

Doktori (PhD) értekezés tézisei

**MATEMATIKÁBÓL TEHETSÉGES KÖZÉPISKOLAI
TANULÓK GEOMETRIAI BIZONYÍTÁSI KÉPESSÉ-
GÉNEK VIZSGÁLATA ÉS FEJLESZTÉSE**

Győry Ákos

Témavezető: Herendiné Dr. Kónya Eszter



DEBRECENI EGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2021

A dolgozat matematikából tehetséges középiskolai tanulók bizonyítási képességének vizsgálatáról, illetve fejlesztéséről szól. A témaválasztásban nagy szerepet játszott, hogy a geometriatanulás során a diákok számos nehézségbe ütköznek, aminek korábbi kutatások szerint fő oka az iskolai tanításban keresendő. Több mint egy évtizede dolgozom középiskolai matematika-fizika szakos tanárként Magyarországon, és a saját tapasztalataim teljes összhangban vannak ezekkel az eredményekkel. Elsődlegesen speciális matematika tagozatos diákokkal végeztük el a méréseinket, akiknek én voltam a geometriatanára. Megállapításainkat a matematika iránt fogékony tanulók tanulmányozása révén tettük meg, mégis úgy véljük, hogy a kapott eredmények más matematikai oktatási forma esetén is hasznosak lehetnek.

Kutatásunk mozgatórugója az alábbi fő kutatási kérdés megválaszolása volt:

K: Hogyan fejleszthető a speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képessége?

Ezt a kérdést a kutatás egyes fázisaiban további alkérdésekkel finomítottuk, amit a fejezetek bemutatása során ismertettünk.

A dolgozat szerkezeti felépítése a következő:

Az első fejezetben megalapoztuk kutatásunk elméleti háttérét a szakirodalom tanulmányozása révén.

A dolgozat – és így ez az elméleti fejezet is – két nagy részre tagolható. Az egyik a diákok geometriai gondolkodásmódjának a fejlődésére fókuszál, amelynek a leírására a van Hiele-elméletet vettük alapul, melyről igyekeztünk kimerítő képet adni. Tematikailag a másik nagy témakör a bizonyítások vizsgálata. Arról, hogy mit is értünk bizonyításon, milyen típusait különbözteti meg a szakirodalom, részletes elemzést adtunk. A bizonyítási képesség középiskolában történő fejlesztéséről Stylianides keretrendszere segítségével nyújtottunk betekintést.

Kutatásunknak a fejlesztő tanítási kísérletet felölelő fázisában akciókutatást hajtottunk végre. Ennek alapelveiről, tulajdonságairól szintén részletesen szóltunk.

A második fejezetben a 2015-ben elkezdett és másfél évig tartó, középiskolás diákok geometriai gondolkodásmódjának a vizsgálatával foglalkoztunk. Tettük ezt azért, mert a geometriai bizonyítási képesség vizsgálata, illetve annak a fejlesztése feltételezi a diákok megfelelő geometriai gondolkodási szintjét. Kutatásunknak ebben az első fázisában főként a következő kérdést kívántuk megválaszolni:

K1: A középiskolai tanulók geometriai gondolkodásának szintje megfelelő-e néhány lépéses bizonyítások megértéséhez és kivitelezéséhez?

A fő kérdésünkhöz az alábbi alkérdéseket fogalmaztuk meg:

K1-1: Tetten érhető-e a van Hiele-szintek emelkedése a diákok életkorának előrehaladtával?

K1-2: Mutatkozik-e eltérés az ugyanolyan korosztályú, de matematikából eltérő képzésben (speciális matematika tagozaton, normál gimnáziumi, illetve nem matematikai irányultságú szakközépiskolai tanulmányokban) részt vevő tanulók van Hiele-szintje között?

K1-3: A speciális matematika tagozaton tanuló diákok van Hiele-szintje eléri-e a négyet?

