Út a középiskolába…

A matematikai tudásszint diagnosztikus vizsgálata Magyarországon az alapfokú és a középfokú oktatás határán

Az alapfokú és a középfokú oktatás határán mérföldkövet jelent a felvételi eljárás. Tanulmányunkban statisztikai adatok másodelemzésével megvizsgáltuk, hogy a nyolcadik osztályosok milyen eredményeket értek el 2014-ben a központi írásbeli matematika felvételi vizsgán a 9. évfolyamra történő beiskolázáskor. A feladatonkénti elemzés szempontja a matematikai kompetenciaterülethez tartozás volt. 2014-ben 1065 középiskola 6512 tanulmányi területet hirdetett meg, a tanulók 59 százaléka írt központi írásbeli feladatsort magyar nyelvből és matematikából. A korábbi évek tapasztalatai alapján a matematika felvételi vizsga erősen differenciálja a tanulókat, az elért pontszámok átlaga alacsonyabb a magyarénál, ezért jobban befolyásolja azt, hogy a felvételi eljárás során hányadik megjelölt helyre nyer felvételt a tanuló. A statisztikai adatok segítséget nyújthatnak a diákoknak és az általános iskolákban tanító matematika tanároknak a felvételire való felkészülés során, továbbá képet adhatnak a középiskoláknak a hozzájuk jelentkező tanulók tudásszintjéről matematikából. Adataink azt mutatják, hogy az összetettebb, több matematikai kompetenciaterületet is igénylő feladatoknál a tanulók sokkal gyengébb eredményeket értek el, mint a begyakorolható „rutinfeladatok" során. Eredményeink szerint a matematika oktatása során nagy hangsúlyt kell fektetni egyes matematikai kompetenciaterületek további fejlesztésére és a komplex ismereteket igénylő szöveges matematikai feladatok megoldására.

Matematika tantárgyi mérések

A tudásszint mérése a pedagógiai vizsgálatok egyik gyakorta alkalmazott formája. A matematika tantárgy kitüntetett szereplője az iskolai méréseknek.

Több nagymintás hazai és nemzetközi mérés vizsgálja a 13–15 éves korosztály matematikai kompetenciáját, köztük vannak, amelyek tantervi és vannak, amelyek kulturális eszköztudás szerinti megközelítésben.

A nemzetközi összehasonlító vizsgálatok terén 1958-ban az UNESCO pedagógiai intézetében szervezett hamburgi konferencián a kutatók arra az álláspontra jutottak, hogy valódi mért adatokra van szükség a tanulók teljesítményéről. Magyarország 1968-ban csatlakozott az IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) nemzetközi szervezethez. Ez nagymértékben elősegítette a mérőeszközök alapos fejlesztését (*Freudenthal*, 1975). A második IEA mérésben, amely 1979 és 1983 között zajlott, országunk is részt vett. A SIMS (Second International Mathematics Study) mérésben a 13 éves tanulók az 5. helyen végeztek a 14 fejlett ország között (*Báthory*, 1992, 27–28. o.; *Vidákovich* és *Csíkos*, 2012). Húsz ország részvételével 1990–91-ben zajlott az IAEP (International Assessment of Educational Progress) mérés, amelyen a magyarok kiváló eredményeket értek el. A 13 évesek az ötödik, a 9 évesek a 2. helyen végeztek.

A matematikai kompetencia területén végzett hazai mérések a nemzetközi rendszerszintű felmérésekhez köthetők. A TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) vizsgálat (1995) 45 ország közel félmillió tanulója részvételével zajlott. Ebben már megjelentek azok a nyílt végű kérdések, amelyeknek a konkrét tantárgyon túlmutató jelentőségük van. A tantárgyi tudásmérés helyett a matematika mint kulturális eszköztudás került a figyelem középpontjába. Magyarország 41 ország közül a 14. legjobb eredményt érte el. Ennek a mérésnek a megismétlésére 1999-ben került sor („re-TIMSS"). Az 1995-ös kedvezőtlen kép után 1999-ben ismét az élmezőnyben találhatjuk Magyarországot. A TIMSS 2003-ban és 2007-ben is átlag feletti eredményeket hozott. Ezekben a felmérésekben főszerepet kap a tantervi szempontú megközelítés.

Az IEA mérésekben kapott kedvező adatok után óriási meglepetést okozott az OECD által szervezett PISA (Programme for International Student Assessment) felmérésekben nyújtott teljesítményünk. 2000-ben az OECD-országok átlaga alatt volt 15 éves tanulóink teljesítménye. Ezeket az eredményeket részletesen bemutatják a Vári és munkatársai (2001, 2002) által szerkesztett elemzések. A PISA felmérések a matematikát már a mindennapi életben történő boldogulás és a döntéshozatal eszközének tekintik (*Csíkos*, 2005). A 2003-as mérésben már négy tartalmi területet definiáltak: tér és forma, változások és relációk, mennyiség, bizonytalanság. Meghatározták a matematikai megismerés három szintjét: reprodukciós, összekapcsoló és reflektív készségek. Az OECD honlapján az eredeti dokumentumokon kívül már vezetői összefoglalók és országprofilok is megtalálhatók. A matematikai átlagpontszám mutatta ezekben a legnagyobb stabilitást, ami nem adhat okot nagy optimizmusra. A tapasztalatokról több cikk és elemzés is napvilágot látott (*Kántor*, 2008; *Vári*, 2003).

A nemzetközi mérésekkel gyakran párhuzamosan futó hazai nagymintás mérések kezdetének az 1980-as TOF-80 felmérés tekinthető. A lakóhely szerint (nagyváros, község) igen jelentős eltérések mutatkoztak a matematika területén. Az eredményekből levont következtetések taneszköz- és tantervértékelést is lehetővé tettek (*Szendrei*, 1983). Az 1978-as tanterv bevezetését követően több vizsgálatra is sor került: Iszáj, Kiss és Molnárné (1981), Monitor-felmérés (1986). A matematika osztályzatok és a külső szakértők által összeállított matematika teszteken nyújtott teljesítmények összefüggéseire Hajdu (1989) hívja fel a figyelmet.

A PISA vizsgálatok nyomán kezdődtek el Magyarországon is a kompetenciamérések, amelyek azok feladattípusait, módszereit követték. 2001-ben szervezték az első Országos kompetenciamérést (5. és 9. évfolyam). 2003-ban a 6. és a 10. évfolyamon, 2004-ben pedig már a 8. évfolyamon is történtek mérések. A 2006. évtől már a 4. évfolyamosok is bekapcsolódtak. Ezek a mérések már lehetővé tették, hogy az iskolák és a pedagógusok megismerjék a nemzetközi vizsgálatokban alkalmazott mérési és értékelési módszereket. Az iskolafenntartók így képet kaphattak az iskolák teljesítményéről. Az elért eredmények alapján képességszinteket különböztetnek meg. Ezek elemzéséről több tanulmány is megjelent (*Balázsi* és *mtsai*, 2005; *Horn* és *Sinka*, 2006; *Kántor*, 2008; https://www.kir.hu/okmfit/; http://www.oktatas.hu/kozneveles/meresek/kompetenciameres/tanulmanyok_publikaciok). Érdekes vizsgálatokra ad lehetőséget a tanulók egyéni fejlődésének vizsgálata 4–10 évfolyamig, amely az egyéni fejlődést és a hozzáadott pedagógiai munkát vizsgálja és elemzi. A matematikai szöveges feladatok a matematikai problémamegoldás vizsgálatára alkalmasak. A matematikai gondolkodás gyakorlati megvalósulásának és a hétköznapi matematikának, az alkalmazásnak a vizsgálata a 21. században egyre nagyobb teret nyer. A matematikai gondolkodás területeit Vincze (2003) már a faktoranalízis módszerével tárta fel. Csíkos, Kelemen és Verschaffel (2011) arra az eredményre jutottak, hogy a tanulók konzisztens és erős matematikai meggyőződései lényegesen befolyásolják a feladatmegoldás folyamatát, valamint a feladatmegoldási stratégiák használata csak gyenge összefüggést mutat az iskolai eredményükkel.

A matematikai alapkészségek és -képességek első hazai vizsgálatát Nagy József (1971, 1973) országos reprezentatív mintákon végzett mérésekkel alapozta meg. Ugyancsak az ő nevéhez köthető a hetvenes évektől az iskolakészültség vizsgálatára kifejlesztett PREFER (Preventív Fejlettségvizsgáló Rendszer) kidolgozása (*Nagy*, 1975). A Csapó Benő irányításával 1996-ban indult vizsgálatsorozat a magyar iskolások fejlettségének feltérképezése volt a korábbi mérések eredményeinek összehasonlításával és a mérőeszközök korszerűsítésével. A DIFER (Diagnosztikus Fejlődésvizsgáló Rendszer) ebből a mérőeszköz-rendszerből alakult ki, amely a PREFER átdolgozott, friss referenciaadatokkal ellátott változatának is tekinthető.

