Hermite–Hadamard-type inequalities for generalized convex functions

doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Bessenyei Mihály

DEBRECENI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Debrecen, 2004

Introduction

Tchebychev systems play an important role, sometimes indirectly, in numerous fields of mathematics, for example, in the theory of approximation, numerical analysis and the theory of inequalities (see the books [**KS66**] and [**Kar68**] for details). The notion of convexity can also be extended applying Tchebychev systems:

DEFINITION. *Let $I \subset \mathbb{R}$ be an interval and $\omega_1, \dots, \omega_n : I \to \mathbb{R}$ be continuous functions. Denote the column vector whose components are $\omega_1, \dots, \omega_n$ in turn by $\boldsymbol{\omega}$, that is, $\boldsymbol{\omega} := (\omega_1, \dots, \omega_n)$. We say that $\boldsymbol{\omega}$ is a* Tchebychev system over the interval I *if, for all elements $x_1 < \cdots < x_n$ of I, the following inequality holds:*

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\omega}(x_1) & \cdots & \boldsymbol{\omega}(x_n) \end{vmatrix} > 0.$$

Let $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ be a Tchebychev system over the interval I. A function $f : I \to \mathbb{R}$ is said to be generalized convex with respect to $\boldsymbol{\omega}$ *if, for all elements $x_0 < \cdots < x_n$ of I, it satisfies the inequality*

$$(-1)^n \begin{vmatrix} f(x_0) & \cdots & f(x_n) \\ \boldsymbol{\omega}(x_0) & \cdots & \boldsymbol{\omega}(x_n) \end{vmatrix} \geq 0.$$

The most common and classical example of a Tchebychev system is the *polynomial* one: $\boldsymbol{\omega}(x) := (1, x, \dots, x^n)$. The convexity notion induced by the polynomial Tchebychev system was introduced and studied by T. Popoviciu. A summary of his results can be found in [**Pop44**] and also in [**Kuc85**]. The generalized convexity notion due to Popoviciu shall be called *polynomial convexity* or, if we want to emphasize the dimension of the underlying Tchebychev system, *polynomial n-convexity*. Observe that polynomially 2-convex functions are exactly the “standard” convex ones.

By a well known result of Hermite and Hadamard (see [**Had93**] and also [**ML85**] for interesting historical details), any convex function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfies the following inequality:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

The aim of the dissertation is to verify analogous (“Hermite–Hadamard-type”) inequalities for generalized convex functions, that is, to give lower and upper estimations for the integral average of the function using certain base points of the domain. Of course, the base points are supposed to depend only on the underlying Tchebychev system of the induced convexity. The results of the dissertation can be found in the papers [**BP02, BP03, BP04, BP05, BP**] and [**Bes04**].

1. Polynomial convexity

In the first chapter of the dissertation we present Hermite–Hadamard-type inequalities for *polynomially convex functions*. In order to determine the base points and the coefficients of the inequalities, we apply various methods of numerical analysis. First, with the help of orthogonal polynomial systems, we expand the classical Gauss' quadrature formula in those cases when at least one of the endpoints of the domain is involved. Then, for smooth functions, the main results are obtained using the remainder term of the Hermite-interpolation and two theorems of Popoviciu ([**Kuc85**, Theorem 1. p. 387; Theorem 1. p. 391]). To drop the regularity assumptions, the next auxiliary tools are needed.

THEOREM. *Let $I \subset \mathbb{R}$ be an open interval, $f : I \to \mathbb{R}$ be a polynomially n-convex continuous function. Then, for all compact subintervals $[a,b] \subset I$, there exists a sequence of polynomially n-convex and $\mathcal{C}^\infty$ functions (f_k) which converges uniformly to f on $[a,b]$.*

LEMMA. *Let ρ be a weight function on $[a,b]$ furthermore (a_j) be strictly monotone decreasing, (b_j) be strictly monotone increasing sequences such that $a_j \to a$, $b_j \to b$ and $a_1 < b_1$. Denote the roots of $P_{m;j}$ by $\xi_{1;j}, \dots, \xi_{m;j}$ where $P_{m;j}$ is the m^{th} degree member of the orthogonal polynomial system on $[a_j, b_j]$ with respect to $\rho|_{[a_j,b_j]}$, and denote the roots of P_m by $\xi_1, \dots, \xi_m$ where P_m is the m^{th} degree member of the ρ-orthogonal polynomial system on $[a,b]$. Then,*

$$\lim_{j\to\infty} \xi_{k;j} = \xi_k \qquad (k = 1, \dots, n).$$

LEMMA. *Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a polynomially n-convex function. Then,*
(i) $(-1)^n f(a) \ge \limsup_{t\to a+0} (-1)^n f(t)$;
(ii) $f(b) \ge \limsup_{t\to b-0} f(t)$.

The main results are presented in two theorems distinguishing the parity of the order of convexity. In the odd order case, the structure of the inequalities is quiet symmetric. Both sides involves some interior base points and exactly one of the endpoints of the domain. In the even order case, the symmetry disappears: the left hand side inequality involves none of the endpoints, while the right hand side one involves both of them.

THEOREM. *Let $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ be a positive integrable function. Denote the roots of P_m by $\xi_1, \dots, \xi_m$ where P_m is the m^{th} degree member of the orthogonal polynomial system on $[a,b]$ with respect to the weight function $(x-a)\rho(x)$, furthermore denote the roots of Q_m by $\eta_1, \dots, \eta_m$ where Q_m is the m^{th} degree member of the orthogonal polynomial system on $[a,b]$ with respect to the weight function $(b-x)\rho(x)$. Define the coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ and $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$ by* *the formulae*

$$\begin{aligned}\alpha_0 &:= \frac{1}{P_m^2(a)}\int_a^b P_m^2(x)\rho(x)dx,\\ \alpha_k &:= \frac{1}{\xi_k-a}\int_a^b \frac{(x-a)P_m(x)}{(x-\xi_k)P_m'(\xi_k)}\rho(x)dx\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\beta_k &:= \frac{1}{b-\eta_k}\int_a^b \frac{(b-x)Q_m(x)}{(x-\eta_k)Q_m'(\eta_k)}\rho(x)dx,\\ \beta_{m+1} &:= \frac{1}{Q_m^2(b)}\int_a^b Q_m^2(x)\rho(x)dx.\end{aligned}$$

If a function $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ is polynomially $(2m+1)$-convex, then it satisfies the following Hermite–Hadamard-type inequality

$$\alpha_0 f(a)+\sum_{k=1}^m \alpha_k f(\xi_k)\le \int_a^b f\rho \le \sum_{k=1}^m \beta_k f(\eta_k)+\beta_{m+1}f(b).$$

THEOREM. *Let $\rho:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a positive integrable function. Denote the roots of P_m by $\xi_1,\dots,\xi_m$ where P_m is the m^{th} degree member of the orthogonal polynomial system on $[a,b]$ with respect to the weight function $\rho(x)$, and denote the roots of Q_{m-1} by $\eta_1,\dots,\eta_{m-1}$ where Q_{m-1} is the $(m-1)^{st}$ degree member of the orthogonal polynomial system on $[a,b]$ with respect to the weight function $(b-x)(x-a)\rho(x)$. Define the coefficients $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ and $\beta_0,\dots,\beta_{m+1}$ by the formulae*

$$\alpha_k := \int_a^b \frac{P_m(x)}{(x-\xi_k)P_m'(\xi_k)}\rho(x)dx$$

and

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{1}{(b-a)Q_{m-1}^2(a)}\int_a^b (b-x)Q_{m-1}^2(x)\rho(x)dx,\\ \beta_k &= \frac{1}{(b-\eta_k)(\xi_k-a)}\int_a^b \frac{(b-x)(x-a)Q_{m-1}(x)}{(x-\eta_k)Q_{m-1}'(\eta_k)}\rho(x)dx,\\ \beta_{m+1} &= \frac{1}{(b-a)Q_{m-1}^2(b)}\int_a^b (x-a)Q_{m-1}^2(x)\rho(x)dx.\end{aligned}$$

If a function $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ is polynomially $(2m)$-convex, then it satisfies the following Hermite–Hadamard-type inequality

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k f(\xi_k)\le \int_a^b f\rho \le \beta_0 f(a)+\sum_{k=1}^{m-1}\beta_k f(\eta_k)+\beta_m f(b).$$

Specializing the weight function $\rho \equiv 1$, the roots of the inequalities can be obtained as convex combinations of the endpoints of the domain. The coefficients of the convex combinations are the roots of certain orthogonal polynomials on $[0,1]$ in both cases. Observe that interchanging the role of the endpoints in any side of the inequality concerning the odd order case, we obtain the other side of the inequality.

