



1949

# **Funkcionális renormálási csoport módszer alkalmazása a kvantumelméletben**

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Gégény Flóra Enikő

témavezető: Dr. Nagy Sándor

DEBRECENI EGYETEM  
Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács  
Fizikai Tudományok Doktori Iskola  
Debrecen, 2024



Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi és Informatikai Doktori Tanács Fizikai Tudományok Doktori Iskola Részecskefizika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Nyilatkozom arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Debrecen, 2024. ....

.....

Gégény Flóra Enikő  
doktorjelölt

Tanúsítom, hogy Gégény Flóra Enikő doktorjelölt 2020-2024 között a fent megnevezett Doktori Iskola Részecskefizika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult.

Nyilatkozom továbbá arról, hogy a tézisekben leírt eredmények nem képezik más PhD disszertáció részét.

Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2024. ....

.....

Dr. Nagy Sándor  
témavezető



# Funkcionális renormálási csoport módszer alkalmazása a kvantumelméletben

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében  
a Fizika tudományágban

Írta: Gégény Flóra Enikő okleveles fizikus

Készült a Debreceni Egyetem Fizikai Tudományok Doktori Iskolája  
Részecskefizika programja keretében

Témavezető: Dr. Nagy Sándor

Az értekezés bírálói:

Dr. ....

Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök: Dr. ....

tagok: Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 2024.



# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2. Evolúciós egyenletek</b>	<b>7</b>
2.1. A Wegner-Houghton-egyenlet . . . . .	7
2.2. A Wetterich-egyenlet . . . . .	9
2.3. Az evolúciós egyenletek összehasonlítása . . . . .	13
<b>3. Komplex csatolások a renormálásban</b>	<b>15</b>
3.1. Evolúciós egyenlet . . . . .	18
3.2. A skalár modell . . . . .	19
3.2.1. 4-dimenzió . . . . .	20
3.2.2. $(4-\varepsilon)$ -dimenzió . . . . .	21
3.2.3. 3-dimenzió . . . . .	24
3.3. Periodikus potenciál . . . . .	30
3.4. Összefoglalás . . . . .	36
<b>4. Bilokális potenciál</b>	<b>39</b>
4.1. Gravitáció és renormálás . . . . .	40
4.2. Evolúciós egyenlet . . . . .	42
4.3. Lokális evolúció . . . . .	46
4.4. Bilokális evolúció . . . . .	48
4.4.1. Nyeregpon t . . . . .	50
4.5. Eredmények . . . . .	52
4.6. Összefoglalás . . . . .	56

<b>5. Lorentz-szimmetria</b>	<b>57</b>
5.1. Aszimptotikusan biztonságos gravitáció . . . . .	59
5.2. Evolúciós egyenletek . . . . .	62
5.3. Releváns csatolások . . . . .	65
5.3.1. Aszimptotikus biztonság . . . . .	66
5.3.2. Aszimptotikus biztonságból aszimptotikus szabadság? . . . . .	67
5.4. Infravörös tartomány . . . . .	70
5.5. Összefoglalás . . . . .	75
<b>6. Összefoglalás</b>	<b>77</b>
<b>7. Summary</b>	<b>83</b>

## Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom a témavezetőm, Dr. Nagy Sándor által nyújtott támogatásért, megértésért és útmutatásért, amelyet az elmúlt 5 évben kaptam. Nagyon hálás vagyok a közös munkáért, és hogy átsegített a nehezebb időszakokon, nélküle a dolgozat nem jöhetett volna létre.

Köszönöm a családomnak, hogy támogattak ezen a hosszú úton, különösen a férjemnek, hogy nem csak lelki, de matematikai támaszom is volt és bármilyen felmerülő problémámat igyekezett megoldani.



## Rövidítések

- RG renormálási csoport (renormalization group)
- UV ultraibolya (ultra violet)
- IR infravörös (infrared)
- WH Wegner-Houghton
- SG sine-Gordon
- WF Wilson-Fisher
- WFFP Wilson-Fisher fixpont
- GFP gaussi fixpont
- NGFP nem-gaussi fixpont
- LPA lokális potenciál közelítés (local potential approximation)
- KT Kosterlitz-Thouless
- CS Callan-Symanzik
- AB aszimptotikusan biztonságos
- KRG konform redukált gravitáció
- EH Einstein-Hilbert
- CTP zárt időtengely(es) (closed time path)
- EAA effektív átlagos hatás (effective average action)



# 1. fejezet

## Bevezetés

A fizikában általánosan elfogadott tény, hogy a fizikai rendszerek bonyolult makroszkopikus viselkedését a rendszert alkotó elemi részecskék viselkedéséből kiindulva érthetjük meg. Ez a renormálási csoport (RG) módszer alapgondolata. Ez a gondolat természetesen általánosan nem igazolható, ennek ellenére az RG módszer filozófiájában nem kételkednek a kutatók, pedig a módszer a realiztikus modellek terén szerény eredményekkel büszkélkedhet.

Az egyik legegyszerűbb példa a méreetskálák szerepének szemléltetésére a hidrodinamika lehet, ahol a klasszikus kontinuum egyenleteket úgy kaphatjuk meg, hogy kiátlagoljuk az atomi méretekhez tartozó fluktuációk járulékát. Ez a modell két tanulsággal is szolgál. Egyrészt azt mutatja, hogy a méreetskálák szétválasztása sokszabadsági fokú fizikai rendszerek leírásánál fontos, másrészt pedig, hogy a makroszkopikus viselkedés leírásához nem minden méreetskála szükséges. A hidrodinamika példájában az atomi (kb.  $10^{-10}$  m) méreetskála releváns, azonban például a  $10^{-5}$  m-es hosszskála irreleváns a méteres nagyságrendű makroszkopikus tulajdonságok megértéséhez. Vannak olyan fizikai rendszerek, ahol nem elegendő egyetlen kis méreetskála kiintegálása a makroszkopikus fizika leírásához, több méreetskálát kell figyelembe vennünk [1]. Az RG módszert ebben az esetben érdemes használnunk. A módszerrel szisztematikusan, lépésenként haladva vesszük figyelembe az egyes skálákat, így oldva meg a problémát. Erre fontos példa a kritikus jelenségek köre, hiszen ott minden skála lényeges. Előbb a fluktuációkat atomi szinten vesszük figyelembe, majd haladva

a nagyobb skálák felé, az összes fluktuációt kiintegráljuk.

A kritikus viselkedés megfigyelhető például a ferromágneses anyagok esetén, ahol az RG módszer segítségével vizsgálható a modellben megjelenő fázisátalakulás. A kritikus Curie-hőmérséklet alatt spontán mágnesezettség figyelhető meg külső tér hiányában, de a Curie-hőmérséklet felett a termikus ingadozásoknak köszönhetően nincs mágneses rendezettség.

Az Ising-modell segítségével szemléltethető a különböző skálák szerepe a modellek viselkedésében. Az Ising-modellben a mágneses momentumok egy rögzített tengely mentén pozitív vagy negatív irányba mutatnak, így két lehetséges állapotuk van. A Hamilton-operátor analitikus függvénye a hőmérsékletnek, így a partíciós függvény is analitikus lesz minden  $T \neq 0$  esetén, hiszen analitikus Boltzmann-faktorokat összegzünk fel a mágneses momentumok konfigurációira. Termodinamikai limeszben (végtelen nagy térfogatot tekintve)  $T = T_C$  esetén azonban a viselkedés nem-analitikus, ami azért fontos, mert a fázisátalakulások során megjelenő fázisok nem-analitikus módon térnek el egymástól, és ha ezt szeretnénk matematikailag leírni, ahhoz nem-analitikus viselkedés megjelenése szükséges.

Landau felvetése szerint, ha csak az adott  $\phi$  mágnesezettséggel rendelkező konfigurációkat tekintjük, akkor a szabadenergia a  $\phi$ -nek analitikus függvénye, valamint a  $T$  hőmérsékletnek is, de az így kapott eredmény nem egyezik az elméleti és kísérleti válaszokkal. A Landau-elmélet általánosítható a térrel lassan változó  $\phi(x)$  mágnesezettség bevezetésével, ami a szabadenergia Landau-Ginsburg-féle alakjára vezet, de az elmélet továbbra is analitikus marad. Az analitikusság akkor vesz el, amikor a teljes  $\phi$  mágnesezettség értékeire átlagolunk, de csak termodinamikai limeszben, ahol az átlag a szabadenergia minimumaként áll elő. Landau felételezése szerint csak az atomi skálán történő fluktuációk számítanak, és ezek kiátlagolásával a modell leírható klasszikus egyenlettel. Ez a felvetés  $d > 4$  dimenzióban helyes, de 4 dimenzió alatt a korrelációs hossz kiszámolásához minden fluktuációt figyelembe kell venni, így itt ez az elmélet nem használható, azonban javítani lehet rajta kis módosításokkal.

A eltérés onnan eredhet, hogy ugyan az atomi szintű fluktuációkat már kiátlagoltuk, viszont más, ennél hosszabb hullámhosszúságú fluktuációk még jelen vannak, és ezeket is figyelembe kell venni. A többi fluktuációnál úgy járunk el, hogy lépésekben integráljuk ki a különböző hosszskálákat, az aktuálisnál kisebbeket már kiátlagoltnak véve. Impulzustérbe áttérve a

$\phi(x)$ -et a megfelelő Fourier-módusokkal állíthatjuk elő:  $\phi(x) = \int_k e^{ikx} \phi_k$ , ahol  $|k| < 1/L$ . A  $\phi_k$ -kat fixnek vesszük, ami a Landau-elmélet általánosításának felel meg, ahol is az átlagos mágnesezettség van rögzítve. A szabadenergia kifejezése ugyanaz marad, mint a Landau-elméletben, csak itt megjelenik a skálafüggés ( $L$ ) a paraméterekben is, aminek a következménye az analitikusság elvesztése a kritikus pontnál. Az  $L$ -től való függés a korrelációs hosszig tart, az attól nagyobb hullámhosszú fluktuációk nem játszanak szerepet. A nem-analitikus viselkedéssel a korrelációs hossz válik a  $T$  nem-analitikus függvényévé a Curie-hőmérsékleten.

A fluktuációk hatásának vizsgálatához egyszerre csak egy hullámhossz skálát veszünk figyelembe, ez a renormálási csoport elemi lépése: csak az  $L$  és  $L + \Delta L$  közti hullámhosszú fluktuációkat átlagoljuk ki, így  $1/(L + \Delta L)$ -ig lesznek kiintegrálva  $\phi(x)$ -ben a  $\phi_k$  Fourier-komponensek. A rendszert véges  $V$  térfogatúnak tekintve, a tartományon belüli szabadsági fokok száma a megfelelő fázistérfogattól adódik, ami a  $k$ -tér és a koordinátatér térfogatainak szorzata:  $L^{-(d+1)}V\delta L$ .

Ez a gondolatmenet történetileg mutatja be a renormálás alap gondolatát, és a fázisátalakulások leírásának útját. Ezek alapján arra a következtetésre jutunk, hogy a legtöbb esetben a fázisátalakulások helyes leírásához minden hosszskálán figyelembe kell venni a fluktuációkat. A funkcionális renormálási csoport módszer olyan nem-perturbatív eljárás, ahol feltételezzük, hogy nagy (ultraibolya, UV) energiaskálákon ismerjük a mikroszkopikus kölcsönhatásokat, majd szisztematikusan, minden egyes energiaskála hatását figyelembe véve megkapjuk a vizsgált fizikai rendszer alacsony energiás (infravörös, IR) viselkedését. A módszer az UV-ben megadott blokkosított hatásból, mint kezdeti feltételből, indul ki, és eredményül az IR effektív hatást (vagy potenciált) adja. Matematikailag egy differenciálegyenletet kapunk, melyben a keresett funkcionál a hatás (ez lehet a blokkosított vagy az effektív hatás) a változó pedig a  $k$  energiaskála, a renormálási skála.

Az RG módszer a modern fizika nagyon sok területén használható az asztrofizikától kezdve, részecskefizikán át, a kondenzált anyagok fizikájáig. A módszer a részecskefizikában skaláris, fermionikus és mértékelméletekre is alkalmazható. A kutatások a vizsgált modellek kiterjesztéseit vizsgálják, illetve előfordul, hogy elvi kérdésekkel foglalkoznak. Ennek egyik ága a valós időben (Minkowski-tér-időben) számolt evolúció. Az RG módszert

eredetileg euklideszi téridőben, a statisztikus fizika elemei segítségével fogalmazták meg a részecskefizikában. A statisztikus fizika partíciós függvényét általában egyensúlyi rendszerek esetén tárgyaljuk, ahol az időfüggés nem jelenik meg, a koordinátatér pedig euklideszinek tekinthető.

A részecskefizikát a kvantumtérelmélet segítségével írjuk le, ami azonban Minkowski-téridőben van megadva [2, 3]. A térelméletben használt generáló funkcionál nagyon hasonlít a statisztikus fizikai partíciós függvényhez, előbbi azonban Minkowski-téridőben adott, emiatt az utóbbi euklideszi téridejű megfogalmazásának kölcsönvétele nem biztos, hogy megfelelő keretet ad. A valós idejű eredmények eltérőek lehetnek az euklideszitől, és ez esetben a Minkowski-formalizmus szolgálhat helyes megoldással. Az euklideszi megfogalmazás mellett szól, hogy matematikailag könnyebben kezelhető, illetve a regularizáció problémája is egyszerűbbé válik.

A renormálás ötlete is euklideszi téridőben fogalmazódott meg eredetileg. A perturbatív renormálás esetében a Wick-forgatást használják a valós időtengely képzetessé alakításához. Hasonló volt a gondolatmenet az RG módszer esetében is. A Wegner-Houghton-egyenlet (WH) írja le az euklideszi téridőben megadott blokkosított hatás evolúcióját [4], a Wetterich-egyenlet pedig az euklideszi effektív hatás fejlődésének leírását adja [5, 6, 7, 8, 9]. A Wick-forgatás nem ad megnyugtató választ a két formalizmus közötti áttérésre, mert ekkor a valós tengelyt forgatjuk át a képzetes tengely helyére egy végtelen sugarú körcikk mentén, ami sérti a Lorentz-szimmetriát, ez pedig a Minkowski-formalizmusnál problémát okoz. A renormálási csoport módszer valós idejű megfogalmazásának többféle megvalósításával találkozhatunk [10, 11, 12, 13]. A szokásos analitikus elfolytatás (analytic continuation) [14, 15, 16, 17] mellett számos lehetséges út van, pl. a kauzális halmazok módszere (method of causal sets) [18, 19, 20, 21], az Arnowitt-Deser-Misner (ADM) dekompozíció, a diffeomorfizmus invariáns téridő fóliázás [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30], vagy a legmeredekebb lejtő (steepest descent) módszer [31]. Az idő konzisztens figyelembe vétele, és a véges hőmérséklet kezelése a Schwinger-Keldysh-formalizmus keretében konzisztens módon lehetséges [32, 33], használatára sok példát találhatunk a szakirodalomban [34, 35, 36, 37, 38, 39]. A spektrálfüggvény, amit szintén valós időben kell számolni, szintén Schwinger-Keldysh-formalizmusban adható meg [16, 11], de analitikus elfolytatással is számolják [14, 40].

A dolgozatban néhány térelméleti modell tulajdonságait közvetlenül Minkowski-téridőben tárgyalom. Ez jó összehasonlítási alapot ad az euklideszi és valós téridőbeli különbségek kimutatására. Az egykomponensű skalártér evolúcióját Minkowski-téridőben már vizsgálták a WH-egyenlet keretében [41], én az effektív hatás Minkowski-evolúcióját határozom meg a Wetterich-egyenlet segítségével [42]. Ez az RG-séma sok szempontból előnyös, egyrészt kompatibilis a gradiens kifejtéssel, másfelől az effektív hatásról ad információt, amit egyszerűbb a fizikai paraméterekkel összekapcsolni, mint a blokkosított hatást. Természetesen a WH-egyenletnek is megvannak a maga előnyei, pl. a módusokhoz tartozó diszperziós reláció a megfelelő alakban jelenik meg, ami a blokkosítási lépésekben a fizikai értelmezést könnyebbé teszi. A Wetterich-egyenlet esetén a regulátor megváltoztatja a diszperziós relációt. A funkcionális értelemben renormálható modelleknél azonban a két megközelítés azonos eredményt ad.

Célom megvizsgálni a 3-dimenziós  $\phi^4$  modellt és a 2-dimenziós sine-Gordon modellt Minkowski-téridőben [42]. Keresem a modellek esetleges új fixpontjait vagy fázisait.

Az RG módszert nem tudjuk Lorentz-invariáns formában megfogalmazni. Ennek legfőbb oka az, hogy a  $k$  skála sem lehet Lorentz-invariáns. Emellett a szakirodalomban elfogadott tény, hogy nem létezik nem-perturbatív Lorentz-invariáns regulátor a Callan-Symanzik-regulátoron kívül, amely azonban tetszőleges  $d$ -dimenzióban nem használható regulátorként. Ennek ellenére komoly erőfeszítést tesznek a módszer Lorentz-szignatúrában történő megfogalmazására. Az egyik legígéretesebb módszer a Schwinger-Keldysh-formalizmusban adható meg, amelyet zárt időtengelyes (CTP) formalizmusnak is nevezünk. Hosszú út vezet a CTP-ben megadott RG egyenletekhez, a kérdés a mai napig nincs megnyugtatóan tisztázva [43]. Az út eredménye az RG módszer néhány olyan aspektusa, amelyeket eddig nem vizsgáltak a szakirodalomban.

Ilyen elem a nem-lokális tagok jelenléte a potenciálban. Megmutatható, hogy az eliminált módusok egy nyeregpontra tartalmazzanak, amely fa-szintű járulékot ad a bilokális potenciálhoz. A nem-lokalitás figyelembe vétele komoly nehézségeket jelent, azonban elegendő azt csak fa-szinten megtenni. Az RG módszer hasonlóan kényszeríti ránk a nem-lokalitást, mint ahogy a  $\phi^4$  modell tárgyalásánál megjelennek a magasabb rendű hatványok a potenciálban, vagy a felharmonikusok a SG modellben. A

bilokális tag evolúcióját számolták a  $\phi^4$  és a SG modellekben [44, 45]. A dolgozatban az aszimptotikusan biztonságos (AB) gravitáció konform redukált modelljét vizsgálom a bilokális potenciál evolúcióját is számolva [46]. Az AB gravitáció nagyon népszerű modell az RG módszer területén. A modell aszimptotikusan biztonságos, mert létezik egy UV fixpont, a Reuter-fixpont, amely minden csatolást végezzé tesz nagy energián.

A konform redukált AB gravitáció lényegében egy skaláris modell, emiatt egyszerű. Lorentz-szignatúra felhasználásával lehetőség van anizotróp módon bevezetni a hullámfüggvény renormálást, aminek segítségével nyomon követhető, hogy az evolúció során mi történik a Lorentz-szimmetriával [47]. A modell lehetővé teszi, hogy az UV-ben található Reuter-féle fixponton túli skálázásról is képet kapjunk. Ez nagyon fontos, mert úgy hisszük, hogy a Planck-skálán érvényét veszti a gravitációs modell, a Reuter-fixpont pedig ezen is túl található.

A disszertációban a 2. fejezetben először az evolúciós egyenleteket tárgyalom. Ezután az eredményeim bemutatása következik, kezdve a 3. fejezetben skaláris modellek valós idejű vizsgálatával, amely eredmény az első tézispontomhoz köthető [42]. A 4. fejezetben az AB gravitáció modelljét bilokális potenciállal kiegészítve tanulmányozom, ez a második tézispontoz tartozik [46]. Szintén az AB gravitációval foglalkozom a 5. fejezetben, ahol a Lorentz-szimmetria sérülése van a fókuszbán, amely a harmadik tézispontoz kapcsolódó eredmény [47]. Végül a munkámat a 6. fejezetben foglalom össze magyarul, a 7. fejezetben pedig angolul.

## 2. fejezet

# Evolúciós egyenletek

A perturbatív renormálást már Gell-Mann és Low is alkalmazta, míg a nem-perturbatív renormálás alapötlete Wilson és Kadanoff munkásságához köthető és azóta is a fizika számos területén alkalmazzák, a kvantum sokrészecske rendszerekben, a részecskefizikában és a gravitációban is fontos eszköznnek számít. A renormálási csoport módszer alkalmas skaláris, fermionikus és mértékelméletek fázisszerkezetének tanulmányozására. A wilsoni renormálás a blokkosított hatás evolúcióját adja meg, a skálafüggést pedig a WH-egyenlet írja le. Később a szakirodalomban az effektív hatást leíró Wetterich-egyenlet is megjelent, ami azóta is nagy népszerűségnek örvend.

Mindkét megközelítésnek megvannak az előnyei és hátrányai is, így az alábbi fejezetben áttekintjük a számolások során használt egyenletek levezetését, illetve összehasonlítjuk ezeket.

### 2.1. A Wegner-Houghton-egyenlet

Vegyünk egy fizikai rendszert, ami a  $t = -\infty$  időpillanatban  $|0, -\infty\rangle$  vákuumállapotból indul ki, és az időbeli fejlődése során a  $\langle 0, \infty|$  végállapotba kerül. Ezt az átmeneti amplitúdót a

$$\langle 0, \infty|0, -\infty\rangle \equiv Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar}S} \quad (2.1)$$

képlettel számolhatjuk, ahol az exponensben a fizikai rendszert jellemző

$S$  hatás szerepel. Az itt megjelenő pályaintegrál kontinuum sok integrált tartalmaz. Ennek kiértékeléséhez a  $\phi$  térváltozót két részre bontjuk:  $\phi \rightarrow \phi + \varphi$ . Itt a  $\phi$  a  $k \in [0, k - \Delta k]$  közötti impulzussal jellemezhető és ez lesz az infravörös tér, míg  $\varphi$  impulzusa  $k \in [k - \Delta k, k]$  tartományba esik és az ultraibolya teret jelöli. Az UV részre történő kiintegrálás után az  $S_k$  hatásból az alacsonyabb impulzushoz tartozó  $S_{k-\Delta k}$  hatást kapjuk. Az ehhez szükséges integrál alakja  $\varphi$ -ben vett Taylor-sorfejtés után

$$e^{-\frac{1}{\hbar}S_{k-\Delta k}(\phi)} \approx \int D[\varphi] e^{-\frac{1}{\hbar}S_k[\phi+\varphi_0] - \frac{1}{2\hbar}\varphi \frac{\delta^2 S_k[\phi+\varphi_0]}{\delta\varphi\delta\varphi} \varphi}, \quad (2.2)$$

ahol  $\varphi_0$  egy nyeregponti módus, melyet általában nullának veszünk. A számolásnál a  $\Delta k/k$  hányados az egy renormálási lépésben kiintegrált módusok mértékét adja meg, amely egy infinitezimálisan kicsiny mennyiség. Biztosítanunk kell az RG eljárás során, hogy ez legyen a legkisebb mennyiség, különben a WH-egyenlet nem áll fenn. Ez az elvárás nem triviális, ennek következménye, hogy a  $k \rightarrow 0$  limesz nem érhető el. Az integrál elvégzése után

$$e^{-\frac{1}{\hbar}S_{k-\Delta k}(\phi)} = e^{-\frac{1}{\hbar}S_k[\phi] - \frac{1}{2} \ln \det S_k''[\phi]}, \quad (2.3)$$

eredményt kapjuk, ahol a vessző az IR térre vonatkozó deriváltat jelöli és az exponensben megjelenő determináns a  $k \in [k - \Delta k, k]$  impulzussal jellemzett módusokra vonatkozik. Felhasználjuk a  $\ln \det A = \text{Tr} \ln A$  összefüggést, így az exponensekre a következő kifejezés adódik:

$$\dot{S}_k[\phi] = -\frac{\hbar k}{2\Delta k} \text{Tr} \ln S_k''[\phi], \quad (2.4)$$

ahol a  $\dot{x} = k\partial_k x$  jelölést használjuk. Az egyenlet jobb oldalán található  $\text{Tr}$  egy  $\Delta k$  szélességű gömbhéjra vett integrál, ahol a gömbhéj sugara a  $k$  impulzus hossza, így ebből megjelenik egy  $\Delta k$  faktor a  $\Delta k$ -val való osztás mellett. Az egyenlet másik alakja ezáltal

$$\dot{S}_k[\phi] = -\frac{\hbar k}{2\Delta k} \Delta k \int_q \delta(q - k) \ln S_q''[\phi], \quad (2.5)$$

alakban írható, ahol  $p$  egy  $d$ -dimenziós impulzus, az  $S_q''$  pedig a hatásnak a térváltozó szerinti második deriváltját jelöli és ez a felöltöztetett inverz propagátornak feleltethető meg:

$$S_q'' = D_q^{-1} = q^2 + U'' \quad (2.6)$$

A  $\Delta k$  impulzushéjra vett integrált blokkosítási lépésnek, blokkosításnak nevezzük. Mivel az impulzus integrál analitikusan elvégezhető, megkaphatjuk az  $U$  potenciálra vonatkozó evolúciós egyenlet alakját, amit a Wegner-Houghton-egyenletként [4] ismerünk:

$$\dot{U} = -\frac{1}{2}\hbar\alpha_d k^d \ln(k^2 + U''), \quad (2.7)$$

ahol bevezettük a

$$\alpha_d = \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d}, \quad \Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (2.8)$$

dimenziófüggő konstanst, amit az Euler-féle  $\Gamma$ -függvény segítségével fejeztünk ki. Később a számolások során  $\hbar = 1$  választással élünk, nemcsak a WH-egyenlet esetén, hanem a Wetterich-egyenlet használatánál is.

A WH-egyenlet Minkowski-térrejejú alakjához a

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar}S} \quad (2.9)$$

generáló funkcionálból indulunk ki, és az euklideszi lépésekhez hasonlóan juthatunk az alábbi alakra:

$$\dot{S}_k[\phi] = -i\frac{\hbar k}{2\Delta k} \text{Tr} \ln S_k''[\phi]. \quad (2.10)$$

## 2.2. A Wetterich-egyenlet

A Wetterich-egyenlet az effektív átlagos hatás (EAA) evolúcióját leíró funkcionális integro-differenciálegyenlet [5, 48, 49]. A WH-egyenlethez hasonlóan, ahol a blokkosított hatás paraméterei nem bírnak fizikai tartalommal, a Wetterich-egyenlet effektív átlagos hatásának paraméterei sem fizikai paraméterek. Mindkét evolúciós egyenlet  $k \rightarrow 0$  esetben az effektív hatást adja meg, amely már fizikai paramétereket tartalmaz. A Wetterich-egyenlet változóját a szakirodalomban effektív hatásként említik, így az egyszerűség kedvéért itt is így használom.

A pályaintegrálban egy  $R_k[\phi]$  regulátor tagot adunk a hatáshoz, ami az UV és IR divergens impulzusintegrálokat végessé teszi. A generáló funkcionál alakja a  $J = J(x)$  kvantumtérhez csatolt külső forrás jelenlétében

$$Z_k = e^{-\frac{1}{\hbar}W_k[J]} = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-\frac{1}{\hbar}(S_\Lambda + \mathcal{R}_k[\phi] - J \cdot \phi)}, \quad (2.11)$$

ahol a  $f \cdot g = \int_{-\infty}^{\infty} d^d x f(x)g(x)$  jelölést használtuk. A megjelenő regulátor tagot általában a térváltozóban kvadratikusnak, azaz tömeg alakú kifejezésnek választjuk, amely IR levágásként működik, vagyis a  $k$ -nál nagyobb energiájú módusokat változatlanul hagyja, de az ennél kisebb energiájúakat elnyomja. Az  $1/k$  térfogatban a térváltozó kiátlagolásánál ezeket a megtartott,  $k$ -nál nagyobb energiájú módusokat integráljuk ki.

A regulátor alakja

$$\mathcal{R}_k[\phi] = \frac{1}{2} \int_{xy} \phi(x) \mathcal{R}_k(x) \delta(x-y) \phi(y), \quad (2.12)$$

és az alábbi feltételeket kell teljesítenie:

1.  $\lim_{p^2/k^2 \rightarrow 0} \mathcal{R}_k > 0$ , vagyis IR regulátorként működik, mert eltünteti az IR divergenciákat,
2.  $\lim_{k^2/p^2 \rightarrow 0} \mathcal{R}_k \rightarrow 0$ , vagyis a regulátor eltávolításával  $k \rightarrow 0$  határesetben vissza kell kapnunk az átmeneti amplitúdó alakját,
3.  $\lim_{k^2 \rightarrow \infty} \mathcal{R}_k \rightarrow \infty$ , amely szerint az  $S = \lim_{k \rightarrow \Lambda} \Gamma_k$  határesetben a (ké-sőbb bevezetésre kerülő) effektív hatásból a mikroszkopikus hatást visszkapjuk, vagyis a regulátor UV levágásként is működik.

Ahhoz, hogy a Wetterich-egyenletet megkapjuk, deriváljuk a (2.11) egyenletet a  $t \equiv \ln k$  renormálási idő szerint, ahol az RG idő szerinti differenciálásra a  $\dot{\phantom{x}} = \partial/\partial t$  jelölést használjuk:

$$\dot{Z}_k = -\frac{1}{\hbar} \dot{W}_k[J] e^{-\frac{1}{\hbar}W_k[J]} = \int \mathcal{D}[\phi] \left( -\frac{1}{\hbar} \dot{\mathcal{R}}_k[\phi] \right) e^{-\frac{1}{\hbar}(S_k + \mathcal{R}_k[\phi] - J \cdot \phi)}. \quad (2.13)$$

Innen tovább számolva és rendezve az egyenletet:

$$\dot{W}_k[J] = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{\hbar} W_k[J]} \int \dot{\mathcal{R}}_k \left( -\hbar \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J^2} + \frac{\delta W_k[J]}{\delta J} \frac{\delta W_k[J]}{\delta J} \right) e^{\frac{1}{\hbar} W_k[J]}. \quad (2.14)$$

A  $\Gamma_k[\phi]$  effektív hatás a  $W_k[J]$  összefüggő Green-függvények generáló funkcionálja, azaz Legendre-transzformációval megadható az alábbi alakban

$$\Gamma_k[\phi] = W_k[J] - J \cdot \phi, \quad \phi = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J}. \quad (2.15)$$

Az effektív hatás deriváltjaira könnyen belátható azonosságok érvényesek

$$\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi} = -J, \quad (2.16)$$

$$\dot{\Gamma}_k[\phi] = \dot{W}_k[J], \quad (2.17)$$

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J \delta J} = -1. \quad (2.18)$$

Az (2.14) egyenletbe visszahelyettesítve és az effektív hatást átdefiniálva  $\Gamma_k[\phi] + \mathcal{R}_k[\phi] \rightarrow \Gamma_k$  szerint, megkapjuk a Wetterich-egyenletet euklideszi téridőben:

$$\dot{\Gamma}_k = \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \frac{\dot{\mathcal{R}}_k}{\mathcal{R}_k + \Gamma_k''}, \quad (2.19)$$

ahol a Tr jelöli a hurokintegrált és a belső indexekre történő felösszegzést.

