Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

Finiteness results for some families of polynomial Diophantine equations

by Orsolya Szilágyi-Herendi
Supervisor: Dr. Lajos Hajdu

UNIVERSITY OF DEBRECEN
Doctoral Council of Natural Sciences and Engineering
Doctoral School of Mathematical and Computional Sciences
Debrecen, 2025.

Chapter 1

Introduction

Main theme of this dissertation is the study of various polynomial Diophantine equations, where the polynomials considered belong to some specific family with some interesting and/or important feature. Polynomial Diophantine equations form a classical field of Diophantine number theory, however, at the same time, being in the focus of recent interest, as well. As classical examples of such equations one can mention, for example Thue-equations and elliptic, hyperelliptic and superelliptic equations. For a history and a summary of some of the most important results related to these equations, one can read e.g. the corresponding chapters of the book of Shorey and Tijdeman [57].

In what follows, we only concentrate on topics in the field of polynomial Diophantine equations which appear in our present studies. At this point we only shortly discuss these topics, and briefly summarize our results and their background. A precise and detailed description of the studied problems and our new results, together with a survey of the related literature, will be provided in the corresponding chapters.

The first topic we study is the following: what can we say about the number of integral points in some 'interesting' sets (e.g., in certain regular solids)? In particular, we focus on the following solids: n-dimensional cube, pyramid and simplex. Counting the integral points in these objects, one finds (see [17]) that the following polynomials arise, respectively:

$$(x+1)^n, \quad S_{n-1}(x) := 1^{n-1} + \cdots + (x+1)^{n-1}, \quad \binom{x+n}{n}. \tag{1.1}$$

Here n is the dimension, and x describes the size of the solid. Equations of type

$$f(x) = g(y) \tag{1.2}$$

where $f(x)$ belongs to one of the families in (1.1) and $g(y)$ is a polynomial with integer coefficients, have been heavily studied in the literature, by several authors. A thorough overview of the corresponding literature will be given in the third chapter of the dissertation, here we only make some notes related to the most general cases (i.e., when there is no further restriction imposed on $g(y)$). For $f(x) = (x+1)^n$ equation (1.2) is just the hyperelliptic equation (see e.g. the corresponding chapter of Shorey and Tijdeman [57] or the theorem of Brindza [14], also given in the next chapter); for $f(x) = S_{n-1}(x)$ equation (1.2) has been considered by Rakaczki [49]; when $f(x) = \binom{x+n}{n}$ then (1.2) has been studied by Kulkarni and Sury [42]. In every case it turns out that (apart from certain well-described cases), (1.2) has only finitely many solutions. (More and more precise discussion will follow in the third chapter.) Here we consider the problem of counting integral points not *in the interior*, rather *on the surface* of these solids. As it will turn out, the number of such integral points (in the above settings) are described by the polynomials

$$(x+1)^n - (x-1)^n, \quad (x+1)^{n-1} + x^{n-1}, \quad \binom{x+n}{n} - \binom{x-1}{n},$$

respectively. We study equation (1.2) for polynomials coming from the above families. We prove that (apart from certain special, completely described cases) (1.2) allows only finitely many integer solutions x, y, moreover, if $g(y)$ is of the shape $g(y) = Ay^\ell + B$, then $\max(\ell, |x|, |y|)$ is bounded by a constant depending only on the parameters involved.

The starting point of the next topic we study is a classical theorem of Erdős and Selfridge [20]: the product of two or more consecutive positive integers cannot be a perfect power. This problem has been extended into various directions. One of the most important generalizations concerns the problem of perfect powers in products of consecutive terms of arithmetic progressions. There are a huge amount of papers devoted to this question (see, for example, the paper by Győry, Hajdu and Pintér [27] for the case of at most 34 terms, and the references given there) - however, it is still unsolved. In most related results, naturally, the strong structure of the underlying arithmetic progression is of utmost importance. It is an interesting question how far one can 'disturb' this structure still to have definitive (finiteness) results. See for example a recent paper by Hajdu, Papp and Tijdeman [36] where equation (1.2) is studied for polynomials f having roots from an arithmetic progressions - however, these roots are not (necessarily) consecutive terms, some terms of the progression are omitted. (In the literature one can find various related results, see e.g. the references in [36].) In the fourth chapter of the dissertation we approach the problem from another, new direction. Namely, we keep the symmetry of the roots of $f(x)$, however, we allow arbitrarily large gaps among them. More precisely, we prove that if the roots of $f(x)$ form a symmetric, convex set then (1.2) has only finitely many integer solutions x, y.

Finally, in the fifth chapter of the dissertation we study square values of Littlewood polynomials, i.e. polynomials with all coefficients equal to ± 1. In fact, this means that we consider equation (1.2) for $f(x)$ being a Littlewood polynomial and $g(y) = y^2$. The polynomial values of Littlewood polynomials, from the point of finiteness of solutions, have already been studied by Hajdu, Tijdeman and Varga [37]. Further, the problem is a generalization of the famous Nagell-Ljunggren equation

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^\ell$$

in the case $\ell = 2$. The above equation has been studied by many mathematicians, in several papers. A classical result of Ljunggren [44] gives that for $\ell = 2$ the only solutions are $(x, y, n) = (7, \pm 20, 4)$. Here we shall be interested in finding *all solutions* of the equation. Combining various methods (e.g. the theory of elliptic curves, hyperelliptic curves and Runge's method), we succeed to list all solutions in cases $n = 3, 5$ and $2 \leq n \leq 24$, n even. Beside this, we gather some information for the case of n odd with $n \leq 17$. Based upon the data obtained, we can formulate some striking questions for further research, as well.

In the proofs of our results, we need to combine several deep tools, among others Baker's method and a celebrated theorem of Bilu and Tichy [12], guaranteeing the finiteness of the number of integral solutions of equations of the shape $f(x) = g(y)$.

The dissertation is structured in the following way. In the second chapter we collect the most important tools we use at several points later on. Namely, we provide a famous theorem of Schinzel and Tijdeman [56] giving an upper bound for the exponent of the powers in the value set of polynomials, and a classical result of Brindza [14] yielding an upper bound for the solutions of superelliptic equations. Note that both results are based upon Baker's method. We also formulate the above mentioned theorem of Bilu and Tichy [12]. The forthcoming three chapters contain our results, in the order indicated above.

Chapter 2

Methods and tools

In this chapter we introduce some notation and lemmas. They will be used multiple times in our dissertation so we give them here. They are our main tools in giving effective and ineffective finiteness results for various polynomial Diophantine equations.

Let $T(x) \in \mathbb{Z}[x]$. By the height H of the polynomial $T(x)$ we mean the maximum of the absolute value of its coefficients. Let A be an integer with $A \neq 0$, and consider the equation

$$T(x) = Ay^m, \tag{2.1}$$

in unknown integers x, y, m with $m \geq 2$, under the convention that $m \leq 3$ if $|y| \leq 1$.

The next result is due to Schinzel and Tijdeman [56] (see also Tijdeman [65]).

Lemma 2.0.1. *If $T(x)$ has at least two different roots, then for all solutions of* (2.1)

$$m < C_1(A, d, H)$$

holds. Here $C_1(A, d, H)$ is an effectively computable constant depending only on A, the degree d and the height H of $T(x)$.

The following lemma is a special case of the main result of Brindza [14]. Ultimately, it is based on Baker's method. In order to formulate it we need some new notation. Let S be a finite set of primes, and let $\mathbb{Z}_S$ be the set of those rationals whose denominators are composed exclusively of primes from S. By the height $h(q)$ of a rational number q we mean the maximum of the absolute value of its denominator and numerator.

Lemma 2.0.2. *Let $T(x) \in \mathbb{Z}[x]$, and write*

$$T(x) = a \prod_{i=1}^{k} (x - \gamma_i)^{r_i},$$

where a is the leading coefficient of T, and $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ are the distinct complex roots of $T(x)$, with multiplicities $r_1, \ldots, r_k$, respectively. Further, fix m with $m \geq 2$, and put

$$t_i = \frac{m}{(m, r_i)} \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Suppose that $(t_1, \ldots, t_k)$ is not a permutation of any of the k-tuples

$$(t, 1, \ldots, 1) \ (t \geq 1), \quad (2, 2, 1, \ldots, 1).$$

Then for any finite set S of primes, the solutions $x, y \in \mathbb{Z}_S$ of (2.1) *satisfy*

$$\max(h(x), h(y)) < C_2(A, m, d, H, S),$$

where $C_2(A, m, d, H, S)$ is an effectively computable constant depending only on A, m, d, H, S, where d is the degree and H is the height of $T(x)$.

The next lemma is a deep result of Bilu and Tichy [12]. To formulate it we need some more notation.

By the *decomposition* of a polynomial $T(x)$ over a field K we mean a composition of the form $T(x) = U_1(U_2(x))$, where $U_1(x), U_2(x) \in K[x]$. We say that the decomposition is *nontrivial* if $\deg(U_1) > 1$ and $\deg(U_2) > 1$. Two decompositions $T(x) = U_1(U_2(x))$ and $T(x) = V_1(V_2(x))$ are *equivalent* if there exists a linear polynomial $t(x) \in K[x]$ such that $U_1(x) = V_1(t(x))$ and $V_2(x) = t(U_2(x))$. If $T(x)$ has at least one nontrivial decomposition over K then we say that $T(x)$ is *decomposable*; otherwise $T(x)$ is *indecomposable*.

Let α, β, $\delta \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, μ, ν, q be positive integers, r be a non-negative integer, and $v(x) \in \mathbb{Q}[x]$ a polynomial, which is not identically zero. Write $D_\mu(x, \delta)$ for the μ-th Dickson polynomial, that is

$$D_\mu(x, \delta) = \sum_{i=0}^{\lfloor \mu/2 \rfloor} d_{\mu,i} x^{\mu - 2i},$$

where

$$d_{\mu,i} = \frac{\mu}{\mu - i} \binom{\mu - i}{i} (-\delta)^i.$$

We say that the polynomials $F(x)$ and $G(x)$ form a standard pair over $\mathbb{Q}$, if $(F(x), G(x))$ or $(G(x), F(x))$ appears in Table 2.1.

The following lemma is the main result of Bilu and Tichy [12].

Lemma 2.0.3. *Let $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ be non-constant polynomials. Then the following two assertions are equivalent.*

Kind	Standard pair	Parameter restrictions
First	$(x^q, \alpha x^r v(x)^q)$	$0 \leq r < q, (r,q) = 1,$ $r + \deg v(x) > 0$
Second	$(x^2, (\alpha x^2 + \beta)v(x)^2)$	-
Third	$(D_\mu(x, \alpha^\nu), D_\nu(x, \alpha^\mu))$	$(\mu, \nu) = 1$
Fourth	$(\alpha^{\frac{-\mu}{2}} D_\mu(x, \alpha), -\beta^{\frac{-\nu}{2}} D_\nu(x, \beta))$	$(\mu, \nu) = 2$
Fifth	$((\alpha x^2 - 1)^3, 3x^4 - 4x^3)$	-

Table 2.1: Standard pairs

i) The equation

$$f(x) = g(y)$$

has infinitely many solutions with a bounded denominator.

ii) We have $f(x) = \varphi(F(\lambda(x)))$ *and* $g(x) = \varphi(G(\kappa(x)))$, *where* $\lambda(x)$ *and* $\kappa(x)$ *are linear polynomials in* $\mathbb{Q}[x]$, $\varphi(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *and* $(F(x), G(x))$ *is a standard pair over* $\mathbb{Q}$ *such that the equation* $F(x) = G(y)$ *has infinitely many solutions with a bounded denominator.*

Chapter 3

Polynomial values of surface point counting polynomials

3.1 Introduction

There are many problems related to the description and various properties of polynomials providing the number of lattice points in certain regular bodies.

In the present chapter, among such bodies we focus on the n-dimensional cube, pyramid and simplex. As it is well known [17], the number of integral points in the interior of these bodies in $\mathbb{R}^n$ (in case of their usual placement) is given by the polynomials

$$(x+1)^n, \quad 1^{n-1}+2^{n-1}+\cdots+(x+1)^{n-1}, \quad \binom{x+n}{n}, \tag{3.1}$$

respectively.

The polynomial values of the first polynomial in (3.1), namely the so called superelliptic equation

$$(x+1)^n = g(y)$$

has been studied by many mathematicians. Here g is a polynomial with rational coefficients and x, y are integral unknowns. Results of Tijdeman [65] and Schinzel and Tijdeman [56] imply that under certain necessary assumptions here n can be effectively bounded. Baker (see [1, 2]) and Brindza [14] showed that given n, under some assumptions one can also bound the absolute values of x, y, as well. For further related results see the book of Shorey and Tijdeman [57].

The second polynomial in (3.1) is denoted by $S_{n-1}(x+1)$. The polynomial values of this polynomial, i.e. the equation

$$S_{n-1}(x+1) = g(y)$$

where g is a polynomial with rational coefficients and x, y are integral unknowns, has also been intensively studied. In the special case where g is of the form $g(y) = y^\ell$, a classical result of Schäffer [55] shows that (apart from certain completely described exceptions) the above equation has only finitely many solutions for n fixed. When $g(y)$ is a shifted power, or more generally it is of the shape $g(y) = Ay^\ell + B$ with $A, B \in \mathbb{Q}$, $A \neq 0$, Győry, Tijdeman and Voorhoeve [30] obtained deep finiteness results - again, with n fixed. Later, the same authors derived even more general finiteness results concerning shifts of $S_{n-1}(x+1)$ with polynomials (see [66]). The general case has been taken up by Rakaczki [49]. He proved that the previous equation for any fixed n, apart from certain well-described exceptions, has only finitely many solutions in integers x, y. For more related results see e.g. the papers Bennett, Győry and Pintér [6], Győry and Pintér [29], Bazsó [4] and Hajdu [31] and the references given there.

Finally, the investigation of the third polynomial in (3.1) reduces to the equation

$$\binom{x+n}{n} = g(y)$$

in integers x, y, where g is a polynomial with rational coefficients again. This is also a famous equation, studied by several authors. In the case where $g(y) = y^\ell$, the equation has been completely solved by Erdős [19] (for $n \geq 4$) and Győry [26] (for $n = 2, 3$). When g is of the shape $g(y) = Ay^\ell + B$ with $A, B \in \mathbb{Q}$, $A \neq 0$, Yuan [69] gave effective upper bounds for the absolute values of x, y. In the general case, Kulkarni and Sury [42] gave an ineffective finiteness theorem for the solutions of the previous equation.

Besides the above mentioned results, there are many more related papers in the literature. The interested reader may consult e.g. the paper of Bilu, Brindza, Kirschenhofer, Pintér and Tichy [11] or the survey paper of Győry, Kovács, Péter and Pintér [28] and the references therein.

In the present chapter we study the polynomials describing the number of lattice points on the *surfaces* of the above mentioned regular bodies. These polynomials can be obtained by certain differences of the polynomials in (3.1). Namely, one can easily check that the number of integral points on the surfaces of the n-dimesional cube, pyramid and simplex (for arbitrary $n \geq 1$) can be given by the polynomials

$$\begin{aligned} F_n(x) =& (x+1)^n - (x-1)^n, \\ G_n(x) =& (x+1)^{n-1} + x^{n-1}, \\ H_n(x) =& \binom{x+n}{n} - \binom{x-1}{n}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

respectively. We provide various finiteness results for the polynomial values of $F(x)$, $G(x)$,

$H(x)$, that is for the integer solutions of the equations

$$F_n(x) = g(y), \quad G_n(x) = g(y), \quad H_n(x) = g(y)$$

where g is a polynomial with rational coefficients. In the general case our theorems are ineffective. However, in the case where g is of the form $g(y) = Ay^\ell + B$ with $A, B \in \mathbb{Q}$, $A \neq 0$ then we can provide effective finiteness results. In our proofs (among others) we combine Baker's method and the Bilu-Tichy theorem [12]. To apply these methods (as we shall see) we need to get precise information on the root structures of the polynomials, their derivatives and their shifts from (3.2). We shall also have to understand the decomposability properties of these polynomials. It is worth to mention that to prove the related properties of the difference polynomials (3.2) in many cases is significantly more difficult than in case of the original polynomials (3.1). Finally, we note that related investigations (i.e. papers concerned with differences of combinatorial polynomials) are known in the literature: see e.g. the paper of Liptai, Luca, Pintér and Szalay [43] (and the references there), where the equation $S_k(x-1) = S_\ell(y-1) - S_\ell(x)$ has been studied.

The structure of the chapter is the following. In the next section we give our main results. In Section 3.3 we describe the root structures of the polynomials (3.2) and of their derivatives and shifts, together with their decomposability properties.

3.2 Main results

In this chapter we examine the equation

$$W(x) = g(y) \tag{3.3}$$

where $W(x)$ is one of the polynomials $F_n(x)$, $G_n(x)$, $H_n(x)$ $(n \geq 1)$ from (3.2), and $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$. Our purpose is to prove finiteness results for the integer solutions x, y of (3.3). First we provide a general theorem for the problem considered. This result is ineffective, so it only shows the finiteness of the number of solutions, it does not give bounds for the solutions themselves.

Theorem 3.2.1 (L. Hajdu, O. Herendi [32]). *Let $n \geq 6$ and $\deg(g) \geq 2$. If equation (3.3) has infinitely many solutions in integers x, y then either*

$$g(y) = W(P(y))$$

where $P(y) \in \mathbb{Q}[y]$, or

$$g(y) = \hat{W}(Q(y))$$

where $Q(y) \in \mathbb{Q}[y]$ with at most two roots of odd multiplicity, n is odd, and in case of $W(x) = F_n(x)$, $G_n(x)$, $H_n(x)$ the polynomial $\hat{W}$ is φ_1, φ_2, φ_3, respectively, with

$$\varphi_1(x) = 2\binom{n}{1}x^{\frac{n-1}{2}} + 2\binom{n}{3}x^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + 2\binom{n}{n-2}x + 2,$$

$$\varphi_2(x) = 2x^{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2}\binom{n-1}{2}x^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-4}}\binom{n-1}{n-3}x + \frac{1}{2^{n-2}},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{2}{n!}(s_1 x^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + s_n) \quad \textit{where } s_j = \sum_{\substack{A\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |A|=j}} \prod_{a\in A} a \quad (j = 1, \dots, n).$$

Remark 3.2.1. Clearly, we have to exclude polynomials g with $\deg(g) = 1$, so the assumption $\deg(g) \geq 2$ is necessary. The condition $n \geq 6$ is necessary, too. For $n \leq 5$ one can easily find counterexamples (which is not surprising in view of the many free parameters involved; see the proof of the theorem).

In the case where $g(y) = Ay^\ell + B$ with $A, B \in \mathbb{Q}$ with $A \neq 0$, we can give an effective upper bound for the absolute values of the integer solutions x, y of the equation (3.3).

Theorem 3.2.2 (L. Hajdu, O. Herendi [32])**.** *Let $n \geq 1$ and consider the equation*

$$W(x) = Ay^\ell + B \tag{3.4}$$

where $W(x)$ is one of the polynomials $F_n(x), G_n(x), H_n(x)$ from (3.2)*, A, B are given rationals with $A \neq 0$, and x, y and $\ell \geq 2$ are integer unknowns.*

i) Let $n \geq 4$. Then there exists an effectively computable constant $C_3(A, B, n)$, depending only on A, B, n such that

$$\ell < C_3(A, B, n)$$

for every solutions of (3.4) *with $|y| > 1$.*

ii) Let $\ell \geq 2$ be arbitrary but fixed and $n \geq 8$. Then there exists an effectively computable constant $C_4(A, B, n)$, depending only on A, B, n such that

$$\max(|x|, |y|) \leq C_4(A, B, n)$$

for every integer solution x, y of (3.4)*.*

Remark 3.2.2. Also in this case, the assumptions made for n are all necessary; one could easily find counterexamples in the excluded cases.

