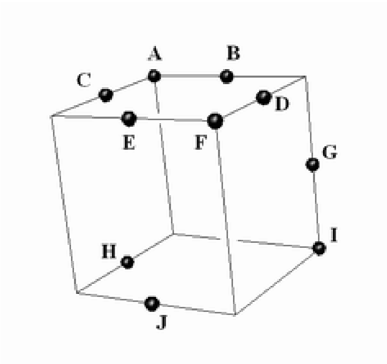


A feladat kettős, egyrészt el kell tudni dönteni, hogy mely hálókból lehet kockát hajtogatni, másrészt ha ez lehetséges, akkor ellenőrizni kell, hogy a szemközti lapokon levő pöttyök összege pontosan 7, avagy nem. Feltételeztük, hogy mindenki látott már testhálót, például akkor, amikor valamely speciális poliéder felszínét úgy definiáljuk és számítjuk, mint a határoló lapok területének összegét.

Nehézséget jelenthet, hogy a kocka testhálóját általában a jobb oldali ábrán látható módon terítik ki, és nem biztos, hogy említésre kerül, hogy egy testnek nagyon sokféle hálója létezik. A legbiztosabb megoldás, ha valaki ténylegesen gondolatban összehajtogatja a hálót, amihez persze megfelelő térszemlélet szükséges.

Ha kihasználjuk azt az egyszerű tényt, hogy egy élben szomszédos két lap összehajtás után is szomszédos marad, akkor balról a 2. háló rögtön rossz, mert a hatos szomszédja az egyes (de különben sem lehet ebből a hálóból kockát hajtogatni). a jobb szélső háló szintén ugyanezen ok miatt rossz, mert a négyessel szomszédos a hármas. A másik két hálóból lehet dobókockát hajtogatni.

2. Egy kocka drótvázán bejelöltünk néhány csúcsot és néhány él felezőpontját az ábrán látható módon. Jelöljük X-szel a helyes állításokat!



☐ az *A F I pontok egy szabályos háromszög csúcsai.*

☐ *a B D G pontok egy szabályos háromszög csúcsai.*

☐ *a C E J H pontok egy síkban vannak és négyzetet határoznak meg.*

☐ *a B D J H pontok egy síkban vannak és téglalapot határoznak meg.*

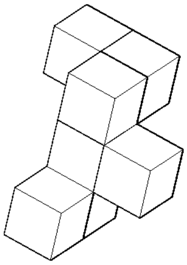
Ennél a feladatnál ismerni kell a négyzet, a téglalap és a szabályos háromszög fogalmát, fel kell tudni használni ezek legfontosabb tulajdonságait. Fel kell használni a befoglaló kocka szimmetriáit, és/vagy azt, hogy a kocka minden lapja egybevágó négyzet és a szomszédos lapok egymásra merőlegesek, a szemköztiek pedig párhuzamosak.

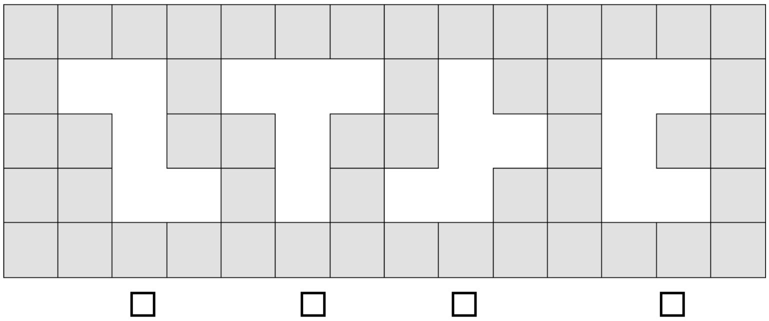
Az első két részfeladat állítását könnyebb igazolni, mert három pont mindig egy síkban van. Ha megnézzük vagy berajzoljuk a szóban forgó szakaszokat, eldönthetjük, hogy ezek egyenlő hosszúságúak, például az AF, az FI és az IA is egy ugyanakkora négyzet átlója. Másik megoldás a szimmetria kihasználása: az AF és az FI egymás térbeli tükörképei az FDH síkra vonatkozóan.

Az utolsó két részfeladatban négy pont szerepel, ezáltal nem biztos, hogy egy síkban vannak. Jelen esetben a CEJF és a BDJH is szimmetrikus az AF felezőmerőleges síkjára, tehát minkét vonallánc egysíkú. A CEJH viszont nem négyzet, mert szomszédos oldalai különböző hosszúságúak. Ha a kocka élhosszát például 2 egységnek választjuk, akkor EJ hossza 2, a CE viszont egy 1 oldalhosszúságú négyzet átlója, tehát $\sqrt{2}$ egység hosszúságú.

Az utolsó részfeladatban BD és JH párhuzamos lapokon van és egyenlő hosszúságú, de ettől a BDJH még lehetne „általános” paralelogramma is. Hogy ez valóban téglalap, az legkönnyebben a térbeli szimmetria megtalálásával adódik.

3. Hét egyforma kocka összeragasztásával kaptuk az alábbi ábrán látható testet. Jelöljük meg X-szel azokat a lyukakat, amelyeken a test (megfelelő irányba forgatva) átfér!



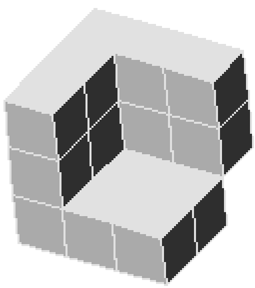


Ez egy szokásos „mental rotation test” feladat, kicsit könnyítve a lyukakat befoglaló lap vonalkázásával. A feladat szempontjából csak a test kontúrja számít, így azután csak három lényeges nézetet kell vizsgálnunk, például a felül-, elöl- és bal oldalnézetet, a másik három kontúr az előzőek tükörképe. (Elég csak a kis kocka éleinek az irányából vizsgálódnunk, mert „átlósan” nyilván még nagyobb lesz a kontúr.)

A test felülnézeti és elölnézeti kontúrja egy F betűre emlékeztető alakzat, ezeknek a tükörképe a balról harmadik lyuk, ezen tehát a test átfér. A bal oldalnézeti kontúr egy S betűre emlékezető alakzat, a test tehát a balról az első lyukon is átfér. A 2. és a 4. lyukon a test nem fér át, mert a 6 fő nézet egyike sem ilyen.

---

*4. Huszonhét egyforma kis kocka közül néhánynak néhány oldalát bekentük ragasztóval, majd összeállítottunk egy 3*3*3 kis kockából álló nagyobb kockát. A ragasztó száradása után a nem rögzült kis kockákat eltávolítottuk, és az alábbi testet kaptuk. Jelöljük X-szel a helyes állításokat! (A nem látható részről nincs információnk, tehát állításaink csak lehetőséget fejeznek ki.)*

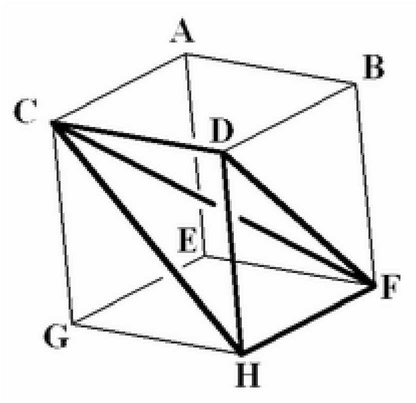


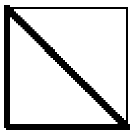
- ☐ *Lehetséges, hogy az ábrán látható test 18 kis kockából áll.*
- ☐ *Lehetséges, hogy az ábrán látható test 16 kis kockából áll.*
- ☐ *Lehetséges, hogy az ábrán látható test 14 kis kockából áll.*
- ☐ *Lehetséges, hogy az ábrán látható test üreges, tehát van benne egy minden oldalról zárt üreg.*

Egyesével megszámolva a látható testeket adódik, hogy 14 kis kocka (egy, két vagy három lapja) látszódik, 9 kis kocka biztosan hiányzik (elöl egy 2*2*2-es kocka és a jobb hátsó sarok), a többiről nincs információnk. A test tehát minimum 14, maximum 18 kis kockából áll, tehát az első három állítás igaz. A szabályok szerint legalább egy állítás hamis, tehát már készen is vagyunk. Egyébiránt a konstrukció miatt sem lehet üreges a test, mert az üregből a kis kockát a konstrukció miatt nem tudtuk volna eltávolítani. Másik megoldás: a 27 kis kockából csak egyetlenegyet vesz körül minden irányból kis kocka, a középsőt, az pedig most hiányzik, tehát a fenti test nem lehet üreges.

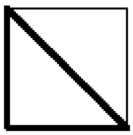
---

5. Egy kocka drótvázába vastag vonallal behúztunk egy testátlót, két lapátlót és megvastagítottunk három élt is az ábrán látható módon. Jelöljük X-szel az igaz állításokat!

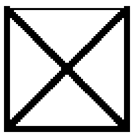




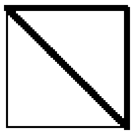
☐ *Ezt látjuk a BDHF lap felől, jobb oldalnézetből.*



☐ *Ezt látjuk az ABFE lap felől, hátulnézetből.*



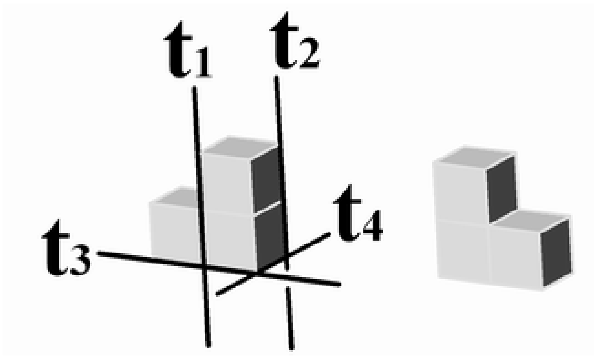
☐ *Ezt látjuk az AEGC lap felől, bal oldalnézetből.*



☐ *Ezt látjuk az HGEF lap felől, alulnézetből.*

Ismét csak vagy a kockát kell gondolatban elforgatni, vagy pedig térbeli nézőpontot váltani, lényeg, hogy a megfigyelő és a kocka relatív helyzete a megfelelőre változzon. Segít, ha a vetületet megbetűzzük, például a felső részfeladatban a nézetet kiegészítjük úgy, hogy D=C és B=A, a négyzet kontúr betűzetlen alsó két csúcsa pedig balról H=G és F=E. Ekkor vastag vonallal behúzhatjuk a HF, a HD és a DF szakaszokat. A HC ugyanaz lesz, mint a HD; a CF pedig megegyezik a DF-fel. Végül a DC nézete egyetlen pont, tehát a felső részfeladat állítása igaz. Hasonlóképpen járhatunk el a többi részfeladatnál.

6: Három egyforma kockát L alakban összeragasztottunk. Jelöljük meg X-szel az igaz állításokat!



☐ *A bal oldali testet a t1 tengely körül (megfelelő irányban) 180^0-kal elforgatva a jobb oldalival egyező állású testet kaphatunk*

☐ *A bal oldali testet a t2 tengely körül (megfelelő irányban) 90^0-kal elforgatva a jobb oldalival egyező állású testet kaphatunk*

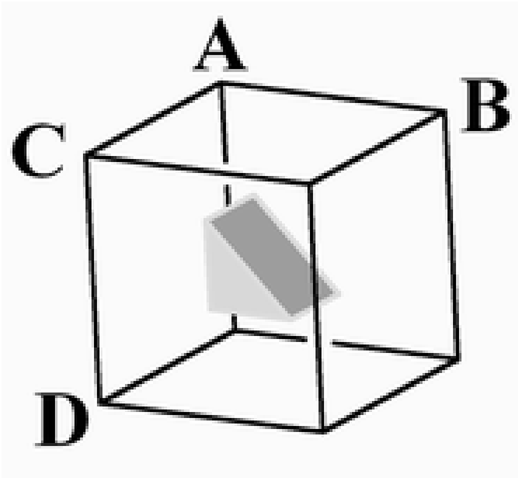
☐ *A bal oldali testet a t3 tengely körül (megfelelő irányban) 90^0-kal elforgatva a jobb oldalival egyező állású testet kaphatunk*

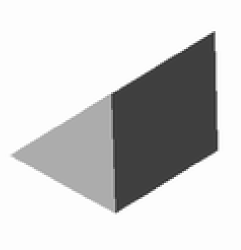
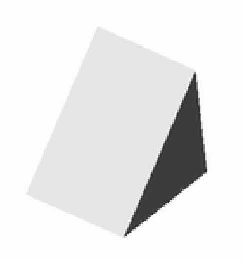
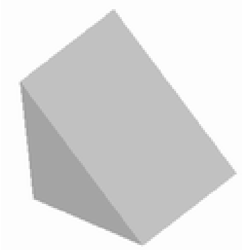
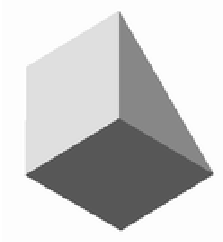
☐ *A bal oldali testet a t4 tengely körül (megfelelő irányban) 90^0-kal elforgatva a jobb oldalival egyező állású testet kaphatunk*

A feladat megoldásához szükség volt az „egyező állású” fogalom ismeretére, a tengely körüli forgatás elképzelésére és a megfelelő szögek ismeretére. Ezt a feladatot egy másik tárgy, a „Műszaki informatika II.” tanítása során tanított AutoCAD-es tapasztalatok ihlették. Sok hallgató bizonytalan a szögek mérését illetően, gyakran a derékszöget 180 foknak, az egyenesszöget pedig 90, vagy 360 foknak mondják. A térbeli tengely körüli forgatás is szokatlan, középiskolában nem tanult transzformáció.

A feladat legegyszerűbb megoldása most is az, hogy gondolatban elforgatjuk a testet (nyilván az előírt tengely körül és a megfelelő szöggel), majd a gondolatban elforgatott test állását összehasonlítjuk a jobb oldalon látható referenciaként megadott poliéder állásával.

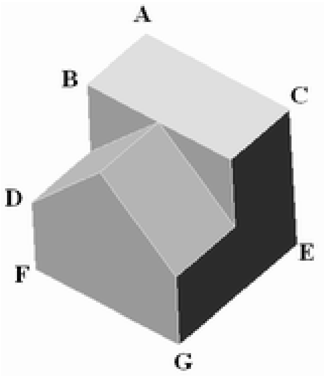
7. Egy kocka drótvázának közepébe elhelyeztünk egy harmadakkora élhosszúságú kocka felét (tömör testként) az ábrán látható módon. Jelöljük X-szel a helyes állításokat!



☐ *Ezt látjuk az A pont felől a tömör test felé nézve*	☐ *Ezt látjuk a B pont felől a tömör test felé nézve*	☐ *Ezt látjuk a C pont felől a tömör test felé nézve*	☐ *Ezt látjuk a D pont felől a tömör test felé nézve*
			

Ismét csak vagy a kockát kell gondolatban elforgatni, vagy pedig térbeli nézőpontot váltani, lényeg, hogy a megfigyelő és a kocka relatív helyzete a megfelelőre változzon.

8. Ez már nem feleletválasztós rész, itt már rajzolni kell… Egy kockából eltávolítottunk két ék-szerű részt az ábrán látható módon. Rajzoljuk be a négyzetekbe a kért nézeteket!



Rajzoljuk be, mit látunk felülnézetből

(az ABC lap felől)

Rajzoljuk be, mit látunk elölnézetből

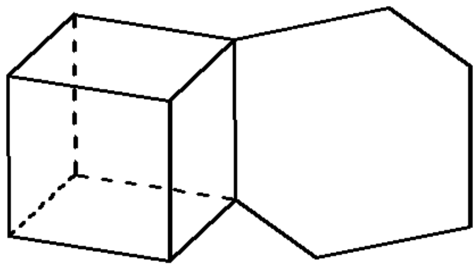
(a DFG lap felől)

Rajzoljuk be, mit látunk bal oldalról

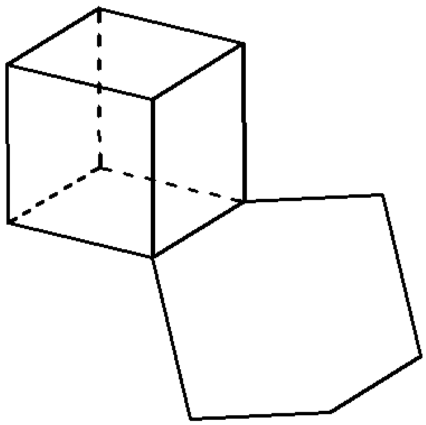
(az ABDF lap felől)

Ismét csak vagy a csonkolt kockát kell gondolatban elforgatni, vagy pedig térbeli nézőpontot váltani, lényeg, hogy a megfigyelő és a kocka relatív helyzete a megfelelőre változzon. A kért nézetek olyanok, hogy valamennyinek a kontúrja négyzet, és a nem látható éleket takarja egy látható él, figyelmen kívül hagyva természetesen a pontnak látszódó éleket.

9. Utolsó feladat. Ez már nem feleletválasztós rész, itt már rajzolni kell… Két tömör kocka az egyik él mentén csatlakozik egymáshoz. Az egyik kockát kihúztuk láthatóság szerint, a másiknak csak a körvonalát adtuk meg. Feladat a másik kocka láthatóság szerinti megrajzolása.



Ugyanaz a feladat egy másik nézetből:



Ennél a feladatnál tudni kellett, hogy a nem látható éleket szaggatott vonallal jelöljük, de ez a leírásból és a bal oldali mintából jól kivehető. Ez a feladat lényegében azt méri, hogy ha egy kockát nem a szokásos módon – például az egyik lapját nem egy vízszintes felületre állítva – szemlélünk, akkor le tudjuk-e rajzolni a megfelelő nézeteket, és ezeket ki tudjuk-e húzni láthatóság szerint.

5.5.1.3. Az előzetes mérés eredménye

A hallgatók egy része hiányzott az első gyakorlati órán, velük nem pótoltattam a felmérőt. Egyrészt a kompromittálódott feladatokat nem akartam újra felhasználni, másrészt új feladatsort sem akartam összeállítani, mert annak eldöntése, hogy a régi és az új feladatsor azonos nehézségű, új mérést vagy egy nagyon körültekintő feladatvariálást tett volna szükségessé, de mindenképpen növelte volna a kísérlet változóinak számát. Most azt az utat követtem, hogy a kísérlet és a mérések kiértékelésekor csak azoknak a hallgatóknak az eredményeire támaszkodtam, akik mindkét felmérőt, tehát a bemenő és a kimenő tesztet is megírták.

Messze legrosszabb eredmény a 4. feladatra született, a hallgatók mindössze 24%-a oldotta meg helyesen. Ez számomra mindenképpen meglepetés. Igaz ugyan, hogy a feladat szokatlan, de „józan paraszti ésszel" is könnyedén megoldható. Ennek a feladatnak az első három állítása könnyen igazolható. Mindkét megoldási stratégia könnyedén végigvihető, akár a megmaradó kis kockákat számoljuk össze, akár a hiányzó kis kockákat számoljuk meg, mindkettő célravezető és könnyű módszer.