THEOREM. *Let, for $m \geq 0$, the polynomial P_m be defined by the formula*

$$P_m(x) := \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{m+1} \\ x & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^m & \frac{1}{m+2} & \cdots & \frac{1}{2m+1} \end{vmatrix}.$$

Then, P_m has m pairwise distinct roots $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ in $]0,1[$. Define the coefficients $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ by

$$\begin{aligned} \alpha_0 &:= \frac{1}{P_m^2(0)} \int_0^1 P_m^2(x)dx, \\ \alpha_k &:= \frac{1}{\lambda_k} \int_0^1 \frac{xP_m(x)}{(x-\lambda_k)P_m'(\lambda_k)}dx. \end{aligned}$$

If a function $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is polynomially $(2m+1)$-convex, then it satisfies the following Hermite–Hadamard-type inequality

$$\alpha_0 f(a) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f\big((1-\lambda_k)a + \lambda_k b\big) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f\big(\lambda_k a + (1-\lambda_k)b\big) + \alpha_0 f(b).$$

THEOREM. *Let, for $m \geq 1$, the polynomials P_m and Q_{m-1} be defined by the formulae*

$$\begin{aligned} P_m(x) &:= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{m} \\ x & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^m & \frac{1}{m+1} & \cdots & \frac{1}{2m} \end{vmatrix}, \\ Q_{m-1}(x) &:= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2\cdot 3} & \cdots & \frac{1}{m(m+1)} \\ x & \frac{1}{3\cdot 4} & \cdots & \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{m-1} & \frac{1}{(m+1)(m+2)} & \cdots & \frac{1}{(2m-1)2m} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Then, P_m has m pairwise distinct roots $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ in $]0,1[$ and Q_{m-1} has $m-1$ pairwise distinct roots $\mu_1, \dots, \mu_{m-1}$ in $]0,1[$, respectively. Define the coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ and $\beta_0, \dots, \beta_m$ by

$$\alpha_k := \int_0^1 \frac{P_m(x)}{(x-\lambda_k)P_m'(\lambda_k)}dx$$

and

$$\begin{aligned}
\beta_0 &:= \frac{1}{Q_{m-1}^2(0)} \int_0^1 (1-x)Q_{m-1}^2(x)dx, \\
\beta_k &:= \frac{1}{(1-\mu_k)\mu_k} \int_0^1 \frac{x(1-x)Q_{m-1}(x)}{(x-\mu_k)Q_{m-1}'(\mu_k)}dx, \\
\beta_m &:= \frac{1}{Q_{m-1}^2(1)} \int_0^1 xQ_{m-1}^2(x)dx.
\end{aligned}$$

If a function $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ is polynomially $(2m)$-convex, then it satisfies the following Hermite–Hadamard-type inequality

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k f\big((1-\lambda_k)a + \lambda_k b\big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\le \beta_0 f(a) + \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k f\big((1-\mu_k)a + \mu_k b\big) + \beta_m f(b).$$

2. Generalized 2-convexity

In the second chapter we study the case of *generalized* 2*-convexity* or, in other terms, (ω_1, ω_2)*-convexity*. First we investigate some basic properties of *generalized lines*, that is, the set of all linear combinations of the base functions ω_1 and ω_2. These investigations result that assuming positivity on the first component of a Tchebychev system, as it is required in many further results, is not an essential restriction. Moreover, we also get a sufficient condition for pairs of functions to form a Tchebychev system.

LEMMA. *Let (ω_1, ω_2) be a Tchebychev system on an interval $I \subset \mathbb{R}$. Then, there exists a Tchebychev system (ω_1^*, ω_2^*) on I that possesses the following properties:*

(i) ω_1^* is positive on I°;
(ii) ω_2^*/ω_1^* is strictly monotone increasing on I°;
(iii) (ω_1, ω_2)-convexity is equivalent to (ω_1^*, ω_2^*)-convexity.

Conversely, if $\omega_1, \omega_2 : I \to \mathbb{R}$ are continuous functions such that ω_1 is positive and ω_2/ω_1 is strictly monotone increasing, then (ω_1, ω_2) is a Tchebychev system over I.

The most important auxiliary tool of the chapter that plays also the key rule in verifying the main result, gives various characterizations of generalized 2-convexity and reads as follows.

THEOREM. *Let* (ω_1, ω_2) *be a Tchebychev system over an interval* I *such that* ω_1 *is positive on* I°. *The following statements are equivalent:*

(i) $f : I \to \mathbb{R}$ *is* (ω_1, ω_2)*-convex;*

(ii) for all elements $x < y < z$ *of* I *we have that*

$$\frac{\begin{vmatrix} f(y) & f(z) \\ \omega_1(y) & \omega_1(z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1(y) & \omega_1(z) \\ \omega_2(y) & \omega_2(z) \end{vmatrix}} \le \frac{\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ \omega_1(x) & \omega_1(y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(y) \\ \omega_2(x) & \omega_2(y) \end{vmatrix}};$$

(iii) for all $x_0 \in I^\circ$ *there exist* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *such that*

$$\begin{aligned} \alpha\omega_1(x_0) + \beta\omega_2(x_0) &= f(x_0), \\ \alpha\omega_1(x) + \beta\omega_2(x) &\le f(x) \qquad (x \in I); \end{aligned}$$

(iv) for all $n \in \mathbb{N}$, $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$ *and* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \ge 0$ *satisfying the conditions*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_1(x_k) &= \omega_1(x_0) \\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_2(x_k) &= \omega_2(x_0) \end{aligned}$$

we have that

$$f(x_0) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k);$$

(v) for all $x_0, x_1, x_2 \in I$ *and* $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0$ *satisfying the conditions*

$$\begin{aligned} \lambda_1\omega_1(x_1) + \lambda_2\omega_1(x_2) = \omega_1(x_0) \\ \lambda_1\omega_2(x_1) + \lambda_2\omega_2(x_2) = \omega_2(x_0) \end{aligned}$$

we have that

$$f(x_0) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2);$$

(vi) for all elements $x < p < y$ *of* I

$$f(p) \le \alpha\omega_1(p) + \beta\omega_2(p)$$

where the constants α, β *are the solutions of the system of linear equations*

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha\omega_1(x) + \beta\omega_2(x) \\ f(y) &= \alpha\omega_1(y) + \beta\omega_2(y). \end{aligned}$$

In the standard setting this theorem reduces to the well known characterization properties of convex functions and also gives another characterization of generalized 2-convexity via generalized supports. Another characterization states that generalized convexity is also equivalent to the (standard) convexity of a certain composite function:

THEOREM. *Let (ω_1, ω_2) be a Tchebychev system on an open interval I such that ω_1 is positive. The function $f : I \to \mathbb{R}$ is (ω_1, ω_2)-convex if and only if the function $g : \omega_2/\omega_1(I) \to \mathbb{R}$ defined by the formula*

$$g := \frac{f}{\omega_1} \circ \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{-1}$$

is convex in the standard sense.