Feltesszük, hogy az effektív hatás és a blokkosított hatás alakja megegyezik

$$\begin{aligned} \Gamma_k &\sim S_k \\ &= \sum_i g_i \mathcal{F}_i(\phi), \end{aligned} \quad (2.20)$$

így használhatjuk a blokkosított hatás alakját a Wetterich-egyenletben, amelyet nagy energiákon ismertnek tekintünk. Ez a feltételezés nagyban

megkönnyíti a számolásokat, így gyakran élnek vele, ugyanakkor nem biztos, hogy valóban használható [50]. A Wetterich-egyenlet egy parciális integro-differenciálegyenlet, de amennyiben a (2.20)-nek megfelelően a térváltozó szerint sorba fejtjük a hatást, akkor a  $g_i$  skálafüggő csatolásokra egy közönséges differenciálegyenlet-rendszert kapunk, ahogy a WH-egyenletben is. Általában a Taylor-sorfejtést választjuk, de a periodikus modelleknél Fourier-sorfejtést alkalmazunk.

Az effektív hatás alakja skaláris elméletekben általában

$$\Gamma_k = \int d^d x \left[ \frac{1}{2} Z_k(\phi_x) (\partial_\mu \phi_x)^2 + V_k(\phi_x) \right], \quad (2.21)$$

ahol  $Z_k \equiv Z_k(\phi_x) = Z_k(\phi, p)$  a hullámfüggvény renormálás. Ez a lokális potenciál közelítés (local potential approximation, LPA) utáni következő rend a gradiens kifejtésben. Amennyiben  $Z_k = 1$  választással dolgozunk, akkor LPA-ban számolunk. A gradiens kifejtés további tagjai lehetnek:

$$\Gamma_k = \int d^d x \left[ V_k(\phi_x) + \frac{1}{2} Z_k(\phi_x) (\partial_\mu \phi_x)^2 + H_1(\phi_x) (\partial_\mu \phi_x)^4 + H_2(\phi_x) (\square \phi_x)^2 + \dots \right]. \quad (2.22)$$

A (2.21)-ben felírt effektív hatást visszahelyettesítve a (2.19) Wetterich-egyenletbe

$$\dot{V}_k = \frac{1}{2} \int_p \frac{\dot{\mathcal{R}}_k}{Z_k p^2 + \mathcal{R}_k + \tilde{V}_k''} \quad (2.23)$$

adódik, ahol megjelenik egy  $d$ -dimenziós impulzusintegrál.

A Wetterich-egyenlet Minkowski-téridőben történő levezetésénél a kiindulópont ismét a generáló funkcionál, amelynek alakja ebben az esetben

$$Z_k = e^{\frac{i}{\hbar} W_k[J]} = \int \mathcal{D}[\phi] e^{\frac{i}{\hbar} (S_\Lambda + \mathcal{R}_k[\phi] + J \cdot \phi)}. \quad (2.24)$$

Az evolúciós egyenlet levezetése valós időben hasonló lépéseken keresztül történik, mint euklideszi téridőben, a regulátor alakjára is a korábbi feltételek érvényesek. A Wetterich-egyenlet alakja Minkowski-formalizmusban

$$\dot{\Gamma}_k = -i \frac{\hbar}{2} \text{Tr} \frac{\dot{\mathcal{R}}_k}{\Gamma_k'' - \mathcal{R}_k}. \quad (2.25)$$

### 2.3. Az evolúciós egyenletek összehasonlítása

A fentiekben levezetett, talán leggyakrabban használt renormálási csoport egyenletek által szolgáltatott evolúciók közötti különbségeket érdemes átgondolni, ami segíthet eldönteni az adott modellnél a megfelelő módszer kiválasztását. A Wetterich-egyenlet egyik nagy előnye, hogy széles körben, szinte bármely modellnél használható, míg a WH-egyenlet matematikailag egyszerűbben kezelhető, és az általa szolgáltatott eredmények fizikailag könnyebben értelmezhetők.

Az effektív hatásra vonatkozó Wetterich-egyenletben a renormálási skálától való függés csak a regulátorban jelenik meg, a hatás a levágásnál adott, és az egyenlet a regulátor tag nélkül triviális lenne. A WH-egyenletben a blokkosított hatást használjuk, amit ismerünk, és ez hordozza a skálafüggést is, így nincs szükség regulátorra.

A Wetterich-egyenletben használt effektív hatásban a térváltozó szerepét az eredeti tér várható értéke tölti be. Az effektív hatás kiszámolásakor a generáló funkcionálban található impulzusintegrált egy adott  $k$  skálaértékhez tartozó regulátorra végezzük el az UV-tól az IR-ig, ezek után pedig a  $k$  skálát csökkentve lépésenként megismételjük ezt az eljárást. Ezáltal különböző  $k$  értékekhez tartozó effektív hatások sorozatát kapjuk, vagyis az éppen aktuális skálán érvényes elméletek evolúcióit egy csökkenő  $k$  skálára felfűzve, az eredeti elmélet  $k$  skálán vett fejlődése helyett. A WH-egyenlet ezzel szemben végig az  $S_k$  blokkosított hatás evolúcióját követi az UV-ból az IR irányába.

A wilsoni RG formalizmusban a dinamikát a hatás szolgáltatja, ezzel írhatjuk le az elemi gerjesztéseket. A Wetterich-egyenletben megjelenő regulátor azonban módosítja a hatást, így az ebből származó dinamikát is, vagyis olyan új elméletet kapunk, amit az eredeti hatás és a bevezetett regulátor együtt definiál. A módusok eredeti diszperziós relációja is megváltozik, az elemi gerjesztések helyett az új elméletben kvázirészecske gerjesztéseket vezetünk be.

A Wetterich-egyenlet regulátorfüggése a segítségével kapott eredményekben is megjelenik. Az effektív átlagos hatás  $k \rightarrow 0$  limeszben az effektív hatást adja, azonban a  $k$  mindig véges marad, emiatt az evolúció során végig az EAA-ról kapunk információt, ami viszont regulátorfüggő. Az esetleges regulátorfüggés az EAA aszimptotikus viselkedésében mutatkozhat meg. Emiatt az IR skálán kapott effektív átlagos potenciál függ

a regulátortól. Ráadásul nem csak az IR-ben kapott fizika az érdekes a renormálásban, hanem maga a futás is hordoz fizikai tartalmat, amit a regulátor befolyásol. Erre példa a sine-Gordon modell, ahol az effektív potenciál a modell mindkét fázisában triviális, így a különböző fázisokat csak az alapján tudjuk megkülönböztetni, hogy a csatolások hogyan tartanak nullához. Ezek alapján a Wetterich-egyenlettel kapott eredmények regulátorfüggését fontos megvizsgálni.

A WH-egyenlet hátrányaként szokták említeni, hogy csak LPA-ban használható, a gradiens kifejtés magasabb rendjét nem képes kezelni. Ennek az okát az éles levágásban látják, azonban ha alaposan megvizsgáljuk ezt az állítást, akkor észrevehetjük, hogy az éles levágás nem befolyásolja a gradiens kifejtést. Erre példa lehet, ha a blokkosítást nem gömbhéjjal, hanem hengerekkel képzeljük el, akkor a hullámfüggvény renormálás számolható. Miért fontos számolnunk az LPA-n túl? A bevezetésben mutatott Landau-Ginsburg-elmélet alapján látszik, hogy a hullámfüggvény renormálás nulla közeli impulzusnál, vagyis végtelen közeli korrelációknál számít. Azonban a WH-egyenlet  $k$  skálája, ami a blokkosításnál a legnagyobb impulzus, a lehető legmesszebb van a zérustól. Ez egy komoly probléma a gradiens kifejtés használatánál. Azért kaphatunk mindezek ellenére nem-triviális eredményt, mert a  $k$  skálán kapott effektusok az impulzusban vett éles, Dirac-delta szerint megadott levágás a koordinátatérben (a Fourier-transzformáltban) minden méretskálán érezteti a hatását. A gradiens kifejtés problémáját úgy lehet orvosolni, hogyha nem-lokális kölcsönhatásokat vezetünk be [44]. A nem-lokalitás a gradiens kifejtés általánosításaként tekinthető, amelyből a kifejtés eredményei származtathatók [45].

### 3. fejezet

# Komplex csatolások a renormálásban

Nincs általános recept az evolúciós egyenletek Minkowski-téridőbeli alakjára. Ez nem csak technikai, hanem elvi kérdés is. Az RG blokkosítás során különböző méreetskálák járulékait hasonlítjuk össze, ami a nem-relativisztikus távolságskálák ismeretét tételezi fel. Ebből az következik, hogy az RG egyenletek Lorentz-invariáns megfogalmazása nem lehetséges. Van önkényesség a  $k$  skála megválasztásában is. Ebben a fejezetben a Minkowski-téridőben úgy vezetem le az evolúciós egyenletet, hogy a  $d$ -dimenziós impulzus nulladik komponensét, azaz a frekvenciát külön veszem a maradék térimpulzustól. A blokkosítást csak a térimpulzusban végzem el, a frekvenciára kiintegrálok. A frekvenciafüggés leválasztása hengeres szimmetriához vezet [41], ahol a henger lehet véges vagy végtelen méretű. A levágás ugyan sérti a Lorentz-szimmetriát, azonban nem lehetséges olyan nem-perturbatív regulátort választani, amely ellátja a feladatát és Lorentz-invariáns lenne [51], tehát minden esetben elveszítjük a Lorentz-szimmetriát az RG eljárás során, és ez a megközelítés legalább egy egyszerűbb keretet biztosít a probléma kezeléséhez. Az irodalomban több eredmény is alátámasztja, hogy Minkowski-formalizmusban a csatolások komplexszé válnak. A perturbatív renormálásban, a levonási sémánál, a skalár modellekben megjelennek a tömeg és a csatolások képzetes részei is. Ez a séma szorosan kapcsolódik a Wetterich-egyenlethez, mivel mindkét esetben vannak mesterséges skálák, nevezetesen a levonási skála és a  $k$

levágás, amelyek alapvető fontosságúak a leírásban. A hasonlóságnak két következménye van. Egyrészt várható, hogy a csatolások az effektív hatás evolúciójában is komplexek. Másrészt azt mutatja, hogy a levonási skála szerepe kevésbé tűnik fontosnak, mint a WH-egyenletekben. Mindazonáltal a WH-séma Minkowski-esetben megmutatta, hogy a  $(4-\varepsilon)$ -dimenziós  $\phi^4$  modellben eltűnik a Wilson-Fisher-fixpont (WFFP), mivel a csatolás képzetes része mindig ellentétes előjellel jelenik meg az evolúciókban, szemben a fixponti megoldás előjelével [41]. Ez az eredmény nem változik, ha a henger méretét megváltoztatjuk.

Azt vizsgálom, hogy az egykomponensű, 3 dimenziós  $\phi^4$  modellben a fixpont egy másik renormálási sémában esetleg megjelenik-e. A Wetterich-egyenletet használom a Litim-regulátorral, és levezetem az evolúciós egyenletet Minkowski-téridőben. Ismét a hengeres geometriai elrendezést használom, és a fázistér szerkezetét keresem a henger különböző magasságaihoz, ami megfeleltethető különböző frekvenciahatárok választásának. A csatolások ebben a formalizmusban is komplexszé válnak. Megkeresem a modell lehetséges fixpontjait a különböző frekvencialevágásokhoz. Reményeim szerint ez a számolási séma visszaállítja a modell ismert fázisszerkezetét, azonban az a várákozásom, hogy a fixpont komplexszé válik.

Megjegyzem, hogy nem kerülhetjük el a csatolások komplexszé válását, az nem csak a közelítés következménye. Ennek bemutatására vegyük a tömegcsatolást, mint egy egyszerű példát. Zárt rendszerekben egy stabil részecske tömegét a propagátor pólusa határozza meg. A Feynman-féle  $i\varepsilon$  beilleszthető a tömeg definíciójába, ami egy végtelenül kicsi imaginárius tömeget ad. A tömeg, mint csatolás, az IR irányban releváns módon fejlődik. Ha a rendszer nyílt, akkor a részecskék véges élettartamúvá válhatnak, így a tömeg képzetes része is végessé válik. Ez mutatja, hogy a tömeg, mint csatolás, mindenképpen képzetes.

Az elgondolás fontos eleme, hogy a rendszer legyen nyílt, ugyanis zárt rendszerek esetén a képzetes rész maradhat infintezimálisan kicsi. A renormálás során a rendszer módusait az RG blokkosítási lépések során a környezetbe elimináljuk. Amikor az RG eljárást a  $k = \Lambda$  levágási skálán kezdjük, feltételezzük, hogy a rendszer zárt. Az első RG blokkosítási lépés után az eliminált módusok a környezethez fognak tartozni, amit nem figyelünk meg, így az elmélet nyitottá válik [41, 43]. Azt mondhatjuk, hogy az RG módszer a dinamikát nyílttá teszi.

A renormálásban a nyílt rendszerek egyik jellemzője a komplex csatolások megjelenése. Természetesen ezek a csatolások valósakká válnak zárt rendszer limeszben, azaz amikor a környezettel való kölcsönhatás elhanyagolható. Mivel a komplex csatolások nem jelennek meg az euklideszi RG formalizmusban, ez azt jelenti, hogy a Minkowski-formalizmus pontosabb tárgyalást ad.

A komplex csatolások radikálisan megváltoztathatják a fázisszerkezetet. Először is, kétszer annyi csatolásunk van, ami megduplázza a fázistér dimenzióját, továbbá az evolúció bizonyos szinguláris viselkedése eltűnhet, vagy akár új jelenhet meg. A szingularitásra példa lehet a spinodális instabilitás problémája [52, 53], ahol nagy mennyiségű lágy módus jelenik meg, ami a propagátort szingulárisrá teszi, és véges kondenzátumot hoz létre a rendszerben. A mechanizmusnak számos alkalmazása és fizikai következménye van. A Minkowski-téridőben azonban a tömegcsatolás imaginárius részévé teszi a propagátort, ezért a spinodális instabilitás eltűnhet [41]. Egy másik fontos szinguláris viselkedés az UV határesetben jelenik meg, amikor az evolúció egy bizonyos UV skálán a Landau-pólusba fut, ahol a csatolás felrobban. Ez a szingularitás is elkerülhetővé válhat a komplex csatolásokkal [41], ami felveti annak a lehetőségét, hogy a  $\phi^4$  modell aszimptotikusan szabaddá válik 4 dimenzióban.

A másik modell, amit Minkowski-téridőben megvizsgálunk, a 2-dimenziós (2d) sine-Gordon (SG) modell. A modellnek sok alkalmazása van a modern fizikában [54, 55, 56, 57, 58, 45]. A SG modell  $Z_2$  szimmetriával rendelkezik, azaz  $\phi_x \rightarrow -\phi_x$ , továbbá a belső térben periodikus, vagyis  $\phi_x \rightarrow \phi_x + 2\pi$ . A modell Kosterlitz-Thouless (KT) típusú végtelen rendű fázisátalakulást mutat [59, 60] a Coleman-fixpont körül. Az SG modell az RG módszer fontos vizsgálati területének bizonyult. A hagyományos euklideszi formalizmusban az SG modellnek két fázisa van, egy szimmetrikus és egy szimmetriasértett fázis, ahol az utóbbiban a diszkrét  $Z_2$  szimmetria sérül. Fontos megjegyezni, hogy az RG eljárás során a periodicitás megmarad [56, 61].

### 3.1. Evolúciós egyenlet

Euklideszi téridőben, gömbszimmetrikus elrendezésben, az evolúciós egyenlet

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \int_p \frac{\dot{\mathcal{R}}}{p^2 + \mathcal{R} + V''}, \quad (3.1)$$

ahol  $\mathcal{R}$  a regulátor, és az integráljel  $d$ -dimenziós  $p$ -szerinti impulzus integrált jelöl. A  $\dot{\phantom{x}} = k\partial_k$  jelölést a renormálási skála szerinti differenciálásra használjuk. A problémát a lokális potenciál közelítésben (LPA) tekintjük, ennek térfüggetlen terrenormálással javított verzióját a 3.2.3.2 részben ismertetjük. Bevezetjük az  $y = p^2/k^2$ ,  $r = \mathcal{R}/p^2$  és  $\tilde{V} = V/k^2$  dimenziótlan mennyiségeket. Ezek után az evolúciós egyenlet

$$\dot{V} = \frac{1}{4} \alpha_d k^d \int_0^\infty y^{d/2-1} dy \frac{-2r'y^2}{y + yr + \tilde{V}''}. \quad (3.2)$$

A következő alakban felírt Litim-regulátort alkalmazzuk:

$$r = \left( \frac{1}{y} - 1 \right) \theta(1 - y) \quad (3.3)$$

A Wetterich-egyenlet így

$$\dot{V} = \alpha_d k^d \frac{1}{d} \frac{1}{1 + \tilde{V}''}, \quad (3.4)$$

ahol a  $\sim$  jelölés a dimenziótlan mennyiségeket jelzi. Az együttható az  $\alpha_d = \Omega_d/(2\pi)^d$  összefüggésből következik, ahol  $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ . Amennyiben hengeres szimmetriát használunk, az evolúciós egyenlet alakja

$$\dot{V} = \frac{\alpha_{d-1}}{2\pi} \frac{1}{d-1} k^d \int_\omega \frac{1}{\omega^2 + 1 + \tilde{V}''}, \quad (3.5)$$

ahol  $\int_\omega = \int_{-\infty}^\infty d\omega$  és  $\omega$  dimenziótlan. A frekvencia integrál elvégzése után

$$\dot{V} = \frac{\alpha_{d-1}}{(d-1)\pi} \frac{k^d}{\sqrt{1 + \tilde{V}''}} \arctan \frac{\Omega}{\sqrt{1 + \tilde{V}''}}, \quad (3.6)$$

ahol bevezettük az  $\Omega$  dimenziótlan frekvencia levágást. Az  $\Omega \rightarrow \infty$  végtelen hosszú henger határesetben,  $d = 3$  választásnál

$$\dot{V} = \frac{1}{8\pi} \frac{k^3}{\sqrt{1 + \tilde{V}''}}. \quad (3.7)$$

A Wetterich-egyenlet Minkowski-téridőben a következő alakban adható meg [62, 10]

$$\dot{\Gamma} = -i \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\dot{\mathcal{R}}}{\Gamma'' - \mathcal{R}}, \quad (3.8)$$

amiből a potenciál evolúciós egyenletét származtathatjuk

$$\dot{V} = i \frac{\alpha_{d-1}}{2\pi} \frac{1}{d-1} k^d \int_{\omega} \frac{1}{\omega^2 - 1 - \tilde{V}''}. \quad (3.9)$$

A frekvencia integrál elvégzése után az egyenlet

$$\dot{V} = -i \frac{\alpha_{d-1}}{2\pi} \frac{1}{d-1} k^d \frac{2}{\sqrt{1 + \tilde{V}''}} \operatorname{arctanh} \frac{\Omega}{\sqrt{1 + \tilde{V}''}}. \quad (3.10)$$

## 3.2. A skalár modell

Első lépésként veszem az egykomponensű skalártér elméletet a következő potenciállal:

$$V = \sum_{n=1}^N \frac{g_{2n}}{(2n)!} \phi^{2n}. \quad (3.11)$$

Az első két csatolásra euklideszi téridőben az alábbi evolúciós egyenleteket kapom:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{g}}_2 &= -2\tilde{g}_2 - \frac{\alpha_{d-1}\tilde{g}_4}{\pi(d-1)} \left( \frac{1}{2\omega_k^3} \arctan \frac{\Omega}{\omega_k} + \frac{\Omega}{2\omega_k^2(\omega_k^2 + \Omega^2)} \right), \\ \dot{\tilde{g}}_4 &= (d-4)\tilde{g}_4 + \frac{\alpha_{d-1}\tilde{g}_4^2}{\pi(d-1)} \left( \frac{9}{4\omega_k^5} \arctan \frac{\Omega}{\omega_k} + \frac{3\Omega(3\Omega^2 + 5\omega_k^2)}{4\omega_k^4(\omega_k^2 + \Omega^2)^2} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

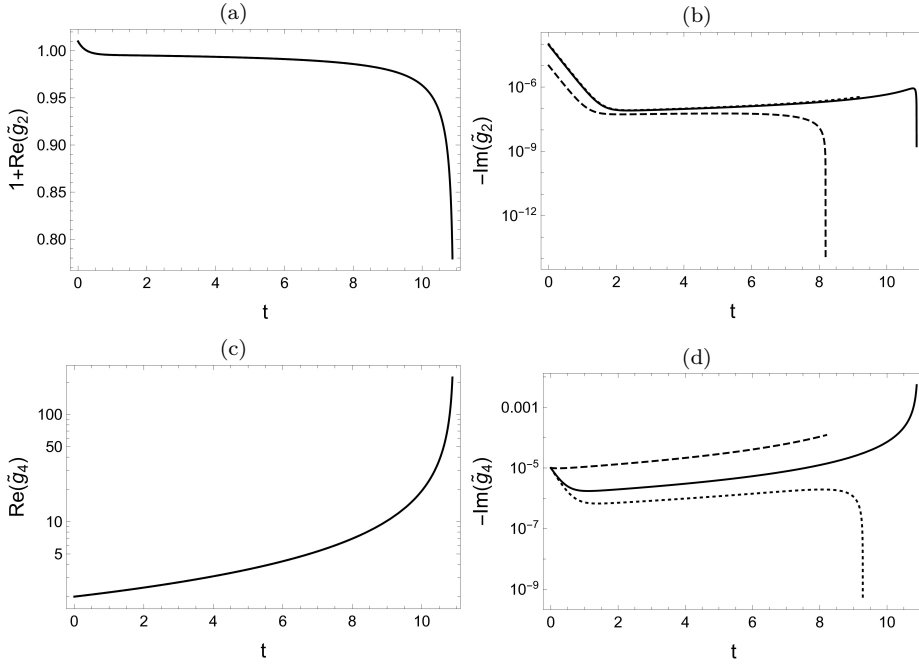
ahol  $\omega_k = \sqrt{1 + \tilde{g}_2}$ . Bevezetem a dimenziótlan  $\tilde{g}_{2n} = g_{2n}k^{d-n(d-2)}$  csatolásokat. Minkowski-formalizmusban az egyenletek

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{g}}_2 &= -2\tilde{g}_2 + i \frac{\alpha_{d-1}\tilde{g}_4}{\pi(d-1)} \left( \frac{1}{2\omega_k^3} \operatorname{arctanh} \frac{\Omega}{\omega_k} + \frac{\Omega}{2\omega_k^2(\omega_k^2 - \Omega^2)} \right), \\
\dot{\tilde{g}}_4 &= (d-4)\tilde{g}_4 - i \frac{\alpha_{d-1}\tilde{g}_4^2}{4\pi(d-1)} \left( \frac{9}{\omega_k^5} \operatorname{arctanh} \frac{\Omega}{\omega_k} + \frac{3\Omega(-3\Omega^2 + 5\omega_k^2)}{\omega_k^4(\omega_k^2 - \Omega^2)^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Ezután megvizsgálom az egyenleteket különböző dimenziókban, és megkeresem a modell általános tulajdonságait és fázisszerkezetét. Meg kell jegyezni, hogy a komplex argumentumú  $\operatorname{arctanh}$  függvények megjelenése komoly technikai és numerikus nehézségeket okoz.

### 3.2.1. 4-dimenzió

A realiztikus, 4-dimenziós modellben csak egyetlen, gaussi fixpont (GFP) létezik, függetlenül az  $\Omega$  frekvencialevágás értékétől. Az UV skálázást vizsgálom, és csak a  $g_2$  és  $g_4$  csatolásokat tartom meg. Mivel a többi csatolás irreleváns és divergálnak nagy energiáknál, ezért azokat kinullázom. Ahhoz, hogy az elmélet stabil maradjon,  $\operatorname{Im}(\tilde{g}_4) < 0$  kell legyen, így amennyiben ez az előjelét az UV skálán  $\Lambda_4$  értéknél megváltoztatja, akkor meg kell állítani az evolúciót. Az  $\operatorname{Im}(\tilde{g}_2)$  előjelváltása szintén nem megengedett, mivel az időirányt változtatja meg. Numerikusan azt kaptam, hogy az előjelváltások miatt az evolúció mindig megáll, ezért a komplex csatolások bevonásával nem oldható meg a trivialisitás problémája. Ugyanezt a viselkedést írja le [41] is. A 3.1 ábrán kirajzoltam a lehetséges futásokat az UV irányban, a  $t = \lg k$  összefüggést felhasználva és  $\operatorname{Re}(\tilde{g}_2(\Lambda)) = 0.01$ ,  $\operatorname{Re}(\tilde{g}_4(\Lambda)) = 2$ ,  $\operatorname{Im}(\tilde{g}_4(\Lambda)) = -10^{-5}$  értékeket választva. A kezdeti értékek finomhangolásával olyan futást találhatunk, amely spinodális instabilitást mutat az UV irányban, ahol minden csatolás szinguláris, azaz  $1 + \Re(\tilde{g}_2) \rightarrow 0$ ,  $\tilde{g}_4 \rightarrow \infty$  és  $\operatorname{Im}(\tilde{g}_2) \rightarrow 0$  egyszerre. Eredményeim szerint nem lehetséges tetszőlegesen nagy UV skálák elérése. Megjegyzem, hogy az UV skálázási viselkedés a megállási feltételtől függően két fázist mutat, ami vagy a  $\operatorname{Im}(\tilde{g}_2)$  előjelének, vagy a  $\operatorname{Im}(\tilde{g}_4)$  előjelének megváltozásából adódik. A további csatolások nem befolyásolhatják ezt az eredményt, mivel irreleváns jellegük miatt kizárom őket az UV-fejlődésből.



3.1. ábra. Az ábrák a csatolások fejlődését mutatják  $d = 4$  esetben az ultraibolya irányban. A evolúció leáll, vagy  $\text{Im}(\tilde{g}_2)$  (szaggatott vonal), vagy  $\text{Im}(\tilde{g}_4)$  (pöttyözött vonal) előjelváltásánál. Határesetben megjelenhet spinodális instabilitás is (sima vonal). A  $\text{Im}(g_2)$  kezdeti értékei  $-10^{-4}$  (pöttyözött vonal),  $-9.1 \times 10^{-5}$  (sima vonal), és  $-10^{-5}$  (szaggatott vonal).

### 3.2.2. (4- $\varepsilon$ )-dimenzió

Vizsgálataim során két új csatolást vezettem be, ezért először meg kell néznem, hogy mi történik a hagyományos fixpontokkal. Arra számítottok, hogy a  $d = 4 - \varepsilon$  esetben a modellben van egy nem-gaussi fixpont, nevezetesen a WFFP. A dimenzióknak ebben a speciális esetében a fixpontok értékei várhatóan úgy viselkednek, mint  $\tilde{g}_2^* \sim \tilde{g}_4^* \sim \varepsilon$ , ami lehetőséget ad a perturbatív vizsgálatra. Miután a béta függvényeket a csatolásokban sorba fejtem, egy analitikusan megoldható algebrai egyenletrendszert kapok. A számítások során paraméterként jelenik meg az  $\Omega$  frekvencia levágás. A (3.12) és (3.13) egyenletekből indulok ki és a csatolásokban kifejttem őket. Csak a  $\tilde{g}_4$ -ban kvadratikus tagokat tartom meg. Az euklideszi béta függvé-

nyek az  $\Omega$  minden értékére érvényesek. A Minkowski-esetben használható az

$$\operatorname{arctanh} \Omega = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{\Omega + 1}{\Omega - 1} - \gamma i \pi \right), \quad (3.14)$$

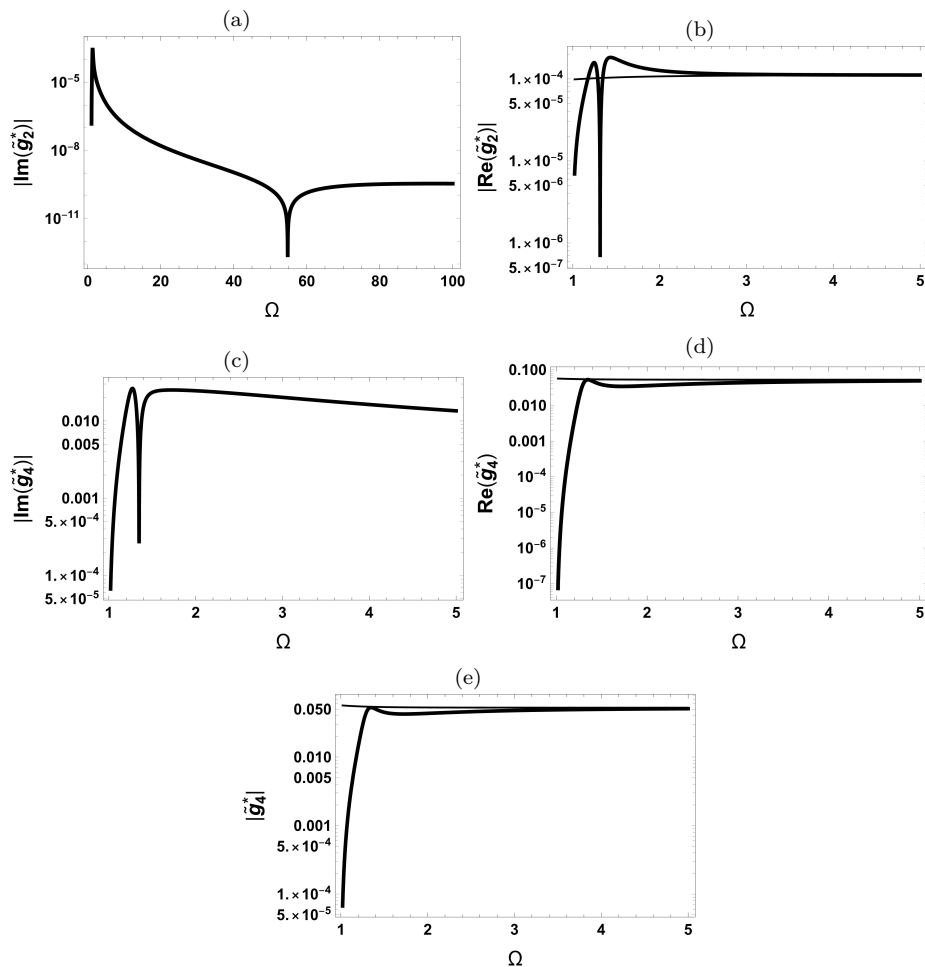
azonosság, ahol  $\gamma = \operatorname{sign}(\operatorname{Im}(\tilde{g}_2))$ . Ezt használva felbontható a problémás  $\operatorname{arctanh}$  függvény a valós és képzetes részeire, valamint az  $\alpha_{3-\varepsilon} \approx \alpha_3 = 1/2\pi^2$  közelítéssel élve tovább egyszerűsödik a számolás. Az látható, hogy a (3.14) egyenletben szingularitás van  $\Omega = 1$  esetben, így tehát csak az  $\Omega > 1$  tartományban vizsgálódhatok. Ezzel a Minkowski-téridőben kapott béta függvények alakja:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{g}}_2 &= -2\tilde{g}_2 + i \frac{\tilde{g}_4}{24\pi^3} \left( \ln \frac{\Omega + 1}{\Omega - 1} + \frac{2\Omega}{1 - \Omega^2} - \gamma i \pi \right), \\ \dot{\tilde{g}}_4 &= -\varepsilon \tilde{g}_4 - i \frac{3\tilde{g}_4^2}{16\pi^3} \left( \ln \frac{\Omega + 1}{\Omega - 1} + \frac{2\Omega(-3\Omega^2 + 5)}{3(1 - \Omega^2)^2} - \gamma i \pi \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Amennyiben az  $\Omega$  véges, a béta függvényeknek véges képzetes része van, ezért a csatolások komplexek lesznek, szemben az euklideszi számítással, ahol a csatolások valósak maradnak. A  $\Omega \rightarrow \infty$  határesetben a béta függvények a Minkowski-számításokban is valósak lesznek, azonban a WFFP eltűnik a  $\gamma$  rossz előjele miatt. Ebben a határértékben ugyanazokat az eredményeket kaptam, mint az éles levágás alkalmazása során [41].

