



A geometriai transzformációk tárgyalásának egy módja a
tanárképzésben

Doktori (PhD) értekezés tézisei

A method of studying geometric transformations in teacher-training

Theses of the PhD dissertation

Krisztin Német István

Témavezető – Supervisor

Dr. Horváth Jenő

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Debrecen 2007

Tartalomjegyzék – Contents

Bevezetés	1
A transzformációk	2
A téma oktatásával kapcsolatos megjegyzések	5
Axiomatikus háttér	10
Introduction	12
The transformations	13
Remarks on the teaching of the topic	16
Axiomatic background	21
Hivatkozások – References	23
Publikációk – Publications	24

Bevezetés

Disszertációnkban az alapvető geometriai transzformációk – egybevágóság, hasonlóság, affinitás, kollineáció, inverzió – tanárképzésbeli oktatásának egy módjáról foglaltuk össze gondolatainkat. Az érintett témákat, feldolgozásukat a tanárképző főiskolai geometriaoktatás keretei határozták meg, mert oktatási tapasztalatainkat a Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Karán, ill. elődjén, a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán szereztük.

A geometriai transzformációk hagyományos tárgyalásában az egybevágóságot távolságtartó, a hasonlóságot pedig aránytartó transzformációként definiáljuk (pl. [3], [6], [16]). Pelle Béla a tanárképző főiskolák számára írt „Geometria” tankönyveiben ([14], [15]) a hagyományostól eltérő módon vezeti be ezeket a fogalmakat. A síkratükrözés alapfogalmára, a Tükrözési axiómákra alapozva a tér, ill. a sík egybevágóságát mint síkra, ill. egyenesre vonatkozó tükrözések szorzatát definiálja. A hasonlóságot pedig centrális nyújtás és egybevágóság szorzataként értelmezi. A kétféle definiálási mód közötti különbséget röviden úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a hagyományos definíció egy tulajdonságával határozza meg a fogalmat, az utóbbi pedig „konstruktívan”, vagyis módszert ad a leképezés megadására. Ez a módszer azonban nem folytatódik [14]-ben a további alapvető leképezéstípusok, az affinitások, kollineációk vizsgálatánál. ([15]-ben nem szerepelnek ezek a témák.)

Disszertációnkban ezt a konstruktív, szorzatokra épülő módszert tanulmányoztuk. Megvizsgáltuk axiomatikus alapjait, továbbá azt, hogy hogyan lehet ezt a módszert az affinitások és a kollineációk témakörére alkalmazni.

Első célunk a konstruktív definiálási módszer kiterjesztése volt. Először, a [14]-ben és [15]-ben megkezdett módszert folytatva, a centrális nyújtás fogalmához szorosan kapcsolódva, metrikus alapon definiáltuk a síkbeli tengelyes affinitást és a síkbeli centrális-tengelyes kollineációt. Majd az ily módon bevezetett speciális leképezések szorzataként definiáltuk az új, általánosabb leképezéstípusokat.

További célunk volt, hogy a hasonlóságra, az affinitásra és a kollineációra vonatkozó alapvető tételeket a Tükrözési axiómákkal, ill. az egybevágóságra vonatkozó tételekkel analóg formában, és analóg módszerekkel tárgyaljuk. Egységes, következetes fogalom-, tétel- és módszerrendszer kialakítására törekedtünk.

Harmadik célunk a tárgyalás alapját képező Tükrözési axiómák és más axiómák kapcsolatának vizsgálata, a Tükrözési axiómák minél gyengébb alakban történő kimondása volt. De nem volt célunk teljes, szigorú axiomatikus felépítést adni.

A disszertációban, a „Bevezetés” után, a 2. fejezetben áttekintettük az egybevágósággal kapcsolatos axiómacsoport típusait, valamint a [14]-ben, [15]-ben szereplő Tükrözési axiómákat. A 3. fejezetben felsoroltuk a későbbiekben használt fogalmakat, továbbá áttekintettük a síkbeli egybevágóság fogalmára vonatkozó alapvető tételeket. A 4. fejezetben a centrális nyújtás, a tengelyes affinitás és a centrális-tengelyes kollineáció, valamint a hasonlóság, az affinitás és a kollineáció síkbeli definíciói szerepeltek. Az 5., 6. fejezetekben az előzőekben bevezetett leképezések alapvető tulajdonságait tárgyaltuk. A 7. fejezetben röviden vázoltuk a konstruktív tárgyalásmód alkalmazását az említett leképezések térbeli megfelelőire, továbbá az inverzióra és a hiperbolikus sík körmodelljeire. A 8. fejezetben összefoglaltuk a téma oktatásával kapcsolatos megjegyzéseinket. A 9. fejezetben a hasonlóság és a kollineáció fixpontjára vonatkozó konstrukcióinkat ismertettük. Végül a 10. fejezetben visszatértünk az alapokhoz; részletesen foglalkoztunk a Tükrözési axiómák gyengítési lehetőségeivel, különös tekintettel a Dedekind-féle folytonossági axióma alkalmazására.

A transzformációk

[14]-ben, [15]-ben a síkratükrözés alapfogalmára a Tükrözési és Mérési axiómák vonatkoznak (ld. az „Axiomatikus háttér” fejezetet). Ezekre épül a síkbeli tengelyes tükrözés és az egybevágóság fogalma:

Definíció. *Ha egy α síkot t egyenesben metsző γ síkra történő tükrözés az α síkot önmagára képezi le, akkor az α sík e leképezését a t -re vonatkozó síkbeli tengelyes tükrözésnek nevezzük. ([15] 22. o.)*

Definíció. *A síkon egybevágóságnak nevezzük tengelyes tükrözések véges szorzatát.* ([14] 58. o.; [15] 57. o.)

E leképezések alapvető tulajdonságait összefoglaló tételek a Tükrözési axiómák síkbeli analogonjai. Itt csak az egybevágóságok ún. „alaptételét” tekintjük. Síkbeli zászlónak nevezzük egy nyílt félsík és egy, a határán levő félegyenes unióját.

Tétel. *Legyen adott a síkon két zászló. Pontosan egy olyan egybevágóság létezik, amelynél az első zászló képe a második. ([15] 42.-43. o.)*

A centrális nyújtás fogalma a hagyományos módon szerepel [14]-ben, [15]-ben ([14] 110. o.; [15] 105. o.). Megjegyezzük, hogy az alábbi definíció kicsit eltér az ott levőtől. A továbbiakban irányított szakaszokat használunk.

Definíció. *Legyen adott az euklideszi síkon egy C pont és egy $\lambda (\neq 0)$ valós szám. Centrális nyújtásnak nevezzük a következő leképezést. C legyen fix; más P pont képe legyen az a P' pont, melyre $CP' = \lambda CP$.*

A tengelyes affinitás és a centrális-tengelyes kollineáció fogalmának bevezetésénél a centrális nyújtáshoz kapcsolódtunk; a hasonlóságénál, az affinitásénál és a kollineációénál pedig az egybevágósághoz Végig nagy hangsúlyt fektettünk az új fogalmak bevezetésének motivációjára.

Definíció. Legyen adott az euklideszi síkon két, egymással nem párhuzamos egyenes, t és e , és egy $\lambda (\neq 0)$ valós szám. Általános tengelyes affinitásnak nevezzük a következő leképezést. t pontjai legyenek fixek; más P pont képe legyen az a P' pont, melyre $TP' = \lambda TP$, ahol T a t egyenes azon pontja, melyre (PT) egyállású e -vel.