This connection enables us to generalize many classical results, like the stability of standard convexity, for the case of (ω_1, ω_2)-convexity directly. Moreover, it also implies important regularity properties for generalized 2-convex functions.

THEOREM. *Let (ω_1, ω_2) be a Tchebychev system over the interval I. If a function $f : I \to \mathbb{R}$ is generalized convex with respect to (ω_1, ω_2), then it is continuous on I°. Moreover, f is bounded on each compact subinterval of I.*

The main result of the chapter states Hermite–Hadamard-type inequalities for the case of generalized 2-convexity. Its proof is based on the regularity and the characterization properties of generalized 2-convex functions. (Themselves the left and the right hand side inequalities can be verified applying the generalized support and chord properties.)

THEOREM. *Let (ω_1, ω_2) be a Tchebychev system on an interval $[a, b]$ such that ω_1 is positive on $]a, b[$, furthermore, let $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a positive integrable function. Define the point ξ and the coefficients c, c_1, c_2 by the formulae*

$$\xi = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{-1} \left(\frac{\int_a^b \omega_2\rho}{\int_a^b \omega_1\rho}\right), \qquad c = \frac{\int_a^b \omega_1\rho}{\omega_1(\xi)}$$

and

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \int_a^b \omega_1\rho & \omega_1(b) \\ \int_a^b \omega_2\rho & \omega_2(b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1(a) & \omega_1(b) \\ \omega_2(a) & \omega_2(b) \end{vmatrix}}, \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \omega_1(a) & \int_a^b \omega_1\rho \\ \omega_2(a) & \int_a^b \omega_2\rho \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1(a) & \omega_1(b) \\ \omega_2(a) & \omega_2(b) \end{vmatrix}}.$$

If $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is an (ω_1, ω_2)-convex function, then the following Hermite–Hadamard-type inequality holds

$$cf(\xi) \le \int_a^b f\rho \le c_1 f(a) + c_2 f(b).$$

3. Generalized convexity induced by Tchebychev systems

The aim of the third chapter is to formulate Hermite–Hadamard-type inequalities for generalized convex functions where the underlying Tchebychev system of the induced convexity is *arbitrary*. First we give descriptive geometrical characterizations of generalized convexity via *generalized polynomials*, that is, the linear combinations of the base functions $\omega_1, \dots, \omega_n$ of the underlying Tchebychev system $\boldsymbol{\omega}$.

THEOREM. *Let $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ be a Tchebychev system over an interval I. Then, for a function $f : I \to \mathbb{R}$, the following statements are equivalent:*

(i) f is generalized convex with respect to $\boldsymbol{\omega}$;

(ii) for all $y_1 < \dots < y_n$ in I, the generalized polynomial ω of $\omega_1, \dots, \omega_n$ determined uniquely by the interpolation conditions

$$f(y_k) = \omega(y_k) \qquad (k = 1, \dots, n)$$

satisfies the inequalities

$$(-1)^{n+k}(f(y) - \omega(y)) \ge 0 \qquad (y_k < y < y_{k+1},\ k = 0, \dots, n)$$

under the conventions $y_0 := \inf I$ and $y_{n+1} := \sup I$;

(iii) keeping the previous notations and settings, for fixed $k \in \{0, \dots, n\}$, the following inequality holds

$$(-1)^{n+k}(f(y) - \omega(y)) \ge 0 \quad (y_k \le y \le y_{k+1}).$$

The most important application of the previous theorem guarantees strong regularity properties for generalized convex functions. In particular, generalized convex functions are integrable on any compact subset of the domain.

THEOREM. *Let $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ be a Tchebychev system over an interval I. If $f : I \to \mathbb{R}$ is a generalized n-convex function with respect to this system and $n \ge 2$, then f is continuous on the interior of I. Furthermore, f is bounded on each compact subinterval of I.*

Unfortunately, under such general circumstances the base points of the Hermite–Hadamard-type inequalities cannot be expressed explicitly, we can state only their existence and uniqueness. The proofs of the main results are based on the Krein–Markov theory of moment spaces induced by Tchebychev systems. According to this theory, the vector integral of a Tchebychev system can uniquely be represented as the linear combination of the values of the system in certain base points of the domain (see [**KS66**, pp. 37-49.]). The number of the points and also the points themselves, depend only on the Tchebychev system and its dimension: it turns out that the cases of odd and even order convexity must be investigated separately. In fact, this is exactly the deeper reason for the analogous phenomenon in the case of polynomial convexity, too. Once the base points of the representations are determined, its coefficients are obtained as the solutions of a system of linear equations. With the help of the representations and the notion of generalized convexity, the Hermite–Hadamard-type inequalities can be verified using integration and pure linear algebraic methods.

THEOREM. *Let* $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{2m+1})$ *be a Tchebychev system on* $[a, b]$ *and* $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ *be a positive integrable function. There exist uniquely determined base points* $\xi_1, \dots, \xi_m$ *and* $\eta_1, \dots, \eta_m$ *of* $]a, b[$ *such that*

$$\alpha_0 \boldsymbol{\omega}(a) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \boldsymbol{\omega}(\xi_k) = \int_a^b \boldsymbol{\omega}\rho = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \boldsymbol{\omega}(\eta_k) + \beta_{m+1}\boldsymbol{\omega}(b).$$

The coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ *and* $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$ *are positive and uniquely determined, too. Furthermore, for any generalized* $\boldsymbol{\omega}$*-convex function* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, the following Hermite–Hadamard-type inequality holds*

$$\alpha_0 f(a) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f(\xi_k) \le \int_a^b f\rho \le \sum_{k=1}^{m} \beta_k f(\eta_k) + \beta_{m+1} f(b).$$

THEOREM. *Let* $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{2m})$ *be a Tchebychev system on* $[a, b]$ *and* $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ *be a positive integrable function. Then, there exist uniquely determined base points* $\xi_1, \dots, \xi_m$ *and* $\eta_1, \dots, \eta_{m-1}$ *of* $]a, b[$ *such that*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \boldsymbol{\omega}(\xi_k) = \int_a^b \boldsymbol{\omega}\rho = \beta_0 \boldsymbol{\omega}(a) + \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k \boldsymbol{\omega}(\eta_k) + \beta_m \boldsymbol{\omega}(b).$$

The coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *and* $\beta_0, \dots, \beta_m$ *are positive and uniquely determined, too. Furthermore, for any generalized* $\boldsymbol{\omega}$*-convex function* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, the following Hermite–Hadamard-type inequality holds*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k f(\xi_k) \le \int_a^b f\rho \le \beta_0 f(a) + \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k f(\eta_k) + \beta_m f(b).$$

Motivated by Rolle's mean value theorem, an alternative and elementary approach can also be followed when only one interior base point is involved. In these cases, Hermite–Hadamard-type inequalities can directly be verified without applying the Krein–Markov theory of moment spaces.

4. Characterizations via Hermit–Hadamard inequalities

The last chapter of the dissertation is devoted to proving that the Hermite–Hadamard-type inequalities obtained for generalized 2-convex functions *characterize* generalized 2-convexity. The most important tool of the investigations gives various characterizations of continuous, *non* generalized 2-convex functions.