Az utolsó állítás hamissága a feladat leírása alapján is azonnal látszódik, ugyanis nem lehet egy olyan kis kockát kiejteni, amelyiket minden oldalról közrefogtunk. Különben is ilyen kis kocka csak egyetlen lehet a 27-ből, és ez a középső kis kocka és néhány szomszédja szemmel láthatóan hiányzik. Ezt a részfeladatot kivétel nélkül minden hallgató helyesen ikszelte be, a rossz megoldások tehát azért születtek, mert nem tudták a nyilvánvalóan hiányzó, a nyilvánvalóan megmaradt, és a nem látszódó kis kockákat összeszámolni.

Rosszul sikerült még a 2. és a 7. feladat (38% illetve 44%). A 2. feladat mindegyik részfeladata legalább 68%-os lett, de az összes részfeladatot mindössze a hallgatók 38% oldotta meg hibátlanul. Itt ismerni kellett a négyzet, téglalap és a szabályos háromszög fogalmát, tulajdonságait; nagy türelemmel megkeresni az ábrában nagybetűkkel megjelölt pontokat, ezeket megfelelő sorrendben összekötni, ezután a sokszögeknek azokat a jellemző tulajdonságait kiválasztani, ami ebben az esetben célravezető, majd ezeket felhasználva kellett az állítás helyességét eldönteni. Valószínűsítem, hogy a feladat szokatlan volta és összetettsége, nem pedig a térszemlélet hiánya okozta a nehézséget.

A 7. feladatnál számítottam is rá, hogy nehezen fog menni. Egyrészt a feladat szokatlan: az éket nem a megszokott nézetekből, tehát nem elöl-, felül- és oldalnézetből kellett elképzelni, hanem a külső kocka-váz testátlóinak irányából rátekintve; másrészt a feladatot nem lehet „megkerülni": gondolatban mindenképpen nézőpontot kell váltanunk; harmadrészt meglepő, „nehezen hihető" vetületeket kapunk: az első részfeladatban a vetület kontúrja például egy szimmetrikus trapéz.

Meglepődtem viszont azon, hogy milyen jól oldották meg az első feladatot, messze ez a feladat sikerült legjobban, a hallgatók 82%-a helyesen válaszolt. Itt először is tudni kellett vagy el kellett képzelni, hogy egy kocka nagyon sokféle testhálóból összehajtható, valamint még azt is figyelembe kellett venni, hogy összehajtás után melyik lap melyik lappal lesz szomszédos, illetve szemközti. Ezek egyike sem okozott nehézséget.

A hallgatók valamennyien komolyan vették a feladatot. Nem volt olyan, aki gyorsan összecsapta volna, és olyan sem volt, aki üresen adta volna be a felmérő lapokat. Ez egyrészt köszönhető a felajánlott pluszpontoknak, illetve feltételezem, hogy senki sem akart rögtön az első gyakorlaton rossz benyomást kelteni a tanárban és a többiekben.

Összefoglalásképpen elmondhatjuk, hogy a hallgatók térszemlélete átlagos vagy annál kicsit rosszabb, egy fő oldotta meg hibátlanul a tesztet, többen pedig kifejezetten rosszul teljesítettek. Van tehát tennivaló, van mit fejleszteni.

5.5.1.4. A kísérlet során feldolgozott tananyag elsajátításának módosított céljai a felmérő teszt tükrében

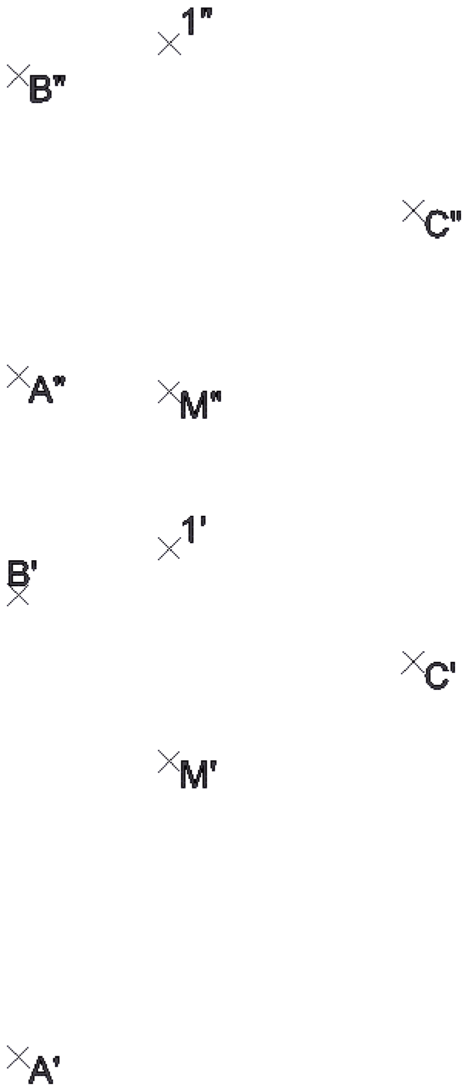
Bár a tantárgyi célok tekintetében sincs és nem is lehet változás a korábbi években megjelölt, és a többi műszaki felsőoktatási intézményben is kompetenciaként elvárt céloktól, de a hangsúlyokat eltoltuk az általános képességek felé.

- *Térszemlélet fejlesztése, konstruktív térszemlélet kialakítása*
- Térbeli formák és azok összefüggéseinek felismerése
- Építészeti problémák geometriai megfogalmazása és azok szerkesztő rajzolással történő kivitelezése
- Az építészeti gyakorlatban elterjedt egzakt ábrázolási módszerek megismerése és alkalmazása
- Vetületi képeivel megadott mértani alakzatok rekonstrukciója

5.5.2. Egy konkrét óra leírása a kísérleti csoportban

A kontrollcsoport órái nem különböztek az általában szokásostól, a kitűzött feladatokat körzővel és vonalzóval lépésenként megoldottam a táblánál, a hallgatók a saját papírlapjukra szerkesztettek. (Ez utóbbiakat egy dossziéba kellett gyűjteni, és a házi feladatokkal kiegészített portfóliót az aláírás feltételeként félév végén a gyakorlatvezetőnek bemutatni.) A lépéseket a hallgatók ötletei alapján átbeszéltük, megindokoltuk. A szemléltetéshez fizikai modelleket használtam, legtöbbjüket körbe is adtam. Néha időnyerés céljából írásvetítőt is alkalmaztam, például a felvétel táblára vetítéséhez.

A számítógépes csoportban egy jellemző órarészlet a következőképpen zajlott. A kitűzött feladat egy síklapú test síkmetszetének szerkesztése volt Monge-rendszerben: A megadott adatokból szerkessze meg a csúcsán álló, függőleges tengelyű, felül nyitott M(12345) szabályos ötoldalú gúlát, majd képezze ezen lemezes test és az ABC háromszöglemez metszetét, láthatósággal!



38. ábra.

- Tanár: Helyes ez az ábra?
- Hallgató: Elképzelhető, hogy a háromszög nem is metszi a gúlát.

- Tanár: Ott még nem tartunk, a gúlának csak két csúcsát ismerjük. Sokkal egyszerűbb dologra gondoljanak. Csak pontok vannak megadva a Monge-rendszerben.
- Hallgató: Ezek lehetnek pontok képei, mert egy rendezőre esnek.
- Tanár: Így van. Más észrevétel?
- Hallgató: A megadott adatok helyesek, mert az összes kétvesszős vetület feljebb van az összes egyvesszős vetületnél.
- Tanár: Ez miért fontos? Nem létezik olyan pont a Monge-féle rendszerben, amelyik első képe a második kép fölött van?
- Hallgató: De. Akkor csak annyi igaz, hogy az összes pont ugyanabban a síknegyedben van.
- Tanár: Egyelőre nem beszéltük meg a képsíktengely helyét, de ez a megállapítás már lehet igaz. Vizsgáljuk most inkább azt, hogy az alakzatok egyértelműen adottak-e?
- Hallgató: A háromszögnek ismerjük mindhárom csúcsát, tehát igen.
- Hallgató: A szabályos ötoldalú gúla úgy keletkezik, hogy egy szabályos ötszög csúcsait összekötjük egy ötszögön kívüli ponttal. Az ötszögnek ismerjük a síkját (vízszintes és átmegy az 1 ponton), de nem ismerjük a középpontját, tehát végtelen sok megoldás van.
- Tanár: nem csak a gúla alapja szabályos, hanem maga a gúla is.
- Hallgató: Ja, az M csúcs akkor az ötszög középpontja fölött van, tehát az ötszög középpontját megkapjuk, ha M-ből merőlegest bocsátunk az előbb említett vízszintes síkra.
- Tanár: Helyes. Először is: hogyan hívjuk a vízszintes síkot?
- Hallgató: Első fősík.
- Tanár: Másodszor: mivel a gúla a szöveg szerint a csúcsán áll, ezért M inkább a sík alatt van. Harmadszor: ha merőlegest állítunk egy első fősíkra, akkor milyen speciális egyenest kapunk?
- Hallgató: Első vetítőegyenest. Ezek szerint az ötszög középpontja egyszerűen adódik: első képe M', elölnézeti képe pedig 1".
- Tanár: Nagyon jó. Ezek szerint az alakzatok egyértelműen adottak. Hogyan szerkesztjük ezek után a gúlát?
- Hallgató: A felülnézeti képen a gúla egy szabályos ötszög, amelynek minden csúcsa össze van kötve az ötszög középpontjával.
- ...(Itt a szabályos ötszög szerkesztésének átismétlése következett.)
- Tanár: És az ötszögnek a második képe?
- Hallgató: Az egy vízszintes egyenes.

- Tanár: Precízebben.
- Hallgató: Egy vízszintes szakasz, ami átmegy az 1” ponton. Húzunk egy vízszintes egyenest az 1” ponton keresztül, és a rendezőkkel megkapjuk a gúla összes csúcsát.
- Tanár: Helyes, hajtsuk is végre a szerkesztést.
- Tanár (egy olyan hallgatóhoz, aki eddig még nem kapcsolódott be a munkába): El tudja képzelni pontosan az adott konfigurációt?
- Hallgató: Nem igazán.
- Tanár: Segítene, ha készítenénk egy modellt?
- Hallgató: Igen, ez a múlt órán is jól jött.
- Tanár: Hogyan is fogtunk hozzá?
- Hallgató: Az x_{12} képsíktengely merőleges a rendezőkre, jelen esetben vízszintes. Helyét tetszőlegesen választhatjuk meg, mert ez a végeredményt nem befolyásolja. Ha most az M'' és az 1' között „félúton” vesszük fel a képsíktengelyt, akkor az összes pont az első síknegyedbe esik. Az AutoCAD felhasználói koordináta-rendszerének az x tengelyét illesztettük rá a képsíktengelyre. Az Origó legyen most a legbaloldalibb pont rendezőjén, így az egész konfiguráció az első síknyolcadba esik.
- Tanár: Miért olyan fontosak a síknegyedek és a síknyolcadok? Könnyen elképzelhető, hogy a szerkesztés során olyan pontokat is kapunk, amelyek már nem teljesítik ezeket a feltételeket.
- Hallgató: Az lehet, de így könnyebb elképzelni.
- Tanár: Szóval, az Origó legyen az A és a B pont rendezőjén.
- Hallgató: Igen. Ekkor az A és B pontok x koordinátája nulla. Ha most visszahajtjuk az első képsíkot vízszintes helyzetbe akkor a pontok y koordinátája a képsíktengely és az egyvesszős vetületek távolsága, a z koordináta pedig a képsíktengely és a kétvesszős vetületek távolsága lesz. Az M és az 1 pont x koordinátája az A és az M pont távolságával egyenlő; az y és a z koordinátát pedig az előbbiekhez hasonlóan kapjuk.
- Tanár: Helyes, mérjük meg a távolságokat, és üssük be a koordinátákat az AutoCAD-be. A többieknek sikerült megszerkeszteni a háromszög és a gúla mindkét vetületét?
- Hallgató: Igen.
- Tanár: Hogyan tovább?
- Hallgató: Sík és egyenes döféspontjait kell szerkeszteni. Az ötszögnek tíz éle van, ezeknek és a háromszög síkjának a döféspontjaira vagyunk kíváncsiak.

- Hallgató: Szerintem egyszerűbb, ha síkok metszésvonalát szerkesztjük, mert az csak 6 lépés, hiszen a gúlát 6 lap határolja: 5 háromszög és egy ötszög.
- Tanár: Gondolják át, hogyan szerkesztettünk döféspontot és metszésvonalat, és hogy melyik módszer milyen információkat fog nekünk megadni. Azt is próbálják megbecsülni, hogy időben melyik módszer a rövidebb, illetve keressenek még egyszerűbb megoldást. Én addig ránézek a számítógépes modellre. Sikerült a modellt felépíteni?
- Hallgató: Igen. Megadtam a pontok három koordinátáját, az AutoCAD ábrázolta a pontokat. Három szakasszal összekötöttem a háromszög csúcsait, valamint egy újabb szakasszal az M és az 1 pontot. Ez a gúla egyik oldaléle.
- Tanár: Használjuk ki, hogy a gúla tengelye függőleges.
- Hallgató: Húzok egy függőleges egyenest, ami átmegy az M ponton. Ezután állítok erre egy merőleges síkot az 1 ponton keresztül, ez lesz a gúla alapsíkja.
- Tanár: Helyes, de ez fölösleges lépés. Van egy olyan parancs az AutoCAD-ben, ami egy tengely körül megsokszorozza az objektumokat, mint amikor egy óra számlapját készítettük el egy vonalból és az óra középpontjából.
- Hallgató: Emlékszem, a poláris kiosztás volt az. Most akkor a 3D poláris kiosztást kell használnunk?
- Tanár: Nem feltétlenül. Felülnézetben a gúla tengelye egy pont, tehát felülnézetben működik a sima poláris kiosztás is. Ettől még a kiosztott M1 szakasz képei „térben” lesznek, de könnyebb a parancsot felparaméterezni, mint a 3D kiosztás esetén.
- Hallgató: Akkor rámutatással megadom a középpontot, a kiosztandó szakaszt, beírom hogy 5 darab kell egy 360 fokos szögtartományban elosztva és készen is van.
- Tanár: Kiváló. Nevezze el a másolatokat: 2, 3, 4 és 5. Kösse össze a pontokat, és már meg is van a gúla drótváza. Forgassa meg a modellt.
- Hallgató: Azt látom, hogy a gúla oldalélei metszik a háromszöglapot, az alapélek nem.
- Tanár: A többieket is kérem, hogy tekintsék meg a modellt a projektor által kivetített képen.
- Hallgató: Máris spóroltunk egy lépést, mert nem kell vizsgálni a háromszöglapnak a gúla alaplapjával való metszésvonalát, tehát 6 lépés helyett 5 lépés is elég.
- Tanár: Ezt csak a számítógépes modell mutatja, vagy ez következik máshonnan is?
- Hallgató: Mivel a gúla tengelye függőleges az ötszög síkja vízszintes ...

- Tanár: Hogyan hívjuk a vízszintes síkot?
- Hallgató: ...az ötszög síkja első fősík. Az elölnézeti kép szerint a háromszög mindhárom csúcsa az ötszög síkja „alatt” van, tehát a háromszöglemez nem metszi az ötszöget, sőt még az ötszög síkját sem.
- Tanár: Bizony. Kérem, hogy nézzünk rá a számítógépes modellre elölnézetből. Mennyire speciális helyzetű a gúla?
- Hallgató: Függőleges a tengelye, vízszintes az alapja.
- Tanár: Ezt már régen tudjuk. Akkor inkább úgy kérdezem, hogy törvényszerű-e, hogy a gúla vetülete szimmetrikus a tengelyre?
- Hallgató: Egyáltalán nem. Ha most elkezdenénk a tengely körül forgatni, akkor az OM vetülete nem fedné az 1M vetületét és a szimmetria is megbomlana.
- Tanár: Tehát annyiban is speciális helyzetű a gúla, hogy az elölnézeti képen az OM és az M1 fedi egymást. Ezt persze ismét nem csak a számítógépes modell alapján mondjuk, ez ugyanúgy megállapítható a szerkesztés során is. Akkor most O1M sík milyen sík?
- Hallgató: Az yz által kifeszített síkkal párhuzamos.
- Tanár: Helyes. Fogalmazzuk ezt meg Monge rendszerben.
- Hallgató: Merőleges a képsíktengelyre, tehát profilsík.
- Tanár: És akkor az M1 szakasz egyenese?
- Hallgató: Profilegyenes.
- Tanár: És az AB szakasz?
- Hallgató: Az is.
- Tanár: Forgassuk most a számítógépes modellt egy olyan helyzetbe, hogy az ABC háromszög egy szakasznak látszódjék! Mit veszünk észre?
- Hallgató: ???
- Tanár: Hány olyan nézőpont van, amelyikből egy háromszöglap szakasznak látszódik?
- Hallgató: Végtelen sok.
- Tanár: Akkor most keressünk ezek közül egy nagyon speciálisat. Induljunk ki egy elölnézetből, és forgassuk a modellt az OM tengely körül. Elérhető így, hogy az ABC háromszöglap egy szakasznak látszódjék?
- Hallgató: Igen.
- Tanár: Miért jó nekünk ez a nézet?
- Hallgató: Képsíktranszformáció!!!
- Tanár: Kicsit bővebben, hogy mi is értsük.

- Hallgató: Ebben a nézetben a háromszög síkjának és a gúla oldaléleinek metszéspontja azonnal kijelölhető. Ez a nézet pedig Monge-ban két képsíktranszformációval előállítható.
- Tanár: Nem szoktam én ilyen nehéz feladatot adni... Esetleg csak a zárthelyi dolgozatban... Jelen esetben ugyanis egy képsíktranszformáció is elég. Hogyan kell ezt csinálni?
- Hallgató: Vegyünk fel egy első főegyenest az A ponton keresztül, majd erre merőlegesen egy első fősíkot.
- Tanár: Miért pont az A ponton keresztül?
- Hallgató: Tényleg, jobb lesz a C ponton keresztül. A főegyenes második képe vízszintes. Felveszek egy vízszintes egyenest a C''-n keresztül, ahol ez metszi az AB második képét, az lesz a főegyenes és az AB metszéspontjának a második képe. Az első képet rendezővel kapjuk... illetve mivel profilegyenes, így arányos szerkesztéssel.
- Tanár: Közben mutatom a 3D modellen a szerkesztés indoklását. Felveszünk egy első fősíkot (vízszintes síkot) a C ponton keresztül, ennek és a háromszögnek a metszésvonala első főegyenes. (Ez persze benne van a háromszög síkjában.) Most felveszünk egy olyan új képsíkot, amelyik merőleges erre a főegyenesre, tehát első vetítősík. Ezzel a háromszöglemez szakaszba vetül, a gúla pedig megmarad függőleges tengelyűnek. Hogyan haladunk tovább ezután a Monge-rendszerben?
- Hallgató: Felvettem az új képsíktengelyt a főegyenesre merőlegesen, majd az elmaradó rendezőket átmértem. Kijelöltem a metszéspontokat, ezeket visszatranszformáltam, és kész.
- Tanár: Ez gyorsan ment, de még egyáltalán nem vagyunk készen.
- Hallgató: A metszet egy ötszög. Mivel a gúla felül nyitott, ezért a láthatóság felülről egyértelmű: belül látjuk az ötszöget, ezután kifelé haladva a gúlát, majd a gúlán kívül a háromszögnek az A, a B, és a C csúcsa körüli környezetét. A gúla M csúcsa körüli környezete van takarva.
- Tanár: Nos, ezt egy kicsit elkapkodta. Ki jutott más eredményre?
- Hallgató: Az ötszöglemez és a háromszöglemez közös része egy hatszög. Egyébként a láthatóság megállapítása jó.
- Tanár: Úgy bizony. A felülnézeti képen a B'C' metszi az ötszöget. És az elölnézeti képen?
- Hallgató: Az A pont felől célszerű elindulni, a felülnézeti kép szerint ez van hozzánk legközelebb, így annak környezete látszik. A hatszögből így az M54, az M43, és az M32 lapokon levő oldalai látszódnak a többi pedig nem.