In the proof of our ineffective results the following theorem plays an important role. It completely describes the decompositions of the polynomial families $F_n(x)$, $G_n(x)$, $H_n(x)$.

Theorem 3.2.3 (L. Hajdu, O. Herendi [32])**.** *Let $n \geq 2$. If n is even then the polynomials $F_n(x)$, $G_n(x)$, $H_n(x)$ are indecomposable. If n is odd, then all the decompositions of these polynomials are equivalent with*

$$F_n(x) = \varphi_1(x^2), \quad G_n(x) = \varphi_2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right), \quad H_n(x) = \varphi_3(x^2),$$

respectively. Here φ_1, φ_2, φ_3 are the same polynomials as in Theorem 3.2.1.

3.3 Root structures

In this section we describe the root structures of the studied polynomial families, of their derivatives and of their shifts. We also prove Theorem 3.2.3 in this section, characterizing the decompositions of the polynomials $F_n(x)$, $G_n(x)$, $H_n(x)$.

We note that obviously

$$\deg(F_n) = \deg(G_n) = \deg(H_n) = n - 1 \quad (n \geq 1).$$

3.3.1 The polynomial family $F_n(x)$

In this subsection we describe the root structure of $F_n(x)$, of its derivative and of its shifts. We start with $F_n(x)$ itself.

Lemma 3.3.1. *Let $n \geq 2$. Then all the roots of $F_n(x) = (x+1)^n - (x-1)^n$ are simple.*

As a simple consequence we obtain the following statement concerning $F_n'(x)$.

Corollary 3.3.1. *Let $n \geq 3$. Then all the roots of $F_n'(x)$ are simple.*

In the next lemma we examine the root structure of the shifted polynomials of $F_n(x)$.

Lemma 3.3.2. *Let $n \geq 2$. Then for any $r \in \mathbb{C}$ the polynomial $F_n(x) + r$ has at most two multiple roots, which are at most double.*

Finally, we need the following assertion to prove the corresponding part of Theorem 3.2.3.

Lemma 3.3.3. *Let $n \geq 2$. Then $\max_{\lambda \in \mathbb{C}} \deg(\gcd(F_n(x) - \lambda, F_n'(x))) \leq 2$.*

3.3.2 The polynomial family $G_n(x)$

Now we examine the polynomials $G_n(x)$.

Lemma 3.3.4. *For any $n \geq 2$ the roots of the polynomial $G_n(x) = (x+1)^{n-1} + x^{n-1}$ are all simple.*

By the previous statement we can easily describe the root structure of $G_n'(x)$, as well.

Corollary 3.3.2. *For any $n \geq 3$ the roots of the polynomial $G_n'(x)$ are all simple.*

Now we examine the root structure of the shifts of $G_n(x)$.

Lemma 3.3.5. *Let $n \geq 2$. Then in case of any $r \in \mathbb{C}$ the polynomial $G_n(x) + r$ has at most two multiple roots, which are at most double.*

To prove the corresponding part of Theorem 3.2.3 we also need the following lemma.

Lemma 3.3.6. *Let $n \geq 2$. Then* $\max_{\lambda \in \mathbb{C}} \deg(\gcd(G_n(x) - \lambda, G_n'(x))) \leq 2$.

3.3.3 The polynomial family $H_n(x)$

Finally, we examine the family $H_n(x)$.

Lemma 3.3.7. *For all $n \geq 2$, all the roots of*

$$H_n(x) = \frac{1}{n!}\left((x+1)\ldots(x+n) - (x-1)\ldots(x-n)\right)$$

are simple. Further, the real part of any root of $H_n(x)$ is zero.

The characterization of the root structure of $H_n'(x)$ is much more complicated then for $F_n'(x)$ and $G_n'(x)$.

Lemma 3.3.8. *For all $n \geq 2$, all the roots of $H_n'(x)$ are simple.*

Now we examine the root structures of the shifts of $H_n(x)$.

Corollary 3.3.3. *For any $n \geq 2$ and for all $r \in \mathbb{C}$, the multiplicities of the roots of $H_n(x) + r$ are at most two.*

To prove the corresponding part of Theorem 3.2.3 we need one more lemma, similar to Lemmas 3.3.3 and 3.3.6.

Lemma 3.3.9. *Let $n \geq 2$. Then* $\max_{\lambda \in \mathbb{C}} \deg(\gcd(H_n(x) - \lambda, H_n'(x))) \leq 2$.

Chapter 4

Extrema of polynomials with real roots and Diophantine equations

4.1 Introduction

There are many results in the literature concerning polynomial values and (shifted) power values of polynomials with consecutive integer roots, or more generally, with roots forming an arithmetic progression. We only mention a classical result of Erdős and Selfridge [20] saying that the product of consecutive integers can never be a perfect power, a theorem of Győry, Hajdu and Pintér [27] giving an alike result concerning arithmetic progressions up to 34 terms, and a paper by Kulkarni and Sury [42] providing finiteness results for the polynomial values of products of consecutive integers. It is an interesting question that how far one can 'disturb' the structure of the roots such that the finiteness results still remain valid. Also there are many results into this direction, with adding or removing one or more terms (roots). Here we only recall results of Saradha and Shorey [53, 54] concerning power values of products of consecutive integers with one term missing, Hajdu and Papp [35] and Hajdu, Papp and Tijdeman [36] about polynomial values and shifted power values of products of consecutive terms of arithmetic progressions with one and with several missing terms, respectively, and Hajdu and Varga [38] with one term added. We suggest the interested reader to consult the references of the mentioned papers, as well.

In this chapter we study a case where (part of) the symmetric root structure is preserved, however, having increasing (possibly large) gaps between the roots. We prove that the finiteness of the solutions can also be guaranteed under these generalized circumstances. Our results can be considered to be generalizations of the corresponding finiteness results, e.g. from [42]. (This will be explained in Remark 4.2.1.) In our proofs we combine

Baker's method and the Bilu-Tichy theorem with a new result guaranteeing an increasing property for the extremal values of polynomials, with distinct real roots satisfying certain symmetry and increasing gap properties. The structure of the chapter is the following. In the next section we provide our main results. Then we give the lemmas and auxiliary results needed for the proofs in separate sections.

4.2 Main results

We say that a finite sequence $b_1, \ldots, b_k$ in $\mathbb{R}$ with $b_1 < \cdots < b_k$ is symmetric, if there exists a $c \in \mathbb{R}$ such that $b_i + b_{k+1-i} = 2c$ for $i = 1, 2, \ldots, k$. We say that c is the center of symmetry for the sequence. A symmetric sequence is called centrally convex, if writing $\ell = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$, $b_\ell, b_{\ell+1}, \ldots, b_k$ form a convex sequence, that is

$$b_i - b_{i-1} \leq b_{i+1} - b_i \quad (\ell < i < k) \tag{4.1}$$

holds. For example, $-2, 0, 1, 2, 4$ is a centrally convex symmetric sequence: the center of symmetry is $c = 1$, and we have

$$2 - 1 \leq 4 - 2.$$

To see an example of a centrally convex symmetric sequence with an even number of elements, consider $-10, -2, 1, 4, 6, 9, 12, 20$: now the center of symmetry is $c = 5$ and we have

$$6 - 4 \leq 9 - 6 \leq 12 - 9 \leq 20 - 12.$$

Remark 4.2.1. Our results concern polynomials with simple real roots forming a centrally convex symmetric sequence. We find it important to emphasize a few points here. In the first place, any arithmetic progression $h_1, \ldots, h_N$ forms a centrally convex symmetric sequence. Indeed, the sequence is symmetric to the point $c := (h_1 + h_N)/2$ (i.e. $h_i + h_{N+1-i} = 2c$ for all $i = 1, \ldots, N$), and since the gaps between the terms after the middle point are non-decreasing (certainly, the gap is constant), the centrally convex property (4.1) is also satisfied. So our Theorem 4.2.1 below provides an extension of the main result of [42]. However, in fact our results are much more general than that. For example, as one can easily check, the numbers

$$-k^2, -(k-1)^2, \ldots, -4, -1, 0, 1, 4, \ldots, (k-1)^2, k^2$$

also form a centrally convex symmetric sequence, so our results provide finiteness conditions for the equations appearing in Theorems 4.2.1 and 4.2.2 involving the corresponding polynomial

$$f(x) = x \prod_{j=1}^{k} (x - j^2)(x + j^2).$$

First we provide a general, ineffective theorem for the common integer values of a polynomial $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ having distinct roots forming a centrally convex symmetric sequence with any polynomial $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

Theorem 4.2.1 (L. Hajdu, O. Herendi [33])**.** *Let $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ have distinct real roots forming a centrally convex symmetric sequence,* $\deg(f) > 6$ *and let $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ with* $\deg(g) \geq 2$*. If the equation*

$$f(x) = g(y) \tag{4.2}$$

has infinitely many solutions in integers x, y then either

$$g(y) = f(P(y))$$

with some $P(y) \in \mathbb{Q}[y]$ of degree ≥ 1, or $\deg(f) = 2k$ *is even and*

$$g(y) = \hat{f}(Q(y))$$

with some $Q(y) \in \mathbb{Q}[y]$ having at most two roots of odd multiplicity, where

$$\hat{f}(x) = b_0(x - (b_1 - c)^2) \cdots (x - (b_k - c)^2).$$

Here b_0 is the leading coefficient of f, b_i $(i = 1, \ldots, 2k)$ are the roots of f in increasing order, and c is the center of symmetry for them.

Remark 4.2.2. It is easy to see that $\hat{f}(x) \in \mathbb{Q}[x]$. We shall show this in the proof of the theorem.

If we have $g(x) = Ax^m + B$ with some fixed $A, B \in \mathbb{Q}$ $(A \neq 0)$ and m is an integer variable with $m \geq 2$, we are able to provide an effective upper bound for the absolute values of the integer solutions x, y and also of m in equation (4.2). By the height of a polynomial in $\mathbb{Q}[x]$ we mean the maximum of the absolute values of the numerators and denominators of its coefficients.

Theorem 4.2.2 (L. Hajdu, O. Herendi [33])**.** *Let $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ have distinct real roots forming a centrally convex symmetric sequence and suppose that* $\deg(f) > 6$*. Let A, B be given rationals with $A \neq 0$, and consider the equation*

$$f(x) = Ay^m + B \tag{4.3}$$

in integers x, y, m with $m \geq 2$, with the convention that $m \leq 3$ if $|y| \leq 1$. Then there exists an effectively computable constant $C_5(A, B, d, H)$, depending only on A, B and the degree d and height H of f such that

$$\max(|x|, |y|, m) \leq C_5(A, B, d, H)$$

for every integer solution x, y, m of (4.3).

Remark 4.2.3. The assumptions of Theorems 4.2.1 and 4.2.2 are necessary. Clearly, we need to exclude the case $\deg(g) = 1$ in Theorem 4.2.1. To see an example with $\deg(f) = 6$ such that both (4.2) and (4.3) have infinitely many solutions, put

$$f(x) = (x + 8)(x + 4)(x + 1)(x - 1)(x - 4)(x - 8)$$

and

$$g(y) = Ay^m + B = 29y^2 + 3136.$$

(Observe that the roots $-8, -4, -1, 1, 4, 8$ form a centrally convex symmetric sequence.) Then both (4.2) and (4.3) can be written as

$$(x^2 - 65)(x^2 - 8)^2 = 29y^2.$$

Since the generalized Pell equation

$$u^2 - 29v^2 = 65$$

has infinitely many integer solutions u, v (the 'smallest' one is given by $(u, v) = (23, 4)$), (4.2) and (4.3) admit infinitely many solutions $x, y \in \mathbb{Z}$. However, we mention that the condition $\deg(f) > 6$ is necessary only for $m = 2$. When $m \geq 3$, in fact the assumption $\deg(f) > 2$ is sufficient. This can be easily seen from the proof of Theorem 4.2.2.

We also note that requiring only distinct real roots for f is certainly not necessary: see e.g. the identities involving Dickson polynomials in [12]. That is, some further requirement for the roots is necessary.

In the proof of Theorem 4.2.1 the following result plays an important role. It gives a complete description of the decompositions of polynomials over $\mathbb{Q}$ with simple real roots forming a centrally convex symmetric sequence.

Theorem 4.2.3 (L. Hajdu, O. Herendi [33])**.** *Let $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ have distinct real roots forming a centrally convex symmetric sequence. If $\deg(f)$ is odd or $\deg(f) = 2$ then f is indecomposable over $\mathbb{Q}$. If $\deg(f) \geq 4$ is even then f is decomposable over $\mathbb{Q}$, and all the decompositions of f over $\mathbb{Q}$ are equivalent to*

$$f(x) = b_0((x - c)^2 - (b_1 - c)^2) \dots ((x - c)^2 - (b_k - c)^2),$$

where b_0 is the leading coefficient of f, $b_1, \dots, b_{2k}$ are the roots of f in increasing order, and c is their center of symmetry.

Remark 4.2.4. Using the notation introduced in Theorem 4.2.1, the above decomposition can also be written as

$$f(x) = \hat{f}((x - c)^2).$$

So (for $\deg(f) \geq 4$ even) this decomposition is over $\mathbb{Q}$, indeed.

Finally, we give a theorem providing information about the extrema of polynomials having simple real roots forming a centrally convex symmetric sequence. This result plays a key role in the proofs of our theorems given above - however, we find it of possible independent interest.

Theorem 4.2.4 (L. Hajdu, O. Herendi [33]). *Let $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ have distinct real roots, which form a centrally convex symmetric sequence. Then the extremal values of f are strictly increasing in absolute value moving away from the center of symmetry of the roots.*

Remark 4.2.5. In the statement neither the centrally convex nor the symmetric properties can be dropped. We illustrate it with two examples.

Take first

$$f(x) = (x+3)(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3).$$

We see that the roots form a symmetric sequence (with center of symmetry being 0), and for the gaps only one 'centrally convex inequality' is violated (namely, $1-(-1) \leq 2-1$ does not hold). However, a simple calculation with Maple shows that the roots of $f'(x)$ are given by

$$-\sqrt{7}, \quad -\sqrt{\frac{7}{3}}, \quad 0, \quad \sqrt{\frac{7}{3}}, \quad \sqrt{7},$$

and the extremal values of $f(x)$ are

$$-36, \quad \frac{400}{27}, \quad -36, \quad \frac{400}{27}, \quad -36$$

at these values, respectively. So we see that the strictly monotone increasing property of the absolute values of the extremal values (moving away from the center of symmetry) does not hold in this case.

Let now

$$f(x) = (x+9)(x+6)(x+3)x(x-1)(x-2)(x-3).$$

We see that the roots satisfy an 'increasing gap property' starting from the middle root (which is 0), into both the positive and the negative direction. (Since we dropped symmetry here, certainly we cannot use a 'center of symmetry'.) However, a simple calculation with Maple shows that the extremal value of f between the roots 0 and 1 is larger in absolute value than that between the roots 1 and 2. (Since the data are non-rational and cannot be expressed easily, we suppress the details.) So the strictly increasing extremal value property does not hold in this case, too.

4.3 Tools used in the proof of Theorem 4.2.4

As we shall see, Theorem 4.2.4 is a simple consequence of the following two propositions. They are rather similar, but because of technical reasons it is worth to formulate them separately.

Proposition 4.3.1. *Let* $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ *be real numbers with*

$$a_i - a_{i-1} \leq a_{i+1} - a_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \tag{4.4}$$

and let

$$f_1(x) = x \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)(x + a_i).$$

Let α_i *be the extremum of* f_1 *between* a_i *and* a_{i+1} *for* $i = 0, \ldots, n-1$. *Then we have*

$$|f_1(\alpha_0)| < |f_1(\alpha_1)| < \cdots < |f_1(\alpha_{n-1})|.$$

Proposition 4.3.2. *Let* $0 < a_1 < \cdots < a_n$ *be real numbers with*

$$3a_1 \leq a_2 \quad \textit{and} \quad a_i - a_{i-1} \leq a_{i+1} - a_i \quad (2 \leq i \leq n-1), \tag{4.5}$$

and let

$$f_2(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)(x + a_i).$$

Let α_i *be the extremum of* f_2 *between* a_i *and* a_{i+1} *for* $i = 1, \ldots, n-1$. *Then we have*

$$|f_2(0)| < |f_2(\alpha_1)| < \cdots < |f_2(\alpha_{n-1})|.$$

Remark 4.3.1. Note that by Rolle's theorem the extrema of f_1 and f_2 are situated in the way indicated in Propositons 4.3.1 and 4.3.2, respectively - that is, they are between the roots.

To prove Propositions 4.3.1 and 4.3.2 we shall need some lemmas. The first one concerns certain properties of the Γ function, defined by

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{1 + \frac{z}{n}} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}),$$

where $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ is the set of non-positive integers. Note that there are many other possibilities to define $\Gamma(z)$, the above form is called Euler's formula.

Lemma 4.3.1. *The following assertions hold.*

i) For any $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ *we have*

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1).$$

ii) For any $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ *we have*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

iii) For any $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ *with* $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ *we have*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{(k+u_1)(k+u_2)}{(k+v_1)(k+v_2)} = \frac{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)}{\Gamma(u_1)\Gamma(u_2)}.$$

In the proof of Proposition 4.3.1 we shall need the following assertion.

Lemma 4.3.2. *Let* $0 < a_1 < \cdots < a_n$ *be real numbers with*

$$a_i - a_{i-1} \leq a_{i+1} - a_i \quad (2 \leq i \leq n-1).$$

Then for every i_1, i_2 *with* $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$ *we have*

$$\frac{a_{i_2}}{a_{i_1}} \geq \frac{i_2}{i_1}.$$

In the proof of Proposition 4.3.2 we shall need the following variant of Lemma 4.3.2.

Lemma 4.3.3. *Let* $0 < a_1 < \cdots < a_n$ *be real numbers with*

$$3a_1 \leq a_2$$

and

$$a_i - a_{i-1} \leq a_{i+1} - a_i \quad (2 \leq i \leq n-1).$$

Then for every i_1, i_2 *with* $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$ *we have*

$$\frac{a_{i_2}}{a_{i_1}} \geq \frac{2i_2 - 1}{2i_1 - 1}.$$

Chapter 5

Square values of Littlewood polynomials

5.1 Introduction

Littlewood polynomials, that is polynomials with only ± 1 coefficients, have an extensive literature. Their aggregated set of zeroes, that is the set

$$\mathcal{L} = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \text{ is a root of a Littlewood polynomial}\}$$

has a lot of interesting properties, and has attracted a lot of attention. We only mention a few related recent papers, and suggest the interested reader to study them and their references. Peled, Sen and Zeitouni [48] studied double roots of random Littlewood polynomials. Recently, Balister, Bollobás, Morris, Sahasrabudhe and Tiba [3] solved an old conjecture of Littlewood, by showing that there exist so called flat Littlewood polynomials of any degree $n \geq 2$. Han and Schied [40] (among others) investigated so-called step roots of such polynomials, and provided some applications. Hare and Jankauskas [41] and Yakir [68] investigated the roots of Littlewood polynomials inside the unit disk. Beside this, certain divisibility properties of Littlewood polynomials are also of interest; see e.g. Dubickas and Jankauskas [18] who studied the problem of Newman polynomials not dividing any Littlewood polynomial, or Mossinghoff [46] for a study of Littlewood polynomials with prescribed cyclotomic factors. Recently, Diophantine properties of Littlewood polynomials have also been investigated. Hajdu and Varga [39] and Hajdu, Tijdeman and Varga [37] provided various finiteness results for the power values, shifted power values and polynomial values of such polynomials. It is important to mention that the famous Nagell-Ljunggren equation

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^\ell \tag{5.1}$$

in integers x, y, n, ℓ with $|x| > 1$, $|y| > 1$, $n > 2$, $\ell \geq 2$ is an important, particular case of this problem, studied by many mathematicians. Indeed, the polynomial on the left hand side of (5.1) is a particular Littlewood polynomial, with all coefficients equal to one. Equation (5.1) has a huge literature. We only mention a classical result of Ljunggren [44], stating that the only solution of (5.1) with $\ell = 2$ is given by $(x, y, n) = (7, \pm 20, 4)$. Since we shall be concerned with square values of Littlewood polynomials, this result is of particular interest for us. We mention already at this point that based upon our new results, the set of solutions seems to be rather restricted in case of general Littlewood polynomials, as well. For further related results and surveys on the Nagell-Ljunggren equation we refer the interested reader to the book Shorey and Tijdeman [57] and the recent paper Bennett and Levin [7], and the references there.