THEOREM. *Let (ω_1, ω_2) be a Tchebychev system on an interval I, furthermore $f : I \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Then, the following assertions are equivalent:*

(i) f is not (ω_1, ω_2)-convex;

(ii) there exist elements $x < y$ of I such that $\omega < f$ on $]x, y[$ where ω is the generalized line determined by the properties

$$\omega(x) = f(x) \qquad \omega(y) = f(y);$$

(iii) there exist elements $x < p < y$ of I and a generalized line ω such that $\omega \geq f$ on $[x, y]$, moreover

$$f(x) < \omega(x) \quad f(p) = \omega(p) \quad f(y) < \omega(y);$$

(iv) there exists $p \in I^\circ$ such that f is locally strictly (ω_1, ω_2)-concave at p, *that is, there exist elements $x < p < y$ of I such that, for all $x < u < p < v < y$, the following inequality holds:*

$$\begin{vmatrix} f(u) & f(p) & f(v) \\ \omega_1(u) & \omega_1(p) & \omega_1(v) \\ \omega_2(u) & \omega_2(p) & \omega_2(v) \end{vmatrix} < 0.$$

The main results are presented in the subsequent three theorems. The first and the second one can be considered as the left and right hand side of the Hermite–Hadamard-type inequality for generalized 2-convex functions, while the third one corresponds to the classical Jensen inequality.

THEOREM. *Let (ω_1, ω_2) be a Tchebychev system on an interval $[a, b]$ such that ω_1 is positive on $]a, b[$, furthermore $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a positive integrable function. Define, for all elements $x < y$ of $[a, b]$, the functions $\xi(x, y)$ and $c(x, y)$ by the formulae*

$$\xi(x, y) := \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{-1} \left(\frac{\int_x^y \omega_2\rho}{\int_x^y \omega_1\rho}\right), \qquad c(x, y) = \frac{\int_x^y \omega_1\rho}{\omega_1(\xi(x, y))}.$$

Then, a continuous function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is generalized convex with respect to (ω_1, ω_2) if and only if, for all elements $x < y$ of $[a, b]$, it satisfies the inequality

$$c(x, y) f\big(\xi(x, y)\big) \leq \int_x^y f\rho.$$

THEOREM. *Let (ω_1, ω_2) be a Tchebychev system over an interval $[a, b]$ such that ω_1 is positive on $]a, b[$, furthermore $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a positive integrable function. Define, for all elements $x < y$ of $[a, b]$, the functions $c_1(x, y)$ and $c_2(x, y)$ by the formulae*

$$c_1(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} \int_x^y \omega_1\rho & \omega_1(y) \\ \int_x^y \omega_2\rho & \omega_2(y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(y) \\ \omega_2(x) & \omega_2(y) \end{vmatrix}}, \qquad c_2(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \int_x^y \omega_1\rho \\ \omega_2(x) & \int_x^y \omega_2\rho \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(y) \\ \omega_2(x) & \omega_2(y) \end{vmatrix}}.$$

Then, a continuous function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is generalized convex with respect to (ω_1, ω_2) if and only if, for all elements $x < y$ of $[a, b]$, it satisfies the inequality

$$\int_x^y f\rho \le c_1(x, y)f(x) + c_2(x, y)f(y).$$

THEOREM. *Let (ω_1, ω_2) be a Tchebychev system on I, and $f : I \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Keeping the notions of the previous two theorems, f is (ω_1, ω_2)-convex if and only if, for all elements $x < y$ of I, it satisfies the inequality*

$$c(x, y)f\big(\xi(x, y)\big) \le c_1(x, y)f(x) + c_2(x, y)f(y).$$

The question arises, quite evidently, *whether Hermite–Hadamard-type inequalities also characterize generalized convexity in the general case or not*. To give an affirmative answer (even in the polynomial case) remains an open problem and may be the subject of further researches.

Of course, the classical Hermite–Hadamard inequality immediately follows from any of the main results of the first three chapters. Without claiming completeness, at the end of these chapters several applications and examples are presented.

Az értekezés célkitűzései

A Csebisev rendszerek fontos szerepet játszanak a matematika számos területén, mint például az approximációelméletben, a numerikus analízisben vagy az egyenlőtlenségek elméletében (részletesebben lásd [**KS66**] és [**Kar68**]). A konvexitás fogalma szintén kiterjeszthető Csebisev rendszerek alkalmazásával az alábbi módon:

DEFINÍCIÓ. *Legyen* $I \subset \mathbb{R}$ *egy intervallum és* $\omega_1, \dots, \omega_n : I \to \mathbb{R}$ *folytonos függvények. Jelölje* $\boldsymbol{\omega}$ *azt az oszlopvektort, melynek komponensei rendre* $\omega_1, \dots, \omega_n$*, vagyis,* $\boldsymbol{\omega} := (\omega_1, \dots, \omega_n)$*. Azt mondjuk, hogy* $\boldsymbol{\omega}$ Csebisev rendszer az I intervallumon*, ha* I*-nek bármely* $x_1 < \dots < x_n$ *eleme esetén fönnáll a következő egyenlőtlenség:*

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\omega}(x_1) & \cdots & \boldsymbol{\omega}(x_n) \end{vmatrix} > 0.$$

Legyen $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ *Csebisev rendszer az* I *intervallumon. Azt mondjuk, hogy az* $f : I \to \mathbb{R}$ *függvény* $\boldsymbol{\omega}$-ra nézve általánosított konvex*, ha* I*-nek bármely* $x_0 < \dots < x_n$ *eleme esetén teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget:*

$$(-1)^n \begin{vmatrix} f(x_0) & \cdots & f(x_n) \\ \boldsymbol{\omega}(x_0) & \cdots & \boldsymbol{\omega}(x_n) \end{vmatrix} \geq 0.$$

A legegyszerűbb és legközismertebb példa Csebisev rendszerre a polinomiális rendszer: $\boldsymbol{\omega}(x) := (1, x, \dots, x^n)$. Az általa indukált konvexitási fogalmat T. Popoviciu vezette be és tanulmányozta. Kutatási eredményeinek összefoglalása megtalálható a [**Pop44**] illetve [**Kuc85**] könyvekben. A konvexitásnak ezt a Popoviciu-féle általánosítását *polinomiális konvexitásnak*, vagy, ha utalni kívánunk a konvexitás rendjére is, *polinomiális* n*-konvexitásnak* nevezzük. Vegyük észre, hogy a polinomiálisan 2-konvex függvények épp a (szokásos értelemben vett) konvex függvények.

Hermite és Hadamard egy jól ismert eredménye szerint (lásd [**Had93**] illetve érdekes történelmi adalékok miatt [**ML85**]) bármely $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex függvény teljesíti az alábbi egyenlőtlenséget:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Az értekezés célja hasonló ("Hermite–Hadamard típusú") egyenlőtlenségeket igazolni általánosított konvex függvényekre, vagyis alsó és felső becslést adni az általánosított konvex függvények integrálátlagára az értelemzési tartomány bizonyos alappontjainak segítségével. Ezek az alappontok természetesen csak a konvexitást indukáló Csebisev rendszertől függhetnek. Az értekezésben induktív megközelítést alkalmazunk. A fő eredményeket a [**BP02, BP03, BP04, BP05, BP**] és [**Bes04**] publikációk tartalmazzák.

1. Polinomiális konvexitás

Az értekezés első fejezetében Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenségeket igazolunk *polinomiálisan konvex függvényekre*. Az egyenlőtlenségek alappontjainak illetve együtthatóinak meghatározása céljából a numerikus analízis különféle módszereit alkalmazzuk. Elsőként ortogonális polinomrendszerek segítségével a klasszikus Gauss kvadratúra olyan általánosításait adjuk, amelyek az alapintervallumnak legalább az egyik végpontját is tartalmazzák. Ezek után, elegendően sima függvények esetén, a fő eredmények Hermite-interpoláció és Popoviciu két eredményének ([**Kuc85**, Theorem 1. 387. o.; Theorem 1. 391. o.]) fölhasználásával adódnak. Hogy a regularitási föltételeket elhagyjuk, az alábbi segéderedmények szükségesek.