- Tanár: Helyes, ellenőrzésképpen mutatom a 3D modellen. Aki számítógépes modellt is készített, az lemaradt a papíros szerkesztéssel. Otthon be tudják fejezni?
- Hallgató: Igen, most már gyorsan fog menni.
- Tanár: Aki pedig nem készített számítógépes modellt, annak ajánlom, hogy otthon készítsen egyet, láttuk, hogy jól jöhet a megoldás megsejtéséhez is és a végeredmény ellenőrzéséhez is.

5.6. Az oktatási kísérlet értékelése, vizsgálati eredmények

„A geometria ma is benne él a természetben, és arra vár, hogy felismerjék, méltányolják. ... Ma is megvan az az esztétikai vonzereje, amellyel mindig is rendelkezett, s eredményeinek szépsége nem csökkent.” (Coxeter & Greitzer, 1977)

5.6.1. A kísérleti és a kontrollcsoport eredményeinek összehasonlítása

Az összehasonlítás alapját a következő anyagok képezik:

- A kísérleti és a kontrollcsoport tagjainál egyaránt ismerjük a *zárthelyi dolgozatok* és a házi feladatok pontszámát.
- A kísérleti és a kontrollcsoport tagjainál egyaránt ismerjük a kísérletet megelőző és az azt lezáró térszemlélet-*tesztek* eredményeit.
- *Riportok*at készítettünk véletlenszerűen kiválasztott hallgatókkal.
- *Megfigyeltük* a hallgatók önálló munkáját a gyakorlati órákon, illetve a zárthelyi dolgozatok megírása közben.

5.6.1.1. Zárthelyi eredmények, pontszámok, jegyek

A félév során kapott pontszámok részletes táblázata megtalálható a függelékben és a mellékelt DVD lemezen.

Nem vettük figyelembe azokat a hallgatókat, akik a félév során láthatóan feladták e tárgy teljesítését, elmaradoztak az órákról, a félév során nem adták be a házi feladatokat, nem írták illetve nem pótolták a zárthelyi dolgozatokat, stb. Nem is lett volna erre lehetőségünk, mert aki félév közben „eltűnt” az órákról, az utóteszten sem vett részt.

A zárthelyi eredményeket tekintve megállapíthatjuk, hogy a két csoport a tantervi kötelezettségeket megközelítően egyforma színvonalon teljesítette.

Fontos információ, hogy míg a hagyományos csoportban heten, addig a számítógépes csoportban csak öten maradtak ki félév közben. Kimaradóknak tekintjük azokat, akik elkezdték a házi feladatokat beadni, megírták az első zárthelyi dolgozatot, de utána a követelményeket számukra teljesíthetetlennek gondolták, ezért nem adtak be több házi feladatot, és a második zárthelyit sem írták már meg.

5.6.1.2. Az előteszt és az utóteszt eredményeinek összehasonlítása

Az előteszt feladatainak megoldásait nem beszéltük meg. Sem a feladatokat, sem a megoldásokat nem tettem közzé. Az eredményeket megismerve konzultáción, illetve óraközi szünetben mindössze két hallgató keresett meg a felmérővel kapcsolatban. Egyikükkel egy, a másikkal két feladat megoldását néztem át. Az előteszt után két hónappal kezdtem el emlegetni, hogy a szemeszter utolsó óráinak egyikén majd írunk egy újabb felmérőt, amelynek kettős célja lesz: egyrészt a térszemlélet mérése, másrészt pluszpont-szerzési lehetőség biztosítása.

Ezek után lényegében az előtesztet írattam meg utótesztként.

Mivel sem a mérés ténye, sem a feladattípusok sem okoztak meglepetést, számolni kell az eredmények „természetes javulásával", mert várhatóan az utóteszt akkor is jobban sikerül, ha közben a hallgatók nem fejlődnek semmit. Nem tudjuk megállapítani, hogy az esetleges jobb eredmények mennyiben köszönhetők a meglepetés elmaradásának, és mennyiben a térszemlélet fejlődésének. Az is nyilvánvaló, hogy a térszemlélet-fejlesztés más tárgyaknál is cél, ez egy újabb összetevője a változásnak.

Az ismételt teszt módszerének előnye viszont, hogy kiküszöböli azt a problémát, hogy a két mérés objektív nehézsége esetleg különböző.

A kísérlet értékeléséhez fontosabb a két csoport térszemléletének fejlődése közötti különbség, mint egy-egy hallgató esetében a változás mértéke az előző méréshez képest.

Az *előtesztet* a kísérleti csoportban 24 fő, a kontrollcsoportban 27 fő írta meg. Közülük mindkét csoportban 17-en voltak olyanok, akik az utótesztet is megírták. Ugyanakkor volt 4 olyan hallgató, aki csak az utótesztet írta meg, az előtesztet nem. A kiértékeléskor csak annak a 34 főnek az eredményét vettem figyelembe, akik mindkét mérésen részt vettek.

A csoportokban a nemek szerinti megoszlás egy kicsit eltérő volt, a kísérleti csoportba 3 lány és 14 fiú járt; míg a kontrollcsoportban 5 lány és 12 fiú volt. Ezt azért jelezzük, mert a térszemlélet terén több vizsgálat is mutat nemek közötti különbséget (Goldstein, Haldane & Mitchell, 1990), (Stumpf, 1993), (Turos & Ervin, 2000), (Burin, Delgado & Prieto, 2000), (Hoffmann, Németh & Sörös, 2007).

A kísérleti csoportban volt az egyetlen olyan hallgató, aki az utótesztben az előtesztnél jelentősen rosszabb eredményt ért el (az utótesztben a kilenc feladatból kettővel kevesebb feladatot oldott meg jól, mint az előtesztben), és két további hallgató eredménye is romlott. Ez többféleképpen is magyarázható:

- Lehetséges, hogy teszt megírásakor az illető már megszerezte az általa elérni kívánt pontszámot, ezért a tesztet nem vette végig komolyan.
- Az is lehetséges, hogy ezek a hallgatók idegenkednek a számítógépektől. Vannak olyan kutatások is, pl. (Mayer & Sims, 1994), (Huk, 2006), amelyek szerint egyesek vizuálisan sokkal nehezebben tanulnak, mint verbálisan, és számukra az egész „szemléltetősdi” csak összezavarja a dolgokat. (Más kérdés, hogy mérnökjelöltektől elvárjuk ezt a képességet, tehát lehetséges, hogy ez a hallgató nem volt elég körültekintő a pályaválasztás során.)
- Egy optimistább magyarázat lehet, hogy az előtesztben több megérzésre hagyatkoztak, mint az utótesztben. A félév során kialakult bennük az alaposabb meggondolás igénye, de a kognitív síkon való probléma-megoldásban még nem érték el azt a szintet, amelyet az előteszt írásakor intuitív módon elértek. Analógiakísérleteikben Hans-Jörg Herber és Vásárhelyi Éva is tapasztaltak ilyen jelenséget (Herber & Vásárhelyi, 1997).
- További magyarázat lehet, hogy ez a visszaesés a hallgató önértékelésében bekövetkezett negatív változás eredménye. Sejtésünk szerint ilyen probléma sokkal több hallgatónál fellépett, de a többségük a félév során láthatóan feladta e tárgy vagy az egész szak teljesítését, elmaradoztak az órákról, nem adták be a házi feladatokat, nem írták meg, illetve nem pótolták a zárthelyi dolgozatokat, stb.

A két teszt eredményeit a következő táblázatban foglaltuk össze, a teljes kiértékelés megtalálható a függelékben, a mellékelt DVD lemezen.

gépes		Előzetes mérés										Utóteszt										Változás	zh + házi pontok
	Nem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Össz.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Össz.		
1	N	1	1	1	0	1	0	0	0	1	5	1	1	1	0	1	1	1	1	1	8	3	52
2	F	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	1	0	1	1	1	1	1	1	8	-1	51
3	F	1	0	1	0	1	0	1	0	0	4	1	1	1	0	1	1	1	1	0	7	3	41
4	F	1	1	1	1	1	0	1	1	1	8	1	1	1	1	1	0	1	1	1	8	0	58
5	F	1	0	1	0	1	1	1	1	1	7	1	1	0	1	0	1	1	0	1	6	-1	46
6	N	1	0	0	0	0	0	0	1	1	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	50
7	F	1	1	1	0	1	1	1	0	1	7	1	1	1	0	1	1	1	0	1	7	0	46
8	N	1	0	1	1	0	1	0	1	1	6	1	0	1	0	1	1	1	1	1	7	1	51
9	F	1	1	1	0	1	1	0	1	1	7	1	1	1	0	0	1	1	1	1	7	0	54
10	F	1	0	1	0	1	1	1	1	0	6	1	0	1	0	1	1	1	1	1	7	1	39
11	F	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	0	1	1	0	1	1	5	3	54
12	F	1	0	0	1	0	1	1	0	1	5	1	1	0	1	0	1	1	1	1	7	2	57
13	F	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	3	2	35
14	F	0	0	0	0	1	0	1	1	0	3	1	0	0	0	1	1	1	1	1	6	3	35
15	F	1	1	1	1	0	1	0	1	1	7	1	1	1	1	0	1	1	1	1	8	1	62
16	F	1	0	1	0	1	1	0	0	1	5	1	1	0	0	0	1	0	1	1	5	0	43
17	F	1	0	1	0	0	0	0	1	0	3	1	0	1	1	1	0	1	0	1	6	3	49
											88										**106**	**18**	**823**
hagyományos											5,18										6,24		
1	F	1	1	1	0	1	1	1	1	0	7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	2	57
2	N	1	0	0	0	1	0	0	1	1	4	1	1	1	0	1	0	0	0	1	5	1	27
3	F	1	1	1	0	0	1	0	1	1	6	0	1	1	0	1	1	0	0	1	5	-1	53
4	N	0	0	0	0	1	1	0	0	1	3	0	0	0	1	1	1	1	0	1	5	2	50
5	F	0	0	1	1	0	1	0	0	0	3	1	1	1	0	0	1	0	0	1	5	2	58
6	F	1	1	1	1	1	0	1	1	1	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	60
7	F	0	0	0	0	0	1	0	1	0	2	1	1	0	1	1	1	0	0	1	6	4	39
8	F	1	1	1	0	1	0	0	0	0	4	1	0	1	0	1	1	0	0	1	5	1	39
9	N	1	0	1	0	1	0	0	1	1	5	1	0	1	0	0	1	0	1	1	5	0	55
10	F	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	1	38
11	F	1	0	0	0	0	1	1	0	1	4	1	1	1	0	1	1	1	0	1	7	3	46
12	N	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	6	5	45
13	F	1	0	0	0	1	0	0	0	1	3	1	0	0	0	0	1	0	0	1	3	0	47
14	F	1	1	0	0	0	1	1	0	1	5	0	1	1	0	1	1	1	1	1	7	2	55
15	N	1	1	1	0	1	1	1	1	1	8	1	1	1	1	1	1	1	0	1	8	0	51
16	F	0	0	0	0	1	1	1	0	0	3	0	0	0	0	0	1	0	1	1	3	0	48
17	F	1	0	0	0	1	1	0	0	1	4	1	0	1	0	1	1	1	1	1	7	3	49
											78										**104**	**26**	**817**
											4,59										6,12		

A táblázat alapján megállapíthatjuk, hogy *mindkét csoport térszemlélete szignifikánsan fejlődött, méghozzá a két csoportban közelítőleg egyformán. A kísérlet sikere tehát abban mutatkozik meg, hogy a kísérleti csoport plusz tudást szerzett a kontrollcsoporthoz viszonyítva, miközben a hagyományos tantervi követelményeket ugyanolyan színvonalon teljesítette.*

5.6.1.3. Riportok

Az interjúkat a kísérlet alatt illetve közvetlenül utána készítettem, tehát a hallgatók bizonyos szempontból még alárendelt viszonyban voltak velem, ezért előfordulhatott, hogy szépítették a véleményüket. Ezeket a gondolatokat kötetlen beszélgetés során, például a szünetekben vagy konzultáción mondták el nekem, esetenként maguktól, esetenként pedig úgy, hogy csak úgy mellékesen erre tereltem a szót, vagy kérdeztem valami kísérlettel kapcsolatos dolgot. Így megtudtam olyan információkat is, amelyeket feltehetően egy hivatalos protokoll számára nem árultak volna el. Ezekből idézek néhányat:

- Egy hallgató a számítógépes csoportból: „Más tárgyakban is nagyon hasznos volt a megszerzett AutoCAD-es tudás. ”
- Ismétlő hallgató a számítógépes csoportból: „Könnyebben ment, mint tavaly.” (Ennek számítógép nélkül is így kellene lennie, de remélem, hogy a számítógépes modellezésnek is volt ebben szerepe.)
- Egy hallgató a számítógépes csoportból: „A tanárok nem is tudják, hogy a hallgatók egy része számítógépes modellekkel dolgozik. Sokkal egyszerűbb, pontosabb, gyorsabb és könnyebb a közösségi oldalakon a számítógépes modelleket és rajzokat közzétenni, mint az esetlegesen beszkennelt szerkesztéseket feltölteni. ”
- Egy hallgató a „papír-ceruzás” csoportból: „A tanárok nem is tudják, hogy a hallgatók egy része számítógépes modellekkel dolgozik. Kinyomtatják a géppel pontosan megszerkesztett rajzot hajszálvékony vonalakkal, majd átrajzolják ceruzával, miáltal a nyomtatott vonalak eltűnnek. ”
- Egy hallgató a számítógépes csoportból: „A szorgalmi feladatként beadott kartonból készült „lyukas” testek hálóját nem szerkesztettem, hanem a programból nyomtattam ki. ”
- Egy hallgató a „papír-ceruzás” csoportból: „Én is gyakran használtam a 3D modelleket. Nagyon hasznos, hogy ezeket szabadon lehet „forgatni”. Különösen a láthatóság megállapításánál segített sokat. ”

- Egy hallgató a számítógépes csoportból: „Számítógépen modelleztem a két test áthatását, ezáltal már beadáskor biztos voltam benne, hogy a házi feladatom helyes. ”
- Egy hallgató a számítógépes csoportból: „(számítógépes) 3D modell nélkül nagyon nehéz lett volna elképzelni... ”

Ezek alapján úgy tűnik, hogy a többség hasznosnak találta az ábrázoló geometria számítógéppel támogatott oktatását. Az is sejthető továbbá, hogy a számítógépes modellezésben egy tanórán kívül is hatékonyan használható segédeszközt ismertek és kedveltek meg.

5.6.1.4. A hallgatók visszajelzései

Meglepő módon az elektronikus segédletek megosztásakor bekövetkező problémák jelentősen hozzájárultak a kísérlet kiértékeléséhez. Bebizonyosodott, hogy a hallgatók szívesen és eredményesen használták az otthoni, önálló tanulásra szolgáló e-learninges anyagaimat. Kétszer is előfordult, hogy nem sikerült az interneten elhelyeznem a megígért anyagokat, mindkétszer tucatnyi reklamációt kaptam E-mailben, tehát sokan számítottak rá, és igényelték is ezeket a segédleteket.*

5.6.1.5. Megfigyelések

Igen intenzíven figyeltem a hallgatók önálló munkáját a gyakorló órákon és a zárthelyi dolgozatok alkalmával is.

A hagyományos csoportban egy nehezebb problémánál sokan már az első lépésnél elakadtak, hamar feladták a megoldást. Ezzel szemben a gépes csoportban mindenki hozzáfogott a feladathoz, és próbálta a konfigurációt legalább közelítően modellezni. Ezt a papír-ceruzás csoport is megtehette volna, például készíthetett volna valamiféle vázlatot, de mivel a papíron a tévedések nyoma csak nehezen tüntethető el, inkább nem is próbálkoztak. A gépes csoport kísérletező kedve viszont a feladat megoldása után sem lankadt, mindig volt, aki általánosabb vagy analóg konfigurációt vizsgálgatott.

Amikor pedig a számítógépes csoportnak is körzővel-vonalzóval kellett dolgoznia, akkor is úgy tűnt, hogy a hallgatók többet firkáltak, látszólag céltalanul is. A

* Az egyik alkalommal nem én voltam a hibás, az intézményi szerver leállt, és az előző napi mentésből visszaállított honlapon a legfrissebb dolgok nem voltak rajta. Egy másik alkalommal az történt, hogy relatív hivatkozás helyett abszolút hivatkozást használtam, tehát az otthoni gépemen jól működött a honlap, de másik gépről megtekintve már nem.

kísérleti csoport a hagyományos eszközökkel dolgozva is alkalmazta azt a munkamódszert, hogy a modellt több nézőpontból, több kezdőfeltétellel, többféle kiindulási konfigurációval tanulmányozzuk. Ez jelezheti, hogy a számítógépes csoportban

- bátrabban kísérleteztek, ami pozitív a papír-ceruzás csoporthoz képest;
- a szabadkézi rajzban, vázlatkészítésben ügyetlenebbek voltak a hagyományos csoportnál, elsőre néha nem sikerült jó ábrát rajzolniuk.

Úgy tűnik, hogy problémamegoldásnál számítógéppel kompenzálható a kézügyesség hiánya, a szabadkézi rajz terén meglévő hiányosság, ami egyértelműen pozitív hatás.

Ugyanakkor a számítógép használatával visszaszorul a szabadkézi rajz, ami – különösen az első szemeszterben – nem túl jó hatás.

5.6.2. Az oktatásban alkalmazott kísérleti módszerekkel és eszközökkel kapcsolatos megfigyelések és tapasztalatok

Bár a következő meggondolások az oktatási kísérlet értékeléséhez is hozzátartoznak, de az azt megelőző és az azon túlmenő kutatások tapasztalatain is nyugszanak, hiszen közel 10 éve dolgozom a Cabri és az AutoCAD programok oktatási felhasználásán mind a mérnökképzésben, mind a tanárképzésben.

A **Cabri3D** előnyének mutatkozott rugalmassága, sokoldalúsága, egyszerűsége tanár és diák számára egyaránt. Nagyon könnyen, intuitívan kezelhető, használatát gyakorlatilag nem is kell tanulni, ugyanakkor a szerkesztéseket igen gyorsan, és akár „térben” is el lehet végezni a segítségével. A tanár számára nem kellenek különböző célszoftverek, egyetlen szoftverrel meg tudja oldani a szemléltetést és az ábrakészítést, a kész szerkesztések egyszerűen exportálhatók például e-learning tananyagokba. A kész objektumok és a kész transzformációk segítségével pillanatok alatt elkészül a szerkesztés, óra közben is remekül lehet rögtönözni vele. További előny, hogy magyar nyelven is elérhető.[*] Hátránya, hogy nem ingyenes, és hogy nem programozható, tehát a menüje nem bővíthető. Megemlítendő még, hogy mérnöki dokumentáció készítésére alkalmatlan, de hát nem is ezzel a céllal íródott.