Az egyes kérdésekre a hipotéziseink rendre az alábbiak voltak:

1. A diákok átlagos van Hiele-szintje az évfolyamok emelkedésével nem csökken.
2. Az egyes évfolyamokon a speciális matematika tagozaton tanuló diákok átlagos van Hiele-szintje a legmagasabb, ezt követi a normál gimnazisták átlagos van Hiele-szintje, majd a sort a szakközépiskolások átlagos van Hiele-szintje zárja.

3. A speciális matematika tagozaton tanulók átlagos van Hiele-szintje legkésőbb a tizedik évfolyamon a hármas szint fölé kerül, közelíti a négyes szintet.

A harmadik fejezetben a kutatás második fázisát írtuk le, amiben érettségi előtt álló, speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képességét vizsgáltuk egy úgynevezett bizonyítás-teszt segítségével. A kutatás első fázisának eredményei és az elmélet alapján feltételeztük, hogy a tanulók birtokában vannak a bizonyításokhoz alkalmas geometriai gondolkodásmódnak.

A mérést 2018-ban hajtottuk végre, és amely során a fő kérdésünk az alábbi volt:

K2: Mi jellemzi a végzés előtt álló speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képességét?

A fő kutatási kérdésünket az alábbi alkérdésekkel finomítottuk:

K2-1: A diákok ki tudják-e olvasni egy állítás szövegéből a feltételt és a következményt?

K2-2: A tanulók helyesen értelmezik-e a feladathoz mellékelt geometriaábrát, illetve az alapján elfogadnak-e igazolás nélkül olyan tény, ami bizonyítást igényel?

K2-3: Képesek-e a tanulók egy néhány lépésből álló bizonyítást megfelelő matematikai nyelvet használva végrehajtani?

Két tanulócsoportot választottunk ki mélyebb vizsgálatra. Mindkét csoport tagjai speciális matematika tagozatos képzésben vettek részt. A vizsgált tanulók létszáma 27 volt. A bizonyítási képesség felméréséhez Zalman Usiskin három bizonyítás-tesztjének egyikét tekintettük kiindulópontnak.

Az itt kapott eredményeket egy egész tanévet felölelő fejlesztő tanítási kísérlet megtervezéséhez használtuk fel, mely a kutatás harmadik és egyben legfontosabb fázisát jelenti. Erről szól a következő fejezet.

A negyedik fejezetben a 2018/2019-es tanévben végrehajtott fejlesztő tanítási kísérlet folyamatát és eredményeit mutattuk be. A kutatás ezen fázisának alanyai kilencedikes, speciális matematika tagozatos diákok voltak. Ebben a fázisban három kutatási kérdést tettünk fel (**K3, K4, K5**).

K3: Mi jellemzi a speciális matematika tagozatot kezdő 9. évfolyamos diákok bizonyítási képességét?

Ezt a kutatási kérdést a következő alkérdésekre bontottuk:

K3-1: A diákok ki tudják-e olvasni az állítás szövegéből a feltételt és a következményt?

K3-2: A tanulók helyesen értelmezik-e a feladathoz mellékelt geometriaábrát, illetve az alapján elfogadnak-e igazolás nélkül olyan tény, ami bizonyítást igényel?

K3-3: Képesek-e a tanulók egy néhány lépésből álló bizonyítást megfelelő matematikai nyelvet használva végrehajtani?

K3-4: A diákok felismernek-e egy „nyilvánvalóan” hamis állítást? Ennek kapcsán ismerik-e a tanulók az ellenpélda fogalmát, és tudják-e, hogy egy állítást egyetlen ellenpélda is megcáfol, amit szintén igazolni kell?

K3-5: A tanulóknak megfelelő-e az írásbeli kommunikációja, azaz milyen részletességgel közlik gondolatmenetüket?

K4: Milyen szempontok szerint építhető fel a 9. évfolyamon a bizonyítási képességet fejlesztő tanítási program?

K5: Eredményes volt-e a 9. évfolyamra kidolgozott fejlesztő tanítási program?