TÉTEL. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ pedig polinomiálisan n-konvex folytonos függvény. Ekkor I-nek minden kompakt $[a, b]$ részintervalluma esetén létezik polinomiálisan n-konvex és $\mathcal{C}^\infty$ függvényeknek egy olyan (f_k) sorozata, amely egyenletesen konvergál f-hez az $[a, b]$ intervallumon.*

LEMMA. *Legyen ρ egy súlyfüggvény az $[a, b]$ intervallumon, továbbá (a_j) szigorúan monoton csökkenő, (b_j) szigorúan monoton növekvő sorozat úgy, hogy $a_j \to a$, $b_j \to b$ és $a_1 < b_1$. Jelölje $P_{m;j}$ gyökeit $\xi_{1;j}, \ldots, \xi_{m;j}$, ahol $P_{m;j}$ az $[a_j, b_j]$ intervallumon a $\rho|_{[a_j,b_j]}$ súlyfüggvényre nézve ortogonális polinomrendszer m-ed fokú tagja, és jelölje P_m gyökeit $\xi_1, \ldots, \xi_m$, ahol P_m az $[a, b]$ intervallumon a ρ súlyfüggvényre nézve ortogonális polinomrendszer m-ed fokú tagja. Ekkor*

$$\lim_{j\to\infty} \xi_{k;j} = \xi_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

LEMMA. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ polinomiálisan n-konvex függvény. Ekkor*

(i) $(-1)^n f(a) \geq \limsup_{t\to a+0}(-1)^n f(t)$;

(ii) $f(b) \geq \limsup_{t\to b-0} f(t)$.

A fő eredményeket két tételben igazoljuk a polinomiális konvexitás rendjének paritása szerint. A páratlan esetben a kapott egyenlőtlenségek struktúrája szimmetrikus. Mindkét oldal az értelmezési tartomány néhány belső alappontját és pontosan az egyik végpontját tartalmazza. A páros esetben ez a szimmetria eltűnik: az egyenlőtlenség bal oldala az értelmezési tartománynak csak belső pontjait, míg jobb oldala a belső pontok mellett mindkét végpont is tartalmazza.

TÉTEL. *Legyen $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitív integrálható függvény. Jelölje P_m gyökeit $\xi_1, \ldots, \xi_m$, ahol P_m az $[a, b]$ intervallumon az $(x - a)\rho(x)$ súlyfüggvényre nézve ortogonális polinomrendszer m-ed fokú tagja, továbbá jelölje Q_m gyökeit $\eta_1, \ldots, \eta_m$, ahol Q_m az $[a, b]$ intervallumon a $(b - x)\rho(x)$ súlyfüggvényre nézve ortogonális polinomrendszer m-ed fokú tagja. Definiáljuk az $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ illetve* *a $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$ együtthatókat az*

$$\begin{aligned}\alpha_0 &:= \frac{1}{P_m^2(a)} \int_a^b P_m^2(x)\rho(x)dx, \\ \alpha_k &:= \frac{1}{\xi_k - a} \int_a^b \frac{(x-a)P_m(x)}{(x-\xi_k)P_m'(\xi_k)}\rho(x)dx,\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}\beta_k &:= \frac{1}{b-\eta_k} \int_a^b \frac{(b-x)Q_m(x)}{(x-\eta_k)Q_m'(\eta_k)}\rho(x)dx, \\ \beta_{m+1} &:= \frac{1}{Q_m^2(b)} \int_a^b Q_m^2(x)\rho(x)dx.\end{aligned}$$

formulákkal. Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény polinomiálisan $(2m+1)$-konvex, akkor teljesíti az alábbi Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenséget:

$$\alpha_0 f(a) + \sum_{k=1}^m \alpha_k f(\xi_k) \le \int_a^b f\rho \le \sum_{k=1}^m \beta_k f(\eta_k) + \beta_{m+1} f(b).$$

TÉTEL. *Legyen $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitív integrálható függvény. Jelölje P_m gyökeit $\xi_1, \dots, \xi_m$, ahol P_m az $[a,b]$ intervallumon a $\rho(x)$ súlyfüggvényre nézve ortogonális polinomrendszer m-ed fokú tagja, továbbá jelölje Q_{m-1} gyökeit $\eta_1, \dots, \eta_{m-1}$, ahol Q_{m-1} az $[a,b]$ intervallumon a $(b-x)(x-a)\rho(x)$ súlyfüggvényre nézve ortogonális polinomrendszer $(m-1)$-ed fokú tagja. Definiáljuk az $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ illetve a $\beta_0, \dots, \beta_{m+1}$ együtthatókat az*

$$\alpha_k := \int_a^b \frac{P_m(x)}{(x-\xi_k)P_m'(\xi_k)}\rho(x)dx$$

illetve

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{1}{(b-a)Q_{m-1}^2(a)} \int_a^b (b-x)Q_{m-1}^2(x)\rho(x)dx, \\ \beta_k &= \frac{1}{(b-\eta_k)(\xi_k - a)} \int_a^b \frac{(b-x)(x-a)Q_{m-1}(x)}{(x-\eta_k)Q_{m-1}'(\eta_k)}\rho(x)dx, \\ \beta_{m+1} &= \frac{1}{(b-a)Q_{m-1}^2(b)} \int_a^b (x-a)Q_{m-1}^2(x)\rho(x)dx.\end{aligned}$$

formulákkal. Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény polinomiálisan $(2m)$-konvex, akkor teljesíti az alábbi Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenséget:

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k f(\xi_k) \le \int_a^b f\rho \le \beta_0 f(a) + \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k f(\eta_k) + \beta_m f(b).$$

Speciálisan, a $\rho \equiv 1$ választás mellett az egyenlőtlenségek alappontjai az értelmezési tartomány végpontjainak konvex kombinációjaként állnak elő. A konvex kombinációs együtthatók bizonyos ortogonális polinomok gyökei. Figyeljük meg, hogy a páratlan rendű esetre vonatkozó egyenlőtlenség egyik oldalán fölcserélve a végpontok szerepét, épp az egyenlőtlenség másik oldalát kapjuk.

TÉTEL. *Definiáljuk $m \geq 0$ esetén a P_m polinomot a következő formulával:*

$$P_m(x) := \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{m+1} \\ x & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^m & \frac{1}{m+2} & \cdots & \frac{1}{2m+1} \end{vmatrix}.$$

Ekkor P_m-nek m páronként különböző gyöke van a $]0,1[$ intervallumban. Jelölje ezeket a gyököket $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, és definiáljuk az $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ együtthatókat az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &:= \frac{1}{P_m^2(0)} \int_0^1 P_m^2(x)dx, \\ \alpha_k &:= \frac{1}{\lambda_k} \int_0^1 \frac{xP_m(x)}{(x-\lambda_k)P_m'(\lambda_k)}dx. \end{aligned}$$

Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény polinomiálisan $(2m+1)$-konvex, akkor teljesíti a következő Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \alpha_0 f(a) + \sum_{k=1}^m \alpha_k f\big((1-\lambda_k)a + \lambda_k b\big) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \\ &\leq \sum_{k=1}^m \alpha_k f\big(\lambda_k a + (1-\lambda_k)b\big) + \alpha_0 f(b). \end{aligned}$$

