SCHWIERIGKEITEN IM NICHTFACHSPEZIFISCHEN FREMDSPRACHIGEN MATHEMATIKUNTERRICHT

Egyetemi doktori (PhD) értekezés

Szerző: Szűcs Kinga

Témavezető: Dr. Vásárhelyi Éva

DEBRECENI EGYETEM
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2009

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem TTK Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola Matematika Didaktika programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem TTK doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2009 . . . .

Szűcs Kinga

Tanúsítom, hogy *Szűcs Kinga* doktorjelölt 2003 - 2009 között a fent megnevezett Doktori Iskola Matematika Didaktika programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2009. . . . .

Dr. Vásárhelyi Éva

Danksagung

An erster Stelle gilt mein Dank Frau Prof. Dr. Éva Vásárhelyi für die langjährige Betreuung dieser Arbeit, für fachlichen Rat sowie unzählige lehrreiche und anregende Diskussionen. Herzlich bedanke ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Bernd Zimmermann für seine beständige Diskussions- und Hilfsbereitschaft und sein sorgfältiges sowie ermutigendes Korrekturlesen. Darüber hinaus möchte ich mich bei den Mitarbeitern des Instituts für Methodenlehre und der deutschsprachigen Ausbildung an der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus der Wirtschaftshochschule Budapest bedanken, die mir jederzeit mit Rat und Tat zur Seite standen. Insbesondere habe ich Frau Dr. Annamária Dersi, der ehemaligen Leiterin der deutschsprachigen Ausbildung für ihre unermüdliche Unterstützung zu danken, die sich nicht nur auf die Beschaffung zahlreicher Informationen, sondern auch auf die Weitergabe ihrer wertvollen langjährigen Erfahrung hinsichtlich der deutschsprachigen Ausbildung bezog. Mein besonderer Dank gilt auch Frau Dr. Jenőné Horváth, der Leiterin des Instituts für Methodenlehre, die mich bei allem Forschungsvorhaben in jeder Hinsicht unterstützte. Bei Kollegen an der Eötvös-Loránd-Universität Budapest, an der Paris-Lodron-Universität Salzburg und an der Friedrich-Schiller-Universität Jena bedanke ich mich für ihre Ratschläge und Fachgespräche, mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Lutz Kohl für sein gründliches Korrekturlesen und seine motivierenden Anmerkungen.

An den empirischen Untersuchungen nahmen Studierende der deutsch- und ungarischsprachigen Ausbildung der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus der Wirtschaftshochschule Budapest bzw. Schüler der multinationalen Schülerakademien in Metten teil, ihnen allen danke ich für ihre Einsatz- und Hilfsbereitschaft. Zu Dank bin ich Frau Erika Vári und Herrn Viktor Sebő für ihre Teilnahme an einer empirischen Fallstudie in Jena verpflichtet.

Für die Schaffung besonders günstiger äußerer Umstände bin ich der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus der Wirtschaftshochschule Budapest, der Haniel Stiftung, insbesondere Herrn Dr. Ruprecht Antes und Frau Dr. Waltraud Sennebogen, und der Fakultät für Mathematik und Informatik der Friedrich-Schiller-Universität Jena äußerst dankbar.

Ohne die Rücksichtnahme, Ermutigung und emotionale Unterstützung meiner Familie und meiner Freunde wäre die Erstellung dieser Arbeit nicht möglich gewesen, wofür ich mich bei ihnen allen ganz herzlich bedanke.

Der Kollege und beinahe Zweitbetreuer dieser Arbeit, Herr Prof. Dr. Karl Josef Parisot verstarb während der Erstellung dieser Dissertation, seinem Gedenken sei diese Arbeit gewidmet.

Inhaltsverzeichnis

„Die Grenzen meiner Sprache
bedeuten die Grenzen meiner Welt."
Wittgenstein

1. Begründung der Themenwahl

1. 1. Bilingualer Fachunterricht[1]: Diskrepanz zwischen Theorie und Praxis

Bilingualen Fachunterricht gibt es auf allen Kontinenten, es gibt kaum ein Land in der Welt, in dem nicht in irgendeiner Form bilingual oder sogar multilingual unterrichtet wird. Man denke nur an vielsprachige Länder in Südafrika, in denen teilweise mehrere hundert Sprachen als Muttersprache gesprochen werden, wobei die Amtssprache Englisch ist, oder an Indien, mit weit über 100 verschiedenen Sprachen, die überdies vier verschiedenen Sprachfamilien angehören, wo allerdings überwiegend auf Englisch bzw. auf Hindi unterrichtet wird, an die französischsprachigen Immersionsprogramme[2] in Kanada, oder an die zahlreichen deutschen Minderheitenschulen in Ungarn. Wie diese Beispiele zeigen, können die Gründe – u. a. Migration, Vorhandensein von Minderheiten, Mehrsprachigkeit des Landes – sowie die Ziele – Integration, Erweiterung der Fremdsprachenkenntnisse, Verbesserung des fachsprachlichen Wortschatzes oder Sprachpflege – zwar unterschiedlich sein, es ist aber nicht zu leugnen, dass der bilinguale Unterricht seit geraumer Zeit in der schulischen Bildung präsent ist. In Europa wurde durch die Erweiterung der Europäischen Union und durch das wirtschaftliche, kulturelle und wissenschaftliche Zusammenwachsen des Kontinents die Verbreitung der bilingualen Bildungsformen in den letzten Jahren immer stärker gefördert. So auch in Ungarn, wo in den letzten zwei Jahrzehnten zusätzlich zum bereits vorhandenen Bildungsangebot der ethnischen Minderheiten an weit über 100 Bildungsinstituten vom Kindergarten bis zur Hochschule bilinguale Bildungsgänge errichtet worden sind[3]. Umso merkwürdiger ist es, dass die wissenschaftlichen Grundlagen trotz der weit verbreiteten Praxis bis heute fehlen, es fehlt nicht nur eine Lerntheorie[4], sondern auch eine allgemeine

[1] Der Begriff bilingualer Unterricht wird in der vorliegenden Arbeit in einem weiten Sinne verwendet, er bezieht sich auf jede Form von Unterricht, bei dem das Unterrichtsgeschehen teilweise oder ganzheitlich in einer Sprache abläuft, die nicht die Muttersprache des Lernenden ist. Weitere Bedeutungsaspekte des Begriffs bzw. Zusätzliches zur Terminologie findet man im Unterkapitel 4. 6. Bilingualer Unterricht [S. 49].

[2] Die Immersion ist eine in Kanada angewendete Form des bilingualen Unterrichts, siehe Weiteres dazu im Unterkapitel 4. 6. Bilingualer Unterricht [S. 49].

[3] Bereits das Verzeichnis der Grundschulen, Gymnasien und berufsbildenden Schulen mit bilingualem Zweig aus dem Jahr 2001 enthält 155 verschiedene Einträge. Studiengänge und bilinguale Kindergärten sind nicht einbegriffen. Vgl. Oktatási és Kulturális Minisztérium, 2001.

[4] *„Sofern ich zu erkennen vermag, unterliegt dem bilingualen Sachfachunterricht bisher noch keine auf ihn zugeschnittene Theorie des Lernens […] Jede Form von praktischem*

Didaktik, und es fehlen die einzelnen Fachdidaktiken[5] hinsichtlich des bilingualen Fachunterrichts. Hochschuldidaktiker formulierten bezogen auf den bilingualen Fachunterricht die Kritik, *„dass die Unterrichtspraxis ohne einen klar definierten didaktisch-methodischen Bezugsrahmen stattfindet.“*[6]

Dass jedoch eine eigenständige Didaktik des bilingualen Fachunterrichts notwendig ist, steht mittlerweile außer Zweifel. Die ursprünglichen Bemühungen, die darauf gerichtet waren, die didaktischen Eckpunkte des bilingualen Fachunterrichts entweder allein aus der Fach- oder aus der Fremdsprachendidaktik abzuleiten, sind gescheitert. Heutzutage ist man sich darüber einig, dass für den bilingualen Fachunterricht durch eine echte Zusammenarbeit zwischen Fach- und Fremdsprachendidaktikern und durch Heranziehen einer integrativen Sichtweise eine eigenständige Didaktik zu entwickeln ist[7]. Da es aber beim bilingualen Fachunterricht primär um das jeweilige Fach geht, spielt bei dieser Integration die jeweilige Fachdidaktik eine maßgebende Rolle. Otten und Wildhage[8] haben dies folgendermaßen zusammengefasst: *„Integration von Inhalt und Sprache bedeutet für das bilinguale Sachfach die Verwendung der Fremdsprache als Arbeitssprache. Ausgangs- und Bezugspunkt didaktischer Planung ist damit zunächst die Fachdidaktik des Sachfaches. Fremdsprachendidaktische Konzepte und Methoden unterstützen die fachspezifischen Lehr- und Lernprozesse.“* Somit haben die jeweiligen Fachdidaktiken die Aufgabe, unter Berücksichtigung der Fremdsprachendidaktik ein eigenes Konzept für den bilingualen Fachunterricht herauszuarbeiten.

1. 2. Bilingualer Mathematikunterricht

Unter bilingualem Mathematikunterricht[9] wird im Einklang mit dem Vorherigen jede Form von Unterricht verstanden, bei der Mathematik zum Teil oder ganzheitlich in einer Sprache unterrichtet wird, die nicht die Muttersprache der Lernenden ist. Er ist also eine spezielle Variante des bilingualen Fachunterrichts und im Sinne der obigen Behauptungen ist es in erster Linie eine mathematikdidaktische Aufgabe, für ihn einen didaktischen Bezugsrahmen zu entwickeln. Dabei soll in Betracht gezogen werden, dass die Verwendung einer Fremdsprache als Arbeitssprache im Mathematikunterricht in mindestens dreierlei Hinsicht Auswirkungen auf den ma-

---

unterrichtlichem Handeln … bedarf einer unterliegenden Theorie, durch die abgesichert wird, daß das, was im Klassenzimmer geschieht, auch lerntheoretisch sinnvoll ist, daß es pädagogisch angemessen ist und zum gewünschten Ergebnis führt.“ (Wolff, 1997, zitiert nach Bach/Niemeyer, 2002, S. 13-14)

[5] Vgl.:*„Zwar gibt es, wie eingangs gesagt, weder einen Konsens über die Methoden des fremdsprachlichen Unterrichts noch eine Methodik des fremdsprachlich durchgeführten Sachfachunterrichts.”* (Bach/Niemeyer, 2002, S. 17)

[6] Otten/Wildhage, 2003, S. 22

[7] Vgl.: *„…sehen wir augenblicklich die zentrale Aufgabe darin, sprachliche und sachfachliche Bildung zu integrieren und damit zu einer eigenständigen Didaktik des BU (mit ihren unterschiedlichen fachlichen wie sprachlichen Ausprägungen und Varianten) zu kommen.*“ (Abendroth-Timmer et al., 2004, S. 13) Anmerkung: Die Abkürzung BU wird im Text für bilingualen Unterricht verwendet.

[8] In: Otten/Wildhage, 2003, S. 24

[9] Der Begriff wird im Unterkapitel 4.8. Bilingualer Mathematikunterricht [S.56] ausführlich definiert.

thematischen Lehr- und Lernprozess haben kann: Sie kann erstens die kognitive Verarbeitung beim mathematischen Wissenserwerb beeinflussen (z.B. durch zusätzliche Reflexion des eigenen Lernprozesses), ferner können eventuelle Unterschiede zwischen bi- und monolingualen mathematischen Wissenserwerb dazu führen, dass der bilinguale Mathematikunterricht anders geplant, gestaltet und evaluiert werden soll als der monolinguale, schließlich stellt der bilinguale Mathematikunterricht komplexe Anforderungen an den Lehrer, was Auswirkungen auf die Lehreraus- und Fortbildung mit sich bringen kann. Es ist eine Aufgabe der mathematikdidaktischen Forschung, diese Aspekte unter die Lupe zu nehmen und anhand ihrer Ergebnisse bzw. auf die Fremdsprachendidaktik Bezug nehmend eine eigene Didaktik für den bilingualen Mathematikunterricht herauszuarbeiten.

Die Analyse des bilingualen Mathematiklernens aus fachlicher, sprachlicher und psychologischer Sicht kann nicht nur für den bilingualen Unterricht hilfreich sein, sondern sie kann auch dem monolingualen Mathematikunterricht neue Impulse geben. Durch die Aufdeckung und ausführliche Analyse der Gründe für Verstehensschwierigkeiten im bilingualen Bereich kann ein tieferer Einblick in die kognitiven Prozesse des Mathematiklernens gewonnen werden. Kontrastive Analysen, die sich darauf richten, Unterschiede zwischen bi- und monolingual angeeigneten mathematischen Kenntnissen aufzudecken, können über mathematische Begriffsbildung weitere Auskunft geben, aber auch Rolle und Funktion der Sprache im mathematischen Wissenserwerb neu beleuchten. Der bilinguale Mathematikunterricht ist außerdem besonders geeignet, weitere psychologische Aspekte, wie Einfluss der Reflexion und der Motivation auf das Mathematiklernen, näher zu untersuchen. Sprachliche Verschiedenheiten beispielsweise bei der Herkunft oder bei dem Gebrauch der Fachwörter, aber auch bei der Differenzierung durch das Fachvokabular geben Anlass, sich mit den Spezifika der mathematischen Fachsprache auseinanderzusetzen und lenken die Aufmerksamkeit auf die Wichtigkeit einer sorgfältigen, bewussten sprachlichen Arbeit auch im monolingualen Mathematikunterricht. Eine fachliche Herangehensweise ist m. E. ebenfalls unerlässlich. Durch einen kontrastiven Vergleich und Reflexion der fachlichen Inhalte im bi- und monolingualem Unterricht können Unterschiede in der mathematischen Tradition der verschiedenen Länder, im Aufbau einzelner Themenbereiche oder in der Gewichtung mathematischer Inhalte aufgedeckt werden, wodurch weiteres Potenzial für den monolingualen Unterricht ermittelt, bzw. eine viel bewusstere und differenziertere Handlung des Lehrers im rein muttersprachlichen Mathematikunterricht gefordert werden kann. Insgesamt lässt sich also feststellen, dass aus dem bilingualen Mathematikunterricht wichtige Rückschlüsse auf den monolingualen gemacht werden können und sollen, der bilinguale Mathematikunterricht zeichnet sich genau durch seine Besonderheiten als wichtiges Forschungsfeld aus.

Zuletzt soll noch erwähnt werden, dass Forschungsergebnisse zum bilingualen Mathematikunterricht auch als Grundlage für bildungspolitische Entscheidungen dienen können. Bei der Einrichtung neuer bilingualer Bildungsgänge können derartige Resultate entscheidend dafür sein, ob und inwieweit der bilinguale Mathematikunterricht den jeweiligen normativen Zielsetzungen des bilingualen Unterrichts bzw. den an ihn gestellten Forderungen genügen kann.

Wie wünschenswert es auch aus der Sicht der Mathematikdidaktik, der bilingualen Unterrichtspraxis sowie der Bildungspolitik ist, sich mit dem bilingualen Mathematikunterricht systematisch wissenschaftlich auseinanderzusetzen, die Erforschung des bilingualen Mathematikunterrichts ist bei weitem noch nicht etabliert. Es gibt bislang kein eingeständiges Forschungsfeld „bilingualer Mathematikunterricht”, und es fehlt insbesondere die Verknüpfung und Reflexion der bisher punktuell geleisteten wissenschaftlichen Arbeit. Wie Maier und Schweiger formulierten: *„Es ist schade, daß viele dieser Bemühungen immer noch als Projekte einzelner Lehrer oder Pädagogen oder kleiner engagierter Gruppen erscheinen, die weltweite Vernetzung und die kulturpolitische Umsetzung aber noch weiterentwickelt werden müßte.”* (Maier/Schweiger, 1999, S. 74) Hierbei könnte insbesondere Ungarn eine Pionierarbeit leisten. Der Status des bilingualen Fachunterrichts im jeweiligen Bildungssystem – dies trifft auf den bilingualen Mathematikunterricht verstärkt zu – ist nämlich von Land zu Land unterschiedlich[10]. In Ungarn gibt es aber auf jeder Stufe der schulischen Ausbildung von der Grundschule bis zur Hochschule ein reiches Angebot an bilingualen Bildungsgängen – sowohl mit als auch ohne Anknüpfung an eine ethnische Minderheit –, bei denen Mathematik bevorzugt in den bilingualen Kanon aufgenommen wird. Dank also dem günstigen institutionellen Hintergrund bietet sich insbesondere in Ungarn die Möglichkeit an, den bilingualen Mathematikunterricht langfristig zum Gegenstand der wissenschaftlichen Forschung zu machen.

1. 3. Besonderheiten der nichtfachspezifischen Mathematikausbildung im Hochschulbereich

Der nichtfachspezifische Mathematikunterricht an Hochschulen – man denke nur an das Nebenfach Mathematik in den wirtschaftlichen, naturwissenschaftlichen oder in den technischen Studienrichtungen – ist eine in mehrerer Hinsicht besondere Form des Mathematikunterrichts. Er setzt sich neben der Förderung des analytischen Denkens in erster Linie zum Ziel, die Mathematik als ein Werkzeug oder Modellsystem zu vermitteln, welches für das jeweilige Fach (später für den jeweiligen Beruf) von besonderer Relevanz ist. Der Akzent liegt dabei auf der Vermittlung in der Praxis gut anwendbarer Kenntnisse, auf der mathematischen Modellierung berufsspezifischer Probleme bzw. auf der der Wertschätzung der Mathematik als ein wichtiges Mittel zum Problemlösen[11].

Als solcher unterscheidet sich also der nichtfachspezifische höhere Mathematikunterricht sowohl in seiner Zielsetzung als auch in seiner mathematischen Tiefe vom mittleren aber auch vom höheren fachspezifischen Mathematikunterricht (wie z. B. Mathematiklehrer-, oder Mathematikerausbildung). Wegen des starken Bezugs zum Beruf beschränkt er sich auf einzelne fachrelevante Bereiche der Mathematik (beispielsweise in der wirtschaftlichen Ausbildung auf Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung), so ist er in seiner Breite nicht mehr so umfassend und allgemein wie die Schulmathematik, innerhalb dieser Bereiche aber tiefer und ausführlicher. Dem nichtfachspezifischen höheren Mathematikunterricht dient jedoch die Schulmathematik als Grundlage, die mathematischen Begriffe, die in der Schule gebildet wurden, werden nicht nur benutzt, sondern auch weiter differenziert und sie gelten

[10] Die europäische Situation hinsichtlich des bilingualen Fachunterrichts wird im Unterkapitel 4. 6. Bilingualer Unterricht [S. 49] ausführlich erläutert.
[11] Siehe dazu auch Curdes, 2008, S. 24.

als Basis für weitere Begriffsbildung. Im fachspezifischen Mathematikunterricht werden dahingegen sowohl in der Breite als auch in der Tiefe viel umfassendere Kenntnisse vermittelt.
In einer derart besonderen Situation den Einfluss der Fremdsprache auf den mathematischen Lehr- und Lernprozess zu untersuchen, ist m. E. aus mehreren Aspekten günstig für die didaktische Forschung. Die vorhandene mathematische Basis in der Muttersprache ermöglicht, mathematische und fremdsprachliche Schwierigkeiten etwas müheloser voneinander zu trennen. Ist nämlich diese Basis teilweise oder ganzheitlich auch in der Fremdsprache verfügbar, so ist es mühsamer zu entscheiden, ob eine bestimmte Verstehensschwierigkeit sprachlicher oder mathematischer Natur ist. Die fremdsprachliche Manipulation an in der Muttersprache verfügbaren mathematischen Begriffen (so z. B. die Verallgemeinerung des Folgenbegriffs) gibt in den Prozess der Begriffsbildung Einblick. Es ist zwar sicher von Nachteil, dass die Vorlesungen und die überfüllten Seminargruppen im Vergleich mit der Schule weniger Möglichkeit zur persönlichen Betreuung und zur Verfolgung individueller Lernfortschritte bieten, zusammenfassend kann jedoch festgestellt werden, dass sich der nichtfachspezifische Mathematikunterricht an Hochschulen als ein geeignetes Feld zur Untersuchung des bilingualen Mathematikunterrichts erweist.

1. 4. Persönliches Interesse

Die intensive Beschäftigung mit den Schwierigkeiten des fremdsprachigen Mathematikunterrichts und in Verbindung damit die Anfertigung der vorliegenden Arbeit wurde neben dem in der wissenschaftlichen Forschung entstandenen Bedürfnis auch durch eigene Erfahrungen motiviert. Die erste Konfrontation mit diesen Problemen erfolgte für mich im Studienjahr 1999/2000 in Gießen, wo ich im Rahmen eines Auslandsprogramms ein Jahr lang Mathematik studierte. Trotz ausgeprägter Deutschkenntnisse bedeuteten die Vorlesungen eine große Herausforderung für mich, da das Nachvollziehen der Lehrveranstaltungen eine andauernde Gegenüberstellung des deutschen und ungarischen mathematischen Fachvokabulars bzw. des Fachwortgebrauchs erforderte. Ich musste feststellen, dass es Unterschiede u. a. in der Tradition[12], in der Differenzierung[13], im Wortgebrauch[14] und in der Herkunft der Fachwörter[15] gibt. So ist es für mich erstmals als Lernende klar geworden, dass selbst Mathematik durch die vermittelnde Sprache eine eigene Schattierung gewinnt und Mathematiklernen in einer Fremdsprache mit zusätzlichen Schwierigkeiten verbunden ist.

---

[12] Beispielsweise zählt in Ungarn die Null zu den natürlichen Zahlen, während dies in Deutschland überwiegend nicht zutrifft.

[13] *´négyzet alapú egyenes hasáb´* ist z. B. ein spezieller Quader, wofür das Deutsche keine eigene Bezeichnung hat.

[14] Z. B. $\binom{n}{k}$ liest man im Deutschen als *´n über k´*, im Ungarischen jedoch als *´n alatt a k´*, also als *´k unter n´*.

[15] Wörter wie *´Menge´, ´Funktion´, ´Ursprung´, ´Produkt´, ´Fakultät´* sind aus der Alltagssprache bekannt, während die entsprechenden ungarischen Bezeichnungen *´halmaz´, ´függvény´, ´origó´, ´szorzat´,´ faktoriális´* eindeutig Fachbegriffe der Mathematik sind, ohne eigenständige umgangssprachliche Bedeutung.

Nach dem Abschluss des Studiums erteilte ich als wissenschaftliche Assistentin sechs Jahre lang Mathematikunterricht in ungarischer und deutscher Sprache an der Wirtschaftshochschule Budapest und stieß Tag für Tag auf mehr Unverständnis in der Mathematik in der fremdsprachlichen Ausbildung als im muttersprachlichen Unterricht. Die Schwierigkeiten meiner Studenten beim Verstehen mathematischer Konzepte im bilingualen Unterricht haben mich für Fragen nach Gründen sensibilisiert und mein Interesse geweckt, zu untersuchen, worin sich eigentlich das Mathematiklernen in der Fremdsprache von dem in der Muttersprache unterscheidet. Meine Motivation für die Forschung entstand also aus dem Bedürfnis, mit Hilfe wissenschaftlicher Mittel die intuitiv wahrgenommenen Probleme greifbar zu machen und dadurch den bilingualen Mathematikunterricht effektiver und nachhaltiger gestalten zu können.

2. Zielsetzung der vorliegenden Arbeit

An der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus der Wirtschaftshochschule Budapest (bis Dezember 1999: Hochschule für Handel, Gastronomie und Tourismus) gibt es seit anderthalb Jahrzehnten fremdsprachliche (d.h. deutsch- und englischsprachige) Ausbildung. Wirtschaftsmathematik wird Studenten aus allen Fachrichtungen der muttersprachlichen Ausbildung im Grundstudium zwei Semester lang in einem Zeitrahmen von drei Semesterwochenstunden (1 Vorlesung+2 Übung) unterrichtet. In den fremdsprachlichen Ausbildungen wurde der wirtschaftsmathematische Unterricht bis zur Einführung des Leistungspunktesystems im Studienjahr 2002/03 in zwei Semesterwochenstunden (2 Vorlesungen) ebenfalls im Grundstudium erteilt. In der deutschsprachigen Ausbildung wurde im Studienjahr 2001/02 zusätzlich eine fakultative Übungsstunde pro Woche angeboten. Seit der Einführung des Leistungspunktesystems läuft die wirtschaftsmathematische Ausbildung in jeder Fachrichtung und in jeder Sprache parallel nebeneinander, also in einem Zeitrahmen von drei Semesterwochenstunden (1 Vorlesung+2 Übung).
Die durchgeführte Forschungstätigkeit bestand aus zwei einander ergänzenden Teiltätigkeiten:

1. Erstellung, Erprobung und Evaluierung von Unterrichtsmaterialien für die bis zur Einführung des Leistungspunktesystems die Vorlesung begleitenden fakultativen, seitdem jedoch verpflichtenden Mathematikseminare der deutschsprachigen Ausbildung. Erstellung, Erprobung und andauernde Überprüfung eines modifizierten Lehrplans, von Unterrichtmaterialien und eines modifizierten Leistungsnachweissystems für die deutschsprachige Ausbildung im Rahmen der Umstrukturierung der bisherigen Studienangebote zu Bachelor-Studiengängen.

2. Durchführung von theoretischen und empirischen Forschungen auf diesem Gebiet nach der Recherche ungarischer und internationaler Forschungsergebnisse hinsichtlich des didaktischen Problemnetzes des bilingualen Mathematikunterrichts. Dies beinhaltete einerseits die kritische Auseinandersetzung mit den von anderen publizierten Ergebnissen bzw. deren Weiterentwicklung, andererseits aber die adaptive Anwendung empirischer Forschungsmethoden aus der Mathematikdidaktik im bilingualen Kontext.

Die genannten Tätigkeiten wurden durch weitere Erfahrungen im bilingualen Bereich ergänzt. Die unter der Schirmherrschaft des deutschen Bundespräsidenten stehende Deutsche Schülerakademie, die auch auf eine Vergangenheit von 15 Jahren zurückblicken kann, und die sich die Förderung von besonders begabten Schülern zum Ziel setzt, organisiert seit dem Jahr 2003 eine multinationale Schülerakademie für Schüler aus Ost-Mittel Europa. Hochbegabte Schüler aus bilingualen Schulen bekommen die Möglichkeit, sich knapp drei Wochen lang in einem selbst gewählten Themenbereich zu vertiefen. Arbeitssprache der Akademie ist Deutsch. Die in den Jahren 2005/2006/2007 von mir geleiteten Mathematikkurse boten sich als eine besonders gute Chance an, meine beide Forschungstätigkeiten – also sowohl die Erstellung, Erprobung und Evaluierung von bilingualen Mathematikveran-

staltungen als auch die Übertragung und Anwendung empirischer Forschungsmethoden – in einer hinsichtlich der Zielsetzung, des Zeitaufwands, der Intensität, aber auch bezüglich der fremdsprachlichen und mathematischen Vorkenntnisse und der Altersgruppe von der gewohnten abweichenden Unterrichtsituation auszuüben und dadurch die bis dahin gewonnenen Forschungsergebnisse zu differenzieren. Eine weitere Ergänzung der Forschung bedeuteten die an der Friedrich-Schiller-Universität Jena gesammelten Erfahrungen und die hier unter ausländischen Studenten durchgeführte Fallstudie.
Der Hauptakzent der Forschung lag auf der didaktischen Analyse des auf muttersprachlichem Basiswissen basierenden fremdsprachlichen Mathematikunterrichts. Meine Leitfragen, die ich zu beantworten bzw. zu deren Entscheidung ich diagnostische Verfahren zu erarbeiten mich bemüht habe, waren folgende:

- Sind überhaupt, bzw. auf welche Art und Weise sind mathematische, sprachliche und psychologische Komponenten des bilingualen mathematischen Lernprozesses voneinander zu trennen?
- In welchen Fällen verweisen sprachliche Schwierigkeiten auf mangelnde mathematische (und nicht sprachliche) Kenntnisse?
- Wie beeinflusst die Verwendung einer Fremdsprache im mathematischen Lehr- und Lernprozess die begrifflichen und psychologischen Aspekte der angeeigneten mathematischen Kenntnisse?
- Gibt es spezielle Schwierigkeiten beim bilingualen Mathematiklernen, die eindeutig der Verwendung einer Fremdsprache im Unterricht zuzuschreiben sind? Wie können diese behoben werden?
- In welchen Situationen/Themenbereichen kann die Verwendung einer Fremdsprache als vorteilhaft für den Mathematikunterricht gelten?

3. Forschungsmethoden

Die bei der Forschungstätigkeit verwendeten Methoden waren insbesondere die folgenden:

- Recherche der einschlägigen einheimischen und internationalen Fachliteratur, bzw. Interpretation und Auswertung der publizierten Ergebnisse.
- Teilnahme und Vortrag an in- und ausländischen Konferenzen.
- Erstellung, Erprobung und Evaluierung von Unterrichtsmaterialien und von Aufgabensammlungen für die Mathematikseminare der deutschsprachigen Ausbildung an der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus der Wirtschaftshochschule Budapest.
- Modifizierung des Lehrplans, der Unterrichtmaterialien und des Leistungsnachweissystems für die deutschsprachige Ausbildung infolge der Umstrukturierung der bisherigen Studienangebote zu Bachelor-Studiengängen.
- Pädagogische Beobachtung und Datensammlung.
- Untersuchungen mit Kontrollgruppe und deren Auswertung.
- Fallstudie und Interview mit Studenten, die am bilingualen Mathematikunterricht teilgenommen haben.
- Planung, Erprobung und Evaluierung von Ergänzungsunterricht für die Begabtenförderung im bilingualen Kontext.
- Konsultation von Kollegen, die bilingualen Fachunterricht, bzw. bilingualen Mathematikunterricht erteilen.
- Recherche, Anwendung und Auswertung von für den deutschsprachigen Fachunterricht[16] entwickelten Unterrichtsmethoden.
- Sprachliche Analyse und kontrastiver Vergleich von mathematischen Fachtexten in deutscher und ungarischer Sprache, Lehrbuchanalyse.

[16] Der Begriff „deutschsprachiger Fachunterricht“ oder abgekürzt DFU wird für bilingualen Fachunterricht verwendet, also für einen Fachunterricht, der größtenteils in deutscher Sprache abläuft, die aber nicht die Muttersprache der Lernenden ist. Siehe Weiteres dazu in Leisen, 2004.

4. Theoretischer Rahmen

Im Folgenden werden diejenigen bildungspolitischen, mathematischen, kognitionspsychologischen, pädagogischen und fremdsprachendidaktischen Ansätze kurz zusammengefasst, die mir nicht nur als Richtlinie für den bilingualen Mathematikunterricht bei der ausgeübten pädagogisch-didaktischen Lehrtätigkeit, sondern auch als Ausgangspunkt für die theoretische sowie empirische Forschung gedient haben. Es wird also versucht, das komplexe Wirkungssystem in seinen Eckpunkten darzustellen, in dessen Spannungsfeld der bilinguale nichtfachspezifische Mathematikunterricht an Fachhochschulen steht. Thematisiert werden u. a. Zielsetzungen der Hochschulausbildung, Zielsetzungen des Mathematikunterrichts, Aufgabe und Ort des Mathematikunterrichts in der nichtfachspezifischen Hochschulausbildung, Charakteristika des bilingualen Fachunterrichts, insbesondere die des bilingualen Mathematikunterrichts, der Kompetenzbegriff, mathematische und fremdsprachliche Kompetenzen, kognitive Komponenten des mathematischen Wissens und der Themenbereich Analysis.

4. 1. Zielsetzungen in der Hochschulausbildung

In diesem Unterkapitel wird gezeigt, dass heutzutage die Hochschulausbildung durch die Notwendigkeit geprägt ist, neben fachlichen Qualifikationen sog. Schlüsselkompetenzen und weitere, im Berufsleben erforderliche Zusatzqualifikationen zu fördern.

Die an den Universitäten und Fachhochschulen durchgeführte Lehrtätigkeit zielt insbesondere auf die Ausbildung von Fachkräften für die unterschiedlichen Branchen. Diese Tätigkeit wird neben Charakteristika des jeweiligen Fachgebiets sowohl inhaltlich als auch strukturell in erster Linie durch zwei wichtige – nicht unbedingt voneinander unabhängige – Faktoren beeinflusst: durch das Bildungssystem der Gesellschaft und durch die Qualifikationsanforderungen des Arbeitsmarktes. Die Hochschulausbildung hängt mit dem jeweiligen Bildungssystem nicht nur in der Hinsicht zusammen, dass sie ihre Studenten aus den besten Teilnehmern der mittleren Bildung auswählt, sondern als Teil dieses Bildungssystems auch dessen Werte akzeptiert und im Einklang damit langfristig gleiche allgemeine Lehr- und Lernziele verfolgt. Die Hochschulausbildung soll außerdem die Erwartungen des Arbeitsmarktes berücksichtigen und Fachkräfte ausbilden, die den an ihnen gestellten Anforderungen genügen können.
Die wirtschaftlichen, gesellschaftlichen und politischen Veränderungen der letzten Jahre hatten wesentliche Auswirkungen auf die Arbeitswelt und demzufolge auf die an die zukünftigen Fachkräfte gestellten Qualifikationsanforderungen. Weiterhin haben sie – neben pädagogisch-psychologischen Erkenntnissen – zum Teil auch dazu beigetragen, dass unsere Vorstellung vom Wissen und dadurch die Inhalte der Bildung in den letzten Jahren europaweit stark modifiziert wurden. Da die Verände-

rungen in beiden Bereichen direkten Einfluss auf die Hochschulausbildung hatten[17], werden diese im Folgenden kurz dargestellt und ihre Auswirkungen auf den Hochschulbereich thematisiert.

4. 1. 1. Veränderungen der Wissenskonzeption[18] – neue Zielsetzungen im Unterricht

Als Ergebnis eines langjährigen Prozesses, bei dem gesellschaftlich-wirtschaftliche Veränderungen, psychologische Erkenntnisse und bildungspolitische Überlegungen der letzten Jahrzehnte eine Rolle gespielt haben[19], ist es in der Bildung um die Jahrtausendwende europaweit zu einem Perspektivwechsel gekommen. Zwei wesentliche Aspekte sollen dabei hervorgehoben werden: Zum einen ist das Bild von Wissen von grundlegender Bedeutung. Während Wissen jahrhundertelang die Einprägung und das Hervorrufen von Informationen, Kenntnissen bestimmter Sachgebiete bedeutete, und sich das Lernen insbesondere auf die Speicherung von Informationseinheiten bezog, wird heute unter Wissen vielmehr die Anwendbarkeit, Transferierbarkeit der Kenntnisse, die Denk- und Problemlösefähigkeit verstanden. Zum anderen gilt bei diesem Prozess die Erkenntnis als grundlegend, dass das Lernen mit dem Abschluss der Ausbildung nicht abgeschlossen wird, nicht abgeschlossen wer-

---

17 Die angedeuteten gesellschaftlich-wirtschaftlichen Veränderungen, u. a. die politische Wende im Jahr 1989, die Erweiterung der Europäischen Union und die immer stärkere Mobilität der Arbeitskräfte verursachten im Hochschulsystem auch strukturelle Veränderungen, man denke nur an die Aussagen des Lissabon-Vertrags und die Folgerungen des Bologna-Prozesses. Für die vorliegende Arbeit sind allerdings in erster Linie die inhaltlichen Aspekte von Relevanz, aus diesem Grunde konzentriere ich mich hier auf diese und es wird auf die Erörterung der strukturellen Aspekte verzichtet.