Ez a kutatási egység két kisebb részre tagolódik. Az első részben egy előteszt és három videóval rögzített tanóra segítségével feltérképeztük a tanulóknak az állítások szerkezetének a vizsgálata és a geometriai bizonyítások terén szerzett ismereteit. A második fázisban az első részben szerzett tapasztalatokra is alapozva egy fejlesztő tanítási kísérletet hajtottunk végre, ami célzottan a tanulók geometriai bizonyítási képességét volt hivatott magasabb szintre emelni.

A **K5** kutatási kérdést a fejlesztő tanórák tükrében az alábbiak szerint finomítottuk:

K5-1: Mennyire volt eredményes a fejlesztés az állítások szerkezetének elemzése tekintetében?

K5-2: Mennyire volt eredményes a fejlesztés a megtevesztő ábrákkal kapcsolatban?

K5-3: Mennyire volt eredményes a fejlesztés a bizonyítások konstruálására vonatkozóan?

K5-4: Mennyire volt eredményes a fejlesztés az írásbeli kommunikáció terén?

Az alábbiakban összefoglaljuk a kutatás egyes fázisaiban kapott eredményeinket.

1. K1: A középiskolai tanulók geometriai gondolkodásának szintje megfelelő-e néhány lépéses bizonyítások megértéséhez és kivitelezéséhez?

A vizsgálataink azt mutatták, hogy a speciális matematika tagozat tanulói esetében az átlagos van Hiele-szint az évfolyammal együtt emelkedik, míg a matematika iránt kevésbé érdeklődő, a tantárgyat kisebb óraszám-ban tanuló csoportoknál szisztematikus fejlődést nem mutattunk ki. A speciális matematika tagozaton tanuló diákok átlagos van Hiele-szintje mindegyik évfolyamon jelentősen magasabb volt, mint a többi képzési formában részt vevő diákoké. Továbbá a speciális matematika tagozatos tanulók átlagos van Hiele-szintje a tizedik évfolyamon már meghaladta a hármast, közelítette a négyet.

Eredményként azt kaptuk tehát, hogy az egyes oktatási formában tanuló diákok geometriai gondolkodásának szintje nem feltétlenül elegendő egy néhány lépéses bizonyítás kivitelezéséhez. A **K1** kutatási kérdésre azt a választ adhattuk, hogy a méréseinkben részt vevő speciális matematika tagozatos diákok az elmélet szerint alkalmasak lehetnek egy néhány lépésből álló érvelés megkonstruálására.

2. K2: Mi jellemzi a végzés előtt álló speciális matematika tagozatos diákok geometriai bizonyítási képességét?

A **K2-1** kutatási kérdés kapcsán megállapítottuk, hogy a diákok egy jelentős része számára magyarázatra szorul a feltétel és a bizonyítandó rész egymástól és magától az állítástól való szétválasztása. A bizonyítási képesség fejlesztése során nagy hangsúlyt kell tehát fektetni arra, hogy a diákok az állításból pontosan ki tudják olvasni a feltételt és a bizonyítandó ténytet.

A **K2-2** kutatási kérdéssel kapcsolatban a következőket mondhattuk el. Azt tapasztaltuk, hogy a tanulók egy része az ábra által sugallt tényeket indoklás nélkül fogadja el. Emiatt az ábrákra nagy figyelmet kell fordítani a tanárnak a bizonyítási képesség fejlesztése kapcsán (is). Világossá kell tenni a tanulók számára, hogy jól áttekinthető, megfelelő jelölésekkel ellátott ábrát kell készíteniük. Hangsúlyt kell fektetnie a tanárnak arra, hogy a tanulók ne fogadjanak el az ábra alapján tényeket, csakis akkor, ha azok igazságtartalmát ténylegesen belátták.

A **K2-3** kutatási kérdés esetén arra jutottunk, hogy a speciális matematika tagozatos diákok egy nagyon egyszerű, két, legfeljebb három lépésből álló bizonyítást önállóan is végre tudnak hajtani, összhangban a van Hiele-elmélettel. Viszont ennél összetettebb bizonyítás esetén már többen közülük akadályokba ütköztek, így ezeknek a diákoknak még több gyakorlásra van szükségük. A tanulókra jellemző volt általában, hogy nem indokoltak kellőképpen, egyes bizonyítási lépéseket tényként kezeltek, így meg sem említették őket.