Megkerestem a (3.15) fixponti megoldásait. Könnyen látható, hogy van egy GFP, ami megfelel a standard aszimptotikusan szabad elméletnek. Találtam azonban egy másik, nem-triviális fixpontot is, amely a WFFP-vel azonosítható. A WFFP értékeit a 3.2-ben ábrázoltam. Az elmélet stabilitásához az szükséges, hogy a fixponti csatolások képzetes részei negatívak legyenek. Azt találtam, hogy az  $1.5 \leq \Omega \leq 50$  régióban az  $\operatorname{Im}(\tilde{g}_2^*)$  értéke negatív, a  $\tilde{g}_4^*$  előjele pedig mindig negatív, függetlenül az  $\Omega$  értékétől. A  $\operatorname{Re}(\tilde{g}_2^*)$  előjele szintén negatív, pontosan úgy, mint az euklideszi számítások esetén. Amikor  $\Omega \geq 50$ , az  $\operatorname{Im}(\tilde{g}_2)$  csatolás megváltoztatja előjelét pozitívrá és meg is tartja az  $\Omega \rightarrow \infty$  határesetben. A modell stabil marad, mivel az  $\operatorname{Im}(\tilde{g}_4)$  negatív, és ez az energiát alulról korlátossá teszi.

A  $\operatorname{Im}(\tilde{g}_2)$  pozitív előjele azonban nem esik egybe a szabványos Feynman-féle előjelkonvencióval. Összefoglalva megállapítható, hogy a frekvencia levágásnak van egy olyan tartománya  $1.5 \leq \Omega \leq 50$ -nál, ahol a modell stabil, és van egy WFFP.



3.2. ábra. Az ábrán a fixpont értékei láthatóak  $d = 4 - \varepsilon$  esetben. Az (a) ábra a  $\text{Im}(\tilde{g}_2)$  abszolút értékét mutatja. Az előjelváltásoknak a csúcsok felelnek meg. A (b) ábrán a  $|\text{Re}(\tilde{g}_2^*)|$  értékeit adom meg, a vékony vonal az euklideszi értéket mutatja. A (c) és (d) ábrákon a  $\tilde{g}_4$  csatolás fixponti értékeit láthatjuk. Az (e) ábra a  $|\tilde{g}_4^*|$  értékét mutatja.

Ami itt igazán meglepő, az a WFFP komplexsége válása. Ahogyan kifejtettem, a csatolások komplexekké válnak a fejlődés során. Az előbbi egyszerű analitikus eredmények alapján látható, hogy maga a fixpont is komplex értékűvé válik. Ez azt jelenti, hogy a valós idejű elmélet a fixpont

körül másképpen viselkedik, mint a hagyományos euklideszi elmélet. A  $\tilde{g}_2$  véges képzetes része arra utalhat, hogy vannak véges élettartamú módusok, amelyek lényegében disszipatívúvá teszik a modellt. Sajnos ebben a keretben, ahol egyetlen időtengelyt használunk, nehezen lehet azonosítani a környezetet és a disszipatív folyamatokat. Ahhoz, hogy ezeket megtaláljuk, a Schwinger-Keldysh-formalizmust kellene használnunk, amely két időtengelyt tartalmaz. A véges élettartam megjelenése (a  $\tilde{g}_2$  véges képzetes része) arra utal, hogy kiléptünk a zárt rendszerek tartományából, és a blokkosítás során az elmélet nyitottá vált.

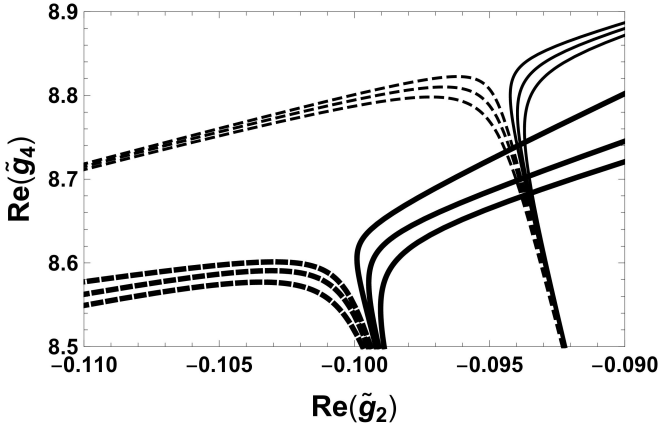
A  $\tilde{g}_4$  csatolás komplex jellege talán nem tűnik olyan drámainak, hiszen a számítások során, pl. szórási folyamatokban, mindig a  $|\tilde{g}_4|^2$  mennyiség jelenik meg. Ez az oka annak, hogy ezt a mennyiséget ábrázoltam a 3.2 alsó (e) ábráján.

### 3.2.3. 3-dimenzió

A 3-dimenziós esetben a vizsgálat nem végezhető el perturbatív módon. Elsőként megnéztem, hogy mi történik a modell fixpontjaival. Megtaláltam a GFP-t, hasonlóan az éles levágás esetéhez [41]. Azt kaptam, hogy a Wetterich-egyenletet Litim-regulátorral használva, létezik egy WFFP Minkowski-téridőben, és ez komplex értékeknél található. Éles levágás esetén a WFFP nem jelent meg. A 3.3 mutatja a fázisábrát a WFFP közelében. Az  $\Omega = 1.5$  választással számoltam, hogy a képzetes értékek a lehető legnagyobbak legyenek. A fixponti értékek  $\text{Re}(\tilde{g}_2^*) = -0.1$ ,  $\text{Im}(\tilde{g}_2^*) = -0.027$ ,  $\text{Re}(\tilde{g}_4^*) = 8.64$ , és  $\text{Im}(\tilde{g}_4^*) = 0.23$  amennyiben csak két tagot veszek figyelembe (3.11)-ben.

Kiszámítottam a skálázási exponenseket, azaz a stabilitási mátrix sajátértékeit, amelyek a béta függvény linearizálásából származnak a WFFP körül. (A GFP esetén ezek  $s_1 = -2$ , és  $s_2 = -1$ , ahogyan az várható.) Kiderült, hogy a  $2 \times 2$  mátrixnak két komplex sajátértéke van. Ha a fázistérre úgy tekintünk, mint a 2 komplex csatolás 4 valós paraméterének terére, akkor a 4 dimenziós mátrixból származó skálázási exponensek a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned} s_1 &= -1.911 + i0.072, & s_2 &= -1.905 - i0.07, \\ s_3 &= 1.097 - i0.0066, & s_4 &= 1.049 - i0.0142. \end{aligned} \quad (3.16)$$

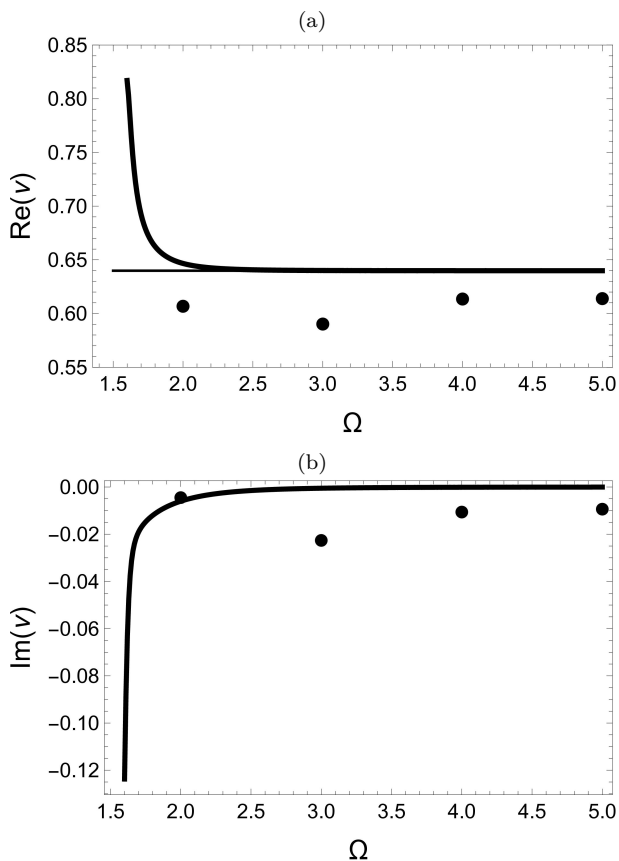


3.3. ábra. Az ábra a Wilson-Fisher-fixpontok körüli skálázásokat  $d = 3$  esetben mutatja be. A vastag (vékony) görbék a Minkowski- (euklideszi) evolúciónak felelnek meg. A szaggatott vonalak a szimmetriasértett fázishoz tartoznak, míg a folytonos vonalak a szimmetrikus fázishoz.

A fázistérben 2 releváns és 2 irreleváns irányt találtam. Bár a Minkowski-féle megközelítés megduplázza a fázistér dimenzióját, a WFFP nyeregponti jellege változatlan marad. Megjegyzem, hogy a WFFP hiperbolikus szerkezetének visszanyerése nehezebb, mint az euklideszi tárgyalásban, mivel valós időben két releváns csatolás adódik.

Kiszámítottam a korrelációs hossz  $\nu$  kritikus exponensének értékét is a WFFP esetében, a (3.16) egyenletbeli negatív valós értékű skálázási exponensből, amely szintén komplex érték lett. A WFFP-hez tartozó  $\nu$  valós és képzetes részét az  $\Omega$  különböző értékeire ábrázoltam a 3.4 ábrán. A valós része elég közel van az euklideszi számításokhoz. A számolások során 4 csatolást vettem figyelembe, ami azt jelenti, hogy 8 csatolás evolúcióját követtem, mivel ezek komplexek. Ez a közelítés elég megbízható eredményeket ad az LPA-ban. A 3.4 ábrán látható, hogy amikor  $\Omega$  az 1 felé tart, az exponens jelentősebben változik, a béta függvények szinguláris viselkedése miatt. A viszonyítás kedvéért az euklideszi téridőre vonatkozó  $\nu$  értékeket is ábrázoltam. Ezek kevésbé érzékenyek a  $\Omega$  értékeire. Ahogy az  $\Omega$  a Minkowski-számításban nagyobb értékek felé tart, a valós rész az euklideszi eredmény felé közelít, a képzetes rész pedig nullához tart. Az eredmény tehát erős  $\Omega$ -függést mutat. Van egy határértéke a  $\Omega$ -nak, ahol

a  $\text{Im}(\tilde{g}_2)$  előjele pozitívvá válik, ekkor a fixpont eltűnik.

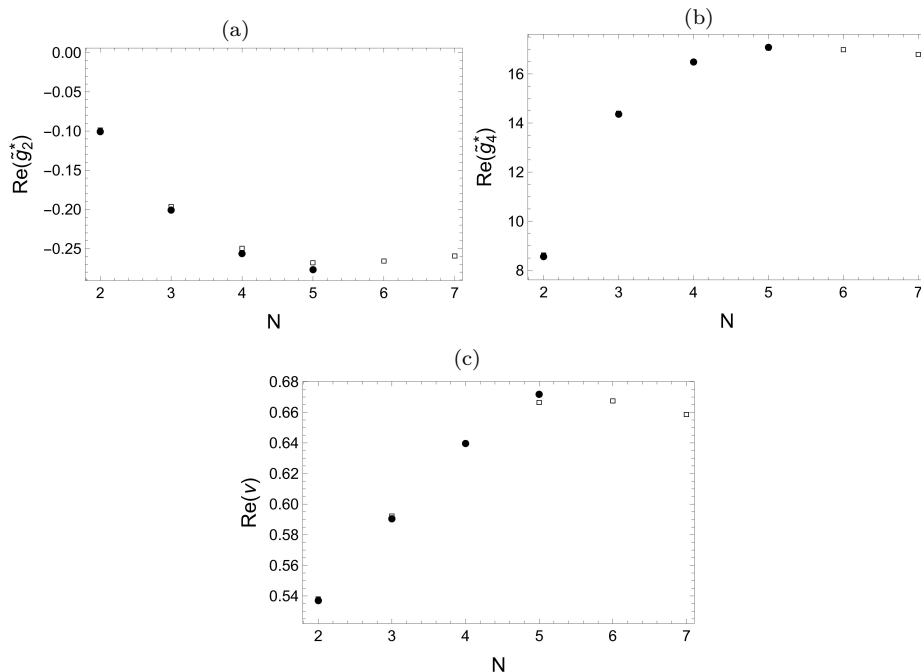


3.4. ábra. A korrelációs hossz  $\nu$  kritikus exponensét ábrázoltam. Az (a) ábrán a  $\nu$  valós része látható, míg a (b) ábrán a képzetes. A vastag (vékony) görbék rendre a Minkowski- (euklideszi) geometriának felelnek meg. A pontok az  $\eta$  anomális dimenziót is tartalmazó számításokat jelölik.

### 3.2.3.1. Az eredmények konvergenciájáról

Ezekben a számításokban 4 csatolást vettem figyelembe, amelyek mindegyike komplex volt. Ahhoz, hogy megmutassam, hogy ez a számú csatolás elegendő, meg kell vizsgálni néhány fizikailag releváns mennyiség konvergenciáját, amelyet a 3.5 ábrázol. Látható, hogy az euklideszi formalizmust

használva nagyobb  $N$  értékekig mehetünk el. A fizikai mennyiségek konvergenciája az ábrán egyértelműen látszik.



3.5. ábra. Néhány fizikailag fontos paraméter konvergenciája látható az  $\Omega = 3$  levágásnál. Az (a) ábrán a WFFP  $\text{Re}(\tilde{g}_2^*)$  koordinátája van ábrázolva a (3.11) egyenletben található potenciál Taylor-sorfejtésénél használt  $N$  csonkolás függvényeként. A (b) ábrán  $\text{Re}(\tilde{g}_4^*)$  látható. A teli karikák reprezentálják a Minkowski-formalizmusban kapott eredményeket, míg az üres karikák az euklideszi eredményeket jelölik. Az ábra (c) részében a korrelációs hossz  $\nu$  kritikus exponensének változása látható.

A számítás alapvetően kétféleképpen végezhető el a Minkowski-formalizmusban. Az egyik lehetőség az, hogy a csatolásokat és a béta függvényeket eredeti komplex formájukban megtartjuk, ami viszonylag egyszerű alakú egyenleteket eredményez. Sajnos ennek a módszernek van egy komoly hátránya, nevezetesen, hogy a numerikus eljárások nem elég jól használhatók komplex formalizmusban, inkább a valós függvényeket részesítik előnyben. Így a gyökkereső algoritmusok csak nagy nehézségek árán használhatók. A másik lehetőség az csatolások és a béta függvények

valós és képzetes részre bontása. Ekkor ugyan minden függvény valós lesz, és a szokásos numerikus eljárások könnyen alkalmazhatók, de a probléma dimenzióját meg kell duplázni. Például, ha  $N = 4$ , akkor az euklideszi formalizmusban 4 egyenletből kell megfelelő gyököt találnunk, azonban ahhoz, hogy a Minkowski-formalizmusban megmaradjon az azonos közelítési szint, 8 egyenletből kell megoldást találnunk. Sajnos ez csak egy része a felmerülő nehézségnek. A másik, hogy az  $\arctanh$  függvény komplex argumentumokkal nem analitikus. Ez azt jelenti, hogy egy komplex kifejtés után több részre bomlik. Végül 8 béta függvényt kapunk több ezer taggal, és ez a szám exponenciálisan nő, ahogy  $N$  nagyobb lesz. Ezen tények miatt az  $N$  növelése meglehetősen korlátozott.

Számításaimban  $N = 4$  választással élek, ami összhangban van a 3.5-ben szereplő eredményekkel, továbbá kezelhető numerikus problémát biztosít. Nagyobb  $N$  értékek pontosabb eredményeket adhatnak, de a céloom annak megmutatása, hogy a Minkowski-formalizmus hengeres szimmetriával konvergens és megbízható eredményeket adhat a  $\nu$  exponensre, ami már ezzel a választással is sikerül. Természetesen ez a technika pontosságban elmarad a standard euklideszi számításoktól (pl. Litim regulátor, polinomiális béta függvények).

### 3.2.3.2. Az LPA-n túl

Jól ismert tény, hogy 3-dimenzióban érdemes az LPA-n javítani magasabb rendű tagok megtartásával a gradiens kifejtésben [63, 64, 65, 66, 67]. A térfüggő térrenormálás a számolásokat technikailag kezelhetetlenné teszi, habár egy ügyes trükk segíthet az LPA-n túl az exponensek kiszámításának javításában: be tudjuk vezetni az anomális dimenziót a térrenormálás tértől független részén keresztül. Ezt a közelítést általában LPA'-nek nevezik. Hozzáadjuk az  $\eta$  anomális dimenziót a tér dimenziójához, ezzel megváltoztatva a  $g_{2n}$  csatolások dimenzióját a  $d - n(d - 2) \rightarrow d - n(d - 2 + \eta)$  áttérésnek megfelelően. Az anomális dimenziót az alábbi kifejezésből számolhatjuk ki

$$\eta = \frac{\alpha_{d-1}}{2\pi(d-1)} (\tilde{V}'''(\phi_0))^2 \int_{\omega} \frac{1}{(\omega^2 + 1 + \tilde{V}'''(\phi_0))^4}, \quad (3.17)$$

ahol  $\phi_0$  az  $\tilde{V}'(\phi_0) = 0$  egyenlet megoldása [49]. Sajnos az  $\eta$  kiszámítása numerikusan még komplikáltabbá teszi a problémát, ezért az exponenseket

$\Omega$	$\eta$
2	0.0424 - 0.103 i
3	0.0292 - 0.147 i
4	0.0396 - 0.118 i
5	0.0404 - 0.118 i

3.1. táblázat. Az  $\eta$  anomális dimenzió értékei az  $\Omega$  frekvencia levágás függvényében.

csak néhány  $\Omega$  értékre tudtam meghatározni, ezeket a 3.4 ábrázolja. Ahogy az várható volt, az anomális dimenzió kissé módosítja az exponensek értékeit. A numerikus eredmények kevésbé pontosak, mivel a (3.17)-ben szereplő integrál  $\arctanh$  függvényt ad komplex argumentumokkal, hasonlóan az (3.10) egyenlet esetéhez. Továbbá garantálni kell azt is, hogy  $\phi_0$  valós és pozitív legyen. Az exponens értéke  $\nu \approx 0.61 - 0.01i$ , és az is kiderül, hogy az  $\Omega$  nagyobb értékei stabilabb eredményeket adnak. Az anomális dimenzió értékei a 3.1 táblázatban találhatóak.

A  $\nu$  értékeihez hasonlóan, az  $\eta$  anomális dimenzió is komplex lesz:  $\eta \approx 0.04 - 0.1i$ . A valós része megegyezik a standard eredményekkel, míg a képzetes része abszolút értékben egy nagyságrenddel nagyobb, mint a valós rész.

Az általam alkalmazott RG eljárás egyértelműen megsérti a Lorentz-szimmetriát. Mivel a frekvenciát külön kiintegrálom, a hullámfüggvény renormálását anizotróp módon kezelem. Ennél pontosabb módszer lehet különböző hullámfüggvény renormálás bevezetése az időre (vagy frekvenciára) és a koordinátára (vagy térbeli impulzusra). Ez kompenzálhatná a véges frekvencia aszimmetriát és egy jobb eljárási módot adhatna. Úgy gondolom, hogy a 3-dimenziós  $\phi^4$  modellben az exponensek nem olyan érzékenyek az anizotrópiára, és az általam kapott eredmények helyesek. Ezt támasztja alá az, hogy a gömb- és hengersizmetrikus eredmények nem térnek el szignifikáns módon. Ha a tér- és időirányban eltérő hullámfüggvény renormálást veszek, az szintén sérti a Lorentz-szimmetriát. Későbbi eredményeim a gravitációs modellben azt mutatják, hogy ez az UV irányban válik fontossá.

A Minkowski-téridőben számolt evolúció az aszimptotikusan biztonságos gravitációs modell esetén még lényegesebb lehet, mivel a Lorentz-invariancia alapvető szimmetria a gravitációt leíró modellekben, és az UV tartományban van egy Reuter-fixpont. A vizsgálat során azonban komoly problémába ütköztem. A modellt Minkowski-formalizmusban tanulmányoztam a Litim-regulátor segítségével, és a béta függvényeket hengeresen szimmetrikus esetben számoltam ki. Ezek euklideszi és Minkowski-téridőben majdnem azonosak, az egyetlen különbség a kozmológiai csatolás imaginárius részét tartalmazó előjelfüggvény szorzótényezőjében van. Sajnos a Reuter-fixpont nem jelenik meg a modellben, mivel annak képzetes része rossz előjellel jelenik meg. Ellenőriztem, hogy a fixpont nincs jelen egyetlen véges henger esetében sem. Az azonban nem zárható ki, hogy a fixpont egy másik regulátorral visszanyerhető.

### 3.3. Periodikus potenciál

Az alábbi hatásból indulok ki:

$$S = \int_x \left( \frac{1}{2\beta^2} (\partial_\mu \phi)^2 - V \right), \quad (3.18)$$

ahol az integrálás a 2 dimenziós  $x$  koordinátára történik. Az egyetlen Fourier-módust tartalmazó periodikus potenciál alakja

$$V = u \cos \phi. \quad (3.19)$$

A hatásban a kinetikus kifejezésben megjelenik a  $\beta$  hullámszám a térváltozó átskálázása után. Feltételezem, hogy a csatolás komplex, azaz  $u = u_r + iu_i$ . Elsőnek a Callan-Symanzik-regulátort (CS) választom,  $\mathcal{R} = k^2$ , ami impulzusfüggetlen. Felhasználva a (3.10) egyenletet a potenciál evolúciójára azt kapom, hogy

$$\dot{V} = \frac{\beta^2}{4\pi} \text{sign}(-u_i) k^2 \ln(k^2 - u \cos \phi). \quad (3.20)$$

Az egyenlet hasonló a WH-egyenlet keretében kapott evolúcióhoz, kivéve az előjel-tényezőt. A béta függvény azt mutatja, hogy meg kell adnunk az  $u_i$  kezdeti értékét. A csatolás fejlődését az

$$\dot{u} = -2\tilde{u} + \gamma \frac{\beta^2}{2\pi\tilde{u}} \left( 1 - \sqrt{1 - \tilde{u}^2} \right) \quad (3.21)$$

egyenlet mutatja, ahol dimenziótlan mennyiségeket használtam, vagyis  $\tilde{u} = u/k^2$ , és bevezettem a  $\gamma = -\text{sign}(u_i)$  jelölést.

A CS-regulátorral van egy nagyon komoly probléma, nevezetesen, hogy nem megfelelően regularizálja az integrálokat. Az impulzusintegrálok divergensnek maradnak, pontosabban 2 dimenzióban a felső  $\Lambda$  levágásban egy logaritmikusan divergens kifejezés van, ami  $u/\Lambda$  rendű tagokat visz be az evolúcióba. Ez nem okoz túl nagy problémát a fejlődések leírásánál, de praktikus elkerülni, ahol lehetséges. Az impulzusfüggő regulátorok, pl. a hatványfüggvény (power-law) regulátor végessé teszi az integrált. A CS-regulátor ezen hátránya mellett van néhány előnye is. Meg kell említeni, hogy ez az egyetlen nem-perturbatív regulátor, amely Lorentz-invariáns. Ha szeretnénk megtartani a Lorentz-szimmetriát, akkor a CS-regulátor jó választás. További előnye ennek a regulátornak, hogy a (3.21) evolúciós egyenletet analitikus formában kaphatjuk meg. Bár ez csak esztétikai kérdésnek tűnhet, de csak ebben a formában lehet feltárni a modell szokatlan IR skálázási viselkedését [57], és megmutatható, hogy az IR és UV skálázás kölcsönösen átalakítható egymásba, mint a kettős kapcsolat egy speciális formája [68]. Az is ismert, hogy a SG modell aszimptotikusan biztonságos, ami a Coleman-fixpont körüli skálázásokból nem mutatható ki. Továbbá, az  $\tilde{u}$  fixponti értékét analitikusan is meg lehet kapni. Természetesen ezek az eredmények más, numerikusan kezelt regulátorokkal is megerősíthetők.

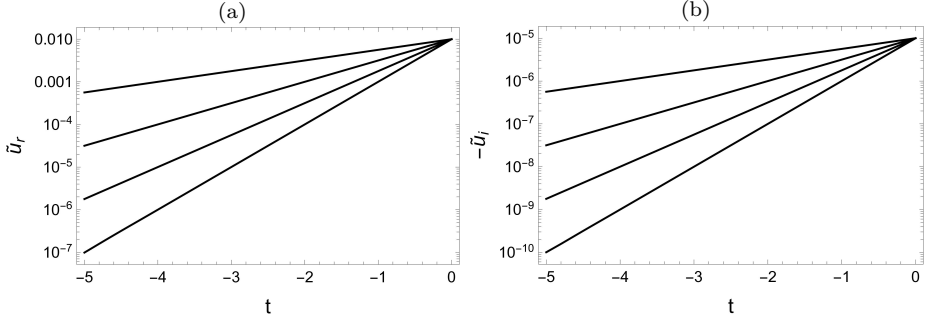
Általában az SG modell béta függvényét perturbatív módon kapjuk meg az  $\tilde{u}$  kis értékeire. Valójában létezik egy másik regulátor, ahol a béta-függvény analitikusan kiszámítható, ez pedig a Litim-regulátor. Ez a következőt adja az  $\tilde{u}$  csatolásra:

$$\dot{\tilde{u}} = -2\tilde{u} + \gamma \frac{\beta^2}{2\pi\tilde{u}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{u}^2}} - 1 \right), \quad (3.22)$$

A sors furcsa fintora, hogy a legjobbnak gondolt, úgynevezett optimalizált Litim-regulátor és az egyik legrosszabb CS-regulátor is képes analitikus béta-függvényeket szolgáltatni.

Az elemzést a modell fixpontjainak megkeresésével kezdtem. Először a CS-regulátorra vonatkozó eredményeket vizsgáltam meg. Szigorúan véve nincsenek fixpontok, mivel  $|\tilde{u}_i| > 0$ . Létezik azonban GFP, ha  $\beta^2 > 8\pi$ , legalábbis aszimptotikusan, amikor is  $u_i$  nullához tart. Ezt a 3.6 mutatja

be. Ugyanez a helyzet a Litim-regulátor esetében is, és a szimmetrikus fázisban pontosan ugyanezt a skálázási viselkedést kapom.



3.6. ábra. Az  $\tilde{u} = \tilde{u}_r + i\tilde{u}_i$  csatolás skálázása látható alulról nézve rendre  $\beta^2 = 12\pi, 11\pi, 10\pi, 9\pi$  hullámszámokra. A görbék azt mutatják, hogy a csatolás irreleváns a szimmetrikus fázisban. A futások egybeesnek a Callan-Symanzik- és Litim-regulátorok esetén.

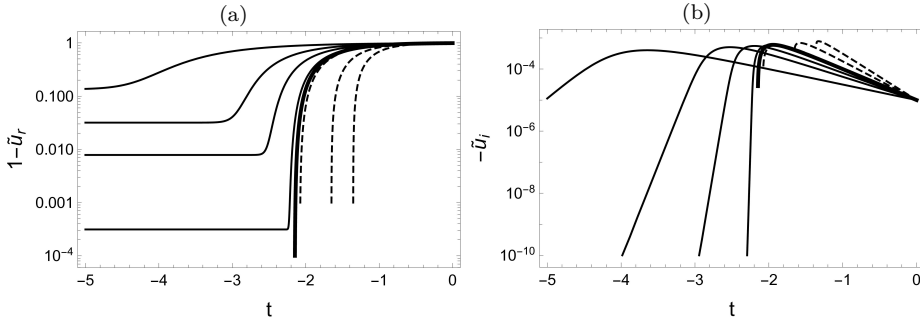
Egyszerű analitikus érvek azt mutatják, és a numerikus eredmények megerősítik, hogy a csatolások skálázása az UV-ben

$$\tilde{u} \sim 10^{t(2-\beta^2/4\pi)}. \quad (3.23)$$

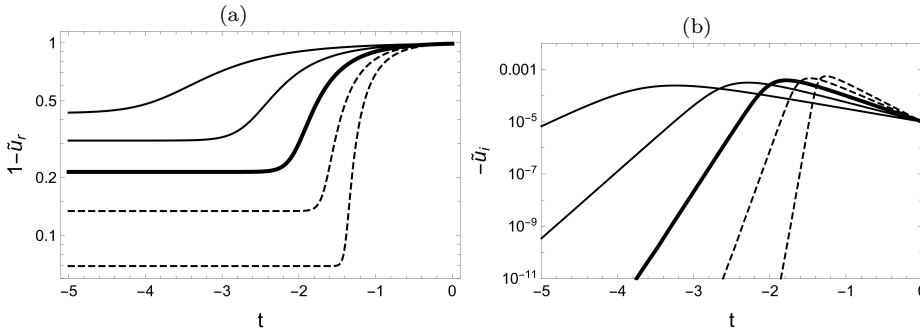
A fázisok szétválása  $\beta_c^2 = 8\pi$ -nél jelentkezik [54]. Egy fixpontokból álló vonalat találunk a  $\tilde{u} = 0$ -nál a  $\beta^2$  függvényében. Emellett a szimmetriasértett fázisban nem-triviális fixpontok jelennek meg az LPA-ban. A CS-regulátor esetében a (3.21) véges fixponti megoldása

$$\tilde{u}^* = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\gamma\beta^2 8\pi - \beta^4}. \quad (3.24)$$

A  $\gamma = -1$  esetén eltűnne a Coleman-fixpont  $\beta^2 = 8\pi$ -nél, ezért ezt a lehetőséget elhagyom. A  $\gamma = 1$  esetben a képzetes résznek el kell tűnnie. Ezt el lehet érni aszimptotikusan, ha  $\tilde{u}_i$  irreleváns módon skálázódik. Szerencsére numerikus eredmények azt mutatják, hogy irreleváns a skálázás, ezt a 3.7 ábrán mutatom be.