18 Eine ausführliche Darstellung der Veränderung der Auffassung über das Wissen findet man z. B. bei Csapó, 2001 bzw. Csapó, 2002.

19 Unter den Ursachen sind mindestens drei zu erwähnen. Diese sind Folgende:

[1] Die rasche und immer rapider werdende Entwicklung der Technologie, der Wissenschaften und dadurch der sich anzueignenden Kenntnisse, die Informationsflut. Die Bildung kann mit der Entwicklung der Wissenschaft nicht mehr Schritt halten. Eine erste Reaktion auf Fragen, die durch diese Probleme aufgeworfen werden, sind die Entwicklung von Selektionskriterien und die Aufgliederung des Schulstoffes in Kern- und Fakultativcurricula gewesen. Erst in einer späteren Phase, etwa Anfang der neunziger Jahre ist eine Zuwendung zu Fähigkeiten und Fertigkeiten in den bildungspolitischen Zielsetzungen beobachtbar, als es klar wurde, dass die Inhalte schneller verfallen, als gedacht.

[2] Diese Tendenzen wurden durch die langfristige Wirkung der sog. kognitiven Wende in den sechziger Jahren weiter verstärkt. Diese gab Anlass, den Begriff „Lernen“ neu zu interpretieren und hat dazu geführt, dass man zur Charakterisierung des anwendbaren Wissens weitere Begriffe der Psychologie wie z. B. „Kompetenz“ eingeführt hat. Diese kognitionspsychologischen Ergebnisse beeinflussten allmählich die Bezugswissenschaften, insbesondere die Pädagogik und die Erziehungswissenschaften. (Zur kognitiven Wende siehe Lück, 2002, S. 166-168)

[3] Der dritte Grund für die Veränderungen in der Bildungspolitik ist ein wirtschaftlich-gesellschaftlicher: Während Bildung jahrhundertelang ausschliesslich für eine schmale Schicht erreichbar und im Grunde genommen ein Privileg der Elite war, ist es im modernen Wirtschaftswettbewerb eher erwünscht, wenn Bildung für jeden gleichermaßen zugänglich ist, damit möglichst bestqualifizierte Arbeitskräfte auf den Arbeitsmarkt kommen.

den kann. Wissenschaftliche Erkenntnisse und Technologien verändern sich so schnell in der modernen Gesellschaft, dass es zum Erfolg in der Arbeitswelt unentbehrlich ist, über die Fähigkeit zu verfügen, auch als Erwachsene/r die angeeigneten Kenntnisse immer wieder neu zu strukturieren, zu erweitern, zu revidieren.
So wurde in der europäischen Bildung einerseits der Akzent von der Vermittlung von Fakten auf die Entwicklung von Fähigkeiten und Fertigkeiten verschoben. Dies bedeutet allerdings nicht den Verzicht auf Kenntnisse, sondern vielmehr die Aneignung der Kenntnisse *und* der Fähigkeit, diese zur Bewältigung von Problemen anzuwenden. Andererseits erfolgte auch eine Veränderung in der Zielsetzung auf jeder Ebene der Bildung. Das Hauptziel des gesamten Schul- und Bildungssystems liegt seit kurzem darin, solche Fähigkeiten zu vermitteln, die einem dazu verhelfen, sich in einer sich ständig verändernden Gesellschaft zu orientieren, in ihr zu arbeiten, sein Wissen regelmäßig zu erneuern und lebenslang auf Lernen vorbereitet zu sein.

4. 1. 2. Der Kompetenzbegriff

Bei der Charakterisierung des neuen Wissensbegriffs spielt ein alt-neuer Begriff, der Begriff der Kompetenz, eine entscheidende Rolle. Er ist in der aktuellen pädagogischen, didaktischen und bildungspolitischen Fachliteratur einer der wichtigsten, am häufigsten verwendeten und umstrittensten Begriffe, dessen Verwendung so vielschichtig ist, dass selbst die verschiedenen Kompetenzdeutungen über eine eigene Literatur verfügen. *Vass, 2005* thematisiert beispielsweise die Veränderung der Verwendung des Kompetenzbegriffs und spricht die Frage nach den sog. Schlüsselkompetenzen[20] an, *Reiss/Heinze/Pekrun, 2007* kommen nach umfassender Literaturrecherche zum Schluss, dass sich die Unterschiede der Auffassungen über den Begriff Kompetenz an der inhaltlichen Fokussierung, an der Breite der Verwendung und an der kontextuellen Einbettung festmachen lassen. Sie verweisen diesbezüglich auch auf weitere Literatur.
Der Kompetenzbegriff ist relativ komplex und in seiner ursprünglichen Bedeutung zeigt er neben kognitiven auch motivationale und volitionale Züge auf[21]. Die Wurzeln des Begriffes gehen auf Chomsky zurück[22], der die sprachliche Fähigkeit, regelrechte Sätze bilden und verstehen zu können, mit dem Wort ‚Kompetenz' bezeichnet hat. Wichtig war für ihn die Leichtigkeit, mit der jeder seine eigene Muttersprache erlernt: Durch relativ wenige praktische Erfahrung ist man fähig, unendlich viele Sätze zu produzieren und zu reproduzieren. Der Begriff Kompetenz ist etwas später von der Kognitionspsychologie und der Pädagogik aufgegriffen worden, um das Wissen, als Integration von Kenntnissen, Fähigkeiten und Einstellungen zu charakterisieren. Obwohl viele bis heute das Wort ‚Kompetenz' in einem engeren Sinne verwenden und es ungefähr mit kognitiver Fähigkeit gleichsetzen, ist es wichtig zu betonen, dass dieser Begriff ursprünglich über Fähigkeiten hinausgeht. In diesem Sinne – also als eine Einheit aus Kenntnis, Fähigkeit und Einstellungen – wurde sie auch von der Europäischen Kommission verwendet, es: *„…wird Kompetenz hier als eine Kombination aus Kenntnissen, Fähigkeiten und Einstellungen definiert,…"*. (Kommission der Europäischen Gemeinschaften, 2005, S. 3) Eine

[20] Siehe im Abschnitt 4.1.3 Schlüsselkompetenzen des lebenslangen Lernens [S. 13]
[21] Vgl. Reiss/Heinze/Pekrun, 2007 und Weinert, 2001 weiter unten zitiert
[22] Vgl. Strube/Becker/Freksa/Hahn/Opwis/Palm, 1996, S. 322

weitere, ausführlichere, mit der Auffassung der Europäischen Kommission im Einklang stehende Formulierung des Kompetenzbegriffs findet man in *Weinert, 2001,* die auch für die vorliegende Arbeit als Arbeitsdefinition verwendet wird. Nach Weinert sind Kompetenzen *„… die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen sowie die damit verbundenen motivationalen,volitionalen und soziale Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können".* (Weinert, 2001, S. 27-28)
Die Wichtigkeit des Kompetenzbegriffs besteht darin, dass er die verschiedenen Komponenten des Wissens gleichzeitig erfasst und dadurch den im vorherigen Abschnitt angesprochene Paradigmenwechsel zum Ausdruck bringt. Die Ziele der Bildung werden heute auf jeder Ebene des Bildungssystems – so auch auf der Hochschulebene – in der Entwicklung bestimmter Kompetenzen gesehen, was die Aneignung bestimmter Kenntnisse, die Fähigkeit und ebenfalls den Willen, diese Kenntnisse in konkreten Problemlösesituationen anzuwenden, umfasst. Auf welche Kompetenzen im Unterricht ein besonderer Wert gelegt werden soll, wird im Folgenden thematisiert.

4. 1. 3. Schlüsselkompetenzen des lebenslangen Lernens

Einigen Kompetenzen, den sog. Schlüsselkompetenzen wird in der Bildung eine besondere Bedeutung beigemessen. Wie auch schon an der Bezeichnung ersichtlich ist, geht es hier um Kompetenzen mit Schlüsselfunktion, d. h. um grundlegende Kompetenzen, also um solche Bündel von Kenntnissen, Fähigkeiten und Einstellungen, die jeder benötigt, um im alltäglichen Leben und in der Arbeit in einer wissensbasierten Gesellschaft Problemsituationen erfolgreich bewältigen zu können. *„»Schlüsselkompetenzen« bezeichnen Kompetenzen, die persönliche Entfaltung, soziale Integration, aktive Bürgerschaft und Beschäftigung fördern."* (Kommission der Europäischen Gemeinschaften, 2005, S. 3) Sie decken alle wesentlichen Kompetenzbereiche ab, und geben dadurch einen Rahmen für den Unterricht. Die Entwicklung und Förderung der Schlüsselkompetenzen bilden den Kern, den unerlässlichen Teil der Bildung.
Im Jahr 2001 wurde eine Arbeitsgruppe „Allgemeine und berufliche Bildung" von der Europäischen Kommission eingerichtet, um Schlüsselkompetenzen für ein lebenslanges Lernen zu erarbeiten. Es wurde festgestellt, dass zu diesen insbesondere die folgenden gehören: a.) muttersprachliche Kompetenz; b.) fremdsprachliche Kompetenz; c.) mathematische Kompetenz und grundlegende naturwissenschaftlich-technische Kompetenz; d.) Computerkompetenz; e.) Lernkompetenz; f.) interpersonelle, interkulturelle und soziale Kompetenz und Bürgerkompetenz, g.) unternehmerische Kompetenz; h.) kulturelle Kompetenz.
Es soll betont werden, dass sich diese Kompetenzen auf jede Ebene der schulischen Bildung, aber auch auf die Selbstbildung und Weiterbildung beziehen. Die Empfehlungen der Europäischen Gemeinschaft enthalten nämlich keine Trennung zwischen Grundschulbildung, mittleren oder höheren Bildung, sondern behandeln das Lernen und die Bildung als etwas Kontinuierliches, als einen lebenslangen Prozess, der sich vom Vorschul- bis ins Rentenalter erstreckt. *„Am Ende ihrer Grund(aus)bildung sollten junge Menschen ihre Schlüsselkompetenzen so weit entwickelt haben, dass sie für ihr Erwachsenenleben gerüstet sind, und die Schlüsselkompetenzen sollten*

im Rahmen des lebenslangen Lernens weiterentwickelt, aufrechterhalten und aktualisiert werden.“ (Kommission der Europäischen Gemeinschaften, 2005, S. 15) Die durch die Schlüsselkompetenzen erfassten Kompetenzbereiche sollen also für die Gesamtheit der Bildung – damit auch für die Hochschulbildung – als Richtlinie dienen.

4. 1. 4. Kompetenzen im Beruf

Die veränderte und sich ständig verändernde Arbeitswelt stellt neue Anforderungen an die Hochschulabsolventen, neben der fachlichen Qualifikation rücken weitere, außerfachliche Qualifikationen in den Vordergrund. Dies kommt beispielsweise in einer Studie des Deutschen Wissenschaftsrates[23] zum Ausdruck: Er diskutiert bereits 1999 den Wandel dieser Qualifikationsanforderungen und spricht fachübergreifendes, unternehmerisches und analytisches Denken sowie Fremdsprachenkenntnisse und weitere Persönlichkeitsmerkmale, wie Selbständigkeit, Flexibilität, Kommunikations- und Teamfähigkeit an. Es wird außerdem ausdrücklich auf die Erwartung hingewiesen, sich kontinuierlich weiterbilden zu können und zu wollen. Ähnliche Tendenzen sind auch in Ungarn erkennbar: Das Landesbüro für die Zulassung zum Hochschulstudium in Ungarn (Országos Felsőoktatási Felvételi Iroda) führte 2005 unter Mitwirkung von regionalen Arbeitsagenturen, Arbeitsvermittlerfirmen und Vertretern des Arbeitgebersektors eine Studie zur Ermittlung von angeforderten Qualifikationen[24] durch. In der Studie kommt man zum Ergebnis, dass die größte Bedeutung auf dem Arbeitsmarkt der Problemlösefähigkeit beigemessen wird. Weiterhin sind soziale Fähigkeiten wie Teamfähigkeit und Konfliktmanagement und die Akzeptanz bestimmter ethischer Werte gefordert. Erst nach diesen wird fachliche Qualifikation erwartet, Fremdsprachenkenntnisse, die Bereitschaft und die Fähigkeit, sich regelmäßig weiterzubilden und Selbstständigkeit wurden ebenfalls angesprochen. Eine gewisse Überlappung mit den Schlüsselqualifikationen für lebenslanges Lernen bzw. selbst mit der Erwartung des lebenslangen Lernens ist m. E. in beiden Beispielen ins Auge fallend.

Auch wenn die erwarteten Qualifikationen je nach Branche und je nach Firma unterschiedlich sein können, gibt es bestimmte Haltungen und allgemeine Kompetenzen, die in der Arbeitswelt von besonderer Relevanz sind. Um eine umfassendere Gültigkeit anzustreben, sollen als allgemeine Richtlinie in dieser Arbeit nicht die nationalen – die oben zitierten deutschen bzw. ungarischen Studien – sondern wiederum die auf internationaler Ebene formulierten Empfehlungen der Europäischen Union dienen. Als Berufsqualifikationen in der EU gelten folgende Fähigkeiten und Persönlichkeitsmerkmale[25]: Teamfähigkeit, Führungskompetenz, Motiviertheit und positive Einstellung Aufgaben gegenüber, Lernfähigkeit, Problemlösefähigkeit, effektive Kommunikation, weiterhin: Flexibilität, Kreativität, Selbstständigkeit in den Anfangsentscheidungen, Fremdsprachenkompetenz, Selbstsicherheit, Kritikfähigkeit, Aufdeckung von Möglichkeiten, Verantwortung, Dynamik, Führungskompetenzen, die Fähigkeit, andere motivieren zu können, Lernen aus Fehlern, Kontak-

---

[23] Vgl. Wissenschaftsrat, 1999, S. 12-14

[24] Die wichtigsten Ergebnisse der Studie siehe in: Országos Felsőoktatási Felvételi Iroda, 2005a bzw. Országos Felsőoktatási Felvételi Iroda, 2005b

[25] Vgl.: Észak-magyarországi Regionális Képző Központ, S. 4

te knüpfen/pflegen, Einfluss auf andere Personen, Entscheidungen treffen, Fokussierung auf Ergebnisse und Durchsetzung von Prozessen, Aufstellung von Strategien, ethische Haltung. Es ist wichtig festzuhalten, dass ein wesentlicher Teil dieser Fähigkeiten im Unterricht erst auf indirekte Weise zu vermitteln ist.

4. 1. 5. Zielsetzungen der Hochschulausbildung

Für die Hochschulausbildung resultieren aus den obigen Behauptungen folgende Ergebnisse:

- Die Förderung der acht Schlüsselkompetenzen [S. 13] ist auch in der Hochschulausbildung in zweierlei Hinsicht begründet: Da diese Kompetenzen als Richtlinie für die gesamte Bildung dienen, sollte sich die Hochschulausbildung als Bestandteil des Bildungssystems die Entwicklung dieser Kompetenzen auf höchster Ebene zum Ziel setzen. Weiterhin stehen die Schlüsselkompetenzen in engstem Zusammenhang mit den Qualifikationsanforderungen des Arbeitsmarktes, dementsprechend ist es für die Hochschulausbildung als unmittelbarer „Dienstleister" der Arbeitswelt besonders sinnvoll, die Förderung dieser Kompetenzen zu beachten.
- Der Arbeitsmarkt erfordert einige weitere, im Unterricht lediglich auf indirekte Weise vermittelbare Fähigkeiten und Persönlichkeitsmerkmale. Die Förderung dieser hängt stark von der Atmosphäre, von der Sozialform, von den Normen und Werten ab, die die Lehrpersonen und die Hochschuleinrichtung vertreten. So kann beispielsweise die Fähigkeit zur „Kreativität" zwar nicht direkt vermittelt werden, es ist aber durchaus möglich, im Unterricht herausfordernde Problemsituationen vorzustellen, deren Bewältigung divergentes Denken und kreative Denkweise erfordern.

Demzufolge wird das Ziel der Hochschulausbildung nicht mehr in einer möglichst starken Vertiefung der Fachkenntnisse auf einem bestimmten Fachgebiet gesehen, sondern in der anwendungsorientierten Vermittlung von Grundkenntnissen bezüglich des jeweiligen Fachgebiets. Es wird angestrebt, grundlegende Kenntnisse im jeweiligen Bereich, die Fähigkeit und den Willen, diese auch anwenden zu können und zu wollen, also eine grundlegende Fachkompetenz auf eine solche Art und Weise zu vermitteln, dass man dadurch zur Förderung der Schlüsselkompetenzen und der Berufskompetenzen beiträgt. Inwieweit dies im Mathematikunterricht möglich ist, wird im Unterkapitel 4.2. [S. 16] näher erörtert.

4. 1. 6. Zielsetzungen der fremdsprachigen Hochschulausbildung

Fremdsprachige Bildungsgänge und vollständig fremdsprachige Ausbildungen bereichern seit längerer Zeit die Hochschullandschaft. In Ungarn wurden beispielweise an der Semmelweis-Universität für Medizin[26] und an der Technischen Universität Budapest[27] bereits vor der Wende 1989 zum Zweck der Internationalisierung des Bildungsangebots englischsprachige Ausbildungen organisiert[28]. Die gesellschaftli-

[26] Semmelweis Orvostudományi Egyetem, seit 01.01.2000 Semmelweis Egyetem

[27] Budapesti Műszaki Egyetem, seit 01.01.2000 Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

[28] Die englischsprachige Ausbildung wurde an der Semmelweis-Universität im Studienjahr 1982/83, an der Technischen Universität Budapest im Studienjahr 1983/84 eingeführt. Vgl.: BME Nemzetközi Igazgatóság, 2008.

chen und politischen Änderungen in den vergangenen zwei bis drei Jahrzehnten haben sowohl die Verbreitung als auch die Ausdehnung dieser Bildungsgänge begünstigt, nicht nur in Ungarn, sondern auch in ganz Europa[29]. Die fremdsprachigen Bildungsgänge sind stark in die Ausbildungsstruktur des jeweiligen Bildungsinstituts integriert und verfolgen ähnliche Ziele wie die herkömmliche Ausbildung. Diese Ziele – Ausbildung von in ihrem Fachgebiet bewanderten, über für die Arbeit unerlässliche Schlüsselkompetenzen und Qualifikationen verfügenden Fachkräften - werden mit der Forderung verbunden, diese Qualifikationen nicht (nur) in der Muttersprache, sondern (auch) in einer Fremdsprache zu beherrschen, um auf diese Weise auf internationaler Ebene handlungsfähig zu sein.

4. 2. Charakteristika des Mathematikunterrichts

Mathematik ist nicht nur auf jeder Ebene des Bildungssystems präsent, sondern spielt als eine der acht wichtigsten Kompetenzbereiche in der Bildung eine zentrale Rolle. Mathematik nimmt in der Hochschulausbildung – abhängig von der jeweiligen Fachrichtung – in den fachspezifischen Bildungsgängen (Mathematik Diplom, Mathematik Lehramt, Angewandte Mathematik, Wirtschaftsmathematik usw.) naturgemäß eine zentrale Rolle ein, sie hat aber außerdem auch in zahlreichen nichtfachspezifischen Bildungsgängen (u. a. naturwissenschaftlichen, ingenieurwissenschaftlichen und wirtschaftlichen Fachrichtungen) einen das jeweilige Fachgebiet unterstützenden Charakter. In diesem Unterkapitel wird gezeigt, dass der Mathematikunterricht die Förderung der im vorherigen Abschnitt angesprochenen Schlüsselkompetenzen und Berufsqualifikationen begünstigen kann.

4. 2. 1. Allgemeine Ziele und Merkmale des Mathematikunterrichts

Neben ihren kulturellen Werten werden meistens zwei wichtige Merkmale der Mathematik betont: Einerseits kann sie für zahlreiche Probleme zahlreicher Bereiche des alltäglichen Lebens (man denke lediglich an physikalische, biologische oder an ökonomische Probleme) Mittel und Methoden zum Problemlösen bieten, andererseits verkörpert sie eine Betrachtungs- und Denkweise, die einzigartig unter den Wissenschaften ist und ihre Aneignung kann positiv auf die Entwicklung der Persönlichkeit auswirken [30]. Diese beiden Merkmale schlagen sich auch in den Zielsetzungen des Mathematikunterrichts nieder. Der ungarische National-Grundlehrplan[31] bringt dies folgendermaßen zum Ausdruck[32]:

---

[29] Ausführliche Darstellung der fremdsprachigen Ausbildungen hinsichtlich ihrer Geschichte, Verbreitung, Zielsetzung, Organisation und Charakteristika in Europa und insbesondere in Ungarn findet man im Unterkapitel 4.6. Bilingualer Unterricht [S. 49].

[30] *„Die mathematische Denkweise ist eines der mächtigsten, leistungsfähigsten und elegantesten Instrumente, unsere Erfahrungen und Ideen zu ordnen und neue Denkmodelle zu entwerfen, die über unsere jeweilige Erfahrung hinausgehen und als heuristisches Mittel für neue Forschungen und die Gestaltung der Zukunft dienen. Die Mathematik ist weit über den technologischen Aspekt hinaus grundlegend für das Verständnis und die Erschließung der modernen Welt und nimmt zwischen Geistes- und Naturwissenschaften eine einzigartige kulturelle Stellung ein.“* In: Wittmann, 1976, S. 22

[31] Nemzeti Alaptanterv, abgekürzt NAT, diente als Basisdokument für das Bildungsgesetz in Ungarn (1993, 1995). Es geht hierbei weniger um einen Lehrplan, als um gemeinsame pä-

„Die Mathematik erzieht zu flexiblem, disziplinier-tem Denken, zu entdeckendem Lernen und Suchen einfallsreicher Lösungen. [...] In den Denkprozes-sen spielen Heuristik, konstruktives Denken, Be-nutzung von Analogien eine Rolle. Die SchülerIn-nen sollen die Anwendbarkeit der Mathematik in der Praxis und in Natur- und Geisteswissenschaf-ten erfahren. Die Geschichte der Mathematik lie-fert Erfahrungen und Interessantes, das zur Moti-vation der Schüler beitragen kann.

Denkweise, Denk-prozessen

außermathematische Anwendungen

Mathematik als Kul-turgut

Das Interpretieren und Lösen von Textaufga-ben, das Untersuchen einfacher, kurzer mathema-tischer Texte kann zur Entwicklung eigener Lern-methoden beitragen. Das Lernen von hinreichend verstandenen Begriffen und grundlegenden ma-thematischen Kenntnissen entwickelt das Ge-dächtnis, die Willensstärke und verstärkt die Aus-dauer bei der Arbeit und beim Lernen.

positive Wirkung auf die Persönlich-keit

Das Erwerben von mathematischen Erkenntnisme-thoden liefert den Anlass für das Entdecken ele-mentarer Beziehungen der Mathematik zur au-ßermathematischen Realität."

außermathematische Anwendungen

Die sich anzueignende mathematische Denkweise – und die im Zusammenhang damit zu entwickelnden Fähigkeiten, Fertigkeiten und Einstellungen – sind mit einer persönlichkeitsgestaltenden Kraft verbunden, die für das Individuum (aber auch für die Gesellschaft) langfristig nützlich ist. Die durch die Mathematik geför-derten Fähigkeiten und Persönlichkeitsmerkmale können zur Entwicklung zahlrei-cher Berufsqualifikationen beitragen. Tabelle 1 zeigt skizzenhaft, welche Kompo-nenten des Mathematikunterrichts die Förderung welcher Berufsqualifikationen m. E. begünstigen können.

Beispielsweise ist die achte Zeile der Tabelle 1 folgendermaßen zu deuten: Macht man mit Erkenntnismethoden der Mathematik (zu diesen gehören u. a. die Indukti-on, die Deduktion, die Modellierung, experimentelle Überprüfung) Erfahrungen, so kann die Annahme formuliert werden, dass diese Denkprozesse behilflich sind, in konkreten Berufssituationen Möglichkeiten des Handelns aufzudecken, Strategien fürs Handeln aufzustellen, die Folgen der möglichen Handlungen (durch Indukti-on/Deduktion) zu überblicken, und anhand der Ergebnisse die Situation auszuwer-ten und Entscheidungen zu treffen. Die sich angeeigneten Methoden tragen dazu bei, den Gedankengang anderer folgen zu können und demzufolge Kritik auszuüben bzw. die eigene Entscheidung, wenn nötig, zu überprüfen. Diese Fähigkeiten stär-

dagogische und inhaltliche Richtlinien für den Unterricht und Mindestanforderungen für die zehnjährige Schulpflichtzeit. Damit kommt der Grundlehrplan dem im deutschen Sprach-gebrauch verbreiteten Begriff Bildungsstandards nahe.

[32] In der rechten Spalte der Seite wird das im Text des Nationallehrplans betonte Merkmal der Mathematik angemerkt.

ken langfristig das sichere und kompetente Handeln im Beruf und die Selbstsicherheit.

Zielsetzungen des Mathematikunterrichts im National-Grundlehrplan in Ungarn	**Berufsqualifikationen in der EU**
Erziehung zu flexiblem, diszipliniertem Denken, entdeckendem Lernen und zu Suchen einfallsreicher Lösungen	Flexibilität, Kreativität, Aufdeckung von Möglichkeiten Entwicklung von Strategien
Förderung von Heuristik, Konstruktives Denken, Analogie	Flexibilität, Kreativität, Entwicklung von Strategien, Kritik, Verantwortung, Entscheidungen treffen, Lernen aus Fehlern
Erfahrungen mit der Anwendbarkeit der Mathematik in der Praxis und in Natur- und Geisteswissenschaften	Flexibilität, Kreativität, Problemlösefähigkeit, Fokussierung auf Ergebnisse und Durchsetzung von Prozessen
Erfahrungen mit der Geschichte der Mathematik	Motiviertheit und positive Einstellung Aufgaben gegenüber
Interpretieren und Lösen von Textaufgaben	Motiviertheit und positive Einstellung Aufgaben gegenüber, Lernfähigkeit, Fokussierung auf Ergebnisse und Durchsetzung von Prozessen, effektive Kommunikation
Untersuchen einfacher, kurzer mathematischer Texte	effektive Kommunikation, Lernfähigkeit, Selbstsicherheit
Lernen von hinreichend verstandenen Begriffe und grundlegenden mathematischen Kenntnissen	Lernfähigkeit, Selbstsicherheit
Erwerben von mathematischen Erkenntnismethoden	Aufdeckung von Möglichkeiten Aufstellung von Strategien, Entscheidungen treffen, Kritik, Selbstsicherheit
Entdecken elementarer Beziehungen der Mathematik zur außermathematischen Realität	Aufdeckung von Möglichkeiten Aufstellung von Strategien, Flexibilität, Kreativität

Tabelle 1: Unterstützung der Berufsqualifikationen durch Komponenten des Mathematikunterrichts

Es soll weiterhin angemerkt werden, dass die Aneignung mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Einstellungen offensichtlich auch zur Förderung der mathematischen Kompetenz und der Lernkompetenz beiträgt. Geht es um bilingualen Mathematikunterricht, so werden neben den oben angesprochenen einige weitere Schlüsselkompetenzen, so direkt auch die fremdsprachliche und die kulturelle Kompetenz, auf indirekte Weise allerdings auch die muttersprachliche Kompetenz entwickelt.

4. 2. 2. Diskrepanz zwischen Zielsetzung und Praxis in der nichtfachspezifischen Mathematikausbildung im Hochschulbereich

Die oben angesprochene doppelte Zielsetzung – also die Vermittlung eines Mittels zum Problemlösen und einer Betrachtungsweise – ist auch für die nichtfachspezifische Hochschulausbildung charakteristisch. *Curdes, 2008* formuliert dies bezüglich der Mathematik als Nebenfach an Fachhochschulen – insbesondere in den Ingenieur-, Natur- und Wirtschaftswissenschaften – auf folgende Weise: „*Mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten bilden die Grundlage vieler Anwendungen in technischen und wirtschaftswissenschaftlichen Fächern.* (→ Aspekt der außermathematischen Anwendungen) *Um Gelerntes aus der Mathematik sinnvoll in anderen Bereichen des Studiums einsetzen zu können, müssten in der Mathematikausbildung gerade Problemlösekompetenzen trainiert und eine verstehensorientierte Sichtweise auf Mathematik gefördert werden.*“ (→ Aspekt der Denkprozesse)

Es ist allerdings zu bedauern, dass die erwünschte und in den Zielsetzungen zum Ausdruck gebrachte persönlichkeitsgestaltende Funktion der Mathematik in der Hochschulausbildung weniger ausgeprägt ist, in der Praxis ist sogar das Gegenteil zu erfahren: Das (Neben-)Fach Mathematik wird dazu missbraucht, durch die damit verbundenen (Prüfungs-)Anforderungen die Problematik der Überfüllung der Hochschuleinrichtungen zu lösen, anstatt als Ort der Entwicklung und Förderung wichtiger Berufsqualifikationen zu dienen. So wird aus Mathematik als ein Kulturgut und einzigartige schöpferische Denkweise Mathematik als ein Horrorfach.[33]

4. 3. Charakteristika des Analysisunterrichts

In diesem Unterkapitel geht es darum, zu zeigen, inwieweit sich der Analysisunterricht eignet, in der nichtfachspezifischen Hochschulausbildung – insbesondere in der wirtschaftlichen Fachhochschulausbildung – dazu beizutragen, durch die Vermittlung für das Fach relevanter Kenntnisse die Förderung von Berufsqualifikationen zu begünstigen.

4. 3. 1. Allgemeine Merkmale des Analysisunterrichts

Die obigen Behauptungen in Bezug auf den Mathematikunterricht sind insbesondere für den Themenbereich Analysis charakteristisch. Aus diesem Grund ist es kein Zufall, dass Analysis bereits auf der mittleren Bildungsebene ihren Platz hat (in Ungarn erst im fakultativen Leistungskurs, im deutschen Sprachraum aber sowohl in der Grundkurs- als auch in der Leistungskursausbildung), bzw. dass sie im Mathematikunterricht zahlreicher Fachrichtungen der Hochschulausbildung überwiegt. Die Aneignung analytischer Kenntnisse ist zum einen nützlich, da sie ein breites Repertoire zur Modellierung und Lösung für Probleme zahlreicher anderer Fachgebiete (u.a. Physik, Biologie, Wirtschaft) liefert, zum anderen ist aber die analytische Denkweise aus Sicht des Problemlösens von grundlegender Bedeutung. Diese Denkweise ist nämlich durch den Prozess geprägt, etwas Ganzes in seine Teile zu

[33] Vgl.: „*Solche Veranstaltungen sind sehr gut geeignet, die »soziale Funktion der Mathematik« (vgl. Davis/Hersh 1988) auszuüben, d. h. mit Hilfe von Klausuren die für das entsprechende Fach »Ungeeigneten« mittels formaler Kriterien herauszuprüfen. Solche Veranstaltungen machen Mathematik zum Horrorfach für Lehrende und sensible Lehrende.*“ In: Roos, 1998, S. 222

zerlegen, diese auf bestimmte Eigenschaften zu überprüfen und anhand der Ergebnisse Schlussfolgerungen für das Ganze zu ziehen. Dieser Prozess wird von Methoden mathematischer Begriffsbildung sowie von den heuristischen Strategien des Problemlösens vollständig durchdrungen und wirkt demzufolge verstärkend auf die Kognition. Somit kann der Themenbereich Analysis besonders geeignet sein, als Vermittler zwischen der Mathematik und einem weiteren Fachgebiet zu dienen: Analysis kann auf eine solche Art und Weise die Denkprozesse und dadurch die Berufsqualifikationen fördern, dass dabei gleichzeitig für das jeweilige Fachgebiet gut handhabbare Kenntnisse und Methoden gewonnen werden.

4. 3. 2. Möglichkeiten zum Aufbau eines Analysislehrganges

Zur Strukturierung analytischer Inhalte bieten sich mehrere Möglichkeiten an. Bezogen auf die Schulanalysis thematisieren *Danckwerts und Vogel, 2006* folgende zwei Ansätze:

Ansatz [1]: Traditionell wird die Konvergenz über eine ausgiebige Behandlung der Folgen eingeführt und anschließend auf Funktionen übertragen. Dieser Funktionsgrenzwertbegriff wird benötigt, um den Differentialquotienten als Grenzwert der Differenzenquotientenfunktion definieren zu können. Durch Ausdehnung dieser lokalen Eigenschaft gelangt man zu differenzierbaren Funktionen, die als Ausgangspunkt für weitere Begriffsbildung dienen.

Diese Vorgehensweise ist nicht nur für die Schulmathematik charakteristisch, sondern auch in der Hochschulanalysis verbreitet[34]. Auch der Aufbau des Analysisunterrichts an der Wirtschaftshochschule Budapest folgt diesem Prinzip[35]. Eine weitere Variante derselben Strukturierung erfolgt, wenn Folgen und Funktionen in allgemeiner Form, also Folgen und Funktionen mehrerer Variablen betrachtet werden[36]. Die mentale Arbeit auf einer so verallgemeinerten Ebene setzt ein hohes Maß an Abstraktionsfähigkeit voraus und hat weniger Bezug zu Alltagsproblemen.

Ansatz [2]: Ohne Thematisierung der Folgen wird auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffs bzw. mit Hilfe des Abstandsbegriffs der Grenzwert von Funktionen eingeführt. Anschließend erfolgt eine ähnliche Strukturierung der Inhalte wie oben beschrieben.

Diese Behandlung ist ebenfalls nicht nur in der Schulmathematik, sondern auch in der Hochschulanalysis denkbar[37]. Dieser Aufbau hat ebenfalls eine Variante auf einer höheren Abstraktionsebene: Mit Hilfe des Begriffs der Norm (d. h. Verallgemeinerung des Abstandsbegriffs) wird in metrischen Räumen der Grenzwert der Funktionen mit mehreren Variablen eingeführt.

In der Hochschulanalysis sind allerdings durchaus weitere Möglichkeiten zur Strukturierung der Inhalte vorstellbar:

Ansatz [3]: *Königsberger, 1999* definiert die Stetigkeit mit Hilfe von konvergenten Folgen, und sieht Funktionen als konvergent an einer Stelle an, wenn sie an dieser Stelle setig ergänzbar sind.

---

[34] Beispielsweise Heuser, 2006

[35] Vgl. Csernyák, 2006, bzw. weiteres zur Wirtschaftshochschule Budapest im Abschnitt 4.3.3. Analysis als Nebenfach… [S. 21].

[36] Eine derartige Darstellung der Inhalte der Analysis bietet z. B. Hildebrandt, 2002 an.