In this chapter we explicitly give all square values of Littlewood polynomials of degrees $n = 3, 5$ and $n \leq 24$ even. For this, we need to combine several tools, including elliptic- and higher genus curves, Chabauty's method and Runge's method. To be able to handle the higher degree cases (say with $n \geq 14$), because of the huge number of polynomials to be studied, we need careful considerations and a delicate approach. Beside this, we gather computational data (by providing all solutions in a certain range) for n odd with $n \leq 17$. Based upon our results, we formulate some striking problems for further research, as well.

5.2 The main theorem

Our main theorem is the following.

Theorem 5.2.1 (L. Hajdu, O. Herendi, Sz. Tengely, N. Varga [34]). *Let $f(x)$ be a Littlewood polynomial of degree n with $n = 3, 5$ or $2 \leq n \leq 24$ even. Then all solutions of the equation*

$$f(x) = y^2 \tag{5.2}$$

in integers x, y with $|x| > 2$ and $y \geq 0$ are precisely those appearing in Tables 5.1 and 5.2.

$f(x)$	(x, y)
$\pm x^3 + x^2 \pm x - 1$	$(\pm(t^2+1), t(t^2+2))$ $(t \in \mathbb{Z}_{>1})$
$\pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm(t^2-1), t(t^2-2))$ $(t \in \mathbb{Z}_{>1})$
$\pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 7, 20)$
$\pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x - 1$	$(\pm(t^2+1), t(t^4+3t^2+3))$ $(t \in \mathbb{Z}_{>1})$
$\pm x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm(t^2-1), t(t^4-3t^2+3))$ $(t \in \mathbb{Z}_{>1})$

Table 5.1: All solutions of equation (5.2) with $|x| > 2$ and $y \geq 0$ for $n = 3, 5$. The $\pm$ and $\mp$ signs change together in every row.

$f(x)$	(x,y)
$x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 7)$
$x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x - 1$	$(\pm 5, 27)$
$x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x - 1$	$(\mp 5, 23)$
$x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 11)$
$x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 9, 683)$
$x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 7, 363)$
$x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 23)$
$x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 553)$
$x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 821)$
$x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 655)$
$x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 1661)$
$x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 2437)$
$x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 1597)$
$x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 1955)$
$x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 1859)$
$x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 1901)$
$x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 5011)$
$x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 7087)$
$x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 7121)$
$x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 5117)$
$x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 5089)$
$x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 5, 422409)$
$x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 8005)$
$x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 5713)$
$x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 8033)$
$x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 21263)$
$x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 14927)$
$x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 15383)$
$x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 15235)$
$x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 14083)$
$x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 16859)$
$x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 17053)$
$x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 44851)$
$x^{20} \pm x^1 9 - x^{18} \mp x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 46159)$
$x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 66649)$
$x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \mp x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 53903)$
$x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 51449)$
$x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 51169)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} - x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 134699)$

$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 138031)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 138017)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 137545)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 137531)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 125645)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \mp x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 199595)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 200221)$
$x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \mp x^{19} - x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 208771)$
$x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 150583)$
$x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 153113)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \mp x^{21} - x^{20} \mp x^{19} - x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 574033)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \mp x^{21} + x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 582397)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \mp x^{21} + x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 412495)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 592643)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 592913)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 385331)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \mp x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 600493)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 385999)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \mp x^{21} - x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 474325)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \mp x^{21} + x^{20} \mp x^{19} - x^{18} \mp x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 484333)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \mp x^{21} + x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 632495)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} - x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 454241)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \mp x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 455449)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 644801)$

$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 650615)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 460231)$

Table 5.2: All solutions of equation (5.2) with $|x| > 2$ and $y \geq 0$ for n even with $2 \leq n \leq 24$. The $\pm$ and $\mp$ signs change together in every row.

For the sake of completeness, and in particular, to gather more substantial numerical data also in case of odd exponents, we provide an alike statement for n odd. Note however, that in this case we are not able to find all solutions of (5.2), our purpose is only to get some computational insight in this case, as well.

Proposition 5.2.1. *Let $f(x)$ be a Littlewood polynomial of degree n with $7 \leq n \leq 17$ odd. Suppose further that $f(x)$ does not belong to any of the families*

$$\pm(x^{2k+1} + \ldots + x^{k+1} - x^k - \ldots - 1) = \pm(x-1)(x^k + \cdots + x + 1)^2, \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}\pm\,(x^{2k+1} - x^{2k} + \ldots + (-1)^{k+2}x^{k+1} + (-1)^k x^k + \cdots + 1) =& \\ = \pm(x+1)(x^k - x^{k-1} + \cdots + (-1)^k)^2,&\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\pm\,(x^{4k+3} + x^{4k+2} - x^{4k+1} - x^{4k} + \ldots + (-1)^k x^{2k+3} + (-1)^k x^{2k+2}& \\ + (-1)^k x^{2k+1} + (-1)^k x^{2k} + \ldots + x + 1) =& \\ = \pm(x+1)(x^2+1)(x^{2k} - x^{2k-2} + \ldots + (-1)^k)^2,&\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}\pm\,(x^{4k+3} - x^{4k+2} - x^{4k+1} + x^{4k} + \ldots + (-1)^k x^{2k+3} - (-1)^k x^{2k+2}& \\ + (-1)^k x^{2k+1} - (-1)^k x^{2k} + \ldots + x - 1) =& \\ = \pm(x-1)(x^2+1)(x^{2k} - x^{2k-2} + \ldots + (-1)^k)^2.&\end{aligned} \tag{5.6}$$

Then all solutions of equation (5.2) in integers x, y with $100 \geq |x| > 2$ and $y \geq 0$ are precisely those appearing in Table 5.3.

$f(x)$	(x,y)
$\pm x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 34)$
$\pm x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 128)$
$\pm x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 158)$
$\pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 166)$
$\pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 320)$
$\pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 328)$
$\pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 358)$
$\pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 382)$
$\pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 986)$
$\pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 1076)$
$\pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 + x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 1100)$
$\pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 1366)$
$\pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 1532)$
$\pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 3226)$
$\pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 3274)$
$\pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 3298)$
$\pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 3388)$
$\pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 8296)$
$\pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 8674)$
$\pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 8876)$
$\pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 9824)$
$\pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 9848)$
$\pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 9896)$
$\pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 10166)$
$\pm x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 12802)$
$\pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 13408)$
$\pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 13450)$
$\pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 13874)$

Table 5.3: All solutions of equation (5.2) excluding polynomials $f(x)$ with (5.3), (5.4), (5.5), (5.6), with $100 \geq |x| > 2$ and $y \geq 0$ for $7 \leq n \leq 17$ odd. The $\pm$ and $\mp$ signs change together in every row.

Note that it is obvious that if $f(x)$ is of the shape (5.3) or (5.4) then (5.2) has infinitely many solutions. Further, by the procedure `IntegralPoints` of Magma [13], we get that the solutions of the equations

$$\pm(x+1)(x^2+1) = y^2 \quad \text{and} \quad \pm(x-1)(x^2+1) = y^2$$

are given by $(x, y) = (0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 7, \pm 20)$. So if $f(x)$ is of the shape (5.5) or (5.6) then (5.2) has a solution with $x = \pm 7$ (with $+$ and $-$ signs on the left hand side, respectively) for any n with $n \equiv 3 \pmod 4$.

Remark. We can exclude the cases $|x| \leq 2$, even if we do not prescribe an upper bound for n. (Note that, clearly, the square values of Littlewood polynomials of any fixed degree at places x with $|x| \leq 2$ can be listed without any trouble.) The case $x = 0$ is trivial, and the cases $x = \pm 1$ are also easy. The cases $x = \pm 2$ require a little more attention. Since if $f(x)$ is a Littlewood polynomial then so is $f(-x)$, thus talking about the values of Littlewood polynomials at ± 2, it is sufficient to consider the values at 2. As one can readily check, any odd integer r with $-2^{n+1} + 1 \leq r \leq 2^{n+1} - 1$ can be represented in the form $f(2)$ with a unique Littlewood polynomial f of degree n, in precisely one way. Indeed, these numbers r are just given by

$$-2^n - 2^{n-1} - \ldots - 2 - 1, -2^n - 2^{n-1} - \ldots - 2 + 1, \ldots, 2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2 + 1,$$

and obviously the representation (for fixed n) is unique. This shows that the solutions of (5.2) with $|x| = 2$ are also completely understood and described.

5.3 Tools used in the proof of Theorem 5.2.1

As in the proof of our theorem we use different tools in the different cases, we give our argument in different subsections. We made available the codes we used at `https://shrek.unideb.hu/~tengely/LittleWood.html`.

5.3.1 Tools used in the proof of Theorem 5.2.1 for $n = 3$

Consider the Littlewood polynomials $f(x) = \pm x^3 \pm x^2 \pm x \pm 1$, and investigate (5.2) for them. There are 16 equations to study, however, using the substitution $x \to -x$ it is sufficient to consider only those where the leading coefficient of $f(x)$ is positive.

Two of the curves implied by (5.2) are singular. Namely, for

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2$$

and

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x + 1)(x - 1)^2$$

(5.2) has infinitely many solutions. These solutions are trivial to describe.

In the other cases (5.2) is an elliptic curve, and we may apply the procedure `IntegralPoints` of Magma [13] (based upon methods of Gebel, Pethő, Zimmer [25] and Stroeker, Tzanakis [62]) to obtain the integral points (solutions).

5.3.2 The proof of Theorem 5.2.1 for $n = 5$

We need to study equation (5.2) for $f(x) = \pm x^5 \pm x^4 \pm x^3 \pm x^2 \pm x \pm 1$, which now is a hyperelliptic equation. Similarly as in case $n = 3$, we may restrict to polynomials $f(x)$ with positive leading coefficient, so we need to consider 32 equations. We shall use Chabauty's method [16] and the hyperelliptic logarithm method [23] to handle these equations.

We have two reducible cases that are not square-free, these are as follows:

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 &= (x-1)(x^2+x+1)^2, \\ x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1 &= (x+1)(x^2-x+1)^2. \end{aligned}$$

In these cases we can easily describe all solutions of (5.2).

In the remaining cases we need to consider genus 2 curves. By using Magma [13] we can compute the ranks of the Jacobians and determine generators of the Mordell-Weil groups based on Stoll's papers [58], [59], [60].

As a next step, by means of Baker's method [1] we derive a (large) bound for $\log|x|$. Here we use the following improved version from [23].

Lemma 5.3.1 (Proposition 2.1 in [23])**.** *Let α be a root of $f(x)$. Assuming the knowledge of explicit generators for the Mordell–Weil group $J(C)(\mathbb{Q})$, there is a finite computable set $\mathcal{K}$ consisting of integers of $\mathbb{Q}[\alpha]$ such that if (x, y) is an integral solution to C, then $x - \alpha = \kappa\xi^2$ for some $\kappa \in \mathcal{K}$ and $\xi \in \mathbb{Q}[\alpha]$.*

Moreover, suppose $\kappa \in \mathcal{K}$. Let $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ be different conjugates of α, and let $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ be the corresponding conjugates of κ. Let $K_1 = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \sqrt{\kappa_1\kappa_2})$, $K_2 = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_3, \sqrt{\kappa_1\kappa_3})$, $K_3 = \mathbb{Q}(\alpha_2, \alpha_3, \sqrt{\kappa_2\kappa_3})$ and $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \sqrt{\kappa_1\kappa_2}, \sqrt{\kappa_1\kappa_3})$. Then there is an explicitly computable constant B_κ depending on α and κ and the degrees, regulators, class numbers and unit ranks of the K_is, and the degree of L such that if $x \neq 0$ is an integer satisfying $x - \alpha = \kappa\xi^2$ for some $\xi \in \mathbb{Q}[\alpha]$, then $\log|x| \leq B_\kappa$.

Hence, if (x, y) is an integral solution of C, then $\log|x| \leq B := \max_{\kappa\in\mathcal{K}} B_\kappa$.

In our case the coefficient of x^5 is 1, so we have the following simplified version of Corollary 3.2 from [23].

Lemma 5.3.2 (simplified version of Corollary 3.2 in [23])**.** *Let B be an upper bound for the logarithmic height of integral points on C. Then*

$$M \leq \sqrt{\mu_2^{-1}(2B - \mu_1)}.$$

5.3.3 Tools used in the proof of Theorem 5.2.1 for n even with $2 \leq n \leq 24$

Let $f(x)$ be a Littlewood polynomial of even degree $n = 2k$ with $2 \leq n \leq 24$, and consider (5.2). In principle we have 2^{n+1} equations to solve. However, since $|x|^n > |x|^{n-1} + \ldots + |x| + 1$ when $|x| > 2$, we can immediately exclude the cases where the leading coefficient of $f(x)$ is -1, as otherwise there are no solutions with $|x| > 2$. Further, similarly as in cases $n = 3, 5$, using the substitution $x \to -x$ we can get rid of half of the equations. Namely, it is sufficient to study (5.2) only when $f(x)$ is of the shape

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + e_2 x^{n-2} + \cdots + e_{n-1}x + e_n$$

with $e_2, \ldots, e_n \in \{-1, 1\}$. This means that we need to consider 2^{n-1} equations only. To solve these equations, we shall follow Runge's method.

First, we shall need the polynomial part of the Puiseux expansion of $\sqrt{f(x)}$ at ∞. The following statement, which we hope to be useful in later investigations as well, provides this in a general form.

Proposition 5.3.1. *Let*

$$f(x) = x^n + e_1 x^{n-1} + \cdots + e_{n-1}x + e_n \tag{5.7}$$

be a Littlewood polynomial of even degree $n = 2k$. Then there exists a uniquely determined polynomial

$$u(x) = u_0 x^k + u_1 x^{k-1} + \cdots + u_{k-1}x + u_k \tag{5.8}$$

with $u_0 = 1$ and $u_i \in \mathbb{Q}$ $(i = 1, \ldots, k)$ such that the coefficients of the terms x^i in $f(x)$ and $u^2(x)$ are the same for $i = k, k+1, \ldots, n$. Further, for the denominators d_i of the coefficients u_i of $u(x)$ we have

$$d_i = 2^{\nu_2((2i)!)} \quad (i = 0, 1, \ldots, k), \tag{5.9}$$

where $\nu_2(\ell)$ denotes the exponent of 2 in the prime factorization of a positive integer ℓ.

Observe that writing $f(x)$ as

$$f(x) = F(x) + g(x) \tag{5.10}$$

with

$$F(x) = x^n + x^{n-1} + e_2 x^{n-2} + \ldots + e_{n-k}x^k, \; g(x) = e_{n-k+1}x^{k-1} + \ldots + e_{n-1}x + e_n,$$

the polynomial $u(x)$ provided by Proposition 5.3.1 depends only on $F(x)$, it is independent of $g(x)$. This is extremely important for our purposes. Indeed, in this way we shall need to loop through only the possible choices of $F(x)$, which means that we can reduce the number of cases to be considered down to 2^{k-1}.

Let $t = 2^{-\nu_2(n!)}$. Observe that the polynomials $(u(x)-t)^2 - f(x)$ and $(u(x)+t)^2 - f(x)$ are of degree k, with leading coefficients $-2t$ and $2t$, respectively. This implies that there is a constant C (to be discussed later) such that for $|x| > C$ we have that either

$$(u(x)-t)^2 < f(x) < (u(x)+t)^2 \tag{5.11}$$

or

$$(u(x)+t)^2 < f(x) < (u(x)-t)^2 \tag{5.12}$$

is valid.

After some computations we find that $f(x)$ cannot be a square for $|x| > C$, or in other words, (5.2) has no solutions with $|x| > C$.

So we are left with the following tasks: find an appropriate C, and check the integer values of x with $2 < |x| \le C$. For this, we may assume that neither (5.11), nor (5.12) is valid.

Fix $F(x)$ in (5.10). Then, as we have pointed out earlier, $u(x)$ is also fixed. Think of $g(x)$ in (5.10) as an arbitrary, but fixed Littlewood polynomial of degree $k-1$. Put

$$h_1(x) = (u(x)-t)^2 - F(x) - g(x), \;\; h_2(x) = (u(x)+t)^2 - F(x) - g(x). \tag{5.13}$$

Then $h_1(x), h_2(x)$ are polynomials of degree k, with leading coefficients $-2t$ and $2t$, respectively. Since (5.11) is not valid, we have

$$h_1(x) \ge 0 \quad \text{or} \quad h_2(x) \le 0,$$

and as (5.12) is false,

$$h_1(x) \le 0 \quad \text{or} \quad h_2(x) \ge 0.$$

From these we can see that $|x| \le \max(C_1, C_2)$, where C_i is the maximum of the absolute values of the roots of $h_i(x)$ for $i = 1, 2$.

So we can take $C = \max(C_1, C_2)$. To get upper bounds for the values of C_1 and C_2, we use the following lemma.

Lemma 5.3.3. *Let $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ be a polynomial with complex coefficients, with $a_n \neq 0$. The absolute values of all the roots of this polynomial can be bounded from above by*

$$1 + \max\left\{ \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|, \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|, \ldots, \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \right\}.$$

After establishing C, the only remaining task is to check the integers x with $2 < |x| \le C$ whether they yield a solution to (5.2). For this, one may use Stoll's `ratpoints` code [61] to compute all "small" points on a hyperelliptic curve. We used the function `hyperellratpoints` the PARI [47] implementation of Stoll's code.

Bibliography

[1] A. Baker, *Bounds for the solutions of hyperelliptic equations*, Proc. Camb. Phil. Soc. **65** (1969), 439–444.

[2] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1975.

[3] P. Balister, B. Bollobás, R. Morris, J. Sahasrabudhe, M. Tiba, *Flat Littlewood polynomials exist*, Annals Math. **19** (2020), 977–1004.

[4] A. Bazsó, *Polynomial values of (alternating) power sums*, Acta Math. Hung. **146** (2015), 202–219.

[5] A. Bazsó, I. Pink, *Diophantine equations with Appell sequences*, Period. Math. Hung. **69** (2014), 222–230.

[6] M. A. Bennett, K. Győry, Á. Pintér, *On the Diophantine equation* $1^k+2^k+\cdots+x^k = y^n$, Compositio Math. **140** (2004), 1417–1431.

[7] M. A. Bennett, A. Levin, *The Nagell–Ljunggren equation via Runge's method*, Monatsh. Math. **177** (2015), 15–31.

[8] A. Bérczes, B. Brindza, L. Hajdu, On the power values of polynomials, Publ. Math. Debrecen **53** (1998), 375–381.

[9] F. Beukers, Sz. Tengely, *An implementation of Runge's method for Diophantine equations*, arXiv:math/0512418 [math.NT], 2005.

[10] Yu. Bilu, *Quadratic factors of* $f(x) = g(y)$, Acta Arith. **90** (1999), 341–355.

[11] Yu. Bilu, B. Brindza, P. Kirschenhofer, Á. Pintér, R. F. Tichy, *Diophantine equations and Bernoulli polynomials. With an appendix by A. Schinzel*, Compositio Math. **131** (2002), 173–188.

[12] Yu. Bilu, R. F. Tichy, *The Diophantine equation* $f(x) = g(y)$, Acta Arith. **95** (2000), 261–288.