Definíció. Legyen adott az euklideszi síkon két párhuzamos egyenes, t és e , e egyik irányítása, és egy $\lambda > 0$ valós szám. Speciális tengelyes affinitásnak nevezzük a következő leképezést. t pontjai legyenek fixek; más P pont képe legyen az a P' pont, melyre PP' hossza $\lambda d(t, P)$, és egyirányú, ill. ellentétes irányú e -vel, attól függően, hogy t nem választja el, ill. elválasztja P -t és e -t.

Definíció. Legyen adott a kibővített euklideszi síkon egy t egyenes, rajta kívül egy C pont, és egy $\lambda (\neq 0)$ valós szám. Általános centrális-tengelyes kollineációnak nevezzük a következő leképezést. C és t pontjai legyenek fixek; más P pont képe legyen az a P' pont (CP) -n, melyre $(P'PCT) = \lambda$, ahol $T := (CP) \cap t$.

Definíció. Legyen adott a kibővített euklideszi síkon egy t egyenes és rajta egy C pont.

Ha C és t is ideális, akkor a hozzájuk tartozó speciális centrális-tengelyes kollineációkon a C irányú eltolásokat értjük.

Ha t közösleges és C ideális, akkor a hozzájuk tartozó speciális centrális-tengelyes kollineációkon a t tengelyű speciális tengelyes affinitásokat értjük.

Ha t és C is közösleges, akkor legyen adva még egy t -vel párhuzamos f közösleges egyenes. Ekkor speciális centrális-tengelyes kollineációnak nevezzük a következő leképezést. t pontjai legyenek fixek; más P pont esetén legyen $F := (CP) \cap f$. Ha P közösleges, akkor képe legyen az a P' pont (CP) -n, melyre $(CPP') = \frac{FC}{CP}$; ha P ideális, akkor pedig $P' := F$.

Definíció. Az euklideszi síkon hasonlóságnak nevezzük tengelyes tükrözések és centrális nyújtások véges szorzatát.

Definíció. Az euklideszi síkon affinitásnak nevezzük centrális nyújtások és tengelyes affinitások véges szorzatát.

Definíció. A kibővített euklideszi síkon kollineációnak nevezzük centrális-tengelyes kollineációk véges szorzatát.

A disszertációban megvizsgáltuk, hogyan lehet az így definiált leképezések alapvető tulajdonságait úgy összefoglalni, bizonyítani, hogy a tárgyalás egységes legyen, minél jobban kiemelje az egymás közti, ill. a Tükrözési axiómákkal fennálló analógiákat. Példaként a centrális-tengelyes leképezések egyenestartásának igazolását említjük, a szorzatleképezésekkel kapcsolatban pedig az ún. alaptételeket és a kollineációk szorzatalakjára vonatkozó egyik tételt emeljük ki:

Tétel. Legyen adott az euklideszi síkon két zászló, továbbá a félegyenesükön egy-egy pont. Pontosan egy olyan hasonlóság létezik, amelynél az első zászló képe a második zászló, az elsőn kijelölt ponté pedig a másodikon kijelölt pont.

Tétel. Legyen adott az euklideszi síkon két zászló, továbbá a félegyenesükön és a belsejükben egy-egy pont. Pontosan egy olyan affinitás létezik, amelynél az első zászló képe a második zászló, az elsőn kijelölt pontoké pedig a másodikon kijelölt megfelelő pont.

Tétel. Legyen adott a kibővített euklideszi síkon két zászló, továbbá a félegyenesükön és a belsejükben egy-egy pont. Pontosan egy olyan kollineáció létezik, amelynél az első zászló képe a második zászló, az elsőn kijelölt pontoké pedig a másodikon kijelölt megfelelő pont.

Tétel. A kibővített euklideszi síkon minden kollineáció előáll két centrális-tengelyes kollineáció szorzataként.

A kollineációk alaptételéhez a zászló fogalmát ki kellett terjeszteni a kibővített euklideszi síkra. Az utolsó tétel igazolásához felhasználtuk a kollineációk fixpont-tételét is. A síkbeli hasonlóságok, ill. kollineációk fixpontjának létezésére többféle bizonyítás ismert (pl. [1], [12], [13], [16], ill. [2], [8], [10], [17]). Mi mindkét esetben szorzatokra épülő, egymással analóg bizonyítást konstruáltunk. Az adott hasonlóságot, ill. kollineációt három alkalmas leképezés szorzatára bontottuk, majd beláttuk, hogy a második és harmadik szorzatának van fixpontja, végül elértük, hogy ez a pont az elsőnél is fix legyen. Az utolsó lépés alapja az a tétel, hogy a sík minden egybevágósága előáll két tükrözés szorzataként úgy, hogy az egyik tükrözés tengelye, ill. centruma bizonyos feltételek mellett tetszőlegesen választható.

A téma oktatásával kapcsolatos megjegyzések

Véleményünk szerint az egységes felépítésre való törekvés egy nagyon fontos didaktikai elv. A fogalmak analóg módon történő definiálása segíti az új fogalom megértését, a fogalmak összekapcsolását. Továbbá, az analóg tulajdonságok kiemelése, ezek hasonló módon történő bizonyítása is nagyban hozzájárul az összefüggések megértéséhez. Ellenben a menetközben történő radikális szemlélet- és módszerváltás zavart okozhat. Másrészt, egy módszer kizárólagos, „mindenáron” való alkalmazása is káros lehet.

Az egységre való törekvésen túl vannak más szempontok is, ami alapján eldöntjük, hogy egy témakört hogyan tanítunk, hogyan dolgozunk fel, egy-egy részproblémát milyen – a „fővonaltól” esetleg eltérő – módszerrel oldunk meg. Ilyen szempont lehet pl.: a tanulók előismerete, tudásszintje; a témakör feldolgozásához rendelkezésre álló időkeret; a vizsgált témakör más témákkal való kapcsolata; a módszerek hatékonysága, egyszerűsége vagy bonyolultsága; a tanár véleménye, tapasztalata az egyes módszerekről.

Különösen fontosnak tartjuk a módszerek közötti egyensúlyra való törekvést. A képzésnek az is célja, hogy a hallgatók lehetőség szerint többféle eszközt, megoldási módot ismerjenek meg – azok előnyeivel és hátrányaival együtt –, amit majd alkalmazhatnak, ill. továbbadhatnak. A következőkben megpróbáljuk sorra venni, hogy a konstruktív módszer didaktikai és matematikai elveinek milyen következményei vannak, továbbá hogy hol és hogyan kapcsolható össze más módszerekkel.

1. A geometriai transzformációk konstruktív definíciói teljes összhangban vannak a függvények megszokott, elemi megadási módjával: a definíciók az értelmezési tartományt és a hozzárendelési szabályt rögzítik. Azonnal meg tudjuk adni, meg tudjuk „mutatni” bármely pont képét. Ezért konkrétabbak, „kézzelfoghatóbbak”, de hosszabbak, bonyolultabbak is, mint a hagyományos definíciók. Utóbbiakban bizonyos tulajdonságokkal rendelkező függvényosztályt definiálunk. (Pl.: „a sík olyan egyenestartó transzformációja, aminek van tengelye”.) Pont képének megadása csak egyéb, a definícióban nem szereplő tulajdonság levezetése után lehetséges.