[37] Beispielsweise Walter, 2007

Ansatz [4]: *Zorich, 2006* arbeitet mit dem Begriff der Infinitesimalität einer Funktion im Vergleich zu einer anderen Funktion, definiert mit deren Hilfe das Differential und führt anschließend die Ableitung ein.
Wie sich dies in der Praxis – insbesondere in der wirtschaftswissenschaftlichen Ausbildung – konkretisieren lässt, wird im Folgenden am Beispiel der Wirtschaftshochschule Budapest gezeigt.

4. 3. 3. Analysis als Nebenfach in der Hochschulausbildung am Beispiel der Wirtschaftshochschule Budapest

An der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus der Wirtschaftshochschule Budapest wird Wirtschaftsmathematik den Studenten aus allen Fachrichtungen im Grundstudium zwei Semester lang unterrichtet. Im ersten Semester wird der Themenbereich Analysis, im zweiten Semester Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt. Auf diese wirtschaftsmathematische Ausbildung greifen weitere Fächer wie Operationsforschung, Statistik und Finanzen in höheren Semestern zurück.

Zielsetzung

Folgender Auszug formuliert die Ziele des Analysisunterrichts in diesem Kontext: *„Entwicklung der logischen Denkweise und einer Betrachtungsweise, die dazu befähigt, wichtige wirtschaftliche Begriffe zu verstehen, wie Grenzgewinn, Grenznachfrage, Elastizität usw. Kenntnis solcher mathematischen Begriffe und Methoden, die unerlässlich für den Unterricht der Studienfächer Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Ökonomie, und Finanzen sind. Der Student soll befähigt werden, Probleme zu erkennen, das zum Problemlösen nötige mathematische Werkzeug auszuwählen, anzuwenden und das Ergebnis auszuwerten. Angleichung der Vorkenntnisse."*[38] Es ist zu erkennen, dass auf dieser Ebene sowohl die Förderung bestimmter Denkprozesse (Entwicklung der logischen Denkweise) als auch der Anwendungsbezug (Verstehen ökonomischer Begriffe, Problemlösen) eine wichtige Rolle spielen.

Inhalt

Über den konkreten Inhalt des Unterrichts wird informiert, indem für jede Woche das jeweilige Thema und die Liste[39] der sich dabei anzueignenden Begriffe sowie das Lehrbuch[40] angegeben wird. Nimmt man diese näher unter die Lupe, so lässt sich Folgendes feststellen:

- Die Differentialrechnung, insbesondere die Diskussion von Funktionen einer Variablen steht im inhaltlichen Mittelpunkt. Dementsprechend wird großer Wert auf die Thematisierung von bestimmten Funktionsklassen (u. a. rationale und gebrochen-rationale Funktionen, Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen), Funktionseigenschaften (Nullstellen, Monotonie, Extrema, Krümmung, Wendepunkte, Stetigkeit) und auf den Ableitungsbegriff und sowie die Zusammenhänge dieser Konzepte gelegt. Es werden ebenfalls – wenn auch

[38] Vgl: BGF-KVIFK Módszertani Intézeti Tanszéki Osztály, 2006
[39] Vgl: BGF-KVIFK Módszertani Intézeti Tanszéki Osztály, 2006. Eine deutsche Übersetzung findet man im Anhang A.
[40] Csernyák, 2006

weniger zentral – einige Themen aus der Integralrechnung (u. a. Stammfunktion, unbestimmtes Integral, Integrationsregeln, bestimmtes Integral, Ermittlung von Flächeninhalten) behandelt. Ferner werden Funktionen mit zwei Variablen angesprochen.

- Der begriffliche Aufbau folgt dem klassischen Prinzip: der Konvergenzbegriff wird stets bei den Folgen eingeführt und auf Funktionen übertragen. Diese Strukturierung entspricht dem Ansatz [1] [S. 20]. Die Kurvendiskussion wird als eine Anwendung, die Integralrechnung als Umkehrung und die Diskussion von Funktionen mit zwei Variablen als Erweiterung der Differentialrechnung dargestellt.
- Es werden wichtige Begriffe aus der Sekundarstufe auf einer höheren Ebene behandelt. Grundvorstellungen von Begriffen wie Folge, Funktion, Verknüpfung, Stetigkeit aber auch Tangente, Sekante und Flächeninhalt werden neu aufgegriffen, generalisiert, differenziert, miteinander vernetzt und zu einem vernetzten Begriffssystem zusammengeführt.

Bewertung

Inhalte: Die Auswahl der mathematischen Inhalte entspricht den Zielsetzungen der wirtschaftlichen Fachhochschulausbildung, da die Diskussion von Funktionen mit einer Variable in der Modellierung ökonomischer Zusammenhänge eine entscheidende Rolle spielt. Wie oben angesprochen, ist der Themenbereich Analysis besonders geeignet, zwischen Mathematik und einem weiteren Fachgebiet (z. B. Wirtschaft) zu vermitteln: Sie kann auf eine solche Art und Weise die Denkprozesse und dadurch die Berufsqualifikationen fördern, dass dabei gleichzeitig für das jeweilige Fachgebiet gut handhabbare Kenntnisse und Methoden gewonnen werden. Es gibt allerdings einige mathematische Themen, deren Behandlung weder aus Sicht der weiteren mathematischen Begriffsbildung noch aus Sicht der Wirtschaft begründet ist (z.B. Potenzreihen, absolute Konvergenz).

Darstellung der Inhalte: Mathematische Inhalte werden präzise und genau formuliert, die Darstellung der Inhalte folgt überwiegend dem deduktiven Prinzip. Es ist offensichtlich, dass viel Wert auf die „lückenlose“ und vollständige Darstellung der Inhalte, auf hohe mathematische Präzision und Korrektheit gelegt wird. Kritisch ist allerdings zu betrachten, dass im Gegensatz zu den oben zitierten Zielsetzungen der Hochschule vielmehr eine mathematische Theorie mit wissenschaftlichem Anspruch als eine anwendungs- und problemlöseorientierte mathematische Betrachtung mit Wirtschaftsbezug aufgebaut wird.

Weiterhin ist zu kritisieren, dass ökonomische Probleme marginal, und erst als Anwendungen mathematischer Theorien vorkommen, kaum aber als Ausgangspunkt des Problemlöseprozesses. Es fehlt auch eine überblicksartige Darstellung ökonomischer Funktionen. Selbst der Anteil der Stunden, in denen ökonomische Probleme thematisiert werden (können), ist sehr gering (ca. 10%). Meine eigenen Erfahrungen stimmen mit den Angaben des Semesterplans in dieser Hinsicht überein.

Aufbau: Bei der Bewertung des gewählten Ansatzes zur Strukturierung der Inhalte (Ansatz [1]) sollten folgende Überlegungen bedacht werden:

Unter den Vorteilen der (einfachen Varianten der) obigen Ansätze [1] und [2] ist zu erwähnen, dass sie unmittelbar auf Begriffe der Schulmathematik zurückgreifen und schrittweise aber relativ rasch die Untersuchung von Funktionen mit einer Va-

riable ermöglichen, wobei in beiden Fällen ein induktives Vorgehen ebenfalls möglich ist. Sie ermöglichen weiterhin einen direkten Praxisbezug. Somit sind m. E. beide Ansätze als Richtlinie bei der Strukturierung der analytischen Inhalte in der nichtfachspezifischen Hochschulausbildung geeignet. Dahingegen scheinen die komplexeren Varianten beider Ansätze wegen ihrer Forderung nach einem hohen Maß an Abstraktionsfähigkeit für die nichtfachspezifische Hochschulausbildung eher ungeeignet zu sein. Beim Ansatz [3] steht die Stetigkeit stärker im Mittelpunkt. Obwohl die notwendige Abstraktionsfähigkeit ungefähr mit der ersten der beiden Ansätze gleich ist, wird der Stetigkeitsbegriff aus praktischer Sicht für weniger selbstverständlich als der Grenzwertbegriff gehalten. Insbesondere in der Ökonomie hat die Stetigkeit eine eher nebengeordnete Rolle, da die meisten ökonomischen Funktionen „idealisierte“ Funktionen sind: Sie modellieren Sachverhalte, funktionale Zusammenhänge zwischen ökonomischen Größen, die meistens nicht stetig sind. Dementsprechend ist zwar dieser Ansatz in der nichtfachspezifischen Hochschulausbildung akzeptierbar, aber in ökonomischen Bildungsgängen weniger gelungen. Beim Ansatz [4] spielt der besonders abstrakte Begriff der Infinitesimalität eine große Rolle, dessen Verstehen wiederum ein hohes Abstraktionsvermögen voraussetzt. Daher wird dieser Ansatz für die nichtfachspezifische Hochschulausbildung für weniger geeignet gehalten.
Somit werden in Anbetracht der Zielsetzungen und der Anforderungen der Wirtschaftshochschule Budapest in diesem Kontext die Ansätze [1] und [2] für angemessen gehalten. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen Konzepten liegt in der unterschiedlichen Heranführung an den Funktionsgrenzwertbegriff: Dies geschieht beim Ansatz [1] durch Übertragung des Konvergenzbegriffes von Folgen auf Funktionen, beim Ansatz [2] durch Explikation eines intuitiven Grenzwertbegriffes. Für den Ansatz [2] spricht, dass dieser einen „Umweg” in den Bereich der Folgen erspart und einen wesentlich schnelleren dafür aber ausgiebigen Einstieg in die Differentialrechnung ermöglicht; weiterhin, dass dieser Ansatz auch aufgrund ökonomischer Probleme entwickelte intuitive Vorstellungen über den Grenzwert (etwa durch eine Auseinandersetzung mit dem Produktivitätsbegriff) aufgreifen kann. Der Ansatz [1] hat demgegenüber andere Vorteile: Die ausführliche Behandlung der Folgen, die – wie demnächst an einem Beispiel der Ökonomie gezeigt wird – durchaus als handhabbare Modelle für wirtschaftliche Zusammenhänge dienen können, bietet Möglichkeit, heuristische Strategien des Problemlösens in einem elementaren Bereich der Mathematik zu erproben und zu thematisieren. Anhang B führt einige Beispiele aus dem Themengebiet der Folgen an, bei denen die mathematische Erkenntnisgewinnung durch solche heuristische Strategien gelenkt werden kann. Dies bedeutet, dass eine gründliche Auseinandersetzung mit den Folgen indirekt zur Förderung der Problemlösefähigkeit beitragen kann. Damit ist die Wahl des Ansatzes [1] für die Wirtschaftshochschule Budapest m. E. durchaus berechtigt.

4. 3. 4. Vorschläge für die Verbesserung des Analysisunterrichts an der Wirtschaftshochschule Budapest

Um den genannten Kritikpunkten entgegenzusteuern, bieten sich meiner Meinung nach folgende Möglichkeiten zur Verbesserung des Analysisunterrichtes an der Wirtschaftshochschule Budapest an:

- Aus Sicht der Zielsetzungen der Hochschule, der Anforderungen des Arbeitsmarktes aber auch aus motivationalen Aspekten wäre es angebracht, wenn im Analysisunterricht Probleme aus der Ökonomie als Ausgangspunkt für mathematische Begriffsbildung aufgegriffen würden und im Zusammenhang damit eine eher induktive Vorgehensweise verfolgt würde. Eine solche Herangehensweise entspricht außerdem vielmehr den u. a. von Pólya, Dienes und Varga gelegten ungarischen Traditionen des Mathematikunterrichts. Inwieweit sich diese Forderung in der Unterrichtspraxis realisieren lässt, soll im Folgenden an einem Beispiel (optimale Bestellmenge [S. 24]) gezeigt werden.
- Es wäre weiterhin wünschenswert, wenn das intuitive Begriffsverständnis bzw. Bezüge zur Wirtschaft im Laufe des Analysisunterrichtes durchgehend aufrechterhalten würden. Einen Anhaltspunkt könnten dabei unmittelbare Entsprechungen mathematischer Begriffe in der Wirtschaft bilden. Einige von ihnen wurden in Tabelle 2 [S. 29] zusammengefasst.

Beispiel: Optimale Bestellmenge

Aufgabenstellung

Folgende Aufgabe stammt aus einem Lehrbuch[41] für Schüler der Sekundarstufe II mit Schwerpunkt Wirtschaft und Verwaltung:
„Ein Elektronik-Unternehmen geht pro Rechnungsperiode von einem Bedarf an 1,5-V-Batterien von 48000 Stück zum Bezugspreis von 1,-€ je Stück aus. Es rechnet mit Lagerkosten von 15% berechnet vom Wert des durchschnittlichen Lagerbestandes, und Bestellkosten von 100,-€ pro Bestellung.“
Es wird an dieser Stelle vorgeschlagen, den folgenden Arbeitsauftrag zu formulieren: *Ermitteln Sie die optimale Bestellmenge des Unternehmens!* Diese Formulierung kann die Aufgabe in mindestens zwei mathematische Richtungen öffnen, die im Folgenden kurz dargestellt werden und die einen Einblick in die mathematische Modellierung ermöglichen. Inwieweit die formulierte Aufgabe bereits eine Idealisierung des Problems beinhaltet, bzw. was aus Sicht des Unternehmens in dieser Situation als optimal gelten könnte, soll im Unterricht zum Thema gemacht werden. Ferner soll diskutiert werden, was dem durchschnittlichen Lagerbestand entspricht.

Lösungsansätze

1. Schritt: Analyse, Aufdeckung von Möglichkeiten

In diesem Schritt sollen insbesondere folgende Fragen beantwortet werden: Welche Parameter sind in dieser ökonomischen Situation festgelegt, welche sind variabel? Wo hat das Unternehmen einen Spielraum?
Die Analyse der Situation spielt bei jeder Art von Modellierung eine wichtige Rolle. Nach der Unterscheidung zwischen festen und variablen Größen ist allerdings für das Lösen des Problems die Erkenntnis entscheidend, dass alle variablen Größen von der Anzahl der Bestellungen pro Periode abhängen. Das Unternehmen kann also die Kosten beeinflussen, indem es die Anzahl der Bestellungen variiert.

---
[41] Schöwe/Knapp/Borgmann, 1996, S. 278

Feste Größen sind: Der Stückpreis der Batterien (1,-€ / Stück), die Bestellkosten (100,-€ / Bestellung), der Bedarf an 48000 Stück/Periode.
Variable Größen sind: Die Anzahl der Bestellungen pro Periode und *in Abhängigkeit davon* die *gesamten* Bestellkosten und der durchschnittliche Lagerbestand, bzw. die Lagerkosten. Das Unternehmen hat also die Möglichkeit, die Anzahl der Bestellungen zu variieren.

2. Schritt: Vorwärtsarbeiten (aus Gegebenem erste Folgerungen ziehen):

Hier können durch Untersuchung konkreter Fälle Tendenzen erkannt und Hypothesen aufgestellt werden.

Anzahl der Bestellungen	1	2	3	4
Bestellkosten	100,-€	200,-€	300,-€	400,-€
Durchschnittlicher Lagerbestand	$\frac{48000}{2}=24000$	$\frac{48000}{2\cdot 2}=12000$	$\frac{48000}{2\cdot 3}=8000$	$\frac{48000}{2\cdot 4}=6000$
Lagerkosten	24000·0,15= 3600,-€	12000·0,15= 1800,-€	8000·0,15= 1200,-€	6000·0,15= 900,-€
Gesamtkosten	3700,-€	2000,-€	1500,-€	1300,-€

Da die Gesamtkosten im Falle von 1, 2, 3, 4 Bestellungen eine fallende Tendenz zeigen, könnte man vermuten, dass bei wachsender Anzahl der Bestellungen die Kosten immer weiter fallen. Es stellt sich die Frage, ob überhaupt ein Minimum der Gesamtkosten existiert. Es besteht offensichtlich ein *funktionaler Zusammenhang* zwischen der Anzahl der Bestellungen (die nur durch eine positive natürliche Zahl ausgedrückt werden kann) und den Gesamtkosten. Diese Stelle kann im Unterricht aus didaktischer Sicht vieles leisten:

- Die Aufgabe kann motivieren, den Begriff der Folge einzuführen bzw. Verknüpfung (konkret: Summe) von Folgen zu definieren;
- Der Kontext legt nahe, Folgen als spezielle Funktionen aufzufassen;
- Die Frage nach dem Minimum kann aus praktischer Sicht die Einführung des Begriffs der Beschränktheit und des der Monotonie motivieren.

3. Schritt: Modellierung: Aufstellung eines diskreten mathematischen Modells

Die Gesamtkosten berechnen sich aus der Summe der Bestellkosten und der Lagerkosten. Bezeichnet n die Anzahl der Bestellungen, dann betragen die Bestellkosten in Abhängigkeit davon: $B(n)=100\cdot n$, und die Lagerkosten: $L(n)=\frac{48000}{2\cdot n}\cdot 0{,}15$.

Damit ergibt sich für die Gesamtkosten:

$$K(n)=B(n)+L(n)=100\cdot n+\frac{48000}{2\cdot n}\cdot 0{,}15=100\cdot n+\frac{3600}{n}.$$

4. Schritt: Übersetzung der Fragestellung in die Sprache der Mathematik

Gesucht ist damit der kleinste Wert der Folge $K(n) = 100 \cdot n + \frac{3600}{n}$, wenn er denn existiert.

5. Schritt: Lösung der mathematischen Aufgabe

Es stellt sich die Frage, wie eine unendliche aber diskrete Zahlenmenge auf ihr Minimum überprüft werden kann. Hierfür bieten sich u.a. folgende drei Ansätze an:

Variante a.) Abschätzung mit Hilfe des geometrischen und arithmetischen Mittels

$$\frac{100 \cdot n + \frac{3600}{n}}{2} \geq \sqrt{100 \cdot n \cdot \frac{3600}{n}} = 600$$

also

$$100 \cdot n + \frac{3600}{n} \geq 1200$$

Die Folge ist daher nach unten beschränkt, dieser Wert wird in der Tat angenommen, und zwar in dem Fall, wenn $100 \cdot n = \frac{3600}{n}$ ist, d. h. n=6.

Variante b.) Überprüfung der Monotonie der Folge durch Differenzbildung

$$K(n+1) - K(n) = \left(100 \cdot (n+1) + \frac{3600}{n+1}\right) - \left(100 \cdot n + \frac{3600}{n}\right) =$$

$$= 100 + \frac{3600}{n+1} - \frac{3600}{n} = 100 - \frac{3600}{n(n+1)} \begin{cases} < 0, & \text{falls } 1 \leq n \leq 5 \\ > 0, & \text{falls } 6 \leq n \end{cases}$$

Die Folge K(n) ist also streng monoton fallend, wenn $1 \leq \text{n} \leq 5$, und streng monoton steigend ab dem 6. Folgenglied. Somit nimmt die Folge ihren kleinsten Wert für n=6 an.

Variante c.) Überprüfung der Monotonie der Folge durch Quotientenbildung

$$\frac{K(n)}{K(n+1)} = \frac{100 \cdot n + \frac{3600}{n}}{100 \cdot (n+1) + \frac{3600}{n+1}} = \frac{100n^2 + 3600}{100(n+1)^2 + 3600} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \frac{100n^3 + 100n^2 + 3600n + 3600}{100n^3 + 200n^2 + 3700n} \begin{cases} > 1 & \text{falls } 1 \leq \text{n} \leq 5 \\ < 1 & \text{falls } 6 \leq n \end{cases}$$

Die Folge K(n) ist also streng monoton fallend, wenn $1 \leq \text{n} \leq 5$, und streng monoton steigend ab dem 6. Folgenglied. Somit nimmt die Folge ihren kleinsten Wert für n=6 an.

6. Schritt: Auswertung des Ergebnisses, bzw. Übersetzung der Lösung der mathematischen Aufgabe in die Sprache der Wirtschaft

Die Gesamtkosten sind minimal, wenn 6 Bestellungen pro Periode erfolgen. In diesem Fall betragen die Gesamtkosten: $K(6) = 100 \cdot 6 + \frac{3600}{6} = 1200$,-€ und die optimale Bestellmenge ist demnach 8000 Stück.
Nach dem 2. Schritt ist durchaus denkbar, den funktionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bestellungen und den entstandenen Kosten durch eine stetige

Funktion zu modellieren. Dass es in diesem Fall in strengstem Sinne um eine Modellierung geht, also um eine Darstellung des Sachverhaltes, die nicht in jedem Detail der Realität entspricht, soll im Unterricht thematisiert werden. Diese Herangehensweise hat folgende Vorteile:

- Sie kann die Definition von Verknüpfungen (Summe) von Funktionen und durch die Frage nach dem Minimum die Einführung der Begriffe Beschränktheit, Monotonie und Extremwerte von Funktionen aus praktischer Sicht motivieren;
- Sie kann Lernende motivieren, einen Zusammenhang zwischen Änderung im Monotonieverhalten und Existenz von Extremwerten herzustellen. Diese Stelle kann auch als Ausgangspunkt für die Einführung des Ableitungsbegriffs dienen;
- Sie macht die Bedeutung der Kurvendiskussion an einem einfachen Beispiel klar.

In diesem Fall sieht eine skizzenhafte Lösung folgendermaßen aus:

3. Schritt: Modellierung: Aufstellung eines stetigen mathematischen Modells

Die Gesamtkosten berechnen sich aus der Summe der Bestellkosten und der Lagerkosten. Bezeichnet *x* (x≥1) die Anzahl der Bestellungen, dann betragen die Bestellkosten in Abhängigkeit davon $B(x) = 100 \cdot x$ und die Lagerkosten: $L(x) = \frac{48000}{2 \cdot x} \cdot 0{,}15$. Damit ergibt sich für die Gesamtkosten:

$$K(x) = B(x) + L(x) = 100 \cdot x + \frac{48000}{2 \cdot x} \cdot 0{,}15 = 100 \cdot x + \frac{3600}{x}, \quad x \geq 1.$$

4. Schritt: Übersetzung der Fragestellung in die Sprache der Mathematik

Gesucht ist damit der kleinste Wert der Funktion $K(x) = 100 \cdot x + \frac{3600}{x}$, x≥1, sofern er denn existiert.

5. Schritt: Lösung der mathematischen Aufgabe mit Hilfe der Ableitung

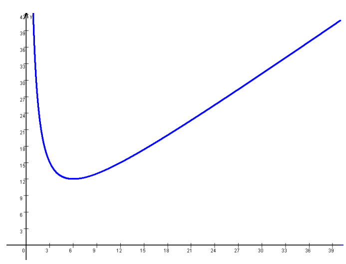
Variante a.)

$$K'(x) = 100 - \frac{3600}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad (\text{wegen } x \geq 1) \text{ stationäre Stelle}$$

$$K''(x) = \frac{3600}{x^3} \quad K''(6) = \frac{3600}{6^3} > 0 \quad \Rightarrow \text{ bei } x = 6 \text{ hat die Funktion } K(x) \text{ einen Tiefpunkt}$$

Variante b.) durch Ermittlung der Monotonie:

x	$1 \leq x < 6$	x=6	6<x
$f'(x)$	-	0	+
f(x)	↘	Tiefpunkt	↗



6. Schritt: Auswertung des Ergebnisses, bzw. Übersetzung der Lösung der mathematischen Aufgabe in die Sprache der Wirtschaft

Die Kostenfunktion hat bei x=6 einen Tiefpunkt. Da die Anzahl der Bestellungen ganzzahlig ist, ist dieser Tiefpunkt mit zugehörigem Minimum der realistisch denkbaren Kosten akzeptabel. Die Gesamtkosten sind also minimal, wenn 6 Bestellungen pro Periode erfolgen. In diesem Fall betragen die Gesamtkosten: $K(6) = 100 \cdot 6 + \frac{3600}{6} = 1200$,-€ die optimale Bestellmenge ist demnach 8000 Stück.

Weitere didaktische Bemerkungen

Die Aufgabe gibt nicht nur zum echten Problemlösen Anlass, sondern sie ermöglicht die Einführung von Begriffen (Folge, Monotonie, Beschränktheit) und kann somit grundlegende Konzepte der Analysis motivieren. Weiterhin kann durch den Vergleich des diskreten und mit dem stetigen Modell der modellhafte Aspekt der Mathematik thematisiert werden (Unterschiede der Modelle, Grenzen, Vor- und Nachteile, Zusammenhänge). Die beiden Lösungsansätze geben Anlass, die Frage der Übertragbarkeit auf andere Kontexte zu diskutieren, sie führen also zur Thematisierung der Verallgemeinerbarkeit verschiedener mathematischer Ansätze und deren Grenzen. Eine Untersuchung von Variationen der Aufgabe (z. B. durch variable Parameter) kann weitere Zusammenhänge zwischen der Aufgabenstellung und dem Ergebnis aufdecken und führt wiederum zur weiteren Verallgemeinerung der Aufgabe bzw. der Lösungsansätze.

Begriff der Analysis in der Wirtschaft

Um der letzteren Forderung genügen zu können, werden in Tabelle 2 skizzenhaft diejenigen zentralen Begriffe zusammengefasst, denen die Studenten während des Analysisunterrichts auf jeden Fall begegnen und die unmittelbare Anwendungen/Entsprechungen in der Ökonomie haben[42]:
Es wäre zu empfehlen, dass die wirtschaftlichen Entsprechungen und Anwendungen der mathematischen Inhalte unmittelbaren Platz im Analysisunterricht haben und die Vernetzung der Inhalte durch Herstellung von Querverbindungen zwischen Wirtschaft und Mathematik zur Förderung der beruflichen Qualifikationen beiträgt.

4. 4. Mathematische Kompetenz

In diesem Unterkapitel wird der Begriff der mathematischen Kompetenz näher untersucht. Nach einer mit dem im Unterkapitel 4. 1. erörterten Kompetenzbegriff [S. 12] im Einklang stehenden Begriffsklärung werden zwei Ansätze zur Festlegung von Kompetenzstufen kritisch diskutiert, anschließend wird ein Vorschlag für die Definition und Abstufung der mathematischen Kompetenz mit Bezug zur Wirtschaft ausführlich dargestellt, um zu thematisieren, was die mathematische Kompetenz in der nichtfachspezifischen Hochschulausbildung insbesondere in der wirtschaftlichen Fachhochschulausbildung ausprägen kann und soll.

[42] Siehe auch Tietze, 2006 und Schöwe/Knapp/Borgmann, 1996

Themenbereich	**mathematischer Begriff**	**wirtschaftliche Anwendung**
Folgen, Reihen	Geometrische Folge/Reihe	Zinseszinsrechnung, Rentenrechnung, Annuitätentilgung, Diskontierung
Funktionsbegriff	elementare Funktionen	funktionaler Zusammenhang zwischen zwei ökonomischen Variablen z. B. zwischen Preis und nachgefragter Warenmenge: Preis-Absatz-Funktion
	nicht elementare Funktionen	z. B. logistische Funktion: funktionaler Zusammenhang zw. Bestand (z. B. einer Bevölkerung, der Spartätigkeit, der Steuereinnahmen) und Zeit, allgemeine Form: $B(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-ct}}$, $a, b, c > 0$
	Durchschnittsfunktionen	Stückkostenfunktionen (durchschnittliche Gesamtkosten, durchschnittliche variable/fixe Kosten), Stückgewinnfunktion, Produktivität
	Funktionen mit mehreren Veränderlichen	funktionale Abhängigkeit einer ökonomischen Größe von mehreren ökonomischen Variablen z. B. hängt die Nachfrage eines Haushaltes nach einem Konsumgut vom Preis des Gutes und vom Einkommen des Haushaltes ab
	Grenzwert von Funktionen	Sättigungswert
Differentialrechnung	Differenzen - und Differentialquotient	mittlere und lokale Änderungsrate einer ökonomischen Funktion, z. B. Produktivität
	Ableitung	Grenzfunktionen: Grenzkosten-, Grenzerlös-, Grenzgewinn- usw. funktionen
	Untersuchung der Funktion auf Extremwerte	Ermittlung optimaler Werte ökonomischer Funktionen, z. B. Kostenminimierung, Gewinn- und Erlösmaximierung, Ermittlung des Betriebsminimums und -optimums
	Krümmungsverhalten	degressive/progressive Änderung einer ökonomischen Funktion z. B. von Kosten
	Elastizität	Nachfrageelastizität
Integralrechnung	Stammfunktion	Gesamtfunktionen (Gesamtkosten-, Gesamterlös-, Gesamtgewinnfunktion) als Stammfunktionen der ökon. Grenzfunktionen
	Ermittlung von Flächeninhalten	Ermittlung der Konsumenten- und der Produzentenrente, bzw. des Deckungsbeitrags

Tabelle 2: Begriffe der Analysis in der Wirtschaft

4. 4. 1. Begriffsklärung

Die mathematische Kompetenz[43] ist die Fähigkeit und der Wille, die mathematisierbaren Probleme aus dem Alltag mit Hilfe mathematischer Mittel zu lösen. Dies bedeutet neben der Fähigkeit, mathematische Konzepte in bestimmten Kontexten anwenden zu können auch die Fähigkeit, in der Sprache der Mathematik argumentieren, Argumentationen folgen, interpretieren und bewerten zu können. Dabei spielen Wissen, Kenntnisse, Anwendungsaktivitäten sowie Bereitschaft ebenfalls eine wichtige Rolle. Es soll betont werden, dass sich die mathematische Kompetenz in diesem Sinne nicht auf die Ausführung einzelner Berechnungen beschränkt, obwohl dies auch eingeschlossen ist, sondern eine verständnisvolle und gleichzeitig praktisch anwendbare Kenntnis mathematischer Modelle und Konzepte darstellt.
Mathematische Kompetenz setzt nicht nur die Kenntnis der Zahlen, Maßeinheiten, Algorithmen, Darstellungsformen sondern auch die der Strukturen, Begriffe, Konzepte, logischen Zusammenhänge, des Prozesses der Mathematisierung, der mathematischen Schlussfolgerung und Notation und der mathematischen Fachsprache voraus.
Es ist für die erfolgreiche Anwendung der Mathematik in alltäglichen Problemlösesituationen auch notwendig, Mathematik als Mittel, als Wissenschaft und als Denkleistung zu schätzen und ihr gegenüber eine positive Einstellung zu entwickeln.

4. 4. 2. Kompetenzstufen

Im Gegensatz zur fremdsprachlichen Kompetenz[44] ist die Definition mathematischer Kompetenz und deren Einteilung in Stufen bei weitem nicht einheitlich. Einen möglichen Ansatz für Stufenbildung stellen die Kompetenzstufen der europaweiten PISA-Studien dar. Die anfangs fünf, ab 2003 sechs Stufen mathematischer Kompetenz wurden anhand der ermittelten empirischen Daten erst nach der Durchführung der Untersuchungen festgelegt. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben des im Vorfeld vorbereiteten Aufgabenpools wurde abhängig davon festgelegt, welcher Anteil der an der Studie teilgenommenen Schüler sie zu lösen fähig war. So wurde jeder Aufgabe und weiterhin jedem Schüler eine bestimmte Punktzahl zugeordnet, auf der derart konstruierten Skala entspricht jeder Kompetenzstufe ein gleich breites Intervall[45]. Tabelle 3[46] gibt einen Überblick über die PISA-Kompetenzstufen an.
Dieser Ansatz ist in der einschlägigen Fachliteratur Gegenstand strengster Kritik[47]. Kritikpunkt ist nicht nur die willkürliche Konstruktion der Skala, sondern auch die Tatsache, dass die inhaltliche Beschreibung der einzelnen Kompetenzstufen aufgrund derjenigen Fähigkeiten, Kenntnisse und Bereitschaften erfolgte, die der jeweiligen Stufe zugeordnete Aufgaben erforderten, nicht aber umgekehrt. Es ist wei-

---

[43] Vgl. Kommission der Europäischen Gemeinschaften, 2005, S. 17.
[44] Siehe dazu Unterkapitel 4. 7. Fremdsprachliche Kompetenz [S.45].
[45] Zur Methodik der PISA-Studien siehe z. B. Organisation für witschaftliche Zusammenarbeit, 2004, S. 50-52.
[46] Es wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die tabellarische Darstellung von Kompetenzstufen in dieser Arbeit deren sinngemässe Struktur wiederspiegeln soll: Niederige Kompetenzstufen wurden unten, während höhere Kompetenzstufen oben platziert, Tabelle 3, aber auch Tabelle 4, 5 und 6 sollen daher von unten nach oben gelesen werden.
[47] Vgl. u. a. Meyerhöfer, 2004 und Meyerhöfer, 2005

terhin zu kritisieren, dass die unterschiedlichen Stufen nicht unbedingt die Ausprägung unterschiedlicher Qualitäten in der mathematischen Kompetenz bedeuten. An den angegebenen Merkmalen, durch die die Stufen festgelegt sind, ist nicht festzustellen, ob bzw. in welcher Hinsicht es bei einer höheren Stufe um eine qualitätsmäßig höhere Ausprägung der mathematischen Kompetenz geht. Im Gegenteil, es ist unklar, worin sich z. B. der Unterschied zwischen Stufe 1 und 2, bzw. Stufe 5 und 6 manifestiert. Es ist zwar nachzuvollziehen, dass ein Bogen von Grundkenntnissen über Anwendungen bis hin zur echten Problemlösung aufgespannt wird, die Kriterien für Abstufung bleiben allerdings m. E. schleierhaft. Somit erweist sich dieses Modell für die vorliegende Arbeit als ungeeignet und wird aus diesem Grunde abgelehnt.

Stufe 6	Verallgemeinerung, Konzeptualisierung, strategischer Umgang mit herausfordernden Problemlösesituationen
Stufe 5	Modellierung komplexer Situationen, Identifikation einschränkender Bedingungen, Spezifikation von Annahmen, strategisches Vorgehen, Reflexion der eigenen Arbeit
Stufe 4	Modellierung komplexer konkreter Situationen, Nutzung verschiedener Darstellungsformen, Erklärung und Begründung der Argumente für die eigene Interpretation
Stufe 3	Durchführung klar beschriebener Verfahren, Auswahl und Anwendung einfacher Problemlösestrategien, Identifikation von Informationen aus verschiedenen Quellen, kurze Berichte als Interpretation der Ergebnisse
Stufe 2	Identifikation von Informationen aus einer einzigen Quelle, Benutzung einer einzigen Darstellungsform, Anwendung elementarer Formeln, Verfahren, Regeln, wörtliche Interpretationen
Stufe 1	Identifikation von Informationen, Durchführung von Routineverfahren, Beantwortung von Fragen zu vertrauten Kontexten

Tabelle 3: Skizze der Kurzbeschreibung der Kompetenzstufen im Bereich mathematische Grundbildung in PISA 2003 (Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung, 2004, S. 53)

Einen anderen Ansatz in der Festlegung der Kompetenzstufen vertreten *Reiss/Heinze/Pekrun, 2007*. Die Autoren, die sich klar von den PISA-Studien abgrenzten, entwickelten auf der Grundlage des im Rahmen von IGLU[48] postulierten Kompetenzstufenmodells ein Modell der Entwicklung mathematischer Kompetenz für die Grundschule. Um den Unterschied auch im Wortgebrauch zum Ausdruck zu bringen, werden die Kategorien dieses Modells nicht als Stufen, sondern als Kompetenzentwicklungsniveaus bezeichnet. Die einzelnen Niveaus sind durch unterschiedliche Qualität in der Manifestation der mathematischen Kompetenz charakterisiert, was ermöglicht, auf der einen Seite Aufgaben und Schülerleistungen einzuordnen, auf der anderen Seite die Struktur der mathematischen Kompetenz zu ergreifen: die Reihenfolge der Niveaus ist, da sie aufeinander aufbauen, auch beim individuellen Lernprozess festgelegt. Es geht dabei also im strengen Sinne um eine

[48] IGLU steht für Internationale Grundschul-Lese-Untersuchung. Die internationale Bezeichnung dafür ist PIRLS (Progress in International Reading Literacy Study).