[13] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), 235–265.

[14] B. Brindza, *On S-integral solutions of the equation $y^m = f(x)$*, Acta Math. Hungar. **44** (1984), 133–139.

[15] A.-L. Cauchy, *Exercices de mathématique*, Œuvres **2(9)** (1829), p.122.

[16] C. Chabauty, *Sur les points rationnels des courbes algébriques de genre supérieur à l'unité*, C. R. Acad. Sci. Paris **212** (1941), 882–885.

[17] M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of distances*, Springer, 2009

[18] A. Dubickas, J. Jankauskas, *On Newman polynomials which divide no Littlewood polynomial*, Math. Comp. **78** (2009), 327–344.

[19] P. Erdős, *On a Diophantine equation*, J. London Math. Soc. **26** (1951), 176–178.

[20] P. Erdős, J. L. Selfridge, *The product of consecutive integers is never a power*, Ill. J. Math. **19** (1975), 292–301.

[21] E. V. Flynn and N. P. Smart, *Canonical heights on the Jacobians of curves of genus 2 and the infinite descent*, Acta Arith. **79(4)** (1997), 333–352.

[22] M. Fujiwara, M. *Über die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung*, Tohoku Math. J. (first series) **10** (1916), 167–171.

[23] H. R. Gallegos-Ruiz, *Computing integral points on genus 2 curves estimating hyperelliptic logarithms*, Acta Arith. **187** (2019), 329–344.

[24] H. R. Gallegos-Ruiz, *Worked out example for my paper: Computing integral points on genus 2 curves estimating hyperelliptic logarithms*, http://personal.cimat.mx:8181/~hgallegos/programs/hyperlogs/WorkedExample.pdf.

[25] J. Gebel, A. Pethő, H. G. Zimmer, *Computing integral points on elliptic curves*, Acta Arith. **68** (1994), 171–192.

[26] K. Győry, *On the Diophantine equation $\binom{n}{k} = x^\ell$*, Acta Arith. **80** (1997), 289–295.

[27] K. Győry, L. Hajdu, Á. Pintér, *Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression*, Compositio Math. **145** (2009), 845–864.

[28] K. Győry, T. Kovács, Gy. Péter, Á. Pintér, *Equal values of standard counting polynomials*, Publ. Math. Debrecen **84** (2014), 259–277.

[29] K. Győry, Á. Pintér, *On the equation $1^k + 2^k + \cdots + x^k$*, Publ. Math. Debrecen **62** (2003), 403–414.

[30] K. Győry, R. Tijdeman, M. Voorhoeve, *On the equation $1^k + 2^k + \cdots + x^k = y^z$*, Acta Arith. **37** (1980), 233–240.

[31] L. Hajdu, *On a conjecture of Schäffer concerning the equation* $1^k + ... + x^k = y^n$, J. Number Theory **155** (2015), 129–138. Corrigendum: ibid **164** (2016) 429–432.

[32] L. Hajdu, O. Herendi, *Polynomial values of surface point counting polynomials*, Int. J. Number Theory **17/01** (2021), 15–32.

[33] L. Hajdu, O. Herendi, *Extrema of polynomials with real roots and diophantine equations*, J. Number Theory **242** (2023), 626–646.

[34] L. Hajdu, O. Herendi, Sz. Tengely, N. Varga, *Square values of Littlewood polynomials*, The Ramanujan Journal **65(3)** (2024), 1205–1226.

[35] L. Hajdu, Á. Papp, *Polynomial values of products of terms from an arithmetic progression*, Monatsh. Math. **193** (2020), 637–655.

[36] L. Hajdu, Á. Papp, R. Tijdeman, *The Prouhet-Tarry-Escott problem, indecomposability of polynomials and Diophantine equations*, Ramanujan J. **58** (2022), 1075–1093.

[37] L. Hajdu, R. Tijdeman, N. Varga, *Diophantine equations for Littlewood polynomials*, Acta Arith. **210** (2023), 223–234.

[38] L. Hajdu, N. Varga, *Polynomial values of figurate numbers*, J. Number Theory **214** (2020), 79–99.

[39] L. Hajdu, N. Varga, *Diophantine equations for polynomials with restricted coefficients, I (power values)*, Bull. Austral. Math. Soc. **106** (2022), 254–263.

[40] X. Han, A. Schied, *Step roots of Littlewood polynomials and the extrema of functions in the Takagi class*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **173** (2022), 591–618.

[41] K. G. Hare, J. Jankauskas, *On Newman and Littlewood polynomials with a prescribed number of zeros inside the unit disk*, Math. Comp. **90** (2021), 831–870.

[42] M. Kulkarni, B. Sury, *On the Diophantine equationv*$x(x+1)(x+2)\dots(x+(m-1)) = g(y)$, Indag. Math. (N.S.) **14** (2003), 35–44.

[43] K. Liptai, F. Luca, Á. Pintér, L. Szalay, *Generalized balancing numbers*, Indag. Math. (N.S.) **20** (2009), 87–100.

[44] W. Ljunggren, *Noen Setninger om ubestemte likninger av formen* $(x^n-1)/(x-1) = y^q$, Norsk. Mat. Tidsskr. **25** (1943), 17–20.

[45] D. Masser, *Auxiliary Polynomials in Number Theory*, Cambridge University Press, 2016.

[46] M. J. Mossinghoff, *Polynomials with Restricted Coefficients and Prescribed Noncyclotomic Factors*, LMS J. Comp. Math. **6** (2003), 314–325.

[47] The PARI Group, PARI/GP version `2.15.4`, Univ. Bordeaux, 2023, `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`.

[48] R. Peled, A. Sen, O. Zeitouni, *Double roots of random Littlewood polynomials*, Israel J. Math. **213** (2016), 55–77.

[49] Cs. Rakaczki, *On the Diophantine equation $S_m(x) = g(y)$*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), 439–460.

[50] C. Runge, *Über ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen*, J. reine angew. Math. **100** (1887), 425–435.

[51] SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.8), The Sage Developers, 2023, https://www.sagemath.org.

[52] A. Sankaranarayanan, N. Saradha, *Estimates for the solutions of certain Diophantine equations by Runge's method*, Int. J. Number Theory **4** (2008), 475–493.

[53] N. Saradha, T. N. Shorey, *Almost perfect powers in arithmetic progression*, Acta Arith. **99** (2001), 363–388.

[54] N. Saradha, T. N. Shorey, *Almost squares and factorizations in consecutive integers*, Compositio Math. **138** (2003), 113–124.

[55] J. J. Schäffer, *The equation $1^p + 2^p + \cdots + n^p = m^q$*, Acta Math. **95** (1956), 155–189.

[56] A. Schinzel, R. Tijdeman, *On the equation $y^m = P(x)$*, Acta Arith. **31** (1976), 199–204.

[57] T. N. Shorey and R. Tijdeman, *Exponential Diophantine equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[58] M. Stoll, *On the height constant for curves of genus two*, Acta Arith. **90** (1999), 183–201.

[59] M. Stoll, *Implementing 2-descent for Jacobians of hyperelliptic curves*, Acta Arith. **98** (2001), 245–277.

[60] M. Stoll, *On the height constant for curves of genus two. II*, Acta Arith. **104** (2002), 165–182.

[61] M. Stoll, *Documentation for the ratpoints program*, arXiv 0803.3165 (2022).

[62] R. J. Stroeker, N. Tzanakis, *Solving elliptic diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms*, Acta Arith. **67** (1994), 177–196.

[63] Sz. Tengely, *On the Diophantine equation $F(x) = G(y)$*, Acta Arith. **110** (2003), 185–200.

[64] Sz. Tengely, *Effective Methods for Diophantine Equations*, Ph.D. thesis, Leiden University, The Netherlands, 2005.

[65] R. Tijdeman, *Applications of the Gel'fond-Baker method to rational number theory*, Topics in Number Theory, Proceedings of the Conference at Debrecen 1974, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **13**, pp. 399–416, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[66] M. Voorhoeve, K. Győry, R. Tijdeman, *On the Diophantine equation* $1^k + 2^k + \cdots + x^k + R(x) = y^z$, Acta Math. **143** (1979), 1–8.

[67] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.

[68] O. Yakir, *Approximately half of the roots of a random Littlewood polynomial are inside the disk*, Studia Math. **261** (2021), 227–240.

[69] P. Z. Yuan, *On a special Diophantine equation* $a\binom{x}{n} = by^r + c$, Publ. Math. Debrecen **44** (1994), 137–143.

UNIVERSITY of DEBRECEN

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY
UNIVERSITY OF DEBRECEN
H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen
Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Registry number: DEENK/532/2025.PL
Subject: PhD Publication List

Candidate: Orsolya Szilágyi-Herendi
Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences
MTMT ID: 10078481

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in international journals (3)

1. Hajdu, L., **Szilágyi-Herendi, O.**, Tengely, S., Varga, N.: Square values of Littlewood polynomials.
   Ramanujan J. 65, 1205-1226, 2024. ISSN: 1382-4090.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s11139-024-00935-1
   IF: 0.7
2. Hajdu, L., **Szilágyi-Herendi, O.**: Extrema of polynomials with real roots and Diophantine equations.
   J. Number Theory. 242, 626-646, 2023. ISSN: 0022-314X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2022.05.004
   IF: 0.6
3. Hajdu, L., **Szilágyi-Herendi, O.**: Polynomial values of surface point counting polynomials.
   Int. J. Number Theory. 17 (01), 15-32, 2021. ISSN: 1793-0421.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S1793042121500020
   IF: 0.743

Total IF of journals (all publications): 2,043
Total IF of journals (publications related to the dissertation): 2,043

The Candidate's publication data submitted to the Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

25 September, 2025

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Végességi eredmények bizonyos polinomiális diofantikus egyenletcsaládokra

Szerző: Szilágyi-Herendi Orsolya
Témavezető: Dr. Hajdu Lajos

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi és Műszaki Tudományi Doktori Tanács
Matematika-és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2025.

1. fejezet

Bevezetés

A disszertációban különböző polinomiális diofantikus egyenleteket tanulmányozunk, ahol a vizsgált polinomok valamilyen specifikus, érdekes és/vagy fontos tulajdonsággal rendelkező családhoz tartoznak. A polinomiális Diofantikus egyenletek egy klasszikus részét képezik a Diofantikus számelméletnek, azonban jelenleg is komoly érdeklődés övezi a témakört. Klasszikus példa ilyen egyenletekre a Thue-egyenletek és az elliptikus, hiperelliptikus és szuperelliptikus egyenletek. A legfontosabb eredmények hátteréhez és áttekintéséhez Shorey és Tijdeman [57] könyvének kapcsolódó fejezeteit ajánljuk.

A következőkben a polinomiális Diofantikus egyenletek témakörének azon területeire fogunk fókuszálni, melyek kapcsolódnak jelenlegi kutatásainkhoz. Ebben a fejezetben röviden áttekintjük ezeket a témákat és tömören összefoglaljuk az eredményeinket és hátterüket. Az új eredmények és a vizsgált problémák precíz és részletes leírása a megfelelő fejezetekben történik.

Az első téma, amit tanulmányozunk, a következő: mit mondhatunk az egész pontok számáról bizonyos „érdekes” halmazokban (például egyes szabályos testekben)? Leginkább az n-dimenziós kockára, gúlára és szimplexre koncentrálunk. Ezeket a testeket vizsgálva azt kapjuk (lásd [17]), hogy a testekben lévő egész pontok száma rendre a

$$(x+1)^n, \quad S_{n-1}(x) := 1^{n-1} + \cdots + (x+1)^{n-1}, \quad \binom{x+n}{n} \tag{1.1}$$

polinomokkal írható le, ahol n a dimenzió és x a test méretét írja le. Sokan tanulmányozták már az

$$f(x) = g(y) \tag{1.2}$$

egyenletet, ahol $f(x)$ az (1.1) polinomcsaládok egyike, $g(y)$ pedig egész együtthatós polinom. A kapcsolódó irodalom alapos áttekintésére a disszertáció harmadik fejezetében kerül sor, most csak a legáltalánosabb eseteket említjük meg (azaz, amikor $g(y)$-ra nincs semmilyen további megkötésünk). Az (1.2) egyenlet $f(x) = (x+1)^n$-re hiperelliptikus egyenlet (lásd például Shorey és Tijdeman [57] könyvének kapcsolódó fejezeteit vagy Brindza [14] tételét, melyek a következő fejezetben is megtalálhatóak). Amikor $f(x) = S_{n-1}(x)$, az (1.2) egyenletet Rakaczki [49] tanulmányozta. Abban az esetben pedig, amikor $f(x) = \binom{x+n}{n}$, az (1.2) egyenletet Kulkarni and Sury [42] vizsgálta. Minden esetben (pár jól meghatározott kivételtől eltekintve) az (1.2) egyenletnek csak véges sok megoldása van. (A harmadik fejezetben a témát részletesebben is körüljárjuk.) Mi most ezeknek a testeknek nem a *belsejében* hanem a *felületén* található egész pontok megszámlálásának problémájával foglalkozunk. Az említett testeket vizsgálva azt kapjuk, hogy az egész pontok száma rendre az

$$(x+1)^n - (x-1)^n, \quad (x+1)^{n-1} + x^{n-1}, \quad \binom{x+n}{n} - \binom{x-1}{n}$$

polinomokkal írható le. Az (1.2) egyenletet olyan polinomokra vizsgáljuk, melyek a fenti polinomcsaládok valamelyikének a tagjai. Igazoljuk, hogy (pár, jól meghatározott kivételtől eltekintve) az (1.2) egyenletnek csak véges sok megoldása lehet x, y egészekre. Továbbá, ha $g(y)$ pedig $g(y) = Ay^\ell + B$ alakú, akkor $\max(\ell, |x|, |y|)$ is korlátozható egy konstanssal, mely csak az egyenletben szereplő paraméterektől függ.

A következő témánk kiindulópontja Erdős és Selfridge [20] egy klasszikus tétele: két vagy több egymást követő pozitív egész szám szorzata nem lehet teljes hatvány. Ennek a problémának több különböző kiterjesztése is ismert. Az egyik legfontosabb általánosítása a teljes hatványok meghatározása számtani sorozatok egymást követő tagjainak szorzatában. Számtalan cikk született a kérdés kutatása során (lásd például legfeljebb 34 tagú szorzatok esetére Győry, Hajdu és Pintér [27] cikkét és az ott szereplő hivatkozásokat) - azonban a probléma megoldatlan maradt. Értelemszerűen, a legtöbb kapcsolódó kutatásban kiemelt jelentőségű a probléma hátterét adó számtani sorozatok erős struktúrája. Érdekes lehet az a kérdés is, hogy mennyire lehet „megzavarni” ezt a struktúrát úgy, hogy hasonló végességi eredményeket kapjunk. Lásd pédául Hajdu, Papp és Tijdeman [36] egy friss cikkét, amiben az (1.2) egyenletet olyan f polinomokra vizsgálták, melyek gyökei egy számtani sorozat tagjai - azonban, ezek a gyökök nem feltétlen egymást követő tagok, a sorozat pár tagját elhagyják. (Az irodalomban több, ehhez hasonló eredmény található, lásd például a [36]-ban szereplő hivatkozásokat.) A disszertáció negyedik fejezetében egy másfajta, új irányból közelítetjük meg a problémát. Tesszük ezt úgy, hogy megtartjuk az $f(x)$ gyökeinek a szimmetriáját, de megengedünk tetszőlegesen nagy különbségeket közöttük. Pontosabban, azt igazoljuk, hogy ha $f(x)$ gyökei szimmetrikus, konvex halmazt alkotnak, akkor az (1.2) egyenletnek csak véges sok megoldása van x, y egészekben.

Végül, a disszertáció ötödik fejezetében a Littlewood polinomok, azaz a ± 1 együtthatójú polinomok négyzetértékeit vizsgáljuk. Valójában ez az (1.2) egyenletet vizsgálatát jelenti, ahol $f(x)$ egy Littlewood polinom és $g(y) = y^2$. A megoldások számának végessége szempontjából a Littlewood polinomok polinomértékeit Hajdu, Tijdeman és Varga [37] már tanulmányozták. Továbbá, a probléma a híres

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^\ell$$

Nagell-Ljunggren egyenlet egy általánosítása $\ell = 2$ esetben. A fenti egyenletet sok matematikus vizsgálta már. Ljunggren [44] egy klasszikus eredménye szerint $\ell = 2$ eseté n az egyedüli megoldás $(x, y, n) = (7, \pm 20, 4)$. Mi az egyenlet összes megoldásának leírására törekszünk. Különböző módszerek (például elliptikus görbék, hiperelliptikus görbék, Runge-módszer) kombinálásával sikerül megadnunk az összes megoldást abban az esetben, amikor $n = 3, 5$, illetve $2 \leq n \leq 24$ és n páros. Emellett, $n \leq 17$ és n páratlan esetén is hasznos információkat gyűjtöttünk össze. A vizsgálatok során nyert eredmények alapján több kérdést is megfogalmazunk, melyek további kutatások tárgyát képezhetik.

Eredményeink igazolása során, több mély módszer kombinálására van szükségünk. Többek között a Baker módszerre és Bilu és Tichy [12] híres tételére, amely az $f(x) = g(y)$ alakú egyenletek egész megoldásai számának végességét garantálja.

A disszertáció felépítése a következő. A második fejezetben összegyűjtjük a legfontosabb eszközeinket, melyeket több alkalommal is használni fogunk az elkövetkezőkben. Pontosabban, megadjuk Schinzel és Tijdeman [56] egy híres tételét, mely felső korlátot ad hatványok kitevőjére polinomok értékkészletében. Emellett megfogalmazzuk Brindza [14] egy klasszikus eredményét, amely felső korlátot ad szuperelliptikus egyenletek megoldásaira. Megjegyezzük, hogy mindkét eredmény a Baker-módszeren alapszik. Továbbá Bilu és Tichy [12] fent említett tételét is megadjuk. Az ezek után következő három fejezet pedig a kutatásaink eredményeit tartalmazza a fenti sorrendnek megfelelően.

2. fejezet

Módszerek és eszközök

Ebben a fejezetben bevezetünk néhány jelölést és megfogalmazunk pár lemmát. Ezeket a dolgozat során többször is alkalmazni fogjuk. A különböző diofantikus polinomegyenletek effektív és ineffektív végességi eredményeinek igazolása során ezek lesznek a legfontosabb eszközeink.

Legyen $T(x) \in \mathbb{Z}[x]$. A $T(x)$ polinom H magasságán az együtthatóinak abszolútértékének a maximumát értjük. Legyen A olyan egész, melyre $A \neq 0$, és tekintsük a

$$T(x) = Ay^m \tag{2.1}$$

egyenletet, ahol x, y, m ismeretlen egészek és $m \geq 2$. Továbbá, ha $|y| \leq 1$, akkor $m \leq 3$.

A következő állítás Schinzel és Tijdeman [56] eredménye (lásd továbbá Tijdeman [65]).

2.0.1. Lemma. *Ha a $T(x)$ polinomnak van legalább két különböző gyöke, akkor*

$$m < C_1(A, d, H)$$

teljesül (2.1) *minden megoldására. Itt $C_1(A, d, H)$ egy effektíve meghatározható konstans, ami csak $A-$tól, a $T(x)$ fokától, $d-$től és magasságától, $H-$tól függ.*

A második lemma Brindza [14] egy eredményének speciális esete, amely a Baker módszeren alapszik. Az állítás megfogalmazásához szükségünk van néhány további jelölésre. Legyen S prímszámok egy véges halmaza, és jelölje $\mathbb{Z}_S$ azon racionális számok halmazát, melyek nevezői kizárólag S-beli prímekkel oszthatók. Egy q racionális szám magassága alatt a q számlálója és nevezője abszolútértékének maximumát értjük, és azt $h(q)$-val jelöljük.