[*] A fordítást teljes egészében én végeztem. Lefordítottam a szoftver menürendszerét, súgóját, mintafájljait és a felhasználói kézikönyvet. A magyar verzió országos terjesztése azóta is folyamatosan történik.

Az **AutoCAD** legfőbb előnye, hogy professzionális, tehát a gyakorlatban előforduló mérnöki feladatok igen nagy részét meg lehet oldani vele; a tervezéstől a gyártásig végigkíséri a létrehozott termék életét. A hallgatók tisztában vannak vele, hogy előbb-utóbb úgyis meg kell tanulni ennek a szoftvernek vagy valamelyik közeli rokonának a használatát, tehát szívesen dolgoznak, gyakorolnak vele. Az iskolák jelenlegi lehetőségeit figyelembe véve hátránya az igen magas ára. Szintén hátrány, hogy bonyolultsága miatt elsajátításához igen sok gyakorlás szükséges.

Előnye továbbá, hogy a gyakorlati mérnöki munkában sok időt lehet megspórolni vele: ha sikerül a háromdimenziós modellt felépíteni, akkor onnantól a dokumentáció már automatikus: készen kapjuk a nézeteket, az axonometrikus és perspektív vetületeket, anyagok és fények használata esetén az árnyékokat és a látványterveket. Pár kattintással készíthetünk mérnöki szabvány szerinti metszeteket, szelvényeket, áthatásokat, méretezéseket.

Az Ábrázoló geometria tárgy keretében végzett térszemlélet-fejlesztés során az AutoCAD használata előnyének mutatkozott, hogy a legtöbbször síkban megadott adatfelvételt háromdimenziós modellé kell konvertálni. Ezzel elkerülhető volt az, hogy a hallgatók csak a szerkesztés algoritmusát tanulják meg, annak valóságos jelentése nélkül. Például az egyenes és sík döféspontja témában sok hallgató tudja a szerkesztés menetét, annak indoklása nélkül.

További előny, hogy az AutoCAD elérhető magyar nyelven, bár a magyar fordítás néhány helyen következetlen, tehát ugyanazt az angol szót másképpen fordították például a menüben, mint a helyi menüben vagy a Súgóban. A fordító a geometriai fogalmakat általában nem használta, helyette félig mérnöki, félig hétköznapi konvenciókat alkalmazott. Példaként kigyűjtöttem néhány menüpontot, parancsot, amelyeket külön el kellett magyaráznom a hallgatóimnak:

AutoCAD fogalom, szóhasználat, menüpont	**Geometriai szóhasználat, matematikai tartalom**
Vonal	Szakasz !
Szerkesztővonal	Egyenes
Vonallánc	Nyitott vagy zárt töröttvonal,opcionálisan körívekkel
Sokszög	Szabályos ! sokszög
Ív	Körív
Elliptikus ív	Ellipszisív
Tükrözés	Tengelyes tükrözés a síkban
3D tükrözés	Síkra tükrözés

Párhuzamos	Szakaszok esetében egy másolat eltolása a szakaszra merőleges vektorral; töröttvonalaknál, sokszögeknél eltolás után összemetszés.
Mozgatás	Eltolás
3D mozgatás	Eltolás
Forgatás	Pont körüli forgatás a síkban
3D forgatás	Egyenes körüli elforgatás
Léptékezés	Középpontos hasonlóság
Nyújtás	Nyírás !
Elérés	Meghosszabbítás egy adott egyenesig
Négyzetes kiosztás	Másolás téglalaphálón
Poláris kiosztás	Másolás pont körüli elforgatással, speciális esetben félfordulat (középpontos tükrözés)
Primitívek	Előre definiált, paraméterezhető testek: téglatest, gömb, henger, kúp, gúla, ék (fél téglatest) és tórusz
Megforgatás	Forgástestek létrehozása a félkeresztmetszetük és a forgatás tengelyének megadásával
Kihúzás	Hasábok, hengerek, gúlák, kúpok létrehozása az alapsíkidom és a többi szükséges paraméter definiálásával
Egyesítés	Szilárdtestek halmazelméleti uniója
Kivonás	Szilárdtestek halmazelméleti különbsége
Közös rész	Szilárdtestek halmazelméleti metszete, az eredeti testek eltűnnek
Áthatás	Szilárdtestek halmazelméleti metszete, miközben az eredeti szilárdtestek is megmaradnak
Ütközésvizsgálat	Szilárdtestek halmazelméleti metszetének kiemelése
Kettészel	Szilárdtestek kettévágása síkkal
Keresztmetszet	Síkmetszet létrehozása

Az **oktatóvideó** legfőbb előnyének az bizonyult, hogy önálló tanulásra kifejezetten alkalmas volt, például akik elmulasztották az előadást, vagy nem jegyzeteltek rendesen, később könnyen pótolhatták az anyagot. Hátránya, hogy nem paraméterezhető, tehát azzal az egy konkrét adatfelvétellel dolgozik, amelyiket én rögzítettem. További hátránya, hogy a hallgató egy passzív szemlélője a történéseknek, bár ugyanez a megállapítás a könyvekre, az előadásokra, sőt a mostani óraszámok és tanulói létszámok mellett szomorú módon a gyakorlati órák egy részére is igaz. Ezeket a hátrányokat tompítani tudjuk, ha az oktatóvideókat a többi eszközzel kombinálva alkalmazzuk.

Ezeknek az eszközöknek a fejlesztése és a tanulási-tanítási folyamathoz való igazítása a kísérlet keretein túl is közvetlenül hasznosul a mérnökképzésben:

- Autodidakta tanulás, mulasztások pótlása, lemaradások behozása, önellenőrzés, stb. céljára nap mint nap használják a hallgatóink. A papír-ceruzás módszerrel tanuló hallgatók nagy része is letöltötte és használta az Interneten megosztott modelleket; valamint az önálló tanulásra, gyakorlásra és ismétlésre szolgáló multimédiás tananyagokat.
- A problémamegoldás egyes fázisaiban az igényes és szabatos megfogalmazás, esztétikus illusztráció; néhány jellemző, de rejtőzködő eset demonstrálása; ellenőrzési pontok beépítése, teljes esetvizsgálat felkínálása statikus és dinamikus formában lehetővé teszi a differenciált segítséget. Ez persze feltételezi az önálló tanulás terén szerzett irányított gyakorlást és az ott szerzett sikerélményeket.

5.7. Az oktatási kísérlet tapasztalatai alapján megfogalmazott javaslataim

5.7.1. Az oktatási kísérlet során fellépő nehézségek

A kísérlet tervezése és végrehajtása során szembesültem azzal, hogy intézményünk 4 számítógépes terméből csak egyetlenegy alkalmas arra, hogy a gépek használata mellett még papíron is szerkeszteni tudjunk, egész egyszerűen azért, mert a másik három teremben nincs elég hely az asztalokon. Karunkon jelenleg egyetlenegy aktív tábla van, és a projektorok száma sem mindig elegendő. Mondhatjuk, hogy a tárgyi feltételek egy oktatási kísérlethez elegendőek, de az általam leírtak tömeges kipróbálására egyelőre nincs lehetőség.

Problémaként jelentkezett az is, hogy a hallgatók egy része a félév során lemondott a számítógép órai használatáról, mert tudták, hogy a zárthelyi dolgozatok, a házi feladatok és a röpdolgozatok is hagyományos, körzős-vonalzós szerkesztések lesznek.

Az eredményeket torzítja, hogy a kísérleti és a hagyományos csoport egy-két esetben keveredett egymással. Mivel mindkét gyakorlati csoportnak én voltam a gyakorlatvezetője, a gyakorlatok nem lehettek egy időben. Ebből következően előfordult, hogy ha valaki az egyik gyakorlatot elmulasztotta, bekéredzkedett a másik csoportba, és én ezt nem tagadhattam meg tőle. Ezenkívül a félév során egyre több, a hagyományos csoportba tartozó hallgató kezdte el az elektronikus segédanyagaimat használni. Ez a tény az e-learninges eszközök sikerére utal, ugyanakkor a kísérletek kiértékelését bizonytalanabbá teszi.

5.7.2. A szakmai tartalomra vonatkozó javaslat: A szerkeszthetőség és szerkesztési segédeszköz kérdése

A számítógéppel támogatott oktatás során szerzett tapasztalataim (amelyeket a kísérlet is alátámasztott) alapján javasolom, hogy ne ragaszkodjunk mindenáron az euklideszi szerkesztésekhez. Vizsgáljuk felül az elfogadható szerkesztési eszközöket és a legitimnek tekintett szerkesztési lépéseket. Javaslataimat a következő pontokban részletesen indoklom.

Ha például egy szabályos ötszög konstrukciójáról van szó, akkor ehhez

a) egy szalagra kötött gyűrődés nélküli csomóval;
b) 5 darab egyenlő hosszúságú gerenda 72°-os törési szöggel való összefűzésével (a külső szög 360/5=72°);
c) egy adott csúcs 72°-os elforgatásával (a középponti szög 360/5=72°);
d) aranymetszéssel;
e) a szerkesztő program szabályos ötszög parancsának végrehajtásával

juthatunk el. Az oktatási gyakorlatban jelenleg egyedül a d) módszer elfogadott, noha szituációtól függően a többi is lehet elegendő pontosságú.

Érdemes lenne a végzőseinket alkalmazó gazdasági szereplőkkel együtt átnézni és egyértelműsíteni, hogy mely szerkesztési eszköz és lépés milyen kompetencia-szinten tartozik a kimenő mérnökök felkészítéséhez.

Valószínűsíthető egy lassú (vagy esetleg néhány alkalmazás esetében viharos) átmenet a számítógépes szerkesztések legitim voltát illetően. Gondoljunk például arra, hogy a számítógéppel modellezett orvosi műszerek a felhasználás helyszínén „kinyomtathatók” és azon nyomban felhasználhatók.

A számítógépes szerkesztés pártolói azt hangsúlyozzák, hogy az jóval gyorsabb és az eredmény pontosságának csak a kiszolgáló periféria pontossága szab határt. Ellenzői felvetik, hogy eszközigénye a feladathoz képest túl nagy.

A megegyezés hiánya olyan következetlenségekhez vezet, hogy merőlegest és párhuzamost háromszögvonalzóval, illetve csúsztatással szerkeszthetünk, noha ez kiváltható euklideszi módon. Ugyanakkor az ellipszográf (kézi vagy gépi változata) nem legitim, pedig az ellipszis szerkesztésére nem létezik euklideszi eljárás és számtalan esetben kell ellipszist megjeleníteni. A szakemberek az ellipszist vagy sablonnal rajzolják, vagy kosárgörbével közelítik, vagy pedig számítógéppel tetszőleges pontossággal megszerkesztik. Hagyományos rajzolásnál mindössze annyit tudunk tenni, hogy „elegendően sok” ellipszispontot és pontbeli érintőt szerkesztünk, majd a pontokat szabadkézzel vagy görbevonalzóval összekötjük. Nos, sem a szabadkézi rajz, sem az ellipszisvonalzó használata nem megengedett az euklideszi szerkesztés során.

Nyilvánvalóan több didaktikai cél ütközik egymással.

- A körzős-vonalzós euklideszi szerkesztések megkövetelésének a kivitelezés szintjén van fölérendelt képzési célja: ezzel fejlesztjük a hallgatók kézügyességét, memóriáját (a szerkesztési lépések megtanulásával), türelmét, precizitását.
- A legegyszerűbb mérnöki tervezésben is előfordulhatnak szögfüggvények, vagy csak közelítő számítással kezelhető modellek. Itt is jelentkezik a komoly eszközigény és ma már nem logarlécezünk, sőt a négyjegyű függvénytáblát is kinőttük.
- A matematikai alkalmazások más területein találhatunk ilyen példát: ugyan létezik megoldóképlet a harmadfokú egyenletre és létezik megoldási mód a negyedfokú egyenletre, de ezt senki sem használja, mert numerikus módszerekkel sokkal gyorsabban és tetszőleges pontossággal meg lehet oldani ennél magasabbfokú egyenleteket is.

Ha a fölérendelt képzési célok nagyon fontosak és más anyagrész kapcsán ezek nem teljesíthetők, akkor meg kell tanítanunk a hagyományos eszközt és módszert.

Az a személyes véleményem, hogy a mérnöki munkára való felkészülésben és a mérnöki gyakorlatban nem túlzás egy CAD rendszerrel rendelkező számítógép igénye.

5.7.3. A kísérlet módszereit és eszközeit illető javaslatok

5.7.3.1. A problémaorientált tanítási módszer

A műszaki ábrázoló geometria tanítása során az egyik legfontosabb fölérendelt tanítási cél a térszemlélet fejlesztése. Ennek érdekében javaslom a CAD rendszerek és a problémaorientált tanítási módszer gyakoribb, didaktikailag megalapozott alkalmazását. Például érdemes a számítógéptől idegenkedők számára demonstrálni az előnyöket és segíteni a kompenzálásban.

Az ellenzők szerint a CAD rendszerek nem alkalmasak a térszemlélet fejlesztésére, mert gombnyomásra, túl gyorsan és komplexen jelenik meg a látvány és elmarad a mentális feldolgozás, elemzés.

Tapasztalatom szerint viszont nem is olyan könnyű a CAD rendszerekkel modellezni, mint azt sokan gondolják. Az igaz, hogy az elemzés két részre bomlik, mert a CAD alkalmazásához már korábban számos elemzést kell végezni, döntést kell hozni.

A legtöbb CAD rendszer például kizárólag „álló” hengert tud rajzolni (amelynek alkotói párhuzamosak a „z” tengellyel). Ha fekvő – vagy még bonyolultabb esetben a tengelyekkel nem párhuzamos alkotójú – hengerre van szükség, akkor vagy az álló hengert kell egy vízszintes tengely körül (3D-ben) elforgatni, vagy pedig egy teljesen új (elforgatott) felhasználói koordináta-rendszert kell definiálni. Egyik sem magától értetődő, nem automatikus művelet. Mindkét esetben egy többparaméteres geometriai transzformációt kell alkalmazni a helyes eredmény eléréséhez.

Szerintem érdemes olyan feladatokat is feladni, amelyekben a hallgató maga választhatja meg a megoldás módszerét és az ahhoz szükséges eszközt. Ez a fajta feladat illeszkedik a gyakorlatorientált matematika oktatáshoz.

Ha például egy tetőteres helyiség festéséhez szükséges festék mennyiségét kell meghatározni, akkor a padlózat és a nyílászárók nélküli felszínt kell kiszámolni. A hallgató választhat, hogy (körzővel-vonalzóval vagy számítógéppel) megszerkeszti a határoló lapok valódi méreteit, majd szögfüggvényekkel kiszámolja a felszínt; vagy 3D-ben modellezi a helyiséget és a CAD rendszer megadja a kívánt adatokat.

Nézetem szerint mindegyik megoldás jól fejleszti a térszemléletet. Érdemes lenne megvizsgálni, hogy a hallgatók melyik megoldást választják, és amikor már igen nagy százalékuk a számítógépes modellt választja (és persze hibátlan modellt készít), akkor mondhatjuk, hogy inkább a számítógépet javasoljuk szerkesztési segéd-eszközként.

5.7.3.2. Javaslat a differenciálás és a felzárkóztatás megkönnyítésére

Javasolom, hogy a félév elején végezzünk szintfelmérést, amely 80%-ban a térszemléletet méri, 20%-ban pedig egyfajta motivációs teszt legyen.

Nyelvi csoportoknál és sok más tárgyból is természetes, hogy a hallgatókat szintfelmérés után csoportokba osztják, esetleg pótlást (felzárkóztatást) írnak elő számukra. Az ELTE TTK-n, a BMGE-n és számos más műszaki képzésben matematikából szintfelmérő dolgozat alapján döntik el, hogy kinek kell vagy szabad a Bevezető matematika felzárkóztató kurzust felvenni. Az ELTE a matematikai tárgyakban az alap, közép, vagy intenzív szintre való besorolásnál is figyelembe veszi a dolgozat minősítését.

A szintfelmérés rendszerét szerintem ábrázoló geometriából is lehetne alkalmazni. Jelenleg a hallgatók a Neptun-rendszerben tulajdonképpen tanárt és időpontot választanak, de célszerűbb lenne egy szintek szerinti bontás. Ebben az esetben sikeresebb lehetne a differenciálás, és a gyengébb felkészültségű hallgatóknak adekvát segítséget és több sikerélményt tudnánk nyújtani.

Külön pedagógiai feladat lenne már félév közben megtalálni azokat a hallgatókat, akik az utótesztet az előzetes mérésnél rosszabbul írták meg, illetőleg akik a félévet abbahagyták, a követelményeket teljesíthetetlennek találták. Ha időben sikerül ezeket a diákokat beazonosítani, a módszereket illetően is tovább lehetne differenciálni, ezáltal a lemaradókat is munkára bírni és megadni nekik az esélyt a felzárkózásra.

5.7.3.3. Didaktikai szempontok a számítógép órai használatához

A számítógép szemináriumi használatának első szintjén csak a tanár használja a számítógépet, főleg demonstrációs célra. A hallgatók az óra előtt és után is kaphatnak segédletet elektronikus úton.

> Például kivetíti az aktuális feladat megoldásának menetét, amelyet a hallgatók átvezetnek, lejegyeznek a saját feladatlapjukra. A tanár a hallgatók javaslatai, indoklása alapján egyesével megmutatja a szerkesztési lépéseket, amelyeket a tanulók körzőt és vonalzót használva követnek a rajzlapon. A tanár megmutathatja a kész 3D modellt, és kivetítheti a 3D modell készítésének folyamatát is.

Ennek a módszernek az előnye a nem túl nagy tárgyi eszközigény (laptop+projektor), és hogy a tanítás módszerei nem különböznek lényegesen a hagyományos (a táblán krétával szerkesztünk) eljárásnál. A hallgatók ebben az esetben passzívabb szereplők, de remélhetően a demonstráció felkelti az érdeklődésüket, és ők is akarnak majd számítógéppel modellezni.

A második szinten már a diákoknak is rendelkezésére áll a számítógép. Ezen a szinten a tanár kivetíti a szerkesztésének vagy a modellezésének a menetét, miközben a hallgatók a saját számítógépükön követik a lépéseket. A diákok ezen a módon megtanulhatják a szoftver kezelését, miközben a hagyományos szerkesztési lépéseket most nem körzővel és vonalzóval, hanem számítógéppel végzik el.

A módszer előnyei:

- A szoftver kezelésének elsajátítása után ezzel a módszerrel a szerkesztés gyorsabb és pontosabb lesz, mint a papíron végzett munka.
- A síkbeli rajzok szerkesztésén túl lehetőség van 3D modellezésre is.
- A „rajzlap” gyakorlatilag korlátlan terjedelmű.
- A szerkesztés visszajátszható.
- A szerkesztés paraméterezhető, dinamikus.
- A megjelenítés szabadon változtatható, beleértve a vetítési módokat; a sokféle vonaltípust, felületstílust, színeket, látványstílusokat, nézeteket.

A módszer hátrányai:

- Eszközigényes.
- A rajzkészség fejlődése háttérbe szorul.
- A számítógéppel végzett szerkesztések gyakorlatilag munkabefektetés nélkül, könnyen másolhatók. Bár ez az órán nem jellemző, de szerepe van a portfóliók összeállításánál.