A matematikai megértés a matematika tanulása és tanítása szempontjából igen fontos összetevő. A Csapó 2002-es iskolaitudás-vizsgálata során használt teszt keretében a műveletvégzés, az alapértelmezések (fogalmak), a feladatmegoldás, a problémamegoldás és a grafikonértelmezés is helyet kapott. A vizsgálatban a 7. és a 11. évfolyam átlageredményei gyengébbek lettek a tantárgyi teljesítményük alapján elvártnál. A szerző arra hívja fel a figyelmet, hogy a begyakorolt típusfeladatok esetében jobban teljesítenek a tanulók, mint az azoktól eltérő, gondolkodtató feladatok esetében.

A matematikai tudásszint-méréseket Vidákovich és Csíkos (2009) négy csoportra osztja:

– Az iskolai matematikai tudás vizsgálata (tantervi követelmények, hagyományos feladatok).
– A matematikai kompetencia vizsgálata (alkalmazási követelmények, „realisztikus” feladatok).
– A matematikai szövegesfeladat- és probléma-megoldás vizsgálata (gondolkodási folyamatok, szöveges feladatok).
– A matematikai alapkészségek vizsgálata (strukturális modellek, elemi feladatok).

Érdekes vizsgálatokra ad lehetőséget a tanulók egyéni fejlődésének vizsgálata 4–10 évfolyamig, amely az egyéni fejlődést és a hozzáadott pedagógiai munkát vizsgálja és elemzi. A matematikai szöveges feladatok a matematikai problémamegoldás vizsgálatára alkalmasak. A matematikai gondolkodás gyakorlati megvalósulásának és a hétköznapi matematikának, az alkalmazásnak a vizsgálata a 21. században egyre nagyobb teret nyer. A matematikai gondolkodás területeit Vincze (2003) már a faktoranalízis módszerével tárta fel. Csíkos, Kelemen és Verschaffel (2011) arra az eredményre jutottak, hogy a tanulók konzisztens és erős matematikai meggyőződései lényegesen befolyásolják a feladatmegoldás folyamatát, valamint a feladatmegoldási stratégiák használata csak gyenge összefüggést mutat az iskolai eredményükkel.

Magyarországon egy ilyen típusú országos komplex mérésnek tekinthető a középiskolába történő beiskolázáshoz megírt matematika feladatlap. Ennek egy megyére vonatkozó elemzését végezték el eddig. A Békés megyei tapasztalatokat Marczis (2010) rögzíti. Megállapítja, hogy a 2010-es mérés matematika és magyar nyelv eloszlásai egymás tükörképei. Míg a diákok magyar nyelvből rendkívül jól teljesítettek, matematikából gyengébb teljesítményt nyújtottak. Érdekes viszont, hogy az összteljesítményük eloszlása az elvárható ideális eloszlás. Megállapítja a szerző, hogy a matematikatanároknak sok feladata van még, hogy ezek a dolgozatok jobban sikerüljenek.

A nyolcadik osztályosok 2014. évi központi matematika írásbeli felvételi (9. évfolyamra történő beiskolázáshoz) vizsgafeladatainak tartalmi és kompetenciaterületek szerinti elemzése statisztikai módszerekkel

Az általunk elemzett matematika felvételi feladatsor a vizsgált populáció alapján országos szintű nagymintás mérés, a 8. évfolyam számára központi tanterv szerint készült diagnosztikus teszt, amely az általános iskolai matematika tantárgy követelményeire épül és a matematika tartalmi részterületek széles körét érinti. Fő célkitűzése a sikeres és eredményes középiskolai tanuláshoz szükséges alapvető készségek és képességek, valamint kompetenciák felmérése. A tanítási-tanulási folyamatban megismert, begyakorolt eljárások alkalmazásán kívül a tanult ismeretek szokatlan mozgósítását, újszerű alkalmazását is igényli, ezáltal a kreativitásnak is teret ad. A feladatok elemzésével (akár évente) képet kaphatunk az alapfokú oktatás végén a matematika tantárgy elvárt és megvalósult tantervi követelményeinek viszonyáról, amely elősegítheti a nemzetközi és hazai egyéb vizsgálatoknál a teljesítmény javulását, mert lehetőséget ad a tanulók hiányosságainak célirányos fejlesztésére. A felmérés középpontjában a matematikai tantárgyi tudás és a matematika tantárgy keretében elsajátított konkrét készségek állnak. A tesztekkel kapcsolatosan három fő kritériumot támasztanak: az objektivitás, a validitás és a reliabilitás. A tárgyszerűség, az érvényesség és a megbízhatóság teszi alkalmassá a tesztet arra, hogy pedagógiai kutatás alapját képezze.

Az általunk vizsgált korosztály egyik mérése, teljesítményszintjének leírása monitor vizsgálatok segítségével évente történik az egész országra kiterjedően, központi középiskolai felvételi feladatsor segítségével. Ez a komplex mérés, amely a matematikai alapkészségeket, a matematikai tudást, a matematikai kompetenciákat és a matematikai szövegesfeladat- és problémamegoldást egyaránt vizsgálja, alkalmas a tudásszint-állapot diagnosztizálására, ezáltal az oktatási-nevelési folyamat további feladatainak meghatározására az adott populáció esetében. Ezek a feladatlapok egy többváltozós pedagógiai kutatás összefüggés-vizsgálatában magas reliabilitásuk miatt fontos szerepet töltenek be. A teszteket szakértők állítják össze a matematikai tananyag elemzése alapján, a mérés validitását így biztosítják.

Vizsgálatunk tárgya a 2013/2014. tanévben 9. évfolyamra történő beiskolázás központi írásbeli felvételi vizsgáinak matematika feladatsora, amelyet 2014. január 18-án, Magyarországon 51 100 nyolcadik osztályos tanuló írt meg. A kutatáshoz az adatbázist az Oktatási Hivatal bocsátotta rendelkezésünkre (KÖZFELVIR 2014).

A mintavétel módja

Azok az általános iskolás korú gyermekek oldották meg ezt a feladatsort, akik olyan középiskolákba (gimnáziumok többsége és bizonyos szakközépiskolák) szerettek volna továbbtanulni, amelyek előírják bemeneti követelményként a felvételi vizsgát matematikából és magyar nyelvből. (A szakközépiskolák többsége és a szakiskolák nem kérnek ilyen felvételi vizsgát a beiskolázáshoz.)

A megkérdezés/kísérlet/megfigyelés átlagos időtartama

A tanulók a feladatokat mindig szombati napon, 10 órai kezdettel magyarból, majd 11 órai kezdettel matematikából, 45–45 perc időtartam alatt oldják meg. Az adatfelvétel objektivitását az biztosítja, hogy nem abban az általános iskolában történik a felmérés, ahol tanulnak, hanem kijelölt középiskolákból választhatnak. Magyarországon 2014-ben 469 ilyen középiskola szerepelt. A választás általában földrajzi jellegű, hiszen fontos, hogy minél közelebb legyen a lakóhelyhez, de előfordulhat, hogy azt a középiskolát választják, ahová tovább szeretnének tanulni. Az értékelés objektivitását az biztosítja, hogy a javítást a középiskolai tanárok végzik a központi javítókulcs alapján. A kijavított feladatlapokba betekintést biztosítanak a tanulók és szüleik számára. Az interpretációs objektivitást a kutatói adatbázis statisztikai jellegű vizsgálatával érhetjük el.

Kutatásunk elsődleges célja annak felmérése, hogy matematika tantárgyból ezen a teszten hogyan szerepeltek a tanulók. Segítségével képet kaphatunk arról, hogy az alapfokú oktatás lezárásakor – amely egyben a középfokú tanulmányok bemenetét is jelenti, ezáltal hidat képez az iskolatípusok között – milyen a tanulók eredményessége matematikából Magyarországon. A komplex mérés segítségével az alkalmazott matematikai tudásukról alkothatunk képet. Hipotézisünk szerint a begyakorolható „rutinfeladatok" esetében a tanulók jobb teljesítményt nyújtanak, mint az összetettebb, több kompetenciaterületet érintő feladatoknál. A KÖZFELVIR 2014 adatbázis tartalmazza a vizsgált 51 100 tanuló eredményeit. Az adatok nagy száma szükségessé teszi a statisztikai elemzéseket. Nahalka több tanulmányában (pl. 1996) foglalja össze a pedagógiai vizsgálatokhoz szükséges leíró és matematikai statisztika módszereit. Ezeket alkalmaztuk a vizsgált populáció esetében.