2. A konstruktív módszer nem a legáltalánosabb, nem a legkevesebbet kívánó formában vezeti be a fogalmakat. Minden leképezéstípus vizsgálata egy speciális esettel kezdődik; ennek jellemzése után következik a szorzat-leképezés. A speciális felől haladni az általános felé szintén fontos didaktikai elv. Ha azonban a sok tulajdonság közül meg akarjuk határozni a legfontosabbakat – amik meghatározzák a leképezést – akkor ez külön vizsgálatot igényel. Ezzel a tárgyalás – a hagyományos felépítéssel összehasonlítva – hosszadalmasabbá, kevésbé „gazdaságossá” válik. A hagyományos felépítés

az általános esettel kezd, a leképezés fő invariánsai közvetlenül a definícióban jelennek meg. Ez a mód az általánosítás, az analitikus jellemzés, a más geometriákban való megjelentetés szempontjából előnyösebb. A szorzatalakban való előállítás nem kell külön vizsgálni, a megadással kapcsolatos alaptételek igazolásában megjelenik.

3. A disszertációban foglalkoztunk a transzformációk hagyományos és konstruktív definícióinak egyenértékűségével. Véleményünk szerint az ekvivalencia említése, vizsgálata nemcsak elméletileg, hanem az oktatás szempontjából is fontos. Egybevágóság és hasonlóság esetén azért, mert a hallgatók közoktatásbeli tanulmányaik során más definíciót ismertek meg ezekre a fogalmakra, ill. tanárként más definíciót fognak majd tanítani. Affinitás és kollineáció esetén pedig azért, mert a hallgatók esetleges későbbi tanulmányai során más geometriákban más definíció vonatkozik rájuk. A különböző definíciótípusok zavart okozhatnak, ha nem tárgyaljuk kapcsolatukat.

A középiskolai tankönyvek az egybevágóságot a hagyományos módon, a távolságtartás tulajdonságával vezetik be. A hasonlóság kétféleképpen jelenik meg: vagy az aránytartás tulajdonságával vezetik be, vagy centrális nyújtás és egybevágóság szorzataként definiálják. (pl. [4], [5], [11])

Az egységes rendszer kialakítása érdekében az affinitás és a kollineáció fogalmait is metrikus alapon vezettük be, úgy, hogy szorosan kapcsolódtunk a korábban tanult leképezések definícióihoz. A hallgatóknak ez természetes, hiszen erős bennük a leképezésekkel kapcsolatos metrikus gondolkodás. Ez azonban azt a téves képzetet is okozhatja, hogy ezeket a fogalmakat – sőt, az „egész” geometriát – kizárólag metrikus alapon lehet tárgyalni. Ezen segíthet, ha a megfelelő tételek után szólunk a hagyományos felépítéssel való kapcsolatáról, a fő invariánsok kiemelésével. Ez lazítja a metrikus fogalmakhoz való kötődést, előkészíti az általánosítást, a más geometriák felé való nyitást.

A különböző definiálási módokat esetleg rögtön a fogalom bevezetésénél is lehet érinteni. A megfelelő speciális leképezések tárgyalása után az általános leképezés fogalmát egy-egy olyan tételre alapozhatjuk, ami bizonyos tulajdonságok ekvivalenciáját rögzíti:

Tétel. *Az abszolút sík egy leképezésének alábbi tulajdonságai ekvivalensek egymással:*

- *Előáll véges sok tengelyes tükrözés szorzataként.*
- *Távolságtartó transzformáció.*

Az ilyen leképezést egybevágóságnak nevezzük.

Tétel. *Az euklideszi sík egy leképezésének alábbi tulajdonságai ekvivalensek egymással:*

- *Előáll egy egybevágóság és egy centrális nyújtás szorzataként.*
- *Előáll véges sok tengelyes tükrözés és centrális nyújtás szorzataként.*

- Aránytartó transzformáció.

Az ilyen leképezést hasonlóságnak nevezzük.

Tétel. Az euklideszi sík egy leképezésének alábbi tulajdonságai ekvivalensek egymással:

- Előáll egy hasonlóság és egy tengelyes affinitás szorzataként.
- Előáll véges sok tengelyes affinitás és centrális nyújtás szorzataként.
- Egyenestartó transzformáció.

Az ilyen leképezést affinitásnak nevezzük.

Tétel. A kibővített euklideszi sík egy leképezésének alábbi tulajdonságai ekvivalensek egymással:

- Előáll egy affinitás és egy centrális-tengelyes kollineáció szorzataként.
- Előáll véges sok centrális-tengelyes kollineáció szorzataként.
- Egyenestartó transzformáció.

Az ilyen leképezést kollineációnak nevezzük.

4. Felépítésünkben nemcsak az egybevágóság definíciója tér el a közoktatásban szereplőtől, hanem annak axiomatikus alapja is. Az iskolai alap vagy a (térbeli) „mozgás”, vagy szakaszok, szögek „egybevágósága” (esetleg mindkettő), ill. ezek alapvető tulajdonságai. A tankönyvek ezek alapján vezetik be az egybevágóságot, és a tükrözések fogalmait is. A Tükrözési axiómákra épülő felépítésben pontosan az „ellenkező irányú” felépítéssel találkozunk a hallgatók: itt a síkratükrözés az alap. Tehát pl. a tengelyes tükrözés fogalmának bevezetésénél a megszokott, felezőmerőleget vagy térmozgást alkalmazó definíció helyett itt egy teljesen új formájú és szemléletű definíciót ismernek meg. Ez a „szemléletváltás” problémát jelent a hallgatóknak, különösen azért, mert rögtön a geometriai tanulmányok elején jelentkezik. Ezt a problémát talán csak később lehet feloldani, pl. amikor a Párhuzamossági axiómával ekvivalens állításokat tárgyaljuk. Ekkor bővebben lehet szót ejteni arról, hogy más axiómák is „létrehozhatják” ugyanazt a geometriát. Természetesen itt azzal a problémával is szembe kell nézni, hogy a hallgatók mennyire vannak tisztában az axiómarendszer ún. „klasszikus” („szemléletes”, fizikai tapasztalatokon alapuló) és „modern” (logikai, definíciós) jelenségével.

5. A kollineációk tárgyalásánál is felmerül egy axiomatikus jellegű probléma. Ezt a leképezést az „ideális elemekkel kibővített euklideszi sík”-on vezettük be, amit „projektív sík”-nak is nevezhetnénk, mert illeszkedési, rendezési és folytonossági struktúrája modellezi az ún. „valós (klasszikus) projektív sík” axiómarendszerét. Mi mégsem használtuk ezt a fogalmat, a következők miatt. Vizsgálataink során végig különbséget tettünk az ideális és közönséges elemek között, továbbá a Tükrözési és Párhuzamossági axió-

mákon alapuló metrikus fogalmakat használtunk. A valós projektív síkon azonban (eredendően) nincsenek sem kitüntetett elemek, sem euklideszi alapú metrika. Ha a hallgató későbbi tanulmányai során találkozik a projektív geometria axiomatikus tárgyalásával, zavart okozhat a projektív sík fogalmának kétféle használata. Ha a centrális-tengelyes kollineációt csak az eltűnési egyenestől megfosztott euklideszi síkon definiálnánk, akkor megmaradnánk az euklideszi geometria keretei között. De ez körülményesebbé is tenné a tárgyalást, hiszen több ilyen leképezés szorzatánál több egyenest kellene ki-zárni. Természetesen a hagyományos axiomatikus projektív utat is választhatjuk, és csak a valós projektív sík geometriájának kiépítése után kapcsoljuk össze a kollineáció és a többi leképezés fogalmait.