A tanulók kognitív szintjének emelkedésével léphetünk a *harmadik szint*re. Ebben az esetben a tanár legfeljebb az óra végén vetíti ki, vagy adja közre a probléma egy vagy több lehetséges megoldását. A hallgatóknak önállóan kell szerkeszteni és modellezni. Ez a módszer alkalmas önálló hallgatói kísérletezésre, probléma-felvetésekre és azok megoldására. Alkalmas különböző (hallgatói) megoldások elemzésére, diszkussziójára, a kreativitás kibontakoztatására.

A módszer előnyei:

- Ez a módszer rendelkezik az előző szint minden előnyével.
- Ezen felül pozitív vonása, hogy a hallgató számára aktív tevékenységet jelent.

A módszer hátrányai:

- Igen idő- és eszközigényes.
- Tapasztalatom szerint nem alkalmazható a hagyományos módszerrel egy helyen és időben, mert ha egy hallgatóm körzővel és vonalzóval szerkesztett, a szomszédja pedig számítógéppel, akkor zavarták egymás munkáját.
- További hátránya az önálló számítógépes modellezésnek, hogy a hallgatók lényegében fölöslegesnek ítélik addig, amíg a zárthelyi dolgozatokat és a házi feladatokat papíron, körzővel és vonalzóval megszerkesztve kell beadniuk.

Átmeneti, kompromisszumos javaslatom, hogy

- kezdetben csak néhány órát tartsunk számítógépteremben, és
- legyen olyan számonkérés, ahol választani lehet, hogy valaki a hagyományos eszközökkel vagy a számítógéppel dolgozik.

Az átmeneti időszak alatt gyűjthetnénk a tapasztalatokat, és felkészülhetnénk arra, hogy a gépi szerkesztés és modellezés a jelenleginél nagyobb hangsúlyt kapjon a körzős-vonalzós szerkesztések rovására.

5.7.3.4. Változatos munkaformák, sokszínű segédletek

Javasolom, hogy színesítsük az oktatási segédletek tárát és növeljük a tanítási módszereink változatosságát. Többféle tanulótípus létezik, ezért az eszközeinknek, a módszereinknek és a segédleteinknek is változatosaknak kell lenniük.

Biztosítsunk sok és sokféle ingyenes elektronikus segédletet hallgatóink számára. Fogjunk össze, tegyük elérhetővé egy helyen a műszaki felsőoktatási intézmények tanárai által kidolgozott, a műszaki ábrázoló geometriához kapcsolódó segédanyagainkat.

Az ingyenesen rendelkezésre bocsátott e-learning anyagok nagy segítséget jelentenek a levelező tagozatos hallgatóknak, a hiányzóknak és az órán lemaradóknak is.

A legújabb trend, hogy minden interneten elérhető adatnak és szoftvernek megírják a mobil eszközökre optimalizált változatát. Az órai szünetekben, a tömegközlekedési eszközökön egyre több fiatalt látni okostelefonnal, netbook-kal, PDA-val játszani, olvasni, internetet böngészni, zenét hallgatni, videót nézni, stb. Ha biztosítunk ingyenes elektronikus segédleteket, akkor elképzelhető, hogy meg tudjuk ezeket a fiatalokat szólítani, és könnyen lehet, hogy a tömegközlekedéssel töltött „holtidőben” majd nem csak szórakozni, hanem tanulni is fognak.

6. Eredmények a hipotézisekkel összevetve

„Nem állítjuk azt, hogy az általunk javasolt módszer az egyedüli lehetséges eljárás, de alapjául szolgálhat további kísérletezéseknek.” (Csánk & Göndöcs, 1966)

A mért adatok szerint a kísérleti csoport a többletterhelés ellenére is *legalább olyan jól teljesített*, mint a kontrollcsoport, akár a tantárgy követelményeit, akár a térszemlélet fejlődését tekintjük. A kísérleti csoportból a többletterhelés ellenére *kevesebben maradtak ki* félév közben, mint a kontrollcsoportból. A kísérleti csoport előnye nem szignifikáns.

A többletterhelés alatt olyan tényezőket értünk, hogy

- a számítógépes csoport kevesebbet gyakorolta a hagyományos körzős-vonalzós szerkesztést, ugyanakkor a számonkérés körzővel és vonalzóval történt;
- a számítógépes csoportnak az ábrázoló geometria tananyagon túl a szoftverek kezelésével és a 3D modellezéssel is meg kellett ismerkedniük.

A számítógépes csoportban a többletterhelés egy része a *teszteredményekben nem tükröződő tudástöbblet*et eredményezett a kontrollcsoporthoz képest, nevezetesen a szoftverkezelési és 3D modellezési kompetenciát.

Az alábbiakban a kutatás eredményeit a hipotézisek szerinti bontásban mutatom be:

H0 főhipotézis
Az általam kidolgozott és használt matematikadidaktikai eszközrendszer alkalmazásakor a jó térszemléletű mérnökjelölt hallgatók tartalmas, sikeres és hasznos munkát tudnak végezni, ugyanakkor a fejlesztésre szorulóknak eredményesen tudunk segíteni.

Az oktatási kísérlet alapján úgy tűnik, hogy ez a hipotézis igaz.

Az általam kidolgozott és kipróbált matematikadidaktikai eszközrendszer domináns összetevői a probléma-orientált és empirikus matematikatanítás didaktikai elvére és az analógiára épülő tananyag-szervezés, valamint a belső differenciálás módszerének számítógéppel támogatott megvalósítása voltak. Ezeknek a segítségével kifejezetten rossz térszemléletű hallgatók is teljesíteni tudták a követelményeket, ugyanakkor a jó térszemléletű hallgatók is fejlődtek.

Megjegyzendő, hogy az eredményes munkához igen nagy szükség volt a hallgatók együttműködésére, munkabírására, szorgalmára, kitartására is, de szerencsére az érdeklődésüket a változatos és színes munkaformákkal és segédletekkel mindvégig fenn tudtam tartani, ezáltal szívesen dolgoztak. Valószínűleg ennek is köszönhető, hogy a számítógépes csoportból kevesebben maradtak ki félév közben, mint a papír-ceruzás csoportból.

H1 hipotézis

A mérnökképzésben a számítógéppel támogatott ábrázoló geometria oktatás hatékonysága – az ismeretanyag elsajátítását illetően – eléri a hagyományosét, ugyanakkor alkalmas a széleskörűen használható számítógépes 3D modellezési kompetencia fejlesztésére is.

Az empirikus kutatás statisztikai eredménye alátámasztja a hipotézist.

A kísérleti csoport eredményei, fejlődésének tempója nem maradt le a hagyományos csoportétól. Ugyanakkor a 3D modellező rendszerek használata nem csak egy új eszközt adott hallgatóink kezébe, hanem alkalmas volt az érdeklődésük fenntartására és motivációjuk növelésére is.

H2 hipotézis

A számítógépes modellezési eszközrendszer használatával kibővül a felvethető problémák köre és fejlődik a hallgatók problémamegoldó potenciálja.

A kísérletben résztvevő hallgatók bátrabban és eredményesebben kísérleteztek a térgeometriai problémák elemzése, megoldása során. A számítógépes csoport kísérletező kedve a feladat megoldása után sem lankadt; mindig volt olyan hallgató, aki általánosabb vagy analóg konfigurációt vizsgálgatott.

A kísérlet során ezzel a hipotézissel kapcsolatos statisztikai értékelésre alkalmas adatrögzítés nem történt, de 10 éves oktatói munkám során szerzett tapasztalataim és megfigyeléseim alátámasztják a hipotézist.

H3 hipotézis

A számítógéppel támogatott oktatással fejleszthető az információk önálló megkeresésének, rendszerezésének és elsajátításának képessége, az élethosszig tanulás kulcskompetencia.

Hallgatóim igényelték és eredményesen tudták használni az általam kidolgozott és felajánlott elektronikus segédleteket. Ezek segítségével a mulasztó, vagy az órákon lemaradó diákok is pótolni tudták az elmaradásukat.

A kísérlet során ezzel a hipotézissel kapcsolatos statisztikai értékelésre alkalmas adatrögzítés nem történt, mivel ezek az anyagok a kontrollcsoport számára is elérhetők voltak. Megfigyeléseim alapján az önálló tanulási kompetencia mindkét csoportban fejlődött.

H4 hipotézis

A számítógéppel támogatott műszaki ábrázoló geometria oktatása során az SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Kar tananyag- és elvárásrendszerének eredményes teljesítésén túl fejleszthető a geometriai térszemlélet, amely az építész szakmacsoportokban alapvető kompetencia.

A számítógéppel támogatott térszemlélet-fejlesztés során olyan didaktikai megoldást alkalmaztunk, az úgynevezett belső differenciálást (Vásárhelyi, 2008) amelynek segítségével a kezdetben rossz térszemléletű hallgatóknak hatékony segítséget adtunk úgy, hogy ezzel párhuzamosan a kezdettől jó téri képességű hallgatóink is sokat fejlődtek. Az empirikus adatok alátámasztják a hipotézist.

Személyes megfigyeléseim és a teszteredmények egyedi elemzése alapján néhány hallgató esetében az eredmények nem meggyőzőek. (Részletesen lásd 5.6.1.2.) Külön pedagógiai feladat lenne ezeknek a hallgatóknak a gyors megtalálása; nehézségeik természetének a kiderítése, és ezek alapján a személyre szabott segítség felajánlása.

H5 hipotézis

A differenciált műszaki ábrázoló geometria oktatásban részt vevő tanár a tanítási-tanulási segédletek megtervezését, elkészítését és gondozását informatikai háttérrel – többek között az általunk készített, kipróbált és közzétett elektronikus segédanyagokkal – hatékonyabban végezheti mint más eszközökkel.

Ez a hipotézis hosszú idő alatt lenne statisztikailag is vizsgálható. Az elkészített anyagokat közzétettem, bárki hozzáférhet az interneten, aki ki akarja próbálni, fel akarja használni. A reflexiókat gyűjtjük.

Magam jó eredménnyel használtam a kísérlet során a CAD és a 3D-képes dinamikus geometriai szoftvereket az órákon történő szemléltetéshez, az órára való felkészüléshez, a feladatlapok és zárthelyi dolgozatok tervezéséhez valamint az e-learning anyagok készítéséhez. Ugyanakkor az óráimra körültekintőbben és a szokásosnál több időt szánva kellett felkészülnöm. Ez a munka valószínűleg megtérül a következő évek folyamán, amikor már kollégáimmal sok ilyen segédletet elkészítünk, és a továbbiakban már elég ezek közül az éppen aktuális célnak legmegfelelőbbet kiválasztani.

Azt is látnunk kell, hogy a közoktatás és a felsőoktatás feltételrendszere az utóbbi években és napjainkban is gyakran változik. A változások követése, az új paraméterekhez történő alkalmazkodás is többletmunkát követel az oktatóktól, amit informatikai háttérrel lehet hatékonyabban elvégezni.

7. Összefoglalás, kitekintés, diszkusszió

> *„Bármilyen területen szerzett ismereteink tárgyi tudásból és gondolkodási készségből állnak. A gondolkodási készség a megszerzett tudás alkalmazási képessége. Ilyen készség nincs bizonyos mérvű önálló gondolkodás, eredetiség és alkotóerő nélkül.” (Pólya, 1985)*

7.1. Az eddig elvégzett munka röviden

Dolgozatomban a mérnöki szakmákban alapvető kompetencia, a térszemlélet fejlesztési módszerei korszerűsítésének lehetőségeit vizsgáltam. A tanítás hatékonyságát informatikai eszközökkel megtámogatva javasoltam növelni. Az eddig elvégzett munkám röviden:

- A témához kapcsolódó szakirodalom összegyűjtése, áttanulmányozása, elemzése, összehasonlítása. Saját tapasztalatok gyűjtése, szintetizálása.
- A kutatási célok kitűzése, tézisek felállítása.
- Oktatási kísérlet tervezése, szervezése, végrehajtása.
- Az oktatási kísérlethez kapcsolódóan igen nagy mennyiségű és igen terjedelmes elektronikus tanítási-tanulási segédanyag elkészítése.
- Az eredmények értékelése.

A segédanyag elkészítésében segítségemre voltak az irodalomjegyzékben felsorolt szerzőtársaim, de több önálló cikkem is megjelent a témában. A másik négy vázlatpont végrehajtása a témavezetőm segítségével és irányításával elvégzett önálló kutatás volt.

7.2. Eredmények

Munkám legfontosabb eredményeinek az alábbiakat tekintem:

- Hallgatóimnak egyedülállóan színes és változatos típusú segédleteket tudtam felajánlani: tankönyv, prezentáció, elektronikus tankönyv, honlap szerkesztésekkel és 3D modellekkel, oktatóvideó, térszemlélet-fejlesztő feladatlapok dinamikus 3D modellekkel. A 6 típusból 3 saját tervezésű és kivitelezésű volt, melyek használatával kedvező tapasztalatokat szereztem. Mind a hat típus teljes abban az értelemben, hogy felöleli egy egész szemeszter anyagát.

- Lefordítottam a Cabri3D dinamikus geometriai szoftver felhasználói felületét, súgóját, mintafájljait és a felhasználói kézikönyvét. A magyar nyelvű Cabri3D országos terjesztése azóta is folyamatos.
- Megnöveltem az önálló tanulásra alkalmas eszközök hatékonyságát.
- Általános térszemlélet-fejlesztő, problémaorientált feladatlapokat állítottam össze.
- Új térszemlélet-mérő feladatlapot állítottam össze és próbáltam ki a gyakorlatban.
- Elvégeztem a térszemlélet-fejlesztésben használható informatikai megoldások használhatóságának vizsgálatát, összehasonlítását, értékelését, bírálatát. Többek között általános CAD és DGS rendszereket használtam az oktatásban változatos szerepkörökben: új ismeretek közlése, az érdeklődés felkeltése, szemléltetés, probléma-felvetés, problémamegoldás.
- Az általános térszemlélet-fejlesztésen és a 3D modellezés elsajátításán túl hallgatóimnak kitekintést nyújtottam a magasabb dimenziókba.

7.3. Az eredmények gyakorlati hasznosíthatósága és a további vizsgálatokra vonatkozó javaslatok

A kutatás tapasztalatai alapján megfogalmazott javaslataimat az 5.7. pontban írtam le. Ezek konkrét tartalmi és didaktikai javaslatok, amelyeket reményeim szerint a tanítási gyakorlatban azonnal használni lehet. A használathoz segítséget nyújthatnak a mellékelt DVD lemezen és a világhálón megtalálható, általam kidolgozott segéd-anyagok. Ezeket folyamatosan fejlesztjük, az újabb változatokat az interneten tesszük közzé. Szintén azonnal használható a dolgozatomban megtalálható térszemlélet-mérő tesztlap, és a csatolt DVD lemezen található általános térszemlélet-fejlesztő feladatlap-csomag is.

Remélem, hogy a dolgozatomban leírt tapasztalatok, a megfogalmazott javaslataim és az általam kidolgozott segédanyagok hozzájárulnak a tanítási folyamatnak a felsőoktatás igen gyorsan változó feltételrendszeréhez való alkalmazkodásához.

8. Összegzés

Dolgozatomban a geometriai térszemlélet fejlesztésének néhány módszertani kérdésével foglalkoztam. A térszemléletet a klasszikus eszközök mellett informatikai eszközökkel megtámogatva javasolom fejleszteni. Vizsgálatom elsősorban a műszaki felsőoktatásnak a műszaki ábrázoló geometria tantárgyához kapcsolódó lehetőségekre terjed ki.

Az `első fejezetben` ismertettem, hogy a mérnökjelöltek oktatása során miért fontos a térszemlélet fejlesztése. Azt gondolom, hogy ennek a módszereit és eszközeit korszerűsíteni kell, igazodva a felsőoktatásba bekerülő hallgatók előképzettségéhez és hozzáállásához, a felsőoktatás tömegesedéséhez, a Bologna-folyamathoz, valamint a XXI. század gyors technikai fejlődéséhez.

A `második fejezetben` ismertettem a kutatási módszereimet. A szakirodalom áttanulmányozásán túl már közel 10 éve igyekszem saját tapasztalatokat gyűjteni, és egy összehasonlító oktatási kísérletet is végeztem a témában.

A `harmadik fejezetben` áttekintettem a témához kapcsolódó szakirodalmat. E szerint meg kell különböztetnünk a biológiai-fiziológiai térlátást (a mélységérzetet), és a gondolati-pszichológiai-pedagógiai értelemben vett térszemléletet. A geometriai térszemléletre az alábbi, Vásárhelyi Éva által megfogalmazott, az alternatív definíciókat jól összefoglaló, jól tükröző, részletes definíciót fogadhatjuk el:

A geometriai térszemlélet képességek és készségek olyan matematikailag irányított komplex együttese, amely lehetővé teszi:

- a térbeli alakzatok alakjának, nagyságának, helyzetviszonyának pontos elképzelését
- a látott vagy elképzelt alakzatoknak a geometria törvényeire épülő egyértelmű ábrázolását
- az egyértelműen ábrázolt alakzatok helyes rekonstrukcióját
- a különböző térbeli (matematikai, műszaki, mérnöki, stb.) problémák konstruktív megoldását, a megoldás képi vagy nyelvi megfogalmazását.

Szintén ebben a fejezetben tekintettem át a térszemlélet fejlesztésének klasszikus módszereit a kisgyermekkortól kezdve a felsőoktatásig. Igen sok olyan hagyományos és elektronikus játék van, amely fejleszti a térszemléletet; a közoktatásban és a műszaki felsőoktatásban pedig mindez tervszerűen történik. Ismertettem a térszemlélet mérésének lehetőségeit is.

Napjainkban sok szakmában követelmény az élethosszig tartó tanulás, amit gyakran informatikai eszközökkel végeznek. Sok jó tapasztalatról olvastam az e-learningről és a számítógéppel támogatott oktatásról. Úgy gondolom, hogy a térszemlélet fejlesztéséhez is jól használható ez az univerzális eszköz.

Áttekintve a témához kapcsolódó publikációkat, többen is kísérleteznek a számítógéppel támogatott térszemlélet-fejlesztéssel. Jó eredménnyel lehet használni egyedileg megírt programrendszereket és a különböző, univerzális modellező szoftvereket (CAD-rendszereket, 3D-képes dinamikus geometriai programokat) is. Ezek a rendszerek nem csak modellezésre alkalmasak, hanem – főleg a dimenziós analógiákkal megtámogatva – térgeometriai problémák megoldásának segítésére is.

A negyedik fejezetben ismertettem a hipotéziseimet. Főhipotézisem, hogy az általam használt matematikadidaktikai eszközrendszer alkalmazásakor a jó térszemléletű mérnökjelölt hallgatók tartalmas, sikeres és hasznos munkát tudnak végezni, ugyanakkor a fejlesztésre szorulóknak eredményesen tudunk segíteni.

Egy ilyen általam kidolgozott rendszer domináns összetevői a probléma-orientált és empirikus matematikatanítás didaktikai elvére és az analógiára épülő tananyag-szervezés, valamint a belső differenciálás módszerének számítógéppel támogatott megvalósítása.

Az ötödik fejezetben dokumentáltam korábbi tapasztalataimat, illetve a hipotézisek vizsgálata céljából elvégzett összehasonlító oktatási kísérletemet.

Mivel hallgatóink között óriási a képességek, a képzettségek és a motivációk terén fellelhető különbség, az oktatási kísérlet során a gyakorlati órákon is erősen differenciálnom kellett. Ennek legfontosabb eszközei a feladatlapok és az általam felajánlott – önálló feldolgozásra is alkalmas – különböző segítségek (főleg elektronikus segédletek) voltak.