2.0.2. Lemma. *Legyen $T(x) \in \mathbb{Z}[x]$, és tekintsük $T(x)$ következő reprezentációját:*

$$T(x) = a \prod_{i=1}^{k} (x - \gamma_i)^{r_i},$$

ahol a a T főegyütthatója, és $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ a $T(x)$ különböző komplex gyökei, rendre $r_1, \ldots, r_k$ multiplicitással. Legyen továbbá $m \geq 2$ egész szám, és képezzük a

$$t_i = \frac{m}{(m, r_i)} \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

egészeket. Tegyük fel, hogy $(t_1, \ldots, t_k)$ a

$$(t, 1, \ldots, 1)\ (t \geq 1), \quad (2, 2, 1, \ldots, 1)$$

$k-$asok egyikének sem permutációja. Legyen S prímszámok egy véges halmaza. Ekkor a (2.1) *eggyenlet $x, y \in \mathbb{Z}_S$ megoldásaira*

$$\max(h(x), h(y)) < C_2(A, m, d, H, S)$$

teljesül, ahol $C_2(A, m, d, H, S)$ egy effektíve meghatározható konstans, ami csak az $A-$tól, $m-$től, a $T(x)$ fokszámától $d-$től, magasságától, $H-$tól és az S halmaztól függ.

A következő lemma Bilu és Tichy [12] egy mély eredménye. Megfogalmazásához szükségünk van néhány további fogalom bevezetésére.

Egy K test feletti $T(x)$ polinom *dekompozíciója* alatt egy $T(x) = U_1(U_2(x))$ felbontást értünk, ahol $U_1(x), U_2(x) \in K[x]$. A dekompozíció *nemtriviális,* ha $\deg U_1 > 1$ és $\deg U_2 > 1$. A $T(x)$ két $T(x) = U_1(U_2(x))$ és $T(x) = V_1(V_2(x))$ alakú dekompozíciója *ekvivalens,* ha létezik olyan $t(x) \in K[x]$ lineáris polinom mellyel $U_1(x) = V_1(t(x))$ és $V_2(x) = t(U_2(x))$ teljesül. Ha $T(x)$-nek van K felett legalább egy nemtriviális dekompozíciója, akkor *dekomponálhatónak* nevezzük; ellenkező esetben $T(x)$ *nem dekomponálható.*

Legyen $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, μ, ν, q pozitív egészek, r nemnegatív egész, és $v(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy nem azonosan nulla polinom. Jelölje $D_\mu(x, \delta)$ a μ-edik Dickson polinomot, vagyis

$$D_\mu(x, \delta) = \sum_{i=0}^{\lfloor \mu/2 \rfloor} d_{\mu,i} x^{\mu - 2i},$$

ahol

$$d_{\mu,i} = \frac{\mu}{\mu - i} \binom{\mu - i}{i} (-\delta)^i.$$

Az $F(x)$ és $G(x)$ polinomokra akkor mondjuk, hogy egyike az öt standard párnak $\mathbb{Q}$ felett, ha $(F(x), G(x))$ vagy $(G(x), F(x))$ a 2.1. táblázatban szerepel.

Típus	Standard pár	Paraméter tulajdonságok
Első	$(x^q, \alpha x^r v(x)^q)$	$0 \leq r < q, (r,q) = 1,$ $r + \deg v(x) > 0$
Második	$(x^2, (\alpha x^2 + \beta) v(x)^2)$	-
Harmadik	$(D_\mu(x, \alpha^\nu), D_\nu(x, \alpha^\mu))$	$(\mu, \nu) = 1$
Negyedik	$(\alpha^{\frac{-\mu}{2}} D_\mu(x, \alpha), -\beta^{\frac{-\nu}{2}} D_\nu(x, \beta))$	$(\mu, \nu) = 2$
Ötödik	$((\alpha x^2 - 1)^3, 3x^4 - 4x^3)$	-

2.1. táblázat. Standard párok

A következő lemma Bilu és Tichy [12] fő eredménye.

2.0.3. Lemma. *Legyenek $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ nemkonstans polinomok. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.*

i) Az

$$f(x) = g(y)$$

egyenletnek végtelen sok korlátos nevezőjű racionális megoldása létezik.

ii) Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok felírhatók $f(x) = \varphi(F(\lambda(x)))$ és $g(x) = \varphi(G(\kappa(x)))$ alakban, ahol $\lambda(x), \kappa(x) \in \mathbb{Q}[x]$ lineáris polinomok, $\varphi(x) \in \mathbb{Q}[x]$ és $(F(x), G(x))$ egy standard pár $\mathbb{Q}$ felett úgy, hogy az $F(x) = G(x)$ egyenletnek végtelen sok korlátos nevezőjű megoldása létezik.

3. fejezet

Rácspontszámláló polinomok polinomértékei

3.1. Bevezetés

Rácspontszámláló polinomok egyenlő értékeiről, illetve polinomértékeiről rengeteg cikk található az irodalomban.

Jelen fejezetben a szabályos testek közül az n-dimenziós kockával, piramissal, és szimplexszel foglalkozunk. Ismert [17], hogy ezekben az $\mathbb{R}^n$-beli testekben lévő rácspontok számát leíró polinomok (a testek szokásos elhelyezése esetén) rendre

$$(x+1)^n, \quad 1^{n-1}+2^{n-1}+\cdots+(x+1)^{n-1}, \quad \binom{x+n}{n} \tag{3.1}$$

alakúak.

A (3.1)-ben szereplő első polinom polinomértékeit, azaz az

$$(x+1)^n = g(y)$$

úgynevezett szuperelliptikus egyenletet már sokan tanulmányozták. (Itt g egy racionális együtthatós polinom, x, y pedig ismeretlen egészek.) Tijdeman [65] illetve Schinzel és Tijdeman [56] eredményeiből következik, hogy bizonyos szükséges feltételek mellett, n-re effektív felső korlát adható. Baker (lásd [1, 2]) és Brindza [14] megmutatták, hogy adott n-re, x, y abszolútértéke is felülről korlátozható. További kapcsolódó eredmények Shorey és Tijdeman [57] klasszikus könyvében találhatók.

A (3.1)-ben szereplő második polinomot az irodalomban $S_{n-1}(x+1)$ jelöli. Ezen polinom polinomértékeit is sokan vizsgálták. Rengeteg szép és mély eredmény született az

$$S_{n-1}(x+1) = g(y)$$

egyenlettel kapcsolatban, ahol g egy racionális együtthatós polinom, x, y pedig ismeretlen egészek. Abban a speciális esetben, amikor $g(y) = y^\ell$, Schäffer [55] klasszikus eredménye alapján tudjuk, hogy (néhány konkrétan meghatározott kivételtől eltekintve) a fenti egyenletnek adott n-re csak véges sok megoldása létezik. Abban az esetben, amikor $g(y)$ egy eltolt hatvány, vagy általánosabban, $g(y) = Ay^\ell + B$ alakú, ahol $A, B \in \mathbb{Q}$, $A \neq 0$, Győry, Tijdeman és Voorhoeve [30] adott egy mély végességi eredményt, ismét rögzített n esetén. Később ugyanezek a szerzők általánosabb végességi eredményt is igazoltak az $S_{n-1}(x+1)$ polinommal való eltoltjának hatványértékeivel kapcsolatban (lásd [66]). Az általános esettel Rakaczki [49] foglalkozott. Megmutatta, hogy a fenti egyenletnek, néhány jól meghatározott kivételtől eltekintve, csak véges sok megoldása létezik x, y egészekben. Az egyenlethez kapcsolódó további eredmények találhatóak például Bennett, Győry és Pintér [6], Győry és Pintér [29], Bazsó [4] és Hajdu [31] cikkeiben, és az azokban szereplő hivatkozásokban.

Végül, a (3.1)-ben szereplő harmadik polinom vizsgálata az

$$\binom{x+n}{n} = g(y)$$

egyenletet adja x, y egészekre, ahol g ismét egy racionális együtthatós polinom. Ez szintén egy nagyon nevezetes egyenlet: rengeteg kiváló matematikus járult hozzá az elméletéhez klasszikus, mély eredményekkel. Amikor $g(y) = y^\ell$, az egyenletet Erdős [19] ($n \geq 4$ esetén) és Győry [26] ($n = 2, 3$ esetén) teljesen megoldotta. Ha $g(y) = Ay^\ell + B$ alakú, ahol $A, B \in \mathbb{Q}$, $A \neq 0$, Yuan [69] adott x és y abszolútértékére effektív felső korlátot. Végül, a fenti egyenletre az általános esetben Kulkarni és Sury [42] egy ineffektív végességi tételt igazolt.

Az említetteken túl, még rengeteg más, a problémákkal kapcsolatos eredmény ismert. Az érdeklődő olvasó számára javasoljuk például Bilu, Brindza, Kirschenhofer, Pintér és Tichy [11] cikkét és Győry, Kovács, Péter és Pintér [28] összefoglaló cikkét, illetve az ott megadott hivatkozásokat.

Jelen fejezetben a fent említett testek felszínén található rácspontok számát leíró polinomokat vizsgáljuk. Ezek a polinomok a (3.1)-ben szereplő bizonyos polinomok különbségeként állíthatók elő. Nevezetesen, könnyen belátható, hogy az n-dimenziós kocka, piramis és szimplex felszínén elhelyezkedő rácspontok száma (tetszőleges $n \geq 1$ esetén) leírható az

$$\begin{aligned} F_n(x) &= (x+1)^n - (x-1)^n, \\ G_n(x) &= (x+1)^{n-1} + x^{n-1}, \\ H_n(x) &= \binom{x+n}{n} - \binom{x-1}{n}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

polinomokkal. Dolgozatunkban effektív és ineffektív végességi tételeket adunk az $F_n(x) = g(y)$, $G_n(x) = g(y)$ és $H_n(x) = g(y)$ egyenletek x, y egész megoldásaira, ahol g racionális együtthatós polinom. Az általános esetben eredményeink ineffektívek lesznek. Amikor viszont $g(y) = Ay^\ell + B$ alakú, effektív végességi eredményeket tudunk igazolni. Bizonyításaink többek között a Baker módszeren, valamint Bilu és Tichy [12] híres tételén alapulnak. Ezen eredmények alkalmazásához (amint azt látni fogjuk) elengedhetetlen az említett polinomok, illetve azok deriváltjai és eltoltjai gyökszerkezetének és dekompozíciós tulajdonságainak leírása. Megemlítjük, hogy ez a (3.2) különbségpolinomok esetén bizonyos esetekben nehezebb, mint a (3.1)-ben szereplő alappolinomok esetében. Hasonló jellegű vizsgálatok ismertek az irodalomban. Most csupán Liptai, Luca, Pintér és Szalay [43] cikkét említjük, akik az $S_k(x-1) = S_l(y-1) - S_l(x)$ egyenletet vizsgálták.

A fejezet a következőképpen épül fel. A következő alfejezetben ismertetjük az új eredményeinket. A 3.3 alfejezetben a (3.2) polinomok, a polinomok deriváltjainak és eltoltjainak gyökszerkezetét, és dekompozíciós tulajdonságait vizsgáljuk.

3.2. Új eredmények

Ebben a fejeztben a

$$W(x) = g(y) \tag{3.3}$$

egyenletet vizsgáljuk, ahol $W(x)$ az $F_n(x)$, $G_n(x)$, $H_n(x)$ $(n \geq 1)$ egyike a (3.2) polinomok közül, és $g(y) \in \mathbb{Q}[y]$. Célunk végességi tételeket igazolni a (3.3) egyenletnek x, y egész megoldásaira. Elsőként a vizsgált problémára vonatkozó általános eredményeinket mutatjuk be. Ezen eredmények ineffektívek, azaz csupán a megoldások számának végességét garantálják, magukra a megoldásokra nem adnak korlátot.

3.2.1. Tétel (L. Hajdu, O. Herendi [32])**.** *Legyen $n \geq 6$ és $\deg(g) \geq 2$. Ha a (3.3) egyenletnek végtelen sok megoldása van x, y egészekre, akkor vagy*

$$g(y) = W(P(y))$$

ahol $P(y) \in \mathbb{Q}[y]$, vagy

$$g(y) = \hat{W}(Q(y))$$

ahol $Q(y) \in \mathbb{Q}[y]-$nak legfeljebb két páratlan multiplicitású gyöke van, n páratlan, és ha $W(x) = F_n(x)$, $G_n(x)$, $H_n(x)$ akkor a $\hat{W}$ polinom pedig rendre φ_1, φ_2, φ_3, ahol

$$\varphi_1(x) = 2\binom{n}{1}x^{\frac{n-1}{2}} + 2\binom{n}{3}x^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + 2\binom{n}{n-2}x + 2,$$

$$\varphi_2(x) = 2x^{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2}\binom{n-1}{2}x^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-4}}\binom{n-1}{n-3}x + \frac{1}{2^{n-2}},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{2}{n!}(s_1 x^{\frac{n-1}{2}} + \cdots + s_n) \quad ahol\ s_j = \sum_{\substack{A \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |A|=j}} \prod_{a \in A} a \quad (j = 1, \ldots, n).$$

3.2.1. *Megjegyzés.* Értelemszerűen nem vizsgáljuk azokat a g polinomokat, amelyekre $\deg(g) = 1$, így a $\deg(g) \geq 2$ feltétel szükséges. A $n \geq 6$ megszorítás szintén szükséges, hiszen $n \leq 5$ esetén számos ellenpéldát találhatunk.

Abban az esetben, amikor $g(y) = Ay^\ell + B$ alakú, a (3.3) egyenlet x, y egész megoldásaira effektív felső korlátot tudunk adni.

3.2.2. Tétel (L. Hajdu, O. Herendi [32])**.** *Legyen $n \geq 1$, és tekintsük az*

$$W(x) = Ay^\ell + B \tag{3.4}$$

egyenletet, ahol $W(x)$ az $F_n(x), G_n(x), H_n(x)$ polinomok egyike a (3.2) egyenletek közül, A, B adott racionális számok, $A \neq 0$, x, y és $\ell \geq 2$ ismeretlen egészek.

i) Legyen $n \geq 4$. Ekkor létezik egy effektíve meghatározható $C_3(A, B, n)$ konstans, mely csak $A-$tól, $B-$től és $n-$től függ, amellyel

$$\ell < C_3(A, B, n)$$

teljesül (3.4) minden olyan x, y egész megoldására, ahol $|y| > 1$.

ii) Legyen $\ell \geq 2$ tetszőleges, rögzített. Ha $n \geq 8$, akkor létezik olyan, csak az A, B, n paraméterektől függő effektíve meghatározható $C_4(A, B, n)$ konstans, hogy

$$\max(|x|, |y|) \leq C_4(A, B, n)$$

teljesül a (3.4) egyenlet minden x, y egész megoldására.

3.2.2. *Megjegyzés.* Ebben az esetben is az $n-$re szabott feltételek szükségesek; egyéb $n-$ekre könnyedén találhatunk ellenpéldákat.

Ineffektív eredményeink igazolásában fontos szerepet kap az alábbi összefüggés, amely az $F_n(x), G_n(x), H_n(x)$ $(n \geq 2)$ polinomcsaládok dekomponálhatóságát írja le.

3.2.3. Tétel (L. Hajdu, O. Herendi [32])**.** *Legyen $n \geq 2$. Tekintsük az $F_n(x)$, $G_n(x)$, $H_n(x)$ $(n \geq 2)$ polinomokat. Páros n esetén ezek a polinomok nem dekomponálhatóak. Ha n páratlan, akkor minden dekompozíciójuk ekvivalens az alábbiakkal:*

$$F_n(x) = \varphi_1(x^2), \quad G_n(x) = \varphi_2\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right), \quad H_n(x) = \varphi_3(x^2).$$

Itt $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ugyanazokat a polinomokat jelöli, mint a 3.2.1 Tételben.

3.3. Gyökszerkezetek

Ebben az alfejezetbben a vizsgált polinomcsaládoknak, azok deriváltjainak és eltoltjainak a gyökszerkezetét írjuk le.

Megjegyezzük, hogy

$$\deg(F_n) = \deg(G_n) = \deg(H_n) = n - 1 \quad (n \geq 1).$$

3.3.1. Az $F_n(x)$ polinomcsalád

A következőkben az $F_n(x)$ polinomnak, a deriváltjának és az eltoltjának a gyökszerkezetét vizsgáljuk. Elöször $F_n(x)$ polinommal kezdjük.

3.3.1. Lemma. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor $F_n(x) = (x+1)^n - (x-1)^n$ minden gyöke különböző.*

Egyszerű következményként a következő állítás fogalmazható meg $F_n'(x)$−re.

3.3.1. Következmény. *Legyen $n \geq 3$. Ekkor $F_n'(x)$ polinom gyökei egyszeresek.*

A következő lemmában $F_n(x)$ eltoltjainak a gyökszerkezetét vizsgáljuk.

3.3.2. Lemma. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor bármely $r \in \mathbb{C}$ esetén az*

$$F_n(x) + r = (x+1)^n - (x-1)^n + r$$

polinomnak legfeljebb két többszörös gyöke lehet, és ezek legfeljebb kétszeresek.

A 3.2.3 Tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi lemmára.

3.3.3. Lemma. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor* $\max_{\lambda \in \mathbb{C}} \deg(\gcd(F_n(x) - \lambda, F_n'(x))) \leq 2$.

3.3.2. A $G_n(x)$ polinomcsalád

Most vizsgáljuk meg a $G_n(x)$ családot.

3.3.4. Lemma. *Bármely $n \geq 2$ esetén a $G_n(x) = (x+1)^{n-1} + x^{n-1}$ polinom minden gyöke különböző.*

Az előző állítás segítségével könnyen leírhatjuk $G_n'(x)$gyökszerkezetét.

3.3.2. Következmény. *Bármely $n \geq 3$ esetén a $G'_n(x)$ polinom gyökei egyszeresek.*

Most, a $G_n(x) + r$ ($r \in \mathbb{C}$) eltolt polinomok gyökszerkezetét vizsgáljuk.

3.3.5. Lemma. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor a $G_n(x) + r = (x+1)^{n-1} + x^{n-1} + r$ polinomnak bármely $r \in \mathbb{C}$ esetén legfeljebb két többszörös gyöke lehet, és ezek legfeljebb kétszeres gyökök.*

A 3.2.3 Tétel bizonyításához a következő lemmára is szükség lesz.

3.3.6. Lemma. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor* $\max_{\lambda \in \mathbb{C}} \deg(\gcd(G_n(x) - \lambda, G'_n(x))) \leq 2$.

3.3.3. A $H_n(x)$ polinomcsalád

Vizsgáljuk meg végül a $H_n(x)$ családot is.

3.3.7. Lemma. *Legyen $n \geq 2$. Ekkor a*

$$H_n(x) = \frac{1}{n!}\left((x+1)\dots(x+n) - (x-1)\dots(x-n)\right)$$

polinom minden gyöke egyszeres, továbbá minden gyökének valós része nulla.

A $H_n(x)$ polinomcsalád esetében a derivált gyökszerkezetének meghatározása a korábbinál lényegesen bonyolultabb.

3.3.8. Lemma. *Bármely $n \geq 3$ esetén $H'_n(x)$ gyökei egyszeresek.*

Most vizsgáljuk a $H_n(x) + r$ ($r \in \mathbb{C}$) eltolt polinomok gyökszerkezetét.

3.3.3. Következmény. *Bármely $n \geq 2$ és $r \in \mathbb{C}$ esetén $H_n(x)+r$ gyökeinek multiplicitása legfeljebb 2.*

A 3.2.3 Tétel bizonyításához szükségünk lesz még egy további lemmára is, amely a 3.3.3 és a 3.3.6 Lemmákhoz hasonló.