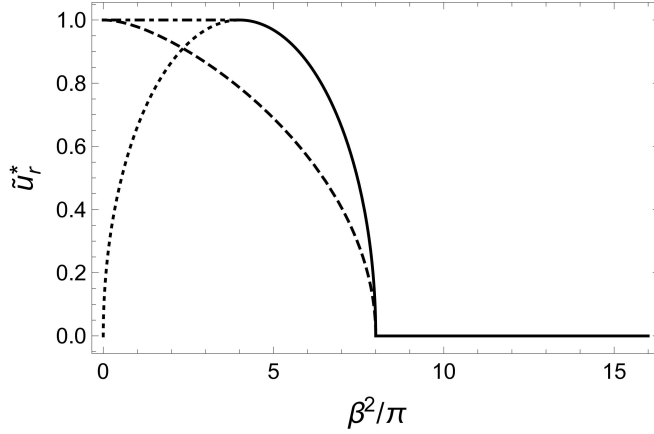
3.7. ábra. A  $\tilde{u} = \tilde{u}_r + i\tilde{u}_i$  csatolás skálázódását mutatja be az ábra a  $\beta^2 = 6\pi, 5\pi, 4.5\pi, 4.1\pi, 4\pi, 3.9\pi, 3\pi, 2\pi$  hullámszámokra a Callan-Symanzik-regulátor esetében. A vastag görbe tartozik  $4\pi$ -hez. A szaggatott (folytonos) vonalak tartoznak rendre a  $\beta^2 < 4\pi$  ( $\beta^2 > 4\pi$ ) paraméterekhez.



3.8. ábra. A  $\tilde{u} = \tilde{u}_r + i\tilde{u}_i$  csatolás skálázását mutatja be az ábra a  $\beta^2 = 6\pi, 5\pi, 4\pi, 3\pi, 2\pi$  hullámszámokra a Litim-regulátor esetében. A vastag görbe tartozik  $4\pi$ -hez. A szaggatott (folytonos) vonalak tartoznak rendre a  $\beta^2 < 4\pi$  ( $\beta^2 > 4\pi$ ) paraméterekhez.

Két tartományt is találtam a szimmetriasértett fázisban. A 3.7 ábra (a) része alapján a csatolás  $\tilde{u}_r$  valós része nem-triviális fixponti értékhez tart amikor  $4\pi < \beta^2 < 8\pi$ . Ezt mutatja be a 3.9 ábra. Az  $\tilde{u}_i$  képzetes rész kihal az IR határesetben. Ebben a  $\beta^2$  régióban az IR fixpont a (3.24) egyenlet alapján kapható meg. Az  $\tilde{u}$  csatolás kezdetben nagyon kicsi képzetes résszel ( $\tilde{u}_i(\Lambda)$ ) rendelkezik, ami megfelel a Feynman-féle  $i\epsilon$  előírásnak Minkowski-téridőben. Ahogy a 3.7 ábra (b) része mutatja, az  $\tilde{u}_i$  csatolás nullához tart, vagyis a fixpont aszimptotikus az IR határesetben, valamint az is látható,

hogy ez az IR fixpont vonzó.



3.9. ábra. Az  $\tilde{u}$  vonzó fixpont értékeinek szemléltetése. A szimmetrikus fázisban ( $\beta^2 > 8\pi$ ) triviális fixpont jelenik meg. A szimmetriasértett fázisban ( $0 < \beta^2 < 8\pi$ ) nem-triviális fixponti értékek olvashatók le. A szaggatott vonal a Litim-regulátornak felel meg, a folytonos vonal a Callan-Symanzik-regulátorhoz tartozó eredményt jelöli  $4\pi < \beta^2 < 8\pi$  esetén. Ezen fixpontok létezését az RG futások megerősítik. A görbe szaggatott része, amikor  $0 < \beta^2 < 4\pi$ , megfelel a (3.24) analitikus megoldásának, azonban az evolúciók nem érik ezt el, ehelyett  $\tilde{u}_r^* = 1$  értéket adnak (az ábrán pontozott-szaggatott vonal).

A helyzet megváltozik a  $0 < \beta^2 < 4\pi$  tartományban. Bár a fixponti megoldás véges fixponti értékeket ad  $\beta^2$ -re, ez látható a 3.9 ábráról, a numerikus megoldás ezt nem támasztja alá. A 3.7 ábrán a megfelelő görbék meredeken tartanak nullához. Így  $\tilde{u}_r \rightarrow 1$ , ami véges  $k_c$  skálán szingulárisá teszi a béta függvényt. Az ilyen típusú futások az euklideszi evolúcióban is megjelennek. Minkowski-esetben azonban a szingularitás elkerülhető lenne az  $\tilde{u}_i$  véges értékeivel. Érdekes módon a két feltétel, azaz  $\tilde{u}_r = 1$  és  $\tilde{u}_i = 0$  egyszerre teljesül, és ugyanolyan szinguláris viselkedést mutat, mint az euklideszi számításokban. Az eredményeim azt mutatják, hogy a hagyományos szimmetriasértett fázis két fázisra bomlik szét.

A szimmetriasértett fázis szétválása akkor is megjelenik, amikor a potenciálban egy nem-lokális tag is jelen van [45]. Ebben az esetben a  $4\pi < \beta^2 < 8\pi$  tartomány egy inhomogén alapállapotú rendszernek felelhet meg, amely Néel-állapotként azonosítható. A sérült fázis másik része homogén alapállapottal rendelkezik. Az általam használt tárgyalásban a Minkowski-

formalizmus keretein belül a nem-lokális tag bevonása nem kezelhető. A Schwinger-Keldysh-féle formalizmust kellene használnom ahhoz, hogy a valós idejű dinamikát konzisztens módon figyelembe tudjam venni. Ekkor megvalósítható lenne az is, hogy a potenciálban nem-lokális tagokat is figyelembe vegyek, akár olyanokat is, amelyek keverik az időtengelyeket.

Meglepő módon a Litim-regulátor segítségével kapott evolúciók más-képp viselkednek. Bár a szimmetrikus fázisban a skálázások azonosak, a 3.6 ábra szerint, a szimmetriasértett fázisban eltérőek. Az evolúciókat a 3.8 ábra mutatja be. A CS-regulátor eredményeivel ellentétben itt nem kaptam szinguláris viselkedést, és az  $\tilde{u}_r$ -re véges, nem-triviális IR fixpontok jelennek meg az egész  $0 < \beta^2 < 8\pi$  intervallumban, az  $\tilde{u}_i$ -re pedig nullákat kaptam, legalábbis aszimptotikusan. A valós rész fixponti értéke analitikusan megadható:

$$\tilde{u}_r^* = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \gamma \frac{\beta^2}{\pi} + 2 \sqrt{1 + \gamma \frac{\beta^2}{\pi}}}. \quad (3.25)$$

Azt tapasztaltam a meghatározott evolúciók alapján, hogy az eredmények erős regulátorfüggést mutatnak. Tudjuk, hogy a Litim-regulátor pontosan éppen az LPA számításokhoz van optimalizálva, amit itt is használok. Az SG modell részletes elemzése azonban a CS-regulátor által adott eredményeket támasztja alá. A  $\beta^2 = 4\pi$  paraméter különleges szerepét és a szimmetriasértett fázisban lehetséges fázisszétválást már korábban megtalálták [69], és további számítások is a sértett fázis szétválását adták [70, 45]. Továbbá, az SG modell lokális bozonizációs technikával összekapcsolható a Thirring modellel, ami a modellek ekvivalenciáját adja, ha  $\beta^2 = 4\pi$ . Természetes elvárásnak tűnik, hogy a  $\beta^2$  ezen speciális értéke másképp viselkedjen, mint más értékek. A CS-regulátor használatánál a  $\beta^2 = 4\pi$  értéke egyértelműen kitüntetett, hiszen két fázist választ el egymástól, de ez nem jelenik meg, ha a Litim-regulátorral dolgozunk.

Az eredmények alapján úgy tűnik, hogy a Litim-regulátor homogenizálja a szimmetriasértett fázist, bár minden véges és jól viselkedik. Ezzel szemben a CS-regulátor képes kimutatni, hogy  $\beta^2 = 4\pi$  különleges, azonban a megjelenő szingularitás miatt nem képes feltárni az IR-régiót a  $0 < \beta^2 < 4\pi$  tartományban. Érdeemes megemlíteni, hogy a gradiens kifejtésben a magasabb rendű tagok módosíthatják ezt a képet. Mindemellett fontos megjegyezni, hogy előfordulhat, hogy az LPA-ban vagy az LPA'-ben jól

viselkedő regulátorok nem adnak helyes eredményt a gradiens kifejtés magasabb rendjében.

### 3.4. Összefoglalás

A funkcionális renormálási csoport módszert néhány skalármodellre közvetlenül a Minkowski-téridőben alkalmaztam. A Wetterich-egyenletet használtam, ahol a frekvencia integrálást külön vettem figyelembe. Bár a Lorentz-szimmetria sérül, a Lorentz-invariancia megőrzése nem lehetséges a nem-perturbatív számításban. A megközelítés másik gondolata az volt, hogy a Feynman-féle  $i\varepsilon$ -t a tömeg imaginárius részének tekintetem.

Vizsgáltam az  $n$ -dimenziós egykomponensű  $\phi^4$  skalármodellt és a két-dimenziós sine-Gordon modellt. Megmutattam, hogy a  $\phi^4$  modellben a csatolások komplexekké válnak. Sőt, az  $\Omega$  frekvencialevágástól függően megjelenik a Wilson-Fisher-fixpont, és mind a helye, mind a skálázási exponense komplex lesz. Azt gondolom, hogy a komplex csatolások természetesebbek a kvantumtérelméletben. Példaként említettem, hogy a komplex tömeg képzetes része összeegyeztethető a gerjesztés véges élettartamával, továbbá, hogy a komplex önkölcsönhatási csatolásnak csak az abszolút értékének négyzete jelenik meg a számításokban, például a szórási folyamatokban. A komplex skálázási exponensek megjelenése nem újdonság, a kvantumgravitációban is ez a jellemző. A skalármodellben a korrelációs hossz exponensének értéke a Minkowski-téridőben összhangban van az euklideszi számításokban kapott eredményekkel.

A Minkowski-téridejű vizsgálatot a sine-Gordon modellen is elvégeztem. Megmutattam, hogy a Minkowski-formalizmus megtartja a Coleman-fixpontot, és a modell szimmetriasértett fázisa két további részre bomlik, legalábbis a Callan-Symanzik-regulátor esetében. A komplex csatolás fejlődése lehetővé teszi a fixpont megjelenését a szimmetrikus fázisban, mivel az aszimptotikusan kihál. Hasonló viselkedés tapasztalható, ha nem-triviális fixpont van jelen a sértett fázisban.

A komplex csatolások megjelenése úgy értelmezhető, hogy a rendszer kölcsönhatásban van a környezetével, ami azt jelenti, hogy az eredetileg zárt fizikai rendszer nyílttá válik. A modellek Minkowski-formalizmusban történő renormálása megmutatja, hogy a rendszereket nem kezelhetjük zártként, figyelembe kell venni a környezetükkel való kölcsönhatást is. Ez

megnyitja a lehetőséget arra, hogy a fázisszerkezet drasztikus megváltozzon, ahogyan az a  $\phi^4$  elméletben is kimutatható volt.

Nem lehet eléggé hangsúlyozni a Minkowski-formalizmus jelentőségét a kvantumtérelméletben, szemben az euklideszi formalizmussal. Ezért meggyőződésem, hogy a valós idejű tárgyalást és az így kapott eredményeket komolyabban kell venni, mint az euklideszi téridőben kapottakat. A regulátorok problémája, azaz a Lorentz-invariancia megsértése több kérdést is felvet. Mindazonáltal azok a megközelítések, amelyek a problémákat az eredeti, valós téridőben próbálják kezelni, határozottan reálisabbnak tűnnek, mint az euklideszi számítások.



## 4. fejezet

# Bilokális potenciál

Az RG blokkosítási lépés során az eliminált módusok között nyeregpontra találunk. Ennek járulékat azért nem számolták a szakirodalomban, mert a potenciál bilokális tagjához ad járulékat, azonban azt általában lokálisnak veszik. A nyeregpontra hatásával azonban számolni kell, mert fa-szinten járul hozzá az evolúcióhoz. A WH-egyenlet esetén a nyeregpontra analitikusan meghatározható, ezért azt fogom használni.

A potenciál lokális alakja teljesen természetesnek tűnik, azonban ha végiggondoljuk, ez csak renormálható elméletek esetén igaz. Ha egy elmélet nem-renormálható, akkor az UV skála felé haladva divergenciákat látunk. Célszerű bevezetni egy  $\Lambda$  levágást, hogy végesek legyenek az eredmények. A levágás definiál egy legkisebb távolságot az elméletben, amely nem nulla, emiatt az elmélet nem-lokálissá válik. Renormálható elméletek esetén a levágás kitolható a végtelenbe, ami helyreállítja a lokalitást. A realiztikus modelljeink (funkcionális értelemben) nem-renormálhatók, a kvantum-elektrodinamikában a Landau-pólusnál van divergencia, a Standard Modellben a trivialisítási probléma lép fel, mert a 4-dimenziós  $\phi^4$  elmélet csatolása gyengén irreleváns, az UV-ben felnő. Ezekben a modellekben a  $\Lambda$  levágás nem tolható ki végtelenbe, emiatt megmarad az elméletekben egy minimális távolság, ami megengedi, hogy nem-lokális tagok legyenek jelen a hatásban.

A szakirodalomban a 3-dimenziós  $\phi^4$  modellt vizsgálták a nem-triviális nyeregpontra figyelembe vételével és annak a bilokális potenciálhoz adott járulékatával [44]. A modell teljesen új fázisszerkezetet mutatott, a nye-

regponti járulék következtében eltűnt a WF-fixpont, azonban a modell kritikus pontja körül egy új fixpont jelent meg. Szintén vizsgálták a SG modellt bilokális potenciállal [41]. A Coleman-fixpont helyzete nem változott, azonban (a Minkowski-téridős számolásomhoz hasonlóan) a modell szimmetriasértett fázisa két részre osztódott. A bilokalitás lehetővé tette az energia kváziklasszikus számolását, amely alapján két fázist találtak, az egyiket triviális, a másikat periodikus vákuumállapottal.

Ebben a fejezetben az AB (aszimptotikusan biztonságos) gravitáció modelljét vizsgálom a bilokális potenciál figyelembe vételével.

## 4.1. Gravitáció és renormálás

A makroszkopikus testek gravitációs kölcsönhatása az általános relativitáselmélet keretében az Einstein-egyenletekkel adható meg. Ha azonban mikroszkopikus, elemi részecskék gravitációs kölcsönhatását szeretnénk leírni, akkor nehézségekbe ütközünk. A gravitációs kölcsönhatás kvantumtérelméletét pályaintegrálos formalizmusban is felírhatjuk, ahol a Newton-állandó és a kozmológiai-állandó csatolássá válik, a térváltozó szerepét pedig a metrika veszi át. A modell perturbatív renormálása problémába ütközik, mert a Newton-csatolás irreleváns, az UV felé nő, vagyis a gravitációs elmélet perturbatív módon nem-renormálható, és ezzel elveszítjük a modell előrejelző képességét.

Weinberg feltételezte, hogy a GFP mellett létezik egy további, nem-gaussi fixpont (NGFP) az UV tartományban, amely UV vonzó [71]. Ezt a fixpontot, felfedezője után, Reuter-fixpontnak nevezzük. Ez végessé teszi a csatolásokat, és így minden fizikai mennyiséget, ezáltal a modell visszanyeri prediktivitását. A modellt aszimptotikusan biztonságosnak mondjuk, ami az aszimptotikus szabadság fogalmának általánosítása [72, 73, 74, 75]. Az NGFP tulajdonságainak megismerésére több lehetőségünk is van. Vannak nagyon hatékony rácstérelméleti számítások a fixpontot leíró paraméterek jellemzésére [76, 77, 78]. Egy másik nagyon fontos eszköz az RG módszer, hiszen ez alkalmas a modellek különböző fixpontok körüli skálázási viselkedésének tárgyalására. Az AB gravitáció az egyik leggyakrabban vizsgált modell az RG-módszer keretében. A modell egy GFP-t mutat, ami most hiperbolikus, és a Reuter-fixpontot is, ami UV vonzó, és ott véges számú releváns csatolással rendelkezik, ami a modellt

aszimptotikusan biztonságossá teszi. A modell renormálható, azonban nem perturbatív, hanem funkcionális értelemben. A modell kiterjesztését, és a realiztikusabb modellekkel való kapcsolatát széleskörűen vizsgálják, és ezek is aszimptotikusan biztonságos viselkedést mutatnak [79, 80, 81, 82, 83, 84].

Ahogy a bevezetésben írtam, az RG módszer akkor hatékony, ha a modellben sok hosszskála fontos. Az AB gravitációban legalább három skálázási tartományt különböztethetünk meg különböző hossz- vagy impulzusskálák esetén. A Reuter-fixpontról úgy gondoljuk, hogy tetszőlegesen nagy UV skálákig érvényes. Megjegyezzük, hogy a Reuter-fixpont miatt az aszimptotikus biztonság az UV határon kölcsönható modellt eredményez. Az alacsonyabb skálák irányába tartó trajektóriákat követve jutunk el a GFP-hez. Ez szinte minden térelméleti modellben megjelenik, azonban általában az aszimptotikus szabadságot jelzi, azaz azt, hogy a modell nagy energiákon kölcsönhatásmentes és tömegmentes. Az AB gravitációban a GFP hiperbolikus pont. A harmadik skálázási rezsim az IR határesetben található, ahol nem-relativisztikus vagy klasszikus viselkedést várhatunk. Az AB gravitációnak két fázisa van. A szimmetriasértettnek megfelelő fázisban a béta függvények divergálni kezdenek. Ez lehetőséget ad arra, hogy az instabilitás közelében, az IR fixpontnál egy új skálázódási tartományt találjunk [8].

A gravitáció Einstein-Hilbert- (EH) hatással leírt modelljének konform redukált (KRG) változatát vizsgálom, mivel a konform redukált modell is ugyan azt a fázistér-struktúrát szolgáltatja, mint az eredeti, azonban egyszerűbb a vizsgálata. A modell aszimptotikusan biztonságos [85, 86, 87, 88, 89, 90]. Az EH-hatás konform redukciója a metrikus változókkal skalármodellt ad, ami a konformális tényező instabilitása miatt alulról korlátlan. A konformálisan redukált modellre az RG módszert a WH-egyenlet keretében alkalmazom, amely az eredeti, blokkosított hatás fejlődéséről ad információt. A WH-módszer előnye, hogy a modellt az eredeti szabadsági fokokkal követhetjük, ahol a módusokat a saját diszperziós relációjukkal vesszük figyelembe, szemben a Wetterich-egyenletben fellépő módosításokkal. A regulátor kifejezés irreleváns nem-lokális kölcsönhatásokat vezet be, amelyek az IR tartományban ártalmatlanok, de az UV irányban felerősödhetnek. Ez azt jelenti, hogy megbízhatatlan eredményeket adhat, amikor a Reuter-fixpontot kívánjuk jellemezni. Ez a kétség nem merül fel a WH-egyenlet esetében.

A WH-egyenletet eredetileg gömbszimmetrikus rendszerekre fogalmazták meg. Kiderült azonban, hogy a gradiens kifejtés használható, ha hengeres szimmetriát választunk, ahol az RG blokkosítás csak a térbeli impulzus térben történik. Kiszámítom az  $\eta$  anomális dimenziót, amely a potenciálból vagy a kinetikus kifejezésből származtatható. Ez utóbbi számítás a gömbszimmetrikus rendszer esetében nem ad hozzájárulást az anomális dimenzióhoz. Ahhoz, hogy ebben az esetben is megtaláljuk az  $\eta$  járulékat, a potenciál nem-lokális tagjának alakulását kell követnünk. Az RG blokkosítási lépés bevezet egy nem-triviális nyeregponot, amely elindítja a nem-lokális potenciál fejlődését [91, 92, 44, 51, 45]. A hengeresen szimmetrikus fejlődés esetén is kiegészítem az anomális dimenzióra vonatkozó számolást a nem-lokális potenciálból származó kifejezéssel. Megjegyzem, hogy a nem-lokalitás vizsgálata az RG módszerben fontos lehet az unitaritási probléma megértésében [93, 94].

## 4.2. Evolúciós egyenlet

A KRG hatásból indulok ki és bevezetem a lokális potenciált:

$$U(\phi) = \frac{\Lambda_k}{6}\phi^4 - \frac{1}{12}\hat{R}\phi^2, \quad (4.1)$$

ahol a  $\phi = \chi_B + \bar{f}_x$  felbontásban felteszem, hogy a  $\chi_B$  háttér tér konstans, és  $\bar{f}$  játssza a kvantumfluktuációk szerepét. Az így felírt KRG hatás alakja futó csatolásokkal és egy bilokális taggal a következő:

$$\begin{aligned} S_k[\bar{f}; \chi_B] &= -Z_k \int_x \sqrt{\hat{g}_x} \left( -\frac{1}{2}(\chi_B + \bar{f}_x) \hat{\square}(\chi_B + \bar{f}_x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12}\hat{R}(\chi_B + \bar{f}_x)^2 - \frac{\Lambda_k}{6}(\chi_B + \bar{f}_x)^4 \right) \\ &\quad + \frac{Z_k}{4} \int_{xy} \sqrt{\hat{g}_x \hat{g}_y} w_{xy} (\chi_B + \bar{f}_x)^2 (\chi_B + \bar{f}_y)^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A  $G_k$  Newton-csatolás a hullámfüggvény renormálásban szerepel

$$Z_k = \frac{3}{4\pi G_k}, \quad (4.3)$$

és  $\Lambda_k$  jelöli a kozmológiai csatolást. Továbbá,  $\hat{g}$  a referencia metrika,  $-\hat{\square}$  pedig a megfelelő Beltrami-Laplace operátor. A kettős téridő-integrált tartalmazó tag alkotja a potenciál bilokális tagját

$$W_{x,y}(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{4} w_{xy} \phi_1^2 \phi_2^2 \quad (4.4)$$

a  $w_{xy}$  bilokális csatolással. Kezdetben  $w_{xy} = 0$  értéket veszek, hogy visszakaphassam a KRG hatás helyes alakját. Feltételezve a  $w_{xy} = w_{x-y}$  translációs invarianciát, a bilokális csatolás impulzustérben impulzuszfüggő lesz, mivel

$$w_q = \int_x e^{iq(x-y)} w_{xy}. \quad (4.5)$$

Ez a tény egyenes következménye a nem-lokalitásnak. Arra utal, hogy  $w_q$ -nak ugyanaz a dimenziója, mint a kozmológiai csatolásnak. A dimenziós Newton-csatolás  $G_k \sim k^{2-d}$  szerint skálázódik. A KRG hatás megadható egy kompaktabb alakban

$$S_k = -Z_k \int \sqrt{\hat{g}} \left\{ \frac{1}{2} \phi(-\hat{\square}) \phi - U - W \right\}. \quad (4.6)$$

A hatás deriváltja

$$\frac{\dot{S}_k}{Z_k} = \int \left( \eta \frac{1}{2} \bar{f}(-\hat{\square}) \bar{f} - \eta U + \dot{U} - \eta W + \dot{W} \right), \quad (4.7)$$

ahol a renormálási skála szerinti differenciálás  $\dot{\phantom{x}} = k \partial_k$  szerint van jelölve és bevezettem az anomális dimenziót

$$\eta = -\frac{\dot{Z}_k}{Z_k} = \frac{\dot{G}_k}{G_k}. \quad (4.8)$$

Az általánosság elvesztése nélkül választhatjuk az  $\mathbb{R}^4$  topológiának a lapos  $\hat{g}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$  referencia metrikát, amiből  $\sqrt{\hat{g}} = 1$  és  $\hat{\square} = \square$  következik. A háttérmetrika, ami meghatározza a futó  $k$  RG skálát, megadható  $\bar{g}_{\mu\nu} = \chi_B^2 \hat{g}_{\mu\nu}$  képlettel, továbbá  $\bar{\square} = \frac{1}{\chi_B^2} \hat{\square}$ , vagyis  $\hat{\square} = \chi_B^2 \bar{\square}$ .

Az evolúciós egyenletek felírásához először is a módusokat ketté bontom UV és IR részekre, azaz  $\phi \rightarrow \phi + \varphi$ . A  $\phi$  térváltozó tartozik a  $k \in [0, k - \Delta k]$  módusokhoz, míg  $\varphi$  pedig a  $k \in [k - \Delta k, k]$  részhez. Egy RG blokkosítási lépésben az UV módusokat kiintegrálok a következőnek megfelelően:

$$e^{-S_{k-\Delta k}(\phi)} = \int D[\varphi] e^{-S_k[\phi+\varphi]} \approx \int D[\varphi] e^{-S_k[\phi+\varphi_0] - \frac{1}{2}\varphi \frac{\delta^2 S_k[\phi+\varphi_0]}{\delta\varphi\delta\varphi} \varphi}. \quad (4.9)$$

Itt  $\varphi_0$  a nem triviális nyeregpont szerepét játssza a kiintegrált módusok között, amelyek az infinitezimális impulzushéjhoz tartoznak. Az integrálás után azt kapom, hogy

$$-S_{k-\Delta k}[\phi] = -S_k[\phi + \varphi_0] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\delta^2 S_k[\phi + \varphi_0]}{\delta\varphi\delta\varphi} \right]. \quad (4.10)$$

Ezután mindkét oldalhoz hozzáadom az  $S_k[\phi]$  tagot, és megszorozom az egyenletet  $k/\Delta k$ -val, így megkapom a WH-egyenletet:

$$\dot{S}_k[\phi] = -k \frac{S_k[\phi + \varphi_0] - S_k[\phi]}{\Delta k} - \frac{k}{2\Delta k} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\delta^2 S_k[\phi + \varphi_0]}{\delta\varphi\delta\varphi} \right] \quad (4.11)$$

Az első tag a nem-triviális nyeregpont hozzájárulásából származik. Ez a kifejezés nem-lokális, és később fontos szerepet fog játszani. A  $Tr$  egy  $\Delta k$  vastagságú, végtelenül kicsi impulzushéjra történő felösszegzést jelöl, ezért a jobb oldal véges eredményt ad a  $\Delta k \rightarrow 0$  határérték esetén. A (4.11) és (4.7) együttes használatával a KRG hatás evolúciós egyenlete a következőképpen alakul

$$\dot{S}_k[\phi] = -\frac{k}{2} \int_q \delta(k - |q|) \ln S_q^{(2)}, \quad (4.12)$$

ahol  $S_q^{(2)}$  a térváltozó szerinti másodrendű deriváltja a blokkosított hatásnak

$$S^{(2)}[\phi = \chi_B + \bar{f}] = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}_x} \sqrt{\hat{g}_y}} \frac{\delta^2 S_k[\bar{f}; \chi_B]}{\delta \bar{f}_x \delta \bar{f}_y}. \quad (4.13)$$

A Dirac-delta az impulzus integrálását egy végtelenül kicsi, vékony,  $k$  sugarú impulzushéjra korlátozza. Az integrálás után a hatás evolúciós egyenlete

$$\dot{S}_k[\phi] = -\frac{1}{2}\alpha_d k^d \ln S_k^{(2)}, \quad (4.14)$$

ahol

$$\alpha_d = \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d}, \quad \Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (4.15)$$

A KRG modell renormálási vizsgálata a WH-egyenlet keretében is lehetséges, a szakirodalomban a Schwinger-féle valós idejű regulátort használják [95, 96]. Van azonban egy másik módja is a WH-egyenletben szereplő integrálok regularizálásának. Egy RG blokkosítási lépésben a  $\Delta k$  szélességű impulzusfelület UV módusait integráljuk ki. A felület megválasztása nincs korlátozva, a különböző alakú felületek megfelelhetnek különböző renormálási sémáknak. A standard felületforma egy gömbhéj. Az integrálás másik lehetséges módja egy hengerfelület választása. Ez megfeleltethető annak az esetnek, amikor a frekvenciaváltozót a térbeli impulzusoktól elkülönítve vesszük figyelembe. Az előbbi kiintegráljuk, míg az RG skálát az utóbbiból választjuk ki. Az evolúciós egyenlet ezen eljárás esetén a következő lesz

$$\dot{S}_k = -\frac{k}{2} \int \delta(k - |\mathbf{q}|) \ln S_{\omega\mathbf{q}}^{(2)} - \frac{k}{2} 2\dot{\Omega} \int \delta(\Omega - \omega) \ln S_{\omega\mathbf{q}}^{(2)}, \quad (4.16)$$

ahol az első (második) tag felel meg a henger palástjainak (alapjainak), rendre. A frekvencia integrálási határát  $\Omega$  jelöli. Ez az egyrészecske energiának és egy konstansnak a szorzataként azonosítható,  $\Omega = c_\omega \sqrt{k^2 - 2\Lambda_k}$ , ahol a  $c_\omega$  konstans tetszőleges szám. Mivel az evolúciós egyenlet UV viselkedése érdekel, élhetnek a határérték  $\Omega \approx c_\omega k$  közelítésével. Az  $\dot{\Omega}$  faktor a hengeralapok szélességének skálázódását jelöli az evolúció során. Mint korábban írtam, a WH-egyenlet éles levágása és a gradiens kifejtés összeegyeztethető [97]. Sokkal egyszerűbb a helyzet, ha konstans hullámfüggvény-renormálással dolgozunk, mint a (4.3), ahol az anomális dimenzió a potenciátagból könnyen kiszámítható. Továbbá, a blokkosítási lépések hengersizmetrikus választása lehetővé teszi a gradiens kifejtés használatát magasabb rendben. Ennek az az alapja, hogy míg gömbszimmetrikus elrendezésben a Z járuléka két nem koncentrikus gömb metszetével

arányos, ami nullmértékű, ugyanez a járulék két, megegyező tengelyük mentén eltoltt henger esetén már véges. Megjegyzem, hogy a végtelen hengeres határérték (4.16)-ben divergál, mivel a hengerfelület térfogata, amely egy végtelenül kicsi RG blokkosítási lépés során integrálódik ki, végtelen. A Wetterich-egyenlet esetében a végtelen frekvenciájú integrálok véges eredményt adnak, ha renormálható az elmélet.