A matematikai nyelvhasználattal kapcsolatban megállapítottuk, hogy a diákok hajlamosak arra, hogy csak az ábrába beleírva hajtják végre a bizonyítást, nem pedig megfelelő jelöléseket felhasználva kellő részletességgel fogalmazva írják le az érvelésüket.

3. K3: Mi jellemzi a speciális matematika tagozatos képzést kezdő 9. évfolyamos diákok bizonyítási képességét?

K4: Milyen szempontok szerint építhető fel a 9. évfolyamon a bizonyítási képességét fejlesztő tanítási program?

A **K3** kérdésre az egyes részkérdésekre adott válaszokkal feleltünk:

K3-1: A tanulók számára az előteszt során a matematikai állítások szerkezete még nem volt világos. Amennyiben az állítás „Ha... akkor...” formában volt megadva, a diákoknak némileg jobban sikerült kiolvasniuk az állítás szövegéből a feltételt, tehát érdemesebb eleinte a tanórákon az állításokat „Ha... akkor...” megfogalmazásban tárgyalni, de a feltétel meghatározásának a sikeressége szempontjából nem ez az egyetlen tényező. Ugyanez volt a tapasztalatunk az állítás következmény részével kapcsolatban is. A három fejlesztő tanítási óra alatt a diákok számára érthetővé vált az állítások szerkezete, de ezt a területet folyamatosan fejleszteni, erősíteni kell.

K3-2: A diákok az előteszt folyamán olyan tényeket is elfogadtak a feladathoz mellékelt ábra alapján, amik nem szerepeltek a példa feltételei között, vagy nem következtek belőle. A fejlesztő tanítási órák hatására a tanulók világosabban látták a geometriai ábráknak a bizonyításokban játszott szerepét.

K3-3: A tanulók jelentős hányada nem volt képes egy néhány lépésből álló bizonyítást megfelelő matematikai nyelvet használva végrehajtani. A diákok egy része nem látta a különbséget a bizonyítás és a szemléleten alapuló intuitív meggyőzés között. Sokkal nagyobb bizonyítási rutint kell szerezniük ahhoz, hogy megfelelő módon érezzék az érvelés során felbukkanó egy-egy matematikai tény esetén az azzal kapcsolatos indoklási igényt.

K3-4: A diákok képesek voltak felismerni egy „nyilvánvalóan” hamis állítást. A tanulók egy jelentős része viszont az előteszt tapasztalatai alapján nem tudta, hogy a cáfolatként megadott ellenpélda helyességének a megmutatása a feladatra adott bizonyítás szerves részét képezi. Többen azt is vizsgálták, hogy az általuk adott ellenpélda mely eset(ek)ben nem ad cáfolatot, azaz az állítás milyen speciális körülmények között igaz. A fejlesztő tanórák során ezek a problémák megbeszélésre kerültek, és a tanulók jobban megértették az ellenpélda szerepét. Ez a problémakör ugyanakkor felvetette az indirekt gondolkodás fejlesztésének az igényét.

K3-5: A tanulók szóbeli és írásbeli kommunikációja nem volt megfelelő, jelentős fejlesztésre szorul. Nem indokoltak kellő részletességgel, nem érezték, mely tények igényelnek hivatkozást, esetleg igazolást, és melyek nem. Többen pusztán az ábrában jelölve fejtették ki a gondolatmenetüket.

A tapasztalatok alapján megadtuk a bizonyítási képességet fejlesztő tanítás program fő szempontjait, válaszolva ezzel a **K4** kutatási kérdésre:

- állítások szerkezetének vizsgálata;
- indirekt úton történő bizonyítás képességének fejlesztése;
- más érvelésének megértése és feldolgozása, valamint saját gondolatmenet átadása;
- megtévesztő ábra alkalmazása;
- folyamatábra használata.