3.3.9. Lemma. *Legyen $n \geq 2$ és $\lambda \in \mathbb{C}$. Ekkor* $\max_{\lambda \in \mathbb{C}} \deg(H_n(x) - \lambda, H'_n(x)) \leq 2$.

4. fejezet

A valós gyökökkel rendelkező polinomok szélsőértékei és diofantoszi egyenletek

4.1. Bevezetés

Számos eredmény található a szakirodalomban olyan polinomok értékeire és (eltolt) hatványértékeire vonatkozóan, amelyeknek egymást követő egész gyökei vannak, vagy általánosabban, amelyeknek gyökei számtani sorozatot alkotnak. Megemlítjük Erdős és Selfridge [20] egy klasszikus eredményét, mely szerint egymást követő egészek szorzata sosem lehet teljes hatvány, Győry, Hajdu és Pintér [27] egy tételét, amely hasonló állítást fogalmaz meg legfeljebb 34 tagú számtani sorozatokra, és Kulkarni és Sury [42] egy cikkét, melyben végességi eredményeket igazolnak egymást követő egészek szorzatának polinomértékeire. Érdekes az a kérdés is, hogy mennyire lehet „megzavarni" a gyökök szerkezetét úgy, hogy a végességi eredmények igazak maradjanak. A tagok (gyökök) eltávolításával vagy hozzáadásával kapott polinomokról is sok eredmény született. Megemlítjük Saradha és Shorey [53, 54] eredményét, melyben egy tényező kihagyásával egymást követő egészek szorzatának hatvényértékeit vizsgálták. Továbbá Hajdu és Papp [35] és Hajdu, Papp és Tijdeman [36] cikkeit, ahol rendre egy vagy több tagot eltávolítottak egy számtani sorozatból, és a tagok szorzatának hatványértékeit és eltolt hatványértékeit vizsgálták. Megemlítjük még Hajdu és Varga [38] eredményét, akik nem eltávolítottak, hanem hozzáadtak egy tagot a sorozathoz. Az érdeklődő olvasónak javasoljuk még az említett cikkekben található hivatkozásokat is.

Ebben a fejezetben azt az esetet tanulmányozzuk, amikor a szimmetrikus gyökszerkezet (egy része) megmarad, de a gyökök távolsága egyre növekszik. Belátjuk, hogy a megoldások végessége ezen módon általánosított körülmények között is garantálható. Eredményeink tekinthetőek például a [42] cikkben szereplő végességi eredmények általánosítása-nak. (Erről részletesebben a 4.2.1 Megjegyzésben lesz szó.) Bizonyításaink során a Baker módszert és a Bilu-Tichy tételt használjuk, továbbá egy új eredményt, ami garantálja a bizonyos szimmetriával és növekvő gyöktávolsággal rendelkező polinomok szélsőértékeinek növekvő tulajdonságát. A fejezet felépítése a következő. A következő részben ismertetjük a fő eredményeinket, majd megadjuk a bizonyításokhoz szükséges lemmákat és segédállításokat.

4.2. Új eredmények

Egy valós $b_1, \ldots, b_k$ véges számsorozatot szimmetrikusnak nevezünk, ha létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, melyre $b_i + b_{k+1-i} = 2c$, ahol $i = 1, 2, \ldots, k$. Ekkor a $c-$t a a sorozat szimmetria középpontjának nevezzük. Egy szimmetrikus sorozatot centrálisan konvexnek nevezünk, ha $\ell = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ jelöléssel $b_\ell, b_{\ell+1}, \ldots, b_k$ konvex sorozatot alkot, azaz

$$b_i - b_{i-1} \leq b_{i+1} - b_i \quad (\ell < i < k) \tag{4.1}$$

teljesül.

Például, $-2, 0, 1, 2, 4$ centrálisan konvex szimmetrikus sorozat: $c = 1$ a szimmetria középpontja, és

$$2 - 1 \leq 4 - 2.$$

Páros elemszámú centrálisan konvex sorozat például a $-10, -2, 1, 4, 6, 9, 12, 20$: itt a $c = 5$ a szimmetria középpontja, és

$$6 - 4 \leq 9 - 6 \leq 12 - 9 \leq 20 - 12.$$

4.2.1. *Megjegyzés.* Eredményeink egyszeres valós gyökű polinomokra vonatkoznak, ahol a gyökök centrálisan konvex szimmetrikus sorozatot alkotnak. Pár észrevételt lényeges itt kiemelni. Elsőként azt, hogy bármely $h_1, \ldots, h_N$ számtani sorozat centrálisan konvex szimmetrikus sorozatot alkot. Valóban, a sorozat szimmetrikus a $c := (h_1 + h_N)/2$ pontra (hiszen $h_i + h_{N+1-i} = 2c$ teljesül minden $i-$re, ahol $i = 1, \ldots, N$), és mivel a tagok távolsága a középpont után nem-csökkenő (hiszen konstans), a (4.1) centrális konvexitás is teljesül rájuk. Így a lenti 4.2.1 Tételünk egy kiterjesztése a [42] fő eredményének. Valójában az eredményeink ennél lényegesen általánosabbak. Például, ahogy az könnyen ellenőrizhető a

$$-k^2, -(k-1)^2, \ldots, -4, -1, 0, 1, 4, \ldots, (k-1)^2, k^2$$

számok szintén centrálisan konvex sorozatot alkotnak, így a 4.2.1 és a 4.2.2 Tételekben szereplő eredményeink végességi állításokat igazolnak az

$$f(x) = x \prod_{j=1}^{k} (x - j^2)(x + j^2)$$

polinomokra is.

Először egy általános, ineffektív tételt fogalmazunk meg az $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ és a $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok közös egész értékeire, ahol $f(x)$ gyökei egyszeresek és centrálisan konvex szimmetrikus sorozatot alkotnak, $g(x)$ pedig tetszőleges racionális polinom.

4.2.1. Tétel (Hajdu L., Herendi O. [33])**.** *Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy olyan polinom, melynek gyökei egyszeresek, valósak és centrálisan konvex szimmetrikus sorozatot alkotnak, és* $\deg(f) > 6$. *Legyen $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy legalább másodfokú polinom. Ha az*

$$f(x) = g(y) \tag{4.2}$$

egyenletnek végtelen sok x, y egész megoldása van, akkor vagy

$$g(y) = f(P(y))$$

teljesül valamely legalább elsőfokú $P(y) \in \mathbb{Q}[y]$ polinomra, vagy $\deg(f) = 2k$ *páros és*

$$g(y) = \hat{f}(Q(y))$$

fennáll egy $Q(y) \in \mathbb{Q}[y]$ polinomra, melynek legfeljebb két páratlan multiplicitású gyöke van, és

$$\hat{f}(x) = b_0(x - (b_1 - c)^2) \cdots (x - (b_k - c)^2).$$

Itt b_0 az f főegyütthatója, b_i $(i = 1, \dots, 2k)$ az f gyökei növekvő sorrendben, és c pedig a szimmetria középpontjuk.

4.2.2. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy $\hat{f}(x) \in \mathbb{Q}[x]$. A tétel bizonyításában ennek igazolása is megtalálható.

Tekintsük a $g(x) = Ax^m + B$ polinomot rögzített $A, B \in \mathbb{Q}$ $(A \neq 0)$ számokra és $m \geq 2$ egész változóra. Ekkor a (4.2) egyenlet x, y egész megoldásainak abszolút értékére és $m-$re effektíve meghatározható felső korlátot tudunk adni. A $\mathbb{Q}[x]$ polinom magassága alatt az együtthatók számlálóinak és nevezőinek abszolútértékének a maximumát értjük.

4.2.2. Tétel (Hajdu L., Herendi O. [33])**.** *Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ egy olyan polinom, melynek gyökei valósak, különbözőek és centrálisan konvex szimmetrikus sorozatot alkotnak. Legyen* $\deg(f) > 6$. *Legyenek A, B adott racionális számok, $A > 0$ és tekintsük az*

$$f(x) = Ay^m + B \tag{4.3}$$

egyenletet x, y, m egészekben, ahol $m \geq 2$, és $m \leq 3$, ha $|y| \leq 1$. Ekkor létezik egy effektíve meghatározható $C_5(A, B, d, H)$ konstans, mely csak $A-$tól, $B-$től, az f polinom d fokszámától és a H magasságától függ és

$$\max(|x|, |y|, m) \leq C_5(A, B, d, H)$$

teljesül a (4.3) *egyenlet minden x, y, m egész megoldására.*

4.2.3. *Megjegyzés.* A 4.2.1 és a 4.2.2 Tételekben szereplő megszorítások szükségesek. A 4.2.1 Tételből egyértelműen ki kell zárnunk a $\deg(g) = 1$ esetet. Tekintsünk egy példát arra az esetre amikor $\deg(f) = 6$ és mind a (4.2) egyenlet és a (4.3) egyenlet végtelen sok megoldással rendelkezik. Legyen

$$f(x) = (x+8)(x+4)(x+1)(x-1)(x-4)(x-8)$$

és

$$g(y) = Ay^m + B = 29y^2 + 3136.$$

(Vegyük észre, hogy a $-8, -4, -1, 1, 4, 8$ gyökök centrálisan konvex szimmetrikus sorozatot alkotnak.) Ekkor a (4.2) és a (4.3) egyenlet is felírható

$$(x^2-65)(x^2-8)^2 = 29y^2.$$

alakban.

Mivel az

$$u^2 - 29v^2 = 65$$

általánosított Pell-egyenletnek végtelen sok megoldása van u, v egészekre (a „legkisebb” az $(u, v) = (23, 4)$), így a (4.2) és a (4.3) egyenleteknek is végtelen sok megoldása van x, y egészekre. Megemlítjük, hogy a $\deg(f) > 6$ feltétel csak az $m = 2$ esetben szükséges. Abban az esetben, amikor $m \geq 3$, a $\deg(f) > 2$ megkötés elégséges. Ez a 4.2.2 Tétel bizonyításából könnyen látható.

Megjegyezzük azt is, hogy nem feltétlenül szükséges az a megszorítás, hogy f−nek különböző valós gyökei legyenek. Lásd például a Dickson polinomokra vonatkozó azonosságokat [12]-ben. Ekkor a gyökökre egyéb megszorításokat kell tennünk.

A 4.2.1 Tétel bizonyításában fontos szerepet játszik a következő eredmény. Ez teljes leírást ad azoknak a $\mathbb{Q}$ feletti polinomoknak a dekompozíciójára, melyek gyökei egyszeresek és centrálisan konvex szimmetrikus sorozatot alkotnak.

4.2.3. Tétel (Hajdu L., Herendi O. [33]). *Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ olyan polinom, melynek a gyökei valósak, egyszeresek és centrálisan konvex szimmetrikus sorozatot alkotnak. Ha* $\deg(f)$ *páratlan, vagy* $\deg(f) = 2$*, akkor f nem dekomponálható $\mathbb{Q}$ felett. Ha* $\deg(f) \geq 4$ *páros, akkor f dekomponálható $\mathbb{Q}$ felett, és f minden Q feletti dekompozíciója ekvivalens az*

$$f(x) = b_0((x-c)^2 - (b_1-c)^2)\dots((x-c)^2 - (b_k-c)^2),$$

dekompozícióval, ahol b_0 az f főegyütthatója, $b_1, \dots, b_{2k}$ pedig f gyökei növekvő sorrendben, és c a szimmetria középpontjuk.

4.2.4. *Megjegyzés.* A 4.2.1 Tételben alkalmazott jelölésekkel, a fenti dekompozíció felírható

$$f(x) = \hat{f}((x-c)^2).$$

alakban is. Azaz ($\deg(f) \geq 4$ páros esetben) ez a dekompozíció valóban $\mathbb{Q}$ feletti.

Végül, megfogalmazunk egy olyan tételt, mely az egyszeres, valós, centrálisan szimmetrikus sorozatot alkotó gyökökkel rendelkező polinomok szélsőértékeinek bizonyos tulajdonságait írja le. Ez az eredmény kulcsfontosságú a tételeink bizonyításában. Emellett önmagában is érdekes lehet.

4.2.4. Tétel (Hajdu L., Herendi O. [33]). *Legyen $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ egy olyan polinom, melynek gyökei egyszeresek, valósak és centrálisan konvex szimmetrikus sorozatot alkotnak. Ekkor f szélsőértékei - a gyökök szimmetria középpontjából kiindulva - abszolútértékben szigorúan növekvőek.*

4.2.5. *Megjegyzés.* Az állításból se a centrális konvexitás, se a szimmetria tuljadonság sem hagyható el. Ezt két példával fogjuk szemléltetni.

Legyen először

$$f(x) = (x+3)(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3).$$

Látható, hogy a gyökök szimmetrikus sorozatot alkotnak (a szimmetria középpontja 0), és a tagok távolságára csak egyszer nem teljesül a „centrális konvex egyenlőtlenség" (mégpedig az $1-(-1) \le 2-1$ nem teljesül). A Maple segítségével egyszerű számítással kapjuk, hogy az $f'(x)$ gyökei

$$-\sqrt{7}, \quad -\sqrt{\frac{7}{3}}, \quad 0, \quad \sqrt{\frac{7}{3}}, \quad \sqrt{7},$$

és $f(x)$ szélsőértékei pedig rendre

$$-36, \quad \frac{400}{27}, \quad -36, \quad \frac{400}{27}, \quad -36.$$

Látható, hogy ebben az esetben nem teljesül a szélsőértékek abszolútértékére vonatkozó (a szimmetria középponttól távolodó) szigorú növekedés.

Legyen most

$$f(x) = (x+9)(x+6)(x+3)x(x-1)(x-2)(x-3).$$

Itt a gyökök kielégítik a „növekvő távolság tulajdonságát", mind a pozitív, mind a negatív irányba távolodva a középső gyöktől (ami most 0). (Mivel itt a szimmetria tulajdonságot elhagytuk, nem hivatkozhatunk a „szimmetria középpontjára".) A Maple segítségével egy egyszerű számolással kapjuk, hogy az f szélsőértéke a 0 és 1 gyökök között abszolútértékben nagyobb, mint az 1 és 2 közötti szélsőérték. (Mivel ezek a számok nem racionálisok és nem adhatóak meg egyszerűen, a részletektől most eltekintünk.) Azaz a szélsőértékekre vonatkozó szigorú növekvő tulajdonság ebben az esetben sem teljesül.

4.3. A 4.2.4 Tétel bizonyításához használt eszközök

Ahogy azt látni fogjuk, a 4.2.4 Tétel egyszerű következménye a következő két állításnak. Ezek nagyon hasonlóak, de technikai okok miatt megéri őket külön megfogalmazni.

4.3.1. Állítás. *Legyenek* $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ *valós számok, melyekre*

$$a_i - a_{i-1} \le a_{i+1} - a_i \quad (1 \le i \le n-1) \tag{4.4}$$

teljesül, és legyen

$$f_1(x) = x \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)(x + a_i).$$

Legyen α_i *az* f_1 *polinom* a_i *és* a_{i+1} *közötti szélsőértéke, ahol* $i = 0, \ldots, n-1$*. Ekkor*

$$|f_1(\alpha_0)| < |f_1(\alpha_1)| < \cdots < |f_1(\alpha_{n-1})|.$$

4.3.2. Állítás. *Legyenek* $0 < a_1 < \cdots < a_n$ *valós számok, melyekre*

$$3a_1 \le a_2 \quad \text{és} \quad a_i - a_{i-1} \le a_{i+1} - a_i \quad (2 \le i \le n-1) \tag{4.5}$$

teljesül, és legyen

$$f_2(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)(x + a_i).$$

Legyen α_i *az* f_2 *polinom* a_i *és* a_{i+1} *közötti szélsőértéke, ahol* $i = 1, \ldots, n-1$*. Ekkor*

$$|f_2(0)| < |f_2(\alpha_1)| < \cdots < |f_2(\alpha_{n-1})|.$$

4.3.1. *Megjegyzés.* Megjegyezzük, hogy a Rolle tétel szerint f_1 és f_2 szélsőértékei rendre a 4.3.1 és 4.3.2 Állításokban leírt módon helyezkednek el, azaz a gyökök között.

A 4.3.1 és a 4.3.2 Állítások igazolásához szükségünk lesz pár további lemmára. Az első a

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{1 + \frac{z}{n}} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\le 0})$$

módon definiált Γ függvény speciális tulajdonságait írja le. (Itt $\mathbb{Z}_{\le 0}$ a nem-poztitív egészek halmazát jelöli.) Megjegyezzük, hogy a $\Gamma(z)$ függvény többféleképpen is definiálható. A fenti alak az úgynevezett Euler-formula.

4.3.1. Lemma. *A* Γ *függvényre az alábbi állítások igazak.*

i) Bármely $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\le 0}$ *számra*

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

teljesül.

ii) Bármely $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ *számra*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

teljesül.

iii) Bármely $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ *számokra, melyekre* $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$ *fennáll,*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{(k+u_1)(k+u_2)}{(k+v_1)(k+v_2)} = \frac{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)}{\Gamma(u_1)\Gamma(u_2)}$$

teljesül.

A 4.3.1 Állítás bizonyításához, szükség lesz az alábbi lemmára.

4.3.2. Lemma. *Legyenek* $0 < a_1 < \cdots < a_n$ *valós számok, melyekre*

$$a_i - a_{i-1} \leq a_{i+1} - a_i \quad (2 \leq i \leq n-1)$$

teljesül. Ekkor minden i_1, i_2-*re, ahol* $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$, *az*

$$\frac{a_{i_2}}{a_{i_1}} \geq \frac{i_2}{i_1}$$

egyenlőtlenség teljesül.

A 4.3.2 Állítás igazolásához a 4.3.2 Lemma következő módosítására lesz szükségünk.

4.3.3. Lemma. *Legyenek* $0 < a_1 < \cdots < a_n$ *valós számok, melyekre*

$$3a_1 \leq a_2$$

és

$$a_i - a_{i-1} \leq a_{i+1} - a_i \quad (2 \leq i \leq n-1)$$

teljesül. Ekkor minden i_1, i_2-*re ahol* $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n$, *az*

$$\frac{a_{i_2}}{a_{i_1}} \geq \frac{2i_2 - 1}{2i_1 - 1}$$

egyenlőtlenség teljesül.

5. fejezet

Littlewood polinomok négyzetértékei

5.1. Bevezetés

A Littlewood polinomok, azaz a ± 1 együtthatókkal rendelkező polinomok, kiterjedt szakirodalmmal rendelkeznek. A gyökeik halmaza, azaz az

$$\mathcal{L} = \{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha \text{ egy Littlewood polinom gyöke}\}$$

halmaz, rengeteg érdekes tulajdonsággal rendelkezik, és sokak figyelmét felkeltette. Csak néhány újabb kapcsolódó tanulmányt említünk meg, és javasoljuk az érdeklődő olvasónak, hogy tanulmányozza ezeket és az ezekben található hivatkozásokat. Peled, Sen és Zeitouni [48] tetszőleges Littlewood polinomok kétszeres gyökeit tanulmányozták. Balister, Bollobás, Morris, Sahasrabudhe és Tiba [3] a közelmúltban igazolták, hogy minden $n \geq 2$ fokszámra léteznek úgynevezett lapos Littlewood polinomok, mellyel megoldották Littlewood egy régi sejtését.