### 4.3. Lokális evolúció

A vizsgálatot a (4.12) egyenlettől kezdem. A levágást a  $-\bar{\square}$  operátorra alkalmazom. Miután kiszámolom az  $S_q^{(2)}$  Hesse-mátrixot impulzustérben az új  $\Phi = Z_k^{1/2} \bar{f}$  térváltozó szerint, az evolúciós egyenlet

$$-\eta U(\chi_B) + \dot{U}_k(\chi_B) = -\frac{1}{2} \frac{\chi_B k}{Z_k} \int_q \delta(q - \chi_B k) \ln \left( q^2 - 2\Lambda_q \chi_B^2 + \frac{1}{6} \chi_B^2 \bar{R} \right), \quad (4.17)$$

ahol az egyenletet a téridő térfogatával normalizáltam. Ebben a szakaszban nem követem a bilokális tagok fejlődését. A impulzus integrál elvégzése, majd az eredmény görbületben való kifejtése után azt kapom, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} (\dot{\Lambda}_k - \eta \Lambda_k) \chi_B^4 - \frac{1}{12} \bar{R} (-\eta) \chi_B^4 = \\ -\frac{\chi_B^4 k^4}{16\pi^2 Z_k} \ln(\chi_B^2 k^2 - 2\Lambda_k \chi_B^2) - \frac{\chi_B^4 k^4}{16\pi^2 Z_k} \frac{\frac{1}{6} \chi_B^2 \bar{R}}{\chi_B^2 k^2 - 2\Lambda_k \chi_B^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

A logaritmusnak dimenziótlan argumentummal kellene rendelkeznie, így bekerül az egyenletbe egy extra, tértől független konstans  $\zeta_4$  tag. Miután beazonosítom a független és  $\bar{R}$ -ben lineáris tagokat, megkapom a dimenziótlan evolúciós egyenleteket:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= -(2 - \eta_p^{(s)})\lambda - \frac{g}{2\pi} \ln(1 - 2\lambda) + \zeta_4, \\
\dot{g} &= (2 + \eta_p^{(s)})g, \\
\eta_p^{(s)} &= -\frac{g}{6\pi} \frac{1}{1 - 2\lambda},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

ahol  $g = k^2 G_k$  és  $\lambda = k^{-2} \Lambda_k$ , és az általános  $\eta$  anomális dimezió át lett nevezve  $\eta_p^{(s)}$ -ra. Az alsó index jelöli, hogy a potenciális tagból származik, míg a felső index jelzi, hogy gömbszimmetrikus modellben dolgozok. A Wetterich-egyenlet minőségileg hasonló evolúciós egyenleteket adhat [85, 10].

A hengeresen szimmetrikus esetben a (4.16) egyenletből indulok ki, és az előbbiekhöz hasonló lépések elvégzése után megkapom a kozmológiai csatolásra vonatkozó evolúciós egyenletet:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= -(2 - \eta_p^{(c)})\lambda + \\
&+ \frac{4g}{9\pi^2} c_\omega \left( 10 - 3(c_\omega^2 - 2\lambda) + 3(c_\omega^2 - 2\lambda)^{3/2} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{c_\omega^2 - 2\lambda}} \right) \right) - \\
&- \frac{4g}{\pi^2} \sqrt{1 - 2\lambda} \arctan \left( \frac{c_\omega}{\sqrt{1 - 2\lambda}} \right) - \frac{8g}{3\pi^2} \ln(c_\omega^2 + 1 - 2\lambda) + \zeta_3,
\end{aligned} \tag{4.20}$$

ismét egy konstans  $\zeta_3$  taggal bővítve. A görbületben lineáris tag szolgáltatja az anomális dimenziót, amit most  $\eta_p^{(c)}$ -vel jelölök és ennek alakja

$$\begin{aligned}
\eta_p^{(c)} &= -\frac{2g}{3\pi^2 \sqrt{1 - 2\lambda}} \arctan \left( \frac{c_\omega}{\sqrt{1 - 2\lambda}} \right) - \\
&- \frac{2gc_\omega}{3\pi^2} \left( 1 - \sqrt{c_\omega^2 - 2\lambda} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{c_\omega^2 - 2\lambda}} \right) \right).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

A (4.19) és a (4.21) egyenletekben az  $\eta$  anomális dimenziókat a potenciális tag fejlődéséből számoltam ki. Azonban a kinetikus tagból is megkapható,

amelyet a modell szimmetriájától függően  $\eta_k^{(s)}$  és  $\eta_k^{(c)}$  módokon jelölök, és amely arányos a fluktuációkban és a gradiensben kvadratikus kifejezéssel [85]. Megmutatható, hogy a gömbi elrendezésben a hullámfüggvény renormálása nem fejlődik, ezért a kinetikus tagból származó anomális dimenzió nulla [44]. Az  $\eta_k^{(s)}$  értékét akkor kaphatjuk meg, ha a potenciálban egy bilokális kifejezés fejlődését követjük. A kiintegrált UV módusokban van egy nem-triviális nyeregpon, amely a hatás nem-lokális részének evolúcióját indítja el [10]. A következő részben a bilokális evolúció részleteit tárgyalom.

Az anomális dimenzióra különböző eredményeket kaphatunk [98]. Az eltérő értékek az EH-hatás homogenitásából adódtak [98], ami a Newton-csatolás különböző értékeihez vezet [99, 100].

#### 4.4. Bilokális evolúció

Először a gömbszimmetrikus esetet vizsgálom. A bilokális potenciál evolúciójának levezetése hasonló módszerrel történik, mint amit az anomális dimenzióanalízisnél használtam. A (4.6) egyenletben szereplő hatás másodrendű deriváltját veszem

$$\begin{aligned}
S_{xy}^{(2)}[\chi] &= D_{x-y}^{-1} + \delta_{xy} U^{(2)}(\chi_B + \bar{f}_x) \\
&\quad + 2\partial_1 \partial_2 W_{x-y}(\chi_B + \bar{f}_x, \chi_B + \bar{f}_y) \\
&\quad + \delta_{xy} \int_z [\partial_1^2 W_{x-z}(\chi_B + \bar{f}_x, \chi_B + \bar{f}_y) \\
&\quad + \partial_2^2 W_{z-x}(\chi_B + \bar{f}_x, \chi_B + \bar{f}_y)] \\
&\equiv D_{xy}^{-1} - \Sigma_{xy}[\chi],
\end{aligned} \tag{4.22}$$

ahol a parciális deriválás alsó indexe jelöli az argumentumot, ami szerint deriválunk, azaz  $\partial_j f(\phi_1, \phi_2) = \partial_{\bar{f}_j} f(\phi_1, \phi_2)$ , és a propagátor pedig

$$D_q^{-1} = q^2 - 2\Lambda_k \chi_B^2 + \frac{1}{6} \hat{R} - 2w_q(\chi_B, \chi_B) \tag{4.23}$$

impulzustérben, feltételezve, hogy a nulla módus járuléka a bilokális csatoláshoz elhanyagolható. A sajátenergia szétbontható lokális ( $l$ ) és bilokális ( $b$ ) részekre:

$$\begin{aligned}
\Sigma_x^l &= -2\Lambda_k(\bar{f}_x^2 + 2\chi_B\bar{f}_x) - \frac{1}{2}\int_z(w_{x-z} + w_{z-x})(\bar{f}_z^2 + 2\bar{f}_z\chi_B), \\
\Sigma_{xy}^b &= -2w_{x-y}(\bar{f}_x\bar{f}_y + (\bar{f}_x + \bar{f}_y)\chi_B).
\end{aligned}
\tag{4.24}$$

Együttesen a teljes sajátenergiát adják

$$\Sigma_{xy} = \delta_{xy}\Sigma_x^l + \Sigma_{xy}^b. \tag{4.25}$$

Az evolúciós egyenlet

$$\begin{aligned}
\dot{S} &= -\eta\int_x\bar{f}_x\hat{\square}_x\bar{f}_x - \eta U(\chi_B) + \dot{U}(\chi_B) - \\
&\quad -\eta\frac{1}{4}\int_{xy}w_{x-y}\bar{f}_x^2\bar{f}_y^2 + \frac{1}{4}\int_{xy}\dot{w}_{x-y}\bar{f}_x^2\bar{f}_y^2 \\
&= \frac{k}{Z_k}\left[-\frac{1}{2\Delta k}\text{Tr}\ln D^{-1} + \frac{1}{2}\int_x D_{xx}^{(k)}\Sigma_x^l + \int_{xy} D_{yx}^{(k)}\Sigma_{xy}^b\right]
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

alakúvá válik, ahol bevezettem az alábbi környezeti propagátort:

$$D_{x-y}^{(k)} = \int_p\delta(|p| - k)D_p e^{-ip(x-y)}. \tag{4.27}$$

Az anomális dimenzióhoz való járulék a

$$\frac{1}{2}\eta q^2 = -2\int_p D_{p+q}^{(k)}w_p + 4\chi_B^2\int_p D_p^{(k)}D_{p+q}^{(k)}, \tag{4.28}$$

tagokból jön, ahol az első tag a bilokális evolúcióból származik, míg a második a standard kifejezés, amely hozzájárul az anomális dimenzió fejlődéséhez a gradiens kifejtésből. Ez ráadásul nem-lokális és  $q$  szerint Taylor-sorba kell fejteni a másodrendű tag megtartásával.

A gömbszimmetrikus elrendezésben a (4.28) második tagja eltűnik, az első pedig

$$\eta_k^{(s)} = -\frac{32g\lambda^3}{3\pi^2(1-2\lambda)^4}, \tag{4.29}$$

miután kifejtettem a propagátort  $q$  szerint másodrendig, és a bilokális csatolás értékét a fa-szintű evolúciós alakjával helyettesítettem. Végtelen henger esetében a (4.28) integráljai ismét végtelenek. Véges hengerre mindkét tag (4.28)-ban véges és  $\eta_k^{(c)}$  megadható az alábbi alakban:

$$\eta_k^{(c)} = \frac{4g}{3\pi^2} \left( \begin{aligned} & -\frac{c_\omega(3c_\omega^4 + 8c_\omega^2(1-2\lambda) + 21(1-2\lambda)^2)}{6(1-2\lambda)^2(1+c_\omega^2-2\lambda)^3} - \\ & -\frac{(15c_\omega^5 + 40c_\omega^3(1-2\lambda) + 33c_\omega(1-2\lambda)^2)\lambda^2(1+6\lambda)}{36(1-2\lambda)^3(1+c_\omega^2-2\lambda)^3} - \\ & -\frac{5}{8(1-2\lambda)^{7/2}} \arctan\left(\frac{c_\omega}{\sqrt{1-2\lambda}}\right) - \\ & -\frac{1}{2(1-2\lambda)^{5/2}} \arctan\left(\frac{c_\omega}{\sqrt{1-2\lambda}}\right) + \\ & +c_\omega \frac{(1+3(c_\omega^2-2\lambda))(-3+c_\omega^2-2\lambda)}{24(c_\omega^2-2\lambda)^2(1+c_\omega^2-2\lambda)^3} + \\ & +c_\omega \frac{3-16(c_\omega^2-2\lambda)-3(c_\omega^2-2\lambda)^2}{6(c_\omega^2-2\lambda)(1+c_\omega^2-2\lambda)^3} - \\ & -\frac{c_\omega}{8(c_\omega^2-2\lambda)^{5/2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{c_\omega^2-2\lambda}}\right) - \\ & -\frac{c_\omega}{2(c_\omega^2-2\lambda)^{3/2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{c_\omega^2-2\lambda}}\right) \end{aligned} \right). \quad (4.30)$$

#### 4.4.1. Nyeregpont

Az éles levágásnak köszönhetően elég csak a linearizált mozgásegyenletek nyeregpontját megkeresni, mivel bármely  $f_x$  esetén

$$\int_x f_x \varphi_x^n = \int_q f_q \prod_{j=1}^n \int_{k-\Delta k < |q_j| < k} \varphi_{q_j} \delta_{q, -\sum_j q_j} = \mathcal{O}(\Delta k^n). \quad (4.31)$$

Az eredmény azt mutatja, hogy a  $\varphi_k$ -ban  $n$ -ed rendű kifejezés arányos  $\Delta k^n$ -val, ami elhanyagolható, így csak a  $\varphi_k$ -ban lineáris tag járul hozzá a

megoldáshoz [44, 45]. A mozgásegyenlet

$$\frac{\delta S_k}{\delta \bar{f}} = 0. \quad (4.32)$$

A háttérteret tartalmazó tagok kiesnek a deriválás után. A mozgásegyenletre a  $-\hat{\square} + \frac{\hat{R}}{6} = D_0^{-1}$  műveletet alkalmazva adódik

$$D_0^{-1}(\chi_B + \phi_p + \varphi_k) = \frac{2}{3}\Lambda_k((\chi_B + \phi_p)^3 + 3(\chi_B + \phi_p)^2\varphi_k + 3(\chi_B + \phi_p)\varphi_k^2 + \varphi_k^3), \quad (4.33)$$

ahol a  $\varphi_k$  UV módusok impulzusai a megszüntetendő impulzushéjból származnak, az IR módusok pedig a  $p \in [0, k - \Delta k]$  tartományból. A konstans háttértér  $\chi_B$  a nulla impulzushoz tartozik. A kvadratikus tag összekapcsol egy IR és egy UV teret azonos impulzusokkal, ami sértené az impulzusmegmaradást, ezért ez nem járul hozzá az egyenlethez. Ahhoz, hogy az egyenlet mindkét oldalon kielégítse az impulzusokra vonatkozó feltételt, a nulla módusok hiányában  $p = k/2$ -t kell választani. A fennmaradó tagok adják a nyeregponot

$$\varphi_k = 2\Lambda_k D_0 \chi_B \phi_{k/2}^2. \quad (4.34)$$

A nem-triviális nyeregponot fa-szintű hozzájárulást ad az RG evolúcióhoz, ahogyan ez a (4.11) egyenlet első tagjából látszik, így

$$\Delta S \approx -\frac{1}{2}\varphi S^{(2)}\varphi. \quad (4.35)$$

Ez a tag bilokális és általában elnyomjuk a hagyományos RG módszer során, pedig fa-szintű járulékot az evolúcióhoz. Ha szeretnénk ennek a tagnak a fejlődését követni, be kell vezetni egy bilokális potenciált, mint a (4.4) egyenletben. A mozgásegyenlet általánosított alakja

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{f}_x} = D_0^{-1}\bar{f}_x + U'(\chi_B + \bar{f}_x) + 2 \int_y \partial_1 W_{x-y}(\chi_B + \bar{f}_x, \chi_B + \bar{f}_y) = 0. \quad (4.36)$$

A bilokális potenciál fa-szintű evolúciójának általános alakja [44]

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W_q(\chi_B + \bar{f}_1, \chi_B + \bar{f}_2)}{\Delta k} = & \\ -2D_q^{(k)} \left[ \partial_2 W_q(\chi_B + \bar{f}_1, \chi_B) + \frac{1}{2} U'(\chi_B + \bar{f}_1) \right] \cdot & \\ \cdot \left[ \partial_1 W_q(\chi_B, \chi_B + \bar{f}_2) + \frac{1}{2} U'(\chi_B + \bar{f}_2) \right]. & \end{aligned} \quad (4.37)$$

A környezeti propagátor csak a  $k$  és  $k - \Delta k$  intervallumban ad járulékot. Fa-szinten az egyes módusok kiintegrálása független, továbbá a  $q$  impulzus csak  $q = k$  esetén nem nulla. Ezek után a bilokális csatolás alakja

$$w_k = 2D_q^{(k)} \Lambda_k^2. \quad (4.38)$$

## 4.5. Eredmények

A modell két fázisból áll. Általánosságban elmondható, hogy a modell fázisait egy hiperbolikus fixpont választja el egymástól. A fázisszerkezet a 4.1 ábrán látható. Itt a GFP a hiperbolikus fixpont, amely az IR és az UV határesetek között helyezkedik el. Az erős csatolású, vagy szimmetrikus fázis kicsi Newton-féle, és negatív kozmológiai csatolással jellemezhető az IR limeszben. A gyenge csatolású, vagy szimmetriásértett fázis is kis Newton-csatolással rendelkezik, de a kozmológiai csatolás pozitív. Ebben a fázisban a pályák szingularitásba ütköznek az

$$1 - 2\lambda = 0 \quad (4.39)$$

értéknél, ahol a  $\beta$  függvények végtelenek.

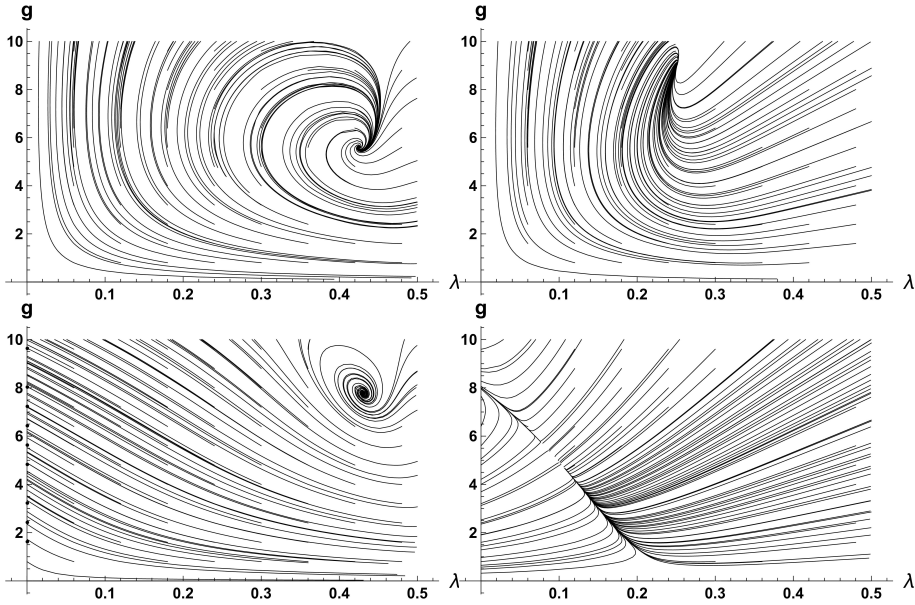
A 4.1 bal felső ábráján a (4.19) pályáit ábrázoltam. Az evolúciók a Reuter-fixponttól indulnak. Hasonló fázisszerkezetet láthatunk, mint a [85] esetében. A Reuter-fixpont közeléből induló trajektóriák a szingularitási tartományba futnak, tehát a szimmetrikus fázis nem érhető el a Reuter-fixpont környezetéből kiindulva. Mindazonáltal a Reuter-fixpont körüli pályák a várt skálázási viselkedést mutatják. A Reuter-fixpont  $\lambda^*$  és  $g^*$  helyzete és a megfelelő

$$s_{UV} = \text{Re}(s) \pm i \text{Im}(s) \quad (4.40)$$

alakú exponensek a 4.1 táblázat első sorában vannak megadva. Az UV exponensek valós részei negatívak, ami azt mutatja, hogy a fixpont UV vonzó, így a modell aszimptotikusan biztonságos. A képzetes részek a pályák spirális alakját eredményezik. Ahogy az evolúció az alacsony skálázási tartományok felé tart, a trajektória a GFP irányába fut. Ez egy hiperbolikus fixpont, amelynek exponensei

$$s_G = \pm 2. \quad (4.41)$$

A negatív exponens taszítja a pályákat a GFP mindkét oldalára. A szimmetrikus fázisban a pályák könnyen elérhetik a  $k \rightarrow 0$  határértéket. A szimmetriasértett fázisban azonban a pályák megállnak a (4.39) szingularitási feltétel által meghatározott  $\lambda = 1/2$  értéknél.



4.1. ábra. A konform redukált gravitáció fázisszerkezete. A bal felső (jobb felső) ábrán a gömbszimmetrikus modellek láthatók, a potenciális (kinetikus) kifejezésből származó anomális dimenzióval. A bal alsó (jobb alsó) ábrákon a hengeresen szimmetrikus modellek evolúcióit ábrázoltam a potenciális (kinetikus) tagból származó anomális dimenzióval. Minden fázisszerkezet két fázist, egy GFP-t és egy Reuter-fixpontot tartalmaz.

Ezek az eredmények összhangban vannak a Wetterich-egyenlet alkal-

mazásával kapott eredményekkel, újdonsága pontosan abból adódik, hogy a blokkosított hatáson alapuló WH-egyenletet használtam, amiben nincs jelen regulátorfüggvény. A regulátor általában egy impulzusfüggő kvadrátikus kifejezés a hatásban, amely módosítja a módusok diszperziós relációját. Ez irreleváns járulékot ad, és az IR határesetben nem okoz gondot, azonban az UV Reuter-fixpont közelében okozhat problémát. Tudjuk, hogy az aszimptotikus biztonság azért áll fenn, mert a Reuter-fixpont környékén csak releváns csatolások vannak. Emiatt a releváns  $\lambda$  és  $g$  csatolások mellett a regulátor járulékanak a relevanciáját is biztosítani kell. Ez a kérdés nem merül fel, ha a WH-egyenletet használjuk.

Hasonló a fázisszerkezet abban az esetben is, ha az  $\eta$ -t a kinetikus tagból nyerem. Az eredmény a 4.1 táblázat 2. sorában látható. Ez a számítás azt is mutatja, hogy az éles levágás összeegyeztethető a gradiens kifejtéssel. A hullámfüggvény renormálás nem fejlődik a gömbi WH-egyenletnél, mivel a két eltolt gömbhéj metszéspontjából származó hozzájárulást kell kiszámítani, ami  $\Delta k^2$  nagyságrendű, azonban a bilokális tag evolúciója véges járulékot ad. Ráadásul, a bilokális potenciál evolúciójára tekinthetünk úgy, mint a gradiens kifejtésből származó, végtelenül kicsi nem-lokalitás véges általánosítására [44]. Ez abból adódik, hogy bár a potenciál diagonális a koordinátatérben, de a kinetikus kifejezés nem az. Deriváltakat tartalmaz, amelyek két különböző, egymástól végtelenül kis távolságra lévő pontot kötnek össze. Ebben az értelemben a hatásban minden impulzusfüggő kifejezés nem-lokális. A gradiens kifejtésben a magasabb rendű tagok magasabb rendű deriváltakat tartalmaznak, amelyek növekvő távolságú koordinátákat kötnek össze, ezért a modell nem-lokálissá válik. Ez a nem-lokalitás figyelembe veszi a koordináták végtelenül kis közelségét, és gyakran nevezik kvázi-lokalitásnak [101]. A potenciálban lévő bilokális tag bármilyen véges távolságot figyelembe vehet.

Mint már említettem, a WH-egyenlet hengeres változata egy további renormálási sémát adhat. Megjegyzem, hogy a [10] eredményei végtelen hengerekre vonatkoznak, amelyeket itt nem lehet vizsgálni. Az  $\eta_p^{(c)}$ -vel való fejlődés minőségileg ugyanazokat az eredményeket adja, mint a gömbi modell. A modell aszimptotikusan biztonságos, és van egy UV nem-gaussi fókuszpontja. A hullámfüggvény renormálás elkezd fejlődni, mert a hengerek impulzuseltolódásai véges hozzájárulást adhatnak. A kinetikus tagból származó anomális dimenzió a hengeres rendszerre a gradiens kifejtésből

és a (4.28) szerinti bilokális tagból származó kifejezéseket tartalmazza. Az erre vonatkozó eredmények a 4.1 táblázat utolsó sorában láthatók. A Reuter-fixpont létezik, és vonzó, de nem fókuszpont, ahogy az a 4.1 jobb alsó ábráján is látszik, mivel két valós negatív exponenssel rendelkezik. Fontos megjegyezni, hogy az alsó ábrák pontosan ugyanazt a fázisszerkezetet mutatják, mint az AB gravitáció eredeti modellje.

séma	$g^*$	$\lambda^*$	$\text{Re}(s)$	$\text{Im}(s)$
$\eta_p^{(s)}$	5.62	0.43	-2.71	4.73
$\eta_p^{(c)}$	7.77	0.43	-0.65	3.58
$\eta_k^{(s)}$	9.04	0.25	-7.15	1.28
$\eta_k^{(c)}$	4.67	0.11	-5.09; -0.19	-

4.1. táblázat. A nem-gaussi fixpont helyét és a megfelelő skálázási exponenseket mutatja különböző anomális dimenziókra. Az exponensek komplexek, kivéve azt az esetet, amikor az anomális dimenzió a kinetikus tagból származik hengeresen szimmetrikus geometriai elrendezés esetén.

Az RG egyenletek nyílt dinamikát írnak le. A blokkosítást csak a nagy energiákról kezdve, a kis energiák felé van értelme végrehajtani. Ez problémás lehet a gravitáció vizsgálatakor, hiszen a Reuter-fixpont dinamikáját próbáljuk feltárni, amely  $k \rightarrow \infty$  határértéknél helyezkedik el. Ez a kérdés feloldható, ha úgy tekintünk a Reuter-fixpontra, mint az RG egyenlet egy aszimptotikus eredményére az UV skálázási tartományban. A  $k_\Lambda$  impulzus levágás skáláját fokozatosan a végtelen felé távolítjuk, és azt vizsgáljuk, hogy az egyes levágásokról, az IR felé indított trajektóriák hogyan viselkednek. Amennyiben létezik az UV Reuter-fixpont, akkor ahogy távolítjuk a  $k_\Lambda$  skálát a végtelen felé, azt fogjuk látni, hogy a csatolások evolúciója az IR felé egyrészt ugyanaz a konstans, másrészt egyre nagyobb skálatartományban. Fontos hangsúlyozni, hogy nincs értelme az UV irányba blokkosítani. Ez előbbi gondolatmenet feltételezi azt, hogy az elmélet renormálható.

Megjegyzem, hogy az UV Reuter-fixpont nem a végső válasz a gravitáció UV viselkedésére. Tudjuk, hogy nagyon nagy energiáknál, a Planck-skálán, új fizikának kell megjelennie. Persze megtörténhet, hogy a Standard Modell és a gravitáció egyesítése jóval a Planck-skála fölé tolja a kiterjesztett AB

gravitáció érvényességi skáláját, azonban magasabb energiákon továbbra is megjelenhetnek új kölcsönhatások. Emiatt nem lehetséges, hogy a Reuter-fixpont minden energiaskálán túl érvényben maradjon. Azt is tudjuk, hogy a QED Landau-pólusa vagy a Higgs-részecske skalárterének trivialisitása, nem oldódik meg a kiterjesztett AB gravitációban. El kell fogadnunk azt a tényt, hogy  $k_\Lambda$  felett a fizika nem ismert. Ennek ellenére az RG eljárás során azt feltételezzük, hogy ennek nincs komoly következménye az alacsonyabb energiájú tartományokra. Az eliminált környezet a rendszer alacsony energiás effektív viselkedését azonban alapvetően befolyásolja.

## 4.6. Összefoglalás

A KRG fázisszerkezetét funkcionális renormálási csoport módszer keretében térképeztem fel. A WH-egyenletből meghatároztam a blokkosított hatás evolúcióját. Ez a megközelítés az eliminált módusokat a megfelelő diszperziós relációval veszi figyelembe, így megbízhatóbb eredményeket ad. Megtaláltam az ultraibolya nem-gaussi fixpontot, a Reuter-fixpontot, ami a modellt aszimptotikusan biztonságossá teszi. Meghatároztam a fixpont helyzetét és az azt jellemző exponenst különböző geometriai elrendezések esetén. Ehhez gömb és henger alakú rendszereket használtam. Az anomális dimenziót a potenciálból és a kinetikus kifejezésből számoltam ki. Minden számítás azonos fázisszerkezetet ad.

## 5. fejezet

# Lorentz-szimmetria

Az előző fejezetben bevezetett konform redukált gravitációs (KRG) modell egy skaláris modell, amely egyszerűségénél fogva további vizsgálatokra ad lehetőséget. A modellben a Lorentz-szimmetria sérülését fogom vizsgálni.

Általában az RG módszert euklideszi téridőben használják, ugyanakkor a megfelelő eljárás megköveteli a Lorentz-szignatúrájú, azaz Minkowski-téridejű megfogalmazást. A gravitációs kölcsönhatás és a megfelelő RG egyenletek Lorentz-szignatúrával történő felírására többféle megközelítést is alkalmaznak.

A Lorentz-szimmetriáról úgy gondolják, hogy alacsony energiáknál, az IR-ben megjelenő szimmetria, azonban az UV-ben a Planck-skála környékén sérül. A Lorentz-szimmetriát és annak lehetséges megsértését széles körben vizsgálták mind a tiszta gravitációs elméletben mind az anyagtérrel kiegészített változatában [102, 103, 104, 105, 29]. A szimmetria sérülését úgy is vizsgálták [28], hogy a fóliázott téridőre vonatkozó RG-egyenletek diffeomorfizmus-szimmetriáját megtartják, de a hatásba Lorentz-szimmetriát sértő tagokat vezetnek be. Eredményképp azt kapják, hogy a Lorentz-szimmetria az UV Reuter-fixpont közelében sérül. A Lorentz-formalizmus több más munkában is fontos szerepet játszik, példa erre a graviton spektrálfüggvény evolúciós egyenletének Lorentz-féle szignatúrában való vizsgálata [106], a graviton propagátor levezetése az AB gravitációban az euklideszi formalizmusból kiindulva [107], az impulzusfüggő formafaktorok meghatározása első elvekből [108], vagy az AB gravitáció összetett operátorainak vizsgálata [109].

A renormálás hiányossága, hogy a Lorentz-szignatúra csak nagy nehézségek árán alkalmazható. Egyrészt a kvantumtérelméletekben szükségünk van regularizációkra, pl. az effektív hatás fejlődését leíró Wetterich-egyenlet a regulátoron alapszik. Jelenlegi tudásunk szerint azonban a nem-perturbatív regulátorok nem Lorentz-invariánsak [51], ami alól a CS-regulátor ugyan kivétel, viszont nem használható regulátorként. Ahogy korábban írtam, a renormálás blokkosítási lépései sértik a Lorentz-szimmetriát. Mivel nem kerülhető el a szimmetria sértése, ezért ebben a fejezetben is azt az eljárást követem, ahol a térbeli impulzusban történik a blokkosítás, tehát ez adja a  $k$  renormálási skálát, míg az frekvenciát kiintegrálom [41]. Ez egy kompromisszumos megoldás, mivel a Lorentz-szimmetriát sérti, de nagyon hatékonyan használható. Az RG blokkosítás problémája Minkowski-téridőben abból is látszik, hogy a Wetterich-egyenletben szereplő hurokintegrál az euklideszi formalizmusban egy véges térfogatú  $d$ -dimenziós gömbre vonatkozó impulzusintegrál, míg Minkowski-téridőben egy végtelen térfogatú hiperboloid integrálja, és ez utóbbi további regularizációt igényel.