4. K5: Eredményes volt-e a 9. évfolyamra kidolgozott fejlesztő tanítási program?

A fejlesztő tanítási kísérlet eredményességére vonatkozó **K5** kutatási kérdést további alkérdésekre bontva több teszt kiértékelése alapján válaszoltuk meg. A tapasztalatok az alábbiakat támasztották alá:

K5-1: A tanulók helyesen értelmezték az állítások szerkezetét.

K5-2: A diákoknak a geometriai ábrákkal kapcsolatban nehézségeik voltak, további fejlesztés indokolt.

K5-3: A tanulók többsége képes volt végrehajtani két-három lépésből álló bizonyítást, de az ennél összetettebb bizonyítások esetén komoly problémákba ütköztek, így ilyen irányú fejlesztés szükséges a továbbiakban.

K5-4: A diákok írásbeli kommunikációja megfelelő volt.

Úgy ítéljük meg, hogy a speciális matematika tagozatot kezdő kilencedikes csoport alkalmas választás volt a kutatásunk szempontjából, hiszen

egyrészt a geometriai gondolkodásuk lehetővé tette a bizonyítási képességek fejlesztését, ugyanakkor a további hiányosságok kiküszöbölésére még megfelelő időtartam áll a rendelkezésre.



Nyilvántartási szám: DEENK/367/2021.PL
Tárgy: PhD Publikációs Lista

Jelölt: Györy Ákos

Doktori Iskola: Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

MTMT azonosító: 10078133

A PhD értekezés alapjául szolgáló közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (2)

1. **Györy, Á.**, Herendiné Kónya, E.: Proving skills in geometry of secondary grammar school leavers specialized in mathematics.
Ann. Math. Inform. 50, 217-236, 2019. ISSN: 1787-5021.
DOI: <http://dx.doi.org/10.33039/ami.2019.11.003>
2. **Györy, Á.**, Herendiné Kónya, E.: Development of high school students' geometric thinking with particular emphasis on mathematically talented students.
Teach. Math. Comput. Sci. 16 (1), 93-110, 2018. ISSN: 1589-7389.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2018.0448>

További közlemények

Idegen nyelvű tudományos közlemények hazai folyóiratban (1)

3. **Györy, Á.**: On the prolongation of vertical connections.
Acta Math. Acad. Paedag. Nyiregyh. 16, 73-77, 2000. EISSN: 1786-0091.

Idegen nyelvű tudományos közlemények külföldi folyóiratban (1)

4. Szilasi, J., **Györy, Á.**: A generalization of Weyl's theorem on projectively related affine connections.
Rep. Math. Phys. 53 (2), 261-273, 2004. ISSN: 0034-4877.
DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0034-4877\(04\)90014-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0034-4877(04)90014-6)
IF: 0.625





Egyéb közlemények (1)

5. Györy, Á.: A Titu-lemma

Matematika Oktatási Portál. 1-24, 2016.

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora: 0,625

A közlő folyóiratok összesített impakt faktora (az értekezés alapjául szolgáló közleményekre): 0

A DEENK a Jelölt által az iDEa Tudóstérbe feltöltött adatok bibliográfiai és tudománytermetriai ellenőrzését a tudományos adatbázisok és a Journal Citation Reports Impact Factor lista alapján elvégezte.

Debrecen, 2021.06.22.



Short thesis for the degree of doctor of philosophy (PhD)

**Examination and development of mathematically
gifted secondary school students' geometric pro-
ving abilities**

by Ákos Győry

Supervisor: Dr. Eszter Herendiné Kónya



UNIVERSITY OF DEBRECEN

Doctoral School of Mathematical and Computational
Sciences

Debrecen, 2021

The dissertation is about the examination and development of the proving abilities of secondary school students specialized in mathematics. A big role in the choice of topic was that students encounter a number of difficulties in learning geometry, for which the main reason, according to previous research, is to be found in school teaching. I have been working as a secondary school teacher of mathematics and physics in Hungary for more than ten years and my own experiences are fully in accordance with these results. We primarily performed our measurements with students specialized in mathematics, for whom I was the geometry teacher. We have made our conclusions by studying students who are receptive to mathematics, yet we believe that the results obtained may be useful for other forms of mathematical education as well.