6. A síkbeli és térbeli leképezések közötti kapcsolat is figyelmet érdemel. Külön a síkban és a térben ugyan egységes felépítést valósítottunk meg, de nincs „teljes” egység a sík és a tér között. Egyrészt nem „egyforma” pl. a sík- és térbeli egybevágóság definíciója: az egyikben tengelyes, a másikban síkratükrözés szerepel. Természetesen csak formailag nem egyeznek meg, tartalmilag igen, hiszen a síkbeli tengelyes tükrözést síkratükrözéssel definiáltuk. (Ilyen fogalmi „kettősség” más felépítésben is előfordul. Pl. a hagyományos felépítésben szakaszok, szögek egybevágósága alapfogalom, más alakzatoké pedig az erre az alapfogalomra visszavezetett távolságtartó leképezésekkel van definiálva.) A másik probléma az, hogy a síkbeli leképezéseket egy síkon belül definiáltuk, a térben két különböző sík között nem létesítene-k kapcsolatot. Ezért a két sík közötti párhuzamos, ill. centrális vetítés külön, új típusú speciális leképezésként jelenik meg. Viszont felhasználásukkal össze lehet kapcsolni a sík- és térgeometriát úgy, hogy beillesztjük ezeket is a szor-zatos felépítésbe: síkbeli tengelyes affinitást előállíthatunk síkok közötti térbeli tengely körüli elforgatás és párhuzamos vetítés szorzataként; síkbeli, közönséges centrumú és tengelyű centrális-tengelyes kollineációt pedig elő-állíthatunk síkok közötti térbeli tengely körüli elforgatás és centrális vetítés szorzataként. Így ezeket az előállításokat is felhasználhatjuk a leképezések vizsgálatában.

7. A leképezések tárgyalásakor fontos kérdés, hogy mi lesz kör (kúpszelet) képe. Kör (kúpszelet) affin, ill. kollineációs képe-né-k vizsgálata a hagyományos felépítésben részben vagy egészében analitikus geometriai módon történik. A konstruktív felépítésben is szükségünk van erre az eszközre. Kör tengelyes affinitásnál, ill. centrális-tengelyes kollineációnál kapott képe-né-k vizsgálatát csak körülményes módon tudjuk beilleszteni a szor-zatos felépítésbe. Az előző pont végén említett, térbeli előállítások alapján kapjuk, hogy kör képe tengelyes affinitásnál, ill. centrális-tengelyes kollineációnál egy kör-henger-, ill. körkúpfelület és egy sík metszészvonala. Egyenes körhenger, ill.

körkúp esetén a Dandelin-tételek megadják választ, hogy mi ez a metszet, a ferde esetre azonban nem. Affinitás esetén, kitérővel ugyan, de még választ kaphatunk ezen a módon. Ugyanis minden affinitás előáll egy hasonlóság és egy merőleges tengelyes affinitás szorzataként (pl. [9], [13]); merőleges tengelyes affinitásnál pedig elérhető, hogy egyenes körhenger síkmetszete legyen a vizsgált kör képe. De kollineáció esetén általában már nem tudjuk biztosítani az egyenes körkúpot. Ferde körkúp síkmetszetének vizsgálata pedig mindenképpen igényel koordináta geometriai eszközöket is. A többi kúpszelet képének vizsgálatára pedig csak annyiban alkalmas a fenti módszer, hogy levezethető: minden kúpszelethez van olyan centrális-tengelyes kollineáció, ami őt körbe viszi. (Felhasználva, hogy minden kúpszelet előállítható egyenes körkúp síkmetszeteként.) Természetesen, ez az eredmény elég több fontos témával kapcsolatban is: igazolható, hogy bármely két kúpszelethez van olyan kollineáció, aminél az egyik képe a másik; megoldhatók kúpszelet és egyenes metszésével, érintésével kapcsolatos feladatok; bizonyíthatók a Pascal és Brianchon tételek. (Hiszen ezek állításait körre „könnyen” megkaphatjuk.)

Ha a kúpszeletek affin, ill. kollineációs képének vizsgálatát teljes általánosságban részletezni akarjuk, akkor ezt a kezdetektől fogva analitikusan tárgyaljuk. De véleményünk szerint, több szempontból ekkor is megéri egy speciális esetben – egyenes körhengert, ill. -kúpot feltételezve – a fenti, szorzatos módon választ keresni. Egyrészt motivációs céllal; másrészt szép példája a sík- és térgeometria összekapcsolásának; harmadrészt, sejtést fogalmazhatunk meg az általános esetre. Utána pedig – utalva arra, hogy nem minden esetben alkalmazható ez a módszer – természetes módon merül fel az analitikus mód, hiszen a sejtett képek egyenleteit ismerjük.

8. Részben ugyanez a helyzet a leképezések fixpontjával kapcsolatban is. A disszertációban ismertettünk a hasonlóságok és kollineációk fixpontjának létezésére egy-egy szorzatokra épülő konstrukciót; a minden részletre kiterjedő bizonyítás – főleg kollineációnál – hosszadalmas. Ha nem akarunk mindent kirészletezni, akkor hasonlóság esetén viszonylag röviden megmutatható a fixpont léte. Természetesen több más szintetikus módszer is rendelkezésre áll hasonlóság fixpontjával kapcsolatban. De a kollineációk fixpontját már mindenképpen analitikus úton érdemes keresni.

9. Itt említjük meg, hogy éppen az előzőekben említett, szintetikusan nehezen tárgyalható részek eredményeinek szemléltetésében nagyban segíthet egy dinamikus geometriai szoftver használata, pl. „Euklides” ([20]), „Cabri” ([18]), „Cinderella” ([19]). Már pl. az eltolás és az elforgatás tárgyalása kapcsán haszonnal alkalmazható, amikor azt vizsgáljuk, hogy az őket előállító tükrözések tengelyei közül az egyik (bizonyos feltételekkel) tetszőlegesen vehető fel. Egyenes, kör, kúpszelet képének vizsgálatakor is nagy segítséget

nyújt a mozgathatóság, mozgó pont nyomvonalának meghatározása, különösen affinitás, kollineáció és inverzió esetén. A hasonlóság (és a kollineáció) fixpontjára adott konstrukciónk papíron, táblán nehezen elképzelhető részletei is hatásosan, az alapötletet megvilágító módon jeleníthetők meg ezzel az eszközzel.

Axiomatikus háttér

[14]-ben, [15]-ben a „síkratükrözés” alapfogalmára a X.-XIV. Tükrözési axiómák ([14] 21-22. o., [15] 17-18. o.) és a XV., XV.* Mérési axiómák ([14] 40., 42. o., [15] 34., 37. o.) egyes részei vonatkoznak:

„X. Bármely γ sík meghatároz a térben egy kölcsönösen egyértelmű leképezést, amelyet a γ síkra vonatkozó tükrözésnek nevezünk.

XI. A γ síkra vonatkozó tükrözés a γ sík pontjaihoz önmagát rendeli, a γ sík által meghatározott egyik féltér pontjaihoz a másik féltér pontjait, a képpontokhoz az eredeti pontokat, egy egyenes pontjaihoz egy egyenes pontjait rendeli.