Az euklideszi és a Lorentz-formalizmusok jelentősen különböznek egymástól. Az euklideszi propagátor a tömeghéjon kívüli (off-shell) virtuális részecskéket írja le, míg a Minkowski-téridőben a propagátornak lehetnek tömeghéj (on-shell) járulékaik, amelyek a valódi részecskékhez tartoznak, ezek az euklideszi esetben hiányoznak. Továbbá, a Minkowski-formalizmus a csatolásokat komplexsége teszi, ami komplex fixpontokat és exponenseket eredményezhet. A szabványos Wick-forgatás nem tudja garantálni a két megfogalmazás ekvivalenciáját, mivel a Lorentz-szimmetriát is megsérti, továbbá a metrika dinamikai jellege is befolyásolhatja ezt a kérdést [107, 106].

Ezen okok vezetnek arra, hogy egy olyan egyszerű, korábban is alkalmazott RG vizsgálatot válasszunk, ahol az időbeli impulzusokat külön integráljuk, és csak a térbeli impulzusokat vegyük figyelembe az RG fejlődés során, amely így nem igényel további regularizációt. Szerencsére az eredmények azt mutatják, hogy az ilyen, Lorentz-szimmetriát sértő regulátorok és levágások nem változtatják meg az IR fejlődést, amely arra utal, hogy az eljárás megbízható.

Az RG módszert a KRG modellre alkalmazom. Bevezetek egy új görbületes csatolást az Einstein-Hilbert-hatásba, amely relevánsnak bizonyul. Továbbá, az időbeli és térbeli impulzusokat a kinetikus kifejezésben

anizotropikusan veszem fel olyan módon, hogy az időbeli impulzushoz egy további csatolást vezetek be, és annak fejlődése jelezheti az esetleges Lorentz-szimmetriasértést. Az derül ki, hogy ez a csatolás is releváns. Az új csatolásokkal kiegészített fázistér is rendelkezik az UV Reuter-fixponttal, bár a fixpont inkább a Horava-féle gravitációs modellre emlékeztet. A Lorentz-szimmetria a Reuter-fixpont közelében kezdődő UV tartományban sérül.

## 5.1. Aszimptotikusan biztonságos gravitáció

Az EH-hatás euklideszi téridőben,  $d$ -dimenzióban felírva

$$S_{EH}[g_{\mu\nu}] = -\frac{1}{16\pi G} \int_x \sqrt{g}(R(g) - 2\Lambda) \quad (5.1)$$

ahol  $g_{\mu\nu}$  a metrika. A Wetterich-egyenletet fogom használni. A gravitációt ennél az RG módszernél is a pályaintegrálos formalizmusban írjuk fel, ahol a metrika játssza a térváltozó szerepét, és a metrikákat integráljuk ki lépésről lépésre az eljárás során. A Newton-féle  $G = G_k$  és a kozmológiai  $\Lambda = \Lambda_k$  állandók futó csatolásokká válnak és a  $k$  renormálási skálától függenek. Ebben a modellben van egy UV vonzó fixpont, a Reuter-fixpont, ami azt aszimptotikusan biztonságossá teszi.

Ahogy az előző fejezetben említettem, a metrikát felírhatjuk úgy, mint egy rögzített  $\hat{g}_{\mu\nu}$  referencia metrika szorozva egy konform faktoral [85, 110, 86, 30], és a konform faktort pedig parametrizálhatjuk egy  $\phi(x)$  skalárfüggvény segítségével

$$g_{\mu\nu} = \phi^{4/d-2} \hat{g}_{\mu\nu}, \quad (5.2)$$

így a skalártérre standard kinetikus tagot kaphatunk. A Weyl-újraszkálázás után az Einstein-Hilbert-hatás  $\phi^4$ -elmélethez hasonló alakot vesz fel 4-dimenzióban. A  $\phi$  skalártér felírható a  $\chi_B$  konstans háttér teret bevezetve  $\phi = (\chi_B + f)$  módon, így a konform redukált EH-hatás alakja

$$S_k[f; \chi_B] = -Z \int_x \sqrt{\hat{g}} \left\{ -\frac{1}{2} f \hat{\square} f + \frac{1}{12} \hat{R} (\chi_B + f)^2 - \frac{\Lambda}{6} (\chi_B + f)^4 \right\}. \quad (5.3)$$

Itt  $\hat{R}$  a  $\hat{g}$  referencia metrika görbülete,  $-\hat{\square}$  a Beltrami-Laplace-operátor,  $\bar{f}$  pedig az  $f$  tér normált várható értékét jelöli. A (blokkosított) hatás függ a  $G_k$  csatolástól, amely a  $Z = \frac{3}{4\pi G}$  hullámfüggvény renormálásban jelenik meg, illetve a  $\Lambda_k$  csatolástól. Az egyszerűbb jelölés érdekében a csatolások skálafüggését nem írom ki. Az eredeti modellhez hasonlóan, a konform redukált modell is rendelkezik Reuter-fixponttal, tehát aszimptotikusan biztonságos az elmélet. A skalártér veszi át a metrika szerepét a pálya-integrálban, és így formálisan egy egyszerű skalárelméletet kapunk, ami megkönnyíti a számolásokat. Ez a KRG nagy előnye.

Feltételezzük, hogy az effektív hatás alakja megegyezik a blokkosított hatás alakjával, vagyis

$$\Gamma_k[\bar{f}; \chi_B] = -Z_k \int_x \sqrt{\hat{g}} \left\{ -\frac{1}{2} \bar{f} \hat{\square} \bar{f} + \frac{c}{12} \hat{R} (\chi_B + \bar{f})^2 - \frac{\Lambda}{6} (\chi_B + \bar{f})^4 \right\} \quad (5.4)$$

a gradiens kifejtés legalacsonyabb rendjében. Az új  $c$  csatolás bevezetésével megengedem, hogy a derivált tag és a  $\mathcal{O}(\hat{R})$  tag külön fussanak. Ha rögzítem  $c = 1$ -et és nem engedem meg az időbeli változását, akkor visszkapom a szokásos két csatolással rendelkező EH-hatás konform redukált alakját. Hengeres szimmetria esetén Lorentz-szignatúrával a Beltrami-Laplace-operátor

$$-\hat{\square} = W \partial_0^2 - \hat{\Delta}. \quad (5.5)$$

Az idő szerinti deriváláshoz tartozó tagot megszoroztam egy további  $W$  csatolással, ezzel megengedve a tér és idő eltérő változását. Az időfejlődés során követem a csatolás alakulását, és amikor  $W \neq 1$  értéket kapok, az jelzi a Lorentz-szimmetria sérülését.

A  $k$  futó skálához tartozó háttér metrika  $\bar{g}_{\mu\nu} = \chi_B^2 \hat{g}_{\mu\nu}$ . A Wetterich-egyenlet használatakor az impulzus integrálok regularizációja szükséges a  $-\bar{\square}$  operátor  $\bar{g}_{\mu\nu}$  háttér metrikához tartozó sajátértékének  $k^2$  skálája körül. Ehhez be kell vezetni egy regulátort, ami a következő helyettesítéssel érhető el:

$$-\bar{\square} \Rightarrow -\bar{\square} + k^2 \mathcal{R}^{(0)} \left( \frac{-\hat{\square}}{k^2 \chi_B^2} \right), \quad (5.6)$$

ahol a  $\hat{\square} = \chi_B^2 \bar{\square}$  jelölést használom [5, 111]. Itt  $\mathcal{R}^{(0)}$  az a regulátor, ami interpolál  $\mathcal{R}^{(0)}(0) = 1$  és  $\mathcal{R}^{(0)}(\infty) = 0$  között. A számítások során a

Litim-regulátort használom [112],

$$\mathcal{R}^{(0)}(z) = (1 - z)\theta(1 - z), \quad (5.7)$$

ami gyors konvergenciát és analitikus béta függvényeket szolgáltat. A referencia metrika kiválasztása függ az előjeltől, és attól, hogy a Wetterich-egyenlet jobb oldalán található Tr kiszámtásakor a frekvencia- és a térimpulzus integrálokat hogyan végzem el. A Lorentz-szignatúrához a  $\hat{g}_{00} = -1$ ,  $\hat{g}_{ij} = \delta_{ij}$  referencia metrika tartozik. Az időbeli impulzus integrált a térbelitől leválasztva végzem el, a térbeli impulzus integrált pedig a 3-dimenziós  $-\hat{\Delta}$  operátor függvényeire alkalmazott "heat-kernel" módszerrel hajtom végre. A regularizált operátor így

$$-\bar{\square} + \gamma k^2 \mathcal{R}^{(0)}\left(\frac{-\hat{\Delta}}{k^2 \chi_B^2}\right) = \chi_B^{-2} \left[ W \partial_0^2 - \hat{\Delta} + \gamma \chi_B^2 k^2 \mathcal{R}^{(0)}\left(\frac{-\hat{\Delta}}{k^2 \chi_B^2}\right) \right]. \quad (5.8)$$

A  $\gamma$  megfelelő megválasztása garantálja a pályaintegrál konvergenciáját, ez pedig  $\gamma = 1 - i\epsilon$ . A pályaintegrálban az (5.6)-os helyettesítés a következő változást jelenti:

$$-Z \int_x \frac{1}{2} f(-\hat{\square}) f \Rightarrow -Z \int_x \frac{1}{2} f \left[ W \partial_0^2 - \hat{\Delta} + (1 - i\epsilon) \chi_B^2 k^2 \mathcal{R}^{(0)}\left(\frac{-\hat{\Delta}}{k^2 \chi_B^2}\right) \right] f. \quad (5.9)$$

Bevezetem a következő jelölést a regulátorra:

$$\mathcal{R}_k = -Z(1 - i\epsilon) \chi_B^2 k^2 \mathcal{R}^{(0)}\left(\frac{-\hat{\Delta}}{k^2 \chi_B^2}\right). \quad (5.10)$$

Az  $-i\epsilon$  tag miatt a pályaintegrál konvergens, ráadásul az inverz propagátor impulzus függése megszűnik a Litim-regulátor esetén. Így az inverz propagátor impulzustérben

$$-W\omega^2 + \mathbf{p}^2 + (1 - i\epsilon) \chi_B^2 k^2 \mathcal{R}^{(0)}\left(\frac{\mathbf{p}^2}{\chi_B^2 k^2}\right) = -\chi_B^2 k^2 \left[ W s^2 - \left(1 - i\epsilon(1 - z)\right) \right], \quad (5.11)$$

alakú, ahol kihasználva a Litim-regulátor alakját és bevezetve a

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\omega^2}{\chi_B^2 k^2} \\ z &= \frac{\mathbf{p}^2}{\chi_B^2 k^2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

dimenziótlan változókat, a szabad propagátor

$$\frac{1}{Ws^2 - (1 - i\epsilon)} \quad (5.13)$$

alakú lesz. Az ehhez tartozó effektív tömegtag pedig

$$m_{eff}^2 = \frac{1 - i\epsilon}{W}, \quad (5.14)$$

amik összhangban vannak a Feynman-féle  $i\epsilon$  előírással. Az egyszerűség kedvéért az alábbiakban az  $i\epsilon$  tagok elnyomását választom.

## 5.2. Evolúciós egyenletek

A Wetterich-egyenlet [5] Lorentz-szignatúrával

$$\dot{\Gamma}_k[\bar{f}; \chi_B] = -i\frac{\hbar}{2}\text{Tr}\left(\frac{\dot{\mathcal{R}}_k}{\Gamma_k^{(2)} - \mathcal{R}_k}\right), \quad (5.15)$$

ahol  $\hbar = 1$ ,  $\text{Tr}A = \int_x A_{xx} = \int d^4x \sqrt{|\hat{g}_x|} A_{xx} = \int d^4x d^4y \delta_{x,y} \sqrt{|\hat{g}_x|} A_{xy}$  és  $\Gamma_k^{(2)}$  a térváltozó szerinti második funkcionális deriváltja az effektív hatásnak. A  $\dot{\phantom{a}} = \partial_t$  rövidítést használom, ahol  $t = \ln k$ .

Bevezetem a következő potenciálokat:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= ZU(\phi), \\ U(\phi) &= \frac{\Lambda}{6}\phi^4 - \frac{c}{12}\hat{R}\phi^2, \\ u(\phi) &= U(\phi) + \frac{c}{12}\hat{R}\phi^2. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Csak az  $\mathcal{O}(\bar{f}^2)$  rendű tagokat megtartva azt kapom, hogy

$$\dot{\Gamma} = -i\frac{k^2\chi_B^2}{Z_k}(T_0 + T_1 + T_2), \quad (5.17)$$

ahol

$$\begin{aligned}
T_0 &= \text{Tr}\{K^{-1}\mathcal{N}\}, \\
T_1 &= \text{Tr}\{K^{-1}\delta\mu K^{-1}\mathcal{N}\}, \\
T_2 &= \text{Tr}\{K^{-1}\delta\mu K^{-1}\delta\mu K^{-1}\mathcal{N}\},
\end{aligned} \tag{5.18}$$

valamint

$$\delta\mu = 4\Lambda\chi_B\bar{f} + \frac{1}{2}4\Lambda\bar{f}^2, \tag{5.19}$$

illetve

$$\begin{aligned}
K &= \mathcal{A}(\partial_0^2, -\hat{\Delta}) + \frac{c}{6}\hat{R} \\
\mathcal{A}(\partial_0^2, -\hat{\Delta}) &= W\partial_0^2 - \hat{\Delta} + \gamma k^2\chi_B^2\mathcal{R}^{(0)}\left(\frac{-\hat{\Delta}}{k^2\chi_B^2}\right) - u_k''(\chi_B) \\
\mathcal{N} &= \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right)\mathcal{R}^{(0)}\left(\frac{-\hat{\Delta}}{k^2\chi_B^2}\right) - \frac{-\hat{\Delta}}{k^2\chi_B^2}\mathcal{R}^{(0)'}\left(\frac{-\hat{\Delta}}{k^2\chi_B^2}\right),
\end{aligned} \tag{5.20}$$

és bevezettem az  $\eta = \dot{G}/G$  anomális dimenziót. Feltételezem, hogy a hengeres geometriával rendelkező elrendezésben a referencia metrika alakja

$$(\hat{g}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{h} \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

ahol  $\hat{h}_{ij}$  nem függ az  $x^0$  koordinátától. A referencia metrika szerkezetéből következik, hogy a téridő  $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$  normálvektorú  $\Sigma_t$  ( $t = x^0$ ) hiperfelületek által határolt úgy, hogy  $\Sigma_t$  külső görbülete nulla, ezáltal a referencia metrikához tartozó 4-dimenziós és 3-dimenziós görbületek egyenlőek [10].

Az  $u(\chi_B)$  potenciálhoz tartozó RG egyenleteket úgy kapom, hogy megtartom  $\hat{R}^1$  rendig a tagokat. A kezdeti feltétel a  $k_i$  skálán a kezdeti  $\Lambda(k_i) \equiv \Lambda_i$ ,  $c(k_i) = W(k_i) = 1$  és  $G(k_i) = G_i$  csatolásokkal felírt KRG hatáshoz tartozik. Az RG egyenleteket a potenciálra az (5.15) egyenletből származtatom az  $\bar{f}^0$  rendű tagok megtartásával, vagyis  $\bar{f} = 0$  esetben:

$$\left(-\eta U(\chi_B) + \dot{U}(\chi_B)\right)\Omega = \frac{k^2\chi_B^2}{Z}T_0, \tag{5.22}$$

ahol  $\Omega = \int_x \sqrt{\hat{g}}$ . A  $K^{-1}$  Neumann-kifejtése  $\hat{R}$ -ben

$$T_0 = T_{00} - \frac{1}{6} \hat{R} T_{01} \quad (5.23)$$

eredményt adja, ahol

$$\begin{aligned} T_{00} &= \text{Tr} W_{01}(-\hat{\square}) = (4\pi)^{-2} \left[ Q_2[W_{01}] + \frac{1}{6} \hat{R} Q_1[W_{01}] + \dots \right] \Omega, \\ T_{01} &= \text{Tr} W_{02}(-\hat{\square}) = (4\pi)^{-2} [Q_2[W_{02}] + \dots] \Omega, \end{aligned} \quad (5.24)$$

és  $W_{0n}(y) = \mathcal{N}(y)/\mathcal{A}^n(y)$ . A  $Q_n$  momentumok kifejezhetőek a regulátorfüggvények segítségével, és bevezetve a  $w = -u_k''(\chi_B)/\chi_B^2 k^2$  jelölést a következőt kapom:

$$Q_n[W_{0p}] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dy y^{n-1} W_{0p}(y) = (\chi_B^2 k^2)^{n-p} \left[ \phi_n^p(w) - \frac{1}{2} \eta \tilde{\phi}_n^p(w) \right]. \quad (5.25)$$

A Litim-regulátor használatánál, Minkowski-téridő esetére a regulátorfüggvények az alábbiak:

$$\begin{aligned} \phi_\nu^1(w) &= i \frac{1}{2\Gamma(\nu+1)\sqrt{1+w}}, \\ \phi_\nu^2(w) &= i \frac{1}{4\Gamma(\nu+1)(1+w)^{3/2}} \end{aligned} \quad (5.26)$$

A két oldalon összehasonlítom az  $\hat{R}$  különböző hatványaihoz tartozó tagokat, így adódnak az RG egyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= (-2 + \eta)\lambda - i \frac{g}{\pi^{1/2} W^{1/2}} \left( 1 - \frac{\eta}{5} \right) \phi_{3/2}^1(-2\lambda), \\ \dot{c} &= \eta c + i \frac{g}{3\pi^{1/2} W^{1/2}} \left[ \left( 1 - \frac{\eta}{3} \right) \phi_{1/2}^1(-2\lambda) - c \left( 1 - \frac{\eta}{5} \right) \phi_{3/2}^2(-2\lambda) \right], \end{aligned} \quad (5.27)$$

ahol bevezettem a dimenziótlan csatolásokat, mint

$$\lambda = k^{-2} \Lambda, \quad g = k^2 G, \quad (5.28)$$

a  $W$  és  $c$  csatolások pedig eleve dimenziótlanak.

Az anomális dimenzió képletéhez az  $\mathcal{O}(f^2)$  rendű tagokat kell figyelembe venni az (5.15)-ben:

$$\int \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2}(\eta W - \dot{W}) \bar{f} \partial_0^2 \bar{f} + \frac{1}{2} \eta \bar{f} \Delta \bar{f} \right\} = -\frac{16\Lambda^2 \chi_B^4 k^2}{Z_k} \text{Tr} \left( \mathcal{N} \mathcal{A}^{-2} \bar{f} \mathcal{A}^{-1} \bar{f} \right) \quad (5.29)$$

Innen közvetlen számolással kapom a következő képletet  $\eta$ -ra:

$$\eta = -\frac{10\lambda^2 g}{9\pi W^{1/2} (1-2\lambda)^{7/2}}, \quad (5.30)$$

a  $W$  evolúciós egyenlete pedig:

$$\dot{W} = -\frac{32\lambda^2 4\pi g}{3} \left( \frac{\eta}{5} - 1 \right) \frac{5W^{1/2}}{384\pi^2 (1-2\lambda)^{7/2}} + \eta W \quad (5.31)$$

### 5.3. Releváns csatolások

Az evolúciós egyenletek leírják az effektív hatás skálafüggését, beleértve a csatolások alakulását is. A fixpontok közelében a pályák skálázása megváltozhat. A fixpontok körül a csatolások bizonyos skálázási tulajdonságokkal rendelkeznek, általában a  $g \sim e^{st}$  szerint változnak, ahol az  $s$  exponens a csatolás skálázási jellegét jellemzi, és  $t = \ln k$ . Ha az  $s$  valós része negatív, az releváns skálázásnak felel meg, a pozitív előjel pedig irrelevanciát jelöl. A Reuter-fixpontban minden csatolás releváns, ami az elméletet aszimptotikusan biztonságossá teszi.

A modell vizsgálata során két új csatolást vezettem be, ezért először meg kell nézni, hogy mi történik a hagyományos fixpontokkal. A béta függvények analitikusak, ezek alakja

$$\begin{aligned} \dot{g}' &= (2 + \eta)g' - \frac{5g'^2 \lambda^2 (2g'\lambda^2 - 9(1-2\lambda)^{7/2}\pi)}{81(1-2\lambda)^7 \pi^2} \\ \dot{\lambda} &= (-2 + \eta)\lambda - \frac{g'(\eta - 5)}{15\pi^{5/2}(1-2\lambda)^{1/2}} \\ \dot{W} &= \eta W - \frac{g'\lambda^2 W(\eta - 5)}{9\pi(1-2\lambda)^{7/2}} \\ \dot{c} &= \eta c - g' \frac{c(\eta - 5) - 5(\eta - 3)(1-2\lambda)}{90\pi^{5/2}(1-2\lambda)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

a  $g' = g/W^{1/2}$  jelölés bevezetése után.

### 5.3.1. Aszimptotikus biztonság

Az első két egyenlet (5.32)-ben lecsatolóódik a többiről. Az újraszaklázott  $g'$  csatolás  $\lambda$ -val Reuter-fixpontot mutat  $g'^* = 25.4$  és  $\lambda^* = 0.21$  értékeknél,  $s_{1,2}^R = -5.16 \pm i6.17$  exponensekkel. A  $c$  csatolás ennek megfelelő értéke  $c^* = -0.25$  az  $s_3^R = -2.35$  exponenssel, a  $W$  csatolás fixponti értéke pedig  $W^* = 0$ , ahol az exponens  $s_4^R = -0.62$ , és ezeknél a felső index mutatja, hogy a Reuter-fixponthoz tartoznak. Az exponensek valós részei negatívak, ami azt jelenti, hogy a csatolások az UV tartományban relevánsak. Az exponensek egymáshoz komplex konjugáltak, ami spirális trajektóriákat eredményez. A két új csatolás az UV tartományban relevánsnak bizonyult, ezért az elmélet renormálható marad. Az, hogy az ebben a formában felírt modellben megtaláltam a Reuter-fixpontot, az egyik legfontosabb eredményem.

A GFP létezése felel a modell két fázisáért. A GFP egy szabad elméletnek felel meg, ráadásul a kozmológiai és a Newton-csatolások konkrét értéke szerint a jelenlegi világunk nagyon közel helyezkedik el a GFP-hez, ami rendkívül fontossá teszi ennek a fixpontnak a vizsgálatát. A GFP-ben releváns és irreleváns skálázási viselkedést mutató csatolások is vannak. A  $\lambda$  csatolás előjele szerint megkülönböztethetünk egy szimmetrikus fázist, ahol IR határesetben  $\lambda < 0$ . A másik, szimmetriasértett fázis trajektóriái pozitív  $\lambda$  értékekkel futnak, legalábbis az IR-ben. A szimmetriasértett fázisban a trajektóriák szingularitásba ütköznek  $\lambda = 0.5$ -nél. A sértett fázis ezen tulajdonsága a skalármodellekben is megjelenik [57, 8]. Bár vannak olyan renormálási sémák, ahol a trajektóriák túlélnek a szingularitást, de nem ez a jellemző. Érdeemes megemlíteni, hogy a potenciál sorfejtésében magasabb rendű tagok megtartásával a szinguláris viselkedés is eltűnhet, de megjegyzem, hogy a szingularitás, úgy tűnik, fizikai tartalommal bír [58, 53]. Az új csatolások bevonása eredményezhetett volna további fázisokat, azonban ilyeneket nem találtam.

Numerikusan meghatároztam a csatolások futásait az UV és az IR tartományokban. A  $t$  pozitív értékei az UV skálázásokat, míg a negatív értékek az IR skálázásokat adják. Az IR határesetben mind a szimmetrikus, mind a szimmetriasértett fázisú trajektóriákat figyelembe kell venni. Az UV határesetben nincs szükség a fázisok különválasztására, mivel ott nincs

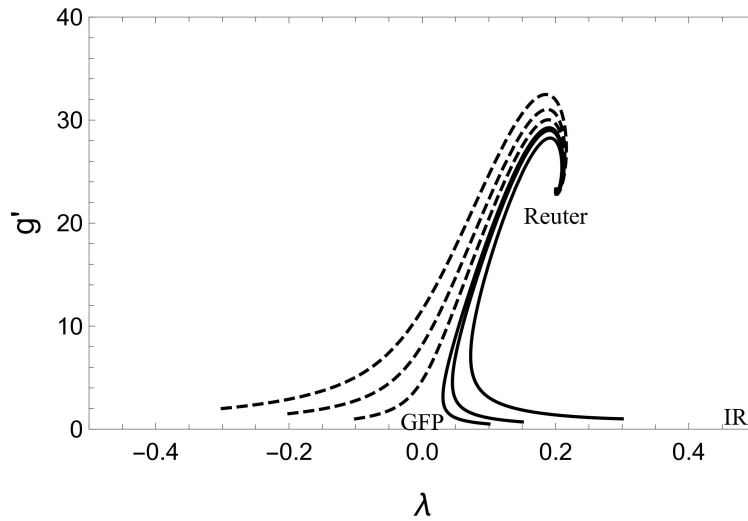
érzékenység a fázisokra, minden trajektória a Reuter-fixpontba fut. Ahol lehetséges volt, ott az UV és IR skálázásokat együtt ábrázoltam. Az RG egyenleteket a GFP közeléből kiindulva oldottam meg. Egyrészt, a hagyományos RG eljárást követve a blokkosítást IR irányba végeztem, másrészt azonban az RG blokkosítást az UV irányba is el kellene végezni. Ez az RG módszer használatánál elfogadott, bár csak akkor tartható fenn, ha az irreleváns csatolásokat nem vesszük figyelembe, mivel azok az UV tartományban divergálnak. Ez a feltétel az általam használt modellben teljesül, így az UV RG blokkosítás helyes eredményeket szolgáltathat.

Az evolúciót a GFP közeléből indítom, ahol a gravitációs kölcsönhatás gyenge. A jelenlegi világunk is itt található. Lapos Minkowski-téridőt feltételeztem, ezért kezdetben pl.  $W = 1$  értéket választom.

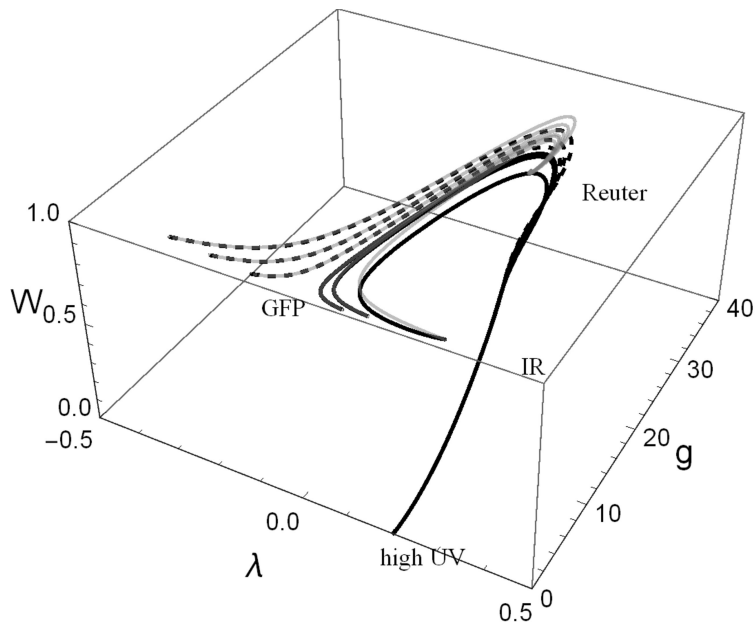
A Reuter-fixpontot mutató fázistér a spirális trajektóriákkal az 5.1 ábrán látható. A GFP két részre osztja a fázisteret. A  $W$  csatolás által követhető téridő-aszimmetria tetszőleges értékeket vehet fel. Mivel világunk a GFP közelében van, ahol a Lorentz-szimmetria garantált, célszerűnek tűnik, hogy ott  $W = 1$  legyen a kezdeti érték. A csatolások exponenseit a tömeg dimenziójuk adja meg, i.e.  $s_\lambda^G = 2$ ,  $s_{g'}^G = -2$ ,  $s_c^G = 0$ ,  $s_W^G = 0$ .

### 5.3.2. Aszimptotikus biztonságból aszimptotikus szabadság?

Bár a  $g'$  bevezetése elrejtette a  $W$ -t, ez a csatolás ad információt a Lorentz-szimmetriáról. A  $g$ -ről  $g'$ -re történő áttérés a Newton-csatolás újraszkalázásának tekinthető oly módon, hogy a Lorentz-szimmetria megőrződik az evolúció során. Ha visszatérek az eredeti  $g$  csatoláshoz, akkor azt várom, hogy a tér fázisszerkezete megváltozik, és ez valóban így is történik. Az 5.2 ábrán egy fázisdiagramot mutatok be a 3-dimenziós fázistérben, amelynek függőleges tengelye a  $W$ .



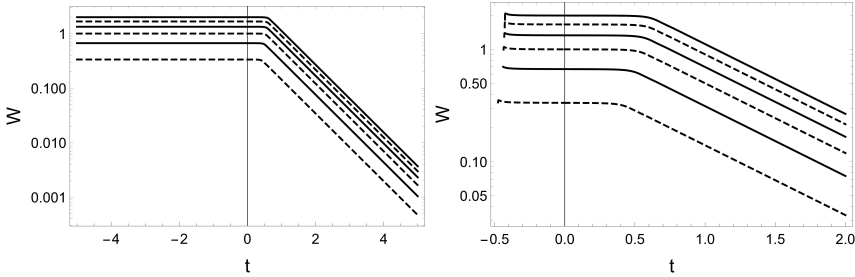
5.1. ábra. A  $\lambda - g'$  fázisdiagramot ábrázoltam. Látható a gaussi, a Reuter és egy infravörös fixpont, illetve a két fázis. A balra tartó trajektóriák a szimmetrikus fázishoz tartoznak (szaggatott vonalak), a többi pedig a szimmetriasértett fázishoz tartozik (folytonos vonalak).



5.2. ábra. A  $\lambda - g - W$  fázisdiagram bemutatja, hogyan deformálódik a Reuter-fixpont az ultraibolya tartományban a  $W$  csatolás miatt. Az 5.1 trajektóriáit a  $\lambda - g$  síkban a  $W = 1$  választás esetén szürke görbék mutatják be. A balra haladó fekete trajektóriák a szimmetrikus fázishoz tartoznak (szaggatott vonalak), a többi a szimmetriasértett fázis része (folytonos vonalak). A trajektóriák UV irányában egy másik fix pont felé tartanak.