The driving force of our research was the answer to the following main research question:

Q: How can the geometric proving abilities of students specialized in mathematics be developed?

In each phase of the research, we refined this question with additional sub-questions, which are described during the presentation of the chapters.

The structure of the dissertation is as follows:

In the first chapter, we established the theoretical background of our research by studying the literature.

The dissertation - and thus this theoretical chapter - can be divided into two major parts. One focuses on the development of students' geometric thinking, the description of which is based on the van Hiele theory, which we have tried to exhaustively detail. Thematically, the other big topic is the examination of proofs. We have given a detailed analysis of what we mean by proof, what types are distinguished in the literature. We provided insight into the development of proving abilities in secondary school using Stylianides's analytic framework.

In the phase of our research on the developmental teaching experiment, we conducted action research. We also talked in detail about the principles and properties of this.

In the second chapter, we examined the geometric thinking of secondary school students, which began in 2015 and lasted for a year and a half. We did this because the study of geometric proving abilities and their development presuppose the appropriate level of students' geometric thinking. In this first phase of our research, we mainly wanted to answer the following question:

Q1: Is the level of geometric thinking of secondary school students adequate to understand and accomplish a few-step proof?

For our main question we have formulated the following sub-questions:

Q1-1: Is there an increase in van Hiele levels as students get older?

Q1-2: Is there a difference between the Hiele level of students of the same age but participating in different mathematical education (in special mathematics, in normal secondary school or in vocational secondary school non-oriented in mathematics)?

Q1-3: Does the van Hiele level of students studying in the special mathematics education reach four?

For each question, our hypotheses were as follows:

1. The mean van Hiele level of students does not decrease with their increasing grades.
2. The mean van Hiele level of students studying in the special mathematics education in each grade is the highest, followed by the mean van Hiele level of general secondary school students, and then the line is closed by the mean van Hele level of vocational secondary school students.
3. The mean van Hiele level of students specialized in mathematics will be above level 3 in the tenth grade at the latest, approaching level 4.

The third chapter describes the second phase of the research, in which we examined the geometric proving abilities of pre-graduation students specialized in mathematics using a so-called proof test. Based on the results of the first phase of the research and the theory, we assumed that some of the students were in possession of a geometric way of thinking suitable for carrying out proofs.

The measurement was performed in 2018, during which our main question was:

Q2: What characterizes the geometric proving abilities of students specialized in mathematics who are about to graduate?

We refined our main research question with the following sub-questions:

Q2-1: Can students read the antecedent and the consequent from the text of a statement?

Q2-2: Do students correctly interpret the geometry diagram attached to the task, or do they accept a fact that requires proof without proving?

Q2-3: Are students able to perform a few-step proof using appropriate mathematical language?

Two student groups were selected for in-depth study. Members of both student groups took part in special mathematics education. The number of students examined was 27. To examine the proving abilities, we considered one of Zalman Usiskin's three proof tests as a starting point.

The results obtained here were used to design a developmental teaching experiment covering the whole school year, which is the third and most important phase of the research. This is what the next chapter is about.

In the fourth chapter we presented the process and results of the developmental teaching experiment carried out in the 2018/2019 school year. The subjects of this phase of the research were ninth-grade students specialized in mathematics. In this phase, we asked three research questions (**Q3, Q4, Q5**):

Q3: What characterizes the proving abilities of ninth grade students starting special mathematics education?

This research question was broken down into the following sub-questions.

Q3-1: Can students read the antecedent and the consequent from the text of a statement?

Q3-2: Do students correctly interpret the geometry diagram attached to the task, or do they accept a fact that requires proof without proving?

Q3-3: Are students able to perform a few-step proof using appropriate mathematical language?