A kísérlet során megterveztem és elkészítettem az elektronikus segédleteket, lemértem a hallgatók térszemléletét a szemeszter kezdete előtt és a félév elvégzése után is. A gyakorlati órákon kipróbáltam az általam fejlesztett új segédleteket, megtanítottam a számítógépes 3D modellezést és problémamegoldást.

Ezután összefoglaltam a tapasztalataimat. A segédletek elkészítésében és a szemléltetésben is jól beváltak az univerzális 3D modellező szoftverek, valamint az oktatóvideók is. Az oktatásszervezésben is nagy segítséget jelentett az informatikai háttér. A tapasztalataim alapján azt is megfontolandónak tartom, hogy ezentúl a számítógépet is fogadjuk el szerkesztő- és modellező- és problémamegoldó eszközként. Ennek feltétele, hogy megegyezés szülessen az elvárt kompetenciák tekintetében, és a tananyagot és a számonkérések formáját is ehhez igazítsuk.

Javaslom továbbá, hogy a szemeszter elején végezzünk térszemlélet szintfelmérést, és ennek alapján osszuk be a csoportokat, és ezek alapján tervezzük meg a tanítási-tanulási folyamatot. Javaslom, hogy alkalmazzuk gyakrabban a problémaorientált és realisztikus oktatási módszereket.

Mivel a modern korunkra jellemző a munkavégzéshez szükséges ismeretek sokrétűsége és gyors avulása, ezért hallgatóink a munkájukhoz szükséges tudás nagyobb részét már nem az iskolában szerzik meg. Ebből következik, hogy az egyik legfontosabb tanítási cél az általános képességek fejlesztése. Ilyen például, hogy megtanítjuk a diákokat tanulni és az információkat önállóan megkeresni, rendszerezni és elsajátítani. Mérnökhallgatók esetében hasonlóan általános, nagyon fontos fejlesztendő képesség a geometriai térszemlélet.

Ezért javaslom azt is, hogy a tanítási célok tekintetében a hangsúlyokat helyezzük át az általános képességek fejlesztésére. A térszemlélet fejlesztésén túl fontosnak tartom az információk megszerzésének képességét, a problémamegoldási eszközök és stratégiák elsajátítását és a egy elvárható igényszint kialakítását.

A hatodik fejezetben összevetettem az eredményeimet a hipotézisekkel. A mért adatok szerint a kísérleti csoport a többletterhelés ellenére is legalább olyan jól teljesített, mint a kontrollcsoport, akár a tantárgy követelményeit, akár a térszemlélet fejlődését tekintjük. A kísérleti csoportból a többletterhelés ellenére kevesebben maradtak ki félév közben, mint a kontrollcsoportból. A kísérleti csoport előnye nem szignifikáns.

A többletterhelés alatt olyan tényezőket értünk, hogy

- a számítógépes csoport kevesebbet gyakorolta a hagyományos körzős-vonalzós szerkesztést, ugyanakkor a számonkérés körzővel és vonalzóval történt;
- a számítógépes csoportnak az ábrázoló geometria tananyagon túl a szoftverek kezelésével és a 3D modellezéssel is meg kellett ismerkedniük.

A számítógépes csoportban a többletterhelés egy része a teszteredményekben nem tükröződő tudástöbbletet eredményezett a kontrollcsoporthoz képest, nevezetesen a szoftverkezelési és 3D modellezési kompetenciát.

A `hetedik fejezetben` az eredmények gyakorlati hasznosíthatóságáról írtam. Végül a `függelékben` és az értekezéshez adott DVD lemezen mellékeltem az összehasonlító oktatási kísérlet dokumentumait, valamint az általam készített segédleteket, honlapokat, elektronikus 3D modelleket és szerkesztéseket, oktatóvideókat.

Munkám legfontosabb eredményeinek az alábbiakat tekintem:

- Hallgatóimnak egyedülállóan színes és változatos típusú segédleteket tudtam felajánlani: tankönyv, prezentáció, elektronikus tankönyv, honlap szerkesztésekkel és 3D modellekkel, oktatóvideó, térszemlélet-fejlesztő feladatlapok dinamikus 3D modellekkel. A 6 típusból 3 saját tervezésű és kivitelezésű volt, melyek használatával kedvező tapasztalatokat szereztem. Mind a hat típus teljes abban az értelemben, hogy felöleli egy egész szemeszter anyagát.
- Lefordítottam a Cabri3D dinamikus geometriai szoftver felhasználói felületét, súgóját, mintafájljait és a felhasználói kézikönyvét. A magyar nyelvű Cabri3D országos terjesztése azóta is folyamatos.
- Megnöveltem az önálló tanulásra alkalmas eszközök hatékonyságát.
- Általános térszemlélet-fejlesztő, problémaorientált feladatlapokat állítottam össze.
- Új térszemlélet-mérő feladatlapot állítottam össze és próbáltam ki a gyakorlatban.
- Elvégeztem a térszemlélet-fejlesztésben használható informatikai megoldások használhatóságának vizsgálatát, összehasonlítását, értékelését, bírálatát. Többek között általános CAD és DGS rendszereket használtam az oktatásban változatos szerepkörökben: új ismeretek közlése, az érdeklődés felkeltése, szemléltetés, probléma-felvetés, problémamegoldás.
- Az általános térszemlélet-fejlesztésen és a 3D modellezés elsajátításán túl hallgatóimnak kitekintést nyújtottam a magasabb dimenziókba.

9. Summary

In my dissertation I examined several methodological issues of the development of geometrical spatial ability. My suggestion is to develop spatial ability, by not only using classical tools but by the application of information technology. The research covered primarily the possibilities related to the subject of technical descriptive geometry in technical higher education.

`Chapter One` deals with the reason why the development of spatial ability is intrinsic in the education of Engineer Candidates. I believe its methods and tools must be modernized, following the preliminary training and attitude of the students admitted to higher education, the proliferation of higher education, the Bologna process and the fast technical progress of the 21st century.

`Chapter Two` embraces my research methods. Beyond having read very thoroughly the scientific literature, for 10 years I have been striving to gain personal experiences and I have also made comparative educational experiments in this issue.

`Chapter Three` covers the scientific literature concerning the issue. According to this, we have to distinguish biological-physiological space-perception (depth perception) and spatial ability (spatial skills) in an intellectual-psychological-pedagogical sense. Geometrical spatial ability may be best grasped by the following detailed definition summarizing and best reflecting alternative definitions by Éva Vásárhelyi:

Geometrical spatial ability is the mathematics-driven complex of abilities and skills that enables:

- the accurate conception of the shape, size and positional relationship
- clear-cut representation of perceived or conceived figures based on the rules of geometry
- proper reconstruction of unanimously represented figures
- creative solution of several geospatial (mathematical, technical, engineering, etc.) problems, the graphical or linguistic formulation of the solution.

In the same chapter, I review the classical methods of developing spatial ability from childhood to higher education. There is a multitude of traditional and electronic games that develop spatial ability; and in general and higher education all this is done methodically. I also outlined the possibilities of measuring spatial ability.

Lifelong learning is a requirement in many professions in our time, often accomplished by information technology. I have read many positive experiences on e-learning and on computer-aided education. I believe this all-purpose tool may be well utilized in the development of spatial ability.

Upon the reviewing of the publications concerning this issue, many have experimented with computer-aided development of spatial ability. Customised software systems and several kinds of general-purpose modelling software (CAD systems, 3D dynamic geometrical programs) may be utilized with success. These systems are not only suitable for modeling but also, supported principally by dimensional analogies, for aiding the solution of spatial geometry problems.

Chapter Four advances my hypothesis. My principal hypothesis is that Engineer Candidates with good spatial ability may perform a substantial, successful and efficient work with the application of the mathematical-didactical system of ways and means I use, and, at the same time, those needing development may be effectively helped.

Paramount components of a system of this kind that I elaborated are the curriculum-organizing based on the didactical principle of the education of problem-oriented and empirical mathematics, and the computer-aided realization of the method of internal differentiation.

Chapter Five covers the documentation of my former experiences and my comparative experiment on education for examining the hypotheses.

Since the difference between students concerning abilities, qualifications and motivations are enormous, I had to differentiate considerably in the practical classes during the experiment. Its most important tools were worksheets and different types of assistance (mainly electronic aids) I offered.

During the experiment I designed and prepared the electronic aids, I measured the students' spatial ability before the beginning and after the conclusion of the semester. In the practical classes I tested the new aids I had developed, I taught computerized 3D modeling and problem solving.

Then I summarized my experiences. Different kinds of general-purpose 3D modeling software and tutorial videos proved very suitable in preparing the aids and demonstration. Information technology background meant much help in education organization. Based on my experiences, I suggest computers to be accepted as designing and modeling and problem solving tools in the future. A condition for this is an accord to be concluded concerning the required competences, a fundament the curriculum and the form of examining should be based on.

I further suggest a replacement test on spatial ability to be completed in the beginning of the semester, and groups should be set according to that, and also the designing of the teaching and learning process should be based on that. I suggest using problem-oriented and realistic teaching methods more often.

Since the modern age is characterized by the manifoldness and rapid obsolescence of the knowledge required for working, students acquire most of their knowledge necessary for their job outside of school. This leads to one of the principal teaching purposes being the development of general abilities, such as teaching students to learn and to search for, systematize and learn information on their own. Another, similarly general and very important ability to be developed for Engineer Candidates is the geometrical spatial ability.

That is why I suggest the emphasis, concerning teaching purposes, to be put on the development of general abilities. Besides developing spatial ability, I consider the ability of acquiring information, learning problem solving tools and strategies, and the establishment of an expectable level of aspiration to be very important.

In Chapter Six I compare my results against the hypotheses. According to the measured data, the experimental group, despite the extra load, performed at least as well as the control group, concerning either the requirements of the subject or the improvement of the spatial ability. Despite the extra load, there were less drop-outs in the experimental group during the semester than in the control group. The advantage of the experimental group is not significant.

By extra load we mean factors like

- the computer-aided group practiced less traditional geometrical construction by compasses and ruler, nevertheless, they were tested by compasses and ruler;
- besides the subject of descriptive geometry, the computer-aided group had to become acquainted with the running of the different software and 3D modelling.

A part of the extra load on the computer-aided group resulted in a knowledge surplus in comparison to the control group, not reflected in the test results – namely the ability of software management and 3D modeling.

`Chapter Seven` specifies the practical utility of the results. Finally, in the `Appendix` and on the DVD annexed to the essay, I enclosed the documents of the comparative educational experiment and the aids developed by myself, websites, electronic 3D models and geometrical constructions, educational videos.

I consider the following to be the most important results of my work:

- I could offer my students exceptionally colorful and diversified aids: textbook, presentation, electronic textbook, website with designs and 3D models, educational video, worksheets to develop spatial ability including dynamic 3D models. 3 out of 6 were my own design and construction that brought me congenial experiences. All six types are complete in the sense that they embrace the material of the whole semester.
- I translated the user interface, the help, the sample files and user's manual of the Cabri3D dynamic geometry software. The dissemination of the Hungarian Cabri3D is still continuous country-wide.
- I increased the efficiency of the tools suitable for individual learning.
- I compiled general spatial ability developing and problem oriented worksheets.
- I compiled a new spatial ability measuring worksheet and tested it in practice.
- I accomplished the survey, comparison, evaluation and searching analysis of the usability of the information system solutions employable in the development of spatial ability. Among other things, I used general CAD and DGS systems in education in diverse roles: disclosing new knowledge, arousing interest, demonstrating, raising a problem, problem-solving.
- Beyond developing general spatial ability and teaching the 3D modelling, I offered my students an outlook on the higher dimensions.

10. Irodalomjegyzék

Ahmad, R., Khairul, A. S. & Azniah, I. (2006.). On Improving Spatial Ability Through Computer-Mediated Engineering Drawing Instruction. *Educational Technology & Society, 9/3.*, 149-159.

Alias, M., Black, T. R. & Gray, D. E. (2002). Effect of Instructions on Spatial Visualisation Ability in Civil Engeneering Students. *International Educational Journal, 3/1.*, 1-12.

Ambrus, A. (2004). *Bevezetés a matematika-didaktikába.* Budapest: Elte Eötvös Kiadó.

Ambrus, G. (2001). Szükséges-e szemléletváltás az új technológiák megjelenésével a matematikaoktatásban? *A matematika tanítása, 2001/1.*, 3-6.

Ames, A. (1951). Visual perception and the rotating trapezoidal window. *Psychological Monographs, 65.*, 1-32.

Árki, T. (2003). Dinamikus módszerek alkalmazása a geometriaoktatás különböző területein. *Számítógép algebrai- és dinamikus geometriai rendszerek, mint a matematikaoktatás katalizátorai.* Pécs: PTE Pollack Mihály Műszaki Kar.

Árki, T. & Német, I. K. (2004). Dynamic methods in teaching geometry at different levels. *Teaching Mathematics and Computer Science, 2/1.*, 1-13.

Bancsik, Z., Juhász, I. & Lajos, S. (2006). *Ábrázoló geometria szemléletesen (elektronikus tankönyv).* Miskolc: Miskolci Egyetem.

Bárczi, G. & Országh L. Szerk. (1966). *A magyar nyelv értelmező szótára.* Budapest: Akadémiai Kiadó.

Barke, H.-D., Tóth, Z. & Kiss, E. (2003). Egy kémiatanításban használható térszemléleti teszt hazai adaptációja. *Magyar Pedagógia, 103/4.*, 459-479.

Báthory, Z. & Falus I. Szerk. (1997). *Magyar Pedagógiai Lexikon.* Budapest: Keraban Kiadó.

Beacham, C. V. & Shambaugh, N. (2007). Advocacy as a Problem-Based Learning Teaching Strategy. *International Journal of Teaching and Learning in Higher Education, 19/3.*, 315-324.

Behzat Bektasli, M. S. (2006). *The relationship between spatial ability, logical thinking, mathematics performance and kinematics graph interpretation skills.* Doktori disszertáció: The Ohio State University.

Berta, T. & Stankov, G. (2004). Combination of traditional and computer based tools in mathematics education. *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 85-88.). Hildesheim: Franzbecker.

Boakes, N. (2008). Origami-Mathematics Lessons: Paper Folding as a Teaching Tool. *Mathitudes*.

Boakes, N. (2009). Origami Instruction in the Middle School Mathematics Classroom: Its Impact on Spatial Visualization and Geometry Knowledge of Students. *Research in Middle Level Education, 32.*, 1-12.

Bognár, C. P. (1932). Térszemlélet. *Athenaeum, 1932/5-6.*, 136-152.

Bognár, G. & Kaczur, S. (2008). Térbeli gondolkodás segítése elektronikus eszközökkel. *Informatika a felsőoktatásban konferencia.* Debrecen: Debreceni Egyetem.

Bolyai, J. (1977). *Appendix.* Budapest: Akadémiai Kiadó.

Branoff, T. J. (2000). Spatial Visualization Measurement: A Modification of the Purdue Spatial Visualization Test - Visualization of Rotations. *Engineering Design Graphics Journal, 64/2.*, 14-22.

Bruner, J. S. (1968). *Az oktatás folyamata.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Bruner, J. S. (1974). *Új utak az oktatás elméletéhez.* Budapest: Gondolat Kiadó.

Burin, D. I., Delgado, A. R. & Prieto, G. (2000). Solution strategies and gender differences in spatial visualization tasks. *Psicológica, 21*, 275-286.

Campo, D., Taffoni, F., Formi, D. & Guglielmelli, E. (2011). Instrumented toys for assessing spatial cognition in infants. *Frontiers of Mechanical Engineering, 6/1.*, 82-88.

Clements, D. H. & Samara, J. (2011). Early childhood teacher education: the case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14.*, 133-148.

Contero, M., Company, P., Saorin, J. L. & Naya, F. (2006). Learning Support Tools for Developing Spatial Abilities. *International Journal of Engineering Education, 22/3.*, 470-477.

Coxeter, H. S. & Greitzer, S. L. (1977). *Az újra felfedezett geometria.* Budapest: Gondolat Kiadó.

Csánk, I. & Göndöcs, L. (1966). *Az ábrázóló geometria módszertanának néhány kérdése.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Dancsó, T. (2007). A Sulinet Digitális Tudásbázis tananyagainak felhasználása az oktatásban. *Új Pedagógiai Szemle, 2007 szeptember*, 128-143.

Davis, C. D. (1999). Visual Enhancements: Improving Deaf Students' Transition Skills Using Multimedia Technology. *Career Development for Exceptional Individuals, 22/2.*, 267-281.

de Corte, E. (1997). A matematikatanítás és -tanulás kutatásának fő áramlatai és távlatai. *Iskolakultúra, 1997/12.*, 14-29.

Dienes, Z. (1999). *Építsük fel a matematikát.* Budapest: SHL Hungary.

Ekstrom, R., French, J., Harman, H. & Derman, D. (1976). Kit of factor-referenced cognitive test. *Educational Testing Service*.

Eliot, J. & Smith, I. M. (1983). *An International Directory of Spatial Tests.* Winsdor: NFER-Nelson Publishing Company.

Fitos, L. (1984). *Analóg tételek és feladatok a sík- és térgeometriában.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Forgó, S. (2009). Az új média és az elektronikus tanulás. *Új pedagógiai Szemle, 59.*, 91-96.

Fried, K. & Simonovits, M. (2005). *A problémamegoldás számítógépes iskolája.* Budapest: Typotex Kiadó.

G. Horváth, Á. & Szirmai, J. (2004). *Nemeuklideszi geometriák modelljei.* Budapest: Typotext Kiadó.

Gardner, H. (1983). *Frames of mind: the theory of multiple intelligences.* New York: Basic books.

Gee, J. P. (2007). *Good video games and good learning.* Frankfurt am Main: Peter Lang Publishing.

Goldstein, D., Haldane, D. & Mitchell, C. (1990). Sex differences in visual-spatial ability: The role of performance factors. *Memory & Cognition, 18/5.*, 546-550.

Güven, B. & Kosa, T. (2008). The effect of dynamic geometry software on student mathematics teachers' spatial visualisation skills. *The Turkish Online Journal of Educational Technology, 7/4.*, 100-107.

Hajós, Gy. (1979). *Bevezetés a geometriába.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Hámori, M. (1983). *Tanulás és tanítás számítógéppel.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Hanczár, G. (2007). Mi a baj a multimédiával? *Új Pedagógiai Szemle, 2007 február*, 32-37.

Hegarty, M. (2010). Components of spatial intelligence. *Psychology of Learning and Motivation, 52*, 265-297.

Hegarty, M. & Cohen, C. (2008). Cross Section Test. *www.spatiallearning.org/ /resource-info/Spatial_Ability_Tests/Santa_Barbara_Solids_Test_rev_1210.pdf*

Hegarty, M. & Kozhevnikov, M. (2001). A dissociation between object-manipulation and perspective-taking spatial abilities. *Memory & Cognition, 29.*, 745-756.

Hegarty, M. & Waller, D. (2004). A dissociation between mental rotation and perspective-taking spatial abilities. *Intelligence, 32.*, 175-191.

Herber, H.-J. & Vásárhelyi, É. (1997). Analogisierende versus seqientielle Instruktion, situativ geanderte Aufgabenschwierigkeiten und Matematikleistungen. *Integrativer Unterricht in Mathematik: 5. Didaktikagung Österreich_Ungarn*, (pp. 25-40.). Salzburg.