A feladatok jellemzői

A feladatok közműveltségi tartalom szerinti besorolását a *Nemzeti Alaptanterv* alapján végeztük el. A feladatok megoldásához szükséges matematikai kompetencia készség- és képesség-komponenseit Vidákovich Tibor az intelligencia faktoranalízise szerinti felosztása alapján választottuk ki.

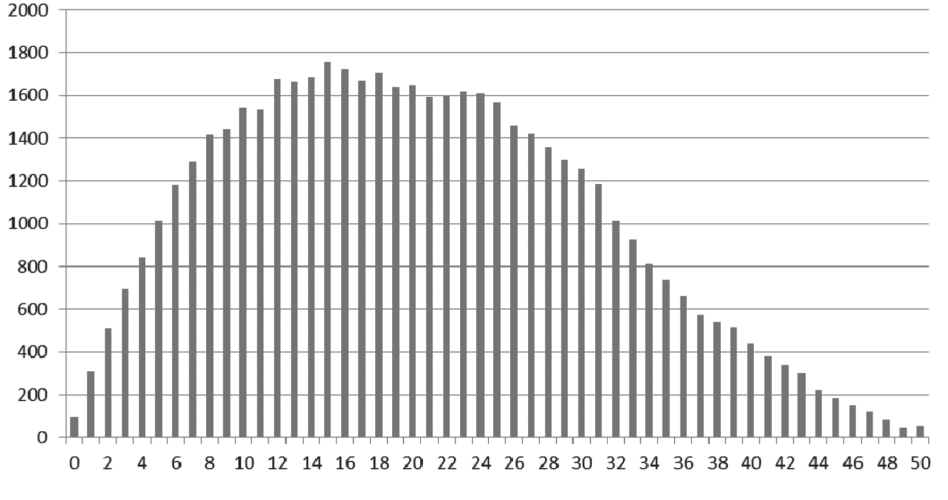
A tíz feladat a *Nemzeti Alaptanterv*ben megfogalmazott közműveltségi tartalmak nagy részét átfogja matematikából, ezáltal egy széles körű, alkalmazásszintű tudást mér. Az *1. A gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok* témakörön belül az egyszerű matematikai szöveg értelmezése az egész feladatsort jellemzi. A halmazba rendezés adott szempontok alapján a 6. feladatban, definíció kimondása az 5. feladatban, kombinatorikai ismeretek (sorba rendezés az összes eset megadásával) pedig a 3. feladatban fordul elő. A *2. Számelmélet, algebra* témakörből nyolc feladat (részfeladat) is szerepel. A 2., 9., 10. feladat a számok, mérés, mértékegységek, az 1., 2., 4., 5., 8., 9., 10. feladat a műveletek, a 4., 8., 9. feladat a százalékszámítás, a 6. feladat számelméleti és hatványozási ismeretek tudását feltételezi. Az 5., 7. és 9. feladat a *3. Geometria* témakörből van. A tér elemei az 5., a síkbeli alakzatok az 5. és a 7., a térbeli alakzatok a 9., a transzformációk a 7., a koordináta-geometria a 7., a térfogatszámítás készségszintű alkalmazása pedig a 9. feladatban szükséges. A *4. A függvények és az analízis elemei* és az *5. Statisztika, valószínűség* témakör fordul elő a legkisebb mértékben (4. feladat).

A feladatok elemzése statisztikai módszerekkel

A modern tudományok gyakran alkalmazzák a leíró és matematikai statisztika módszereit. A pedagógia megfigyeléseinek, kísérleteinek szisztematikus feldolgozásával különféle elméleteket, paradigmákat támaszthatunk alá. Az indukciós módszer, amely objektív megfigyelésekből indul ki, és a dedukciós módszer, amely elméletekre épül, egyaránt szükségessé teszi a matematikai módszereket. Ezek kicsit mélyebb ismerete azt a célt szolgálja, hogy kiválaszthassuk a legmegfelelőbb eszközt. Dönteni kell az adatrendszer strukturálásáról, a módszerek kiválasztásáról, az eredmények rendszerezéséről és a szükséges próbákról, ellenőrzésekről. Statisztikai elemzésre akkor van szükségünk, amikor adathalmazzal dolgozunk. A bonyolult adatrendszerek többváltozós elemzésével részletes képet kaphatunk egy adott problémáról, hipotéziseket igazolhatunk és cáfolhatunk segítségével. Az iskolai oktatás esetében ennek segítségével felmérhetjük egy adott tantárgyból egy korosztály teljesítményét.

Az adatok elemi vizsgálata

A gyerekek által elért pontszámok 0 és 50 között mozognak. Elkészítettük a gyakorisági táblázatot, majd az adatok eloszlását grafikonon ábrázoltuk. Az 1. ábra a matematika feladatlapon elért pontszámok eloszlását mutatja.



1. ábra. A tanulók elért pontszámának abszolút gyakorisági eloszlása

Az abszolút gyakorisági eloszlás hisztogramjának vízszintes tengelyén az elérhető pontszámok szerepelnek, függőleges tengelyén pedig az, hogy egy adott pontszám hányszor fordul elő a vizsgált eredmények között. Az átlag 20,319, ami kisebb az elérhető pontszám felénél. A várakozásainknak megfelelően kirajzolódó haranggörbe enyhén balra tolt, azaz az 50 százalékos teljesítménynek megfeleltethető 25 pontnál kisebb értékeknél csúcsosodik. A szórás 10,508, elmondhatjuk, hogy a teszt jól differenciál, megmutatja a tanulók teljesítménybeli különbségét. A szóródás terjedelme 50, a lehetséges legmagasabb érték, ami azt jelzi, hogy 0 pontos és 50 pontos teljesítmény egyaránt előfordult. A relatív szórás a szórás és az átlag hányadosa, melyet százalékban adunk meg. Orosz

(1993) több kategóriát különböztet meg: 15 százalék alatt kicsi, 15–25 százalék között közepes, 25–35 százalék között erős, 35 százalék felett szélsőséges a differenciálás mértéke. A vizsgált adatok esetén ez 21,02 százalék, ami azt jelenti, hogy a csoport teljesítményének relatív szórása közepes. Az elért pontszám, az adott pontszámúak relatív gyakorisága és a normális eloszlás sűrűségfüggvénye (századra kerekítve az átlag 20,32; szórás 10,51) alapján Kolmogorov–Szmirnov-próbát végeztünk, nullhipotézisünk, hogy a két eloszlás megegyezik. Mivel a csoport kétharmad részének teljesítménye kicsi eltérést mutat az átlag körüli szórásértékekkel meghatározott intervallumban (10−31 pont), ezért a tanulók teljesítményének ingadozását itt közel normálisnak tekinthetjük.

A módusz (az adatok között leggyakrabban előforduló érték) és a medián (az adatok középső eleme, páros elemszám esetén a középső két elem átlaga), vagyis a helyzeti középértékek meghatározásával a gyakorisági eloszlás képére következtethetünk. Ez akkor ideális, ha a görbe szimmetrikus, az átlag, a módusz és a medián értéke egybeesik. A vizsgált csoportban a módusz 15, a medián pedig 20, tehát az eloszlás nem ideális. A kapott Gauss-görbe balra tolódott, ferdesége negatív (-0,28358).

Mindezeket több dologra is visszavezethetjük:

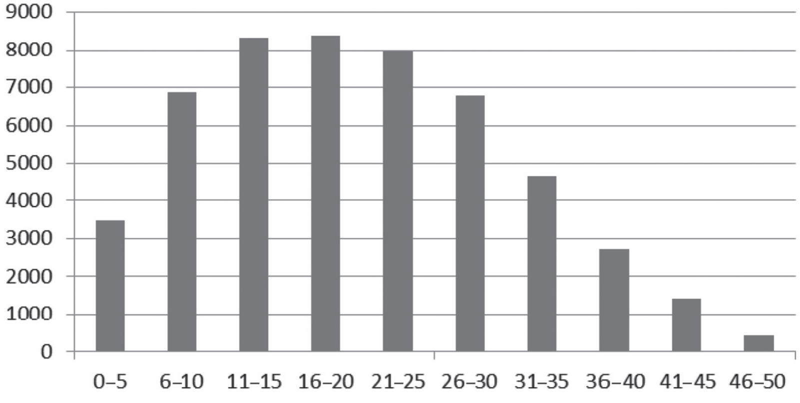
– nehezek a feladatok,
– a diákok felkészültsége alacsonyabb,
– az átadott és az elvárt tudásanyag nincs összhangban,
– kevés volt a rendelkezésre álló idő.