Q3-4: Do students recognize an „obviously” false statement? In this regard, do students know the concept of counterexample and do they know that a statement is refuted by a single counterexample, which also needs to be proved?

Q3-5: Do students have adequate written communication, i.e., in what detail do they communicate their train of thought?

Q4: In what ways can a teaching program that develop the proving abilities be built in the ninth grade?

Q5: Was the developmental teaching program developed for the ninth grade effective?

This research unit was divided into two smaller parts. In the first part we mapped students’ knowledge of examining the structure of statements and geometric proofs using a pre-test and three videotaped lessons. In the second phase, based on also the experience gained in the first part and we conducted a developmental teaching experiment specifically designed to raise students’ proving abilities in geometry to a higher level.

Research question **Q5** was refined in light of the development lessons as follows:

Q5-1: How effective was the development in analyzing the structure of statements?

Q5-2: How effective was the development on the misleading diagrams?

Q5-3: How effective was the development in constructing proofs?

Q5-4: How effective was the development in the field of written communication?

Below there is a summary of the results obtained in each phase of the research.

1. Q1: Is the level of geometric thinking of secondary school students adequate to understand and implement a few-step proof?

Our researches showed that the mean van Hiele level of students specialized in mathematics increases with the grade, while we did not show a systematic development of the groups with less interest in mathematics, which studied mathematics in fewer lessons. The mean van Hiele level of students specialized in mathematics in each grade was significantly higher than that of students in other forms of education. Furthermore, the mean van Hiele level of students specialized in mathematics in the tenth grade had already exceeded three, approaching four.

As a result, we found that the level of students' geometric thinking in each form of education is not necessarily sufficient to perform a few-step proof. The answer to **Q1** research question was that students specialized in mathematics participating in our measurements could, according to the van Hiele theory, be suitable for creating a few-step proof.

2. Q2: What characterizes the geometric proving abilities of students specialized in mathematics who are about to graduate?

In connection with the research question **Q2-1**, we found that for a significant part of students, the separation of the antecedent and the consequent from each other and from the statement itself needs to be explained. Thus, in developing the proving abilities, great emphasis must be

placed on the fact that students can read exactly the antecedent and the consequent from the statement.

Regarding the research question **Q2-2**, we could say the following. We found that some students accept facts suggested by the diagram without proving. For this reason, the teachers need to pay close attention to the diagrams when developing the proving abilities (also). It should be made clear to students that they need to make a well-perspicuous diagram with appropriate markings. The teacher should place an emphasis on students' not accepting facts based on the diagram only if their justice has actually been proven.

In the case of **Q2-3** research question, we came to the conclusion that students specialized in mathematics can perform a very simple proof of up to three steps on their own, in line with the van Hiele theory. However, in the case of a slightly more complex proof, several of them encountered already difficulties, so these students need even more practice. Students were generally characterized by insufficient reasoning, some steps of proof were treated as facts, so they were not even mentioned.

Regarding the use of mathematical language, we found that students tend to perform the proof only by writing it in the diagram, rather than describing their reasoning in sufficient details using appropriate notations.

3. Q3: What characterizes the proving abilities of ninth grade students starting special mathematics education?

Q4: In what ways can a teaching program that develop the proving abilities be built in the ninth grade?

To **Q3** question we responded with the answers to each sub-question:

Q3-1: The structure of mathematical statements was not yet clear to students during the pre-test. If a statement was given in the form „If... then...”, students were able to read the antecedent somewhat better from the text of the statement, so it is better to discuss the statements in the

form „If... then...” first. However, this is not the only factor in the success of reading the antecedent. We had the same experience with the consequent. During the three development lessons, the structure of statements became clear to students, but this area needs to be continuously developed and strengthened.

Q3-2: During the pre-test students also accepted facts based on the diagram attached to the task that were not included in the assumptions of the task or did not follow from it. As a result of the developmental teaching lessons students saw more clearly the role of geometric diagrams in proofs.