Többek között Han és Schied [40] az úgynevezett „lépcsős" gyökeit és alkalmazásaikat vizsgálták ezeknek a polinomoknak. Hare és Jankauskas [41] és Yakir [68] a Littlewood polinomok egységkörön belül elhelyezkedő gyökeit vizsgálták. Mindezek mellett a Littlewood polinomok bizonyos oszthatósági tulajdonságait is érdeklődés övezi; lásd például Dubickas és Jankauskas cikkét [18], ahol azt a problémát tanulmányozták, hogy a Littlewood polinomok sosem oszthatóak Newman polinomokkal, vagy Mossinghoff [46] cikkét Littlewood polinomok előírt ciklotomikus tényezőiről. A közelmúltban a Littlewood polinomok diofantikus tulajdonságait is kutatták. Hajdu és Varga [39] és Hajdu, Tijdeman és Varga [37] végességi eredményeket igazoltak ezen polinomok polinomértékeire, hatványértékeire és eltoltjaik hatványértékeire. Lényeges megemlíteni, hogy a híres

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^\ell \tag{5.1}$$

Nagell-Ljunggren egyenlet x, y, n, ℓ egészekben, ahol $|x| > 1$, $|y| > 1$, $n > 2$, $\ell \geq 2$ egy fontos, speciális esete ennek a problémának, melyet szintén több matematikus is tanulmányozott. Valóban, az (5.1) baloldalán szereplő polinom egy Littlewood polinom, melynek minden együtthatója 1. Az (5.1) egyenletnek hatalmas a szakirodalma. Most csak Ljunggren [44] klasszikus eredményét említjük, mely szerint az (5.1) egyenletnek $\ell = 2$−re az egyetlen megoldása $(x, y, n) = (7, \pm 20, 4)$. Mivel mi a Littlewood polinomok négyzetértékeivel foglalkozunk, ez az eredmény kifejezetten érdekes számunkra. Már most megemlítjük, hogy az új eredményeink alapján a megoldáshalmaz meglehetősen korlátozott az általános Littlewood polinomok esetében is. A Nagell-Ljunggren egyenlethez kapcsolódó további eredményekért és vizsgálatokért az érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk Shorey és Tijdeman [57] könyvét, Bennett és Levin [7] új cikkét és a bennük található hivatkozásokat.

Ebben a fejezetben megadjuk a $n = 3, 5$ és páros $n \leq 24$ fokszámú Littlewood polinomok minden négyzetértékét. Ehhez több különböző eszközt is használunk, köztük az elliptikus- és magasabb génuszú görbéket, a Chabauty-módszert és a Runge-módszert. Ahhoz, hogy a magasabb fokszámú ($n \geq 14$) eseteket is kezelni tudjuk, mivel itt már nagyon sok polinomot kell vizsgálnunk, alapos megfontolásra és óvatos megközelítésre van szükségünk. Emellett számítási eredményeket is összegyűjtünk (melyek bizonyos korlát mellett leírják az összes megoldást) az $n \leq 17$ páratlan esetekben. Az eredményeink alapján megfogalmazunk pár érdekes problémát is, melyek további kutatások alapját adhatják.

5.2. A fő éredmény

A fő tételünk a következő.

5.2.1. Tétel (Hajdu L., Herendi O., Tengely Sz., Varga N. [34]). *Legyen $f(x)$ egy n−ed fokú Littlewood polinom, ahol $n = 3, 5$ vagy $2 \leq n \leq 24$, páros. Ekkor az*

$$f(x) = y^2 \tag{5.2}$$

egyenlet minden x, y megoldása, ahol $|x| > 2$ és $y \geq 0$, az 5.1 és az 5.2 táblázatban található.

$f(x)$	(x, y)
$\pm x^3 + x^2 \pm x - 1$	$(\pm(t^2 + 1), t(t^2 + 2))$ $(t \in \mathbb{Z}_{>1})$
$\pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm(t^2 - 1), t(t^2 - 2))$ $(t \in \mathbb{Z}_{>1})$
$\pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 7, 20)$
$\pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x - 1$	$(\pm(t^2 + 1), t(t^4 + 3t^2 + 3))$ $(t \in \mathbb{Z}_{>1})$
$\pm x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm(t^2 - 1), t(t^4 - 3t^2 + 3))$ $(t \in \mathbb{Z}_{>1})$

5.1. táblázat: Az (5.2) egyenlet minden megoldása $n = 3, 5$ esetben, ahol $|x| > 2$ és $y \geq 0$. A $\pm$ és a $\mp$ jelek minden sorban egyszerre változnak.

$f(x)$	(x,y)
$x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 7)$
$x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x - 1$	$(\pm 5, 27)$
$x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x - 1$	$(\mp 5, 23)$
$x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 11)$
$x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 9, 683)$
$x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 7, 363)$
$x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 23)$
$x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 553)$
$x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 821)$
$x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 655)$
$x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 1661)$
$x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 2437)$
$x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 1597)$
$x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 1955)$
$x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 1859)$
$x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 1901)$
$x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 5011)$
$x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 7087)$
$x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 7121)$
$x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 5117)$
$x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 5089)$
$x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 5, 422409)$
$x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 8005)$
$x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 5713)$
$x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 8033)$
$x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 21263)$
$x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 14927)$
$x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 15383)$
$x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 15235)$
$x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 14083)$
$x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 16859)$
$x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 17053)$
$x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 44851)$
$x^{20} \pm x^19 - x^{18} \mp x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 46159)$
$x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 66649)$
$x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \mp x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 53903)$
$x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 51449)$
$x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 51169)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} - x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\mp 3, 134699)$

$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^{9} + x^{8} \pm x^{7} - x^{6} \pm x^{5} + x^{4} \pm x^{3} - x^{2} \mp x + 1$	$(\mp 3, 138031)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \mp x^{9} - x^{8} \mp x^{7} + x^{6} \mp x^{5} + x^{4} \pm x^{3} - x^{2} \mp x + 1$	$(\mp 3, 138017)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \pm x^{9} - x^{8} \mp x^{7} + x^{6} \mp x^{5} + x^{4} \pm x^{3} - x^{2} \mp x + 1$	$(\mp 3, 137545)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \mp x^{9} + x^{8} \pm x^{7} - x^{6} \pm x^{5} + x^{4} \pm x^{3} - x^{2} \mp x + 1$	$(\mp 3, 137531)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \pm x^{9} - x^{8} \mp x^{7} - x^{6} \pm x^{5} - x^{4} \mp x^{3} + x^{2} \pm x + 1$	$(\mp 3, 125645)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \mp x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^{9} + x^{8} \pm x^{7} - x^{6} \pm x^{5} - x^{4} \pm x^{3} + x^{2} \pm x + 1$	$(\pm 3, 199595)$
$x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^{9} + x^{8} \mp x^{7} - x^{6} \pm x^{5} + x^{4} \pm x^{3} + x^{2} \pm x + 1$	$(\pm 3, 200221)$
$x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \mp x^{19} - x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^{9} + x^{8} \mp x^{7} - x^{6} \pm x^{5} - x^{4} \pm x^{3} - x^{2} \pm x + 1$	$(\pm 3, 208771)$
$x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \mp x^{9} - x^{8} \pm x^{7} - x^{6} \mp x^{5} + x^{4} \mp x^{3} - x^{2} \pm x + 1$	$(\mp 3, 150583)$
$x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^{9} - x^{8} \mp x^{7} + x^{6} \pm x^{5} + x^{4} \pm x^{3} - x^{2} \pm x + 1$	$(\mp 3, 153113)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \mp x^{21} - x^{20} \mp x^{19} - x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^{9} - x^{8} \pm x^{7} - x^{6} \mp x^{5} + x^{4} \pm x^{3} + x^{2} \mp x + 1$	$(\pm 3, 574033)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \mp x^{21} + x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \pm x^{9} - x^{8} \mp x^{7} + x^{6} \mp x^{5} - x^{4} \mp x^{3} - x^{2} \pm x + 1$	$(\pm 3, 582397)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \mp x^{21} + x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^{9} - x^{8} \pm x^{7} - x^{6} \mp x^{5} + x^{4} \pm x^{3} + x^{2} \mp x + 1$	$(\mp 3, 412495)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^{9} - x^{8} \mp x^{7} - x^{6} \mp x^{5} - x^{4} \pm x^{3} - x^{2} \pm x + 1$	$(\pm 3, 592643)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^{9} + x^{8} \mp x^{7} + x^{6} \pm x^{5} + x^{4} \mp x^{3} - x^{2} \pm x + 1$	$(\pm 3, 592913)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^{9} + x^{8} \mp x^{7} + x^{6} \pm x^{5} + x^{4} \mp x^{3} + x^{2} \pm x + 1$	$(\mp 3, 385331)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \mp x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^{9} - x^{8} \mp x^{7} + x^{6} \mp x^{5} - x^{4} \mp x^{3} + x^{2} \mp x + 1$	$(\pm 3, 600493)$
$x^{24} \pm x^{23} - x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^{9} - x^{8} \mp x^{7} + x^{6} \pm x^{5} + x^{4} \mp x^{3} - x^{2} \mp x + 1$	$(\mp 3, 385999)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \mp x^{21} - x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \mp x^{9} - x^{8} \mp x^{7} + x^{6} \mp x^{5} + x^{4} \mp x^{3} + x^{2} \mp x + 1$	$(\mp 3, 474325)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \mp x^{21} + x^{20} \mp x^{19} - x^{18} \mp x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^{9} + x^{8} \pm x^{7} - x^{6} \mp x^{5} - x^{4} \mp x^{3} - x^{2} \mp x + 1$	$(\mp 3, 484333)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \mp x^{21} + x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^{9} - x^{8} \pm x^{7} + x^{6} \pm x^{5} - x^{4} \pm x^{3} - x^{2} \pm x + 1$	$(\pm 3, 632495)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} - x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \mp x^{9} + x^{8} \pm x^{7} + x^{6} \pm x^{5} - x^{4} \pm x^{3} - x^{2} \mp x + 1$	$(\mp 3, 454241)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \mp x^{19} + x^{18} \mp x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^{9} + x^{8} \mp x^{7} - x^{6} \mp x^{5} + x^{4} \mp x^{3} + x^{2} \pm x + 1$	$(\mp 3, 455449)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \pm x^{21} - x^{20} \pm x^{19} - x^{18} \pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^{9} - x^{8} \mp x^{7} - x^{6} \mp x^{5} + x^{4} \mp x^{3} + x^{2} \mp x + 1$	$(\pm 3, 644801)$

$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \mp x^{17} - x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 650615)$
$x^{24} \pm x^{23} + x^{22} \pm x^{21} + x^{20} \pm x^{19} + x^{18} \pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\mp 3, 460231)$

5.2. táblázat: Az (5.2) egyenlet megoldásai páros $2 \leq n \leq 24$ esetén, ahol $|x| > 2$ és $y \geq 0$. A $\pm$ és a $\mp$ jelek minden sorban egyszerre változnak.

A teljesség érdekében, és hogy a páratlan kitevők esetére is több, numerikus eredményt tudjunk adni, egy hasonló állítást fogalmazunk meg páratlan $n-$re is. Megyjegyezzük, hogy ebben az esetben nem tudtuk az (5.2) egyenlet minden megoldását megtalálni. Itt a célunk, hogy a számítások segítségével teljesebb képet alkossunk a megoldásokról.

5.2.1. Állítás. *Legyen $f(x)$ egy $n-$ed fokú Littlewood polinom, ahol $7 \leq n \leq 17$ páratlan. Továbbá tegyük fel, hogy $f(x)$ nem tartozik az alábbi polinomcsaládok egyikébe sem:*

$$\pm(x^{2k+1} + \ldots + x^{k+1} - x^k - \ldots - 1) = \pm(x-1)(x^k + \cdots + x + 1)^2, \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}\pm\,(x^{2k+1} - x^{2k} + \ldots + (-1)^{k+2}x^{k+1} + (-1)^k x^k + \cdots + 1) = \\ = \pm(x+1)(x^k - x^{k-1} + \cdots + (-1)^k)^2,\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\pm\,(x^{4k+3} + x^{4k+2} - x^{4k+1} - x^{4k} + \ldots + (-1)^k x^{2k+3} + (-1)^k x^{2k+2} \\ + (-1)^k x^{2k+1} + (-1)^k x^{2k} + \ldots + x + 1) = \\ = \pm(x+1)(x^2+1)(x^{2k} - x^{2k-2} + \ldots + (-1)^k)^2,\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}\pm\,(x^{4k+3} - x^{4k+2} - x^{4k+1} + x^{4k} + \ldots + (-1)^k x^{2k+3} - (-1)^k x^{2k+2} \\ + (-1)^k x^{2k+1} - (-1)^k x^{2k} + \ldots + x - 1) = \\ = \pm(x-1)(x^2+1)(x^{2k} - x^{2k-2} + \ldots + (-1)^k)^2.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Ekkor az (5.2) egyenlet minden x, y megoldása, ahol x, y egészek, és $100 \geq |x| > 2$ és $y \geq 0$, az 5.3 táblázatban található.

$f(x)$	(x,y)
$\pm x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 34)$
$\pm x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 128)$
$\pm x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 158)$
$\pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 166)$
$\pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 320)$
$\pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 328)$
$\pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 358)$
$\pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 382)$
$\pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 986)$
$\pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 1076)$
$\pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 + x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 1100)$
$\pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 1366)$
$\pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 1532)$
$\pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 3226)$
$\pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 3274)$
$\pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 3298)$
$\pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 3388)$
$\pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 8296)$
$\pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \mp x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 8674)$
$\pm x^{17} - x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 8876)$
$\pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \mp x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 9824)$
$\pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 + x^8 \mp x^7 + x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 9848)$
$\pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \pm x^{13} + x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \pm x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 9896)$
$\pm x^{17} - x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \pm x^9 - x^8 \mp x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 10166)$
$\pm x^{17} + x^{16} \mp x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \mp x^7 - x^6 \pm x^5 + x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 12802)$
$\pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \pm x^9 + x^8 \pm x^7 + x^6 \pm x^5 - x^4 \mp x^3 + x^2 \pm x + 1$	$(\pm 3, 13408)$
$\pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} - x^{14} \mp x^{13} + x^{12} \pm x^{11} + x^{10} \mp x^9 - x^8 \pm x^7 + x^6 \mp x^5 - x^4 \pm x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 13450)$
$\pm x^{17} + x^{16} \pm x^{15} + x^{14} \pm x^{13} - x^{12} \pm x^{11} - x^{10} \mp x^9 + x^8 \pm x^7 - x^6 \mp x^5 + x^4 \mp x^3 - x^2 \mp x + 1$	$(\pm 3, 13874)$

5.3. táblázat: Az (5.2) (kivéve mikor $f(x)$ az (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) polinomok egyike) egyenlet megoldásai, ahol $100 \geq |x| > 2$ és $y \geq 0$ a $7 \leq n \leq 17$ páratlan esetre. A $\pm$ és a $\mp$ jelek minden sorban egyszerre változnak.

Megyjegezzük, hogy amikor az $f(x)$ polinom (5.3) vagy (5.4) alakú, triviális, hogy az (5.2) egyenletnek végtelen sok megoldása van. Továbbá, a Magma [13] `IntegralPoints` parancsának használatával azt kapjuk, hogy az

$$\pm(x+1)(x^2+1) = y^2 \quad \text{és} \quad \pm(x-1)(x^2+1) = y^2$$

egyenletek megoldásai az $(x,y) = (0,\pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 7, \pm 20)$ számpárok. Így, ha az $f(x)$ polinom (5.5) vagy (5.6) alakú, akkor az (5.2) egyenletnek $x = \pm 7$ (rendre $+$ és $-$ előjelekkel a baloldalon) megoldása minden n−re, ahol $n \equiv 3 \pmod 4$.

Megjegyzés. Az $|x| \leq 2$ eseteket kizárhatjuk, annak ellenére, hogy nem adunk felső korlátot n−re. (Megjegyezzük, hogy a rögzített fokszámú Littlewood polinomok négyzetértékei minden $x-$re, ahol $|x| \leq 2$ könnyedén felsorolhatóak.) Az $x = 0$ eset triviális, és $x = \pm 1$ esetek is egyszerűek. Az $x = \pm 2$ esetek viszont kicsit több figyelmet érdemelnek. Amennyiben $f(x)$ egy Littlewood polinom, $f(-x)$ is az. Így, ha a Littlewood polniomok értékeit szeretnénk vizsgálni $\pm 2-$ben, elegendő az értékeket $2-$ben vizsgálni. Ahogy az könnyedén ellenőrizhető, bármely r páratlan egész, melyre $-2^{n+1} + 1 \leq r \leq 2^{n+1} - 1$ teljesül, egyértelműen felírható $f(2)$ alakban, ahol f egy $n-$ed fokú Littlewood polinom. Valóban, ezek az r számok megadhatóak

$$-2^n - 2^{n-1} - \ldots - 2 - 1, -2^n - 2^{n-1} - \ldots - 2 + 1, \ldots, 2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2 + 1$$

alakban, és (rögzített n esetén) a reprezentációjuk egyértelmű. Ez mutatja, hogy az (5.2) egyenlet $|x| = 2$ megoldásai leírhatóak.

5.3. Az 5.2.1 Tétel bizonyításához használt eszközök

A tételünk bizonyításához különböző esetekben különböző eszközöket használunk, ezért érvelésünket külön részfejezetekben mutatjuk be. A használt kódokat elérhetővé tettük itt: `https://shrek.unideb.hu/~tengely/LittleWood.html`.

5.3.1. Az 5.2.1 Tétel bizonyításához használt eszközök $n = 3$ esetén

Tekintsük a $f(x) = \pm x^3 \pm x^2 \pm x \pm 1$ Littlewood polinomokat, és vizsgáljuk az (5.2) egyenletet esetükben.

A 16 egyenlet tanulmányozása során, az $x \to -x$ helyettesítés segítségével elegendő csak azokat az egyenleteket figyelembe venni, ahol az $f(x)$ főegyütthatója pozitív.

Két görbe, amelyeket az (5.2) egyenlet implikál, szinguláris. Nevezetesen, amikor

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2$$

és

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2,$$

az (5.2) egyenletnek végtelen sok megoldása van. Ezeknek a megoldásoknak a leírása triviális.

A többi esetben az (5.2) egyenlet egy elliptikus görbe, így meg tudjuk kapni a görbék egész pontjait (melyek az egyenlet megoldásai) a Magma [13] (Gebel, Pethő, Zimmer [25] és Stroeker, Tzanakis [62] módszerén alapuló) `IntegralPoints` algoritmusát használva.

5.3.2. Az 5.2.1 tétel bizonyítása $n = 5$ esetén

Az (5.2) egyenlet, ahol most $f(x) = \pm x^5 \pm x^4 \pm x^3 \pm x^2 \pm x \pm 1$, hiperelliptikus egyenlet. Hasonlóan az $n = 3$ esethez, elegendő a pozitív főegyütthatós $f(x)$ egyenleteket vizsgálni. Így 32 darab egyenletet kell csak tanulmányozni. Chabauty módszerét [16] és a hiperelliptikus logaritmus módszert [23] fogjuk használni ezen egyenletek megoldásához.

Két olyan esetünk van, melyek reducibilisek és van olyan tényezőjük, mely négyzetes. Ezek az

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1 &= (x-1)(x^2+x+1)^2, \\ x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1 &= (x+1)(x^2-x+1)^2. \end{aligned}$$

egyenletek. Ezekben az esetekben könnyedén felírhatjuk az (5.2) egyenlet minden megoldását.

A fennmaradó esetekben 2 génuszú görbéket kell vizsgálnunk. A Magma [13] használatával kiszámolhatjuk a Jacobian rangját és meghatározhatjuk a Mordell-Weil csoportjuk generátorait, Stoll cikkei [58], [59], [60] alapján.

Következő lépésként, a Baker módszer [1] segítségével meghatározunk egy (nagy) felső korlátot $\log|x|$−re. Most a [23]-ban szereplő továbbfejlesztett verziót fogjuk használni.