TÉTEL. *Definiáljuk $m \geq 1$ esetén a P_m és Q_{m-1} polinomokat a következő formulákkal:*

$$\begin{aligned} P_m(x) &:= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{m} \\ x & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^m & \frac{1}{m+1} & \cdots & \frac{1}{2m} \end{vmatrix}, \\ Q_{m-1}(x) &:= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2\cdot 3} & \cdots & \frac{1}{m(m+1)} \\ x & \frac{1}{3\cdot 4} & \cdots & \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{m-1} & \frac{1}{(m+1)(m+2)} & \cdots & \frac{1}{(2m-1)2m} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ekkor P_m-nek m, Q_{m-1}-nek $m-1$ páronként különböző gyöke van a $]0,1[$ intervallumban. Jelölje a gyököket rendre $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ illetve $\mu_1,\dots,\mu_{m-1}$, és definiáljuk az $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ és $\beta_0,\dots,\beta_m$ együtthatókat az alábbi módon:

$$\alpha_k := \int_0^1 \frac{P_m(x)}{(x-\lambda_k)P_m'(\lambda_k)}dx;$$

$$\begin{aligned}
\beta_0 &:= \frac{1}{Q_{m-1}^2(0)}\int_0^1 (1-x)Q_{m-1}^2(x)dx,\\
\beta_k &:= \frac{1}{(1-\mu_k)\mu_k}\int_0^1 \frac{x(1-x)Q_{m-1}(x)}{(x-\mu_k)Q_{m-1}'(\mu_k)}dx,\\
\beta_m &:= \frac{1}{Q_{m-1}^2(1)}\int_0^1 xQ_{m-1}^2(x)dx.
\end{aligned}$$

Ha az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény polinomiálisan $(2m)$-konvex, akkor teljesíti a következő Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenséget:

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k f\big((1-\lambda_k)a+\lambda_k b\big) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\le \beta_0 f(a) + \sum_{k=1}^{m-1}\beta_k f\big((1-\mu_k)a+\mu_k b\big) + \beta_m f(b).$$

2. Általánosított 2-konvexitás

A második fejezetben az *általánosított 2-konvexitás*, más néven (ω_1,ω_2)-*konvexitás* esetével foglalkozunk. Elsőként az *általánosított egyenesek*, vagyis az ω_1 és ω_2 alapfüggvények lineáris kombinációinak néhány alapvető tulajdonságát vizsgáljuk meg. A vizsgálatok eredményeként kiderül, hogy nem lényeges megszorítás pozitivitási feltételt szabni Csebisev rendszerek első komponensére. Továbbá, elegendő feltételt is nyerünk arra nézve, hogy egy függvénypár Csebisev rendszert alkosson.

LEMMA. *Legyen (ω_1,ω_2) Csebisev rendszer az $I\subset\mathbb{R}$ intervallumon. Ekkor létezik olyan (ω_1^*,ω_2^*) Csebisev rendszer I-n, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

(i) ω_1^* pozitív I belsején;
(ii) ω_2^*/ω_1^* szigorúan monoton növekvő I belsején;
(iii) az (ω_1,ω_2)-konvexitás ekvivalens az (ω_1^*,ω_2^*)-konvexitással.

Megfordítva, ha $\omega_1,\omega_2 : I\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvenyek, hogy ω_1 pozitív és ω_2/ω_1 szigorúan monoton növekvő, akkor (ω_1,ω_2) Csebisev rendszer az I intervallumon.

A fejezet legfontosabb segéderedménye, amely a fő eredmények igazolásában is kulcsszerepet játszik, az általánosított konvexitás különféle jellemzéseit adja.

TÉTEL. *Legyen* (ω_1, ω_2) *Csebisev rendszer a nemüres* I *intervallumon úgy, hogy* ω_1 *pozitív. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $f : I \to \mathbb{R}$ (ω_1, ω_2)*-konvex;*

(ii) I*-nek bármely* $x < y < z$ *eleme esetén*

$$\frac{\begin{vmatrix} f(y) & f(z) \\ \omega_1(y) & \omega_1(z) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1(y) & \omega_1(z) \\ \omega_2(y) & \omega_2(z) \end{vmatrix}} \leq \frac{\begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ \omega_1(x) & \omega_1(y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(y) \\ \omega_2(x) & \omega_2(y) \end{vmatrix}};$$

(iii) bármely $x_0 \in I^\circ$ *esetén létezik* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy*

$$\begin{aligned} \alpha\omega_1(x_0) + \beta\omega_2(x_0) &= f(x_0), \\ \alpha\omega_1(x) + \beta\omega_2(x) &\leq f(x) \qquad (x \in I); \end{aligned}$$

(iv) bármely $n \in \mathbb{N}$*,* $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$ *és* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ *esetén, amelyek eleget tesznek a*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_1(x_k) &= \omega_1(x_0) \\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \omega_2(x_k) &= \omega_2(x_0) \end{aligned}$$

egyenleteknek, teljesül, hogy

$$f(x_0) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k);$$

(v) bármely $x_0, x_1, x_2 \in I$ *és* $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ *esetén, amelyek eleget tesznek a*

$$\begin{aligned} \lambda_1\omega_1(x_1) + \lambda_2\omega_1(x_2) = \omega_1(x_0) \\ \lambda_1\omega_2(x_1) + \lambda_2\omega_2(x_2) = \omega_2(x_0) \end{aligned}$$

egyenleteknek, teljesül, hogy

$$f(x_0) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2);$$

(vi) I*-nek minden* $x < p < y$ *elemére fönnáll, hogy*

$$f(p) \leq \alpha\omega_1(p) + \beta\omega_2(p),$$

ahol az α, β együtthatók az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldásai:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha\omega_1(x) + \beta\omega_2(x) \\ f(y) &= \alpha\omega_1(y) + \beta\omega_2(y). \end{aligned}$$

A standard esetben ez a tétel a konvex függvények jól ismert jellemzési tulajdonságaira vezet, és az általánosított 2-konvex függvények egy újabb karakterizációját is lehetővé teszi általánosított tartók segítségével. Egy másik jellemzési tétel szerint az általánosított 2-konvexitás egyenértékű egy bizonyos összetett függvény (szokásos) értelemben vett konvexitásával:

TÉTEL. *Legyen (ω_1, ω_2) Csebisev rendszer a nyílt I intevallumon úgy, hogy ω_1 pozitív. Az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor (ω_1, ω_2)-konvex, ha a $g : \omega_2/\omega_1(I) \to \mathbb{R}$,*

$$g := \frac{f}{\omega_1} \circ \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{-1}$$

módon definiált függvény konvex (a szokásos értelemben).

Ez a kapcsolat lehetővé teszi, hogy sok klasszikus eredményt, mint például a konvexitás stabilitását, közvetlen módon általánosíthassuk az (ω_1, ω_2)-konvex esetre. Sőt, fontos regularitási tulajdonságokat is eredményez általánosított 2-konvex függvényekre.

TÉTEL. *Legyen (ω_1, ω_2) Csebisev rendszer az I intervallumon. Ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény általánosított konvex (ω_1, ω_2)-re nézve, akkor folytonos I belsején. Továbbá, f korlátos I bármely kompakt részintervallumán.*

A fejezet fő eredménye Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenséget állít az általánosított 2-konvexitás esetére. A bizonyítás az általánosított 2-konvex függvények regularitási és jellemzési tételén alapszik. (A bal illetve jobb oldali egyenlőtlenségek az általánosított tartó illetve húr tulajdonságok segítségével igazolhatók.)