Az elért pontszám kétszerese adja az elért százalékos értékeket. Az eredményeket 10 intervallumba soroltuk és táblázatba rendeztük (1. táblázat), ahol az x_{i-1} az intervallum kezdőértékét, az x_i pedig a legnagyobb értéket jelöli (pl. az első intervallum 0–5 pont között). Az első intervallumba essék az e_1, a másodikba az e_2, a harmadikba az e_3, a negyedikbe az e_4, …, a tizedikbe az e_{10} adat. A táblázat harmadik oszlopa az intervallumba tartozó elért pontszámok gyakoriságát tartalmazza. A relatív gyakoriságot g_i-vel, a kumulált relatív gyakoriságot g_i*-gal jelöltük.

1. táblázat. Az elért pontszámok intervallumokba rendezése, gyakoriság (e_i), relatív gyakoriság (g_i) és kumulált relatív gyakoriság (g_i)*

x_{i-1}	x_i	e_i	g_i	g_{i*}
0	5	3477	6,80%	6,80%
6	10	6874	13,45%	20,26%
11	15	8314	16,27%	36,53%
16	20	8389	16,42%	52,94%
21	25	7985	15,63%	68,57%
26	30	6794	13,30%	81,86%
31	35	4673	9,14%	91,01%
36	40	2732	5,35%	96,36%
41	45	1420	2,78%	99,14%
46	50	442	0,86%	100,00%

Az adott értékek segítségével elkészítettük a gyakorisági hisztogramot (2. ábra).



2. ábra. A gyakoriság hisztogramja

Megállapítható, hogy a tanulók elért pontszámai közül a leggyakoribb a 3. és 4. intervallum, tehát a 11–20 pontos teljesítmény. Több mint 50 százalékuk az 1–4. intervallumba tartozik, vagyis legfeljebb 20 pontot értek el, a tanulók 20 százaléka pedig maximum 10 pontot ért el. Aki 35 pont feletti eredményt ért el, már a legjobb 10 százalékba tartozik az országos eredmények tükrében.

Az adatok vizsgálata feladatonkénti bontásban

Az elért teljesítmény vizsgálatát (7., 9., 11., 13., 15., 17., 19., 21., 23., 25. ábra) tovább folytattuk feladatokra (6., 8., 10., 12., 14., 16., 18., 20., 22., 24. ábra) lebontva. Így már árnyaltabb képet kaphatunk arról, hogy melyik matematikai tartalom okozott nagyobb nehézséget a diákoknak, és melyik kisebbet.

1. Az alábbi ábrán mindegyik nyíl fölé egy-egy alapműveletet (összeadást, kivonást, szorzást, osztást) írtunk. A nyíl fölé írt műveletet azzal a számmal kell elvégezned, amelyiktől a nyíl elindul. Az elvégzett művelet eredménye az a szám lesz, amelyre a nyíl mutat. | a |

Az első művelet esetén: $\frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}$.

Végezd el a nyilakon jelölt műveleteket, és az eredményeket írd be a pontozott vonalakra!

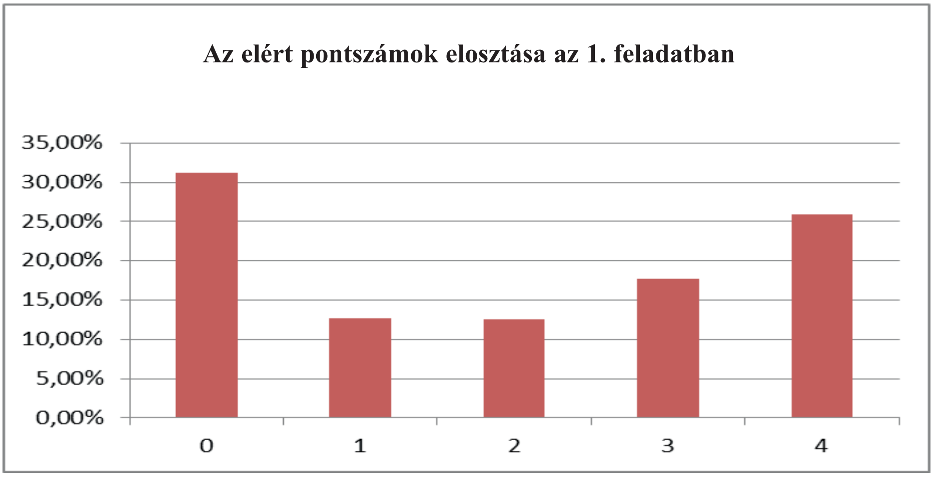
$$\frac{2}{5} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{4}{5} \xrightarrow{+1{,}6} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{:3} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{-2} \ldots\ldots\ldots \xrightarrow{+\frac{3}{2}} \ldots\ldots\ldots$$

A feladat besorolása

Közműveltségi tartalom (NAT):

Számelmélet, algebra (2.)
Műveletek (2.2.)

Matematikai kompetencia: Szövegértés, szövegértelmezés
Számolási készség
Problémaérzékenység
Figyelem, rész-egész észlelés, emlékezet,
feladatmegoldási sebesség



2. Tedd igazzá az alábbi egyenlőségeket a hiányzó adatok beírásával!

a) $13\ liter + 14\ dm^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ dm^3$

b) $3\ nap + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ óra = 90\ óra$

c–d) $19821\ m = 27\ km - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ m = 27\ km - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ dm$

a	
b	
c	
d	

A feladat besorolása

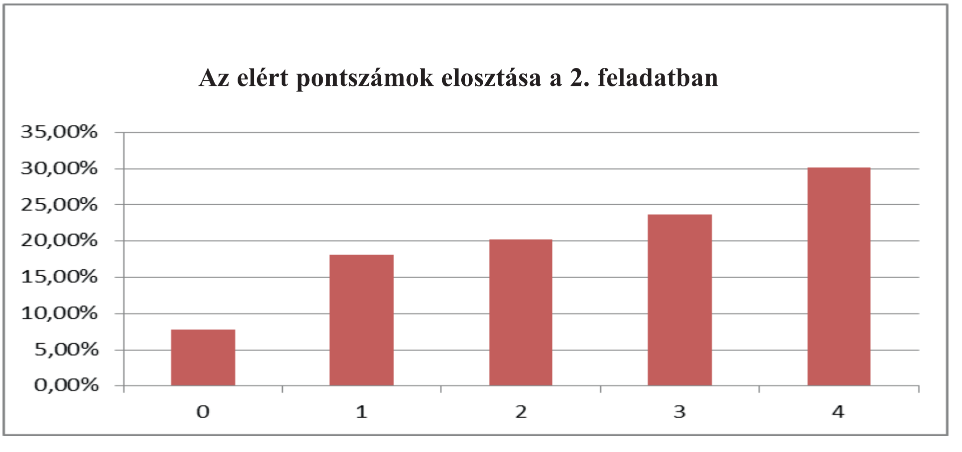
Közműveltségi tartalom (NAT):

Számelmélet, algebra (2.)
Számok, mérés, mértékegységek (2.1.)
- Mérés, mértékegység használata, átváltás
- Egyenes arányosság, fordított arányosság

Műveletek (2.2.)
- Alapműveletek racionális számokkal

Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek (2. 6.)
- Elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek

Matematikai kompetencia: Számolási készség
Mértékegységváltás
Mennyiségi következtetés
Figyelem, emlékezet, feladatmegoldási sebesség
Szövegértés, szövegértelmezés



3. Luca (L), Krisztina (K), Angéla (A) és Nóra (N) 400 méteres futásban mérték össze az erejüket. A verseny után a következőket mondták el a barátjuknak, Rékának (aki nem látta a versenyt): Sem Luca, sem Angéla nem lett utolsó, sem Krisztina, sem Nóra nem lett első.

a

Milyen sorrendben érkezhettek a célba, ha nem volt holtverseny?

Írd a táblázat mezőibe a versenyzők nevének kezdőbetűit a feltételnek megfelelő valamennyi lehetséges sorrend szerint! Egy lehetséges sorrendet előre beírtunk a megoldások táblázatába.

Megoldásaidat a vastag vonallal körülvett mező táblázataiba kell beleírnod, mivel csak ezeket értékeljük. A többi táblázatban próbálkozhatsz, de azokat NEM értékeljük!
Lehet, hogy a bekeretezett részben több táblázat van, mint ahány megoldás lehetséges.
Vigyázz! Ha a megoldásaid között hibásan kitöltött táblázat is szerepel, azért pontlevonás jár.

Megoldásaim:

1. L	2. A	3. K	4. N	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.
1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.
1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.

1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.
1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.
1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.