XII. Ha a γ síkra vonatkozó tükrözés az α síkot a β síkba viszi át, akkor az α -hoz szimmetrikus pontokat β -hoz szimmetrikus pontokba viszi át.

XIII. A tér bármely két különböző pontjához egy és csak egy szimmetriasík tartozik.

XIV. A tér tetszőleges pontjából kiinduló két félegyeneshez egy és csak egy szimmetriasík tartozik.

XV. Minden szakaszhoz hozzárendelhető egy pozitív valós szám, amelyet a szakasz hosszának nevezünk. Ha a hosszegység adott, akkor bármely A kezdőpontú félegyenesen egy és csak egy olyan B pont található, melyre nézve az AB szakasz hossza egy adott pozitív szám. Egybevágó szakaszok hossza egyenlő. Egy szakaszt bármely belső pontja két olyan szakaszra bont fel, amelyek hosszának összege az eredeti szakasz hossza.”

(A szövegre vonatkozó XV.* állítás XV. analogonja.)

Mi a fenti Tükrözési axiómákat kissé megváltoztattuk. Elsőnek vesszük T1. néven a következő, XI.-nek megfelelő axiómát. Ebben adjuk meg az alapfogalom legfontosabb tulajdonságait. (Fixsíkon pontonként fix síkot értünk.)

T1. Bármely síkratükrözés a térnek olyan egyenestartó, involutorikus transzformációja, melynek van fixsíkja, ami bármely rá nem illeszkedő pontot elválaszt a képétől.

Következnek a T2., T3. és T4. nevű, rendre a X.-nek, a XIII.-nak és a XIV.-nek megfelelő axiómák, amelyek az alapfogalom létezését, egyértelműségét és megadásának módjait rögzítik.

T2. *A tér bármely síkjához pontosan egy olyan síkratükrözés létezik, melynek fixsíkjá az adott sík.*

T3. *A tér bármely két pontjához pontosan egy olyan síkratükrözés létezik, amelynél az adott pontok egymás képei.*

T4. *A tér bármely két közös kezdőpontú félegyeneséhez pontosan egy olyan síkratükrözés létezik, amelynél az adott félegyenesek egymás képei.*

A XII. Tükrözési axióma helyett másik állítást használtunk axiómaként:

T5. *Ha egy térszázlő síkratükrözések két véges szorzatánál kapott képei megegyeznek, akkor a két szorzat egyenlő.*

A disszertációban tárgyaltuk a T5. és az eredeti XII. axióma kapcsolatát, továbbá megvizsgáltuk, hogy ha az Illeszkedési, Rendezési axiómák mellé feltesszük a Dedekind-féle folytonossági axiómát is (pl. [7]), akkor a Tükrözési axiómák állításaiból mi igazolható. Beláttuk, hogy ekkor elég a következő, módosított Tükrözési axiómákat kimondani:

T1.* *Bármely síkratükrözés a térnek egyenestartó, involutorikus, nem identikus transzformációja, melynek van fixsíkjá.*

T2.* *A tér bármely síkjához létezik olyan síkratükrözés, melynek fixsíkjá az adott sík.*

T5. *Ha egy térszázlő síkratükrözések két véges szorzatánál kapott képei megegyeznek, akkor a két szorzat egyenlő.*

Tehát T1. és T2. állításai gyengíthetők, T3. és T4. állításai pedig levezethetők. (A Mérési axiómák állításai is bizonyíthatók.)

Introduction

In the dissertation we summarized our thoughts about a method of the teaching of basic geometric transformations – isometry, similarity, affine transformation, collineation, inversion – in teacher-training. The topics involved in the dissertation and the way of the treatment were determined by the frames of the teaching in teacher’s training colleges, because we gained our teaching experience at the University of Szeged, Juhász Gyula Faculty of Education, formerly Juhász Gyula Teacher’s Training College.

In the classical treatment of geometric transformations isometry is defined as a distance-preserving transformation and similarity is defined as a ratio-preserving transformation (e.g. [3], [6], [16]). Béla Pelle in his “Geometry” textbooks for teachers’ training colleges ([14], [15]) introduced these concepts in a different way. Founding on the primitive concept of “reflection in plane” and the axioms of Reflection space (plane) isometry is defined as a product of reflections in plane (in line); similarity is defined as a product of central dilatation and isometry. If we want to describe the difference between the two ways of definition, we can say that the classical one is based on a property, and the other one is a “constructive” way, it provides technique to give the transformation. This way does not proceed in [14] for studying the other basic types of mappings: affine transformations and collineations. (These subjects are not involved in [15].)

In our dissertation we examined this constructive, product-based method. We studied its axiomatic basis, and the possibility of applying this method for the affine transformations and collineations.

Our first aim was to extend the constructive way of definition. At first – continuing the way of [14] and [15] – we defined the concepts of the axial affine transformation and central-axial collineation in the plane, in a metric way that is strongly connected with the concept of the central dilatation. Then we defined the new, general type of mappings as products of the mentioned special mappings.

Our further aim was to study the fundamental theorems related to the similarity, affine transformation and collineation analogously to the axioms of Reflection and the theorems related to the isometry. We aspired to form a unified, consistent system of concepts, theorems and methods.

Our third aim was to examine the connection between the Axioms of Reflection and other axioms, and to weaken the axioms of Reflection as much as possible. But we did not want to make a complete, rigorous axiomatic treatment.

In Chapter 2. of the dissertation – after the “Introduction” – we summarized the types of the axioms related to congruency, and the axioms of

Reflection involved in [14], [15]. In Chapter 3. we listed the concepts used later, and summarized the fundamental theorems related to the (plane) isometry. In Chapter 4. there were the definitions of the central dilatation, axial affine transformation, central-axial collineation and similarity, affine transformation, collineation in the plane. In Chapters 5. and 6. we studied the basic properties of these mappings. In Chapter 7. we briefly sketched the application of the constructive method referring to the transformations in the space, to the inversion and to the disc-models of the hyperbolic plane. In Chapter 8. we summarized our remarks on the teaching of the topic. In Chapter 9. we introduced our constructions for the fixed point of similarity and collineation. Finally, in Chapter 10., we returned to the axiomatic basis, we dealt in detail with the possibility of the weakening of the axioms of Reflection, particularly the usage of Dedekind's axiom of Continuity.

The transformations

In [14], [15] there are the axioms of Reflection and Metric referring to the primitive concept of "reflection in plane". (See "Axiomatic background".) These are the basis of the concepts of reflection in line and isometry:

Definition. *If the plane γ intersects the plane α in the line t , and the reflection in plane γ transforms the plane α into itself, then we call this transformation the reflection in line t on the plane α . ([15] p. 22.)*

Definition. *By (plane) isometry we mean a product of reflections in line. ([14] p. 58.; [15] p. 57.)*

The theorems containing the basic properties of these mappings are the analogues of the axioms of Reflection. Here we mention only the so-called "fundamental theorem" of isometry. (By plane-flag we mean the union of a halfplane and a ray on its boundary.)

Theorem. *Let us consider on the plane two flags. There exists a unique isometry, which transforms the first flag to the other one. ([15] pp. 42.-43.)*

In [14], [15] the concept of central dilatation is defined in the usual way ([14] p. 110.; [15] p. 105.). We note that the following definition is a little bit different from that. In the sequel we used oriented segments.