Hídvégi, I. & Katona, J. (2004). Ablak Európára: Content Management and Collaboration System for eLearning of Natural Sciences . *ICI3: International Conference on Information, Agria Media* (old.: 5.). Eger: Eszterházy Károly Főiskola.

Hídvégi, I., Hídvéginé, M. K. & Katona, J. (2004). Egy európai kezdeményezés távoktatás és hagyományos oktatás támogatására. *Építőmérnöki Tudományos Tanácskozás* (old.: 4). Budapest: SZIE Ybl Miklós Főiskolai Kar.

Hoffmann, M., Németh, B. & Sörös, C. (2007). Typical mistakes in Mental Cutting Test and their consequences in gender differences. *Teaching Mathematics and Computer Science, 5/2.*, 385-392.

Horváth, J., Kiss, A. & Horváth, L. (1991). Néhány goldolat a térszemlélet fejlesztéséről. *Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei, VIII.*, 85-106.

Horvay, K. & Reiman, I. (1977). *Geometriai feladatok gyűjteménye.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Huk, T. (2006). Who benefits from learning with 3D models? The case of spatial ability. *Journal of Computer Assisted Learning, 22.*, 392-404.

Hunya, M., Dancsó, T. & Tartsayné, N. N. (2006). Informatikai eszközök használata a tanítási órákon. *Új Pedagógiai Szemle, 2006 július-augusztus*, 163-177.

Husén, T. & Postlethwaite N. Szerk. (1994). *The International Encyclopaedia of Education.* Oxford: Pergamen.

Ittelson, W. H. (1952). *The Ames Demonstrations in Perception.* Priceton: Priceton University Press.

Jones, K., Christou, C., Pitta-Pantazi, D., Pittalis, M., Mousoulides, N., Matos, J., Sendova, E., Zachariades, T. & Boytchev, P. (2007). Developing Student Spatial Ability with 3D Software Applications. *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (old.: 1-10.). Larnaca: University of Cyprus.

Joyes, G. & Frize, P. (2005). Valuing Individual Differences Within Learning: From Face-to-Face to Online Experience. *International Journal of Teaching and Learning in Higher Education, 17.*, 33-41.

Kántor Sándorné, V. T. (1993). A vizualizáció és a modellek szerepe az oktatásban. *AV kommunikáció, 1993/3.*, 49-53.

Kántor Sándorné, V. T. (1995). Papírhajtogatás a geometria tanulásában. *Matematikatanár-képzés, matematikatanár-továbbképzés. Az 1993-94. évi Varga Tamás Napok előadásai, 1995/3.*, 7-16.

Kántorné, V. T. & Kovács, A. (2007). Első lépések a kooperatív tanulás bevezetésére. *A 2004-2006. évi Varga Tamás Napok előadásai*, 91-102.

Kárpáti, A. (1999). Számítógéppel segített tanulás. *Iskolakultúra, 1997/12.*, 99-107.

Kárpáti, A. (2003). Mérni a mérhetetlent. *Iskolakultúra, 2003/8.*, 95-106.

Kárpáti, A. (2003). Zelig a katedrán. *Educatio, 2003-3.*, 389-401.

Kárpáti, A. (2005). *A kamaszok vizuális nyelve.* Budapest: Akadémiai Kiadó.

Kárpáti, A. & Molnár, É. (2004). Képességfejlesztés az oktatási informatika eszközeivel. *Magyar Pedagógia, 104/3.*, 293-317.

Kárteszi, F. (1951). *Szabályos testek.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Kárteszi, F. (1966). *Szemléletes Geometria.* Budapest: Gondolat Kiadó.

Kárteszi, F. (1972). *A geometriatanítás korszerűsítéséről.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Katona, J. (1997). One programm – more than a million exercises. *3rd International Conference on Applied Informatics ICAI* (old.: 391-394.). Eger: Eszterházy Károly Főiskola.

Katona, J. (2005). Improving students' three-dimensional eyesight by CAD models. *MicroCAD* (old.: 195-200). Miskolc: Miskolci Egyetem Inoovációs és Technológiai Traszfer Centrum.

Katona, J. (2008). Solving 2 and 3-dimensional problems with help of dynamic geometry software. In É. Vásárhelyi, *Beitrage zum Mathematikunterricht.* Münster: Martin Stein Verlag.

Katona, J. (2009). Térgeometriai problémák megoldása aktív táblán. *Varga Tamás Módszertani Napok.* Budapest: ELTE.

Katona, J. (2012). Térgeometria problémák megoldása 3D modellező eszközökkel. *International Conference on Applied Geometry and Graphics GeoGra.* Budapest: SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Kar.

Katona, J. & Molnár, E. (2007). A visibility algorithm for the projection PS^d --> PS^2. *Proceedings of the 7th International Conference on Applied Informatics.* Eger: Eszterházy Károly Főiskola.

Katona, J. & Molnár, E. (2009). Visibility of the higher-dimensional central projection into the projective sphere. *Acta Mathematica Hungarica, 123.*, 291-309.

Katona, J. & Nagy, G. (2010). Connectivity for rigidity. *Studies of the University of Zilina Mathematical Series, 24.*, 59-64.

Katona, J., Molnár, E. & Prok, I. (2008). Visibility of the 4-dimensional regular solids, moving int he computer screen. *International Conference on Geometry and Graphics ICGG.* Dresden: Technische Universitat.

Katona, J., Molnár, E., Prok, I. & Szirmai, J. (2011). Higher dimensional central projection into 2-plane with visibility and application. *Kragujevac Journal of Mathematics, 35.*, 249-263.

Kicsi, S. Szerk. (1971). *Természettudományi kislexikon.* Budapest: Akadémiai Kiadó.

Komenczi, B. (2004). Didaktika elektromagna? Az e-learning virtuális valóságai. *Új Pedagógiai Szemle, 2004/11.*, 31-49.

Kovács, E. & Hoffmann, M. (1997). Computer Aided Teaching of Descriptive Geometry. *International Conference on Applied Informatics* (old.: 179-183.). Eger: EKTF Kiadó.

Kramarski, B. & Liberman, A. (2003). Az E-mail kommunikáció és a metakognitív oktatás alkalmazása a matematikai problémamegoldás fejlesztésében. *Új Pedagógiai Szemle, 2003 július-augusztus*, 99-105.

Lamit, L. G. & Paige, V. (1986). The influence of CADD on teaching traditional descriptive geometry and orthographic projection. *Proceedings of Computer Graphics Tokyo '86 on Advanced Computer Graphics* (old.: 473-484.). New York: Springer Verlag.

Macfarlane Smith, I. (1964). *Spatial Ability.* London: University of London Press.

Maier, P. H. (1998). Spatial Geometry and spatial ability - How to make solid geometry solid. *Selected Papers from the Annual Conference of didactics of Mathematics*, (old.: 63-75.). Osnabrueck.

Mansfield, D. & Thompson, D. (1972-1974). *Matematika új felfogásban.* Budapest: Gondolat Kiadó.

Márkus, G. (1968). Az észlelés és a pszichofizikai probléma. *Magyar Filozófiai Szemle, 12.*, 217-300.

Maróti, A. (2002). Lehet-e tanulni egy életen át? *Új Pedagógiai Szemle, 2002/7-8.*, 3-17.

Maus, P. & Vásárhelyi, É. (2007). Problem solving in everyday life and in mathematics using analogies. *Mathematikinformation*, 28-39.

Mayer, R. E. (1997). Multimedia learning: are we asking the right questions? *Educational Psychologist, 32.*, 1-19.

Mayer, R. E. (1999). Multimedia aids to problem solving transfer. *International Journal of Educational, 31.*, 611-623.

Mayer, R. E. (2002). Cognitive Theory and the Design of Multimedia Instruction: An Example of the Two-Way Street Between Cognition and Instruction. *New Directions for Teaching nad Learning, 89.*, 55-71.

Mayer, R. E. & Moreno, R. (2002). Aids to computer-based multimedia learning. *Learning and Instruction, 12.*, 107-119.

Mayer, R. & Sims, V. (1994). For whom is a picture worth a thousand words? Extensions of a dual-coding theory of multimedia learning. *Journal of Educational Psychology, 86.*, 389-401.

McKim, R. H. (1980). *Experiences in Visual Thinking.* Pacific Grove, California, USA: Brooks/Cole Publishing Company.

McLoughlin, C. & Lee, M. J. (2008). The Three P's of Pedagogy for the Networked Society: Personalization, Participation, and Productivity. *International Journal of Teaching and Learning in Higher Education 2008, 20/1.*, 10-27.

Miller, C. L. & Mohler, J. L. (2008). Improving Spatial Ability with Mentored Sketching. *Engineering Design Graphics Journal, 72/1.*, 19-27.

Mohler, J. L. (2001). Using interactive multimedia technologies to improve student understanding of spatially-dependent engineering concepts. *GraphiCon* (old.: 292-300.). Nyizsnij Novgorod: Lobacsevszkij Egyetem.

Mohler, J. L. (2006). Computer Graphics Education: Where and How Do We Develop Spatial Ability? *EuroGraphics* (old.: 8). Geneve: EuroGraphics Association.

Molnár, G. (2001). Az életszerű feladathelyzetekben történő problémamegoldás vizsgálata. *Magyar Pedagógia, 101/3.*, 347-372.

Molnár, P. (2009). Számítógéppel támogatott együttműködő tanulás online közösségi hálózatos környezetben. *Magyar Pedagógia, 109/3.*, 261-285.

Munkácsy, K. & Bontovics, I. (2010). A térszemlélet fejlesztése. *Varga Tamás Módszertani Napok.* Budapest: ELTE.

N. Szilvási, M. (1991). *CAD iskola.* Budapest: Typotex Kiadó.

N. Szilvási, M. (1997). *CADKEY gyakorlókönyv.* Budapest: Műegyetemi Kiadó.

N.Szilvási, M. (2012). Vectoralgebra via modeling. *Conference on Applied Geometry and Graphics GeoGra.* Budapest: SZIE Ybl Miklós Építéstudományi Kar.

Nagy, B. (2004). *A térlátás iskolája.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Nagy, L. (2000). Analógiák és analógikus gondolkodás a kognitív tudományok eredményeinek tükrében. *Magyar Pedagógia, 100/3.*, 275-302.

Nagy, L. (2006). *Az analógiás gondolkodás fejlődése.* Budapest: Műszaki Kiadó.

Nagy-Kondor, R. (2003). Dinamikus geometriai rendszerek a geometria oktatásában. *Iskolakultúra, 2003/12.*, 67-73.

Nagy-Kondor, R. (2007). Spatial ability of engineering students. *Annales Mathematicae et Informaticae, 34.*, 113-122.

Nagy-Kondor, R. (2010). Spatial Ability, Descriptive Geometry and Dynamic Geometry Systems. *Annales Mathematicae et Informaticae, 37.*, 199-210.

Némethné Büki, B. (2009). Az aktív tábla a matematikaórán. *Új Pedagógiai Szemle, 59.*, 145-147.

Newcombe, N. S. (2010). Picture This. Increasing Math and Science Learning by Improval Spatial Thinking. *American Educator*, 29-35. és 43.

Nievergelt, J., Farrar, J. & Reingold, E. (1977). *Matematikai problémák megoldásának számítógépes módszerei.* Budapest: Műszaki Könyvkiadó.

Oblinger, D. G. & Oblinger J. L. Szerk. (2005). *Educating the Net Generation.* USA: Educause.

Oldenburg, R. (2008). On an analogy between spreadsheets and dynamic geometry environments. *Teaching Mathematics and Computer Science, 6/2.*, 281-288.

Pál, I. (1961). *Térláttatós ábrázoló mértan.* Budapest: Műszaki Könyvkiadó.

Pálffy, Z. (1969). A térlátás minőségi szintjeiről. *Magyar Pszichológiai Szemle, XXVI.*, 421-434.

Papert, S. (1988). *Észrengés.* Budapest: SZÁMALK Kiadó.

Papp, J. (2010). A természettudományok oktatásának javításáért, avagy a virtuális valóság lehetséges szerepe az oktatásban. *Új Pedagógiai Szemle, 2010/3-4.*, 104-114.

Parsons, L. M. (1987). Visual discrimination of abstract mirror-reflected three-dimensional objects at many orientations. *Perception & Psychophysics, 1987/42.*, 49-59.

Paukowitsch, P. (1988). Fundamental ideas for computer-supported descriptive geometry. *Computers & Graphics, 12/1.*, 3-14.

Peters, M., Laeng, B., Latham, K., Jackson, M., Zaiyouna, R. & Richardson, C. (1995). A redrawn Vandenberg and Kuse Mental Rotational Test: Different Versions and Factors That Affect Performance. *Brain and Cognition, 28.*, 39-58.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1970). *Válogatott tanulmányok.* Budapest: Gondolat Kiadó.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1984). *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig.* Budapest: Akadémiai Kiadó.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1999). *Gyermeklélektan.* Budapest: Osiris Kiadó.

Pittalis, M., Mousoulides, N. & Christou, C. (2008). Enhancing Students' Spatial Ability with 3D Software Applications. *Panhellenic Conference with International Participation Information and Communication Technoligies in Education* (old.: 55-64). Nicosia: University of Cyprus.

Polónyi, I. (2008). Tömegesedés és esélykiegyenlítés a hazai felsőoktatásban. *Új Pedagógiai Szemle, 2008. augusztus-szeptember.*

Pólya, G. (1977). *A gondolkodás iskolája.* Budapest: Gondolat Kiadó.

Pólya, G. (1985). *A problémamegoldás iskolája I-II.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Pólya, G. (1988). *A matematikai gondolkodás művészete (I.kötet: Indukció és analógia, II.kötet: A plauzíbilis következtetés).* Budapest: Gondolat Kiadó.

Potegal M. Szerk. (1982). *Spatial Abilities.* New York: Academic Press.

Prensky, M. (2001). Do They Really Think Differently? *On the Horizon, 9/6.*, 1-10.

Prensky, M. (2007). *Digital Game-Based Learning.* New York: McGraw-Hill.

Pusztai, A. (2008). *Testhálózatok. Eszközök a térszemlélet fejlesztéséhez a 6-12. évfolyamon.* Budapest: Educatio Kiadó.

R. Sípos, E. (2007). A geometria tanítása számítógép segítségével. *Új Kép, XI/1-2.*, 51-60.

R. Sípos, E. (2009). Teaching geometry using computer visualizations. *Teaching Mathematics and Computer Science, 7/2.*, 259-277.

R. Sípos, E. (2010). Alkalmazzuk a számítógépet a geometriaórán! *A matematika tanítása, 2010/2.*, 3-11.

Radnóti, K. (2007). Miért buknak meg jelentős számban az elsőéves egyetemisták? *Új Pedagógiai Szemle, 2007/11.*, 42-48.

Reiman, I. (1986). *A geometria és határterületei.* Budapest: Gondolat Kiadó.

Scorupan, C. (1998). The Effect of Spatial Experience on Engineering Students' Visualization. *The Penn State Behrend Psychology Journal, 2/2.*, 45-50.

Séra, L., Kárpáti, A. & Gulyás, J. (2002). *A térszemlélet.* Pécs: Comenius.

Shrestha, C. H., May, S. & Edirisingha, P. (2009). From Face-to-Face to e-Mentoring: Does the "e" Add Any Value for Mentors? *International Journal of Teaching and Learning in Higher Education, 20/2.*, 116-124.

Skanderáné, A. M. (1987). A térszemlélet-fejlesztés lehetőségei a középiskolában. *A matematika tanítása, 34/2.*, 46-54.

Somfai, Z. (2002). A matematika tantárgy helyzete a felső tagozaton és a középiskolában. *Új Pedagógiai Szemle, 2002/12.*, 99-115.

Sorden (2005). A Cognitive Approach to Instructional Design for Multimedia Learning. *Informing Science JournaL, 8.*, 263-279.

Stumpf, H. (1993). Performance factors and gender-related differences in spatial ability: Another assessment. *Memory & Cognition, 21/6.*, 828-836.

Szabóné Mojzes, A. (2010). Gondolatok a felsőoktatás tömegesedéséről. *Új pedagógiai szemle, 2010/5.*, 16-23.

Széplakiné, G. (2008). Térszemlélet-fejlesztés. *Tanító és tanár, 4.*, 16-17.

Szolár, É. (2009). A Bologna-folyamat kritikai fogadtatása a felsőoktatás-kutatás irodalmában. *Magyar Pedagógia, 109/2.*, 147-167.

Szolár, É. (2010). A felsőoktatás reformja és a Bologna-folyamat Magyarországon. *Magyar Pedagógia, 110/3*, 239-263.

Takács G. (1993). Az analógia alkalmazása a matematika tanításakor. *Tanító, 10.*, 13-14.

Takácsné & Takács G. (2000). A tanulók gondolkodásáról. *Iskolakultúra, 2000/1.*, 44-54.

Tempelman-Kluit, N. (2006). Multimedia Learning Theories and Online instruction. *College & Research Librarie, 67.*, 364-369.

Thurstone, L. L. (1950). Some Primary Abilities in Visual Thinking. *Proceedings of the American Philosophical Society, 94.*, 517-521.

Turos, J. M. & Ervin, A. I. (2000). Training and Gender Differences on a Web-Based Mental Rotation Task. *The Penn State Behrend Psychology Journal, 4/2.*, 3-12.

Vandenberg, S. G. & Kuse, A. R. (1978). Mental rotations, a group test of three-dimensional spatial visualization. *Perceptual and Motor Skills, 47/2.*, 599-604.

Varga, T. (1973). *Játsszunk matematikát.* Budapest: Móra Kiadó.

Vásárhelyi, É. (1994). In der Ebene oder im Raum? *Didaktik der Mathematik* (old.: 261-270.). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Vásárhelyi, É. (1999). Combination of traditional and computer based tools as a strategy for problem solving. *Creativity and Mathematics Education*, (old.: 163-166.). Münster.

Vásárhelyi, É. (2008). *Background theories of the teaching model interior differentiation.* Salzburg: Doktori disszertáció, Paris Lodron University of Salzburg.

Vásárhelyi, É., Astleitner, H., Herber, H.-J. & Parisot, K. J. (1996). Tanítható-e a problémamegoldás? *Iskolakultúra, VI/10.*, 54-61.

Veenema, S. & Gardner, H. (1996). Multimedia and Multiple Intelligences. *The American Prospect, 7/29.*, 1-8.

Vermes, I. (2005). *Geometria. Útmutató és példatár.* Budapest: Műegyetemi Kiadó.

Vigassy, L. (1970). *Projektív geometria.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Wertheimer, M. (1912). Experimental Studies on the Seeing of Motion. In T. Shipley Szerk.: *Classics in Psychology 1961* (old.: 1032-1089). New York: Philosophical Library.

Yun, R., Xi, H. & Li, Y. (2006.). The Experiment of Improving Students' Spatial Ability by Using VGLS. *International Conference on Artificial Reality and Telexistence* (old.: 467-473.). Berlin: Springer Verlag.

Zheng, R. & Zhou, B. (2006). Recency Effect on Problem Solving in Interactive Multimedia Learning. *Educational Technology & Society, 9/2.*, 107-118.