5.3.1. Lemma ([23], 2.1 Állítás). *Legyen α az $f(x)$ polinom egy gyöke. Tegyük fel, hogy ismerjük a $J(C)(\mathbb{Q})$ Mordell–Weil csoport generátorait. Ekkor létezik egy meghatározható véges $\mathcal{K}$ halmaz, mely $\mathbb{Q}[\alpha]$ feletti egészekből áll és ha az (x, y) pár a C egész megoldása, akkor $x - \alpha = \kappa\xi^2$ teljesül valamely $\kappa \in \mathcal{K}$ és $\xi \in \mathbb{Q}[\alpha]$.*

Továbbá, tegyük fel, hogy $\kappa \in \mathcal{K}$. Legyenek α különböző konjugáltjai $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ és $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ rendre κ különböző konjugáltjai. Legyen $K_1 = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \sqrt{\kappa_1\kappa_2})$, $K_2 = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_3, \sqrt{\kappa_1\kappa_3})$, $K_3 = \mathbb{Q}(\alpha_2, \alpha_3, \sqrt{\kappa_2\kappa_3})$ és $L = \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \sqrt{\kappa_1\kappa_2}, \sqrt{\kappa_1\kappa_3})$. Ekkor létezik egy kiszámolható B_κ konstans, mely csak α−tól, κ−tól, a K_i−k fokától, regulátoraitól, osztályszámaitól, egység rangjaitól és L fokától függ, úgy, hogy ha $x \neq 0$ egy egész, melyre $x - \alpha = \kappa\xi^2$ teljesül valamely $\xi \in \mathbb{Q}[\alpha]$−re, akkor $\log|x| \leq B_\kappa$.

Így, ha (x, y) a C egy egész megoldása, akkor $\log|x| \leq B := \max_{\kappa\in\mathcal{K}} B_\kappa$ teljesül.

Esetünkben x^5 együtthatója 1, így a következő, egyszerűsített verzióját használhatjuk a [23]-ben szereplő 3.2 Következménynek.

5.3.2. Lemma ([23], a 3.2 Következmény egyszerűsített verziója). *Legyen B egy felső korlátja C egész pontjainak logaritmikus magasságára. Ekkor*

$$M \leq \sqrt{\mu_2^{-1}(2B - \mu_1)}$$

teljesül.

5.3.3. Az 5.2.1 Tétel bizonyításához használt eszközök páros n−re, ahol $2 \leq n \leq 24$

Legyen $f(x)$ egy $n = 2k$, $2 \leq n \leq 24$ páros fokú Littlewood polinom, és tekintsük az (5.2) egyenletet. Elvben 2^{n+1} egyenletet kell megoldanunk. Mivel $|x| > 2$ esetén $|x|^n > |x|^{n-1} + \ldots + |x| + 1$, így rögtön kizárhatjuk azokat az eseteket, ahol $f(x)$ főegyütthatója -1, hiszen ekkor nem létezik $|x| > 2$ megoldás. Továbbá, az $n = 3, 5$ esetekhez hasonlóan, az $x \to -x$ helyettesítéssel az egyenletek számát lefelezhetjük. Így elegendő tanulmányoznunk az (5.2) egyenletet olyankor, amikor az $f(x)$ polinom

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + e_2 x^{n-2} + \cdots + e_{n-1} x + e_n$$

alakú, ahol $e_2, \ldots, e_n \in \{-1, 1\}$. Ezzel már csak 2^{n-1} egyenletet kell megvizsgálnunk. Ezen egyenletek megoldásához Runge módszerét fogjuk használni.

Elsőként a $\sqrt{f(x)}$ ∞−ben vett Puiseux kiterjésztésének polinom részére lesz szükségünk. A következő állítás erre egy általános formulát ad.

5.3.1. Állítás. *Legyen*

$$f(x) = x^n + e_1 x^{n-1} + \cdots + e_{n-1} x + e_n \tag{5.7}$$

egy $n = 2k$ páros fokú Littlewood polinom. Ekkor létezik egy egyértelműen meghtarározható

$$u(x) = u_0 x^k + u_1 x^{k-1} + \cdots + u_{k-1} x + u_k \tag{5.8}$$

polinom, ahol $u_0 = 1$ és $u_i \in \mathbb{Q}$ $(i = 1, \ldots, k)$ úgy, hogy $f(x)$−ben és $u^2(x)$−ben az x^i tagok együtthatója megegyezik ($i = k, k+1, \ldots, n$−re). Továbbá az $u(x)$ polinom u_i együtthatóinak d_i nevezőire

$$d_i = 2^{\nu_2((2i)!)} \quad (i = 0, 1, \ldots, k) \tag{5.9}$$

teljesül, ahol $\nu_2(\ell)$ a 2 kitevőjét jelöli az ℓ pozitív egész prímtényezős felbontásában.

Vegyük észre, hogy amennyiben az $f(x)$ polinomot

$$f(x) = F(x) + g(x) \tag{5.10}$$

alakban írjuk fel, ahol

$$F(x) = x^n + x^{n-1} + e_2 x^{n-2} + \ldots + e_{n-k} x^k, \; g(x) = e_{n-k+1} x^{k-1} + \ldots + e_{n-1} x + e_n,$$

akkor az 5.3.1 Állításban meghatározott $u(x)$ polinom kizárólag csak $F(x)$−től függ, és $g(x)$−től független. Így mindössze a lehetséges $F(x)$ polinomokon kell végigmennünk, ami azt jelenti, hogy elegendő 2^{k-1} darab polinomot vizsgálnunk.

Legyen $t = 2^{-\nu_2(n!)}$. Vegyük észre, hogy az $(u(x)-t)^2 - f(x)$ és $(u(x)+t)^2 - f(x)$ polinomok fokszáma k, főegyütthatójuk pedig rendre $-2t$ és $2t$. Ebből következik, hogy létezik egy olyan C konstans, amire $|x| > C$ és vagy

$$(u(x)-t)^2 < f(x) < (u(x)+t)^2 \tag{5.11}$$

vagy pedig

$$(u(x)+t)^2 < f(x) < (u(x)-t)^2 \tag{5.12}$$

teljesül.

Számítások után azt kapjuk, hogy $f(x)$ értéke nem lehet négyzetszám, ha $|x| > C$. Más szóval, az (5.2) egyenletnek nem létezik $|x| > C$ megoldása.

Így a feladatunk a következő: találjunk egy megfelelő C számot, és ellenőrizzük x egészekre az egyenlet értékeit, ahol $2 < |x| \leq C$. Ehhez feltehetjük, hogy sem az (5.11), sem pedig az (5.12) egyenlőtlenség nem teljesül.

Rögzítsük $F(x)-$et az (5.10) egyenletben. Ekkor $u(x)$ szintén rögzített. Tekintsünk $g(x)-$re az (5.10) egyenletben úgy, mint egy tetszőleges, de rögzített $k-1$ fokú Littlewood polinomra. Legyenek

$$h_1(x) = (u(x)-t)^2 - F(x) - g(x),\ h_2(x) = (u(x)+t)^2 - F(x) - g(x). \tag{5.13}$$

Itt $h_1(x), h_2(x)$ polinomok fokszáma k, főegyütthatójuk pedig rendre $-2t$ és $2t$. Mivel az (5.11) egyenlőtlenség nem teljesül,

$$h_1(x) \geq 0 \quad \text{vagy} \quad h_2(x) \leq 0$$

fennáll. Hasonlóan, (5.12) szintén nem teljesül, így

$$h_1(x) \leq 0 \quad \text{vagy} \quad h_2(x) \geq 0.$$

Ezekből látható, hogy ha $|x| \leq \max(C_1, C_2)$, ahol C_i a $h_i(x)$ polinom gyökeinek abszolút értékének a maximuma $(i = 1, 2)$.

Így használhatjuk a $C = \max(C_1, C_2)$ konstanst. A C_1 és C_2 konstansok felső korlátjának kiszámításához az alábbi lemmát használjuk.

5.3.3. Lemma. *Legyen $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ egy komplex együtthatós polinom, ahol $a_n \neq 0$. A polinom összes gyökének abszolútértéke felülről korlátozható az*

$$1 + \max\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|, \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right|, \ldots, \left|\frac{a_0}{a_n}\right|\right\}$$

kifejezéssel.

A C meghatározása után annyi dolgunk maradt, hogy minden $x-$re, amelyre $2 < |x| \leq C$ teljesül, ellenőrizzük, hogy megoldásai-e az (5.2) egyenletnek. A hiperelliptikus görbék „kis” racionális pontjainak kiszámításához Stoll `ratpoints` kódja [61] használható. Mi ehhez a `hyperellratpoints` függvényt használtuk, ami Stoll kódjának az implementációja PARI-ban [47].

Irodalomjegyzék

[1] A. Baker, *Bounds for the solutions of hyperelliptic equations*, Proc. Camb. Phil. Soc. **65** (1969), 439–444.

[2] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1975.

[3] P. Balister, B. Bollobás, R. Morris, J. Sahasrabudhe, M. Tiba, *Flat Littlewood polynomials exist*, Annals Math. **19** (2020), 977–1004.

[4] A. Bazsó, *Polynomial values of (alternating) power sums*, Acta Math. Hung. **146** (2015), 202–219.

[5] A. Bazsó, I. Pink, *Diophantine equations with Appell sequences*, Period. Math. Hung. **69** (2014), 222–230.

[6] M. A. Bennett, K. Győry, Á. Pintér, *On the Diophantine equation* $1^k+2^k+\cdots+x^k = y^n$, Compositio Math. **140** (2004), 1417–1431.

[7] M. A. Bennett, A. Levin, *The Nagell–Ljunggren equation via Runge's method*, Monatsh. Math. **177** (2015), 15–31.

[8] A. Bérczes, B. Brindza, L. Hajdu, On the power values of polynomials, Publ. Math. Debrecen **53** (1998), 375–381.

[9] F. Beukers, Sz. Tengely, *An implementation of Runge's method for Diophantine equations*, arXiv:math/0512418 [math.NT], 2005.

[10] Yu. Bilu, *Quadratic factors of* $f(x) = g(y)$, Acta Arith. **90** (1999), 341–355.

[11] Yu. Bilu, B. Brindza, P. Kirschenhofer, Á. Pintér, R. F. Tichy, *Diophantine equations and Bernoulli polynomials. With an appendix by A. Schinzel*, Compositio Math. **131** (2002), 173–188.

[12] Yu. Bilu, R. F. Tichy, *The Diophantine equation* $f(x) = g(y)$, Acta Arith. **95** (2000), 261–288.

[13] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), 235–265.

[14] B. Brindza, *On S-integral solutions of the equation $y^m = f(x)$*, Acta Math. Hungar. **44** (1984), 133–139.

[15] A.-L. Cauchy, *Exercices de mathématique*, Œuvres **2(9)** (1829), p.122.

[16] C. Chabauty, *Sur les points rationnels des courbes algébriques de genre supérieur à l'unité*, C. R. Acad. Sci. Paris **212** (1941), 882–885.

[17] M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of distances*, Springer, 2009

[18] A. Dubickas, J. Jankauskas, *On Newman polynomials which divide no Littlewood polynomial*, Math. Comp. **78** (2009), 327–344.

[19] P. Erdős, *On a Diophantine equation*, J. London Math. Soc. **26** (1951), 176–178.

[20] P. Erdős, J. L. Selfridge, *The product of consecutive integers is never a power*, Ill. J. Math. **19** (1975), 292–301.

[21] E. V. Flynn and N. P. Smart, *Canonical heights on the Jacobians of curves of genus* 2 *and the infinite descent*, Acta Arith. **79(4)** (1997), 333–352.

[22] M. Fujiwara, M. *Über die obere Schranke des absoluten Betrages der Wurzeln einer algebraischen Gleichung*, Tohoku Math. J. (first series) **10** (1916), 167–171.

[23] H. R. Gallegos-Ruiz, *Computing integral points on genus 2 curves estimating hyperelliptic logarithms*, Acta Arith. **187** (2019), 329–344.

[24] H. R. Gallegos-Ruiz, *Worked out example for my paper: Computing integral points on genus 2 curves estimating hyperelliptic logarithms*, http://personal.cimat.mx:8181/~hgallegos/programs/hyperlogs/WorkedExample.pdf.

[25] J. Gebel, A. Pethő, H. G. Zimmer, *Computing integral points on elliptic curves*, Acta Arith. **68** (1994), 171–192.

[26] K. Győry, *On the Diophantine equation $\binom{n}{k} = x^\ell$*, Acta Arith. **80** (1997), 289–295.

[27] K. Győry, L. Hajdu, Á. Pintér, *Perfect powers from products of consecutive terms in arithmetic progression*, Compositio Math. **145** (2009), 845–864.

[28] K. Győry, T. Kovács, Gy. Péter, Á. Pintér, *Equal values of standard counting polynomials*, Publ. Math. Debrecen **84** (2014), 259–277.

[29] K. Győry, Á. Pintér, *On the equation $1^k + 2^k + \cdots + x^k$*, Publ. Math. Debrecen **62** (2003), 403–414.

[30] K. Győry, R. Tijdeman, M. Voorhoeve, *On the equation $1^k + 2^k + \cdots + x^k = y^z$*, Acta Arith. **37** (1980), 233–240.

[31] L. Hajdu, *On a conjecture of Schäffer concerning the equation* $1^k + ... + x^k = y^n$, J. Number Theory **155** (2015), 129–138. Corrigendum: ibid **164** (2016) 429–432.

[32] L. Hajdu, O. Herendi, *Polynomial values of surface point counting polynomials*, Int. J. Number Theory **17/01** (2021), 15–32.

[33] L. Hajdu, O. Herendi, *Extrema of polynomials with real roots and diophantine equations*, J. Number Theory **242** (2023), 626–646.

[34] L. Hajdu, O. Herendi, Sz. Tengely, N. Varga, *Square values of Littlewood polynomials*, The Ramanujan Journal **65(3)** (2024), 1205–1226.

[35] L. Hajdu, Á. Papp, *Polynomial values of products of terms from an arithmetic progression*, Monatsh. Math. **193** (2020), 637–655.

[36] L. Hajdu, Á. Papp, R. Tijdeman, *The Prouhet-Tarry-Escott problem, indecomposability of polynomials and Diophantine equations*, Ramanujan J. **58** (2022), 1075–1093.

[37] L. Hajdu, R. Tijdeman, N. Varga, *Diophantine equations for Littlewood polynomials*, Acta Arith. **210** (2023), 223–234.

[38] L. Hajdu, N. Varga, *Polynomial values of figurate numbers*, J. Number Theory **214** (2020), 79–99.

[39] L. Hajdu, N. Varga, *Diophantine equations for polynomials with restricted coefficients, I (power values)*, Bull. Austral. Math. Soc. **106** (2022), 254–263.

[40] X. Han, A. Schied, *Step roots of Littlewood polynomials and the extrema of functions in the Takagi class*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **173** (2022), 591–618.

[41] K. G. Hare, J. Jankauskas, *On Newman and Littlewood polynomials with a prescribed number of zeros inside the unit disk*, Math. Comp. **90** (2021), 831–870.

[42] M. Kulkarni, B. Sury, *On the Diophantine equationvx*$(x+1)(x+2)\dots(x+(m-1)) = g(y)$, Indag. Math. (N.S.) **14** (2003), 35–44.

[43] K. Liptai, F. Luca, Á. Pintér, L. Szalay, *Generalized balancing numbers*, Indag. Math. (N.S.) **20** (2009), 87–100.

[44] W. Ljunggren, *Noen Setninger om ubestemte likninger av formen* $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$, Norsk. Mat. Tidsskr. **25** (1943), 17–20.

[45] D. Masser, *Auxiliary Polynomials in Number Theory*, Cambridge University Press, 2016.

[46] M. J. Mossinghoff, *Polynomials with Restricted Coefficients and Prescribed Noncyclotomic Factors*, LMS J. Comp. Math. **6** (2003), 314–325.

[47] The PARI Group, PARI/GP version `2.15.4`, Univ. Bordeaux, 2023, `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`.

[48] R. Peled, A. Sen, O. Zeitouni, *Double roots of random Littlewood polynomials*, Israel J. Math. **213** (2016), 55–77.

[49] Cs. Rakaczki, *On the Diophantine equation $S_m(x) = g(y)$*, Publ. Math. Debrecen **65** (2004), 439–460.

[50] C. Runge, *Über ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen*, J. reine angew. Math. **100** (1887), 425–435.

[51] SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.8), The Sage Developers, 2023, https://www.sagemath.org.

[52] A. Sankaranarayanan, N. Saradha, *Estimates for the solutions of certain Diophantine equations by Runge's method*, Int. J. Number Theory **4** (2008), 475–493.

[53] N. Saradha, T. N. Shorey, *Almost perfect powers in arithmetic progression*, Acta Arith. **99** (2001), 363–388.

[54] N. Saradha, T. N. Shorey, *Almost squares and factorizations in consecutive integers*, Compositio Math. **138** (2003), 113–124.

[55] J. J. Schäffer, *The equation $1^p + 2^p + \cdots + n^p = m^q$*, Acta Math. **95** (1956), 155–189.

[56] A. Schinzel, R. Tijdeman, *On the equation $y^m = P(x)$*, Acta Arith. **31** (1976), 199–204.

[57] T. N. Shorey and R. Tijdeman, *Exponential Diophantine equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[58] M. Stoll, *On the height constant for curves of genus two*, Acta Arith. **90** (1999), 183–201.

[59] M. Stoll, *Implementing 2-descent for Jacobians of hyperelliptic curves*, Acta Arith. **98** (2001), 245–277.

[60] M. Stoll, *On the height constant for curves of genus two. II*, Acta Arith. **104** (2002), 165–182.

[61] M. Stoll, *Documentation for the ratpoints program*, arXiv 0803.3165 (2022).

[62] R. J. Stroeker, N. Tzanakis, *Solving elliptic diophantine equations by estimating linear forms in elliptic logarithms*, Acta Arith. **67** (1994), 177–196.

[63] Sz. Tengely, *On the Diophantine equation $F(x) = G(y)$*, Acta Arith. **110** (2003), 185–200.

[64] Sz. Tengely, *Effective Methods for Diophantine Equations*, Ph.D. thesis, Leiden University, The Netherlands, 2005.

[65] R. Tijdeman, *Applications of the Gel'fond-Baker method to rational number theory*, Topics in Number Theory, Proceedings of the Conference at Debrecen 1974, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **13**, pp. 399–416, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[66] M. Voorhoeve, K. Győry, R. Tijdeman, *On the Diophantine equation* $1^k + 2^k + \cdots + x^k + R(x) = y^z$, Acta Math. **143** (1979), 1–8.

[67] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.

[68] O. Yakir, *Approximately half of the roots of a random Littlewood polynomial are inside the disk*, Studia Math. **261** (2021), 227–240.

[69] P. Z. Yuan, *On a special Diophantine equation* $a\binom{x}{n} = by^r + c$, Publ. Math. Debrecen **44** (1994), 137–143.

DEBRECENI EGYETEM

DEBRECENI EGYETEM
EGYETEMI ÉS NEMZETI KÖNYVTÁR
H-4002 Debrecen, Egyetem tér 1, Pf.: 400
Tel.: 52/410-443, e-mail: publikaciok@lib.unideb.hu

Nyilvántartási szám: DEENK/532/2025.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Szilágyi-Herendi Orsolya
Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
MTMT azonosító: 10078481

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (3)

1. Hajdu, L., **Szilágyi-Herendi, O.**, Tengely, S., Varga, N.: Square values of Littlewood polynomials.
   Ramanujan J. 65, 1205-1226, 2024. ISSN: 1382-4090.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s11139-024-00935-1
   IF: 0.7

2. Hajdu, L., **Szilágyi-Herendi, O.**: Extrema of polynomials with real roots and Diophantine equations.
   J. Number Theory. 242, 626-646, 2023. ISSN: 0022-314X.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2022.05.004
   IF: 0.6

3. Hajdu, L., **Szilágyi-Herendi, O.**: Polynomial values of surface point counting polynomials.
   Int. J. Number Theory. 17 (01), 15-32, 2021. ISSN: 1793-0421.
   DOI: http://dx.doi.org/10.1142/S1793042121500020
   IF: 0.743

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 2,043
A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 2,043

A DEENK a Jelölt által a Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománymetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2025.09.25.