Definition. *Suppose that there is a point C and a $\lambda(\neq 0)$ constant on the Euclidean plane. By central dilatation we mean the following mapping. C is fixed; the image of an other point P is that P' , for which $CP' = \lambda CP$.*

To introduce the concepts of the axial affine transformation and the central-axial collineation we connected to the concept of the central dilata-

tion; and to construct the concepts of the similarity, the affine transformation and the collineation we connected to the concept of the isometry. During the whole treatment we emphasized the motivation of introducing the new concepts.

Definition. Suppose that there are two intersecting lines t and e , and a $\lambda(\neq 0)$ constant on the Euclidean plane. By general axial affine transformation we mean the following mapping. The points on t are fixed; the image of an other point P is that P' for which $TP' = \lambda TP$, where T denotes the point on t for which (PT) is parallel (or equal) to e .

Definition. Suppose that there are two parallel lines t and e , e is directed, a $\lambda > 0$ constant on the Euclidean plane. By special axial affine transformation we mean the following mapping. The points on t are fixed; the image of an other point P is that P' for which the length of PP' is $\lambda d(t, P)$, and either oppositely or similarly directed as e , depending on P whether P and e are separated by t or not.

Definition. Suppose that there is a line t , a point C , $C \notin t$, and a $\lambda(\neq 0)$ constant on the extended Euclidean plane. By general central-axial collineation we mean the following mapping. C and the points on t are fixed; the image of an other point P is that P' on (CP) for which $(P'PCT) = \lambda$, where $T := (CP) \cap t$.

Definition. Suppose that there is a line t and a point C on the extended Euclidean plane, $C \in t$.

If C and t are both ideal elements, then by the special central-axial collineations with center C and axis t we mean the translations with direction C .

If C is an ideal point and t is an ordinary line, then by the special central-axial collineations with center C and axis t we mean the special axial affine transformations with axis t .

If C and t are both ordinary elements suppose that there is an other ordinary line f parallel to t . In this case by special central-axial collineation we mean the following mapping. The points on t are fixed; for an other point P , $F := (CP) \cap f$. The image of the ordinary point P is that P' on (CP) for

$$\text{which } (CPP') = \frac{FC}{CP}; \text{ for the ideal point } P, P' := F.$$

Definition. By similarity we mean a finite product of reflections in line and central dilatations on the Euclidean plane.

Definition. *By affine transformation we mean a finite product of central dilatations and axial affine transformations on the Euclidean plane.*

Definition. *By collineation we mean a finite product of central-axial collineations on the extended Euclidean plane.*

In the dissertation we observed how to sum up and prove the properties of the transformations defined by the above way, so that the treatment becomes unified, and stresses the analogies between each other and the analogies referring to the axioms of Reflection. For example, we mention the proof of the line-preserving property of the central-axial mappings, and we list here the so-called “fundamental theorems” of the product-mappings and a theorem referring to the product-form of the collineations.

Theorem. *Let us consider on the Euclidean plane two flags and a point on each ray. There exists a unique similarity, which transforms the first flag to the other one, the point on the first flag to the point on the other one.*

Theorem. *Let us consider on the Euclidean plane two flags, a point on each ray and halfplane. There exists a unique affine transformation, which transforms the first flag to the other one, the points on the first flag to the correspondent points on the other one.*

Theorem. *Let us consider on the extended Euclidean plane two flags, a point on each ray and halfplane. There exists a unique collineation, which transforms the first flag to the other one, the points on the first flag to the correspondent points on the other one.*

Theorem. *Any collineation can be obtained as a product of two central-axial collineations.*

In connection with the fundamental theorem of the collineation we generalized the concept of flag. In the proof of the theorem last mentioned, we used the theorem on the fixed point of a collineation, too. To prove the existence of the fixed point of a similarity and a collineation in the plane several proofs are known (e.g. [1], [12], [13], [16], ill. [2], [8], [10], [17]). We constructed for both cases an analogous, product-based proof. We obtained the given similarity, collineation as a product of three “suitable” mappings, and then we showed that there exists a fixed point under the product of the second and the third transformations, finally we made this point to be fixed under the first one, too. The basis of the last step was the theorem, which states that any isometry can be obtained as a product of two reflections, whose axis or center can be chosen arbitrarily (beside certain conditions).

Remarks on the teaching of the topic

In our opinion, aspiring to a uniform treatment is a very important didactical principle. Defining the concepts in an analogous way helps to understand the new concept and to connect the concepts. Moreover, the emphasizing of the analogous properties, the proving of the corresponding properties in a similar way also significantly contributes to the understanding of the connections. Otherwise, a radical viewpoint- and method-changing may cause confusion. On the other hand, applying a method exclusively, “at any price”, can also be harmful.

Beside aspiring to unity, there are other points of view, on the basis of which we decide how to teach a topic, how to treat it, which method we use to solve a problem of detail (which might be different from the “main-stream”). Such a point of view can be for example: the preliminaries, the level of knowledge of the students; the amount of time we have for the treatment of the topic; the connections between the studied topic and other topics; the “effectiveness” of the methods, their simplicity or difficulty; the teacher’s opinion, experience about the methods.

We think it is especially important, to aspire to a certain “balance” between the different methods. One of the aims of the training is to show the students several means and solving methods – together with their advantages and disadvantages –, which they can apply or teach later. In the sequel we try to list the consequences of the didactical and mathematical principles of the “constructive” method and to point out where and how can it be connected to other methods.

1. The constructive definitions of the geometric transformations are in complete accordance with the usual elementary way of giving of the functions: they give the domain and the rule of the correspondence. We can immediately give, “show” the image of any point. Therefore, these definitions are more concrete, more “palpable”, but also lengthier, more complicated than the classical definitions. In the latter ones we define classes of functions having certain properties (e.g.: “a line-preserving transformation of the plane with an axis”). Giving the image of a point is possible only after the proof of other property that is not involved in the definition.

2. The constructive way of definition does not introduce the concepts in the most general form. It starts to study every type of mapping with a special case; after its characterizing follows the product-mapping. To progress from the special case towards the general one is also an important didactical principle. However, if we want to choose from the many properties the most important ones – those are determine the mapping –, it needs further examina-

tion. Hence the treatment becomes lengthier, less “economical” in comparison with the classical treatment. The classical treatment starts with the general case, and the main invariants of the mappings appear immediately in the definitions. This way is more advantageous in the point of view of the generalizing, the analytic characterizing and the appearance in other geometries. And there is no need to examine the obtaining in a product-form separately, because it appears in the proofs of the “fundamental theorems” connected to the giving of the mapping.

3. In the dissertation we wrote about the equivalence of the classical and constructive ways of definition. In our opinion, it is important to mention the equivalence not only from the point of view of the mathematics, but also from that of the education, as in the case of the isometry and similarity the students learnt other definitions (not the constructive ones) during their school-studies, and as a teacher they will teach other definitions. In the case of the affine transformation and collineation, the students may learn other definitions to these mappings in other geometries during their further studies. The different definitions may cause confusion, if we do not study their connection.

In the textbooks for secondary schools isometry is classically defined, by the distance-preserving property. The concept of the similarity appears in two ways: it is defined either by the ratio-preserving property or as a product of an isometry and a central dilatation (e.g. [4], [5], [11]).