Taxonomie. Die Entwicklung der mathematischen Kompetenz durchläuft in diesem Sinne folgende Stufen[49]:

Niveau	Qualität der math. Kompetenz	Beispiele aus Klasse 2
Niveau 5	Problemlösen	Problemlösender Umgang mit Größen
Niveau 4	begriffliches Modellieren	Sicheres Rechnen in komplexeren Sachkontexten; Zahlenraum bis 100
Niveau 3	einfaches Modellieren	Sichere Beherrschung des kleinen Einmaleins, Anwendung bei einfachen Textaufgaben
Niveau 2	Grundfertigkeiten	Grundlagen des kleinen Einmaleins
Niveau 1	Grundlagenwissen, Ausführung von Routineprozeduren ohne Anwendungsbezug	Kenntnis des kleinen Einspluseins, Übertragung dessen auf Zehnerzahlen

Tabelle 4: Kompetenzentwicklungsniveaus Mathematik in der Grundschule (Reiss/Heinze/Pekrun, 2007)

Kritisieren kann man an diesem Modell m. E. nach insbesondere die starke Fokussierung auf kognitive Aspekte des mathematischen Wissens, obwohl der Kompetenzbegriff vielmehr umfassender ist, da er Motivation und Bereitschaft mit einschließt. Als Vorteil der Entwicklungsniveaus kann jedoch angesehen werden, dass sie sich in ihrer Qualität voneinander unterscheiden, was nicht nur aus Sicht der Theorie sinnvoll, sondern auch aus praktischer Sicht – bei der Zuordnung einer bestimmten Aufgabe oder einer bestimmten Schülerleistung – günstig ist. Somit scheint dieses Modell für die vorliegende Arbeit brauchbar zu sein. Es wird im Folgenden daher versucht, in Anlehnung an dieses Modell Stufen der mathematischen Kompetenz mit Bezug zur Wirtschaft herauszuarbeiten.

4. 4. 3. Mathematische Kompetenz mit Bezug zur Wirtschaft

Mathematische Kompetenz bedeutet für einen Ökonomen insbesondere die Fähigkeit und der Wille, die mathematisierbaren Probleme der Wirtschaft mit Hilfe mathematischer Mittel zu lösen und die mathematischen Ergebnisse auch aus Sicht der Wirtschaft interpretieren zu können. Dies bedeutet über die Fähigkeit hinaus, mathematische Konzepte in ökonomischen Kontexten anwenden zu können auch die Fähigkeit, in der Sprache der Mathematik zu argumentieren, Argumentationen folgen, interpretieren und bewerten zu können, um dadurch eine Basis für wirtschaftliche Entscheidungen zu liefern. Die mathematische Kompetenz beschränkt sich nicht nur auf die Ausführung einzelner Berechnungen, sondern stellt eine verständnisvolle und gleichzeitig in der Wirtschaft anwendbare Kenntnis mathematischer Modelle und Konzepte dar.

Wirtschaftsmathematische Kompetenz setzt nicht nur die Kenntnis von Zahlen und das Operieren mit ihnen, die Kenntnis von ökonomischen Größen (z. B. Nachfrage,

[49] Die Niveaus stehen in engem Zusammenhang mit der sog. Bloomschen Taxonomie, die die kognitiven Komponenten des Denkens erfasst. Diese wird im Kapitel 4.5 [S. 35] erörtert.

Angebot, Produktivität), ökonomischen Maßeinheiten (z. B. Währungen), Algorithmen und aus Sicht der Wirtschaft relevante Darstellungsformen (u. a. Tabellen, Graphiken, Funktionsgraphen), sondern auch die von Strukturen, Begriffen, Konzepten, logischen Zusammenhängen, von Prozessen der Mathematisierung und der mathematischen Modellierung, der mathematischen Schlussfolgerung und Notation und der mathematischen Fachsprache bzw. deren wirtschaftliche Entsprechungen und Interpretationen voraus.

Für die erfolgreiche Anwendung der Mathematik in ökonomischen Problemlösesituationen ist es notwendig, Mathematik als Mittel, als Wissenschaft und als Denkleistung zu schätzen und ihr gegenüber eine positive Einstellung zu entwickeln.

Das Kompetenzniveaumodell von Reiss, Heinze und Pekrun ermöglicht auch eine Übertragung auf wirtschaftsmathematischen Kontext. Es soll berücksichtigt werden, dass auf der Hochschulebene der mathematischen Bildung – und im Themenbereich Analysis insbesondere – bereits die Grundlagen durch Abstraktion gewonnene Begriffe bilden, die dann weiterhin als Ausgangspunkt für weitere Begriffsbildung dienen. In Anlehnung an dieses Modell können die verschiedenen Niveaus der wirtschaftsmathematischen Kompetenz im Bereich der Analysis meiner Ansicht nach durch folgende qualitative Ausprägungen charakterisiert werden (um dieses Modell von dem Modell von Reiss, Heinze und Pekrun trennen zu können, werden hierbei die Stufen mit den Buchstaben A, B, C, D, E bezeichnet):

- Auf der niedrigsten Stufe (Stufe A: Grundlagenwissen) sind gewisse elementare Fakten und Begriffe der Analysis zugänglich. Beispielsweise ist ein intuitives Verständnis von Begriffen wie Folge, Funktion, Tangente und Sekante, Monotonie, Hoch- und Tiefpunkte, Krümmung und Wendepunkte vorhanden, diese Begriffe können in konkreten Fällen auch identifiziert werden. Es sind insbesondere funktionale Zusammenhänge zwischen ökonomischen Größen (z. B. Preis und Nachfrage) bekannt.
- Die zweite Stufe (Stufe B: Grundfertigkeiten) ist durch die Herstellung von grundlegenden konkreten Verbindungen zwischen den auf Stufe A vorhandenen Begriffen gekennzeichnet, z. B. durch Herstellung von Verbindungen zwischen verschiedenen Repräsentationen einer (ökonomischen) Funktion/Folge (tabellarisch, graphisch, symbolisch), oder durch eine Verbindung zwischen Verlauf des Funktionsgraphen und der Steigung der Tangente. Ferner gehört die Anwendung von Sätzen, Regeln und Verfahren in Bezug auf Stufe A vorhandener Begriffe hierhin. Diese Stufe setzt also die Fähigkeiten der ersten Stufe voraus, geht aber durch die kognitive Verknüpfung deren Inhalte darüber hinaus.
- Die dritte Stufe weicht m. E. vom Modell von Reiss, Heinze und Pekrun ab, da die Qualität des Denkens, die auf dieser Stufe erscheint, mehr dem begrifflichem als dem einfachen Modellieren nahekommt. Auf dieser Stufe (Stufe C: begriffliches Modellieren) wird nämlich die Fähigkeit gefordert, zwischen bereits vorhandenen Begriffen durch analytische Herangehensweise neuartige Zusammenhänge zu entdecken. Diese Stufe setzt einen neuen Blick auf die Inhalte der zweiten Stufe voraus: Beispielsweise wird „Tangente“ als Grenzlage von Sekanten, Tangentensteigung als Grenzwert von Sekantensteigungen, momentane Änderungsrate als Grenzwert von mittleren Änderungsraten, Differentialquotient als Grenzwert von Differenzenquotienten aufgefasst.

• Die nächste, vierte Stufe (Stufe D: komplexes begriffliches Modellieren) wird dadurch geprägt, dass Verbindungen der dritten Stufe durch Verallgemeinerung neu interpretiert werden. Es kann beispielsweise die Verbindung zwischen Verlauf des Funktionsgraphen und der Steigung der Tangente mit Hilfe des Ableitungsbegriffs neu erfasst werden. Diese Interpretation setzt die Arbeit auf einer weiteren Abstraktionsebene voraus und führt beispielsweise zur Diskussion ökonomischer Funktionen.
• Die letzte Kompetenzstufe (Stufe E: Problemlösen) beinhaltet den kreativen und selbstständigen Umgang mit Inhalten der vorangehenden vier Stufen zum Zweck des Lösens ökonomischer Probleme. Auf dieser Stufe ist sowohl die Fähigkeit als auch die Bereitschaft vorhanden, Probleme und Methoden zu verallgemeinern, die erworbenen Kenntnisse auf neue Probleme anzuwenden, Analogien und Unterschiede zwischen wirtschaftlichen und mathematischen Problemen bzw. mathematischer Modelle zu entdecken.
Die Tabellen 5 und 6 enthalten Konkretisierungen des angeführten Modells aus dem Themenbereich Differentialrechnung und Folgen und sollen das Gemeinte verdeutlichen.

Stufe	**Qualität der math. Kompetenz**	**Beispiele für Ausprägung in der Wirtschaftsmathematik**
E	Problemlösen	Selbstständiges Modellieren und Lösen ökonomischer Extremwertprobleme, Verallgemeinerung von Problemen und Methoden, Parameterwahl nach vorgegebenen Aspekten, Herstellung von Verbindungen zu verwandten mathematischen sowie wirtschaftlichen Problemen, Überblick der Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Modellierung
D	komplexes begriffliches Modellieren	Diskussion ökonomischer Funktionen mit Hilfe der Differentialrechnung, Verallgemeinerung des Tangentenbegriffs
C	begriffliches Modellieren	Tangente als Grenzlage von Sekanten, Ermittlung der Tangentensteigung/der momentanen Änderungsrate als Funktionsgrenzwert, Ableitung und ihre ökonomische Interpretation, sichere Beherrschung der Ableitungsregeln
B	Grundfertigkeiten	Herstellung von Verbindungen zwischen verschiedenen Repräsentationen einer (ökonomischen) Funktion (tabellarisch, graphisch, symbolisch); Ermittlung der mittleren Änderungsrate ökonomischer Funktionen im allgemeinen Fall; Herstellung von Verbindungen zwischen Funktionseigenschaften und Tangentensteigung
A	Grundlagenwissen, Routineprozeduren ohne Anwendungsbezug	Identifikation bestimmter Funktionseigenschaften (Monotonie, Extremwerte, Krümmung) und von Funktionswerten am Graph der Funktion; intuitive Vorstellung von Tangente und Sekante einer Funktion (Zeichnung am Graph); Ermittlung der mittleren Änderungsrate ökonomischer Funktionen im konkreten Fall

Tabelle 5: Kompetenzentwicklungsniveaus Themenbereich Differentialrechnung

Stufe	Qualität der math. Kompetenz	Beispiele für Ausprägung in der Wirtschaftsmathematik
E	Problemlösen	Modellierung von funktionalen Zusammenhängen zwischen diskreten ökonomischen Größen mithilfe von Folgen, Anwendung von Folgen als Mittel zum Problemlösen
D	komplexes begriffliches Modellieren	Verallgemeinerung von Zusammenhängen zwischen den Begriffen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz
C	begriffliches Modellieren	Erkenntnis von Zusammenhängen zwischen den Begriffen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz, Herstellung von Verbindungen zwischen ihnen
B	Grundfertigkeiten	Anwendung bestimmter Verfahren, Methoden, Regeln, Sätze in konkreter Situation. Beispielsweise Anwendung von Grenzwertsätzen oder Monotoniekriterien zur Ermittlung des Monotonie- oder Konvergenzverhaltens von konkret vorgegebenen Folgen
A	Grundlagenwissen, Ausführung von Routineprozeduren ohne Anwendungsbezug	Kenntnis des Folgenbegriffs, Fähigkeit, konkrete Folgen anzugeben; Kenntnis der Begriffe Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz, Beispiele hierfür angeben können; Ermittlung von Folgenglieder bei rekursiv oder explizit vorgegebenen Folgen, Erfassen von Tendenzen hinsichtlich ihres Monotonieverhaltens, Beschränktheit oder Konvergenz

Tabelle 6: Kompetenzentwicklungsniveaus Themenbereich Folgen

4. 5. Kognitive Komponenten des mathematischen Wissens

In diesem Unterkapitel werden verschiedene Ansätze zur Charakterisierung der kognitiven Komponenten des Wissens thematisiert, bzw. anhand eines kognitionspsychologischen Konzepts gezeigt, inwieweit sich diese Ansätze vereinbaren und insbesondere auf das mathematische Wissen anwenden lassen.

4. 5. 1. Die Bloomsche Taxonomie

Die allgemeinen kognitiven Lernziele, d.h. die im Hinblick auf Lernprozesse wichtigsten Komponenten des Denkens wurden 1956 von Bloom[50] formuliert. Die von ihm genannten 6 Komponenten bauen hierarchisch aufeinander auf und sind in weitere, ebenfalls hierarchisch geordnete Teilkomponenten untergliedert. Dieses allgemeine fächerübergreifende Modell, die sog. Bloomsche Taxonomie, stellt eine detaillierte Behandlung der wichtigsten Komponenten des Denkens dar und fand nicht nur in der Mathematikdidaktik – u. a. von Wilson, Winter, Zech und Gagné wurde diese auf den Mathematikunterricht übertragen –, sondern z.B. auch in der Informa-

[50] Die Theorie erschien ursprünglich auf Englisch in Bloom, B. S. (1956): Taxonomy of Educational Objectives. Handbook 1: Cognitive domain. New York: Longman. Eine deutsche Übersetzung wurde 1976 veröffentlicht: Bloom, B. S. (1976): Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich. Weinheim: Beltz Studienbuch Verlag.

tikdidaktik Echo. Auf der niedrigsten Stufe der Taxonomie werden die Kenntnisse eingeordnet, die im Sinne von Bloom *„die Vergegenwärtigung spezieller und allgemeiner Fakten, von Methoden und Verfahren, sowie die Vergegenwärtigung von Beziehungsnetzen, von Strukturen oder begrifflichen Rahmen“*[51] bedeuten. Ab der zweiten Stufe geht es um intellektuelle Fähigkeiten und Fertigkeiten, die *„die geistigen Prozesse des Organisierens und Reorganisierens von Material zur Erreichung bestimmter Absichten“*[52] betonen. Die Taxonomie ist wie folgt aufgebaut:

Stufe		**charakteristische Merkmale**	**Teilkomponenten**
1. Kenntnisse		Vergegenwärtigung spezieller und allgemeiner Fakten, von Methoden und Verfahren, von Beziehungsnetzen, Strukturen, begrifflichen Rahmen	• Kenntnis spezieller Fakten • Kenntnis von Methoden für den Umgang mit speziellen Fakten • Kenntnis allgemeiner Gesetzmäßigkeiten und der abstrakten Struktur des Gebietes
Intellektuelle Fähigkeiten und Fertigkeiten	*2. Erfassen*	Niedrigste Stufe des Verstehens: das Individuum begreift, worum es geht	• Übertragung • Interpretation • Extrapolation
	3. Anwendung	Gebrauch von allgemeinen Prinzipien in speziellen und konkreten Situationen	
	4. Analyse	Zerlegung eines Sachverhaltes in seine Bauelemente oder Bestandteile	• Identifizierung von Elementen • Analyse von Beziehungen • Analyse der Strukturprinzipien
	5. Synthese	Zusammensetzen von Elementen und Teilen zu einem Ganzen	• Produktion einer einheitlichen Beschreibung • Produktion eines Planes oder eines „Flussdiagramms“ • Ableitung einer Menge abstrakter Relationen
	6. Bewertung	Urteile über den Wert von Methoden und Materialien bzgl. gegebener Zwecke	• Urteile bzgl. interner Kriterien • Urteile bzgl. externer Kriterien

Tabelle 7: Die Bloomsche Taxonomie

All diese Komponenten des menschlichen Denkens spielen eine wichtige Rolle in der Mathematik, strukturtreue Adaptationen haben Wilson[53] bzw. Zech[54] durchge-

[51] Wittmann, 1976, S. 33-34
[52] Wittmann, 1976, S. 34
[53] siehe bei Wittmann, 1976 S. 36

führt. Die von Winter[55] und Gagné[56] entwickelten Modelle operieren allerdings auf mehreren Denkebenen. Eine Erweiterung um eine neue Dimension stellt das Modell von *Anderson et al., 2001* dar, welches im Abschnitt 4. 5. 3. Revision der Bloomschen Taxonomie [S. 43] erörtert wird.

4. 5. 2. Ansatz des konzeptuellen und prozeduralen Wissens

Begriffsklärung

Der Ansatz über prozedurales und konzeptuelles Wissen beruht auf der Annahme, dass in der Mathematik zweierlei Wissensinhalte eine Rolle spielen und demzufolge zweierlei Wissensinhalte im Mathematikunterricht vermittelt und im mathematischen Wissenserwerbsprozess verarbeitet werden sollen. Dass die Aufstellung dieser Dichotomie nicht nur berechtigt sondern auch von grundlegender Bedeutung ist, steht in der fachdidaktischen Forschung außer Zweifel, so formulieren in Bezug auf diesen Ansatz Byrnes und Wasik: „*…there appears to be a growing consencus that the distinction is both general and fundamental.*" (Byrnes/Wasik, 1991, S. 777). Sie begründen die Unterscheidung zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen durch folgende kognitionspsychologische Argumente: Erstens, prozedurales Wissen kann nicht auf konzeptuelles Wissen reduziert werden. Zweitens, prozedurales und konzeptuelles Wissen dienen unterschiedlichen kognitiven Funktionen. Drittens, die Dichotomie ist notwendig um zweierlei empirische Befunde erklären zu können: Einerseits, dass in zahlreichen Fällen Lernende über hochwertiges konzeptuelles aber über geringwertiges prozedurales Wissen verfügen oder umgekehrt, bzw. dass eine Veränderung der Aufgabenstellung oft zur Folge hat, dass sich die Leistung in einem Bereich vermindert, im anderen jedoch nicht[57]. Es ist wichtig zu betonen, dass dieses dichotome Begriffspaar nicht nur Einzug in die Theorie der Mathematikdidaktik, sondern auch Bezug zur Praxis des Mathematikunterrichtes fand und sich demzufolge auf theoretischer sowie empirischer Ebene erforschen[58] lässt.
Diese beiden Wissensinhalte trugen in mathematikdidaktischen Arbeiten immer wieder andere Namen: So spricht beispielsweise *Skemp, 1979* von „knowing that" und „knowing how", *Nesher, 1986* von „understanding" und „algorithmic performance", *Sfard, 1994* von „structural thinking" und „operational thinking". Einen ausführlichen Überblick der Bezeichnungen aus den letzten Jahrzehnten findet man bei mehreren Autoren, so z. B. bei *Hiebert, 1986*, bei *Haapasalo, 2003*, oder bei *Haapasalo/Kadijevich, 2000*. In der deutschsprachigen Literatur sind heute die synonym verwendeten Bezeichnungen konzeptuelles bzw. begriffliches Wissen, und prozedurales Wissen verbreitet, in der vorliegenden Arbeit schließe ich mich diesem Wortgebrauch an. Trotz der terminologischen Vielfalt kann allerdings festgestellt werden, dass die wichtigsten Merkmale, durch die die beiden Wissensinhalte charakterisiert werden, überwiegend einheitlich sind. Prozedurales Wissen ist etwas Dynamisches: zu diesem Bereich gehört die Fähigkeit, Algorithmen, Regeln, Re-

[54] Claus, 1989, S. 27-28
[55] Vgl. Wittmann, 1976, S. 37
[56] Vgl. Wittmann, 1976, S. 39
[57] Siehe Byrnes/Wasik, 1991, S. 777
[58] Vgl. : „*The distinction between procedural and conceptual mathematical knowledge seems appropriate at both theoretical and practical levels.*" (Kadijevich, 2003)

chenverfahren, sog. Prozeduren auszuführen, der Ablauf der Denkprozesse wird in diesem Fall als überwiegend unbewusst, automatisiert, unreflektiert charakterisiert. Demgegenüber versteht man unter konzeptuellem Wissen etwas Statisches: Diesen Bereich machen Begriffe, Begriffsnetze, semantische Strukturen, Hierarchien, sog. Konzepte aus. Konzeptuelles Wissen ist reich an Beziehungen, es schließt weiterhin bewusste Handlungen, metakognitive Prozesse und Reflexion ein, hier spielt Bewusstsein und Verständnis eine größere Rolle als beim prozeduralen Wissen.

Haapasalo greift diese Merkmale unter Berücksichtigung moderner Lerntheorien auf und schlägt folgende, in weitem Kreis akzeptierte Definition vor, an die ich mich an dieser Stelle anlehnen möchte:

„*Prozedurales Wissen (P) bedeutet Wissen über dynamische und erfolgreiche Anwendungen gewisser Regeln, Algorithmen oder Prozeduren mit Hilfe einer oder mehrerer Repräsentationen. Dafür ist aber (gewöhnlich) ein bestimmtes Wissen nicht nur über die jeweiligen Objekte, sondern auch von der Syntax ihrer Repräsentationen erforderlich.*

Begriffliches Wissen (C) bedeutet Wissen über Elemente eines Netzwerkes sowie dessen Zusammenhänge und ein entsprechendes Verständnis hierüber, sowie Wissen über dynamisches Wechseln zwischen verschiedenen Repräsentationen dieser Objekte. Diese Netzelemente können z. B. Begriffe, Regeln (Algorithmen, Prozeduren usw.) sogar Probleme sein (ein gelöstes Problem kann einen neuen Begriff oder eine neue Regel erzeugen).“ (Haapasalo, 2003, S. 59)

Prozedurales Wissen ist also in diesem Sinne vielmehr ein Können: Es beinhaltet insbesondere die Fähigkeit, das Gelernte meistens unbewusst und unreflektiert in der Praxis anzuwenden. Demgegenüber betrifft konzeptuelles Wissen eine höhere Denkebene: Es beinhaltet insbesondere Begriffe und ihre Verknüpfungen, zu denen man erst durch Abstraktion und Reflexion, also durch Bewusstmachung des eigenen Lernprozesses oder zumindest durch tieferes Verständnis des Gegenstandes gelangt.

Der Unterschied zwischen dem konzeptuellen und dem prozeduralen Wissen soll weiterhin einmal an einem Beispiel aus dem Bereich der Prozentrechnung plausibel gemacht werden. In diesem Kontext formuliert Haapasalo[59], dass ein Schüler über begriffliches Wissen verfügt, wenn er sachgemäße Querverbindungen zwischen verbalen, bildlichen und symbolischen Attributen bilden kann, die Denkprozesse laufen in diesem Fall auf bewusster Ebene. Über prozedurales Wissen zu verfügen bedeutet, dass man fähig ist, von gegebener Situation ausgehend die Prozentzahl zu berechnen, wobei die Denkprozesse unbewusst laufen können. In meiner Interpretation heißt es, dass der Lernende über begriffliches Wissen im Bereich der Prozentrechnung verfügt, wenn er fähig ist, durch eine Bruchzahl, Prozentzahl oder Graphik darzustellen bzw. sich und anderen bewusst zu machen, was z. B. „7 Stimmen von 10 Stimmen“ oder „6 Stunden von einem Tag“ bedeuten. D. h. er ist fähig, Querverbindungen zwischen verschiedenen Repräsentationen des gleichen Begriffs herzustellen. Hierfür ist ein Wissen erforderlich, das das Wesentliche eines Bruches, also Verständnis beinhaltet. Der Lernende verfügt m. E. über prozedurales Wissen in diesem Bereich, wenn er fähig ist, im Allgemeinen ohne viel Nachdenken Brüche wie beispielsweise $\frac{7}{10}$ in Prozentschreibweise umzuwandeln. Hierfür

[59] Haapasalo, 2003, S. 60

ist ein Wissen über bestimmte Rechenverfahren relevant: Beispielsweise lässt sich diese Aufgabe u. a. durch Erweiterung $\frac{7}{10} = \frac{70}{100} = 70\,\%$, durch Division $7:10 = 0{,}7 = 70\,\%$, oder aber durch proportionale Zuordnung 1 entspricht 100%; $\frac{1}{10}$ entspricht $10\,\%$; $\frac{7}{10}$ entspricht $70\,\%$ lösen.

An einem weiteren Beispiel aus dem Bereich der Analysis, nämlich am Begriff der Zahlenfolge, soll klar gemacht werden, was konzeptuelles und prozedurales Wissen in der höheren Mathematik bedeutet. Im Sinne der Definition von Haapasalo verfügt der Lernende über das Konzept der Folge, wenn er fähig ist, Beispiele hierfür symbolisch, graphisch und verbal darzustellen, bzw. sich und anderen bewusst zu machen, was z. B. $a_n = \frac{1}{n}$ bedeutet. Dabei ist er nicht nur fähig, Querverbindungen und Übergänge zwischen den verschiedenen Repräsentationen herzustellen, sondern er ist sich der Unterschiede der Repräsentationen bewusst und er kann den Begriff der Folge mit dem Begriff des Unendlichen verknüpfen. Über prozedurales Wissen zu verfügen heißt in diesem Kontext, dass der Lernende i. A. automatisiert beliebige Glieder einer gegebenen Folge berechnen kann. Zur Übersicht folgen die zwei Beispiele in tabellarischer Darstellung:

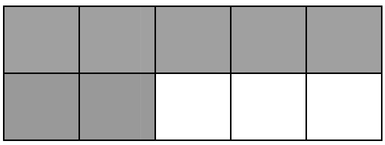
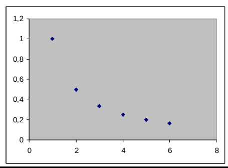
	Prozentrechnung	**Zahlenfolgen**
konzeptuell	$\frac{7}{10}$  70%	Folge der Stammbrüche $a_n = \frac{1}{n}$ 
prozedural	$\frac{7}{10} = \frac{70}{100} = 70\,\%$ oder: $7:10 = 0{,}7 = 70\,\%$ oder: $1 = 100\,\%$ $\quad \frac{1}{10} = 10\,\%$ $\quad \frac{7}{10} = 70\,\%$	$a_1 = \frac{1}{1} = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{1}{3}$; $a_4 = \frac{1}{4}$; $a_{132} = \frac{1}{132}$

Tabelle 8: Unterschied zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen anhand Beispielen aus der Prozentrechnung und aus dem Themenbereich Zahlenfolgen

Die empirische Untersuchung von konzeptuellem und prozeduralem Wissen kann durch die Messung des Erfolges bei der Lösung mathematischer Aufgaben erfolgen, die prozedurales und konzeptuelles Wissen erfordern.

Es soll jedoch angemerkt werden, dass eine strikte Trennung zwischen prozeduralen und konzeptuellen Aufgaben nicht immer möglich ist, da die meisten Aufgaben sowohl begriffliche als auch prozedurale Komponenten aufweisen[60]. Trotzdem gehen die meisten empirischen Untersuchungen davon aus, dass eine generelle Unterscheidung zwischen prozeduralen und konzeptuellen Aufgaben angebracht ist, abhängig davon, welche Wissensart bei der Lösung der jeweiligen Aufgabe dominiert. Man sollte aber nicht vergessen, dass diese Unterscheidung stark von der jeweiligen Situation und insbesondere von der Lerngruppe, von der Lehrperson, vom vorangegangenen Unterricht und vom Thema abhängt.

Forschungsstand- und Kritik

Ansätze in Bezug auf die Priorität

Soll man erst einmal verstehen, um Aufgaben lösen zu können, oder entwickelt man anhand von Berechnungen und Aufgaben ein Verständnis für Begriffe So könnte die zentralste Fragestellung der theoretischen Arbeiten hinsichtlich des konzeptuellen und prozeduralen Wissens plausibel gemacht werden. Es handelt sich darum, welcher der beiden Wissensinhalte Priorität dem anderen gegenüber hat, welcher der beiden Wissensinhalte wichtiger als der andere ist. Eins steht immerhin für die Vertreter beider Akzentuierungen fest: Die beiden Wissensarten müssen in irgendeiner Weise in Verbindung miteinander stehen. Der Frage nach dem Wie wird aus dem Grund eine entscheidende Bedeutung beigemessen, weil durch ihre Klärung mehr Einsicht in die Tiefenstruktur der mathematischen Wissenserwerbsprozesse gewonnen und dadurch bessere Chancen für eine effektive und nachhaltige Gestaltung des Mathematikunterrichts erzielt werden könnten. Aus diesem Grund beschäftig(t)en sich zahlreiche Autoren mit dem Thema und versuchen eine endgültige Antwort auf diese Frage zu geben.
Vertreter des sog. Entwicklungsprinzips[61] gehen dabei davon aus, dass sich Einsicht, Verständnis, d.h. begriffliche Inhalte und Begriffsnetze aufgrund ausgeführter Berechnungen und Prozeduren entwickeln. Nach diesem Prinzip geht das prozedurale Wissen dem tieferen Verständnis voraus und bildet insofern die Grundlage für Letzteres. Diese Argumentation kann durch onto- aber auch durch phylogenetische Ansätze untermauert werden: Die Mathematikgeschichte, aber auch die kognitive Entwicklung von Kleinkindern liefern genug Beispiele, bei denen die Durchführung bestimmter Prozeduren der Konstruktion konzeptuellen Wissens vorausgeht.
Andere Autoren behaupten, dass ohne Verstehen, ohne konzeptuelles Wissen keine Prozeduren ausgeführt werden können. Diese Behauptung gilt als das sog. Bildungsprinzip. Begründet werden kann es durch Argumente, die sich auf Problemlösen bzw. auf den Erwerb neuen prozeduralen Wissens beziehen. So vertrat Piaget[62] die Meinung, dass der Erfolg beim Problemlösen von der Entwicklung des konzeptuellen Wissens abhängt. Anderson[63] behauptet weiterhin, dass die Konstruktion von neuem prozeduralem Wissen durch die Aktivierung des vorhandenen konzep-

[60] Vgl.: *„most items of knowledge have both conceptual and procedural features.“* (Haapasalo/Kadijevich, 2000, S. 142)
[61] Die Bezeichnungen „Entwicklungsprinzip“ und „Bildungsprinzip“ werden von Haapasalo in Haapasalo, 2003 verwendet.
[62] Piaget, 1952, Verweis bei Carpenter, 1986
[63] Anderson, 1983, Verweis bei Byrnes/Wasik, 1991

tuellen Wissens erfolgt, demzufolge ist die Verfügung über konzeptuelles Wissen eine Voraussetzung für den Erwerb von prozeduralem Wissen.
Da beide Argumentationen durch empirische Untersuchungen belegt werden konnten, ist es offensichtlich, dass beide Thesen durchaus berechtigt sind. Ich bin doch der kritischen Meinung, dass die Diskussion um eine eindeutige Aussage hinsichtlich der Priorität generell falsch ist und der Annahme, es gäbe eine einzige Antwort auf diese Frage nicht gerecht werden kann. Die eine Behauptung schließt nämlich m. E. die andere nicht aus. Vielmehr scheint es relevant zu sein zu untersuchen, unter welchen Bedingungen einmal das prozedurale und einmal das konzeptuelle Wissen dominiert. Meiner Meinung nach weist die einschlägige Forschung Mangel an der Untersuchung des Umfeldes auf: Bei der Fokussierung auf die Priorität sind die Bedingungen, unter denen man zum jeweiligen Ergebnis gekommen ist, vernachlässigt worden. Aus meiner Sicht wäre es angemessener, diese Voraussetzungen näher zu analysieren und dabei Kriterien für die Priorität des einen bzw. des anderen Wissensinhaltes zu erarbeiten.

Verbindung zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen

Eine weitere zentrale Rolle spielt in der einschlägigen Literatur die Frage nach der Verbindung zwischen dem begrifflichen und prozeduralen Wissen, die allerdings in starkem Zusammenhang mit der „Prioritätsfrage“ steht. Ich verweise auf den Artikel von *Haapasalo/Kadijevich, 2000*, die nicht nur zahlreiche Arbeiten zum Thema aufgreifen, sondern bei deren Reflexion zum wichtigen Schluss kommen, dass bis heute in der empirischen Forschung insgesamt vier mögliche Relationen zwischen dem prozeduralen und dem begrifflichen Wissen belegt worden sind. Es geht um folgende Ansätze:

- *Inaktivierungsansatz:* Es gibt keinen nachweisbaren Zusammenhang zwischen Verstehen und Ausführung von Prozeduren. Erkennen und Begreifen von begrifflichen Inhalten führt nicht automatisch zu Erfolg bei Prozeduren. Weiterhin können Prozeduren durchaus ohne konzeptuelles Wissen korrekt ausgeführt werden, was auch die Existenz von Computern belegt, dementsprechend herrscht keine Verknüpfung zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen vor[64].
  Kritik an einer solchen Aneignung von Prozeduren äußert Schlöglmann[65], der zwar aus neurobiologischer Sicht begründet, dass ein Lernen ohne Verstehen möglich ist, kritisiert aber die starke Eingeengtheit des auf diese Art und Weise erworbenen Wissens. In diesem Fall erfolgt kein adäquater Begriffsbildungsprozess, was kein Ziel eines modernen, kompetenzorientierten Mathematikunterrichts bilden kann.
- *Ansatz der simultanen Aktivierung*: Prozedurales und konzeptuelles Wissen werden in bestimmten Fällen – beispielsweise bei der Ausführung von einfachen Bruchadditionen –, gleichzeitig aktiviert. Ein hohes Niveau an konzeptuellem Wissen ermöglicht die Korrektur der Additionsfehler, prozedurales Wissen die

[64] Vgl. Nesher, 1986
[65] Vgl.: *„Die Informationen, die aus diesem Lernprozess entstehen, sind hyperspezifisch, d. h. sie sind sehr stark an die Art und Weise der Wahrnehmung gebunden und enthalten kaum abstrakte Elemente, die einen flexiblen Einsatz bei Problemlösungen ermöglichen würden.“* In: Schlöglmann, 2004, S. 511

richtige Ausführung der Additionen[66]. In diesem Sinne ist konzeptuelles Wissen notwendig und hinreichend für prozedurales Wissen.

- *Ansatz der dynamischen Interaktion*: Im Gegensatz zum Ansatz der simultanen Aktivierung geht es in diesem Fall um eine diachrone Aktivierung der beiden Wissensinhalte. Im ersten Schritt bildet konzeptuelles Wissen die Basis für die Erlernung neuer Prozeduren. Die Reflexion und Erklärung dieser ermöglicht in einem zweiten Schritt die Entwicklung neuen konzeptuellen Wissens.[67] Nach diesem Ansatz ist konzeptuelles Wissen notwendig, aber nicht hinreichend für prozedurales Wissen.
- *Genetischer Ansatz*: Durch Experimentieren, durch Manipulation an Objekten, durch Untersuchung von Exemplaren und Nicht-Exemplaren, weiterhin durch kognitive Reflexion dieser Tätigkeiten, durch Generalisierung[68], Analogisierung, Vergleich und Abstraktion gelangt man zu konzeptuellem Wissen. In dieser Hinsicht ist prozedurales Wissen notwendig, aber nicht hinreichend für konzeptuelles Wissen.