A feladat besorolása

Közműveltségi tartalom (NAT):

Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok (1.)
Matematikai logika (1.2.)
- Egyszerű matematikai tartalmú szöveg értelmezése

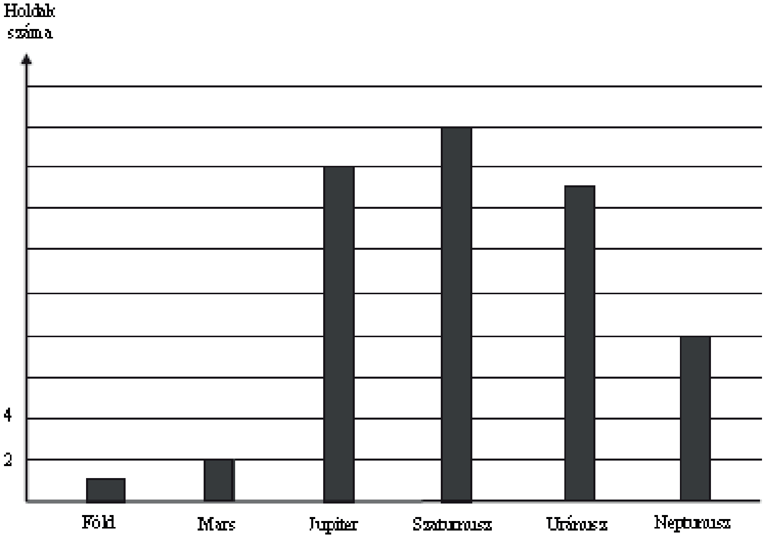
Kombinatorika (1.3.)
- Sorba rendezési és kiválasztási feladatok az összes eset megadásával

Matematikai kompetencia: Kombinativitás
Szövegértés, szövegértelmezés
Rendszerezés

a	
b	
c	
d	
e	
f	

4. Az alábbi oszlopdiagramon hat bolygó holdjainak számát ábrázoltuk.

A kérdések erre a hat bolygóra vonatkoznak.



a–b) Hány holdja van összesen a hat bolygónak? Írd le a számolás menetét!

c–d) A Szaturnusz holdjainak száma hány százaléka a hat bolygó holdjai számának? Írd le a számolás menetét!

e–f) Hány holdja van átlagosan egy bolygónak? Írd le a számolás menetét!

A feladat besorolása

Közműveltségi tartalom (NAT):

Számelmélet, algebra (2.)
Műveletek (2.2.)
- Alapműveletek racionális számokkal
- Százalékszámítás

Függvények, az analízis elemei (4.)
Függvények megadása, ábrázolása (4.2.)
- Grafikonok olvasása, értelmezése

Statisztika, valószínűség (5.)
Statisztika (5.1.)
- Diagramok értelmezése

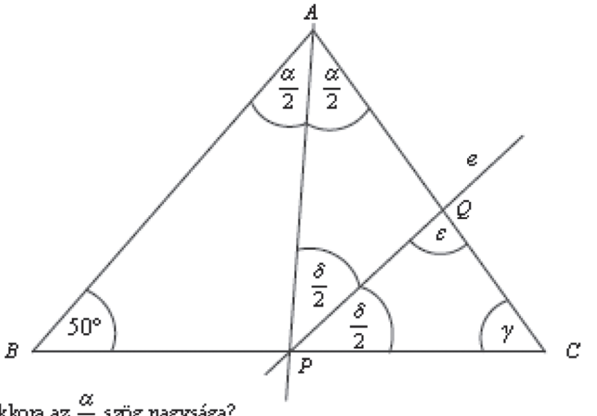
Matematikai kompetencia: Ábrázolás, prezentáció
Számolási készség
Szövegértés, szövegértelmezés
Mennyiségi következtetés

a	
b	
c	
d	

5. Az ábrán vázolt ABC háromszögben a B csúcsnál lévő belső szög nagysága $50°$.
Az A csúcsból induló belső szögfelező egyenes a BC oldalt a P pontban metszi úgy, hogy $\delta = 80°$. Az e egyenes a δ szög szögfelezője.

Határozd meg az ábrán szereplő $\frac{\alpha}{2}$, γ és ε szög nagyságát, majd egészítsd ki a CPQ háromszögre vonatkozó állítást!

(Az ábra csak tájékoztató jellegű vázlat, nem pontos méretű.)



a) Mekkora az $\frac{\alpha}{2}$ szög nagysága?

b) Mekkora a γ szög nagysága?

c) Mekkora a ε szög nagysága?

d) Számításaid alapján egészítsd ki az alábbi mondatot úgy, hogy igaz legyen!

A CPQ háromszög ……………………………………………………. háromszög, mert

……………………………………………………………………………………………… .

A feladat besorolása

Közműveltségi tartalom (NAT):

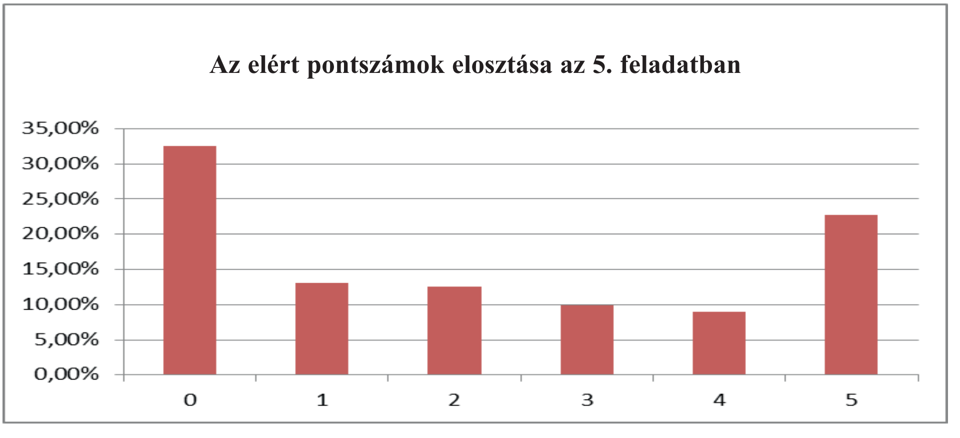
Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok (1.)
- Definíció kimondása

Számelmélet, algebra (2.)
Műveletek (2.2.)
- Alapműveletek racionális számokkal

Geometria (3.)
A tér elemei (3.1.)
- Szögtartomány

Síkbeli alakzatok (3.2.)
- Háromszögek, osztályozásuk
- Háromszög belső szögeinek összege

Matematikai kompetencia: Ábrázolás, prezentáció
Szövegértés, szövegértelmezés
Rész-egész észlelés
Érvelés, bizonyítás
Emlékezet



6. Adott a következő öt szám: 4 ; 7 ; 20 ; 25 ; 28.
Ezek közül írd be a pontozott helyekre a feltételnek megfelelő összes számot!

a) Páros szám: …………………………………………………………..

b) Prímszám: ……………………………………………………………

c) 7-tel osztható szám: …………………………………………………..

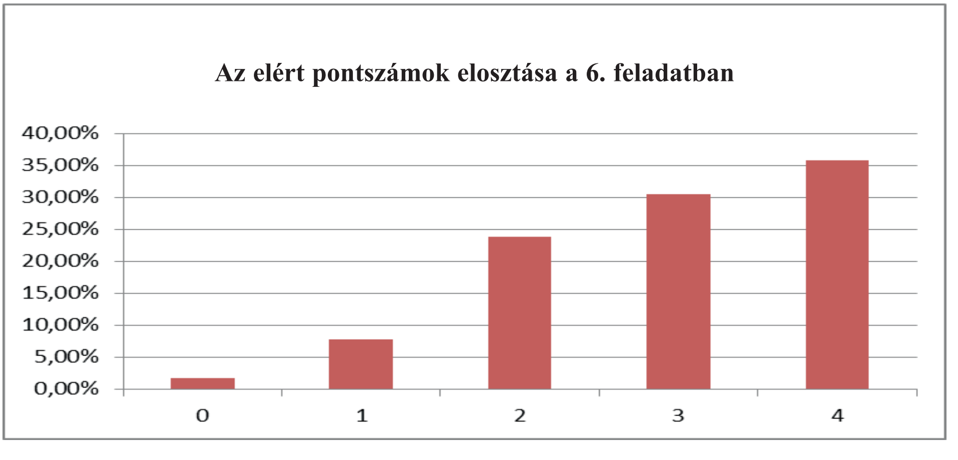
d) Négyzetszám: ………………………………………………………...