In order to form a uniform system, we defined the affine transformations and collineations on metrical basis so as to connect strongly with the way of definition of the previous mappings. This is a natural way for the students, because the metrical thinking about the geometric mappings is very strong. However, this way may lead to the false idea, that these concepts – and even the whole geometry – can be studied only on metrical basis. It could help if we mention the connection with the classical way after the appropriate theorems, emphasizing the role of the main invariants. This loosens the connection to metrical concepts, prepares the generalization, the approach towards other geometries.

The different ways of definitions might be mentioned during the introduction of the concept. After studying the corresponding special mapping, the concept of the general mapping can be founded to a theorem that states the equivalence of certain properties:

Theorem. *The properties of a mapping of the absolute plane mentioned below are equivalent to each other:*

- *It can be obtained as a finite product of reflections in line.*
- *It is a distance-preserving transformation.*

This mapping is called an isometry.

Theorem. *The properties of a mapping of the Euclidean plane mentioned below are equivalent to each other:*

- *It can be obtained as a product of an isometry and a central dilatation.*
- *It can be obtained as a finite product of reflections in line and central dilatations.*
- *It is a ratio-preserving transformation.*

This mapping is called a similarity.

Theorem. *The properties of a mapping of the Euclidean plane mentioned below are equivalent to each other:*

- *It can be obtained as a product of a similarity and an axial affine transformation.*
- *It can be obtained as a finite product of axial affine transformations and central dilatations.*
- *It is a line-preserving transformation.*

This mapping is called an affine transformation.

Theorem. *The properties of a mapping of the extended Euclidean plane mentioned below are equivalent to each other:*

- *It can be obtained as a product of an affine transformation and a central-axial collineation.*
- *It can be obtained as a finite product of central-axial collineations.*
- *It is a line-preserving transformation.*

This mapping is called a collineation.

4. Not only the definition of isometry differs from the way of definition in secondary schools but its axiomatic basis, too. The basis in the schools is either the (space)motion or the congruence of segments and that of angles (or both of them), and the basic properties of these concepts. In the textbooks the concept of the isometry and also those of the reflections are introduced via this basis. In the treatment founded on the axioms of Reflection the students meet the way “directed oppositely”: here the basis is the reflection in plane. Hence, for example, at the introduction of the concept of reflection in line the students learn a definition having a completely new form and point of view instead of the usual one applying perpendicular bisector or space-motion. This changing of point of view is a problem for the students, especially because it appears right at the beginning of the geometry-studies. This problem might be solved only later, for example when the statements being equivalent to the Euclidean axiom of Parallelism are studied. Then we can talk more about the fact that different axioms can “create” the same geometry. Naturally, we have to face the problem that how aware the students are of the two meanings of axioms: the “classical” one (“imaginative”, based on physical experience) and the “modern” one (logical, definitive).

5. An axiomatic kind of problem arises in connection with the collineations, too. We defined this mapping on the Euclidean plane extended by ideal elements, which could be called as “projective plane”, because from the point of view of incidence, order and continuity it is a model of the “real (classical) projective plane”. However, during our considerations we always made distinction between the “ideal” and “ordinary” elements, moreover we used metrical concepts based on the Euclidean axioms of Reflection. On the real projective plane there are not either indicated elements or Euclidean based metric. That is why we did not use the term “projective plane”. If the students learn about the axiomatic projective plane during their further studies, the usage of the term “projective plane” in different ways may cause confusion. If we defined the central-axial collineation only on the Euclidean plane except the vanishing line, we could stay within the frames of the Euclidean geometry. But this change would also make the treatment more complicated, because in case of a product we have to cancel more lines. Of course, we can also choose the axiomatic projective way, and we connect the concepts of the collineation and the other mappings only after building the geometry of the real projective plane.

6. The connection between the plane- and space-mappings is remarkable, too. We made a uniform treatment in the plane and also in the space, but there is no “complete” unity between plane and space. At first, for example the definitions of plane- and space-isometry are not the “same”: in the first one we mention reflection in line, and in the second one reflection in the plane. Naturally, it is only a formal difference, because reflection in line is defined by reflection in plane. (This kind of “conceptual duality” occurs in other treatments, too. For example, in the classical treatment the congruence of segments and that of angles are primitive concepts, while that of other objects is defined by using distance-preserving transformations.) The other problem is that the plane-mappings are defined within one plane, so they do not make connection between two planes in the space. Thus the parallel and central projections of a plane onto another one appear separately, as special mappings of a new type. But the plane- and space-geometry can be connected by using these new mappings, by fitting them into the product-based treatment: an axial affine transformation can be obtained as a product of a rotation about an axis and a parallel projection; a central-axial collineation with ordinary center and axis can be obtained as a product of a rotation about an axis and a central projection. Thus these mappings can also be used in studying the transformations.

7. It is an important question in the study of the mappings what the image of a circle (conic) is. In the classical treatment the image of a circle (conic) under an affine transformation or collineation is studied – entirely or

partly – by using the analytic geometric method. We need this means in the constructive treatment, too. The study of the image of a circle under an axial affine transformation or a central-axial collineation can be fitted into the product-based treatment only in a complicated way. By using the obtaining mentioned at the end of the previous paragraph, we have that the image of a circle under an axial affine transformation or a central-axial collineation is the plane section of a circular cylinder or cone, respectively. In case of a cylinder (cone) of revolution the Dandelin-theorems give the answer what the plane section is, but in other cases they do not. In case of affine transformation we can get an answer by this method, only with difficulty, though. Namely, any affine transformation can be obtained as a product of a similarity and an axial affine transformation whose direction is perpendicular to its axis (“strain”) (e.g. [9], [13]). And in this case it is possible to get the image of the circle as a plane section of a cylinder of revolution. But in case of collineation generally we cannot guarantee the cone of revolution. This case needs analytic geometric means, too. For the studying of the image of other conics this method is suitable only to deduce: for any conic there is a central-axial collineation, which transforms it into a circle. (By using the theorem which states that any conic can be obtained as a plane section of a cone of revolution.) Of course, this result is sufficient to verify the fact that any two conics are related by a collineation; to construct the intersection and tangency of a conic and a line; to prove Pascal’s and Brianchon’s theorems. (Because in case of a circle the statements of these theorems can be got “easily”.) If we want to study the image of a conic under an affine transformation or a collineation completely in detail, we do it analytically from the beginning. But in our opinion, from some points of view it is worth to look for the image in a special case – assuming a cylinder (or cone) of revolution – by using the product-method described above. Firstly, because of motivational purpose; secondly, it is a very good example to connecting the plane- and space-geometry; thirdly, we can formulate conjectures for the general case. Then – referring to the fact that this method cannot be applied generally – the analytic way emerges naturally, because the equations of the conjectured images are known.

8. The situation is partly the same in connection with the fixed point of the mappings. In the dissertation we made a product-based construction to prove the existence of the fixed point of a similarity and that of a collineation. The completely detailed proof – especially for collineation – is far lengthy. If we do not want to do everything in detail, then in case of similarity we get the fixed point comparatively shortly. Of course there are many other synthetic methods in connection with the fixed point of a similarity. But the fixed point of a collineation is worth to be sought by using analytic method.