Es ist festzustellen, dass der genetische Ansatz bzw. der Ansatz der simultanen Aktivierung mit dem Entwicklungsprinzip zusammenhängen, bzw. dass der Ansatz der dynamischen Interaktion und eventuell auch der Ansatz der simultanen Aktivierung eine Grundlage für die Argumente für das Bildungsprinzip bilden können. Dabei gilt m. E. wie oben: Jeder Ansatz hat durch empirische Belege seine Berechtigung. Dementsprechend scheint die Frage überholt zu sein, welcher Ansatz allgemein gültig ist, es sollte vielmehr herausgearbeitet werden, unter welchen Bedingungen die eine oder andere Reihenfolge der Konzepte seine Gültigkeit hat, bzw. ob eventuell unter bestimmten Voraussetzungen eine weitere Relation zwischen den beiden Wissensarten vorherrscht.

Empirische Untersuchungen und ihre Kritik

In empirischen mathematikdidaktischen Studien über konzeptuelles und prozedurales Wissen wird überwiegend das oben skizzierte Spannungsfeld hinsichtlich der Relation zwischen den beiden Wissensarten untersucht. In Anlehnung an ein ausführliches Review von Rittle-Johnson und Siegler übt *Star, 2000* Kritik an der zu engen Betrachtungsweise dieser Arbeiten aus, und formuliert u. a., dass die zentralen Fragestellungen ausschließlich im Bereich der Elementarmathematik untersucht wurden und es an Studien in der höheren Mathematik, so in der Algebra, Analysis und in der Geometrie mangelt. Diese Kritik ist m. E. nicht nur berechtigt, sondern deckt solche Mängel auf, deren Beseitigung u. U. auch auf theoretische Resultate Auswirkungen haben können.

Umgekehrt gilt allerdings, dass in relevanten Studien, die Fragen hinsichtlich des konzeptuellen und prozeduralen Wissens in anderen Bereichen der Mathematik wie z.B. in der Analysis aufwerfen, solche Fragestellungen dominieren, die den Einfluss bestimmter methodologischer Faktoren auf die Entwicklung der beiden Wissensinhalte untersuchen. So stellt beispielsweise *Palmiter, 1991* die Frage, ob die Ver-

[66] Vgl. Byrnes/Wasik, 1991

[67] Vgl. Byrnes/Wasik, 1991

[68] Vgl.: „*The basic principle of mathematical discovery, they would say, is finding the general by scrutiny of the particular.*" In: Sfard, 1994, S.50

wendung von Computer-Algebra-Systemen im universitären Analysisunterricht (Integralrechnung) die Entwicklung des konzeptuellen Wissens beeinflusst. Ähnliche Fragestellungen sind im letzten Jahrzehnt in der einschlägigen empirischen Forschung dominant. Studien, die die Wirkung einer Fremdsprache auf das konzeptuelle und prozedurale Wissen untersuchen würden, sind nicht bekannt.

4. 5. 3. Revision der Bloomschen Taxonomie unter Berücksichtigung des konzeptuellen/prozeduralen Wissens

Die zwei oben thematisierten Ansätze zur Charakterisierung der beiden kognitiven Komponenten des Mathematiklernens schließen einander nicht aus. *Anderson et al., 2001* führten die beiden Ansätze in einem allgemeinen Konzept, welches sich nicht nur auf den Mathematikunterricht, sondern allgemein auf die Kognition beim Lernen bezieht, zusammen. Dieses Konzept lässt sich m. E. mühelos auf den Mathematikunterricht anwenden. Nach der Analyse von Lernzielen (beispielsweise in Lehrplänen und Bildungsstandards) kamen Anderson et al. zum Ergebnis, dass die beiden Ansätze – die Bloomsche Taxonomie der kognitiven Stufen und die Theorie des konzeptuellen und des prozeduralen Wissens – zwei verschiedene Dimensionen der Kognition darstellen. Die eine Dimension – nach Anderson et al. die sog. Dimension der kognitiven Prozesse –, die die Kategorien der Bloomschen Taxonomie (Kenntnisse[69], Erfassen, Anwendung, Analyse, Synthese, Bewertung) enthält, zeigt, welche kognitiven Operationen der Lernende auszuüben fähig ist. Die andere Dimension ist nach den Autoren die Dimension des Inhaltes[70] oder des Wissens, auf dieser Achse nehmen – ebenfalls hierarchisch vom Konkreten zum Abstrakten geordnet – das Faktenwissen, das prozedurale Wissen, das konzeptuelle Wissen und das metakognitive Wissen Platz. Diese Dimension zeigt, mit welchem Inhalt die vom Lernenden ausgeübte Denkoperation verbunden ist. Aufgrund dieser Überlegungen stellen die Autoren folgendes Modell auf:

Dimension des Wissens	**Dimension der kognitiven Prozesse**					
	1. Kenntnisse	2. Erfassen	3. Anwendung	4. Analyse	5. Synthese	6. Bewertung
Faktenwissen						
prozedurales W.						
konzeptuelles W.						
metakognitives W.						

In Anbetracht der Tatsache, dass im Bereich der Mathematik Fakten eine eher weniger wichtige Rolle spielen[71], bzw. dass die Metakognition das konzeptuelle Wissen charakterisiert [S. 38], kann meiner Meinung nach folgendes Modell für den kognitiven Bereich des Mathematiklernens relevant sein:

[69] Im Originaltext bei Anderson et al.. geht es um *remember*, also um Erinnern, das Wort wird aber von den Autoren im Sinne von der Fähigkeit, bestimmte Kenntnisse aus dem Gedächtnis hervorzurufen, verstanden.

[70] Inhalt verweist in diesem Kontext auf kognitiven Inhalt, und sollte nicht mit Lehrstoff verwechselt werden.

[71] In der Mathematik sind die meisten Fakten bereits Resultate von Einsichten, Überzeugungen, also Ergebnisse von konzeptuellem und prozeduralem Wissen. Als tatsächliche Fakten können eventuell Traditionen der Notation angesehen werden.

Dimension des Wissens	Dimension der kognitiven Prozesse					
	1. Kenntnisse	2. Erfassen	3. Anwendung	4. Analyse	5. Synthese	6. Bewertung
prozedurales W.						
konzeptuelles W.						

Im Weiteren wird die Bedeutung der einzelnen Felder an Beispielen aus dem Themenbereich Folgen beleuchtet.

1. Stufe: Kenntnisse
Dem Lernenden ist der Folgenbegriff bekannt, er kennt weitere charakteristische Eigenschaften wie Monotonie, Beschränktheit oder Konvergenz.

K1 (konzeptuelle Kenntnisse)

Der Lernende ist fähig, konkrete Beispiele für Folgen anzugeben. Weiterhin kann er konkrete Folgen mit bestimmten einfachen Eigenschaften benennen, z. B. er kennt konkrete monotone Folgen oder konkrete konvergente Folgen.

P1 (prozedurale Kenntnisse)

Der Lernende kann konkrete Folgenglieder einer durch ihr allgemeines Glied oder rekursiv angegebenen konkreten Folge bestimmen.

2. Stufe: Erfassen
Der Lernende ist fähig, in Bezug auf konkrete Folgen Tendenzen über ihr Monotonieverhalten, Beschränktheit oder Konvergenzverhalten zu erkennen und Hypothesen hierüber zu formulieren.

K2 (konzeptuelles Erfassen)

Der Lernende kann konkrete Gegenbeispiele für Folgen mit bestimmten einfachen Eigenschaften benennen, z.B. er kennt konkrete nicht monotone Folgen oder konkrete divergente Folgen.

P2 (prozedurales Erfassen)

Der Lernende ist fähig, im konkreten Fall durch Vergleich einiger Folgenglieder eine Hypothese über Monotonieverhalten, Beschränktheit oder Konvergenz der Folge zu formulieren.

3. Stufe: Anwendung
Dem Lernenden sind bestimmte Zusammenhänge (Sätze, Regeln, Verfahren) in Bezug auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz von Folgen bekannt und er kann diese in konkreten Situationen anwenden. Beispielsweise sind für ihn Grenzwertsätze, Monotoniekriterien o. ä. zugänglich.

K3 (konzeptuelle Anwendung)

Der Lernende ist fähig, durch Anwendung von Grenzwertsätzen bei vorgegebenen konreten konvergenten Folgen ihre Grenzwerte bestimmen bzw. der Lernende kann konkrete Beispiele für konvergente Folgen durch Anwendung von Grenzwertsätzen konstruieren.

P3 (prozedurale Anwendung)

Der Lernende kann durch Differenzbildung und Vorzeichenanalyse eine konkrete Folge auf Monotonie überprüfen. Der Lernende kann den Grenzwert einer konkreten Folge durch Anwendung von Grenzwertsätzen ermitteln.

4. Stufe: Analyse
Der Lernende kann Zusammenhänge zwischen den Begriffen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz erkennen und entdecken bzw. Verbindungen zwischen diesen Begriffen herstellen.

K4 (konzeptuelle Analyse)	P4 (prozedurale Analyse)
Der Lernende kann konkrete Beispiele für Folgen mit mehreren vorgegebenen Eigenschaften benennen. Er kann z. B. konkrete nicht monotone und konvergente Folgen, beschränkte divergente Folgen o. ä. konstruieren.	Der Lernende kann bei einer konkret vorgegebenen monotonen und konvergenten Folge ihre Beschränktheit begründen und Infimum bzw. Supremum bestimmen.

5. Stufe: Synthese
Der Lernende kann Zusammenhänge zwischen den Begriffen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz verallgemeinern, bzw. Verbindungen zwischen diesen Begriffen auf einer allgemeinen Ebene überblicken.

K5 (konzeptuelle Synthese)	P5 (prozedurale Synthese)
Der Lernende kann allgemeingültige Behauptungen in Bezug auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz von Folgen formulieren bzw. solche auf ihre Gültigkeit hin überprüfen.	Der Lernende kann durch Manipulation an konkreten aber parametrisierten Folgen allgemeingültige Behauptungen in Bezug auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz von Folgen herleiten.

6. Stufe: Bewertung
Der Lernende ist fähig, Begriffe wie Folge, Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz in sein Begriffsnetz einzuordnen, weiterhin diese Begriffe und die in diesem Zusammenhang ermittelten Verfahren zur Modellierung und zum Problemlösen einzusetzen.

K6 (konzeptuelle Bewertung)	P6 (prozedurale Bewertung)
Der Lernende kann Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz von Folgen bzw. von Funktionen erkennen und benennen. Der Proband kann Konvergenz von Folgen als Vorstufe des Funktionsgrenzwertbegriffs verstehen.	Der Lernende kann konkrete funktionale Zusammenhänge zwischen diskreten Größen mithilfe von Folgen modellieren.

4. 6. Fremdsprachliche Kompetenz

Im bilingualen Mathematikunterricht [S. 56] spielen nicht nur mathematische Vorkenntnisse, Inhalte und Konzepte, bzw. die mathematische Kompetenz eine Rolle, sondern es wird für die erfolgreiche Bewältigung mathematischer Problemlösesituationen ebenfalls fremdsprachliche Kompetenz benötigt, bzw. es werden durch den bilingualen Unterricht indirekt ebenfalls gewisse Fremdsprachenkenntnisse vermittelt. Dementsprechend scheint es relevant zu sein, darüber Klarheit zu schaffen, was unter fremdsprachlicher Kompetenz verstanden wird, wie sie abgestuft wird, insbesondere ab welche Stufe der fremdsprachlichen Kompetenz möglich ist, sich mit Hochschulmathematik in einer fremden Sprache auseinanderzusetzen.

4. 6. 1. Begriffsklärung

Unter fremdsprachlicher Kompetenz[72] wird in erster Linie die erfolgreiche Teilnahme an in einer fremden Sprache durchgeführter Kommunikation – sei sie schriftlich oder mündlich – verstanden. Sie umfasst neben der Beherrschung der vier sprachlichen Grundfertigkeiten (Lesen, Schreiben, Sprechen, Hören) in der Fremdsprache weitere Fähigkeiten, wie „aus einer Situation sprachliche Elemente ermitteln“, oder „durch geeignete Hilfsmittel lernen können“.
Auf der Ebene der Kenntnisse bedeutet fremdsprachliche Kompetenz primär die Kenntnis des Wortschatzes und der grammatischen Struktur der jeweiligen Fremdsprache, weiterhin die Kenntnis der Traditionen des zielsprachigen Landes /Länder (wie z. B. Begrüßungsformen, Anrede) bzw. der verschiedenen (gesellschaftlichen, geographischen, fachspezifischen) sprachlichen Varianten.
Die fremdsprachliche Kompetenz umfasst das Kennenlernen kultureller Unterschiede, beispielsweise durch das Kennenlernen der Literatur, der Gewohnheiten, der Traditionen und der Mentalität anderer Nationen. Die positive Einstellung anderen Kulturen gegenüber ist die motivationale Komponente der fremdsprachlichen Kompetenz.

4. 6. 2. Kompetenzstufen

Über fremdsprachliche Kompetenz zu verfügen ist auf mehreren unterschiedlichen Niveaus denkbar. Um die fremdsprachliche Kompetenz zu messen, europaweit zu vergleichen und um die Beurteilung von Fremdsprachenunterricht bzw. von Fremdsprachenprüfungen zu erleichtern (Einstufung von Leistungsstand, Lernfortschritten, Lehrmaterialien, Prüfungsleistungen, etc.), wurde bereits im Jahre 1997 auf Initiative des Europarats auf der Grundlage qualitativer sowie quantitativer Ergebnisse[73] der sog. Gemeinsamer Europäischer Referenzrahmen für Sprachen erarbeitet und 2001 überarbeitet. Der Referenzrahmen – lediglich eine Sprachkompetenzskala – legt abhängig davon, in welchen Domänen, wie komplex, wie differenziert, mit welcher Leichtigkeit und wie erfolgreich der Sprachlernende in der Fremdsprache zu kommunizieren fähig ist, d. h. abhängig davon, welche konkreten sprachlichen Aktivitäten er in der Fremdsprache ausüben kann, Stufen der fremdsprachlichen Kompetenz fest.
Die Abfolge der Stufen bildet eine Taxonomie, da das Erreichen jeder Stufe die Kenntnisse, Fähigkeiten und Einstellungen aller vorangehenden Stufen mit einschließt. Die Skala hat ihre Wurzeln in einer klassischen Einstufung der Kenntnisse und Fähigkeiten in eine niedrige, mittlere und obere Stufe, die durch A, B und C bezeichnet wurden. Diese Abfolge wurde dann durch eine Unterteilung der Katego-

[72]Vgl. auch Kommission der Europäischen Gemeinschaften, 2005, S. 16-17
[73] Zur Methodik der Stufenbildung und der inhaltlichen Beschreibung siehe in Trim et al, S. 200-217.

rien in je zwei weitere – in eine niedrigere und eine höhere – Stufen zusätzlich differenziert. So kam folgende Skala zustande[74]:

Gemeinsamer Europäischer Referenzrahmen für Sprachen					
A Elementare Sprachverwendung		B selbständige Sprachverwendung		C kompetente Sprachverwendung	
A1 (Breakthrough)	A2 (Waystage)	B1 (Threshold)	B2 (Vantage)	C1 (Effective Operational Proficiency)	C2 (Mastery)

Tabelle 9: Niveaustufen der fremdsprachlichen Kompetenz nach GER

Der Referenzrahmen formuliert über die allgemeine Beschreibung hinausgehend[75] – die in Tabelle 10 skizzenhaft zusammengefasst wird – , eine umfassende, auf jede sprachliche Aktivität (Hör- und Leseverstehen, mündliche bzw. schriftliche Interaktion, mündliche bzw. schriftliche Produktion, mündliche bzw. schriftliche Vermittlung) Bezug nehmende, dafür aber konkrete Erläuterung, die sog. Deskriptoren der einzelnen Stufen[76]. Diese ausführlichen inhaltlichen Angaben ermöglichen u. a. die in den verschiedenen Ländern, in verschiedenen Bildungssystemen erworbenen Sprachkenntnisse und Zertifikate, die verschiedenen Sprachbildungsangebote und Hilfsmittel miteinander zu vergleichen. Die herkömmlichen Sprachzertifikate in Ungarn: Sprachprüfung Unterstufe, Mittelstufe und Oberstufe entsprechen den Niveaustufen B1, B2 und C1[77].

4. 6. 3. Fremdsprachliche Kompetenz in der fremdsprachlichen Ausbildung an der Wirtschaftshochschule Budapest

Anhand des Referenzrahmens ist die Bewältigung der Herausforderungen eines Studiums in der Fremdsprache mit einer Fremdsprachenkompetenz ab der Niveaustufe C1 (oder höher) problemlos. In den deutsch- und englischsprachigen Ausbildungen der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus an der Wirtschafts-

[74] Anhand empirischer Untersuchungen wurde diese Skala durch drei weitere Zwischenstufen A2+, B1+, B2+ ergänzt, die eine starke Variante der jeweiligen Stufe bezeichnen. Dieses Modell mit 9 Stufen ist insbesondere für den Nachweis von Lernfortschritten geeignet.

[75] Zur allgemeinen Beschreibung der Referenzstufen siehe Trim et al, 2001, Kapitel 3: Gemeinsame Referenzniveaus, S. 32-50.

[76] Im Anhang C und D findet man einen Auszug aus dem GER: die Deskriptoren zur Teilaktivität Kreatives Schreiben der Aktivität schriftliche Produktion, bzw. die Deskriptoren zur Teilaktivität Interviewgespräche der Aktivität mündliche Interaktion. Die komplette Fassung siehe in Trim et al., 2001, Kapitel 4: Sprachverwendung, Sprachverwendende und Sprachlernende, bzw. Kapitel 5: Die Kompetenzen der Sprachverwendenden/Lernenden. S. 51-130.

[77] Die Feststellung der Äquivalenzen erfolgte nach einem wissenschaftlich bestätigten Einstufungsprozess (siehe bei North et al, 2005) und wurde in einer im Jahre 2008 verabschiedeten Regierungsverordnung (137/2008 (V.16.) Kormányrendelet, 1§, (6).) offiziell festgelegt.

hochschule Budapest wurde[78] als Voraussetzung zur Zulassung zum Studium eine Mindestkompetenz der Stufe B2 (in Ungarn: Sprachprüfung Mittelstufe) gefordert. Auf dieser Stufe sind aber bereits Fähigkeiten vorhanden, die durchaus ein fremdsprachliches Studium ermöglichen, das Kompetenzniveau B2 zeichnet sich nämlich u.a. durch folgende Merkmale aus[79]:

kompetente Sprachverwendung	C2	Mühelose Kommunikation in praktisch jeder Situation, klarer, flüssiger, spontaner und differenzierter sprachlicher Ausdruck, Erkenntnis und Gebrauch von Bedeutungsnuancen
	C1	Mühelose Kommunikation in einem breiten Spektrum an sprachlich anspruchsvollen Situationen, klarer, flüssiger und spontaner sprachlicher Ausdruck, flexibler und erfolgreicher Sprachgebrauch nicht nur im gesellschaftlichen und beruflichen Leben, sondern auch in Ausbildung und Studium
selbständige Sprachverwendung	B2	Spontane und fließende Verständigung, Verständigung mit Muttersprachlern ohne größere Anstrengung, im eigenen Spezialgebiet auch Verstehen von Fachdiskussionen, breites Themenspektrum, klarer und detaillierter sprachlicher Ausdruck
	B1	Verstehen der Schlüsselinformationen bei Verwendung der Standardsprache bei vertrauten Themen, einfacher aber zusammenhängender sprachlicher Ausdruck in vertrauten Themenbereichen
Elementare Sprachverwendung	A2	Verständigung in einfachen, routinemäßigen Situationen, Verstehen von Sätzen und Ausdrücken, die unmittelbar mit dem alltäglichen Leben zusammenhängen
	A1	Verstehen von einfachen vertrauten, alltäglichen Sätzen und Ausdrücken, Verständigung auf eine ganz einfache Art, wenn sich die Gesprächspartner langsam und deutlich ausdrücken und helfen

Tabelle 10: Kurzfassung der Globalskala der Niveaustufen nach GER

Im mündlichen Bereich:

- klare Erörterung eines Sachverhaltes durch ausführliche Darstellung des eigenen Standpunktes oder durch Anführung geeigneter Beispiele,
- logischer Aufbau der eigenen Argumentation,
- Angabe von Vor- und Nachteilen verschiedener Alternativen,
- Vortrag einer vorbereiteten Präsentation, dabei ohne Anstrengung spontane und flüssige Reaktion auf Nachfragen,
- Verstehen der Hauptaussagen von inhaltlich und sprachlich komplexen Vorlesungen, Reden, Berichten und anderen akademischen oder berufsbezogenen Präsentationen.

---

78 Diese Zulassungsvoraussetzung galt leider lediglich bis zum Studienjahr 2006/07. Ab dem Studienjahr 2007/08 ist der Nachweis der Fremdsprachenkompetenz in der Sprache der Ausbildung durch Zertifikate nicht mehr verpflichtend. Ansonsten gilt allerdings, dass wegen der stark fremdsprachenbedürftigen Orientierung der Wirtschaftshochschule Budapest die meisten Studenten bei der Studienzulassung in mindestens zwei Fremdsprachen (überwiegend in Englisch und Deutsch) über mindestens B2-Kompetenz verfügen.

79 Vgl. Trim et al, 2001, S. 51-102

Im schriftlichen Bereich:

- Verfassung klarer, detaillierter Texte zu verschiedenen Themen aus dem eigenen Interessengebiet,
- Zusammenführung und Abwägung von Informationen und Argumenten aus verschiedenen Quellen,
- Verstehendes, selbständiges Lesen aktueller Berichte und Aufsätze,
- Verstehen komplexer Anleitungen im eigenen Fachgebiet,
- Selektive Benutzung von geeigneten Nachschlagewerken,
- Sich Notizen machen können bei einer klar strukturierten Vorlesung,
- Schriftliche Zusammenfassung, Diskussion und schriftlicher Kommentar von einem breiten Spektrum an Sachtexten.

Es ist offensichtlich, dass auf dieser Stufe der fremdsprachlichen Kompetenz sowohl die Verfolgung von Vorlesungen und die Arbeit in Seminargruppen als auch ein selbständiger Umgang mit Informationsquellen generell erwartet werden kann.

4. 7. Bilingualer Unterricht

In diesem Unterkapitel wird das Augenmerk auf den bilingualen Unterricht, oder wie sich der Begriff im deutschen Sprachraum durchgesetzt hat: auf den bilingualen Sachfachunterricht gelenkt. Nach einem historischen Überblick wird die Frage der Terminologie thematisiert, anschließend anhand der von der Europäischen Kommission ermittelten Daten die vielfältige bilinguale Bildungslandschaft in Europa skizziert, wobei auch einige Kritikpunkte angesprochen werden. Sowohl bei der geschichtlichen Entwicklung als auch bei der Darstellung der bilingualen Ausbildung wird insbesondere auf die ungarische Situation hingewiesen.

4. 7. 1. Kurzer historischer Überblick in Europa

In der abendländischen Kultur war Unterricht in zwei oder mehreren Sprachen in irgendeiner Form schon seit der Antike präsent, als Beispiel sei die griechisch-lateinische Bildung der hellenistischen und der römischen Zeit erwähnt.[80] Im Mittelalter dominierte Latein als Unterrichtssprache und fungierte gleichzeitig als Lingua Franca über Jahrhunderte hinweg. Seine übergeordnete Rolle wurde erst durch die politische sowie sprachliche Emanzipation der verschiedenen Nationen im 19. Jahrhundert abgeschafft, während die entstandenen Nationalstaaten mit der eigenen Mehrsprachigkeit und mit den Problemen des mehrsprachigen Unterrichts konfrontiert wurden. So gibt es heute in Europa kein Land ohne Minderheiten, deren Status sich naturgemäß im Bildungssystem des jeweiligen Landes widerspiegelt, gar nicht zu reden von denjenigen Staaten, in denen infolge der nationalen und sprachlichen Vielfalt ab ovo zwei oder mehr Sprachen amtlich sind und dadurch im Unterricht verwendet werden, wie z. B. in Finnland, Belgien oder in der Schweiz. Obwohl alle historisch bedingten Bildungsformen, wie Minderheitenschulen und/oder Bildung in zwei oder mehreren amtlich anerkannten Sprachen eine Art zwei-/mehrsprachigen Unterricht darstellen, würden wir heute allein wegen deren Existenz in diesem Zusammenhang noch nicht von bilingualem Unterricht sprechen. Die

[80] Vgl: *„Az úgynevezett »nyugati kultúrában« az ókortól kezdődően jelen van a kétnyelvű oktatás valamilyen változata az iskolában. Elég, ha például a hellenizmus vagy a római kor görög-latin oktatási kétnyelvűségére gondolunk."* In: Bartha, 2005, S. 207

Wurzeln der im engeren Sinne bilingualen Bildungsgänge gehen auf die kanadischen sog. Immersionsprogramme[81] in den 60iger Jahren zurück, bei denen in der mehrheitlich französischsprachigen Provinz Quebec die englischsprachigen Eltern erkannt haben, dass ihre Kinder mehr Berufschancen haben, wenn sie der französischen Sprache mächtig sind. Nach einigen missglückten Versuchen, die Anzahl der Französischstunden zu erhöhen bzw. neue Lehrmaterialien einzuführen, plädierten und setzten sich die Eltern für die sog. vollständige Immersion ein, die wegen der totalen und ausschließlichen Verwendung der Fremdsprache im Anfangsunterricht auch Sprachbad genannt wird. In diesem Modell gewinnt die Muttersprache erst in späteren Schulklassen an Bedeutung, was in Europa von Anfang an unvertretbar war.[82] Trotz einiger Modifikationen waren also diese Immersionsprogramme die Vorbilder derjenigen zweisprachigen Bildungsgänge, die Anfang der 70er Jahre insbesondere in Westeuropa zur Förderung des Fremdsprachenunterrichts eingeführt wurden. Ihre Anzahl nahm zwar mit der Zeit zu, den eigentlichen Durchbruch brachte allerdings auch auf diesem Gebiet die politische Wende im Jahre 1989. Seitdem ist eine Verstärkung des wirtschaftlichen, kulturellen und wissenschaftlichen Zusammenwachsens Europas und dadurch eine verstärkte Nachfrage im gesamteuropäischen Kontext nach mehrsprachig ausgebildeten Arbeitskräften zu beobachten, wodurch es unvermeidlich wurde, bilinguale Bildungsgänge auszubauen. Infolge dieser Entwicklung wurde die Aufmerksamkeit der Fach- und Fremdsprachdidaktiker in den letzten 10-15 Jahren auf den bilingualen Unterricht gelenkt.

4. 7. 2. Historischer Überblick über die ungarische Situation

Ungarn war schon zur Zeit der Staatsgründung im Jahre 1000 durch sprachliche Vielfalt geprägt, das Gebiet des Ungarischen Königreiches galt als eine stark mehrsprachige Region Europas. Es wurden zwar das Lateinische und das Ungarische im offiziellen Verkehr verwendet, die Sprachen der angesiedelten Nationalitäten galten in der Bildung aber dennoch jahrhundertelang als gleichberechtigt. Die Eroberung durch das osmanische Reich, bzw. die Thronfolge etwas später durch die Habsburger, die Reformation aber auch der spezielle Status Siebenbürgens haben zwar einiges an dieser Situation geändert, bis zur Verabschiedung des Gesetzes „Ratio Educationis" unter Maria Theresien im Jahre 1777 hatte jedoch die ungarische Sprache ihre Priorität beibehalten können. Von diesem Zeitpunkt an wurde die ungarische Politik – insbesondere die Bildungspolitik – in sprachlicher Hinsicht durch Bemühungen geprägt, den verlorenen Status der offiziellen Amtssprache und Unterrichtssprache wiederherzustellen, teilweise zu Ungunsten der Sprachen der weiteren ethnischen oder nationalen Minderheiten. Diese Bemühungen hingen naturgemäß mit der Entwicklung des Nationalbewusstseins im 19. Jh. und mit dem starken Bemühen um eine besonders betonte nationale Identität vor und während des zweiten Weltkrieges zusammen. Gefolgt von einer weiteren starken Assimilationsphase erreichte die Minderheitenbildung Ende der sechziger Jahre ihren Tiefpunkt, wo die Gesamtschüleranzahl der Minderheitenschulen ca. 25.000 betrug. Im Bildungsge-

[81] Immersion: Eintauchen. In diesem Kontext geht es um Eintauchen in der Fremdsprache: mit den Kindern der englischsprachigen Eltern wurde im Kindergarten und in den ersten beiden Schulklassen ausschließlich auf Französisch kommuniziert.

[82] Zu den Immersionsprogrammen siehe auch Laurén, 1994, S 23-29

setz vom 1976 wurde der Nationalsprache indirekt die Rolle einer kulturellen Brücke zum Vaterland zugeordnet, wodurch eine allmähliche Wiederbelebung der zweisprachigen Schulen seit den achtziger Jahren ermöglicht wurde. Ein weiteres Zeichen für die Konsolidierung und Demokratisierung der sprachlicher Angelegenheiten im Land ist die Verabschiedung des Gesetzes über die Rechte der nationalen und ethnischen Minderheiten aus dem Jahr 1993, welches jeder, im Land lebenden nationalen oder ethnischen Minderheit das Recht zur Bildung in der eigenen Sprache zuteilt[83].[84]

Bilingualen Unterricht im engeren Sinne, also in einer schulischen Fremdsprache zu erteilen, ist gesetzlich seit 1987 möglich. In den vergangenen 20 Jahren ist eine stark zunehmende Tendenz auf diesem Gebiet zu beobachten: Laut des Eurydice-Berichts[85] gab es bereits im Schuljahr 2003/04 in Ungarn neben den zahlreichen Minderheitenschulen 47 Grundschulen[86] und 105 Gymnasien, Fachmittelschulen bzw. Berufsschulen mit fremdsprachlicher Ausbildung in sieben verschiedenen Fremdsprachen.

4. 7. 3. Vom „bilingualen Sachfachunterricht” zum Content and Language Integrated Learning (CLIL): Terminologischer Überblick

Um die Jahrtausendwende hat sich im deutschen Sprachgebiet die Bezeichnung „bilingualer Sachfachunterricht” zur Charakterisierung derjenigen spezifischen Unterrichtssituation, in der Fremdsprache und Fach miteinander kombiniert unterrichtet wurde, durchgesetzt. Diese Bezeichnung ist nicht unproblematisch. Das Wort ´bilingual´ ist irreführend, da es in den zugrundeliegenden vielfältigen Unterrichtskonzepten nicht um einen echten zweisprachigen Unterricht, sondern um eine Verzahnung von Fremdsprachenunterricht und Fachunterricht geht, die aber vielmehr einen monolingualen Charakter hat.[87] Das zu bezeichnende Unterrichtsmodell ist weiterhin wegen der damit verbundenen Zielsetzung nicht bilingual, da in diesem Kontext in Europa insbesondere die Erweiterung der Fremdsprachenkompetenz und/oder die Erweiterung der Fachkompetenz zum Ziel gesetzt wird, während das Wort ´bilingual´ im englischen Sprachgebrauch in Bezug auf ein Unterrichtsmodell verwendet wird, wo eine annähernd muttersprachliche Kompetenz in der Fremdsprache erzielt wird, d. h. eine möglichst vollständige Bilingualität.[88] Andererseits konnte sich das Wort *Sachfachunterricht*, obwohl es sich m. E. wie ein Neoplasma anhört, ohne jegliche Begründung in der einschlägigen Fachliteratur durchsetzen:

---

[83] Durch die Kategorie „ethnische Minderheit” wurden nicht nur die Rechte der nationalen Minderheiten mit einem Vaterland außerhalb der Staatsgrenze anerkannt, sondern es wurden z. B. die Romas, eine ethnische Minderheit ohne Vaterland als gleichberechtigt behandelt.

[84] Zur ausführlichen Beschreibung der geschichtlichen Veränderung der Amts- und Unterrichtssprachen in Ungarn siehe Bartha, 2005, S 214-230

[85] European Comission, 2006a, S 3-9

[86] Im ungarischen Schulsystem betrifft der gundlegende Unterricht die ersten 8 Schulklassen.

[87] Vgl.: *„Hervorzuheben ist an diesem Punkt, dass für alle drei Modelle eines gemeinsam gilt: keines von ihnen ist »bilingual« im eigentlichen Wortsinn.*“ In: Bach, 2000, S. 14

[88] Zur Diskussion *bilingual education* vs. *bilingualer Unterricht* siehe Bach, 2000, S. 14-17

allein im Sammelband von Bach und Niemeier[89] kommt die Verknüpfung *bilingualer Sachfachunterricht* unter den elf Beitragstiteln sechsmal vor.
Ein weiteres Problem entsteht aus dem weitgeschnittenen Bedeutungsfeld des Begriffs: Hinter der etwas verunglückten Bezeichnung stehen verschiedene Unterrichtsmodelle, bei denen Fremdsprache und Fach jeweils anders gewichtet und im unterschiedlichen Zusammenhang zueinander gestellt werden. So skizziert beispielsweise *Bach, 2000* nach einer Analyse der deutschen Curricula das lineare, das parallele und das integrative Modell, bei denen im ersten Fall eher das Fach, im zweiten beides, im letzten jedoch die Fremdsprache im Vordergrund des Unterrichts steht. Er weist weiterhin auf die Diskrepanz zwischen Theorie und Praxis hin: Während curricular überwiegend das dritte Modell angestrebt wird, wird in der Unterrichtspraxis eher das erste Modell verwirklicht. Vorschläge für die terminologische und dadurch für die begriffliche Präzisierung wie „inhaltsbezogenes Fremdsprachenlernen" oder „fremdsprachlicher Sachfachunterricht"[90] konnten sich langfristig leider nicht durchsetzen.
Die Definitionen des bilingualen Sachfachunterrichts wiesen auch hinsichtlich der verwendeten Arbeitssprache eine gewisse Heterogenität auf. Während bei einigen Autoren wie *Breidbach, 2002*, *Finkbeiner, 2002* oder *Suhrmüller, 2005* die Arbeitssprache eine moderne Schulfremdsprache ist, lassen andere wie z.B. *de Cillia, 1994* Minderheitensprachen sowie Fremdsprachen zu. Bei beiden Auffassungen bleiben jedoch bilinguale (evt. auch multilinguale) Modelle in historisch mehrsprachigen Ländern wie die Schweiz, Belgien oder Luxemburg ausgeklammert.
In den letzten Jahren hat sich eine neue Bezeichnung, die aus dem Englischen übernommene Abkürzung CLIL für „Content and Language Integrated Learning" im europäischen Raum verbreitet, die gleichzeitig von der Europäischen Kommission in ihrem umfassenden Bericht über die aktuelle Lage des bilingualen Unterrichts im gesamteuropäischen Kontext[91] benutzt und präzise definiert wurde. Dieser Definition möchte ich mich an dieser Stelle nicht nur wegen der Tatsache anschließen, dass sie die im Moment europaweit akzeptierte Definition darstellt, sondern auch deshalb, weil sie die meisten der oben skizzierten Probleme und Ungenauigkeiten auflöst. So lautet im Bericht: *„The acronym CLIL is used as a generic term to describe all types of provision in which a second language (a foreign, regional or minority language and/or another official state language) is used to teach certain subjects in the curriculum other than language lessons themselves"* (European Commission, 2006c, S. 8). Die wichtigsten Merkmale dieser Definition hat *Wolff, 2007* erläutert. Sie werden hier kurz zusammengefasst:

- CLIL ist kein fremdsprachendidaktisches Konzept, d. h. das Fach wird nicht nur dazu verwendet, für die Fremdsprache Themen zu liefern, es geht vielmehr um einen Ansatz, der Inhalt und Sprache gleichermaßen umfasst, wobei anzumerken ist, dass in den verschiedenen Ländern Fremdsprache und Fach im Unterricht unterschiedlich in den Vordergrund rücken.
- CLIL bezieht sich auf das Lernen von Inhalten sowie auf das Lernen von Sprache, wobei die Fremdsprache sowohl Medium als auch Inhalt des Unterrichts ist. Ge-

---

89 Bach/Niemeier, 2002
90 Bach, 2000, S. 17
91 European Comission, 2006c

nauso wie im Fremdsprachenunterricht, ist es möglich und sogar erwünscht, die Muttersprache an bestimmten Stellen in den Unterricht mit einzubeziehen und zu thematisieren.