A feladat besorolása

Közműveltségi tartalom (NAT):

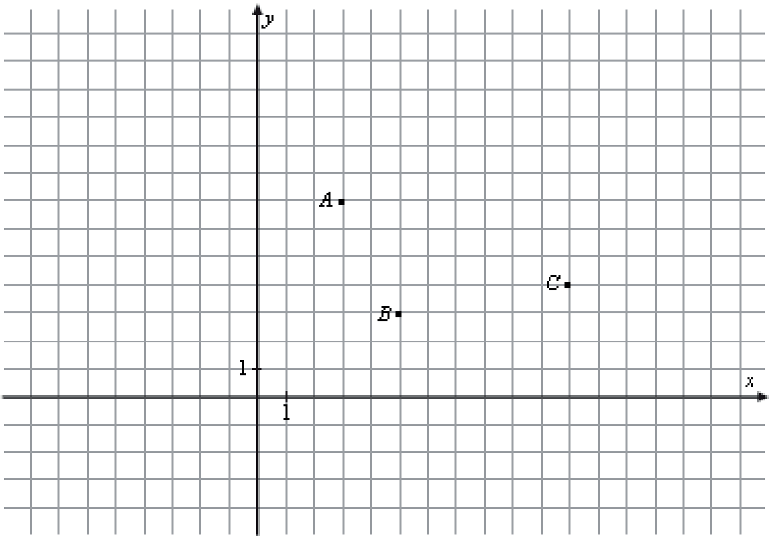
Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok (1.)
Halmazok (1.1.)
– Halmazba rendezés több szempont alapján
Számelmélet, algebra (2.)
Műveletek (2.2.)
– Alapműveletek racionális számokkal
Számelméleti ismeretek (2.3.)
– Osztó, többszörös
– Prímszám, összetett szám
Hatvány, gyök, logaritmus (2.5.)
– Négyzetre emelés, négyzetgyökvonás

Matematikai kompetencia: Rendszerezés
Emlékezet
Szövegértés, szövegértelmezés



7.	Az alábbi koordináta-rendszerben adott három pont: $A(3; 7)$, $B(5; 3)$ és $C(11; 4)$.	a

a) Keress olyan D pontot, hogy az A, a B a C és a D pont valamilyen sorrendben egy paralelogramma négy csúcsa legyen!
Rajzold be az összes ilyen D pontot az ábrába, és add meg a koordinátáikat!



A feladat besorolása

Közműveltségi tartalom (NAT):

Geometria (3.)
Síkbeli alakzatok (3.2.)
– Négyszögek, speciális négyszögek
Transzformációk (3.4.)
– Középpontos szimmetria, valamint eltolás szerkesztéssel
Koordináta-geometria (3.6.)
– Koordináta-rendszer, pont ábrázolása

Matematikai kompetencia: Térlátás, térbeli viszonyok
Kreativitás
Emlékezet
Probléma-érzékenység
Szövegértés, szövegértelmezés

8. A nekeresdi piacon 12 kg első osztályú és 8 kg másodosztályú almát vásároltunk. A másodosztályú alma kilogrammonkénti ára az első osztályú alma kilogrammonkénti árának 75%-a volt. Összesen 4176 tallért fizettünk.
Hány tallér az első osztályú és a másodosztályú alma kilogrammonkénti ára?
Írd le a számolás menetét is!

a

Az első osztályú kilogrammonkénti ára: …………………… tallér.

A másodosztályú alma kilogrammonkénti ára: …………………… tallér.

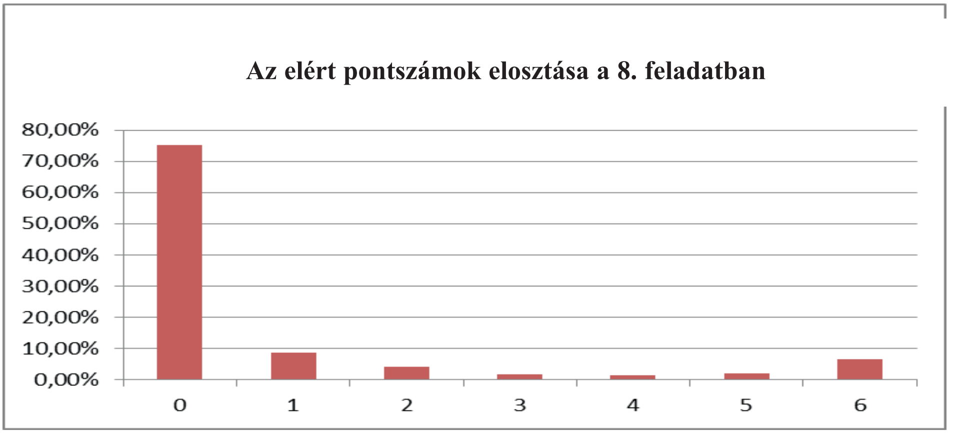
A feladat besorolása

Közműveltségi tartalom (NAT):

Számelmélet, algebra (2.)
Műveletek (2.2.)
- Alapműveletek racionális számokkal
- Százalékszámítás

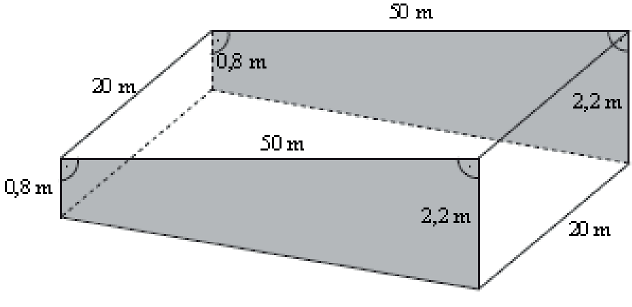
Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek (2.6.)
- Elsőfokú egyenletek

Matematikai kompetencia: Szövegértés, szövegértelmezés
Számolási készség
Modellalkotás (probléma-reprezentáció)
Eredetiség, kreativitás
Érvelés, bizonyítás
Rész-egész észlelés



9. A nekeresdi strandon új medencét építettek. Az alábbi ábra ennek a medencének a vázlatos rajza. A medence mélysége egyenletesen növekszik 0,8 métertől 2,2 méterig. A szürke oldallapok kivételével a medence oldallapjai, alaplapja és a nyitott része is téglalap alakú.

a



a) Hány m^3 víz szükséges a medence teljes feltöltéséhez?
Írd le a számolás menetét is!

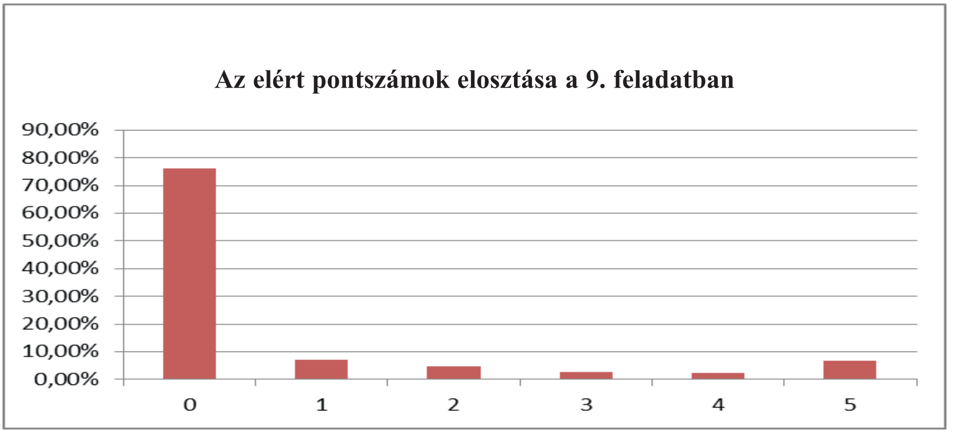
A feladat besorolása

Közműveltségi tartalom (NAT):

Számelmélet, algebra (2.)
Számok, mérés, mértékegységek (2.1.)
  – Mérés, mértékegység használata
Műveletek (2.2.)
  – Alapműveletek racionális számokkal
Geometria (3.)