9. Here we mention that the applying of dynamic geometry software (e.g. “Euklides” ([20]), “Cabri” ([18]) and “Cinderella” ([19])) can help a lot to visualize the results of the above mentioned topics that are difficult to study by synthetic methods. For example, it is useful to apply already in case of translation and rotation, when we study that one of the axes of the reflections obtaining them can be arbitrarily chosen (beside certain conditions). The dragging of the base-points and the visualization of the trace of a running point provide a great help to study also the image of a line, a circle and a conic, especially in case of affine transformation, collineation and inversion. Also the details of our construction on the fixed point of a similarity (collineation) those are hard to imagine in paper or in blackboard, can be visualized by this means effectively, enlightening the basic idea.

Axiomatic background

In [14] and [15] the axioms of Reflection (X.-XIV., [14] pp. 21.-22.; [15] pp. 17.-18.) and partly the axioms of Metric (XV., XV.*, [14] p. 40., 42.; [15] p. 34., 37.)) refer to the primitive concept of “reflection in plane”:

“X. *Any plane γ defines a one-to-one mapping on the space, which is called the reflection in plane γ .*

XI. *The reflection in plane γ transforms the points of the plane γ to themselves, the points of one of the halfspaces determined by the plane γ to the points of the other halfspace, the image points to their origin, collinear points to collinear points.*

XII. *If P and P' are corresponding points related to the reflection in plane α , and the reflection in plane γ transforms plane α to plane β , then the reflected images of P and P' obtained by the reflection in plane γ are corresponding points related to the reflection in plane β .*

XIII. *For any two distinct points in the space there is a unique plane of symmetry.*

XIV. *For any two rays starting from any point in the space there is a unique plane of symmetry.*

XV. *Corresponding to any segment there is a positive real number, which is called the length of the segment. If the unit-segment is given, then on any ray starting from any point A there is a unique point B so that the length of segment AB is a given positive number. The lengths of congruent segments are equal. Any inner point of a segment dissects this segment into two such segments, the sum of whose lengths is equal to the length of the original segment.”*

(The axiom XV.* referring to the angles is the analogue of axiom XV.)

We made some changes on the axioms of Reflection. We take the following axiom T1. as first, which is the pair of axiom X. above. T1. states the most important properties of the primitive concept. (By fixed plane we mean a plane that is fixed pointwise.)

T1. *Any reflection in plane is a line-preserving, involutory transformation of the space that has a fixed plane; and this plane separates every other point and its image.*

There follow the axioms T2., T3., T4., which are the pairs of axioms X., XIII., XIV., respectively, which state the existence and uniqueness of the primitive concept and the methods to give it.

T2. *For any plane there is a unique reflection in plane, whose fixed plane is the given one.*

T3. *For any two points there is a unique reflection in plane, in which they are corresponding points.*

T4. *For any two rays, starting from the same point, there is a unique reflection in plane, which transforms the given rays into each other.*

We used another statement as an axiom instead of axiom XII.

T5. *If two products of reflections in plane transform a space-flag into the same one, then the products are equal.*

In the dissertation we studied the connection between the axiom T5. and original axiom XII., moreover we examined that if the Dedekind's axiom of Continuity ([7]) is assumed beside the axioms of Incidence and Order, which parts of the statements involved in the axioms of Reflection can be proved. We showed that it is sufficient to postulate the following, modified axioms of Reflection:

T1.* *Any reflection in plane is a line-preserving, involutory, non-identical transformation of the space that has a fixed plane.*

T2.* *For any plane there is a reflection in plane, whose fixed plane is the given one.*

T5. *If two products of reflections in plane transform a space-flag into the same one, then the products are equal.*

Thus the statements of axioms T1., T2. can be weakened, and those of axioms T3., T4. can be deduced. (The statements of axioms of Metric can also be proved.)

Hivatkozások – References

- [1] Coxeter, H.S.M.: Introduction to Geometry, J. Wiley & Sons Inc., New York-London 1961
- [2] Coxeter, H.S.M.: Non-Euclidean Geometry (5th ed.), University of Toronto Press, 1965
- [3] Coxeter, H.S.M.: A geometriák alapjai, Műszaki Kiadó, Budapest 1973
- [4] Czapáry E. – Gyapjas F.: Matematika 9, 10 (3., 2. kiadás), Nemzeti Tankönyvkiadó Budapest, 2003
- [5] Hajnal I. – Számadó L. – Békéssy Sz.: Matematika 9, 10 (3., 2. kiadás), Nemzeti Tankönyvkiadó, 2003
- [6] Hajós Gy.: Bevezetés a geometriába (8. kiadás) Tankönyvkiadó, Budapest 1987
- [7] Hajós Gy. – Strohmayer J.: A geometria alapjai, Tankönyvkiadó, Budapest 1978
- [8] Horvay K. – Reiman I.: Projektív geometria, Tankönyvkiadó, Budapest 1980
- [9] Kárteszi F.: Ábrázoló geometria (3. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest 1966
- [10] Kerékjártó B.: A geometria alapjairól, Projektív geometria, MTA, Budapest 1944.
- [11] Kosztolányi J. – Kovács J. – Pintér K. – Urbán J. – Vincze I.: Sokszínű matematika 9, 10, Mozaik Kiadó, Szeged 2001-2002
- [12] Kovács Z.: Geometria, Az euklideszi geometria metrikus megalapozása, Debreceni Egyetem - Kossuth Egyetemi Kiadó, 2002
- [13] Martin, G.E.: Transformation Geometry (An Introduction to Symmetry), Springer-Verlag, New York 1982
- [14] Pelle B.: Geometria (2. kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest 1979
- [15] Pelle B.: Geometria (átdolg. kiadás), EKTF Líceum Kiadó, Eger 1997
- [16] Reiman I.: A geometria és határterületei, Gondolat, Budapest 1986
- [17] Veblen, O. – Young, W.: Projective Geometry I. (2nd ed.), Blaisdell Publishing Company, New York, 1938
- [18] <http://www.cabri.com>
- [19] <http://www.cinderella.de>
- [20] <http://www.euklides.hu>

(A disszertációban részletesebb Irodalomjegyzék szerepel. There is a more detailed reference-list in the dissertation.)

A szerző disszertációhoz kapcsolódó publikációi – The author's publications related to the dissertation

I. Referált folyóiratokban megjelent publikációk – Publications in referred journals

Árki T. – Krisztin Német I.: Dynamic methods in teaching geometry at different levels, *Teaching Mathematics and Computer Science* 2/1 (2004) 1-13

Krisztin Német I.: Remarks on the concept of similarity in teaching geometry in teachers' training college, *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mathematicae* 31 (2004) 107-118

Krisztin Német I.: Remarks on the concepts of affine transformation and collineation in teaching geometry in teachers' training college, *Annales Mathematicae et Informaticae* 32 (2005) 225-236

Krisztin Német I.: On the fixed point of a collineation of the real projective plane, *Közlésre elfogadva, Accepted in: Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*

II. Egyéb publikációk – Other publications

Krisztin Német I.: Megjegyzések az egybevágóság és a merőlegesség fogalmának megalapozásához a főiskolai geometriaoktatásban, *Berzsenyi Dániel Főiskola Tudományos Közleményei XIII. Természettudományok* 8. (2002) 17-37

Krisztin Német I.: Dedekind's axiom of continuity and the axioms of Reflection, IV. Vedecká konferencia doktorandov, UKF-FPV Nitra, *Edícia Prirodovec č. 106*, 314-319, Nitra 2003