- CLIL bezieht sich nicht auf den gesamten Fächerkanon einer schulischen Ausbildung, wodurch verhindert werden soll, dass die muttersprachliche Entwicklung Schaden erleidet.
- CLIL schließt bewusst unterschiedliche Sprachen als Arbeitssprachen ein, zu denen nicht nur alle möglichen (west- oder osteuropäischen, asiatischen) Verkehrssprachen als Schulfremdsprachen gehören, sondern auch in Regional-, Minderheiten- oder Migrantensprachen erteilter Unterricht im Definitionsbereich von CLIL liegt.

An der Bezeichnung CLIL wird deutlich, dass es um eine Verzahnung von Fach- und Sprachunterricht geht, man entkommt einerseits dem irreführenden Charakter des Wortes ´bilingual´, andererseits weicht man dadurch auch der oben genannten unterschiedlichen Verwendung des Wortes im Englischen und im Deutschen aus. CLIL umfasst per definitionem absichtlich und nicht wegen unpräziser Formulierung zufällig verschiedene Modelle zum Verhältnis zwischen Fach und Fremdsprache. Außerdem ist in der Definition von CLIL eindeutig formuliert, welche Sprachen als Arbeitssprachen betrachtet werden können, so hängt dies nicht mehr von der persönlichen (evt. willkürlichen) Deutung des jeweiligen Betrachters ab. Damit scheint die Bezeichnung CLIL mit ihrer exakt formulierten und erläuterten Definition für die weitere Arbeit akzeptabel zu sein. Ich möchte ferner betonen, dass die Bezeichnungen ´bilingual´ und ´bilingualer Fachunterricht´ in der vorliegenden Arbeit weiterhin im Sinne von CLIL verwendet werden.

4. 7. 4. Die wichtigsten Merkmale des europäischen CLIL-Unterrichts

Im Eurydice-Bericht der Europäischen Kommission wurde die relativ aktuelle Lage des CLIL-Unterrichts im gesamteuropäischen Kontext umfangreich dargestellt, deren wichtigste Behauptungen im Folgenden kurz zusammengefasst werden sollen. Der Studie liegen Informationen aus 30 europäischen Ländern des Eurydice-Netzwerkes zugrunde, deren Referenzjahr das Schuljahr 2004/05 bildete. CLIL wurde im Bericht im oben zitierten Sinne verstanden, so blieben Programme der totalen Immersion oder des reinen Fremdsprachenunterrichts ausgeklammert. Die Studie nahm ausschließlich auf staatliche oder vom Staat anerkannte private Schulen Bezug, in denen nach festgelegtem Lehrplan mit mehreren Unterrichtssprachen gearbeitet wird, das Netz der Europaschulen, internationale Schulen oder Kulturinstitute wurden ebenfalls nicht beachtet.

Status von CLIL im europäischen Bildungssystem

CLIL hat sich in den letzten Jahren im europäischen Raum weit etabliert: Mit Ausnahme von 6 der untersuchten Ländern (Dänemark, Griechenland, Island, Litauen, Portugal und Zypern) wird CLIL als Bestandteil des herkömmlichen Bildungsangebots, als Pilotprojekt oder beides kombiniert angeboten. In der überwiegenden Mehrheit der Länder betrifft es 3-30% der Schüler, in Luxemburg und Malta jedoch – beide mit mehr als einer Amtssprache – gibt es ausschließlich CLIL-Unterricht. Es ist anzumerken, dass die Tatsache des Vorhandenseins nichts über die Zugänglichkeit der CLIL-Bildungsgänge aussagt, diese sind meistens nicht weit verbreitet.

In Ungarn ist CLIL fester Bestandteil des herkömmlichen Bildungssystems, der Unterricht in Minderheitensprachen wurde seit 1949, der Unterricht in Fremdsprachen seit 1987 gesetzlich ermöglicht und betrifft heutzutage ca. 3% der Lernenden.
Was die in den CLIL-Unterricht einbezogenen Sprachen betrifft, unterscheidet der Bericht vier Ländergruppen: In Ländern, wie die Tschechische Republik, England, oder Bulgarien, beschränkt sich CLIL ausschließlich auf Fremdsprachen, in Slowenien und in dem restlichen Teil des Vereinigten Königreichs werden hingegen lediglich Regional- oder Minderheitensprachen verwendet. In einigen weiteren Staaten wie Belgien, Irland, Luxemburg, Malta und Finnland wird durch den Einbeziehung mehrerer Amtssprachen CLIL gewährleistet. In den restlichen Ländern – zu denen auch Ungarn gehört – kommen Fremdsprachen sowie Regional- oder Minderheitensprachen im CLIL-Unterricht vor. Unter den Fremdsprachen wird Englisch bei weitem bevorzugt, allerdings werden auch Deutsch und Französisch häufig als Arbeitssprache gewählt. In einigen Ländern wird das Angebot schon durch dreisprachige CLIL-Modelle bereichert, entweder durch Unterricht in der Nationalsprache und in zwei weiteren Fremdsprachen oder durch ein Modell, in dem die Nationalsprache, eine weitere Amtssprache und eine Minderheitensprache miteinander kombiniert werden. Dieses Angebot ist allerdings noch nicht weit verbreitet.
In vielen der befragten Länder – wie z.B. in Ungarn – wird CLIL im Primarbereich sowie im Sekundarbereich angeboten, in manchen – beispielsweise Spanien oder Italien – gibt es CLIL-Aktivitäten sogar in der Vorschule, trotzdem kann gesagt werden, dass CLIL größtenteils in der Sekundarstufe durchgeführt wird.

Organisation und Bewertung

Trotz des gesonderten Status von CLIL wird in den meisten Ländern keine Selektion bei der Zulassung vorgenommen, nur in wenigen Staaten werden Zugangskriterien bestimmt, welche die allgemeine Bildung, die Beherrschung der Unterrichtssprache oder in manchen Ländern – wie auch in Ungarn –, beide betreffen können.
Da CLIL per definitionem einen doppelten Charakter hat, wird es auch in seiner Zielsetzung durch einen doppelten Charakter geprägt: In dieser speziellen Unterrichtsform wird einerseits angestrebt, den Lernenden fachliche Informationen und Kompetenzen zu vermitteln, andererseits wird auch beabsichtigt, die Fremdsprachenkompetenz zu erweitern. In den Curricula der verschiedenen Länder wird weiterhin noch einigen anderen Aspekten Bedeutung beigemessen, die nach dem Eurydice-Bericht folgendermaßen gruppiert werden können:

- *Gesellschaftlich-wirtschaftliche Zielsetzungen:* Vorbereitung auf das Leben in einer internationalen Gesellschaft, höhere Berufschancen,
- *Gesellschaftlich-kulturelle Zielsetzungen:* Toleranz und Respekt anderer Kulturen gegenüber,
- *Sprachliche Zielsetzungen:* Förderung der Fremdsprachenkompetenzen zur effizienten Kommunikation,
- *Didaktische Zielsetzungen:* Erweiterung der fachlichen Kenntnisse und Förderung der Lernfähigkeit in einer innovativen Lernsituation.

Es ist es anzumerken, dass diese Zielsetzungen in den Empfehlungen und Curricula der Länder meistens nicht voneinander getrennt sind und sich nicht ausschließen, sondern miteinander kombiniert, einander ergänzend und stärkend vorkommen. Zur besonderen Situation in Ungarn zitiere ich Wolff: *„ein besonders hohes Potenzial im Hinblick auf das Sachfach wird allein von Ungarn hervorgehoben. Hier scheint der sonst überall so stark betonte sprachliche Mehrwert keine große Rolle zu spielen."* (Wolff, 2007, 19-20).

Unter den Fächern werden meistens geistes- und sozialwissenschaftliche (Geschichte, Geographie, Sozialkunde), oder naturwissenschaftliche (Mathematik, Biologie, Chemie, Physik) gewählt. In manchen Staaten stehen auch musische Fächer oder sogar Sport im Lehrplan, es gibt allerdings erst in wenigen Ländern Einschränkungen hinsichtlich der in der Fremdsprache unterrichteten Fächer. In Ungarn wird der jeweiligen Schule im Sekundarbereich bei der Auswahl der Sachfächer freie Wahl gelassen.

Lehreraus- und Fortbildung

Ein sehr problematischer Bereich des CLIL-Unterrichts bildet die Lehreraus- und Fortbildung, da an die CLIL-Lehrer doppelte Anforderungen gestellt werden: Anforderungen in fachdidaktischer und in fremdsprachendidaktischer Hinsicht. Dazu sollte noch eine Zusatzqualifikation, eine Ausbildung in der Didaktik und Methodik des bilingualen Fachunterrichts kommen, welche aber unglücklicherweise erst in einigen wenigen Ländern und in beschränkter Form angeboten wird. Zum Problemfeld gehört weiterhin, dass es in den betroffenen Ländern in der Lehrerausbildung nicht unbedingt möglich ist, neben einem nichtsprachlichen Fach eine Fremdsprache als zweites Fach zu studieren. In den meisten Ländern wird aus diesem Grunde von den angestellten CLIL-Lehrern erwartet, dass sie in einem nichtsprachlichen Fach ausgebildet sind und ihre Fremdsprachenkenntnisse durch Zusatzqualifikationen wie Sprachprüfungen, Zertifikate, sprachliche Weiterbildungskurse, Studium in der Zielsprache o. ä. nachweisen. Es soll angemerkt werden, dass unter den befragten Ländern ausschließlich in Ungarn die Belegung der Qualifikationen in beiden, also in fachlicher sowie in fremdsprachlicher Hinsicht durch Diplomurkunden erwartet wird.

Kritikpunkte

Im Bericht der Europäischen Kommission wurden auch Problemstellen und Diskussionsfragen in Bezug auf den bilingualen Unterricht angesprochen. In Anbetracht der Tatsache, dass der CLIL-Unterricht über den herkömmlichen Fach- und Fremdsprachenunterricht hinausgeht, werden sowohl an die Lehrkräfte als auch an das Lehrmaterial höhere Anforderungen gestellt. Der Mangel an spezifisch ausgebildeten Fachlehrern, an Aus- und Weiterbildungskursen, an didaktisch relevant vorbereiteten Unterrichtsmaterialen bildet den größten Problembereich des CLIL-Unterrichts, und wurde von jedem Land in seinem eigenen Bericht angesprochen. Außerdem wurden Bedenken hinsichtlich der Zukunft der Nationalsprache, der Chancengleichheit und des Niveaus der Fachkenntnisse in bilingual unterrichteten Fächern formuliert.

Zusammenfassend kann Folgendes festgestellt werden: Obwohl das europäische Gesamtbild im Hinblick auf den CLIL-Unterricht durch einen relativ vielfältigen und bunten Charakter geprägt wird, können einige Gemeinsamkeiten, was die Anstrebungen, Zielsetzungen, Tendenzen und Probleme betrifft, beobachtet werden. Im Allgemeinen wird CLIL positiv bewertet, nicht nur im Hinblick auf die bisherigen Ergebnisse, sondern auch in Hinsicht auf das hierin steckende Potenzial. Trotzdem darf nicht vergessen werden, dass CLIL erst in den letzten Jahren in den Vordergrund der didaktischen Forschung gerückt ist. Dementsprechend mangelt es bis heute an umfassenden langfristigen Studien und Untersuchungen, demzufolge sollten die oben erwähnten Kritikpunkte – wie Zukunft der Nationalsprache oder die Fachkompetenz in der Fremdsprache – nicht unterschätzt werden.

4. 8. Bilingualer Mathematikunterricht

Im Folgenden soll der bilinguale Mathematikunterricht näher betrachtet werden, der – wie schon in der Einleitung angesprochen – an der Schnittstelle des Fremdsprachenunterrichts und des Mathematikunterrichts steht. Auf der Grundlage des Eurydice-Berichts [S. 52] wird versucht, eine möglichst exakte Definition für den bilingualen Mathematikunterricht zu geben, weiterhin wird die aktuelle, relativ kontroverse europäische Situation dargestellt und im Anschluss einige Argumente für und gegen die Einführung eines bilingualen Mathematikunterrichts diskutiert. Als letzter Punkt in diesem Unterkapitel wird ein kritischer Überblick über die bilingualen Mathematikunterricht betreffenden empirischen sowie theoretischen Forschungen gegeben.

4. 8. 1. Definition

Das Akronym CLIL wurde für die allgemeine Bezeichnung jeder Art von Unterricht verwendet, wo eine zweite Sprache als Arbeitssprache im Unterricht einiger anderer, nichtsprachlicher Fächer benutzt wird. Ist das nichtsprachliche Fach Mathematik, so ist es auf der Hand liegend, im Sinne von CLIL **unter bilingualem Mathematikunterricht jede Art von Unterricht zu verstehen, in dem eine zweite Sprache** (sei es eine Fremdsprache, eine regionale Sprache, eine Minderheitensprache, und/oder eine weitere Amtssprache des jeweiligen Landes) **als Arbeitssprache im Mathematikunterricht verwendet wird.** Primär geht es also um Mathematikunterricht, dementsprechend sind überwiegend mathematikdidaktische Konzepte maßgebend. Weiterhin schließt das Konzept von CLIL nicht aus, dass an bestimmten Stellen die Muttersprache in den Unterricht miteinbezogen wird. Die Arbeitssprache dient als Vermittler, als Medium für den Mathematikunterricht, sie kann aber durch Kontrastierung mit der Muttersprache oder durch Thematisierung fachsprachlicher Ausdrücke zum Inhalt des Unterrichtes gemacht werden. Insbesondere in diesen Fällen spielen fremdsprachendidaktische Konzepte eine große Rolle. So geht es im Falle des bilingualen Mathematikunterrichts um eine besondere Form von Mathematikunterricht, welcher nicht in der Muttersprache der Lernenden erteilt und bei dem der verwendeten Fremdsprache eine ausgesprochen gewichtige Rolle zugesprochen wird.

4. 8. 2. Aktuelle Lage in Europa

Ein erheblicher Mangel des Eurydice-Berichtes besteht darin, dass er keine Auskunft über einzelne Schulfächer liefert, sondern nur Fächergruppen behandelt, wobei eher auf die curriculare Möglichkeit und weniger auf den tatsächlichen Unterricht der jeweiligen Fächergruppe eingegangen wird. So findet man keine eindeutige Information über Mathematik im CLIL-Kontext. In den einzelnen Länderberich-

ten[92] sind jedoch indirekte Informationen und Hinweise auf den Mathematikunterricht enthalten, die im Folgenden angeführt werden. Es soll angemerkt werden, dass diese in manchen Fällen ungenau sind und eine weitere Präzisierung erfordern.
Länder wie Belgien, die Tschechische Republik, Luxemburg, Malta und Norwegen befürworten die Einbeziehung der Mathematik in den bilingualen Unterricht. In diesen Ländern ist Mathematik fester Bestandteil der CLIL-Lehrpläne. Im deutschsprachigen Gebiet Belgiens geht man so weit, dass man Mathematik absichtlich auf Französisch unterrichtet, um den Lernenden in der Zukunft mehr Berufschancen zu sichern. Nicht zu vergessen ist jedoch, dass unter den genannten sechs Ländern drei (Belgien, Luxemburg und Malta) ausschließlich CLIL-Unterricht durchführen.
In zahlreichen anderen Ländern – zu denen auch Ungarn gehört – wird Mathematik unter den für CLIL typischen Unterrichtsfächern aufgelistet, leider in den meisten Fällen ohne weitere Auskunft darüber, in wie vielen Schulen, in welchem Umfang Mathematik in einer zweiten Sprache unterrichtet wird. Genaue Informationen findet man lediglich von Estland (3 Schulen im Primarbereich und 13 Schulen im Sekundarbereich) bzw. von Finnland (49 Schulen im Primarbereich und 14 Schulen im Sekundarbereich).
Eine dritte Gruppe bilden diejenigen Länder, bei denen zwar die gesetzliche Möglichkeit besteht, Mathematikunterricht in einer zweiten Sprache erteilt zu bekommen, die aber nur vorsichtig genutzt wird. Einige, u. a. auch Deutschland, geben an, dass dies atypisch fürs Land ist, andere geben keine oder besonders niedrige Schulzahlen an.
Ferner äußert sich Spanien eindeutig gegen Mathematik im CLIL-Unterricht, und in einer bedeutenden Anzahl von Ländern (die Gruppe stimmt fast mit der Ländergruppe ohne CLIL überein) erhielt man überhaupt keine Daten in diesem Zusammenhang. Tabelle 11 fasst die Ergebnisse zusammen:

Status der Mathematik im CLIL-Unterricht	**Länder**
eindeutig befürwortet und realisiert	deutsch- und flämischsprachiges Gebiet Belgiens, Tschechische Republik, Luxemburg, Malta, Norwegen
befürwortet und realisiert, aber Umfang unklar	Lettland, Ungarn, Polen, Estland, Finnland, Schottland (VK), Slowakei, Italien (Sek. II), Schweden (Sek. II)
möglich/ weniger typisch	Österreich, Bulgarien, Deutschland, Frankreich, Lichtenstein, Litauen, Niederlande, Rumänien, England und Wales (VK)
eindeutig nicht erwünscht	Spanien
keine Daten vorhanden	französischsprachiges Gebiet Belgiens, Zypern, Dänemark, Griechenland, Island, Irland, Portugal, Slowenien

Tabelle 11: Status der Mathematik im CLIL-Unterricht in den europäischen Ländern

[92] Die Länderberichte siehe in European Comission, 2006b.

Der Tabelle ist zu entnehmen, dass das Verhältnis zwischen denjenigen Ländern, die Mathematik bevorzugt in den bilingualen Unterricht einbeziehen und denjenigen, die dies eher zurückhaltend tun, ausgeglichen ist. Ins Auge fallend ist jedoch, dass Mathematik im CLIL-Unterricht überwiegend von zwei Ländergruppen befürwortet wird: Einerseits von Ländern, die generell über mehrere Amtsprachen verfügen (hierzu gehören Belgien, Luxemburg, Malta und Finnland) und der CLIL-Unterricht auf eine lange Tradition im Land zurückblickt, andererseits von Ländern des ehemaligen Ostblocks (Estland, Lettland, Polen, Tschechische Republik, Slowakei, Ungarn), wo eher das Bestreben um eine möglichst schnelle wirtschaftliche Entwicklung und bessere Berufsaussichten im Hintergrund der Entscheidungen stehen können.

4. 8. 3. Warum bilingualer Mathematikunterricht?

Obwohl die Länderberichte außer dem von Belgien keine Argumente darüber liefern, welche Überlegungen hinter der Einführung, der gewählten Form oder der Auswahl der Schulfächer im CLIL-Unterricht stehen, sind in der einschlägigen (insbesondere theoretischen) Literatur zahlreiche Argumente pro und contra hinsichtlich der Einbeziehung der Mathematik in den bilingualen Unterricht aufzufinden. Es soll vorausgeschickt werden, dass bei einigen Autoren (Setati, Barwell) der bi/- oder sogar multilinguale Mathematikunterricht außerhalb von Europa (insbesondere in Afrika) im Fokus der Betrachtungen steht und die Argumente in diesem Zusammenhang formuliert wurden. Trotzdem scheint es nicht irrelevant zu sein, um ein Gesamtbild über die mögliche Argumentation zu bekommen, diese Argumente ebenfalls zu beachten. Die Überlegungen sprechen unterschiedliche Aspekte des Mathematikunterrichts an. So trifft man Argumente, die von Mathematik als Wissenschaft ausgehen, andere beziehen sich auf die Rolle der Sprache/Fremdsprache im Mathematikunterricht, während sich einige Autoren indirekt im Zusammenhang mit weiteren naturwissenschaftlichen Fächern für oder gegen die Mathematik im bilingualen Unterricht äußern. *Rolka, 2004* thematisiert die mathematischen Weltbilder von Mathematiklehrern und findet, dass es in der Mathematik wenig Möglichkeit zu Diskussionen gibt, dass der Verwendung von Sprache im Mathematikunterricht eine marginale Rolle zugesprochen wird, bzw. dass Mathematik eine international neutrale Wissenschaft ist, und kommt zum Schluss, dass diese Weltbilder eine Barriere bilden, die den Einsatz einer Fremdsprache im Mathematikunterricht verhindern. *Butzkamm, 2002* bezieht sich auf eine empirische Studie von Vögedings und thematisiert nachgewiesene Schwierigkeiten im fremdsprachigen naturwissenschaftlichen Unterricht. *Barwell und Setati, 2005* formulieren, dass *„students don't feel mathematics belong to them"*, wenn Mathematik nicht in ihrer Muttersprache unterrichtet wird. Im Gegensatz zu diesen Argumenten drückt *Schnubel, 2004* bezogen auf einen Vortrag von Jean Petit aus, dass Mathematik besonders geeignet für den bilingualen Unterricht ist. Er vertritt die Meinung, dass Mathematik, die durch eine innere Logik geprägt wird, optimal zum Fremdsprachenerwerb beiträgt. *Lorbeer, 2006b* behauptet, dass Mathematik mit ihren komplexen Aufgabenstellungen, die an der Schnittstelle von Kognition und Diskurs stehen, die Theorie des bilingualen Unterrichts in die Praxis umsetzt. *Barwell, 2003* formuliert, dass *„doing mathematics is different in different languages"*, *Novotná und Moraová, 2005* finden, dass *„mathematical communication is not culture free"*, in dieser Hinsicht ist also

doch ein interkulturelles Lernen innerhalb der Mathematik möglich. *Koch und Bünder, 2006* formulieren – nach einer empirischen Untersuchung im englischsprachigen Chemieunterricht – allgemein in Bezug auf bilingual unterrichtete naturwissenschaftliche Fächer, dass keine Behinderung der Lernprozesse beobachtbar ist. Auf der Internetseite der Walter-Gropius-Schule in Berlin werden in Bezug auf englischsprachigen Mathematikunterricht neben gesellschaftlichen Argumenten, wie Vorteile im Studium und im Beruf auch erwähnt, dass gerade der geringe Sprachanteil im Mathematikunterricht bzw. die Anschaulichkeit vieler mathematischen Bereiche die Mathematik für den bilingualen Unterricht geeignet machen. Die aussagekräftigsten Argumente sind in Anhang E zusammengefasst.
Meine eigene pädagogisch-didaktische Intuition, die sich auf der Grundlage von Erfahrungen als Studentin im deutschsprachigen Ausland und als Lehrerin überwiegend im Hochschulbereich und in der die Sekundarstufe betreffenden Begabtenförderung herausgebildet hat, lässt mich sagen, dass sich die gewisse Universalität der Mathematik ihre dadurch begründete Sprachunabhängigkeit erst auf höheren Ebenen der Mathematik zeigen lässt. Dies kann sich nicht nur auf mathematische Inhalte, sondern auch auf mathematische Kompetenzen beziehen. Zu den inhaltsbezogenen Feststellungen zitiere ich Novotná und Moraová: *„It must be concluded from our analysis, that the higher and more difficult the mathematics that is used, the fewer ordinary language problems the students will have to face."* (Novotná/Moraová, 2005, S.113) Die Mathematik als Nebenfach an Fachhochschulen nimmt m. E. auf einer mittleren Stufe der Abstraktion Platz und ihre Inhalte werden in verschiedenen Sprachen (insbesondere Deutsch und Ungarisch) zum Teil ähnlich zum Teil unterschiedlich ausgedrückt. Aus meiner Sicht sind allerdings diese insbesondere (fach)sprachlichen Unterschiede nicht nur dafür geeignet, interkulturelle Kompetenz zu fördern, sondern sie können auch dazu beitragen, ein differenziertes Verständnis für mathematische Inhalte zu entwickeln. Andererseits ist eine fachsprachliche, sprachlich kontrastive Betreuung des Unterrichts, also ein echter *bi*lingualer Unterricht im Sinne von CLIL auch wegen der Erweiterung der Ausdrucksmöglichkeiten sowie wegen der Entwicklung metakognitiver Prozesse in jedem Fall wünschenswert.[93]

4. 8. 4. Forschungsstand und -kritik

Eine Recherche der Fachliteratur über den bi- bzw. multilingualen Mathematikunterricht aus den letzten Jahren ergab folgende Ergebnisse:

- Unter den wissenschaftlichen Fragestellungen dominiert der s*oziolinguistische Aspekt: Novotná und Moraová, 2005* kommen nach der sprachlichen Analyse authentischer und nichtauthentischer englischsprachiger Mathematiklehrbücher zum Schluss, dass in authentischen Lehrwerken die sprachlichen Ausdrücke (Wortgebrauch, Differenzierung, Grammatik) dem Alltag der im englischen Sprachraum lebenden Schüler angepasst sind. Ein großer Teil davon ist für Englischlernende im nichtenglischsprachigen Ausland nicht zugänglich, demzufolge sind diese Lehrbücher ohne Adaptation für einen Gebrauch im Mathematikunterricht außerhalb des englischen Sprachraums weniger geeignet. Die unterschiedliche soziale und politische Rolle der Amtssprache und der Minderheitensprache in typisch vielsprachigen

[93] Siehe dazu: Szűcs, 2005

Ländern nimmt *Mendes, 2007* in Brasilien und *Setati, 2005* bzw. *Setati und Adler, 2000* in Südafrika unter die Lupe. *Barwell, 2003* und *Barwell und Setati, 2005* thematisieren die Kulturabhängigkeit der Mathematik bzw. die Dominanz der englischen Sprache in der mathematischen Forschung. Demgegenüber geht *Rolka, 2004* in ihrer rein theoretischen Arbeit von der Annahme aus, Mathematik sei kulturunabhängig und in der mathematischen Begriffsbildung spiele die Sprache eine eher marginale Rolle und kommt zur Behauptung, Mathematik sei für den bilingualen Unterricht ungeeignet.

- Es spielt auch der *rein linguistische Aspekt* eine wichtige Rolle: *Barwell, 1999c* zeigt die unterschiedliche Frequenz der englischen Terminologie im Sprachgebrauch von Muttersprachlern und Nichtmuttersprachlern. Er zeigt außerdem in einer anderen Arbeit (*Barwell, 1999a*), dass migrante Schüler mathematische fachsprachliche Ausdrücke eher in Syntagmen[94] als in Paradigmen[95] speichern. *Evans, 2007* vergleicht die englische und walisische mathematische Terminologie. *Kazima, 2007* wies in Malawi nach, dass die Struktur der muttersprachlichen (chichewanisch) Terminologie der Mathematik Einfluss auf die Struktur der erworbenen fremdsprachlichen (englischen) mathematischen Fachausdrücke hat. *Farugia, 2002* dokumentiert die sog. "semiotische Verkettung" (Semiotic Chaining), eine zweisprachige Methode maltesischer Mathematiklehrer zur Förderung des Verständnisses mathematischer Inhalte.
- Einige Fallstudien beschäftigen sich mit *psychologischen Aspekten* des bilingualen Mathematikunterrichts: *Barwell, 2004* zeigt, dass beim Raten eines Migrantenschülers in England vielmehr die Anpassung ans soziale Klima im Hintergrund steht als gut entwickelte kognitive Strategien. *Clarkson, 2005* und *Clarkson, 2007* untersuchten den Kodewechsel (d. h. Sprachwechsel) bei sowohl in der Fremdsprache als auch in der Mathematik leistungsstarken migranten Schülern in Australien. Er kommt zum Ergebnis, dass der Wechsel zwischen den Sprachen eine metakognitive Funktion hat und dem Zweck dient, weitere Bedeutungsinhalte bzw. - verknüpfungen aufzudecken. *Moschkovich, 2007* betont ebenfalls die metakognitive Funktion der Bilingualität, bei ihr ist allerdings der Kodewechsel beim mathematischen Problemlösen ein Zeichen für Nichtverständnis.
- *Schnubel, 2004* geht an den bilingualen Mathematikunterricht *vom mathematischen Aspekt* heran und diskutiert die traditionell unterschiedliche Behandlung der Vierecke im Schulunterricht in Frankreich bzw. Deutschland. Für einen deutsch-französisch bilingualen Mathematikunterricht entwickelt er eine Herangehensweise, die beiden Auffassungen gerecht ist.

Es ist sehr erfreulich, dass der bi- bzw. multilinguale Mathematikunterricht immer mehr an Bedeutung gewinnt und zum Thema wissenschaftlicher Arbeiten gemacht

---

[94] Syntagmen sind horizontale Verbindungen zwischen mindestens zwei sprachlichen Zeichen, die in einer Redekette verknüpft werden können. Vgl. *Kürschner, 1997, S. 14*. Näheres zu syntagmatischen Relationen siehe in *Lutzeier, 1995, S. 88-98* oder in *Schippan, 1992, S. 197-202.*

[95] Paradigmen sind Mengen von sprachlichen Zeichen, die in einem Syntagma gegeneinander ausgetauscht werden können, also zwischen denen in der Redekette eine vertikale Verbindung besteht. Vgl. *Kürschner, 1997, S. 15-16.* Näheres zu paradigmatischen Relationen siehe in *Lutzeier, 1995, S. 73-87* oder in *Schippan, 1992, S. 202.*

wird. Kritisch ist jedoch zu sehen, dass in den meisten Publikationen der linguistische bzw. soziolinguistische Aspekt dominiert, Themen wie Kodewechsel, soziale Rolle der Mutter- und der Arbeitssprache, Frequenz und Breite der fremdsprachlichen Terminologie stehen überwiegend im Mittelpunkt der Diskussionen. Kaum thematisiert sind aber mathematische Fragestellungen und es mangelt ganz an pädagogischen oder an curricularen Perspektiven. Die Frage nach Unterschieden zwischen mono- bzw. bilingual erworbenen mathematischen Kenntnissen bleibt beispielsweise ausgeklammert. Auf der anderen Seite soll aber betont werden, dass in den Publikationen der bi- oder multilinguale Mathematikunterricht überwiegend als etwas Positives mit hohem Potenzial dargestellt wird.

5. Hypothesen über den bilingualen Mathematikunterricht

Die Untersuchung der Fachliteratur über den bilingualen Mathematikunterricht wies auf Fehlen des mathematischen Aspekts [S. 61] hin: Die einschlägige Fachliteratur zeigt beträchtliche Defizite hinsichtlich des Vergleichs mutter- und fremdsprachlich erworbener mathematischer Kenntnisse bzw. mutter- und fremdsprachlich erbrachter mathematischer Leistungen. Dennoch kann in den Argumenten für und gegen den bilingualen Mathematikunterricht die – zum Teil latente – Annahme nachvollzogen werden, dass die Verwendung einer Fremdsprache im Mathematikunterricht Wirkung auf die erworbenen mathematischen Kenntnisse hat. Die Befürworter des bilingualen Mathematikunterrichts gehen von einer positiven Wirkung, insbesondere von einer Förderung der Metakognition aus [S. 60], während die Gegner eine negative Beeinflussung der Kenntnisse annehmen [S. 58]. Berechtigt stellt sich also die Frage: Beeinflusst die Verwendung einer Fremdsprache im Unterricht die erworbenen mathematischen Kenntnisse? Wenn ja, in welcher Hinsicht? Diese Forschungsfrage wird in der vorliegenden Arbeit als folgende wissenschaftliche Hypothese in Bezug auf den bilingualen Mathematikunterricht präzisiert:

1. Haupthypothese:

Es gibt Unterschiede in der Qualität zwischen in der Muttersprache und in der Fremdsprache erworbenen mathematischen Kenntnissen.

In der Fachliteratur wurde auch darauf verwiesen, dass sich der angenommene Einfluss in erster Linie auf das Verstehen, auf die Kognition beziehen kann.[96] Dies bedeutet, dass sich der Einfluss der Fremdsprache auf die mathematische Leistung insbesondere im kognitiven Bereich bemerkbar machen lassen soll. Aufgrund dieser Überlegungen kann man vermuten, dass die Verwendung einer Fremdsprache im Mathematikunterricht die kognitiven Komponenten des mathematischen Wissens, so das prozedurale und konzeptuelle Wissen [S. 37] bzw. deren Verhältnis [S. 41] beeinflussen kann. Daher lässt sich aus der Haupthypothese 1 ableiten:

1. 1. Teilhypothese:

Zwischen muttersprachlich und fremdsprachlich bearbeiteten mathematischen Bereichen gibt es Unterschiede, die sich sowohl auf die Entwicklung von als auch auf das Verhältnis zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen beziehen.

Ferner gilt, dass im Unterricht heutzutage die Entwicklung der mathematischen Kompetenz [S. 28] als eine der acht Schlüsselkompetenzen [S. 13] eine zentrale Rolle spielt. Dies trifft auch auf die von mir untersuchte Hochschulausbildung zu

[96] In den Arbeiten von Clarkson, 2005; Clarkson, 2007 und Moschkovich, 2007 [S. 60] wird betont, dass die Bilingualität die Metakognition und demzufolge den mathematischen Wissenserwerb fördert, während Butzkamm, 2002 [S.58] nachgewiesene Schwierigkeiten im fremdsprachigen naturwissenschaftlichen Unterricht thematisiert.

[S. 15]. Demzufolge ergibt sich eine zentrale Frage hinsichtlich des bilingualen Mathematikunterrichts, nämlich, ob die Verwendung der Fremdsprache im Mathematikunterricht die Entwicklung der mathematischen Kompetenz beeinflusst, und im Zusammenhang damit, ob die Ziele des Mathematikunterrichts im bilingualen Kontext zu erreichen sind. Ich formuliere:

1. 2. Teilhypothese:

Es gibt Unterschiede in der Kompetenzentwicklung zwischen muttersprachlich bzw. fremdsprachlich bearbeiteten mathematischen Bereichen.