Térbeli alakzatok (3.3.)
– Egyenes hasáb
Térfogat, felszín (3.8.)
– Az egyenes hasáb térfogatának kiszámítása

Matematikai kompetencia: Térlátás, térbeli viszonyok
Számolási készség
Szövegértés, szövegértelmezés
Rész-egész észlelés
Ábrázolás, prezentáció
Érvelés, bizonyítás
Eredetiség
Emlékezet



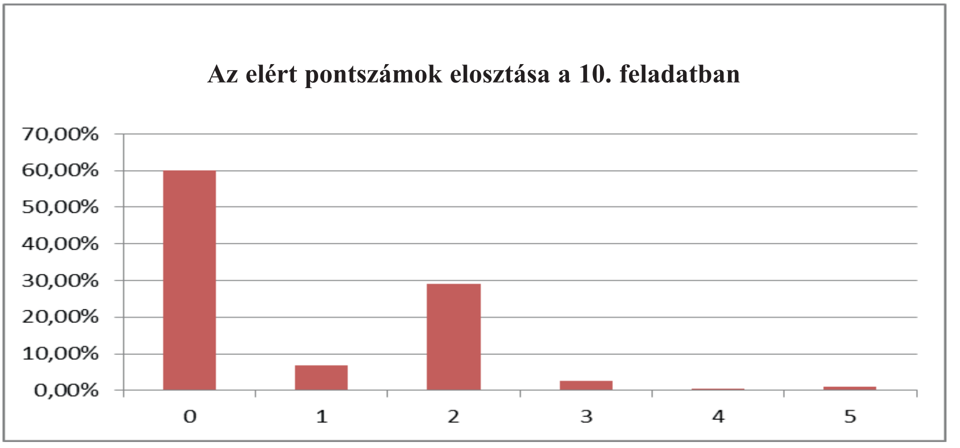
10.	A különböző országokban többféle hőmérsékleti skálát használnak. A leggyakoribb a Celsius (°C), a Fahrenheit (°F) és a Réaumur (°R). A Celsius-skálához hasonlóan a másik két skála is egyenletes beosztású (lineáris). A két alább, Celsius-fokokban mért hőmérséklet az egyes skálákon a következő értékeket veszi fel: 0 °C = 32 °F 0 °C = 0 °R 100 °C = 212 °F 100 °C = 80 °R Határozd meg a hiányzó értékeket! Írd le a számolás menetét is! a–b) 40 °C = …………………….. °R c–e) 140 °F = …………………….. °C	a b c d e

A feladat besorolása

Közműveltségi tartalom (NAT):

Számelmélet, algebra (2.)
Számok, mérés, mértékegységek (2.1.)
– Mérés, mértékegység használata, átváltás. Egyenes és fordított arányosság.
Műveletek (2.2.)
– Alapműveletek racionális számokkal

Matematikai kompetencia: Mennyiségi következtetés
Számolási készség
Érvelés, bizonyítás
Problémaérzékenység
Szövegértés, szövegértelmezés



Jól látható, hogy ez a tíz feladat a Nemzeti Alaptantervben megfogalmazott közműveltségi tartalmak nagy részét átfogja matematikából, ezáltal egy széles körű, alkalmazásszintű tudást mér. A szükséges matematikai kompetenciák is igen széles körűen szükségesek a feladatok megoldásához. A feladattartási sebességet a rendelkezésre álló 45 perc folyamatosan igényli.

Az egyes feladatok esetében elért pontok relatív gyakorisági értékeit táblázatba foglaltuk (2. táblázat).

2. táblázat. A feladatonkénti pontszámok relatív gyakorisági értékei

	0	1	2	3	4	5	6
f1	31,16%	12,73%	12,54%	17,69%	25,87%		
f2	7,79%	18,11%	20,28%	23,68%	30,13%		
f3	9,59%	9,65%	16,57%	17,82%	12,22%	34,15%	
f4	5,61%	5,98%	11,18%	7,71%	26,18%	8,94%	34,39%
f5	32,55%	13,13%	12,57%	9,93%	9,02%	22,81%	
f6	1,78%	7,86%	23,95%	30,57%	35,84%		
f7	40,40%	13,00%	37,26%	1,42%	4,28%	0,60%	3,02%
f8	75,33%	8,65%	4,23%	1,89%	1,43%	1,93%	6,55%
f9	76,35%	7,10%	4,85%	2,68%	2,16%	6,86%	
f10	59,97%	6,87%	28,95%	2,70%	0,57%	0,94%	

A 2., 3., 4. és 6. feladat esetében a leggyakrabban előforduló elért pontszám a maximálisan elérhető pont. Az 1. feladatnál pedig a 2. leggyakoribb. A korábbi évek feladatsoraiban is előfordultak hasonló feladattípusok, ezért ezeket a „rutinfeladatok" közé sorolhatjuk. Az 5., a 7., a 8., a 9. és a 10. feladat esetében pedig a leggyakoribb teljesítmény a 0 pont volt. Ezek közül főleg az utolsó 3 feladat összetettebb, több kompetenciaterületet is érint.

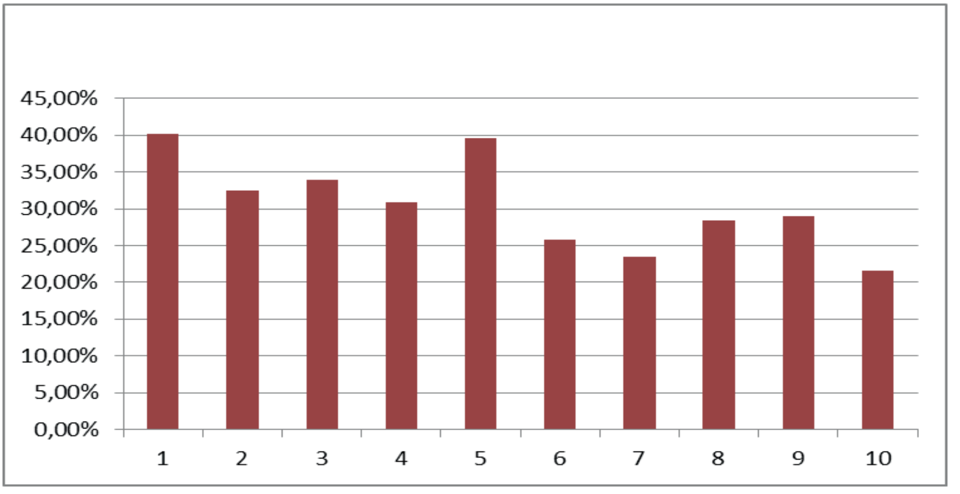
Az egyes feladatok esetében (3. táblázat) is kiszámítottuk az átlagot, a szórást, a relatív szórást, a mediánt és a móduszt.

3. táblázat. A feladatok alapvető leíró statisztikai mutatói

	Elérhető pontszám	*Átlag*	*Százalék*	*Szórás*	*Relatív szórás (%)*	*Medián*	*Módusz*
f1	4	1,944	48,6	1,607	40,18	2	0
f2	4	2,502	62,56	1,297	32,43	3	4
f3	5	3,159	63,18	1,696	33,92	3	5
f4	6	4,073	67,88	1,849	30,82	4	6
f5	5	2,182	43,63	1,978	39,56	2	0
f6	4	2,908	72,71	1,032	25,8	3	4
f7	6	1,301	21,68	1,407	23,45	1	0
f8	6	0,774	12,91	1,701	28,35	0	0
f9	5	0,678	13,56	1,452	29,04	0	0
f10	5	0,798	15,97	1,076	21,52	0	0
Össz.	50	20,319	40,64	10,508	21,02	20	15

A legjobb eredmény a 6. feladatban született, amely főként fogalmak ismeretét teszi szükségessé, utána a 4., 3. és 2. feladat volt a sorrend (60 százalék felett). Az elmúlt évek feladatsorait ismerve ezek a feladattípusok szerepeltek a régebbi feladatsorokban is, tehát lehetőség volt „begyakorlásukra". Az 1. feladat csak ezután következett. A racionális számokkal való alapműveletek ebben az életkorban már rutinfeladatokká kellene váljanak. A szórás és a pontonkénti eloszlás alapján megállapíthatjuk, hogy ezt az egyszerű feladatot a tanulók nagy száma 0 vagy 4 pontosra teljesítette. Sokaknak az első művelet okozott gondot (egy közönséges tört és egy tizedestört összeadása), és ezután nem foglalkoztak tovább a feladattal. (Vajon tudták-e a gyerekek, hogy hibás eredmény esetén is adhatók részpontok?) A 7. feladatnál már jóval kisebb az elért teljesítmény. Mivel ennek a feladatnak több megoldása volt, sokan csak az elsőt találták meg. A legnagyobb problémát az utolsó három feladat okozta a nyolcadikosoknak. Ezek sokkal összetettebb matematikai feladatok voltak, nagyon sok matematikai kompetenciaterületet érintettek. Itt kellett igazán gondolkodni, itt voltak igazán szükségesek a problémamegoldáshoz szükséges matematikai képességek. Az időbeosztás, sokaknak az idő rövidsége is okozhatta a rossz teljesítményt. Az elért eredményből is jól látható, hogy sok feladatunk van még a matematikai kompetenciák fejlesztése, az alkalmazott matematikai tudás kialakítása terén.

Még szemléletesebb képet kaphatunk a relatív szórás ábrázolásával (3. ábra) az egyes feladatok esetében.