Jól látható, hogy bár az evolúció elején a  $W$  látszólag megtartja kezdeti 1 értékét, az RG skála egy bizonyos értékénél csökkenni kezd, ezt később az 5.3 ábránál elemzem. Ennek eredményeként a magas UV határon  $W \rightarrow 0$ , továbbá  $g \rightarrow 0$ . Ez azt jelenti, hogy a Reuter-fixpont standard formája a fixpontban véges értékű csatolásokkal nem tartható fenn. Az ábra vízszintes metszetei úgy értelmezhetők, mint a Reuter-fixpont helyzete  $W$  minden egyes értékére. Azt lehet mondani, hogy a Reuter-fixpont deformálódik a  $W$  fejlődésének következményeként. A Reuter-fixpont a hagyományos formájában befagyasztja az UV tartományban történő evolúciót, megakadályozva az új fizika megjelenését a Planck-skála környékén, továbbá a Lorentz-szimmetria megsértését nagy energiáknál. Az általam használt módszer és a kapott eredmények az utóbbi problémát a  $W$  evolúciójának bevonásával kezelni tudják. A Reuter-fixpont  $W$  miatti vándorlása lehetővé teszi új releváns csatolások keresését, amelyek nagy energiákon új fizikát jelezhetnek, hiszen az 5.2 ábráról az látszik, hogy a Lorentz-sértés miatt csak a Reuter-fixpontnak egyfajta árnyéka marad meg. Ez a viselkedés, illetve a magas UV tartomány felé történő evolúció lehetővé teszi az új kölcsönhatások utáni kutatást.

Az eredmények azt mutatják, hogy a  $W$  alakulása döntő fontosságú a modell viselkedésének megértéséhez. Az UV és az IR futásokat az 5.3 ábrán a szimmetrikus fázisban lévő  $W$  esetében mutatjuk be.



5.3. ábra. A bal oldali ábra a  $W$  futását mutatja a szimmetrikus fázisban, ez az UV határesetben nullához tart, és a gaussi fixpont közeléből indulva az IR felé haladva állandó. A  $W(k_i) = W_i$  kezdeti értékek alulról felfelé a következők:  $1/3, 2/3, 1, 4/3, 5/3, 2$ . A jobb oldali ábra a  $W$  alakulását mutatja a szimmetriasértett fázisban, ugyanezekkel a kezdeti feltételekkel. Az UV-skálázás nem változik, a gaussi fixpont közeléből kiindulva ismét egy széles átmeneti tartomány jelentkezik, ahol  $W$  értéke állandó marad, de a szingularitás közelében  $W$  hirtelen nullára csökken.

Az 5.3 ábrán látható, hogy a  $W$  futása olyan, hogy a kezdeti értékeitől függetlenül UV irányban csökken, és nullához tart. Ez azt mutatja, hogy a csatolás nagy energiáknál kihál, ami azt is jelenti, hogy az hatásban szereplő időderivált kifejezés is kihál. Ezért a Lorentz-szimmetria az UV tartományban oly módon sérül, hogy statikus rendszer jön létre. A  $W$  5.3-beli alakulásából leolvasható, hogy a  $W$  skálázása körülbelül a  $t_l \sim 0.5$  skálán változik meg drasztikusan, ami megfeleltethető a Lorentz-szimmetriasértés skálájának. A többi csatolás majdnem állandó  $t_l$ -nél, de nem pontosan, különben a fejlődés ott befagyna. Ez a kismértékű eltérés az állandó fixponti értéktől lehetővé teszi, hogy a Reuter-féle fixponti skálázáson túllépve elérhető legyen a fixponton túli UV tartomány. A hagyományos Reuter-fixpont emléke azonban ott marad árnyékként (pl. 5.2 ábrán ezt az az átlátszatlan sűrű görbék rajzolják ki), amely összegyűjti a trajektóriákat, majd azok együtt futnak az UV tartományba.

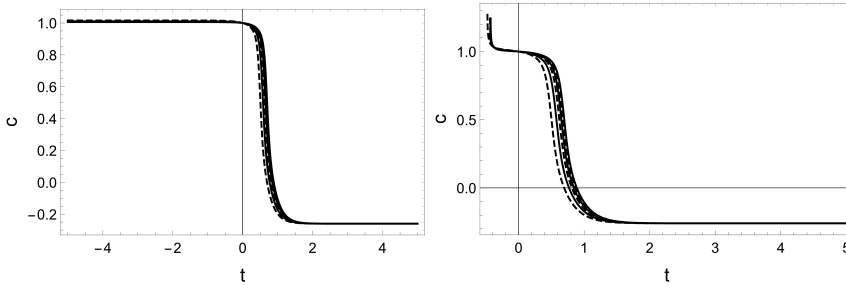
Az (5.32) evolúciós egyenletek szerint a nem-gaussi fixpont  $g^* = 0$ ,  $\lambda^* = 0.2$ ,  $c^* = -0.25$  és  $W^* = 0$  értékeknél található. Az eredmény azt mutatja, hogy a newtoni csatolás nulla, és ebben az értelemben a fixpont (a  $\lambda^*$  véges értékétől eltekintve) gaussinak tekinthető, mivel az elmélet kölcsönhatásmentes. Ez azt jelenti, hogy a fixpont körül a gravitáció gyengének tekinthető, így a perturbatív renormálás működhet. Ez figyelemre méltó eredmény, hiszen a kvantumgravitáció renormálhatóvá tételéhez a nem-perturbatív RG módszerre volt szükség. A másik fontos dolog az, hogy az új UV fixpont úgy tűnik, hogy a hatásban lévő időbeli és térbeli deriváltak anizotrópiájának következménye. Hasonló gondolat jelenik meg a Horava-Lifshitz-gravitációban [113, 114, 104, 115, 116, 117, 118, 119], ahol az anizotrópia a tér és az idő irányában különböző számú deriváltakkal kerül bevezetésre. Úgy tűnik, hogy az anizotrópia a fixpontot nem-gaussiból gaussiba viheti, illetve a kvantumgravitációt aszimptotikusan biztonságosból aszimptotikusan szabad elméletté változtathatja. A Reuter-fixpont vándorlásaként megjelenő új fixpont megfeleltethető a Horava-elmélet fixpontjának.

## 5.4. Infravörös tartomány

A  $W$  fejlődését vizsgálva az 5.3 ábrán az IR határértékben az látható, hogy megtartja a GFP közelében felvett kezdeti értékét, legalábbis a szimmet-

rikus fázisban. Ez azt jelenti, hogy a Lorentz-szimmetria nem sérül az IR tartományban, tehát a hagyományos RG módszer használatával az IR felé haladva a Lorentz-szimmetria megmarad. Ez az eredmény mutatja, hogy a Minkowski-téridőben megfogalmazott RG módszer képes megőrizni a Lorentz-szimmetriát, annak ellenére, hogy a regulátor és a levágás kifejezetten sérti azt. A helyzet némileg megváltozik a szimmetriasértett fázisban, bár még ekkor is előfordul egy hosszú átmeneti régió, ahol a  $W$  az IR felé haladva megtartja a Gauss-féle fixpontban felvett kezdeti értékét. A szingularitás közelében azonban egy másik skálázási tartomány is előfordul, amelyről később esik szó.

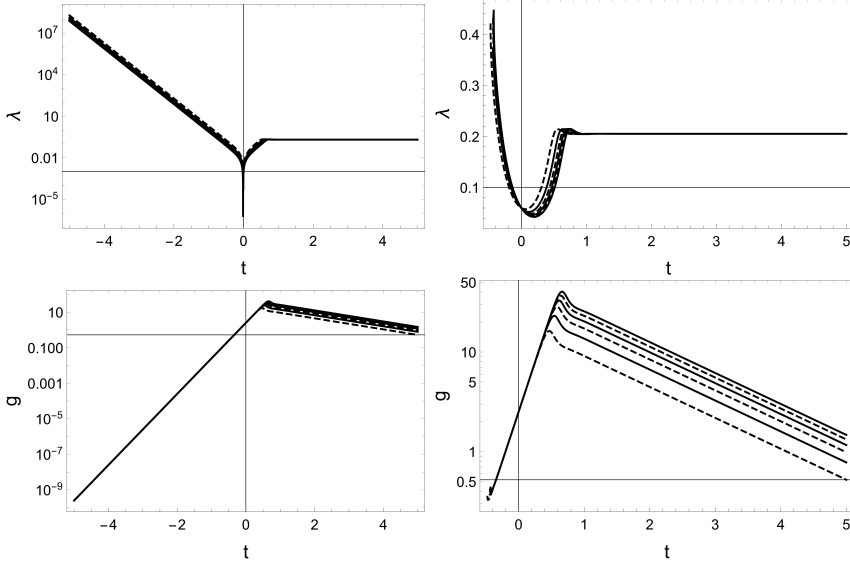
Ezután megvizsgálom az EH-hatás görbületi tagjához tartozó  $c$  csatolást. Az UV és IR evolúciókat együtt mutatja be az 5.4 ábra. Az UV tartományban  $c$  relevánsnak bizonyul, és a Reuter-fixpont közelében állandó negatív értéket vesz fel, míg az IR irányában megtartja kezdeti értékét. A szimmetriasértett fázisban ismét egy IR skálázási törvény mutatkozik meg. Bár sikerült leválasztani az  $R$  görbületben lineáris tagot, és a hozzá tartozó  $c$  csatolás is releváns, de az IR határesetben a hatása elhanyagolható.



5.4. ábra. A  $c$  csatolás evolúciója látható. A bal oldali ábra a szimmetrikus fázisban mutatja be a futást  $c(k_i) = c_i = 1$  kezdeti értékkel, míg a jobb oldali a szimmetriasértett fázisra vonatkozik. A különböző trajektóriák a  $W_i$  különböző kezdeti értékeihez tartoznak az 5.3 ábrának megfelelően.

A teljesség kedvéért ábrázoltam a  $\lambda$  és  $g$  skálázását az 5.5-ban, ahonnan leolvasható, hogy mindkét csatolás a Reuter-fixponthoz tartozó véges pozitív értékre áll be. Az IR tartomány felé haladva a szimmetrikus és a szimmetriasértett fázishoz tartozó görbék eltérően viselkednek. A  $g$  Newton-csatolás pozitív marad és monoton csökken az IR irányban, míg a  $\lambda$  kozmológiai csatolás nagysága végtelenbe tart az IR tartományban,

pozitív marad a szimmetriasértett fázisban és előjelet vált a szimmetrikus fázisban.

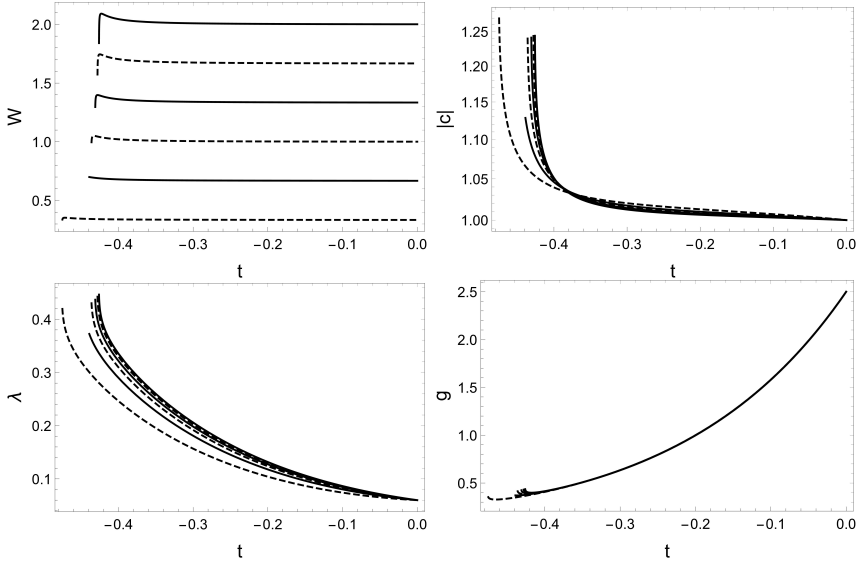


5.5. ábra. A  $\lambda$  és  $g$  csatolások evolúciói láthatók a szimmetrikus (bal oldali ábra) és a szimmetriasértett (jobb oldali ábra) fázisban. A különböző görbék az 5.3-ban használt  $W_i$  kezdeti értékekhez tartoznak.

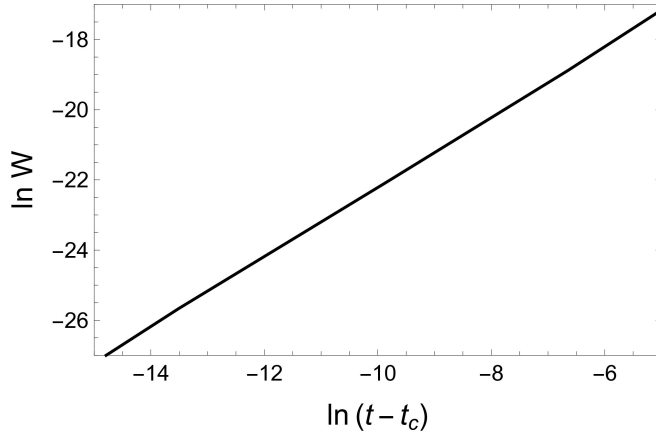
Ennélfogva a  $\lambda$  és  $g$  csatolások evolúciói kvalitatív értelemben ugyanazt a jól ismert viselkedést mutatják ebben az esetben is, mint amit a kétparaméteres Einstein-Hilbert elmélet RG analízise során kapunk. Ez arra enged következtetni, hogy a  $\lambda$  és  $g$  futásait nem befolyásolják túlságosan az új csatolások az IR tartományban.

A korábban már említett szingularitáshoz közeli rövid skálázási tartományt is megvizsgálom a szimmetriasértett fázisban, amelyet az 5.6 ábrázol. Érdeemes megjegyezni, hogy a szimmetriasértett fázisban az RG trajektóriák nem követhetők  $t$  tetszőlegesen kis értékéig, mert a béta függvényekben szingularitás van, amely a propagátor pólusánál jelenik meg. Így létezik egy véges kritikus  $t_c$  határérték, ahol az RG evolúció megáll. Hasonló típusú skálázási viselkedést találunk a szimmetriasértett fázisban más modellek esetében is [120, 121, 8]. Az evolúciók főként azokban a skalármodellekben futhatnak szingularitásba, ahol a potenciált  $\phi = 0$  körül

fejtjük sorba. Ha a potenciált egy futó minimummal paraméterezzük, ami megfelel egy csatolásnak, akkor a szingularitás nem jelenik meg. Ebben az esetben az evolúció befagy, amint elérnénk a szinguláris régiót. Ez a trükk az itt vizsgált modellben nem alkalmazható, mert nem lehet megváltoztatni a hatás  $\tilde{f}$  függését. A  $t_c$  konkrét értéke a kezdeti feltételektől függ, azonban a szimmetriasértett fázisban minden trajektória a szingularitás felé fut. A  $t_c$  közelében minden csatolás elkezd divergálni, kivéve a  $W$ -t. A csatolások megfelelő újraszkalázásával megállapítható, hogy a szingularitás közelében a csatolások skálázási viselkedést mutatnak, ami arra utal, hogy létezik egy fixpont a szimmetriasértett fázis IR tartományában. Az IR skálázás elemzésénél a  $W$  trajektóriáját a  $t - t_c$  függvényében ábrázolom. Addig kell változtatni a  $t_c$  értékét, amíg az kétszer logaritmikus skálán egyenes vonalat nem ad eredményül. A  $t_c$  nem megfelelő értékét használva az egyenes elhajlik. Ezzel a módszerrel gyakorlatilag tetszőleges pontossággal tudjuk meghatározni a  $t_c$  értékét. Az 5.7 ábrán látható ennek eredménye, amely azt mutatja, hogy  $W \sim (t - t_c)$ .



5.6. ábra. Az ábrákon a különböző csatolások RG evolúciói láthatók az IR tartományban szimmetriasértett fázis esetén. A  $W_i$  kezdeti értékei alulról felfelé:  $1/3$ ,  $2/3$ ,  $1$ ,  $4/3$ ,  $5/3$ ,  $2$ , illetve  $g_i = 2.5$ ,  $\lambda_i = 0.06$ ,  $c_i = 1$  minden görbe esetén.



5.7. ábra. A  $W$  csatolás skálázása a szimmetriasértett fázisban a  $t_c$  kritikus levágás közelében.

Az 5.7 alapján látható, hogy a Lorentz-szimmetria a szimmetriasértett fázis mély IR tartományában is sérül. Mivel ez a fázis fizikailag lényegesebbnek tűnik (hiszen a kozmológiai állandó a mi világunkban pozitív), érdekes lehet megfigyelni, hogy a GFP körül megvan a Lorentz-szimmetria, de a magas UV és a mély IR tartományokban ez sérül. Úgy tűnik, hogy az RG-módszer alkalmazhatóságának összeomlása a szingularitás körül a szimmetriasértett fázisban egybeesik a Lorentz-szimmetria megsértésével. A szingularitás arra utalhat, hogy a fizikai rendszer leírásához új szabadsági fokokra van szükség. Valószínűsíthető, hogy az új módusok nem rendelkeznek Lorentz-szimmetriával. Az alacsony energiájú IR folyamatok nem-relativisztikus tartományba esnek, ezért a Lorentz-szimmetria elvesztése ott nem annyira meglepő.

Az a következtetés vonható le, más eredményekkel összhangban [29], hogy az RG blokkosítás dinamikailag megsérti a Lorentz-szimmetriát az UV határesetben. A szimmetriasértésnek az UV tartományban több oka is lehet, köztük az általam használt módszer is okozhatja. Ezen lehetőség kizárása érdekében ezt meg kell vizsgálni. Tudjuk, hogy a választott Litim-regulátor explicit módon sérti meg a Lorentz-szimmetriát, és csak a Callan-Symanzik-séma biztosítana számunkra Lorentz-invariáns regulátort. Azonban ez nem használható a kvantumgravitációban, mivel a 4-dimenziós integrálokat divergenssé teszi, és további regularizációkat igényel, amelyek

szintén sérthetik a Lorentz-szimmetriát. Az UV határesetben a Litim-regulátor Lorentz-szimmetria sértése egyre kevésbé jelentős, mivel a  $k$  skála a végtelenbe tart, és a szimmetria a  $k \rightarrow \infty$  határesetben áll helyre. Ez azt jelenti, hogy a Lorentz-szimmetria sérülése látszólag nem érzékeny a regulátor megválasztására. Emellett kiemelném, hogy IR irányban nincs probléma, ami arra utal, hogy a szimmetriasértés a Reuter-fixponthoz tartozik, és nem az RG technika hiányosságai miatt következik be.

## 5.5. Összefoglalás

A Lorentz-szimmetriát és annak lehetséges sérülését vizsgáltam ebben a fejezetben a konform redukált aszimptotikusan biztonságos gravitációban a funkcionális renormálási csoport módszerével. Számításaimat Lorentz-szignatúrájú téridő koordinátákkal végeztem. Ez lehetővé tette, hogy az idő és a tér irányaira különböző hullámfüggvény renormálásokat vezessek be, így az esetleges Lorentz-szimmetriasértés felderíthetővé vált. Továbbá, nyomom követtem az  $\hat{R}$ -ban lineárisan változó tag fejlődését is egy új  $c$  csatolással.

Megállapítottam, hogy ezen új csatolások beépítésével a modellben létezik a Reuter-fixpont. Megmutattam, hogy az idő szerinti deriváltat szorzó  $W$  csatolás releváns, csakúgy, mint a  $c$  csatolás. A Reuter-fixponthoz tartozó exponensek komplexek, negatív valós részekkel. Azt tapasztaltam, hogy a  $W$  csatolás az UV határesetben nullához tart, ezért a Lorentz-szimmetria a Reuter-fixpont körül sérül. Azt is megmutattam, hogy a magas UV esetben, ahol a Lorentz-szimmetria sérülése egyre erősebbé válik, a Reuter-fixpont a fázistér  $g \rightarrow 0$  tartományába vándorol. Az IR irányban a  $W$  csatolás evolúciója eltérően viselkedik a szimmetrikus és a szimmetriasértett fázisban. A szimmetrikus fázisban a  $W$  értéke nem változik az IR tartományban, tehát itt nem következik be a Lorentz-szimmetria sérülése.

A fizikailag érdekesebb, szimmetriasértett fázisban azonban létezik egy kritikus skála, ahol szingularitás lép fel. A  $W$  csatolás állandó átmeneti viselkedése a GFP közelében egy másik skálázási törvényre változik a kritikus skála környékén, ami szerint  $W$  nullához tart. Ez azt jelenti, hogy a szimmetriasértett fázisban a Lorentz-szimmetria sérülése még a mély IR tartományban is bekövetkezik. A  $c$  csatolás ugyan releváns, de az

evolúció során kis mértékben változik csak, és a többi csatolás evolúciójáról lecsatolódik, ezért hatása gyakorlatilag elhanyagolható.

Még nyitott kérdés, hogy mi okozza a Lorentz-szimmetria sérülését a Reuter-fixpont közelében. Visszaállíthatják-e a szimmetriát további, pl. a görbület magasabb rendű tagjai vagy magasabb rendű deriváltjai? A Lorentz-szimmetria sérülése a mély IR tartományban a relativisztikus-nemrelativisztikus átmenet jele lehet, azonban meg kell jegyezni, hogy a szingularitáshoz közeledve az RG módszer egyre kevésbé lesz megbízható.

## 6. fejezet

# Összefoglalás

A modern fizika két legfontosabb alappillére a kvantumelmélet és az általános relativitáselmélet. Ez a két elmélet a méretskála két végletében helyezkedik el. A kvantumelmélet kis méretű fizikai rendszerek, elemi részecskék leírására alkalmas, míg a relativitáselmélet a gravitációs kölcsönhatást tárgyalja, ami galaxis méretű objektumok esetén is alkalmazható. A két méretskála között mintegy 40 nagyságrendnyi a különbség. A fizikában általánosan elfogadott tény, hogy az összetett rendszerek tulajdonságát az elemi részeinek kölcsönhatásából származtathatjuk. Ezek szerint a galaxisok viselkedését elvileg megérthetjük az elemi részecskék közötti kölcsönhatás alapján.

A funkcionális renormálási csoport (RG) módszer azt a célt tűzi ki, hogy szisztematikusan, minden méretskála hatását figyelembe véve, a mikroszkopikus távolságoktól kiindulva megadja a makroszkopikus fizikai rendszerek tulajdonságait. A fizikai elméleteket általában meghatározott méret- vagy energiaskálán alkalmazzuk, ezzel szemben a renormálás arra vállalkozik, hogy az adott fizikai rendszert (lényegében) tetszőleges energiaskálán leírja. Az RG módszer akkor hatékony, ha a vizsgált modellben több olyan skála van, ami a rendszer viselkedésének megértéséhez fontos. Ilyenek a kritikus viselkedésű rendszerek, ahol minden méretskálát figyelembe kell venni. Emellett a részecskefizikában, kondenzált anyagok fizikájában, statisztikus fizikában, kozmológiában is széles körben alkalmazott módszer.

A (perturbatív) renormálást azért dolgozták ki, hogy az elméletekben megjelenő divergenciákat eltávolítsák. Ezek azért jelennek meg, mert nagy

energián, ultraibolya (UV) skálán a hurokintegrálok divergensnek. A kifejezések végessé tétele legegyszerűbben egy  $\Lambda$  levágással oldható meg. Az RG egyenletek lényegében a  $\Lambda$ -ra való érzékenységet fejezik ki. Kadanoff munkája vezetett el a nem-perturbatív renormáláshoz, ahol a statisztikus fizika partíciós függvényét használva fogalmazta meg a blokkosítás ötletét a kis méretskálák kiátlagolásával. Innen merítve ihletet, Wilson alkalmazta az eljárást a részecskefizikában a generáló funkcionálra úgy, hogy az UV skáláról indulva blokkosít a kis energiák (infravörös, IR) irányába. Az RG módszert eredetileg euklideszi téridőben fogalmazták meg. A szakirodalomban a Wegner-Houghton-egyenletet és a Wetterich-egyenletet alkalmazzák, előbbi a blokkosított, utóbbi az effektív átlagos hatás (EAA) evolúcióját írja le.

A renormálás egyik fontos következménye, hogy a fizikai állandók nem állandók többé, hanem az energiaskálától függenek. A kölcsönhatások erősségét jellemző csatolások és az elemi részecskék tömegei skálafüggő paraméterekké válnak. Mivel a csatolások nagysága nagymértékben változhat, bizonyos kölcsönhatások megjelenhetnek egy adott skálán, mások pedig eltűnhetnek.

A részecskefizikát azonban a kvantumtérelmélettel írjuk le, ami Minkowski-téridőben van megfogalmazva [2, 3]. A térelméletben használt generáló funkcionált Minkowski-téridőben adjuk meg, emiatt az RG módszert is Minkowski-téridőben kell megfogalmaznunk.

A renormálás során szétválasztjuk a fizikai rendszernek és annak környezetének szabadsági fokait. Úgy haladunk a skálán az UV irányból az IR irányba, hogy minden egyes blokkosítási lépésben a rendszerhez tartozó bizonyos szabadsági fokokat a környezetbe elimináljuk. Ennek következtében a renormálás nem zárt, hanem nyílt dinamikát ír le [43]. A nyílt rendszerek esetén valós idejű formalizmust kell alkalmaznunk, erre a zárt időtengelyes vagy Schwinger-Keldysh-formalizmus ad hatékony keretet. Ennek számos következménye van, megjelennek a komplex csatolások a leírásban vagy például szerephez jutnak a nem-lokális tagok a potenciálban. A dolgozatomban azt vizsgáltam, hogy ezek a következmények milyen módon befolyásolják a korábban széles körben vizsgált modellek viselkedését a renormálás során.

Vizsgáltam a  $d$ -dimenziós  $\phi^4$  elméletet úgy, hogy a Wetterich-egyenletet Minkowski-téridőben írtam fel [42]. A blokkosítást a térimpulzusok irá-

nyában végeztem el, a frekvencia irányt kiintegráltam. Ilyen módon nem gömb-, hanem hengerszimmetrikus fizikai rendszert vizsgáltam. A kapott evolúciós egyenlet nem lesz Lorentz-invariáns, de az nem is egyeztethető össze a renormálás alap gondolatával, hiszen a blokkosítás során nem-relativisztikus méretskálák szerint rendezzük a szabadsági fokokat. A Minkowski-formalizmusban kapott eredményeim azt mutatják, hogy komplex csatolási állandók jelennek meg. Ez összhangban van a perturbatív renormálásban kapottakkal. A tömeg imaginárius része a Feynman-féle  $\varepsilon$ , ami végtelen kicsiny kezdetben, azonban ez is skálafüggő paraméterré válik. Hasonlóan, az önkölcsönhatást leíró csatolás is komplex. A mérhető fizikai mennyiségekben a csatolások abszolút értékeinek négyzete jelenik meg, tehát nem zárható ki a komplex csatolások megjelenése.

Először  $4 - \varepsilon$  dimenzióban számoltam a Wilson-Fisher-fixpont (WFFP) helyét két csatolás esetén. Lokális potenciál közelítésben a fixpont helye analitikusan meghatározható a henger  $\Omega$  magasságának, mint UV levágásnak a függvényében. Megmutattam, hogy egy bizonyos  $\Omega$  tartományban megjelenik a WF-fixpont, amelynél a tömeg képzetes része a Feynman  $\varepsilon$  előírásnak megfelelően negatív. A fixpont értéke komplex. A számolást 3-dimenzióban folytattam, ahol a potenciál Taylor-sorfejtésében 4-6 csatolást vettem figyelembe, ami a csatolások komplex volta miatt 8-12 csatolásnak felel meg. A lokális potenciál közelítésen túl meghatároztam a hullámfüggvény renormálás tényleges részének az evolúcióját is. Kiszámoltam a WF-fixpont helyét és megállapítottam, hogy az komplex csatolásoknál található meg. A WFFP továbbra is nyeregpontra, egy taszító és egy vonzó iránnyal, azonban az imaginárius rész miatt fókuszáló jelleggel is mutat. Szintén meghatároztam a korrelációs hossz kritikus exponensét, ez is komplex szám lett. Az exponens valós része kicsit kisebb az irodalmi értéknél. Meghatároztam az anomális dimenziót is a henger magasságának függvényében, ez is komplexszé válik. Az anomális dimenzió előjele és nagyságrendje helyesen adódik, az imaginárius rész egy nagyságrenddel nagyobb negatív szám.

A 2-dimenziós sine-Gordon (SG) modellt is tanulmányoztam a Wetterich-egyenlet Minwoski-téridős alakjával, lokális potenciál közelítést használva [42]. Az alapmódust szorzó csatolás komplex. A modellt két regulátor esetén is megvizsgáltam, az egyik a Litim-regulátor, a másik pedig a Callan-Symanzik-regulátor (CS). Mindkét regulátor azt az eredményt

adja, hogy a  $\beta^2 = 8\pi$  egy kritikus hullámszám, amely felett a szimmetrikus, alatta pedig a szimmetriasértett fázist találjuk. A szimmetrikus fázisban a csatolás valós és képzetes része irreleváns módon skálázódik, nullához tart az IR-ben. A szimmetriasértett fázisban nem egységes a különböző regulátorokkal kapott eredmény. A Litim-regulátor esetén a szimmetriasértett fázisban a csatolás valós része konstanshoz tart, a képzetes irreleváns. A CS-regulátor esetén egy újabb kritikus hullámszám jelenik meg  $\beta^2 = 4\pi$ -nél, amely felett a csatolás valós része konstansba fut, azonban alatta a csatolás szingulárisává válik. A szimmetriasértett fázis tehát két további fázisra bomlik szét. A CS-regulátorral kapott eredményeket támasztják alá a szakirodalomban kapott eredmények.

A gravitációs kölcsönhatás összeegyeztetése a kvantumelmélettel a modern fizika egyik legnagyobb kihívása. Ennek egy lehetséges módja az RG módszer keretében valósult meg. Az Einstein-Hilbert hatásból kiindulva kvantáljuk az elméletet. A pályaintegrálos leíráshoz a térváltozó szerepét a metrika, a csatolásokét pedig a Newton-állandó és a kozmológiai állandó veszi fel. A modell aszimptotikusan biztonságos, mert van egy UV vonzó fixpontja, a Reuter-fixpont. A modellt AB gravitációnak nevezzük. Ennek egy egyszerűsített változata a konform redukált gravitáció (KRG), ahol a metrikát egy konform módussal paraméterezzük, így egy skaláris elméletet kapunk. Az AB gravitáció vizsgálata az RG módszer egyik legfontosabb és legaktívabb felhasználási területe. Főként azt vizsgálják, hogy a modell kiterjesztései szintén aszimptotikusan biztonságosak-e.

Korábban megmutatták, hogy az RG módszer a blokkosítási lépésben egy nyeregpontra tartalmaz, amely fa-szinten járul hozzá a potenciál bilokális tagjához. A nem-lokális tagok renormálható elméletek esetén összeegyeztethetők a hullámfüggvény renormálással. Bevezettem a hatásba egy bilokális potenciál tagot, amelyből kiszámoltam az anomális dimenziót [46]. Gömb- és hengersizmetrikus geometriát is vizsgáltam, utóbbit azért, mert a Minkowski-formalizmusban megfogalmazott modell tárgyalására is alkalmas lehet. A vizsgálathoz a WH-egyenletet használtam, mert éles levágás esetén a nyeregpontra analitikusan kiszámolható. Az ellenőrzés kedvéért a lokális potenciálból is származtattam az anomális dimenziót. Megmutattam, hogy a bilokális potenciál evolúcióját követve is létezik a Reuter-fixpont. A korrelációs hossz kritikus exponensének valós része negatívnak adódott.