TÉTEL. *Legyen (ω_1, ω_2) Csebisev rendszer az $[a, b]$ intervallumon úgy, hogy ω_1 pozitív $]a, b[$-n, és legyen $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitív integrálható függvény. Definiáljuk a ξ alappontot és a c, c_1, c_2 együtthatókat a következő formulákkal:*

$$\xi = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{-1}\left(\frac{\int_a^b \omega_2\rho}{\int_a^b \omega_1\rho}\right), \qquad c = \frac{\int_a^b \omega_1\rho}{\omega_1(\xi)}$$

továbbá

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \int_a^b \omega_1\rho & \omega_1(b) \\ \int_a^b \omega_2\rho & \omega_2(b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1(a) & \omega_1(b) \\ \omega_2(a) & \omega_2(b) \end{vmatrix}}, \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \omega_1(a) & \int_a^b \omega_1\rho \\ \omega_2(a) & \int_a^b \omega_2\rho \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1(a) & \omega_1(b) \\ \omega_2(a) & \omega_2(b) \end{vmatrix}}.$$

Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény (ω_1, ω_2)-konvex, akkor teljesül rá az alábbi Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenség:

$$cf(\xi) \le \int_a^b f\rho \le c_1 f(a) + c_2 f(b).$$

3. Csebisev rendszerek által indukált konvexitás

A harmadik fejezet célja Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenségek igazolása *teszőleges* Csebisev rendszer által indukált általánosított konvexitás esetére. Elsőként szemléletes geometriai jellemzést aduk az általánosított konvexitásra *általánosított polinomokkal*, vagyis a Csebisev rendszer $\omega_1, \dots, \omega_n$ alapfüggvényeinek lineáris kombinációival.

TÉTEL. *Legyen $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ Csebisev rendszer az I intervallumon, továbbá legyen $f : I \to \mathbb{R}$ adott függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) f általánosított $\boldsymbol{\omega}$-konvex;

(ii) I-nek bármely $y_1 < \dots < y_n$ eleme esetén

$$(-1)^{n+k}(f(y) - \omega(y)) \ge 0 \qquad (y_k < y < y_{k+1},\ k = 0, \dots, n),$$

ahol $y_0 := \inf I$, $y_{n+1} := \sup I$ és ω az az egyértelműen meghatározott általánosított polinom, amelyre

$$f(y_k) = \omega(y_k) \qquad (k = 1, \dots, n);$$

(iii) megtartva (ii) jelöléseit, bármely rögzített $k \in \{0, \dots, n\}$ esetén fönnáll a következő egyenlőtlenség:

$$(-1)^{n+k}(f(y) - \omega(y)) \ge 0 \quad (y_k \le y \le y_{k+1}).$$

Az előbbi tétel alkalmazásával fontos regularitási tulajdonságok igazolhatók általánosított konvex függvényekre, amelyeket az alábbiakban foglalunk össze. Ezen tulajdonságok egyszerű következménye, hogy a kompakt intervallumon értelmezett általánosított konvex függvények integrálhatóak.

TÉTEL. *Legyen $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ Csebisev rendszer az I intervallumon. Ha $f : I \to \mathbb{R}$ általánosított $\boldsymbol{\omega}$-konvex függvény és $n \ge 2$, akkor f folytontos I belsején. Továbbá, f korlátos I minden kompakt részintervallumán.*

Sajnos, ebben az általánosságban az egyenlőtlenségek alappontjai nem adhatók meg explicit alakban, csupán létezésüket és egyértelműségüket állíthatjuk. A fő eredmények bizonyítása a Csebisev rendszerek által indukált momentumterek Krein–Markov-féle elméletén alapszik. Ezen elmélet szerint, egy Csebisev rendszer alapfüggvényeiből álló vektor integrálja egyértelműen reprezentálható e vektor bizonyos pontokban fölvett értékeinek lineáris kombinációjaként (lásd [**KS66**, 37-49. o.]). A pontok száma, sőt maguk a pontok is pusztán a Csebisev rendszertől, illetve annak dimenziójától függnek: kiderül, hogy a páros és páratlan rendű konvexitást külön kell kezelni. Valójában pontosan ez a mélyebb oka a polinomiális esetben föllépő hasonló jelenségnek is. Ha már a reprezentáció alappontjai megvannak, az együtthatók lineáris egyenletrendszerek megoldásával adódnak. A reprezentációk és az általánosított konvexitás fogalmának fölhasználásával az Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenségek integrálással és egyszerű lineáris algebrai módszerekkel igazolhatók.

TÉTEL. *Legyen $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{2m+1})$ Csebisev rendszer az $[a,b]$ intervallumon, továbbá legyen $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitív integrálható függvény. Egyértelműen léteznek az $]a,b[$ nyílt intervallumban $\xi_1, \dots, \xi_m$ és $\eta_1, \dots, \eta_m$ alappontok úgy, hogy*

$$\alpha_0 \boldsymbol{\omega}(a) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \boldsymbol{\omega}(\xi_k) = \int_a^b \boldsymbol{\omega}\rho = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \boldsymbol{\omega}(\eta_k) + \beta_{m+1}\boldsymbol{\omega}(b).$$

Az $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ és $\beta_1, \dots, \beta_{m+1}$ együtthatók pozitívak és szintén egyértelműen meghatározottak. Továbbá, bármely $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ általánosított $\boldsymbol{\omega}$-konvex függvény esetén fönnáll az alábbi Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenség:

$$\alpha_0 f(a) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k f(\xi_k) \le \int_a^b f\rho \le \sum_{k=1}^{m} \beta_k f(\eta_k) + \beta_{m+1} f(b).$$

TÉTEL. *Legyen $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{2m})$ Csebisev rendszer az $[a,b]$ intervallumon, továbbá legyen $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ pozitív integrálható függvény. Egyértelműen léteznek az $]a,b[$ nyílt intervallumban $\xi_1, \dots, \xi_m$ és $\eta_1, \dots, \eta_{m-1}$ alappontok úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \boldsymbol{\omega}(\xi_k) = \int_a^b \boldsymbol{\omega}\rho = \beta_0 \boldsymbol{\omega}(a) + \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k \boldsymbol{\omega}(\eta_k) + \beta_m \boldsymbol{\omega}(b).$$

Az $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ és $\beta_0, \dots, \beta_m$ együtthatók pozitívak és szintén egyértelműen meghatározottak. Továbbá, bármely $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ általánosított $\boldsymbol{\omega}$-konvex függvény esetén fönnáll az alábbi Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenség:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k f(\xi_k) \le \int_a^b f\rho \le \beta_0 f(a) + \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k f(\eta_k) + \beta_m f(b).$$

Ha a konvexitást indukáló Csebisev rendszer dimenziója elég kicsi, akkor a Rolle-féle középértéktétel alapgondolatát fölhasználva a fő eredmények elemi úton is igazolhatók, a Krein–Markov-féle elmélet alkalmazása nélkül.

4. Hermit–Hadamard egyenlőtlenség mint a konvexitás jellemzése

Az értekezés utolsó fejezetében megmutatjuk, hogy az általánosított 2-konvex függvényekre vonatkozó Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenség egyben *jellemzése* is az általánosított 2-konvexitásnak. A vizsgálatok során a legfontosabb segédeszköz a folytonos, általánosított *nem* 2-konvex függvények jellemzése általánosított egyenesek segítségével.

TÉTEL. *Legyen* (ω_1, ω_2) *Csebisev rendszer az* I *intervallumon, továbbá legyen* $f : I \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) f *nem* (ω_1, ω_2)*-konvex;*

(ii) léteznek $x < y$ *elemei* I*-nek úgy, hogy* $\omega < f$ *az* $]x, y[$ *nyílt intervallumon, ahol* ω *az az egyértelműen meghatározott általánosított egyenes, amelyre*

$$\omega(x) = f(x) \qquad \omega(y) = f(y);$$

(iii) léteznek $x < p < y$ *elemei* I*-nek és létezik* ω *általánosított egyenes úgy, hogy* $\omega \geq f$ *az* $[x, y]$ *intervallumon, továbbá*

$$f(x) < \omega(x) \quad f(p) = \omega(p) \quad f(y) < \omega(y);$$

(iv) létezik $p \in I^\circ$ *úgy, hogy* f lokálisan szigorúan (ω_1, ω_2)-konkáv p-ben*, azaz, léteznek* I*-nek* $x < p < y$ *elemei úgy, hogy bármely* $x < u < p < v < y$ *esetén fönnáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\begin{vmatrix} f(u) & f(p) & f(v) \\ \omega_1(u) & \omega_1(p) & \omega_1(v) \\ \omega_2(u) & \omega_2(p) & \omega_2(v) \end{vmatrix} < 0.$$

A fejezet fő eredményeit az alábbi három tétel foglalja össze. Az első és a második az általánosított 2-konvexitás esetére vonatkozó Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenség bal illetve jobb oldalának a megfelelője, míg a harmadik a klasszikus Jensen-egyenlőtlenség általánosítása.