3. ábra. Relatív szórás feladatonként

15 százalék alatti relatív szórást egyik feladat esetében sem tapasztaltunk, tehát a tanulók tudása egyetlen feladat esetében sem tekinthető homogénnek. A 15–25 százalék között 10. és a 7. feladatnál volt a relatív szórás, ami közepes differenciálást jelent. Ebből azt állapíthatjuk meg, hogy a tanulók ismerete eltérő az egyes feladatelemek tekintetében. A 2., 3., 4., 6., 8. és 9. feladat relatív szórása 25–35 százalék között van, ami a tanulók ismereteinek erős differenciálását jelenti. Az 1. és az 5. feladat a szélsőséges kategóriába tartozik, ami azt támasztja alá, hogy a tanulók tudása lényeges eltérést mutat a képviselt ismeretkörben.

Ha azt vesszük figyelembe, hogy az általános iskolai matematikaoktatás céljai és feladatai egységesen és egyértelműen szabályozottak (NAT, Kerettanterv), akkor a megvalósult tanterv tekintetében még nagyon sok a tennivaló.

További érdekességeket rejthet magában a fiúk (f) és a lányok (n) teljesítményének összehasonlítása. Eredményeiket a következő táblázatban (29. ábra) foglaltuk össze.

4. táblázat. A feladatok megoldottsági szintjei nemek szerint

	f	*n*			*f %*	*n %*
fő	24574	26526		fő	48	52
f1	1,98	1,911		f1	49,49	47,77
f2	2,661	2,356		f2	66,52	58,9
f3	3,127	3,189		f3	62,53	63,78
f4	4,147	4,004		f4	69,11	66,73
f5	2,236	2,131		f5	44,73	42,62
f6	2,928	2,89		f6	73,2	72,25
f7	1,31	1,293		f7	21,83	21,54
f8	0,817	0,735		f8	13,61	12,25
f9	0,81	0,556		f9	16,19	11,12
f10	0,963	0,646		f10	19,27	12,91
Össz.	20,98	19,71		Össz.	41,96	39,42

A fiúk jobb eredményét elsősorban a 2., a 9. és a 10. feladatban nyújtott jobb teljesítményük (5 százaléknál nagyobb eltérés a lányokéhoz képest) okozta. A lányok átlagpontszámukat tekintve kizárólag a 3. (kombinatorikai) feladat esetében előzték meg a fiúkat.

A fiúk és lányok átlagos teljesítményének eltérését (5. táblázat) kétmintás t-próbával vizsgáltuk. Nullhipotézisünk az, hogy a két vizsgált változó átlaga statisztikai szempontból megegyezik.

5. táblázat. A fiúk és a lányok átlagos teljesítményének eltérése

	fő	*átlag*	*szórás*
f	24574	20,978	10,761
n	26526	19,709	10,230

A próbastatisztika az adatokból számítható: 13,66. 5 százalékos szignifikancia-szintre a t-eloszlás táblázatából az 1,96 értéket kapjuk. A próbastatisztika ennél nagyobb, ezért a nullhipotézist elvetjük: a fiúk eredménye szignifikánsan jobb a lányokénál.

A 4. ábra azt illusztrálja, hogy Budapesten és a 198 megyében hogyan alakult a feladatok megoldottsági szintje.

4. ábra. A feladatonként elért eredmények megyei bontásban

Jól látható, hogy a legjobban Vas, Zala és Veszprém megyében teljesítettek a tanulók. Az országos eredmények tükrében további kutatásokat végzünk, amelyek az iskolai sakkoktatás hatásait mutatják a vizsgált korosztály esetében (a középmezőnyben szereplő) Somogy megye egyik általános iskolájában.

Irodalomjegyzék

Balázsi Ildikó, Schumann Róbert, Szalay Balázs és Szepesi Ildikó (2008): *TIMSS 2007. Összefoglaló jelentés a 4. és 8. évfolyamos tanulók képességeiről matematikából és természettudományokból*. Oktatási Hivatal, Budapest.

Balázsi Ildikó, Szabó Vilmos és Szalay Balázs (2005): A matematikaoktatás minősége, hatékonyság és esélyegyenlőség. Új Pedagógiai Szemle, **55**. 11. sz. 3–21.

Báthory Zoltán (1992): *Tanulók, iskolák, különbségek. Egy differenciális tanításelmélet vázlata*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Csapó Benő (1996): Tudásszintfelmérő tesztek. In: Falus Iván: *Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe*. Keraban Könyvkiadó, Budapest.

Csapó Benő (2002, szerk.): *Az iskolai tudás*. 2. kiadás. Osiris Kiadó, Budapest.

Csíkos Csaba (2002): A pedagógiai értékelés új irányzatai. Új Pedagógiai Szemle, július-augusztus. 175–179.

Csíkos Csaba (2005): Metakogníciòra alapozott fejlesztő kísérlet 4. osztályos tanulók körében a matematika és az olvasás területén. *Magyar Pedagógia*, **105**. 127–152.

Csíkos, Cs., Kelemen, R. és Verschaffel, L. (2011): Fifth-grade students' approaches to and beliefs of mathematics word problem solving: a large sample Hungarian study. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, **43**. 561–571. http://link.springer.com/article/10.1007/s11858-011-0308-7

Csíkos Csaba és Vidákovich Tibor (2012): A matematikatudás alakulása az empirikus vizsgálatok tükrében. In: Csapó Benő (szerk.): *Mérlegen a magyar iskola*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 83–130.

Fábián Mária, Olasz Tamásné, Lajos Józsefné és Vidákovich Tibor (2008): Matematika kompetenciaterület – szakmai koncepció. Educatio Kht.

Freudenthal, H. (1975): Pupils' Achievements Internationally Compared. *Educational Studies in Mathematics*, **6**. 127–186.

Hajdu Sándor (1989): A középfokú oktatásba lépő fiatalok matematikai műveltségének sajátosságai. *Pedagógiai Szemle*, **39**. 12. sz. 1142–1152.

Horn Dániel és Sinka Edit (2006): A közoktatás minősége és eredményessége. In: Halász Gábor és Lannert Judit (szerk.): *Jelentés a magyar közoktatásról 2006*. Országos Közoktatási Intézet, Budapest. 341–375.

Iszáj Ferenc, Kiss Sándor és Molnár Zoltánné (1981): Felmérések tanulságokkal. *Pedagógiai Műhely*, **4**. 3. sz. 31–37.

Kántor Sándorné (2008): A PISA és az ahhoz hasonló típusú feladatok megoldásának tapasztalatairól. *A matematika tanítása*, január. 3–11.

Kelemen Rita (2004): Egyes háttérváltozók szerepe „szokatlan" matematikai szöveges feladatok megoldásában. *Iskolakultúra*, **14**. 11. sz. 3–16.

110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról

Marczis György (2010): A 8.-os központi matematika felvételi Békés megyei tapasztalatai. *A matematika tanítása*, szeptember. 3–11.

Nagy József (1971): *Az elemi számolási készségek mérése és fejlettségének országos színvonala*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Nagy József (1973): *Alapműveleti számolási készségek*. Standardizált készségmérő tesztek 1. Acta Universitatis Szegediensis de Attila Jozsef Nominatae, Sectio Paedagogica, Series Specifica, Szeged.

Nagy József (1975): *5–6 éves gyermekeink iskolakészültsége*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Nahalka István (1996): A statisztikai módszerek pedagógiai alkalmazásának indokai, statisztikai alapfogalmak. In: Falus Iván (szerk.): Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe. Keraban Könyvkiadó, Budapest. 343–356.

Orosz Sándor (1993): *Pedagógiai mérések*. Korona Kiadó, Budapest.

The PISA 2003 Assessment Framework (2003). OECD.

Vári Péter, Bánfi Ilona, Felvégi Emese, Krolopp Judit, Rózsa Csaba és Szalay Balázs (2001): A PISA 2000 vizsgálatról. Új *Pedagógiai Szemle*, **51**. 12. sz. 31–43.

Vári Péter, Auxné Bánfi Ilona, Felvégi Emese, Rózsa Csaba és Szalay Balázs (2002): Gyorsjelentés a PISA 2000 vizsgálatról. Új Pedagógiai Szemle, **52**. 1.sz. 38–65.

Vári Péter (szerk.) (2003): *PISA-vizsgálat 2000*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Vidákovich Tibor (1990): *Diagnosztikus pedagógiai értékelés*. Akadémiai Kiadó, Budapest.

Vidákovich Tibor (2005): *A matematikai kompetencia fejlesztésének koncepciója*. suliNova Kht., Budapest

Vincze Szilvia (2003): A matematikai képesség összetevőinek vizsgálata és kapcsolata az intelligenciával. *Magyar Pedagógia*, **103**. 2. sz. 229–261.

Misetáné Burján Anita[1] – Birkás György[2]

[1] Balatonlelle-Karádi Általános Iskola és Alapfokú Művészeti Iskola

[2] Siófoki SZC Baross Gábor Szakgimnáziuma és Szakközépiskolája