Weiterhin zeigten eigene langjährige pädagogische Erfahrungen im bilingualen Mathematikunterricht, dass sich die in der Muttersprache erworbenen Begriffsansätze nicht automatisch an fremdsprachlich ausgedrückte (teilweise generalisierte) mathematische Begriffe anschließen. Dies kann auch dazu führen, dass die neu (d. h. in der Fremdsprache) erworbenen mathematischen Begriffe weniger stabil und klar sind als muttersprachlich erworbene Begriffe. So wird in Bezug auf den bilingualen Mathematikunterricht formuliert:

1. 3. Teilhypothese:

Es gibt Unterschiede in der Stabilität und Klarheit der muttersprachlich bzw. fremdsprachlich angeeigneten Begriffe.

Ferner wird darauf hingewiesen, dass *Butzkamm, 2002* [S. 58] zusätzliche Schwierigkeiten im fremdsprachigen bilingualen naturwissenschaftlichen Unterricht vermutet. Meine eigenen Erfahrungen im bilingualen Mathematikunterricht untermauern diese Annahme und lassen in diesem Zusammenhang vermuten, dass die bilinguale Vermittlung mathematischer Konzepte eine doppelte – eine sprachliche und eine mathematische – Herausforderung darstellt. Demzufolge können Verstehensschwierigkeiten sowohl seitens der Mathematik als auch seitens der Fremdsprache entstehen. Um im Mathematikunterricht diesen Verstehensschwierigkeiten gezielt entgegensteuern zu können, ist es von besonderer Bedeutung, diese zu diagnostizieren und zu entscheiden, welcher – sprachlicher oder mathematischer – Natur sie sind. Dementsprechend lässt sich die Haupthypothese 2 bezüglich des bilingualen Mathematikunterrichts auf folgende Art präzisieren:

2. Haupthypothese:

Im Falle von Verstehensschwierigkeiten im bilingualen Mathematikunterricht ist es diagnostizierbar, ob diese von mathematischer oder sprachlicher Natur sind.

In der einschlägigen Fachliteratur wurde auch für die Kulturabhängigkeit der Mathematik[97] plädiert, es wird also vermutet, dass Mathematik in verschiedenen Sprachen unterschiedlich ist. Es wurde ebenfalls angenommen, dass eine Kombination der Fremdsprache und der Muttersprache im bilingualen Mathematikunterricht zur Förderung des Verstehens mathematischer Inhalte[98] und zur Förderung der Meta-

[97] Barwell, 2003 bzw. Novotná und Moraová, 2005 [S. 59], fachsprachliche Unterschiede auf Mathematik bezogen wies Evans, 2007 nach.

[98] Farugia, 2002 [S. 60]

kognition[99] beitragen kann. Diese Ergebnisse weisen darauf hin, dass durch eine bewusste *zwei*sprachige Unterrichtsführung im bilingualen Mathematikunterricht ein differenziertes Verständnis für Mathematik entwickelt werden kann. In diesem Sinne wird die Vermutung formuliert:

3. Haupthypothese:

Eine bewusste *zwei*sprachige Unterrichtsführung kann im bilingualen Mathematikunterricht das Verstehen mathematischer Inhalte unterstützen.

Unter bewusster *zwei*sprachiger Unterrichtsführung wird verstanden, dass der Lehrende im Unterricht die sprachlichen Ausdrucksmöglichkeiten beider Sprachen bewusst in den Dienst der Mathematik stellt. Es soll darauf hingewiesen werden, dass diese Forderung im Einklang mit der Definition des bilingualen Unterrichts, also mit der von CLIL [S. 52] steht. Die sprachlichen Ausdrucksmöglichkeiten beider Sprachen bewusst in den Dienst der Mathematik zu stellen, bedeutet insbesondere, dass man sprachliche Spezifika und Unterschiede ermittelt und sich damit im Unterricht auseinandersetzt, deren Thematisierung die kognitive Verarbeitung mathematischer Inhalte begünstigen kann. Dies ist auf mindestens zweierlei Arten denkbar: Einerseits können solche sprachliche Mittel, in erster Linie Wörter und Wortverbindungen in der mathematischen Fachsprache existieren, bei denen in der einen Sprache Benennung und Begriff in engerer Verbindung zueinander stehen als in der anderen Sprache. D. h., die Benennung ist in der einen Sprache expressiver, ausdrucksvoller – linguistisch formuliert motivierter[100] – als in der anderen. Andererseits gilt aber, dass es in jeder Sprache sprachliche Phänomene gibt, die das Verstehen behindern, diese können u. a. alle Formen der Mehrdeutigkeit, sprachliche Interferenzen o. Ä. sein. Dass solche sprachliche Phänomene auch in der mathematischen Fachsprache vorkommen, steht außer Zweifel[101]. Es ist daher zu vermuten, dass diesen fachsprachlichen Phänomenen, die eventuell das Verstehen mathematischer Inhalte behindern können, zumindest zum Teil durch eine Kombination zweier Sprachen entgegengesteuert werden kann. In diesem Sinne wird die Haupthypothese 3 in folgende zwei Teilhypothesen zerlegt:

3.1. Teilhypothese:

Die Ermittlung und bewusste sowie gezielte Thematisierung derjenigen Stellen im bilingualen Mathematikunterricht, an denen die Fremdsprache gegenüber der Muttersprache, oder umgekehrt, die Muttersprache gegenüber der Fremdsprache in der Repräsentation mathematischer Inhalte ausdrucksvoller ist, kann deren Verstehen fördern.

---

[99] Clarkson, 2005; Clarkson, 2007 und Moschkovich, 2007 [S. 60.

[100] Im Gegensatz zum psychologischen Motivationsbegriff, welcher sich auf den inneren Trieb, ein Ziel zu erreichen, bezieht, wird in der Sprachwissenschaft unter Motivation die Eigenschaft von bestimmten sprachlichen Zeichen verstanden, dass ihre Formseite nicht willkürlich mit ihrer Begriffsseite vebunden wird, sondern bereits ein kognitiver Grund vorliegt. Dies kann phonetischer, morphologischer oder semantischer Natur sein. Zum motivationsbegriff der Psychologie siehe z. B. Hartinger/Fölling-Albers, 2002 bzw. zum Motivationsbegriff der Linguistik Nöth, 2000.

[101] Vgl. Maier/Schweiger, 1999, S. 56-59

3. 2. Teilhypothese:

Die Ermittlung und bewusste sowie gezielte Thematisierung derjenigen Stellen im bilingualen Mathematikunterricht, an denen in der Muttersprache sprachliche Hindernisse vorliegen können, dies aber in der Fremdsprache nicht zutrifft, oder umgekehrt, in der Fremdsprache sprachliche Hindernisse vorliegen können, dies aber in der Muttersprache nicht zutrifft, kann dazu beitragen, mathematische Inhalte besser zu verstehen.

6. Vorstellung der Untersuchungen im Bereich des bilingualen Mathematikunterrichts

In diesem Kapitel werden eine theoretische und zwei weitere empirische Untersuchungen vorgestellt, die der Überprüfung der Gültigkeit der im vorangegangenen Kapitel formulierten Hypothesen dienten. Als erste wird eine Fallstudie, durchgeführt im Jahre 2004 an der Wirtschaftshochschule Budapest, dargestellt, die sich auf die Aufdeckung von Unterschieden des mathematischen Wissens zwischen muttersprachlich und fremdsprachlich unterrichteten Kursgruppen richtete. Mit dieser Fallstudie wurde sich also zum Ziel gesetzt, die Hypothese 1 [S. 62] näher zu untersuchen. Zur Überprüfung der Hypothese 2 [S. 63] wurde ebenfalls eine Fallstudie konstruiert und im Jahre 2008 unter ungarischen Studenten der Friedrich-Schiller-Universität Jena durchgeführt. Bei dieser Untersuchung wurde das Ziel verfolgt, Verstehensschwierigkeiten und deren sprachliche oder mathematische Natur beim fremdsprachlichen mathematischen Wissenserwerbsprozess zu diagnostizieren. Bei beiden Fallstudien ging es im stregsten Sinne um Fallstudien, die Probanden wurden also nicht zufällig ausgewählt und ihre Anzahl in beiden Fällen gering blieb. So wurde keineswegs zum Ziel gesetzt, statistische Belege für oder gegen die formulierten Hypothesen zu finden, sondern im Zusammenhang mit denen Tendenzen zu erkennen bzw. diagnostische Möglichkeiten aufzudecken. Als letzter Punkt in diesem Kapitel wird eine theoretische Untersuchung zur deutschen und ungarischen mathematischen Fachsprache dargestellt und mittels ihrer vergleichenden Analyse die Gültigkeit der Hypothese 3 [S. 64] überprüft.

6. 1. Fallstudie an der Wirtschaftshochschule Budapest

6. 1. 1. Zielsetzung der Fallstudie

In dieser Fallstudie wurde beabsichtigt, kognitive Komponenten (Stufen des prozeduralen bzw. konzeptuellen Wissens [S. 43] und deren Verhältnis zueinander [S. 41]) des mathematischen Wissens sowie mathematische Kompetenzstufen und die Stabilität neu erworbener mathematischer Begriffe bei Kursgruppen zu vergleichen, die sich bestimmte mathematische Inhalte in einer Fremdsprache bzw. in ihrer Muttersprache angeeignet haben, um einen eventuellen Einfluss der Fremdsprache auf die erworbenen mathematischen Kenntnisse aufzudecken. Die Fallstudie diente also zur punktuellen Überprüfung der Teilhypothesen 1.1. [S. 62], 1.2. [S. 63] und 1.3. [S. 63]. Der Mathematikunterricht in der ungarisch- und deutschsprachigen Ausbildung an der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus der Wirtschaftshochschule Budapest unterscheidet sich in erster Linie in der Arbeitsprache voneinander, nicht aber wesentlich in anderen Faktoren, wie Thematik, Aufbau, zeitlichem Rahmen o. ä. Dementsprechend schien sich eine vergleichende Untersuchung des erworbenen mathematischen Wissens in dieser Umgebung für das formulierte Forschungsziel insbesondere zu eignen. Die Datenerhebung erfolgte an einer Übergansstelle zwischen zwei Themenbereichen. Somit können die erhobenen Daten darüber Auskunft geben, inwieweit die notwendigen kognitiven Lernvoraussetzungen für den weiteren Unterricht bei Studenten der fremdsprachigen und muttersprachlichen Ausbildung vorhanden sind.

6. 1. 2. Forschungsdesign

Bei der durchgeführten Fallstudie wurde davon ausgegangen, dass sich der Mathematikunterricht bei Gruppe (Unterricht in auf deutsch) und Kontrollgruppe (Unterricht auf ungarisch) ausschließlich in der Sprache des Unterrichts unterscheidet und wurde demzufolge diese, also die Arbeitssprache als unabhängige Variable betrachtet. Inwieweit alle anderen Faktoren, die eventuell einen Einfluss auf das erworbene mathematische Wissen ausüben können, tatsächlich übereinstimmten, wird im nächsten Abschnitt thematisiert. Als (von der Sprache) abhängige Variable wurden Kompetenzstufen, kognitive Komponenten, wie prozedurales und konzeptuelles Wissen, ihr Verhältnis zueinander, sowie Stabilität einzelner Begriffe bzw. Qualität und Quantität der begangenen Fehler betrachtet.
Zur Auswertung der Ergebnisse wurde die an den Mathematikunterricht angepasste revidierte Bloomsche Taxonomie [S. 43], das Kompetenzstufenmodell der wirtschaftsmathematischen Kompetenz [S. 32] benutzt, ferner wurde ein bereits vorhandenes Modell zur Klassifikation von Fehlern bei der Lösung mathematischer Aufgaben *(Movshovitz-Hadar/Zaslavsky/Inbar, 1987)* an die aktuelle Situation angepasst. Diese Anpassung wird im Abschnitt 6.1.7 Fehleranalyse [S. 75] erörtert.
Es ist offensichtlich, dass die Auswahl der an der Fallstudie beteiligten Personen willkürlich und nicht zufällig erfolgte, dementsprechend ist eine statistische Analyse der Ergebnisse irrelevant, sie wird auch nicht als Ziel verfolgt. Es wird vielmehr beabsichtigt, anhand einer eher qualitativen als quantitativen Analyse Tendenzen zu erkennen und Vermutungen hierüber zu formulieren.

6. 1. 3. Bedingungen

Die Teilnehmer der Fallstudie waren 56 ungarische Studenten der deutschsprachiger Ausbildung der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus an der Wirtschaftshochschule Budapest, die Mathematik bis zum Abitur in ihrer Muttersprache gelernt haben und zur Zulassung zum deutschsprachigen Studium ihre Deutschkenntnisse (mindestens Kompetenzstufe B2 [S. 47]) nachgewiesen haben. Die Kontrollgruppe bestand aus 68 ungarischen Studenten der gleichen Hochschule (gleicher Jahrgang, gleiche Fakultät und Studienfächer), die das Studium in ihrer Muttersprache führten. Es handelt sich um je zwei Seminargruppen.
Anhand der Zulassungsanforderungen[102] für das Studium lässt sich behaupten, dass

[102] Die Zulassung zum Studium erfolgt in Ungarn überwiegend anhand der Schulleistung in der Sekundarstufe II. (anhand der Fächer Ungarische Sprache und Literatur, Geschichte, Mathematik, eine Fremdsprache und ein wahlobligatorisches Fach) und der Abiturergebnisse. Im Jahr 2004 wurden die Schul- und Abiturnoten auf einer Skala von maximal 120 Punkten abgebildet, es konnten evtl. Zusatzpunkte für nachgewiesene zusätzliche Sprachkenntnisse, Qualifikationen bei hochrangigen Schülerwettbewerben o. ä. erworben werden. An der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus der Wirtschaftshochschule Budapest variierte die Mindestanforderung in den verschiedenen Fachrichtungen der ungarischsprachigen Ausbildung zwischen 104 und 123 Punkten, in der deutschsprachigen Ausbildung zwischen 76 und 114. Gewichtet man diese Werte mit der Anzahl der tatsächlich zum

beide Gruppen ähnlich gute Mathematikkenntnisse aus der schulischen Ausbildung haben mitbringen sollen. Die Voraussetzungen sind zwar in der deutschsprachigen Ausbildung ein wenig niedriger gewesen, als in der ungarischsprachigen, im stattgefundenen Unterricht haben sich aber m. E. keine markanten Unterschiede bemerkbar gemacht. Motivationale Aspekte sind nicht untersucht worden.
Der Untersuchung ging ein Unterricht 3 Wochen lang in einem zeitlichen Rahmen von 3 Semesterwochenstunden (1 Vorlesung + 2 Seminare) voran, der der gleichen Thematik und dem gleichen Aufbau folgte. Es bestand jedoch ein Unterschied in der Organisation der Lehrveranstaltungen: In der ungarischen Ausbildung wurden die Vorlesungen (jede zweite Woche fällig) von einer Lehrperson im Plenum, also nicht im Seminargruppenverband gehalten, diese wurden jede Woche durch eine zweistündige Übung von einer anderen Lehrperson ergänzt. Die Vorlesungen in der deutschsprachigen Ausbildung wurden mit in die Seminare integriert und jede Woche ein gleitender Übergang zwischen Vorlesung und Seminar im Rahmen einer dreistündigen Lehrveranstaltung angestrebt. Die Lehrperson der an der Fallstudie beteiligten Seminargruppen, also der Übungsgruppenleiter der beiden Gruppen aus der ungarischsprachigen Ausbildung bzw. der Lehrende der beiden Gruppen aus der deutschsprachigen Ausbildung war allerdings ein und dieselbe Person.
Im vorangegangenen Unterricht wurde der Themenbereich der Folgen ausführlich behandelt, um die Einführung des zentralsten Begriffs des Analysisunterrichts, des Funktionsgrenzwertbegriffs gemäß dem Ansatz [1] [S. 20] vorzubereiten. In diesem Unterricht wurden insbesondere die Monotonie- und Grenzwerteigenschaften, bzw. die Beschränktheit der Folgen thematisiert. Es wurde im Wesentlichen auf Zahlenfolgen fokussiert, wobei speziell gebrochen-rationale Folgen, Potenzfolgen und Folgen, die sich auf Folgen von der Form $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ zurückführen lassen, berücksichtigt wurden.
Nach diesem Unterricht wurden drei Aufgaben mit mehreren Teilaufgaben den Studenten gestellt, die sie anonym und freiwillig bearbeiteten. Es ist wichtig zu betonen, dass diese Aufgaben ausschliesslich zur Diagnostik, nicht aber zur Leistungsmessung gedient haben.

6. 1. 4. Aufgaben

Die Aufgaben 1 und 2 bzw. die Teilaufgaben 3a, 3c, 3e, 3f zielten darauf ab, unterschiedliche Kompetenzstufen und kognitive Ebenen bezüglich der zentralen Begriffe Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz von Folgen zu ermitteln. Der Schwerpunkt lag dennoch auf dem Konvergenzbegriff, er wird in 13 von insgesamt 15 Teilaufgaben auf 4 verschiedenen Kompetenzstufen angesprochen (siehe Abdeckungsmatrix [S. 73]). Ferner wurde darauf geachtet, dass jeder der oben erwähnten zentralen mathematischen Begriffe sowohl in prozeduralen als auch konzeptuellen Aufgaben [S. 39] vorkommt. Die Teilaufgaben 3b, 3d und 3g geben Auskunft dar-

---

Studium zugelassenen Studenten in den verschiedenen Fachrichtungen, so entsprechen diese Daten einem gewichteten Mittel von 115,7 in der ungarischsprachigen und von 102,5 in der deutschsprachigen Ausbildung. Einen tabellarischen Überblick über die relevanten Mindestpunktwerte bei der Zulassung zum Studium an der Wirtschaftshochschule Budapest im Jahr 2004 findet man im Anhang G.

über, inwiefern ein stabiler Konvergenzbegriff bei den Probanden vorlag.
In der ersten Aufgabe ging es darum, eine konkret vorgegebene Folge auf ihr Monotonieverhalten, Beschränkheit und Konvergenzverhalten zu überprüfen, bzw. zu einem vorgegebenen Fehler die Schwellenzahl zu bestimmen und das Ergebnis zu interpretieren. Diese Aufgabe stellt eine typisch prozedurale Aufgabe dar, die Interpretation der ermittelten Schwellenzahl[103] gehört jedoch zum konzeptuellen Wissen.
In der zweiten Aufgabe sollten konkrete Folgen zu vorgegebenen Eigenschaften benannt werden, somit ging es darum, konzeptuelles Wissen zu aktivieren. Diese Aufgabe bestand aus sieben Teilaufgaben mit abgestuftem Schwierigkeitsgrad.
In der dritten Aufgabe[104] sollte man eine Entscheidung über die Gültigkeit von sieben Aussagen treffen, die sich auf konvergente und/oder monotone und/oder beschränkte Folgen bezogen. Wurde eine Aussage als richtig bewertet, reichte es aus, dies zu signalisieren. Wurde aber eine Aussage als falsch bewertet, waren die Studenten aufgefordert, auch ein Gegenbeispiel anzugeben. Auch in dieser Aufgabe wurde konzeptuelles Wissen erfragt, jedoch wegen des allgemeinen Charakters der Aussagen auf einer höheren Stufe als in der zweiten Aufgabe.
Konkret ging es um folgende Aufgaben:

1. *Untersuchen Sie die Folge* $a_n = \frac{2n+1}{3n+5}$ *auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz! Geben Sie die Schwellenzahl* n_0 *zum Fehler* $\varepsilon=10^{-3}$ *an, und interpretieren Sie das Ergebnis!*
2. *Geben Sie je ein Beispiel für Folgen mit folgenden Eigenschaften an:*
   a. *konvergiert gegen 0:*
   b. *konvergiert gegen 3:*
   c. *konvergiert gegen e:*
   d. *konvergiert gegen -1000:*
   e. *die Folge ist nicht monoton und konvergiert gegen 0:*
   f. *die Folge ist nicht monoton und konvergiert gegen 3:*
   g. *die Folge ist nicht monoton und divergent:*
3. *Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Widerlegen Sie die falschen Aussagen jeweils durch ein Gegenbeispiel:*
   a. *Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt.*
   b. *Jede monotone Folge ist konvergent.*
   c. *Jede konvergente Folge ist monoton.*
   d. *Jede nicht beschränkte Folge ist divergent.*
   e. *Jede divergente Folge ist nicht beschränkt.*
   f. *Jede beschränkte Folge ist konvergent.*
   g. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

[103] Der Begriff „Schwellenzahl" kommt in der deutschen mathematischen Tradition nicht vor. Es wurde damit zu einem vorgegebenen Fehler ε das Index n_0 gemeint, ab dem alle Folgenglieder in der ε-Umgebung des Grenzwertes liegen.
[104] Diese Aufgabe wurde aus *Schöwe/Knapp/Borgmann, 1996* S. 166 übernommen.

6. 1. 5. Eine mögliche ideale Lösung

Im Weiteren werden anhand des vorangegangenen Unterrichts zu erwartende Lösungen und deren didaktische Analyse angeführt, die eine maximale Leistung darstellen. Die Grundlage für die Einordnung der zu erwartenden Lösungen auf Kompetenzstufen und auf Stufen des prozeduralen bzw. konzeptuellen Wissens bildeten das Kompetenzstufenmodell der wirtschaftsmathematischen Kompetenz [S. 32] und die an die Mathematik angepasste revidierte Bloomsche Taxonomie [S. 43]. Von diesen idealen Lösungen abweichende tatsächlich vorgekommene Studentenlösungen und deren Einordnung sind im Anhang H ausführlich dargestellt.

(1a) Monotonie der Folge $a_n = \frac{2n+1}{3n+5}$	
Studentenlösungen	**Didaktische Analyse**
die Aufgabe durch Differenzbildung auf Vorzeichenanalyse zurückführen $a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+5} - \frac{2n+1}{3n+5} =$ $= \frac{2n+3}{3n+8} - \frac{2n+1}{3n+5} =$ $= \frac{(2n+3)(3n+5)-(3n+8)(2n+1)}{(3n+8)(3n+5)}$ $= \frac{7}{(3n+8)(3n+5)} > 0 \quad \forall n \in N$ $\Rightarrow$ *die Folge ist streng monoton steigend*	Diese Lösung lässt nicht nur eine intuitive, sondern bereits eine detaillierte Vorstellung von der Monotonie einer Folge (Erfassen der Tendenz von unendlich vielen Elementen) erkennen, wobei die Herstellung von Verbindungen zu anderen Begriffen noch nicht notwendig ist. Demzufolge erfordert diese Lösung Kompetenzen auf Kompetenzstufe B. Hierbei wird eine Strategie und im Zusammenhang damit ein praktisches Verfahren, also eine Prozedur zur Überprüfung der Monotonie angewandt, damit erfordert diese Lösung P3.
(1b) Beschränktheit der Folge $a_n = \frac{2n+1}{3n+5}$	
Studentenlösungen	**Didaktische Analyse**
Nach der Überprüfung der Monotonie und der Konvergenz: die Folge a_n ist streng monoton steigend $\Rightarrow$ sie ist nach unten beschränkt $a_1 = \frac{3}{8} \le a_n$ Die Folge a_n ist konvergent $\Rightarrow$ sie ist beschränkt, der Grenzwert ist in diesem Fall die kleinste obere Schranke: $a_n < \frac{2}{3} = \lim a_n$	Bei dieser Lösung werden zwischen dem Begriff der Beschränktheit und anderen Begriffen wie Monotonie und Konvergenz Verbindungen hergestellt, damit geht es hier bereits um die Kompetenzstufe C. Die Schranken wurden nicht nur durch Kenntnisse von bestimmten Verfahren deren Anwendung bestimmt, sondern durch eine Analyse des Begriffs bzw. sein Verhältnis zu anderen Begriffen: Monotonie, Konvergenz und Beschränktheit begründen gemeinsam den Grenzwert als Schranke. Somit erfordert diese Lösung bereits P4.

<table>
<tr><th colspan="2">(1c) Konvergenz der Folge $a_n = \frac{2n+1}{3n+5}$</th></tr>
<tr><th>Studentenlösungen</th><th>Didaktische Analyse</th></tr>
<tr><td>Durch Division des Zählers und des Nenners wird die Aufgabe auf $\lim \frac{1}{n}$ zurückgeführt:
$\lim \frac{2n+1}{3n+5} = \lim \frac{2+\frac{1}{n}}{3+5\cdot\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3+5\cdot 0} = \frac{2}{3}$</td><td>Bei dieser Lösung wurde bereits eine detaillierte und bekannte Darstellung notwendiger Schritte vorgenommen, die schließlich den Grenzwert einer Folge erkennen lässt. Die Herstellung von Verbindungen zu anderen Begriffen muss dabei noch nicht notwendig erfolgt sein. Demzufolge wird dieser Lösung nur die Kompetenzstufe B und P3 zugeordnet.</td></tr>
<tr><th colspan="2">(1d) Bestimmung der Schwellenzahl n_0 zum Fehler $\varepsilon=10^{-3}$ und ihre Interpretation</th></tr>
<tr><th>Studentenlösungen</th><th>Didaktische Analyse</th></tr>
<tr><td>Den Zusammenhang zw. Fehler, Grenzwert und Folge durch eine Ungleichung erfassen
$|a_n - A| < \varepsilon$
$\left|\frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{1000}$
$\left|\frac{3(2n+1)-2(3n+5)}{3(3n+5)}\right| < \frac{1}{1000}$
$\left|\frac{-7}{9n+15}\right| < \frac{1}{1000}$
$\frac{7}{9n+15} < \frac{1}{1000}$
$776 < 776{,}1111 \approx \frac{6985}{9} < 777 \le n$
$n_0 = 776$</td><td>Die Aufstellung der nebenstehenden Ungleichung zeigt eine detaillierte Vorstellung von Konvergenz. Diese Lösung lässt weiterhin auf Kenntnis, Erfassen und Anwendung bestimmter Prozeduren (algebraische Terme auf gemeinsamen Nenner bringen, Absolutbetrag von algebraischen Termen bestimmen, ordnen und umformen), bzw. Kenntnis, Erfassen und Anwendung bestimmter weiterer Zusammenhänge (Schwellenzahl ist der Index des größten Folgengliedes, welches noch nicht zur ε-Umgebung des Grenzwertes gehört) schließen.</td></tr>
<tr><td>Das Ergebnis wird interpretiert:
Ab dem 777sten Glied liegen alle Folgenglieder in der $\frac{1}{1000}$ -Umgebung des Grenzwertes $\frac{2}{3}$</td><td>Die richtige Interpretation des Ergebnisses erfordert eine begriffliche Analyse der durchgeführten Prozedur, dadurch soll eine Verbindung zw. Schwellenzahl, Fehler, Grenzwert und Folgengliedern hergestellt werden. Demzufolge wird diese Lösung auf Kompetenzstufe C und K4 eingestuft.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">(2a) Angabe einer Nullfolge</th></tr>
<tr><th>Studentenlösungen</th><th>Didaktische Analyse</th></tr>
<tr><td>$\frac{1}{n}$</td><td>Da im vorangegangenen Unterricht die Folge $\frac{1}{n}$ als Prototyp einer konvergenten Folge behandelt wurde, braucht zur Angabe dieser Folge nur diese Information aus dem Gedächtnis abgerufen zu werden. Demzufolge wird diese Lösung auf Kompetenzstufe A und K1 eingestuft.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Angabe von Folgen, die gegen (2b) 3, (2c) e, (2d) -1000 konvergieren</th></tr>
<tr><td>$\frac{9n+5}{3n+2}$; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
$\frac{1}{n}-1000$</td><td>Hinter der Angabe dieser und ähnlicher Folgen steht schon eine differenziertere Vorstellung von der Konvergenz. Es wurden bestimmte Eigenschaften der Folgen mit ihren Grenzwerten in Verbindung gebracht. Deswegen lassen sich diese Lösungen der Kompetenzstufe B und K3 zuordnen.</td></tr>
<tr><th colspan="2">(2e) Angabe einer nicht monotonen Nullfolge, (2f) einer nicht monotonen Folge, die gegen 3 konvergiert; (2g) einer nicht monotonen divergenten Folge</th></tr>
<tr><td>$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; $3+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
$(-1)^n$</td><td>Hinter diesen Ansätzen kann man eine differenzierte Vorstellung sowohl von der Monotonie als auch von der Konvergenz und deren Verbindung erkennen. Es handelt sich um eine Leistung auf Kompetenzstufe C und K4.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>(3a) „Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt”</th><td rowspan="14">Diese Ansätze zeigen, dass nicht nur eine analytische Auseinandersetzung mit der inhaltlichen Seite der Aussage und mit den dahinterstehenden Begriffen erfolgte, sondern es auch zu einer Synthese dieser Inhalte gekommen ist. Dementsprechend wird diesen Lösungen Kompetenzstufe D und K5 zugeordnet.</td></tr>
<tr><td>Die Aussage ist falsch, Gegenbeispiel: $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$</td></tr>
<tr><th>(3b) „Jede monotone Folge ist konvergent.”</th></tr>
<tr><td>Die Aussage ist richtig.</td></tr>
<tr><th>(3c) „Jede konvergente Folge ist monoton.”</th></tr>
<tr><td>Die Aussage ist falsch, Gegenbeispiel: $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$</td></tr>
<tr><th>(3d) „Jede nicht beschränkte Folge ist divergent.”</th></tr>
<tr><td>Die Aussage ist falsch, Gegenbeispiel: 2^n</td></tr>
<tr><th>(3e) „Jede divergente Folge ist nicht beschränkt”</th></tr>
<tr><td>Die Aussage ist falsch, Gegenbeispiel: $(-1)^n$</td></tr>
<tr><th>(3f) „Jede beschränkte Folge ist konvergent.”</th></tr>
<tr><td>Die Aussage ist falsch, Gegenbeispiel: $(-1)^n$</td></tr>
<tr><th>(3g) „Jede konvergente Folge ist beschränkt.”</th></tr>
<tr><td>Die Aussage ist falsch, Gegenbeispiel: n^2</td></tr>
</table>

Folgende Tabelle fasst unsere Erwartungen zusammen:

	Aufgabe 1				**Aufgabe 2**							**Aufgabe 3**			
Präferenzen:	a	b	c	d	a	b	c	d	e	f	g	a	c	e	f
Mathematische Begriffe															
Monotonie	B								C	C	C	D	D		
Beschränktheit		C										D		D	D
Konvergenz			B	C	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D	D
Kognitive Komponenten															
Prozedurales Wissen	P 3	P 4	P 3	P 3											
Konzeptuelles Wissen				K 4	K 1	K 3	K 3	K 3	K 4	K 4	K 4	K 5	K 5	K 5	K 5

Tabelle 12: Abdeckung der präferierten Begriffe auf unterschiedlichen Kompetenzstufen bzw. Abdeckung der präferierten kognitiven Komponenten des mathematischen Wissens

6. 1. 6. Auswertung

Die Auswertung der Studentenlösungen erfolgte nach folgenden Prinzipien und in folgenden Schritten:
Bei jedem Proband wurde zunächst seine Leistung bei jeder der Teilaufgaben 1a-1d, 2a-2g, 3a, 3c, 3e bzw. 3f auf eine Kompetenzstufe eingestuft und sein zugehöriges prozedurales bzw. konzeptuelles Wissen bewertet. Dadurch entstand eine detaillierte Landkarte über kognitive Leistungen des Einzelnen aber auch der Gruppe. Anschließend wurden diejenigen Teilaufgabengruppen bei jedem Proband untersucht, die sich auf die drei oben genannten präferierten Begriffe bezogen. Bei jedem Proband wurde festgestellt, auf welcher Stufe er über Kompetenzen in Bezug auf die Begriffe Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz verfügte. Dabei wurde so vorgegangen, wenn der Proband mindestens die Hälfte der auf einer Kompetenzstufe erwarteten Teilaufgaben gelöst hat, wurde seine Kompetenz dieser Stufe zugeordnet. Zeigte er hingegen auf einer bestimmten Kompetenzstufe zwar Kenntnisse, aber in einem für diese Stufe unzureichendem Umfang, so wurde ihm die nächstmögliche niedrigere Stufe zugeordnet. Ein Beispiel soll dieses Prinzip verdeutlichen: In Bezug auf Monotonie wurde eine Leistung von BCCCDD über alle Aufgaben (Vgl. Tabelle 12) erwartet. Um insgesamt die Kompetenzstufe B zugeordnet zu bekommen reichte aus, in einer der 6 relevanten Teilaufgaben eine Leistung auf Stufe B aufzuzeigen, also etwa Leistungen wie B000AA oder 0BBA00 entsprechen dieser Forderung. Um aber Kompetenzstufe C zu erreichen, sollte man in mindestens zwei Teilaufgaben eine Leistung auf Stufe C zu erbringen, z. B. genőgt das Profil BCBCAA. Es ist auch naheliegend, dass in Bezug auf die Monotonie die Kompetenzstufe A erreicht wurde, wenn der Proband in manchen Teilaufgaben eine Leistung auf Stufe A aber nicht höher gezeigt hat.
In einem weiteren Schritt wurden bei jedem Proband eine Punktzahl für prozedurale und konzeptuelle Leistung bestimmt. Diese entsprachen der Summe der erreichten prozeduralen bzw. konzeptuellen Stufen. Anhand der obigen Abdeckungsmatrix

wird ersichtlich, dass das prozedurale Wissen bei 4 Teilaufgaben (1a-1d) bewertet wurde, anhand der erreichbaren Stufen entspricht dies einer maximalen Punktzahl von 13 Punkten. Analog dazu wurde das konzeptuelle Wissen bei 12 Teilaufgaben (1d-3f) bewertet, deren Stufensumme einer maximalen Punktzahl von 46 Punkten. Um Zusammenhänge zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen aufdecken zu können, wurde auch eine gemeinsame Verteilung der beiden Punktzahlen betrachtet. Dabei wurden 4 Gruppen gebildet:

1. Hohe prozedurale Punktzahl (7-13) - hohe konzeptuelle Punktzahl (24-46)
2. Hohe prozedurale Punktzahl (7-13) - niedrige konzeptuelle Punktzahl (0-23)
3. Niedrige prozedurale Punktzahl (0-6) - hohe konzeptuelle Punktzahl (24-46)
4. Niedrige prozedurale Punktzahl (0-6) - niedrige konzeptuelle Punktzahl (0-23)

Ferner wurden die Teilaufgaben 3b, 3d und 3g als Indikatoren benutzt, um zu überprüfen, inwieweit die Vorstellung der Studenten von der Konvergenz stabil ist. Diese Teilaufgaben sind nämlich je nach Vorstellung von der Konvergenz richtig oder falsch. Werden unter konvergenten Folgen im klassischen Sinne ausschließlich Folgen verstanden, die über einen endlichen Grenzwert verfügen, so ist die Aussage 3b falsch, die Aussagen 3d und 3g richtig. Werden aber gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebende Folgen auch als konvergent angesehen (Konvergenz in erweitertem Sinne, oder uneigentliche Konvergenz), dann sollten die Aussagen genau umgekehrt beurteilt werden. Die Auswertung erfolgte nach folgendem Prinzip: Wurden drei Lösungen konsequent angegeben (also 3b falsch, 3d richtig, 3g richtig oder genau umgekehrt), so wurde dies als Zeichen für eine stabile Vorstellung von der Konvergenz gedeutet. Wurden drei Lösungen inkonsequent angegeben (also jeweils eine Abweichung von dem einen oder dem anderen richtigen Schema), so wurde dies als Zeichen für eine labile Vorstellung von der Konvergenz gedeutet. Bei Studenten, die entweder keine, eine oder nur zwei von diesen Aussagen bewertet haben, konnte über die Stabilität des Konvergenzbegriffs keine Aussage gemacht werden. In Tabelle 13 wird die Auswertung noch einmal verdeutlicht:

Stabilität/ Labilität	Konvergenzbegriff	(3b)*Jede monotone Folge ist konvergent.*	(3d) *Jede nicht beschränkte Folge ist divergent.*	(3g) *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*
stabile Vorstellung	Konvergenz in engerem Sinne	falsch	richtig	richtig
	Konvergenz in erweitertem Sinne	richtig	falsch	falsch
labile Vorstellung	Konvergenz in engerem Sinne	richtig	richtig	richtig
		falsch	falsch	richtig
		falsch	richtig	falsch
	Konvergenz in erweitertem Sinne	falsch	falsch	falsch
		richtig	richtig	falsch
		richtig	falsch	richtig
nicht erkennbare Vorstellung	keine, eine einzige oder zwei Antworten			

Tabelle 13: Stabilität des Konvergenzbegriffs

6. 1. 7. Fehleranalyse der Studentenlösungen

Neben der Einordnung der Studentenlösungen auf Kompetenzstufen und Stufen des prozeduralen bzw. konzeptuellen Wissens sind auch die von den Probanden begangenen Fehler analysiert worden. Zunächst ist bei jedem Probanden jeder begangene Fehler markiert worden, wobei Folgefehler außer Acht geblieben sind.