11. A szerző publikációs jegyzéke

11.1. Referált, angol nyelvű, nyomtatott publikációk

[1] J.KATONA-E.MOLNÁR: Visibility of the higher-dimensional central projection into the projective sphere
Típus: folyóiratcikk (Referáló: Zentralblatt Math Zbl 1212.65077)
A megjelenés helye: Acta Mathematica Hungarica 123 No:3 Springer (2009)
Terjedelem: 19 oldal
URL: http://www.springerlink.com/content/dql7277237k62x84/
ISSN: 0236-5294
Impact factor: 0,522

[2] J.KATONA: Solving 2 and 3-dimensional problems with help of dynamic geometry software
Típus: proceedings (Referáló: MathEDUC ME 2010a.00379)
A megjelenés helye: Beiträge zum Mathematikunterricht 2008. Vorträge auf der 42. GDM Tagung für Didaktik der Mathematik. Martin Stein Verlag, Münster (2008)
Terjedelem: 4 oldal
URL: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2008/BzMU-2008-alphabetisch.pdf
ISBN: 978-3-9811015-7-7

[3] J.KATONA-GY.NAGY: Connectivity for rigidity
Típus: folyóiratcikk (Referáló: Zentralblatt Math Zbl 1234.52015)
A megjelenés helye: Studies of the University of Zilina Mathematical Series Vol. 24 (2010)
Terjedelem: 6 oldal
ISSN: 1336-149X

[4] J.KATONA-E.MOLNAR-I.PROK-J.SZIRMAI: Higher dimensional central projection into 2.plane with visibility and application
Típus: folyóiratcikk (Referáló: AMS, Zentralblatt)
A megjelenés helye: Kragujevac Journal of Mathematics, Vol. 35, (2011)
Terjedelem: 16 oldal
URL: http://www.kjm.pmf.kg.ac.rs/all-issues/kragujevac-journal-of-mathematics-vol-35-no2-2011/
ISSN: 1450-9628

[5] J.KATONA-E.MOLNÁR-I.PROK: Visibility of the 4-dimensional regular solids, moving in the computer screen
Típus: proceedings (Referáló: Zentralblatt Math Zbl 1157.68469)
A megjelenés helye: Proceedings of 13 th International Conference on Geometry

and Graphics, Dresden, (2008)
Terjedelem: 11 oldal
URL: http://icgg2008.math.tu-dresden.de/abstracts/Molnar.pdf
ISBN: 978-3-86780-042-6

[6] J.KATONA-E.MOLNÁR: A visibility algorithm for the projection PS^d --> PS^2
Típus: proceedings (Referáló: Zentralblatt Math Zbl 1183.68665)
A megjelenés helye: Proceedings of the 7th International Conference on Applied Informatics, Eger, 2007, Vol. I
URL: http://icai.ektf.hu/pdf/ICAI2007-vol1-pp99-106.pdf
Terjedelem: 8 oldal

11.2. Lektorált, angol nyelvű, nyomtatott publikációk

[7] J.KATONA: Improving students' three-dimensional eyesight by CAD models
Típus: proceedings
A megjelenés helye: Proceedings of MicroCAD 2005 International Scientific Conference (2005)
Terjedelem: 6 oldal
ISBN: 963 661 660 4

[8] J.KATONA: One programm – more than a million exercises
Típus: proceedings
A megjelenés helye: Proceedings of the 3th International Conference on Applied Informatics, Eger, 1997, Vol. 2
Terjedelem: 4 oldal

[9] J.KATONA-GY.NAGY: Writing scripts to extend import of CAD softwares
Típus: folyóiratcikk
A megjelenés helye: Annual News (2005)
Terjedelem: 5 oldal

[10] K.BOGNÁR-J.KATONA: New way in teaching constructive/descriptive geometry
Típus: abstact
A megjelenés helye: Conference on Constructive Geometry (2005)
Terjedelem: 1 oldal

[11] J.KATONA-GY.NAGY: An E-learning system optimized mathematical and geometrical content: NS-eCMS
Típus: abstact
A megjelenés helye: Networkshop, Szeged, (2005)
Terjedelem: 1 oldal

11.3. Magyar nyelvű, nyomtatott publikációk

[12] KATONA JÁNOS: A geometriához kapcsolódó kompetenciák fejlesztésének egyre bővülő eszköztára
Típus: folyóiratcikk
A megjelenés helye: Szakoktatás, 2009/7
Terjedelem: 3 oldal
ISSN: 0237-5338

[13] KATONA JÁNOS: Ablak Európára: Content Management and Collaboration System for eLearning of Natural Sciences
Típus: proceedings
A megjelenés helye: ICI3: International Conference on Information, Agria Media konferencia - kiadvány, 2004
Terjedelem: 4 oldal
ISBN: 963 9417 09 2

[14] KATONA JÁNOS: Variációk egy témára
Típus: folyóiratcikk
A megjelenés helye: A matematika tanítása 1996/2
Terjedelem: 5 oldal
ISSN: 1216-6650

[15] KATONA JÁNOS: Számítógép a fizikaszertárban
Típus: proceedings
A megjelenés helye: Agriamédia konferencia - kiadvány 1996
Terjedelem: 4 oldal
ISSN: 1417-0868

[16] KATONA JÁNOS: Méréskiértékelés EXCEL5-tel
Típus: proceedings
A megjelenés helye: Informatika a felsőoktatásban konferencia - kiadvány 1996
Terjedelem: 8 oldal
ISBN: 963 0470 26 8

[17] KATONA JÁNOS: Táblázatkezelés
Típus: tankönyv
APC-Stúdió 1995, második kiadás 1997, harmadik kiadás 1998.
Az év informatika tankönyve1996-ban.
Terjedelem: 114 oldal B/5
Tankönyvi azonosító: AS-0051

[18] KATONA JÁNOS: Bevezetés a táblázatkezelésbe
Típus: BSc egyetemi jegyzet, SZIE-YMMFK Kiadó 2006
Terjedelem: 32 oldal A/4
második, átdolgozott bővített kiadás 2008
Terjedelem: 40 oldal A/4
ISBN: 978-963-2690-46-9

11.4. Szakmai konferenciákon tartott előadások

[19] Efforts in descriptive geometry education and their result
(dr. Bölcskei Attilával közösen)
International Conference moNGeometrija, Novi Sad, 2012. június 22-24.

[20] Még több dinamikus geometria
(dr. Bölcskei Attilával közösen)
Országos ábrázoló és konstruktív geometria konferencia, Congeo, Budapest, 2012. június 1.

[21] Térgeometria problémák megoldása 3D modellező eszközökkel
GeoGra 2012 Conference, Budapest, 2012. január 20-21.

[22] 3D-képes dinamikus geometria programok alkalmazásának lehetőségei
Geometria & Elektronikus Ábrázolás Konferencia, Budapest, 2011. január 21.

[23] Szemléletváltás a szemléltetésben
Hundidac, Budapest, 2010. november 18-20.

[24] Higher dimensional central projection into 2.plane with visibility and application
(dr. Molnár Emillel és dr. Prok Istvánnal közösen)
XVI Geometrical Seminar, Vrnjacka Banja, 2010. szeptember 20-25.

[25] Térgeometriai problémák megoldása aktív táblán
Varga Tamás Módszertani Napok, Budapest, 2009. november 6-7.

[26] Visibility of the 4-dimensional regular solids, moving int he computer screen
(dr. Molnár Emillel és dr. Prok Istvánnal közösen)
13 th International Conference on Geometry and Graphics, Dresden, 2008. augusztus 4-8.

[27] Solving 2 and 3-dimensional problems with help of dynamic geometry software
Gesellshaft für Didaktik der Matematik, Budapest, 2008. március 13-18.

[28] Visibility of the Higher-dimensional Central Projection onto the Projective Sphere
(dr. Molnár Emillel közösen)
Conference on Geometry theorie and Application, Vorau, 2007. június 3-8.

[29] A visibility algorithm for the projection PS^d --> PS^2
(dr. Molnár Emillel közösen)
7th International Conference on Applied Informatics, Eger, 2007. január 28-31.

[30] Teknőcgrafika új ötletekkel
INFO 2006, Békéscsaba, 2006 november 16-18.

[31] Teknőcgrafika egy matematikai programcsomagban
HungaroLogo 2006, Budapest, 2006 szeptember 23.

[32] Számítógéppel támogatott ábrázoló geometria oktatás
Konstruktív geometria konferencia 2006, Budapest, 2006. május 5.

[33] Rajzoló-szerkesztő programok oktatásának tapasztalatai
INFO 2005, Békéscsaba, 2005. november17-19.

[34] New way in teaching constructive/descriptive geometry
(Máthéné dr Bognár Katalinnal közösen)
Conference on Constructive Geometry 2005, Balatonföldvár, 2005. szeptember 5-9.

[35] Egy matematikai és geometriai tartalomra optimalizált E-learning fejlesztés
(dr. Nagy Gyulával közösen)
Networkshop 2005, Szeged, 2005. március 30-31.

[36] Improving students' three-dimensional eyesight by CAD models
MicroCAD 2005, Miskolc, 2005. március 10-11.

[37] Egy európai kezdeményezés távoktatás és hagyományos oktatás támogatására
(Hídvéginé Miklós Katalinnal és Hídvégi Imrével közösen)
Építőmérnöki tudományos tanácskozás, Budapest, 2004. november 25.

[38] Ablak Európára: Content Management and Collaboration System for eLearning of Natural Sciences
ICI3: International Conference on Information, Agria Media 2004
Eger, 2004. október 18-19.

[39] Programozási tételek megvalósítása az Excelben
INF.O. '97 Informatika és számítástechnika az oktatásban konferencia
Békéscsaba 1997.

[40] One program - more than a million exercises
International Conference on Applied Informatics, Noszvaj 1997.

[41] Számítógép a fizikaszertárban
Agriamédia kiállítás és konferencia, Eger 1996.

[42] A PC-port programozása
INF.O. '96 Informatika és számítástechnika az oktatásban konferencia
Békéscsaba 1996.

[43] Méréskiértékelés EXCEL5-tel
Informatika a felsőoktatásban konferencia, Debrecen 1996.

[44] A NAT és a BASIC.
INF.O. '95 Informatika és számítástechnika az oktatásban konferencia
Békéscsaba 1995.

11.5. Lektori és szakértői tevékenység, fordítások:

[45] Cabri3D szoftver felhasználói kézikönyvének, interface felületének, példafájljainak és online súgójának; valamint a Cabri II Plus szoftver felhasználói kézikönyvének és példafájljainak magyarra fordítása, 2009.

[46] Fuchs – Siller – Vásárhelyi: Informatics with Casio CP 300+ Part II: Basics in Functional Modelling fordítása. Kiadó: Casio Europe GmbH, March-2008.

[47] Mészáros Gergely: Bevezetés az adatbázis-kezelésbe
BSc egyetemi jegyzet lektorálása, SZIE-YMMFK Kiadó 2006

[48] Csernoch László – Csernoch Lászlóné: Word 6.0 gyakorlatok
Bírálat a tankönyvvé nyilvánításhoz, 1998.

[49] Széchenyi István Közgazdasági és Külkereskedelmi Szakközépiskola
OKJ vizsgaelőkészítő tematikájának bírálata, 1997.

[50] Csatlós István: Windows
Lektorálás, APC-Stúdió Kiadó, 1994.

[51] Pap Zoltán: A számítógép felépítése és a DOS operációs rendszer
Lektorálás, 1994.

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Molnár Emil hozzájárulok, hogy Katona János a "Proceedings of the 7th International Conference on Applied Informatics, Eger, 2007, Vol. I "-ben megjelent "A visibility algorithm for the projection PS^d --> PS^2" című cikkünkben publikált eredményeinket felhasználja a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola keretében a PhD fokozat eléréséért benyújtott dolgozatában. Egyúttal kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel PhD fokozat megszerzésekor, s ezt a jövőben sem teszem. A szóban forgó közleményben a jelölt szerepe meghatározó fontosságú.

Budapest, 2012. október 1.

Katona János   Molnár Emil

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Prok István hozzájárulok, hogy Katona János a "Proceedings of 13 th International Conference on Geometry and Graphics"-ban 2008-ban megjelent "Visibility of the 4-dimensional regular solids, moving int he computer screen" című cikkünkben publikált eredményeinket felhasználja a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola keretében a PhD fokozat eléréséért benyújtott dolgozatában. Egyúttal kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel PhD fokozat megszerzésekor, s ezt a jövőben sem teszem. A szóban forgó közleményben a jelölt szerepe meghatározó fontosságú.

Budapest, 2012. október 1.

Katona János   Prok István

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Molnár Emil hozzájárulok, hogy Katona János a "Kragujevac Journal of Mathematics"-ben 2011-ben megjelent "Higher dimensional central projection into 2.plane with visibility and application" című cikkünkben publikált eredményeinket felhasználja a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola keretében a PhD fokozat eléréséért benyújtott dolgozatában. Egyúttal kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel PhD fokozat megszerzésekor, s ezt a jövőben sem teszem. A szóban forgó közleményben a jelölt szerepe meghatározó fontosságú.

Budapest, 2012. október 1.

Katona János   Molnár Emil

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Szirmai Jenő hozzájárulok, hogy Katona János a "Kragujevac Journal of Mathematics"-ben 2011-ben megjelent "Higher dimensional central projection into 2.plane with visibility and application" című cikkünkben publikált eredményeinket felhasználja a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola keretében a PhD fokozat eléréséért benyújtott dolgozatában. Egyúttal kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel PhD fokozat megszerzésekor, s ezt a jövőben sem teszem. A szóban forgó közleményben a jelölt szerepe meghatározó fontosságú.

Budapest, 2012. október 1.

Katona János   Szirmai Jenő

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Molnár Emil hozzájárulok, hogy Katona János az "Acta Mathematica Hungarica"-ban 2009-ben megjelent "Visibility of the higher-dimensional central projection into the projective sphere" című cikkünkben publikált eredményeinket felhasználja a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola keretében a PhD fokozat eléréséért benyújtott dolgozatában. Egyúttal kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel PhD fokozat megszerzésekor, s ezt a jövőben sem teszem. A szóban forgó közleményben a jelölt szerepe meghatározó fontosságú.

Budapest, 2012. október 1.

Katona János

Molnár Emil

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Molnár Emil hozzájárulok, hogy Katona János a "Proceedings of 13 th International Conference on Geometry and Graphics"-ban 2008-ban megjelent "Visibility of the 4-dimensional regular solids, moving int he computer screen" című cikkünkben publikált eredményeinket felhasználja a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola keretében a PhD fokozat eléréséért benyújtott dolgozatában. Egyúttal kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel PhD fokozat megszerzésekor, s ezt a jövőben sem teszem. A szóban forgó közleményben a jelölt szerepe meghatározó fontosságú.

Budapest, 2012. október 1.

Katona János

Molnár Emil

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Nagy Gyula hozzájárulok, hogy Katona János az "Annual News"-ban 2005-ben megjelent "Writing scripts to extend import of CAD softwares" című cikkünkben publikált eredményeinket felhasználja a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola keretében a PhD fokozat eléréséért benyújtott dolgozatában. Egyúttal kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel PhD fokozat megszerzésekor, s ezt a jövőben sem teszem. A szóban forgó közleményben a jelölt szerepe meghatározó fontosságú.

Budapest, 2012. október 1.

Katona János

Nagy Gyula

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Prok István hozzájárulok, hogy Katona János a "Kragujevac Journal of Mathematics"-ben 2011-ben megjelent "Higher dimensional central projection into 2.plane with visibility and application" című cikkünkben publikált eredményeinket felhasználja a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola keretében a PhD fokozat eléréséért benyújtott dolgozatában. Egyúttal kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel PhD fokozat megszerzésekor, s ezt a jövőben sem teszem. A szóban forgó közleményben a jelölt szerepe meghatározó fontosságú.

Budapest, 2012. október 1.

Katona János Prok István

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott Nagy Gyula hozzájárulok, hogy Katona János a "Studies of the University of Zilina Mathematical Series"-ben 2010-ben megjelent "Connectivity for rigidity" című cikkünkben publikált eredményeinket felhasználja a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítás-tudományok Doktori Iskola keretében a PhD fokozat eléréséért benyújtott dolgozatában. Egyúttal kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel PhD fokozat megszerzésekor, s ezt a jövőben sem teszem. A szóban forgó közleményben a jelölt szerepe meghatározó fontosságú.

Budapest, 2012. október 1.

Katona János Nagy Gyula

12. Függelék

A függelék nagy része nem nyomtatható állomány, például mozgókép vagy csak speciális szoftverrel megnyitható fájl. A függelék egy másik része A/4-es formátumú szerkesztés, amelynek olvashatósága a B/5-ös formátumra való kicsinyítés során jelentősen sérült. Ezek miatt a függeléket csak elektronikusan, a mellékelt DVD-lemezen teszem közzé.[*]

A függelék első részében válogatást találunk a szerző a saját munkáiból. Ezek zömmel elektronikus tanulási segédletek: oktatóvideók, szerkesztések menetének lépésenkénti leírásai, feladatlapok gondolkodtató térszemlélet-fejlesztő feladatsorokkal, dinamikus 3D modellekkel, stb.

A függelék 2. részében a szerző által végzett összehasonlító oktatási kísérlet reprodukálhatóságához szükséges dokumentumok találhatók: előadáson és gyakorlatokon példaként elvégzett szerkesztések; házi feladatok; a röpdolgozatok és a zárthelyi dolgozatok feladatai; az előadónak a gyakorlatvezetők számára írt instrukciói, stb. Itt kapott helyet a hallgatók által kitöltött térszemlélet-mérő teszt néhány megoldása, amelyek elemzése sokat elárulhat a hallgatók tudásáról, gondolkodásmódjáról.

[*] Technikai információk: A lemez minden DVD-meghajtóval és Windows operációs rendszerrel rendelkező számítógépen egy böngészőszoftverrel megtekinthető. A lemez a meghajtóba behelyezve automatikusan indul. Amennyiben az operációs rendszerben ez a funkció le van tiltva, akkor a lemez indítása az „Index.html” fájl megnyitásával történik.

12.1. Tudományos folyóiratok a számítógéppel támogatott oktatás témájában

Computers in the Schools
http://www.tandfonline.com/loi/wcis20
Digital Creativity
http://www.tandfonline.com/loi/ndcr20
Education and Information Technologies
http://www.springer.com/computer/general+issues/journal/10639
Educational Media International
http://www.tandfonline.com/loi/remi20
Interactive Learning Environments
http://www.tandfonline.com/loi/nile20
International Journal of Instructional Media
http://www.adprima.com/ijim.htm
Journal of Applied Learning Technology
http://www.salt.org/salt.asp?ss=l&pn=jalt
Journal of Computer-assisted Learning
http://onlinelibrary.wiley.com/journal/10.1111/%28ISSN%291365-2729
Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching
http://www.aace.org/pubs/jcmst/default.htm
Journal of Computing in Childhood Education
http://dl.acm.org/citation.cfm?id=J410
Journal of Educational Computing Research
http://jrnledcompresearch.com/index.php/jecr
Journal of Educational Multimedia and Hypermedia
http://www.aace.org/pubs/jemh/default.htm
Journal of Educational Technology & Society
http://www.ifets.info/
Journal of Information Technology for Teacher Education
http://www.aace.org/pubs/jtate/
Journal of Interactive Instruction Development
http://www.salt.org/salt.asp?ss=l&pn=jiid
Journal of Technology and Teacher Education
http://www.aace.org/pubs/jtate/default.htm