A KRG keretében lehetőség van vizsgálni a Lorentz-szimmetria sérülését [47]. A Wetterich-egyenletet Minkowski-téridőben írtam fel úgy, hogy a kinetikus tag időderiváltját egy további csatolás szorozza, és a görbülethez is rendeltem egy új csatolást. Vizsgáltam, hogy a modell ezzel a kiterjesztéssel hogyan viselkedik. A görbülethez tartozó csatolás nem jelenik meg a többi csatolás béta függvényében, de releváns módon skálázódik. A modellnek két fázisa van attól függően, hogy a kozmológiai állandó negatív vagy pozitív az IR-ben. Az időderiváltat szorzó csatolás 1-től való eltérése azt méri, hogy mennyire térünk el a Lorentz-szimmetriától. Az UV felé haladva a csatolás sokáig 1 marad, azonban egy kritikus skála fölött csökkenni kezd. Ez a csatolás is releváns, ezért a KRG renormálható marad. Azonban a Newton-állandó nem marad konstans, hanem csökkenni kezd, nullába tart. A Reuter-fixpont eltűnik, helyette egy olyan aszimptotikusan szabad elméletet kapok, ahol a Newton-állandó nulla, a kozmológiai állandó pedig véges értékhez tart. Ez megfelel a Horava-féle gravitációs elmélet eredményének, ahol a leírás szintén anizotrop téridőt használ. Az IR tartományban szintén sérül a Lorentz-szimmetria, a szimmetriasértett fázisban a szingularitást megközelítve az időderiváltat szorzó csatolás nullához tart.

Az RG módszerben kapott eredményeim inkább elvi kérdésekre vonatkoznak. A Minkowski-formalizmus és a nem-lokalitás nem szokványos formái a renormálásnak. Azonban, ha komolyan vesszük azt, hogy az RG módszer egy nyílt rendszer dinamikáját írja le, az itt tanulmányozott elemek elkerülhetetlenek lesznek. A tradicionális renormálást leginkább (funkcionálisan) renormálható elméletekre használják, mert ezek egyeztethetőek össze könnyen a Wetterich-egyenlet filozófiájával. Ha szeretnénk ezen tovább lépni, akkor az általam vizsgált kérdések fontossá válnak.



## 7. fejezet

# Summary

The two most important pillars of modern physics are quantum theory and general relativity. These two theories are located at the two extremes of the scale. Quantum theory describes small physical systems, elementary particles, while relativity deals with gravitational interactions, which can be applied to galaxy-sized objects. The difference between the two scales is about 40 orders of magnitude. It is generally accepted in physics that the properties of complex systems can be derived from the interaction of their elementary parts. This means that, in principle, we can understand the behaviour of galaxies from the interaction between elementary particles.

The Functional Renormalization Group (RG) method aims to systematically determine the properties of macroscopic physical systems starting from microscopic distances, taking into account the effects of all scales. Physical theories are usually applied on a fixed scale of size or energy, while renormalisation attempts to describe a given physical system on (essentially) arbitrary energy scales. The RG method is effective when the model under consideration has several scales that are important for understanding the behaviour of the system. Such systems are those with critical behaviour, where all scales must be considered. The method is also widely used in particle physics, condensed matter physics, statistical physics and cosmology.

The (perturbative) renormalisation was developed to remove divergences in theories. These appear because loop integrals are divergent at high energies on the ultraviolet (UV) scale. The easiest way to make the

terms finite is to use a  $\Lambda$  cut-off. The RG equations essentially express the sensitivity to this  $\Lambda$ . Kadanoff's work led to the non-perturbative renormalization, where he formulated the idea of blocking by averaging out small size scales using the partition function of statistical physics. Inspired by this, Wilson applied the method to the generating functional in particle physics by starting from the UV scale and blocking in the direction of low energies (infrared, IR). The RG method was originally formulated in Euclidean space-time. In the literature, the Wegner-Houghton equation and the Wetterich equation are used, the former describing the evolution of the blocked action and the latter the evolution of the effective average action (EAA).

An important consequence of renormalization is that physical constants are no longer constant, instead they depend on the energy scale. The couplings characterising the strength of interactions and the masses of elementary particles become scale-dependent parameters. Since the magnitude of the couplings can vary greatly, some interactions may appear on a given scale and others may disappear.

However, particle physics is described by quantum field theory, which is formulated in Minkowski space-time [2, 3]. The generating functional used in field theory is given in Minkowski spacetime, hence the RG method must also be formulated in Minkowski spacetime.

Renormalisation involves separating the degrees of freedom of the physical system and its environment. We move the scale from the UV direction to the IR direction by eliminating the system's certain degrees of freedom into the environment at each blocking step. As a consequence, renormalization describes open dynamics rather than closed ones [43]. In the case of open systems we need to use real-time formalism, for which the closed time path or Schwinger-Keldysh formalism provides an efficient framework. This has several implications, complex couplings appear in the description or, for example, non-local terms become involved in the potential. In my thesis, I investigated how these consequences affect the behaviour of previously widely studied models during renormalization.

I investigated the  $d$ -dimensional  $\phi^4$  theory by expressing the Wetterich equation in Minkowski space-time [42]. I performed the blocking in the direction of the field momentum, with the frequency direction integrated out. In this way, I considered not a spherically but a cylindrically

symmetric physical system. The resulting evolution equation will not be Lorentz invariant, but it would also be inconsistent with the basic idea of renormalization, since the degrees of freedom are ordered according to non-relativistic size scales during blocking. My results in the Minkowski formalism show that complex coupling constants appear. This is in agreement with the results obtained in the perturbative renormalization. The imaginary part of the mass is Feynman's  $\varepsilon$ , which is infinitesimally small initially, but this also becomes a scale-dependent parameter. Similarly, the coupling describing the self-interaction is complex. In measurable physical quantities, the squares of the absolute values of the couplings appear, so the appearance of complex couplings cannot be excluded.

First, I calculated the location of the Wilson-Fisher fixed point (WFFP) in  $4 - \varepsilon$  dimensions for two couplings. In the local potential approximation, the location of the fixed point can be determined analytically as a function of the height of the cylinder  $\Omega$  as a UV cutoff. I show that a WFFP appears in a certain  $\Omega$  range, for which the imaginary part of the mass is negative according to the Feynman  $\varepsilon$  requirement. The value of the fixed point is complex. The calculation was continued in 3-dimensions, where I considered 4-6 couplings in the Taylor expansion of the potential, which corresponds to 8-12 couplings due to the complex nature of the couplings. In addition to the local potential approximation, I also determined the evolution of the space-independent part of the renormalization of the wave function. I calculated the location of the WF fixed point and found that it is located at complex couplings. The WFFP is still a saddle point, with a repelling and an attracting direction, but it also shows a focusing property due to the imaginary part. Also, I determined the critical exponent of the correlation length, it also became a complex number. The real part of the exponent is slightly smaller than the literary value. I also determined the anomalous dimension as a function of the height of the cylinder, this also becomes a complex number. The sign and magnitude of the anomalous dimension is given correctly, the imaginary part is a negative number one order of magnitude larger.

I have also studied the 2-dimensional sine-Gordon (SG) model with the Minkowski space-time form of the Wetterich equation, using the local potential approximation [42]. The coupling multiplying the basis mode is complex. I have examined the model for two regulators, one is the

Litim regulator and the other is the Callan-Symanzik regulator (CS). Both regulators give the result that  $\beta^2 = 8\pi$  is a critical wave number above which the symmetric phase is found and below which the symmetry broken phase is found. In the symmetric phase, the real and imaginary parts of the coupling scale irrelevantly, tending to zero in the IR. In the symmetry broken phase, the result obtained with different regulators is not uniform. In the case of the Litim regulator, in the symmetry broken phase, the real part of the coupling is constant, the imaginary part is irrelevant. For the CS-regulator, a new critical wave number appears at  $\beta^2 = 4\pi$ , above which the real part of the coupling becomes constant, but below which the coupling becomes singular. The symmetric phase splits into two further phases. The results obtained with the CS-regulator are supported by results obtained in the literature.

One of the greatest challenges in modern physics is to reconcile the interaction of gravity with quantum theory. One of the possible ways to do this is through the RG method. We quantize the theory starting from the Einstein-Hilbert action. For the path integral description, the role of the field variable is taken by the metric and the couplings by Newton's constant and the cosmological constant. The model is asymptotically safe because it has a UV attractive fixed point, the Reuter fixed point. The model is called AS gravity. A simplified version of this is conformally reduced gravity (CRG), where the metric is parameterized by a conformal mode, yielding a scalar theory. The investigation of AS gravity is one of the most important and active applications of the RG method. In particular, it is mainly studied whether extensions of the model are also asymptotically safe.

It has been shown previously that the RG method contains a saddle point in the blocking step, which contributes at tree-level to the bilocal part of the potential. Non-local terms are compatible with the wave function renormalization in renormalizable theories. I introduced a bilocal potential term into the action, from which I calculated the anomalous dimension [46]. I have also considered spherically and cylindrically symmetric geometries, the latter because it can be used to discuss the model formulated in the Minkowski formalism. I used the WH equation for the analysis because the saddle point can be calculated analytically in the case of a sharp cut-off. For the sake of verification, I also derived the anomalous dimension from

the local potential. I have shown that the Reuter fixed point also exists following the evolution of the bilocal potential. The real part of the critical exponent of the correlation length was found to be negative.

In the CRG framework, it is possible to explore the violation of Lorentz symmetry [47]. I have written the Wetterich equation in Minkowski space-time such that the time derivative of the kinetic term is multiplied by an additional coupling, and I have also assigned a new coupling to the curvature. I have investigated how the model behaves with this extension. The coupling associated with the curvature does not appear in the beta function of the other couplings, but it scales in a relevant way. The model has two phases depending on whether the cosmological constant is negative or positive in the IR. The deviation of the coupling multiplying the time derivative from 1 measures how far we diverge from Lorentz symmetry. As we move towards the UV, the coupling remains 1 for a long time, but above a critical scale it starts to decrease, and also this coupling is relevant, so the CRG remains renormalizable. However, the Newton constant does not remain constant, but starts to decrease and tends to zero. The Reuter fixed point vanishes, and instead I get an asymptotically free theory where the Newton constant is zero and the cosmological constant is approaching a finite value. This corresponds to the result of Horava's theory of gravity, where the description also uses anisotropic space-time. In the IR domain, Lorentz symmetry is also violated, the coupling multiplying the time derivative in the symmetry broken phase tends to zero as the singularity is approached.

My results in the RG method are more on questions of principle. Minkowski formalism, non-locality are not conventional forms of renormalization. However, if we are serious about using the RG method to describe the dynamics of an open system, the elements I have investigated will be unavoidable. Traditional renormalization is most often used for (functionally) renormalizable theories, because they are easily compatible with the philosophy of the Wetterich equation. If we wish to move beyond this, the issues I have examined become important.



# Irodalomjegyzék

- [1] K. G. Wilson. The renormalization group and critical phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 55:583–600, 1983.
- [2] N.N. Bogolyubov and D.V. Shirkov. *INTRODUCTION TO THE THEORY OF QUANTIZED FIELDS*, volume 3. 1959.
- [3] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. 1995.
- [4] Franz J. Wegner and Anthony Houghton. Renormalization group equation for critical phenomena. *Phys.Rev.*, A8:401–412, 1973.
- [5] Christof Wetterich. Exact evolution equation for the effective potential. *Phys.Lett.*, B301:90–94, 1993.
- [6] Tim R. Morris. On truncations of the exact renormalization group. *Phys.Lett.*, B334:355–362, 1994.
- [7] Janos Polonyi. Lectures on the functional renormalization group method. *Central Eur.J.Phys.*, 1:1–71, 2003.
- [8] Sandor Nagy. Lectures on renormalization and asymptotic safety. *Annals Phys.*, 350:310–346, 2014.
- [9] N. Dupuis, L. Canet, A. Eichhorn, W. Metzner, J.M. Pawłowski, M. Tissier, and N. Wschebor. The nonperturbative functional renormalization group and its applications. 6 2020.
- [10] S. Nagy, K. Sailer, and I. Steib. Renormalization of Lorentzian conformally reduced gravity. *Class. Quant. Grav.*, 36(15):155004, 2019.

- [11] Sven Huelsmann, Soeren Schlichting, and Philipp Scior. Spectral functions from the real-time functional renormalization group. *Phys. Rev. D*, 102(9):096004, 2020.
- [12] Yang-yang Tan, Yong-rui Chen, and Wei-jie Fu. Real-time dynamics of the  $O(4)$  scalar theory within the fRG approach. 7 2021.
- [13] Christopher Jung, Jan-Hendrik Otto, Ralf-Arno Tripolt, and Lorenz von Smekal. Self-consistent  $O(4)$  model spectral functions from analytically continued functional renormalization group flows. *Phys. Rev. D*, 104(9):094011, 2021.
- [14] Stefan Floerchinger. Analytic Continuation of Functional Renormalization Group Equations. *JHEP*, 05:021, 2012.
- [15] Ralf-Arno Tripolt, Nils Strodthoff, Lorenz von Smekal, and Jochen Wambach. Spectral functions from the functional renormalization group. *Nucl. Phys. A*, 931:790–795, 2014.
- [16] Jan M. Pawłowski and Nils Strodthoff. Real time correlation functions and the functional renormalization group. *Phys. Rev. D*, 92(9):094009, 2015.
- [17] Jan Horak, Jan M. Pawłowski, and Nicolas Wink. Spectral functions in the  $\phi^4$ -theory from the spectral DSE. 6 2020.
- [18] Astrid Eichhorn. Towards coarse graining of discrete Lorentzian quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 35(4):044001, 2018.
- [19] Astrid Eichhorn. Steps towards Lorentzian quantum gravity with causal sets. In *9th International Conference: Spacetime - Matter - Quantum Mechanics: From discrete structures and dynamics to top-down causation (DICE2018) Castiglioncello, Tuscany, Italy, September 17-21, 2018*, 2019.
- [20] William J. Cunningham and Sumati Surya. Dimensionally Restricted Causal Set Quantum Gravity: Examples in Two and Three Dimensions. *Class. Quant. Grav.*, 37(5):054002, 2020.
- [21] Sumati Surya. The causal set approach to quantum gravity. *Living Rev. Rel.*, 22(1):5, 2019.

- [22] Elisa Manrique, Stefan Rechenberger, and Frank Saueressig. Asymptotically Safe Lorentzian Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 106:251302, 2011.
- [23] Stefan Rechenberger and Frank Saueressig. A functional renormalization group equation for foliated spacetimes. *JHEP*, 03:010, 2013.
- [24] Jorn Biemans, Alessia Platania, and Frank Saueressig. Quantum gravity on foliated spacetimes: Asymptotically safe and sound. *Phys. Rev.*, D95(8):086013, 2017.
- [25] Jorn Biemans, Alessia Platania, and Frank Saueressig. Renormalization group fixed points of foliated gravity-matter systems. *JHEP*, 05:093, 2017.
- [26] W. B. Houthoff, A. Kurov, and F. Saueressig. Impact of topology in foliated Quantum Einstein Gravity. *Eur. Phys. J.*, C77:491, 2017.
- [27] Alessia Platania and Frank Saueressig. Functional Renormalization Group Flows on Friedman–Lemaître–Robertson–Walker backgrounds. *Found. Phys.*, 48(10):1291–1304, 2018.
- [28] Benjamin Knorr. Lorentz symmetry is relevant. *Phys. Lett. B*, 792:142–148, 2019.
- [29] Astrid Eichhorn, Alessia Platania, and Marc Schiffer. Lorentz invariance violations in the interplay of quantum gravity with matter. *Phys. Rev. D*, 102(2):026007, 2020.
- [30] Benjamin Knorr. Lessons from conformally reduced quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 38(6):065003, 2021.
- [31] Alessio Baldazzi, Roberto Percacci, and Vedran Skrinjar. Quantum fields without Wick rotation. *Symmetry*, 11(3):373, 2019.
- [32] Julian S. Schwinger. Brownian motion of a quantum oscillator. *J. Math. Phys.*, 2:407–432, 1961.
- [33] L. V. Keldysh. Diagram technique for nonequilibrium processes. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 47:1515–1527, 1964. [Sov. Phys. JETP20,1018(1965)].

- [34] Bastian Bergerhoff and Jurgen Reingruber. Thermal renormalization group equations and the phase transition of scalar  $O(N)$  theories. *Phys. Rev. D*, 60:105036, 1999.
- [35] Juergen Berges and Thomas Gasenzer. Quantum versus classical statistical dynamics of an ultracold Bose gas. *Phys. Rev. A*, 76:033604, 2007.
- [36] Thomas Gasenzer, Juergen Berges, Michael G. Schmidt, and Marcos Seco. Non-perturbative dynamical many-body theory of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 72:063604, 2005.
- [37] L. M. Sieberer, S. D. Huber, E. Altman, and S. Diehl. Nonequilibrium functional renormalization for driven-dissipative Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. B*, 89(13):134310, 2014.
- [38] Valentin Kasper, Florian Hebenstreit, and Jürgen Berges. Fermion production from real-time lattice gauge theory in the classical-statistical regime. *Phys. Rev. D*, 90(2):025016, 2014.
- [39] David Mesterházy, Jan H. Stockemer, and Yuya Tanizaki. From quantum to classical dynamics: The relativistic  $O(N)$  model in the framework of the real-time functional renormalization group. *Phys. Rev. D*, 92(7):076001, 2015.
- [40] Ralf-Arno Tripolt, Johannes Weyrich, Lorenz von Smekal, and Jochen Wambach. Fermionic spectral functions with the Functional Renormalization Group. *Phys. Rev. D*, 98(9):094002, 2018.
- [41] I. Steib, S. Nagy, and J. Polonyi. Renormalization in Minkowski space-time. *Int. J. Mod. Phys. A*, 36(05):2150031, 2021.
- [42] F. Gégény and S. Nagy. Complex couplings in renormalization. *Int. J. Mod. Phys. A*, 37(11n12):2250061, 2022.
- [43] S. Nagy and J. Polonyi. Renormalizing open quantum field theories. 12 2020.
- [44] S. Nagy, J. Polonyi, and I. Steib. Euclidean scalar field theory in the bilocal approximation. *Phys. Rev.*, D97(8):085002, 2018.

- [45] I. Steib and S. Nagy. Renormalization of the bilocal sine-Gordon model. *Int. J. Mod. Phys. A*, 34(21):1950117, 2019.
- [46] Flóra Gégény and Sándor Nagy. Renormalization of the conformally reduced gravity with bilocal potential. *Int. J. Mod. Phys. A*, 35(22):2050123, 2020.
- [47] F. Gégény, S. Nagy, and K. Sailer. On the Lorentz symmetry in conformally reduced quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 40(4):045004, 2023.
- [48] Tim R. Morris. The Exact renormalization group and approximate solutions. *Int. J. Mod. Phys.*, A9:2411–2450, 1994.
- [49] Juergen Berges, Nikolaos Tetradis, and Christof Wetterich. Nonperturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Phys.Rept.*, 363:223–386, 2002.
- [50] Elisa Manrique and Martin Reuter. Bare Action and Regularized Functional Integral of Asymptotically Safe Quantum Gravity. *Phys. Rev. D*, 79:025008, 2009.
- [51] Janos Polonyi. Boost invariant regulator for field theories. *Int. J. Mod. Phys.*, A34(03n04):1950017, 2019.
- [52] Jean Alexandre, Vincenzo Branchina, and Janos Polonyi. Instability induced renormalization. *Phys.Lett.*, B445:351–356, 1999.
- [53] V. Pangon, S. Nagy, J. Polonyi, and K. Sailer. Onset of symmetry breaking by the functional RG method. *Int.J.Mod.Phys.*, A26:1327–1345, 2011.
- [54] Sidney R. Coleman. The Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model. *Phys.Rev.*, D11:2088, 1975.
- [55] Daniel J. Amit, Yadin Y. Goldschmidt, and G. Grinstein. Renormalization Group Analysis of the Phase Transition in the 2D Coulomb Gas, Sine-Gordon Theory and xy Model. *J.Phys.*, A13:585, 1980.

- [56] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer. Renormalizable parameters of the sine-Gordon model. *Phys.Lett.*, B647:152–158, 2007.
- [57] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer. Functional renormalization group approach to the sine-Gordon model. *Phys.Rev.Lett.*, 102:241603, 2009.
- [58] V. Pangon, S. Nagy, J. Polonyi, and K. Sailer. Quantum censorship in two dimensions. *Phys.Lett.*, B694:89–93, 2010.
- [59] V. L. Berezinskii. Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems with a continuous symmetry group. II. Quantum systems. *Sov. Phys.-JETP*, 34:610–616, 1972.
- [60] J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *J.Phys.*, C6:1181–1203, 1973.
- [61] I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer. On the renormalization of periodic potentials. *Phys.Rev.*, D63:045022, 2001.
- [62] S. Nagy and K. Sailer. Functional renormalization group for quantized anharmonic oscillator. *Annals Phys.*, 326:1839–1876, 2011.
- [63] N. Tetradis and C. Wetterich. Critical exponents from effective average action. *Nucl.Phys.*, B422:541–592, 1994.
- [64] Leonie Canet, Bertrand Delamotte, Dominique Mouhanna, and Julien Vidal. Optimization of the derivative expansion in the nonperturbative renormalization group. *Phys.Rev.*, D67:065004, 2003.
- [65] Bertrand Delamotte. An Introduction to the nonperturbative renormalization group. *Lect. Notes Phys.*, 852:49–132, 2012.
- [66] N. Defenu and A. Codello. Scaling solutions in the derivative expansion. *Phys. Rev. D*, 98(1):016013, 2018.
- [67] Ivan Balog, Hugues Chaté, Bertrand Delamotte, Maroje Marohnic, and Nicolás Wschebor. Convergence of Nonperturbative Approximations to the Renormalization Group. *Phys. Rev. Lett.*, 123(24):240604, 2019.

- [68] J. Kovacs, S. Nagy, and K. Sailer. Asymptotic safety in the sine-Gordon model. *Phys. Rev.*, D91(4):045029, 2015.
- [69] Stefan Kehrein. Flow equation approach to the sine-Gordon model. *Nucl.Phys.*, B592:512–562, 2001.
- [70] V. Pangon. Structure of the broken phase of the sine-Gordon model using functional renormalization. *Int. J. Mod. Phys. A*, 227:1250014, 2012.
- [71] Steven Weinberg. *Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation. In General Relativity: An Einstein centenary survey*, ed. S. W. Hawking and W. Israel. Cambridge University Press, 1979.
- [72] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. *Phys.Rev.*, D57:971–985, 1998.
- [73] M. Reuter and Frank Saueressig. Renormalization group flow of quantum gravity in the Einstein-Hilbert truncation. *Phys.Rev.*, D65:065016, 2002.
- [74] Alessandro Codello, Roberto Percacci, and Christoph Rahmede. Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation. *Annals Phys.*, 324:414–469, 2009.
- [75] Martin Reuter and Frank Saueressig. Quantum Einstein Gravity. *New J.Phys.*, 14:055022, 2012.
- [76] Herbert W. Hamber. Phases of 4-d simplicial quantum gravity. *Phys.Rev.*, D45:507–512, 1992.
- [77] Herbert W. Hamber. On the gravitational scaling dimensions. *Phys.Rev.*, D61:124008, 2000.
- [78] Herbert W. Hamber. Scaling Exponents for Lattice Quantum Gravity in Four Dimensions. *Phys. Rev. D*, 92(6):064017, 2015.
- [79] Astrid Eichhorn and Holger Gies. Ghost anomalous dimension in asymptotically safe quantum gravity. *Phys.Rev.*, D81:104010, 2010.

- [80] Astrid Eichhorn. Quantum-gravity-induced matter self-interactions in the asymptotic-safety scenario. *Phys.Rev.*, D86:105021, 2012.
- [81] Pietro Donà, Astrid Eichhorn, and Roberto Percacci. Matter matters in asymptotically safe quantum gravity. *Phys. Rev.*, D89(8):084035, 2014.
- [82] Nicolai Christiansen, Daniel F. Litim, Jan M. Pawłowski, and Manuel Reichert. Asymptotic safety of gravity with matter. *Phys. Rev.*, D97(10):106012, 2018.
- [83] Natália Alkofer and Frank Saueressig. Asymptotically safe  $f(R)$ -gravity coupled to matter I: the polynomial case. *Annals Phys.*, 396:173–201, 2018.
- [84] Astrid Eichhorn. An asymptotically safe guide to quantum gravity and matter. 2018.
- [85] Martin Reuter and Holger Weyer. Background Independence and Asymptotic Safety in Conformally Reduced Gravity. *Phys. Rev.*, D79:105005, 2009.
- [86] Martin Reuter and Holger Weyer. The Role of Background Independence for Asymptotic Safety in Quantum Einstein Gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 41:983–1011, 2009.
- [87] Jan-Eric Daum and Martin Reuter. The Effective Potential of the Conformal Factor in Quantum Einstein Gravity. *PoS, CLAQG08:013*, 2011.
- [88] Pedro F. Machado and R. Percacci. Conformally reduced quantum gravity revisited. *Phys. Rev.*, D80:024020, 2009.
- [89] Alfio Bonanno and Filippo Guarnieri. Universality and Symmetry Breaking in Conformally Reduced Quantum Gravity. *Phys.Rev.*, D86:105027, 2012.
- [90] Juergen A. Dietz and Tim R. Morris. Background independent exact renormalization group for conformally reduced gravity. *JHEP*, 04:118, 2015.

- [91] S. Nagy, J. Polonyi, and I. Steib. Quantum renormalization group. *Phys. Rev.*, D93(2):025008, 2016.
- [92] Janos Polonyi. Stability and causality of multi-local theories. *EPL*, 120(4):40005, 2017.
- [93] Lando Bosma, Benjamin Knorr, and Frank Saueressig. Resolving Spacetime Singularities within Asymptotic Safety. *Phys. Rev. Lett.*, 123(10):101301, 2019.
- [94] Benjamin Knorr, Chris Ripken, and Frank Saueressig. Form Factors in Asymptotic Safety: conceptual ideas and computational toolbox. *Class. Quant. Grav.*, 36(23):234001, 2019.
- [95] Alfio Bonanno and Giuseppe Lacagnina. Spontaneous symmetry breaking and proper time flow equations. *Nucl. Phys. B*, 693:36–50, 2004.
- [96] A. Bonanno and M. Reuter. Proper time flow equation for gravity. *JHEP*, 02:035, 2005.
- [97] Alfio Bonanno, Vincenzo Branchina, Herve Mohrbach, and Dario Zappala. Wegner-Houghton equation and derivative expansion. *Phys. Rev. D*, 60:065009, 1999.
- [98] Hikaru Kawai and Masao Ninomiya. Renormalization Group and Quantum Gravity. *Nucl. Phys. B*, 336:115–145, 1990.
- [99] Astrid Eichhorn, Peter Labus, Jan M. Pawłowski, and Manuel Reichert. Effective universality in quantum gravity. *SciPost Phys.*, 5(4):031, 2018.
- [100] Wei-jie Fu, Jan M. Pawłowski, and Fabian Rennecke. QCD phase structure at finite temperature and density. *Phys. Rev. D*, 101(5):054032, 2020.
- [101] Oliver J. Rosten. Fundamentals of the Exact Renormalization Group. *Phys.Rept.*, 511:177–272, 2012.
- [102] Ted Jacobson and David Mattingly. Gravity with a dynamical preferred frame. *Phys. Rev. D*, 64:024028, 2001.

- [103] Sean M. Carroll, Jeffrey A. Harvey, V. Alan Kostelecky, Charles D. Lane, and Takemi Okamoto. Noncommutative field theory and Lorentz violation. *Phys. Rev. Lett.*, 87:141601, 2001.
- [104] Petr Horava. Quantum Gravity at a Lifshitz Point. *Phys. Rev. D*, 79:084008, 2009.
- [105] Stefano Liberati. Tests of Lorentz invariance: a 2013 update. *Class. Quant. Grav.*, 30:133001, 2013.
- [106] Jannik Fehre, Daniel F. Litim, Jan M. Pawłowski, and Manuel Reichert. Lorentzian quantum gravity and the graviton spectral function. 11 2021.
- [107] Alfio Bonanno, Tobias Denz, Jan M. Pawłowski, and Manuel Reichert. Reconstructing the graviton. 2 2021.
- [108] Benjamin Knorr and Marc Schiffer. Non-Perturbative Propagators in Quantum Gravity. *Universe*, 7(7):216, 2021.
- [109] W. Houthoff, A. Kurov, and F. Saueressig. On the scaling of composite operators in asymptotic safety. *JHEP*, 04:099, 2020.
- [110] Martin Reuter and Holger Weyer. Conformal sector of Quantum Einstein Gravity in the local potential approximation: Non-Gaussian fixed point and a phase of unbroken diffeomorphism invariance. *Phys. Rev. D*, 80:025001, 2009.
- [111] Max Niedermaier and Martin Reuter. The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity. *Living Rev.Rel.*, 9:5, 2006.
- [112] Daniel F. Litim. Optimized renormalization group flows. *Phys.Rev.*, D64:105007, 2001.
- [113] Petr Horava. Membranes at Quantum Criticality. *JHEP*, 03:020, 2009.
- [114] Petr Horava. Spectral Dimension of the Universe in Quantum Gravity at a Lifshitz Point. *Phys. Rev. Lett.*, 102:161301, 2009.

- [115] Adriano Contillo, Stefan Rechenberger, and Frank Saueressig. Renormalization group flow of Horava-Lifshitz gravity at low energies. *JHEP*, 12:017, 2013.
- [116] Giulio D’Odorico, Frank Saueressig, and Marrit Schutten. Asymptotic Freedom in Horava-Lifshitz Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 113(17):171101, 2014.
- [117] Andrei O. Barvinsky, Diego Blas, Mario Herrero-Valea, Sergey M. Sibiryakov, and Christian F. Steinwachs. Renormalization of Horava gravity. *Phys. Rev. D*, 93(6):064022, 2016.
- [118] Giulio D’Odorico, Jan-Willem Goossens, and Frank Saueressig. Covariant computation of effective actions in Horava-Lifshitz gravity. *JHEP*, 10:126, 2015.
- [119] Andrei O. Barvinsky, Mario Herrero-Valea, and Sergey M. Sibiryakov. Towards the renormalization group flow of Horava gravity in  $(3 + 1)$  dimensions. *Phys. Rev. D*, 100(2):026012, 2019.
- [120] Jens Braun, Holger Gies, and Daniel D. Scherer. Asymptotic safety: a simple example. *Phys.Rev.*, D83:085012, 2011.
- [121] S. Nagy, J. Krizsan, and K. Sailer. Infrared fixed point in quantum Einstein gravity. *JHEP*, 1207:102, 2012.