Q3-3: A significant proportion of students were unable to perform a few-step proof using appropriate mathematical language. Some students did not see the difference between proving and intuitive convincing based on approach. They need to acquire a much greater routine of proving in order to feel properly the need for justification in the case of a mathematical fact that arises during the proving.

Q3-4: Students were able to recognize an „obviously” false statement. However, a significant proportion of students did not know from the experience of the pre-test that showing the correctness of the counterexample given as a rebuttal is an integral part of the proof given for the task. Several of them also examined in which case(s) their counterexample does not refute, ie under what special circumstances the statement is true. During development lessons, these issues were discussed and students better understood the role of the counterexample. At the same time, this issue has raised the need to develop indirect thinking.

Q3-5: Students’ oral and written communication was inadequate, it is in need of significant improvement. They did not prove in sufficient details, they did not feel which facts required reference, possibly proving, and which did not. Many of them explained their way of thinking simply by writing in the diagram.

Based on the experience, we built the further phases of the developmental teaching experiment, thus providing the answer to the **Q4** research question:

- examination of the structure of statements;
- developing the proving abilities by contrapositive;
- understanding and processing the proving of others and passing on one's own line of thought;
- use of a misleading diagram;
- use of a flow diagram.

4. Q5: Was the developmental teaching program developed for the ninth grade effective?

Q5 research question on the effectiveness of the developmental teaching experiment was answered by further sub-questions based on the evaluation of several tests. Experience showed that:

Q5-1: Students correctly interpreted the structure of statements.

Q5-2: Students had problems with geometric diagrams, further development is justified.

Q5-3: Most students were able to perform a two- or three-step proof, but in the case of more complex proofs they encountered serious problems, so further development in this direction is needed.

Q5-4: The written communication of students was adequate.

We believe that the ninth grade group starting the special mathematics education was a suitable choice for our research, as their geometric thinking allowed the development of their proving abilities, but there is still enough time to eliminate further shortcomings.



Registry number: DEENK/367/2021.PL
Subject: PhD Publikációs Lista

Candidate: Ákos Győry

Doctoral School: Doctoral School of Mathematical and Computational Sciences

MTMT ID: 10078133

List of publications related to the dissertation

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (2)

1. **Győry, Á.**, Herendiné Kónya, E.: Proving skills in geometry of secondary grammar school leavers specialized in mathematics.
Ann. Math. Inform. 50, 217-236, 2019. ISSN: 1787-5021.
DOI: <http://dx.doi.org/10.33039/ami.2019.11.003>
2. **Győry, Á.**, Herendiné Kónya, E.: Development of high school students' geometric thinking with particular emphasis on mathematically talented students.
Teach. Math. Comput. Sci. 16 (1), 93-110, 2018. ISSN: 1589-7389.
DOI: <http://dx.doi.org/10.5485/TMCS.2018.0448>

List of other publications

Foreign language scientific articles in Hungarian journals (1)

3. **Győry, Á.**: On the prolongation of vertical connections.
Acta Math. Acad. Paedag. Nyiregyh. 16, 73-77, 2000. EISSN: 1786-0091.

Foreign language scientific articles in international journals (1)

4. Szilasi, J., **Győry, Á.**: A generalization of Weyl's theorem on projectively related affine connections.
Rep. Math. Phys. 53 (2), 261-273, 2004. ISSN: 0034-4877.
DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/S0034-4877\(04\)90014-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0034-4877(04)90014-6)
IF: 0.625





**UNIVERSITY of
DEBRECEN**

UNIVERSITY AND NATIONAL LIBRARY

UNIVERSITY OF DEBRECEN

H-4002 Egyetem tér 1, Debrecen

Phone: +3652/410-443, email: publikaciok@lib.unideb.hu

Other publications (1)

5. Györy, Á.: A Titu-lemma.

Matematika Oktatási Portál. 1-24, 2016

Total IF of journals (all publications): 0,625

Total IF of journals (publications related to the dissertation): 0

The Candidate's publication data submitted to the iDEa Tudóstér have been validated by DEENK on the basis of the Journal Citation Report (Impact Factor) database.

22 June, 2021