TÉTEL. *Legyen* (ω_1, ω_2) *Csebisev rendszer az* $[a, b]$ *intervallumon úgy, hogy* ω_1 *pozitív* $]a, b[$*-n, és legyen* $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ *pozitív integrálható függvény. Definiáljuk az* $[a, b]$ *bármely* $x < y$ *elempárja esetén a* $\xi(x, y)$ *és* $c(x, y)$ *függvényeket a következő formulákkal:*

$$\xi(x, y) := \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^{-1} \left(\frac{\int_x^y \omega_2\rho}{\int_x^y \omega_1\rho}\right), \qquad c(x, y) = \frac{\int_x^y \omega_1\rho}{\omega_1(\xi(x, y))}.$$

Ekkor az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény pontosan akkor általánosított konvex* (ω_1, ω_2)*-re nézve, ha* I*-nek bármely* $x < y$ *eleme esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:*

$$c(x, y) f\big(\xi(x, y)\big) \leq \int_x^y f\rho.$$

TÉTEL. *Legyen* (ω_1, ω_2) *Csebisev rendszer az* $[a, b]$ *intervallumon úgy, hogy* ω_1 *pozitív* $]a, b[$*-n, továbbá legyen* $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ *pozitív integrálható függvény. Definiáljuk az* $[a, b]$ *bármely* $x < y$ *elempárja esetén a* $c_1(x, y)$ *és* $c_2(x, y)$ *függvényeket a következő formulákkal:*

$$c_1(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} \int_x^y \omega_1\rho & \omega_1(y) \\ \int_x^y \omega_2\rho & \omega_2(y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(y) \\ \omega_2(x) & \omega_2(y) \end{vmatrix}}, \qquad c_2(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \int_x^y \omega_1\rho \\ \omega_2(x) & \int_x^y \omega_2\rho \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1(y) \\ \omega_2(x) & \omega_2(y) \end{vmatrix}}.$$

Ekkor az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény pontosan akkor általánosított konvex* (ω_1, ω_2)*-re nézve, ha* I*-nek bármely* $x < y$ *eleme esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:*

$$\int_x^y f\rho \le c_1(x,y)f(x) + c_2(x,y)f(y).$$

TÉTEL. *Legyen* (ω_1, ω_2) *Csebisev rendszer az* I *intevallumon, továbbá legyen* $f : I \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény. Megtartva az előző két tétel jelöléseit,* f *pontosan akkor* (ω_1, ω_2)*-konvex ha* I*-nek bármely* $x < y$ *eleme esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:*

$$c(x,y)f\big(\xi(x,y)\big) \le c_1(x,y)f(x) + c_2(x,y)f(y).$$

Természetes módon adódik a kérdés, hogy vajon *az Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenségek jellemzik-e az általánosított konvexitást avagy sem.* E kérdés megválaszolása, még a polinomiális konvexitás esetében is, nyílt probléma, és további kutatások tárgyát képezheti.

A klasszikus Hermite–Hadamard egyenlőtlenség az első három fejezet bármelyikének fő eredményéből egyszerűen következik. E fejezetek végén, a teljesség igénye nélkül, számos további alkalmazás és példa is található.

List of talks

[1] *Hadamard-type inequalities*, The 1^{st} Katowice–Debrecen Winter Seminar, Cieszyn (Poland), 2001.

[2] *Hadamard-típusú egyenlőtlenségek* (in hungarian), $8.$ Analízis Tanszéki Szeminárium, Noszvaj (Magyarország), 2001.

[3] *On further Hadamard-type inequalities*, The 2^{nd} Debrecen–Katowice Winter Seminar, Hajdúszoboszló (Hungary), 2002.

[4] *Hadamard-type inequalities for generalized convex functions*, The 40^{th} International Symposium on Functional Equations, Gronów (Poland), 2002.

[5] *Higher-order generalizations of Hadamard's inequality*, The 8^{th} General Inequalities, Noszvaj (Hungary), 2002.

[6] *Generalized Hadamard inequalities*, The 3^{rd} Katowice–Debrecen Winter Seminar, Będlewo (Poland), 2003.

[7] *Generalized higher-order monotonicity and Hadamard-type inequalities*, The 41^{st} International Symposium on Functional Equations, Noszvaj (Hungary), 2003.

[8] *On generalized Hermite–Hadamard inequality*, The 9^{th} International Conference on Functional Equations and Inequalities, Muszyna-Złockie (Poland), 2003.

[9] *Hermite–Hadamard inequalities for generalized* 3*-convex functions*, The 4^{th} Debrecen–Katowice Winter Seminar, Mátraháza (Hungary), 2004.

[10] *Hermite–Hadamard inequalities for generalized convex functions*, University of Bielsko-Biała, Department of Mathematics (Poland), 2004.

[11] *Hermite–Hadamard típusú egyenlőtlenségek általánosított konvex függvényekre* (in hungarian), Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 2004.

[12] *Hermite–Hadamard inequalities for generalized convex functions*, The 42^{nd} International Symposium on Functional Equations, Opava (Czech Republic), 2004.

[13] *Hermite–Hadamard-type inequalities for generalized convex functions*, Conference on the m-Function and Related Topics, Cardiff (United Kingdom), 2004.

[14] *Characterization of convexity via Hadamard's inequality*, The 5^{th} Katowice–Debrecen Winter Seminar, Bedlewo (Poland), 2005.

Bibliography

[Bes04] M. Bessenyei, *Hermite–Hadamard-type inequalities for generalized* 3*-convex functions*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), no. 1-2, 223–232.

[BP02] M. Bessenyei and Zs. Páles, *Higher-order generalizations of Hadamard's inequality*, Publ.Math. Debrecen **61** (2002), no. 3-4, 623–643.

[BP03] M. Bessenyei and Zs. Páles, *Hadamard-type inequalities for generalized convex functions*, Math. Inequal. Appl. **6** (2003), no. 3, 379–392.

[BP04] M. Bessenyei and Zs. Páles, *On generalized higher-order convexity and Hermite–Hadamard-type inequalities*, Acta Sci. Math. (Szeged) **70** (2004), 13–24.

[BP05] M. Bessenyei and Zs. Páles, *Hermite–Hadamard inequalities for generalized convex functions*, Aequationes Math., (2005), to appear.

[BP] M. Bessenyei and Zs. Páles, *Characterization of convexity via Hadamard's inequality*, manuscript.

[Had93] J. Hadamard, *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann*, J. Math. Pures Appl. **58** (1893), 171–215.

[Kar68] S. Karlin, *Total positivity. Vol. I*, Stanford University Press, Stanford, California, 1968.

[KS66] S. Karlin and W. J. Studden, *Tchebycheff systems: With applications in analysis and statistics*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XV, Interscience Publishers John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1966.

[Kuc85] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, vol. 489, Państwowe Wydawnictwo Naukowe — Uniwersytet Śląski, Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

[ML85] D. S. Mitrinović and I. B. Lacković, *Hermite and convexity*, Aequationes Math. **28** (1985), 229–232.

[Pop44] T. Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Hermann et Cie, Paris, 1944.