Das Kategoriensystem

Die Klassifikation der Fehler orientiert sich am Modell von *Movshovitz-Hadar/Zaslavsky/Inbar, 1987*, im Folgenden werden die Eckpunkte dieses Modells zusammengefasst. Die Autoren haben unter Anwendung der Methode der konstruktiven Analyse[105] anhand umfangreicher empirischer Daten aus Schülerheften 6 Kategorien von Fehlern bei der Lösung mathematischer Aufgaben festgestellt:

1. Kategorie: Misused data

In diese Kategorie gehören Fehler, bei denen es einen Unterschied zwischen den vorgegebenen und den vom Probanden benutzten Daten gibt. Es kann u. a. vorkommen, dass der Proband Daten benutzt, die nicht angegeben wurden oder die aus den angegebenen nicht abzuleiten sind. Ferner kann es bei diesem Typ von Fehlern vorkommen, dass der Proband wichtige vorgegebene Informationen außer Acht lässt oder überflüssige Daten beachtet; dass der Proband etwas voraussetzt, was in der vorgegebenen Aufgabe nicht vorkam oder mit dem Kontext der vorgegebenen Aufgabe nicht im Einklang steht; dass der Proband Variablen vertauscht oder einfach Daten aus der Aufgabe fehlerhaft übernimmt.

2. Kategorie: Misinterpreted language

Diese Kategorie beinhaltet die fehlerhafte Übertragung von mathematischen Tatsachen aus dem einen Repräsentationsmodus in einen anderen. In diese Kategorie gehören vor allem Fehler, bei denen sprachlich ausgedrückte mathematische Zusammenhänge fehlerhaft durch mathematische Symbole ausgedrückt werden (z. B. Aufstellung einer einem vorgegebenen Text nicht entsprechenden Gleichung); oder bei denen mathematische Konzepte durch Symbole ausgedrückt werden, die bereits eine traditionelle Bedeutung haben, die der Bedeutung in der aktuellen Aufgabe nicht entspricht und während der Lösung der Aufgabe die traditionelle Bedeutung der Symbole herangezogen wird; bzw. Fehler, bei denen graphische Symbole fehlerhaft als mathematische Symbole interpretiert werden oder umgekehrt.

3. Kategorie: Logically invalid inference

Diese Kategorie beinhaltet Fehler, die durch eine fehlerhafte logische Schlussfolgerung oder dadurch entstehen, dass aus gegebenen Informationen durch fehlerhafte Ableitung neue Informationen gewonnen werden. Beispiele hierfür sind Fehler, bei denen Voraussetzung und Folgerung vertauscht werden, logische Quantoren unpassend gebraucht werden, oder es in einer logischen Folgerungskette unbegründete Sprünge gibt.

---

[105] Bei der konstruktiven Fehleranalyse geht es darum, die Frage zu beantworten: Zu welcher Frage wäre das vom Lernenden erbrachte Ergebnis eine richtige Lösung? Es geht also darum, aufzudecken, welche Logik der Lernende bei seinem Lösungsweg verfolgt hat und darum, zu beurteilen, was er nicht verstanden hat, warum er nicht die richtige Lösung geliefert hat oder ob sein Fehler weit weg vom richtigen Ergebnis ist. Vgl. auch Movshovitz-Hadar/Zaslavsky/Inbar, 1987, S. 5.

4. Kategorie: Distorted theorem or definition
Diese Kategorie besteht aus Fehlern, die dadurch entstehen, dass konkrete aber identifizierbare Definitionen, Sätze, Regeln, Prinzipien unzulänglich angewandt werden. Es entstehen Fehler dieser Art, wenn beispielsweise Sätze ohne die Erfüllung deren Bedingungen angewandt oder wenn Definitionen, Sätze, Regeln, Prinzipien usw. ungenau gebraucht werden.
5. Kategorie: Unverified solution
In diese Kategorie gehören Fehler, bei denen jeder Schritt der Folgerungskette oder des Verfahrens korrekt ausgeführt wird, das Resultat aber keine Lösung der gestellten Aufgabe ist.
6. Kategorie: Technical errors
Diese Kategorie beinhaltet jede Art von Rechenfehler und von ungenügender Manipulation an algebraischen Termen, z.B. wenn Klammern fehlerhaft aufgelöst oder nicht beachtet werden.

Als nächster Schritt der Fehleranalyse wurde anhand einer Stichprobe von 15 Studentenlösungen die Brauchbarkeit des obigen Kategoriensystems überprüft. Da die meisten der von den Probanden begangenen Fehler problemlos und eindeutig zu einer der obigen Kategorien zuzuordnen waren, erwies sich das Kategoriensystem für die vorliegende Arbeit durchaus als brauchbar. Eine leichte Modifikation war allerdings notwendig: Mehrere Probanden haben bei der Lösung der ersten Aufgabe [S. 69] Annahmen über Monotonie, Beschränktheit oder Konvergenz der Folge mit der Überprüfung dieser Annahmen gleichgesetzt, es fehlte also bei ihnen der Anspruch auf einen Beweis, dieser wurde durch eine Überzeugung ersetzt. Da diese Lösungsansätze nicht falsch sind, aber allein die Lösung der Aufgabe nicht hergeben, wurden diese Ansätze in die 5. Kategorie *Unverified solution* aufgenommen und die Beschreibung der Kategorie um den Eintrag „Annahmen mit Beweis gleichsetzen" ergänzt. Es sind weiterhin sowohl in der muttersprachlichen als auch in der fremdsprachlichen Gruppe Antworten zu Fragen aufgefunden worden, bei denen keine mögliche Verbindung zwischen Frage und Antwort ermittelbar war. Bei diesen Antworten kann angenommen werden, dass der Proband die jeweilige Aufgabenstellung nicht verstanden hat. Diese Fehler wurden der 2. Kategorie *Misinterpreted Language* zugeordnet.

Typische Fehler

Nachdem die oben beschriebene Anpassung des Kategoriensystems an die aktuelle Situation erfolgt war, wurde jeder markierte Fehler einer Kategorie zugeordnet. Im Folgenden sind einige typische Vertreter der einzelnen Kategorien aufgelistet. In Klammern wird angegeben, um welche Aufgabe es jeweils ging.

1. Kategorie: Misused Data		
Unterkategorie	**Studentenlösung**	**Beschreibung**
Fehlerhafte Abschrift der Aufgabe	(1) $a_n = \frac{2n-1}{3n+5}$	Proband setzt 2n-1 statt 2n+1 im Zähler
Fehlerhafte Übernahme von Daten	(2d) $a_n = 1000$	Proband benutzt 1000 statt -1000
	(2d) $a_n = \frac{1}{1000}$	Proband setzt -1000 mit 1000^{-1} gleich
	(3d) $\left\lvert \frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2}{3} \right\rvert < \frac{1}{100}$	Proband setzt $\varepsilon = \frac{1}{100}$ statt $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ein
Nicht-Berücksichtigung von vorgegebenen Informationen	(2e) $a_n = \frac{1}{n}$	Proband lässt die Forderung nach Nicht-Monotonie außer Acht

2. Kategorie: Misinterpreted Language		
Unterkategorie	**Studentenlösung**	**Beschreibung**
Fehlerhafter Umgang mit Symbolen	(1a) $a_{n+1} = \frac{(2n+1)+1}{(3n+5)+1}$	Proband interpretiert das Symbol a_{n+1} fehlerhaft
	(1c) $\lim \frac{2n+1}{3n+5} = \frac{+\infty}{+\infty} = 1$	Proband interpretiert das Symbol $+\infty$ als eine reelle Zahl
	(1d) $n_0 = \frac{1}{5}$	Proband deutet das Symbol n_0 analog zu a_n und setzt im Term $a_n = \frac{2n+1}{3n+5}$ n=0 ein.
Fehlerhafte Übertragung mathematischer Inhalte in Sprache	(1b) Beschränktpunkt $\frac{3}{8}$	Proband formuliert sprachlich unkorrekt das ermittelte mathematische Ergebnis

3. Kategorie: Logically invalid inference		
Unterkategorie	**Studentenlösung**	**Beschreibung**
Vertauschung von Voraussetzung und Folgerung	(1a) $a_1 = \frac{3}{8} \le a_n < \frac{2}{3} = \lim a_n$ $\Rightarrow$ streng monoton steigend	Proband setzt das zu Beweisende voraus: die Aussage $a_1 = \frac{3}{8} \le a_n < \frac{2}{3} = \lim a_n$ gilt erst, wenn a_n monoton steigend ist.
Schlussfolgerung ohne Erfüllung aller Bedingungen	(1c) a_n streng monoton steigend $\rightarrow$ konvergiert gegen $+\infty$	Proband schließt aus einer steigenden Monotonie auf Konvergenz gegen $+\infty$ ohne Berücksichtigung weiterer Bedingungen (Unbeschränktheit).
Unbegründete Sprünge in der Folgerungskette	(1c) $\lim \frac{2n+1}{3n+5} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$	Proband schließt aus Konvergenz gegen $+\infty$ von Teilen einer Folge auf die Konvergenz gegen $+\infty$ der Folge selbst.

4. Kategorie: Distorted theorem or definition		
Unterkategorie	**Studentenlösung**	**Beschreibung**
Ungenaue Anwendung von Sätzen, Regeln Prinzipien	(1a) $a_{n+1} - a_n = = \frac{7}{9n^2 + 39n + 40} > 0 \Rightarrow$ die Folge ist streng monoton fallend	Proband wendet den Satz über den Zusammenhang zwischen Vorzeichen des Terms $a_{n+1} - a_n$ und Monotonie der Folge umgekehrt an.
	(1d) $\left\lvert \frac{-7}{9n+15} \right\rvert < \frac{1}{1000}$ $\frac{-7}{9n+15} < \frac{1}{1000}$	Proband geht mit Absolutbetrag fehlerhaft um.
	(1d) $\frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2}{3} < \frac{1}{1000}$	Proband wendet den in der Ungleichung $\lvert a_n - A \rvert < \varepsilon$ erfassten Zusammenhang zwischen Folgenglied, Grenzwert und Fehler mangelhaft an.

4. Kategorie: Distorted theorem or definition		
Unterkategorie	**Studentenlösung**	**Beschreibung**
Ungenaue Anwendung von Sätzen, Regeln Prinzipien	(2c) $\left(\frac{1}{n}\right)^n$; $1+\left(\frac{1}{n}\right)^n$; $(1+n)^n$; $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$	Proband wendet den Satz: $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ mangelhaft an.
	(2e) $a_n = 0$	Proband unterscheidet nicht zwischen Monotonie und strenger Monotonie.
	(2b) $a_n = \frac{3n}{1}$; $a_n = \frac{9n^2+1}{3+2n^2}$; $a_n = \frac{3+3n}{1+2n}$	Proband setzt den Satz über den Grenzwert von gebrochen-rationalen Folgen fehlerhaft ein: er identifiziert die Hauptkoeffizienten falsch.
	(2d) $a_n = \frac{n^2-1000}{n}$	
	(2e) $a_n = (-1)^n$; $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	Proband setzt den Satz über den Grenzwert von Potenzfolgen fehlerhaft ein.
	(2f) $a_n = 3\cdot(-5)^n$; $a_n = (-3)^n$	
	(2g) $a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$; $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$	

5. Kategorie: Unverified solution		
Unterkategorie	**Studentenlösung**	**Beschreibung**
Gleichsetzung von Annahme und Beweis	$a_1 = \frac{2\cdot 1+1}{3\cdot 1+5} = \frac{3}{8} = 0{,}375$ $a_2 = \frac{2\cdot 2+1}{3\cdot 2+5} = \frac{5}{11} = 0{,}4545$ $a_3 = \frac{2\cdot 3+1}{3\cdot 3+5} = \frac{7}{14} = 0{,}5$ $a_4 = \frac{2\cdot 4+1}{3\cdot 4+5} = \frac{9}{17} = 0{,}5294$ die Folge ist (streng) monoton steigend	Proband formuliert anhand einiger konkreter Folgenglieder eine Hypothese über das Monotonieverhalten der Folge. Unzulässiger Schluss von einigen konkreten Fällen auf den allgemeinen Fall.

6. Kategorie: Technical errors		
Unterkategorie	**Studentenlösung**	**Beschreibung**
Unzulängliche Notation	(1c) $\lim a_n = \frac{2n+1}{3n+5}$	Proband setzt in seiner Notation den Grenzwert der Folge mit der Folge selbst gleich
	(2g) $-1^n;\ -5^n$	Proband lässt notwendige Klammern in seiner Notation weg
Rechenfehler bei Termumformungen	(1d) $\left\lvert\frac{2n+1}{3n+5}-\frac{2}{3}\right\rvert < \frac{1}{1000}$ $\left\lvert\frac{(2n+1)-2(3n+5)}{3(3n+5)}\right\rvert < \frac{1}{1000}$	Proband begeht Rechenfehler, als er algebraische Terme auf gemeinsamen Nenner bringt
	(1d) $\left\lvert\frac{3(2n+1)-2(3n+5)}{3(3n+5)}\right\rvert < \frac{1}{1000}$ $\left\lvert\frac{6n+3-6n-5}{9n+15}\right\rvert < \frac{1}{1000}$	Proband löst Klammern fehlerhaft auf
	(1d) $\frac{7}{9n+15} < \frac{1}{1000}$ $9n+15 < \frac{1}{7000}$	Proband ordnet eine Ungleichung fehlerhaft um
Sonstige Rechenfehler	(1a) $a_1 = \frac{2\cdot 1+1}{3\cdot 1+5} = \frac{3}{5}$	Proband verrechnet sich

6. 1. 8. Ergebnisse

Vergleich der Kompetenzstufen, die bei den präferierten Begriffen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz erreicht wurden

In Bezug auf Monotonie ergab die detaillierte Auswertung nach einzelnen Teilaufgaben folgende Resultate, die in Tabelle 14 zusammengefasst werden.
In der erbrachten niedrigsten und höchsten Leistung gibt es kaum Unterschiede zwischen den beiden Gruppen, damit ist die Leistungsspanne, in der sich die erreichten Kompetenzstufen bewegen, beinahe identisch. Es ist aber anzumerken, dass es in der deutsch- (also fremd-) sprachigen Ausbildung keine Probanden gab, die keine der auf Monotonie bezogenen Teilaufgaben gelöst haben, obwohl dies auf die ungarischsprachig unterrichtete Gruppe zutrifft. Die durchschnittliche Leistung zeigt jedoch an zwei Stellen messbare Unterschiede zwischen den beiden Gruppen: In der Teilaufgabe 1b war die deutschsprachig unterrichtete Kursgruppe durchschnittlich besser und erreichte dort im Schnitt eine Leistung auf Kompetenzstufe

B, während die in der Muttersprache unterrichtete ungarische Gruppe nur eine durchschnittliche Leistung auf Kompetenzstufe A aufwies. Umgekehrt war die ungarischsprachig unterrichtete Kursgruppe bei der Teilaufgabe 2e erfolgreicher: Sie erbrachte eine durchschnittliche Leistung auf Stufe A, während die deutschsprachig unterrichtete Gruppe im Durchschnitt nicht einmal diese Stufe erreichte. Es soll darauf hingewiesen werden, dass erstere eine prozedurale während letztere eine konzeptuelle Aufgabe darstellt.

	deutschsprachige Ausbildung						ungarischsprachige Ausbildung					
Erwartung	1a	2e	2f	2g	3a	3c						
	B	C	C	C	D	D						
niedrigste Leistung	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
durchschnittliche Leistung	B	0	0	A	A	A	A	A	0	A	A	A
höchste Leistung	B	C	C	C	D	D	B	C	C	C	D	D

Tabelle 14: Ausführliche Ergebnisse in Bezug auf **Monotonie** im Kompetenzbereich

Anhand der einzelnen Leistung bei den relevanten Teilaufgaben 1a, 2e-2g, 3a und 3c wurde bei jedem Probanden auch ein Gesamturteil über die erreichte Kompetenzstufe in Bezug auf die Monotonie gefällt, so wie das in 6.1.6. [S. 73] beschrieben wurde. Die Ergebnisse dieser Gesamtauswertung werden in folgender Abbildung dargestellt. Sie zeigt, welcher Anteil der Studenten in der deutsch- bzw. ungarischsprachigen Ausbildung welche Kompetenzstufe erreicht hat:

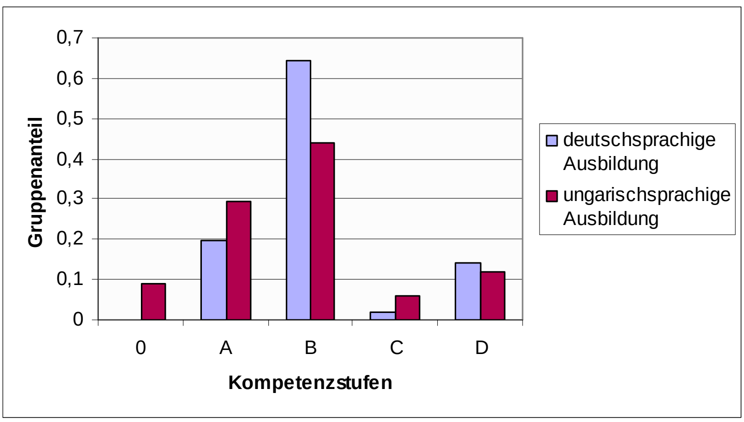


Abbildung 1: bezüglich **Monotonie** erreichte Kompetenzstufen

Es ist auffallend, dass es in der ungarischsprachigen Ausbildung ein nicht vernachlässigbarer Anteil der Studenten, nämlich etwa 9 %, keine Teilaufgaben gelöst hat-

te. Weiterhin ist ersichtlich, dass in der deutschsprachigen Ausbildung ein geringerer Anteil von Studenten eine Leistung auf Stufe A zeigte (ca. 20 %), als in der ungarischsprachigen Ausbildung (29 %), dafür aber ein höherer Anteil der Studenten (64 %) der deutschsprachigen Ausbildung die Kompetenzstufe B erreicht hat als in der ungarischsprachigen Ausbildung, wobei in der letzteren Gruppe dieser Anteil 44 % betrug,. Insgesamt gilt die Aussage, dass die für die weitere Arbeit gestellte Bedingung von einer Leistung auf mindestens Kompetenzstufe B von etwa 20 % der Studenten der deutschsprachigen Ausbildung und 38 % der Studenten der ungarischsprachigen Ausbildung nicht erfüllt wird.
In Bezug auf Beschränktheit erbrachte die Auswertung der einzelnen Teilaufgaben folgendes Ergebnis:

	deutschsprachige Ausbildung	**ungarischsprachige Ausbildung**
Erwartung	1b: C, 3a: D, 3e: D, 3f: D	
niedrigste Leistung	0 0 0 0	0 0 0 0
durch-schnittliche Leistung	A A A A	A A A A
höchste Leistung	C A D D	0 D D D

Tabelle 15: Ausführliche Ergebnisse in Bezug auf **Beschränktheit** im Kompetenzbereich

Die von Studenten erbrachte niedrigste Leistung gibt darüber Auskunft, dass es in beiden Gruppen Studenten gab, die nicht einmal eine intuitive Vorstellung von der Beschränktheit hatten. Andererseits gilt aber, dass es weder in der deutsch- noch in der ungarischsprachigen Ausbildung Probanden gab, deren Leistung der erwarteten Höchstleistung entsprochen hätten. Es soll auch darauf hingewiesen werden, dass der beste Proband in der deutschsprachigen Ausbildung Leistungsdefizite in einer konzeptuellen Teilaufgabe (Kompetenzstufe A statt D in der Teilaufgabe 3a) aufzeigte, während der in der ungarischsprachigen Ausbildung Defizite im prozeduralen Bereich (keine Leistung statt Kompetenzstufe C in der Teilaufgabe 1b) hatte. Da die Differenz zwischen der erwarteten Leistung und der tatsächlich geleisteten besten Lösungen in beiden Gruppen einer Abweichung von 3 Kompetenzstufen in einer einzigen Teilaufgabe entspricht, kann man behaupten, dass auch im Falle der Beschränktheit die Leistungsspannen bei beiden Gruppen etwa identisch waren. Auch die durchschnittliche Leistung stimmt in beiden Gruppen überein.
Der Vergleich beider Gruppen bei der Gesamtauswertung lieferte folgendes Ergebnis, welches in der nächsten Abbildung dargestellt wird. Diese zeigt, welcher Anteil der Studenten in der deutsch- bzw. ungarischsprachigen Ausbildung welche Kompetenzstufe bezogen auf die Beschränktheit erreicht hat:

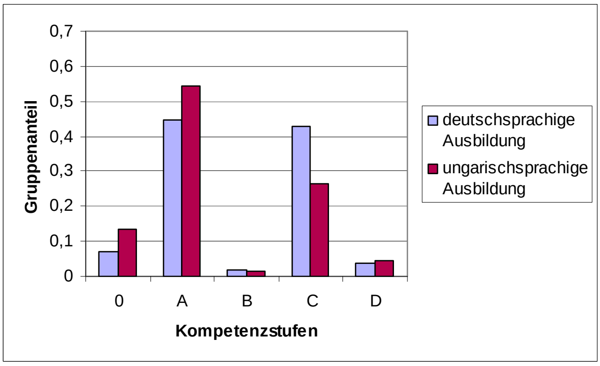


Abbildung 2: bezüglich **Beschränktheit** erreichte Kompetenzstufen

Es gibt offensichtlich an drei Stellen Unterschiede zwischen den beiden untersuchten Gruppen: In der ungarischsprachigen Ausbildung erbrachten etwa doppelt so viele Probanden (13 %) als in der deutschsprachigen Ausbildung (7 %) keine bewertbare Leistung. Ferner gibt es in der ungarischsprachig unterrichteten Gruppe anteilig mehr Probanden (54 %), die lediglich die Kompetenzstufe A erreichten als in der deutschsprachig unterrichteten Kursgruppe (44 %). Daraus folgend gab es in der deutschsprachigen Gruppe mehr Probanden, die höhere Kompetenzstufen erreichten. Einen gravierenden Unterschied erkennt man bei Probanden, deren Leistung auf Kompetenzstufe C eingeordnet wurde: Diese Stufe erreichten 43 % der deutschsprachig unterrichteten Personen und nur 26 % der Probanden aus der ungarischsprachigen Ausbildung. Die Tatsache, dass 52% der Probanden der deutsch- und 68 % der ungarischsprachigen Ausbildung die für die weitere Arbeit gestellte Bedingung von einer Leistung auf mindestens Kompetenzstufe B nicht erfüllten, verweist auf extreme Leistungsdefizite, die eventuell auch im Unterricht selbst ihre Wurzel haben können.

Bezogen auf den Konvergenzbegriff wurde folgendes Ergebnis ermittelt:

<table>
<tr><th></th><th>deutschsprachige Ausbildung</th><th>ungarischsprachige Ausbildung</th></tr>
<tr><td>Erwartung</td><td colspan="2">1c | 1d | 2a | 2b | 2c | 2d | 2e | 2f | 2g | 3a | 3c | 3e | 3f
B | C | A | B | B | B | C | C | C | D | D | D | D</td></tr>
<tr><td>niedrigste Leistung</td><td>0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0
0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0</td><td>0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0
0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0</td></tr>
<tr><td>durchschnittliche Leistung</td><td>B | A | A | A | A | A | 0
0 | A | A | A | A | A</td><td>B | B | A | B | A | A | A
0 | A | A | A | A | A</td></tr>
<tr><td>höchste Leistung</td><td>B | C | A | B | B | B | C
C | C | D | D | A | A</td><td>B | B | A | B | B | B | C
C | C | D | D | D | D</td></tr>
</table>

Tabelle 16: Ausführliche Ergebnisse in Bezug auf **Konvergenz** im Kompetenzbereich

Die von Studenten erbrachte niedrigste Leistung zeigt wiederum, dass es in beiden Gruppen Studenten gab, die nicht einmal über eine intuitive Vorstellung von der Konvergenz verfügten. Andererseits gilt aber, dass es weder in der deutsch- noch in der ungarischsprachigen Ausbildung Probanden gab, deren Leistung der erwarteten Höchstleistung entsprochen hätte. Sowohl der beste Proband der deutschsprachigen Ausbildung als auch der beste Proband der ungarischsprachigen Ausbildung zeigten Leistungsdefizite im konzeptuellen Bereich (Kompetenzstufe A statt D in den Teilaufgaben 3e und 3f bzw. Kompetenzstufe B statt C in der Teilaufgabe 1d) auf. Da die Differenz zwischen der erwarteten Leistung und der tatsächlich erbrachten besten Lösung in der deutschsprachigen Gruppe einer Abweichung von 3 Kompetenzstufen in zwei Teilaufgaben entspricht, sich diese Differenz in der ungarischsprachigen Ausbildung jedoch auf eine Abweichung von einer Kompetenzstufe in einer einzigen Teilaufgabe beschränkt, kann man behaupten, dass es im Falle der Konvergenz die Leistungsspanne in der deutschsprachig unterrichteten Gruppe etwas enger ist als die in der ungarischsprachigen Ausbildung. Die durchschnittliche Leistung der beiden Gruppen weicht an drei Stellen voneinander ab: in den Teilaufgaben 1d, 2b und 2e erbrachte die ungarischsprachige Gruppe eine Leistung, die durchschnittlich um eine Kompetenzstufe (Stufe B, B und A) höher ist als die Leistung der Studenten deutschsprachigen Ausbildung (Stufe A, A bzw. keine). Es soll angemerkt werden, dass es in allen drei Fällen um eine konzeptuelle Aufgabe ging.
Der Vergleich der Gesamtauswertung im Hinblick auf den Konvergenzbegriff lieferte folgendes Ergebnis, welches in der nächsten Abbildung dargestellt wird. Sie zeigt, welcher Anteil der Studenten in der deutsch- bzw. ungarischsprachigen Ausbildung welche Kompetenzstufe bezogen auf die Konvergenz erreicht hat:

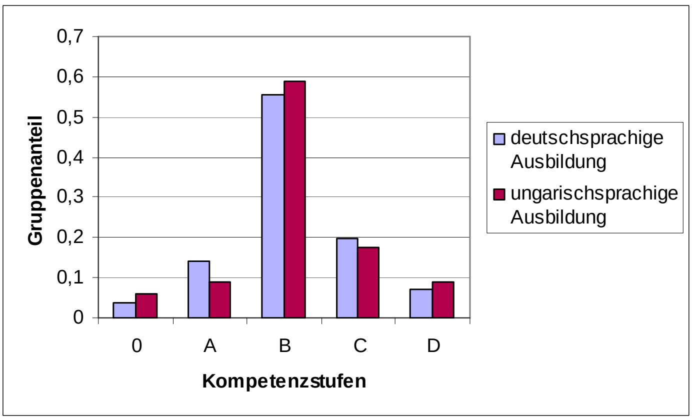


Abbildung 3: auf **Konvergenz** bezogen erreichte Kompetenzstufen

Die Verteilung der erreichten Kompetenzstufen zeigt in beiden Gruppen ein ähnliches Bild, es kann allerdings eine leichte Abweichung zugunsten der ungarischsprachigen Gruppe erkannt werden: Unter ihnen (den Probanden der ungarischsprachigen Ausbildung) gibt es weniger Probanden, die lediglich die Kompetenzstufe A erreichten (9 %) als in der deutschsprachigen Ausbildung (14 %), bzw. mehr Probanden (59 %), die bereits eine Leistung auf Kompetenzstufe B erbrachten als in der deutschsprachigen Ausbildung (55 %). Insgesamt wurde die für die weitere

Arbeit gestellte Bedingung von einer Leistung auf mindestens Kompetenzstufe B von etwa 18 % der Studenten der deutschsprachigen Ausbildung und 15 % der Studenten der ungarischsprachigen Ausbildung nicht erfüllt.

Vergleich von prozeduralem und konzeptuellem Wissen

Bezogen auf das prozedurale Wissen wurde folgendes Ergebnis ermittelt:

	deutschsprachige Ausbildung					**ungarischsprachige Ausbildung**				
Erwartung	1a	1b	1c	1d	gesamt					
	P3	P3	P4	P3	13 Punkte					
niedrigste Leistung	0	0	0	0	0 Punkte	0	0	0	0	0 Punkte
durchschnittliche Leistung	2,2	1,3	2,1	1,3	6,9	1,6	0,6	2,3	2,1	6,6
höchste Leistung	P3	P3	P4	P3	13 Punkte	P3	P3	P4	P3	13 Punkte

Tabelle 17: Ausführliche Ergebnisse zum **prozeduralen Bereich**

In der erbrachten niedrigsten und höchsten Leistung gibt es keine Unterschiede zwischen den beiden Gruppen. Damit sind die Leistungsspannen, auf denen sich die erreichten prozeduralen Punktzahlen in der deutsch- bzw. ungarischsprachig unterrichteten Gruppe bewegen, identisch. Die durchschnittliche Leistung zeigt an drei Stellen deutliche Unterschiede zwischen den beiden Gruppen: In den Teilaufgaben 1a und 1b war die deutschsprachig unterrichtete Kursgruppe durchschnittlich besser, während die Probanden der ungarischsprachigen Ausbildung in der Teilaufgabe 1d besser abschnitten. In der Teilaufgabe 1a erreichte die deutschsprachig unterrichtete Gruppe im Schnitt eine Leistung, die zwischen der 2. und 3. Stufe des prozeduralen Wissens liegt, während die durchschnittliche Leistung der in der Muttersprache unterrichteten ungarischen Gruppe lediglich zwischen der 1. und 2. Stufe des prozeduralen Wissens liegt. Bezogen auf die Teilaufgabe 1b liegen die Durchschnittswerte in der deutschsprachigen Ausbildung zwischen der 1. und der 2. Stufe, in der ungarischsprachigen Ausbildung aber unter der 1. Stufe. Umgekehrt war die ungarischsprachig unterrichtete Kursgruppe bei der Teilaufgabe 1d erfolgreicher und erreichte eine durchschnittliche Leistung zwischen der 2. und 3. Stufe, während die deutschsprachig unterrichtete Gruppe im Schnitt eine Leistung zwischen der 1. und 2. Stufe aufwies. Insgesamt macht sich eine leichte durchschnittlich höhere Leistung im prozeduralen Bereich in der deutschsprachigen Ausbildung bemerkbar.
Beim konzeptuellen Wissen wurden folgende Ergebnisse ermittelt:

		1d	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	3a	3c	3e	3f	
Erwartung		K4	K1	K3	K3	K3	K4	K4	K4	K5	K5	K5	K5	Gesamt: 46 Punkte
niedrigste Leistung	**deutschsprachige Ausbildung**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Gesamt: 0 Punkte
	ungarischsprachige Ausbildung	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Gesamt: 0 Punkte
durchschnittliche Leistung	**deutschsprachige Ausbildung**	0,2	1,1	1,7	0,8	1,2	0,4	0,4	1,4	1,6	1,4	1,4	1,1	Gesamt: 12,6 Punkte
	ungarischsprachige Ausbildung	0,4	1,3	2,2	1,2	1,5	1	0,5	1,6	1,7	1,8	1,4	1,4	Gesamt: 16,2 Punkte
höchste Leistung	**deutschsprachige Ausbildung**	K4	K1	K3	K3	K3	K4	K4	K4	K5	K5	K2	K2	Gesamt: 40 Punkte
	ungarischsprachige Ausbildung	0	K1	K3	K1	K3	K4	K4	K4	K5	K5	K5	K5	Gesamt: 40 Punkte

Tabelle 18: Ausführliche Ergebnisse zum **konzeptuellen Bereich**

Die von Studenten erbrachte niedrigste Leistung zeigt, dass es in beiden Gruppen Studenten gibt, die über kein konzeptuelles Wissen bei den Begriffen Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz von Folgen verfügen. Andererseits gilt aber, dass es weder in der deutsch- noch in der ungarischsprachigen Ausbildung Probanden gab, deren Leistung der erwarteten Höchstleistung entsprachen. Es soll auch darauf hingewiesen werden, dass die Leistung des besten Probanden der deutschsprachigen Ausbildung bei Teilaufgaben 3e und 3f jeweils um 3 Kompetenzstufen von der erwarteten Leistung abwich, während der beste Proband der ungarischsprachigen Ausbildung in der Teilaufgabe 1d trotz der erwarteten Stufe K4 kein konzeptuelles Wissen zeigte bzw. in der Teilaufgabe 2c statt K3 lediglich K1 erreichte. Beide Höchstleistungen entsprechen einer Gesamtleistung von 40 Punkten. Daher kann man behaupten, dass auch bezüglich des konzeptuellen Wissens die Leistungsspannen der beiden Gruppen identisch waren. Die durchschnittliche Leistung war allerdings in der ungarischsprachigen Ausbildung in jeder Teilaufgabe höher als in der deutschsprachigen Ausbildung. Insgesamt leisteten sie im Schnitt um etwa 28% mehr im konzeptuellen Bereich (durchschnittlich 16,2 Punkte) als die deutschsprachig unterrichtete Gruppe (durchschnittlich 12,6 Punkte).

Um über das Verhältnis zwischen dem prozeduralen und konzeptuellen Wissen Informationen zu gewinnen, wurde eine vereinfachte gemeinsame Verteilung der beiden Wissensarten in Betracht gezogen [S. 74]. Die Ergebnisse werden in den Tabellen 19 und 20 zusammengefasst, die die absolute Anzahl der betroffenen Probanden zeigen:

proz. Wissen		konz. Wissen niedrig	konz. Wissen hoch
	hoch	22	8
	niedrig	25	1

Tabelle 19: gemeinsame Verteilung des prozeduralen und des konzeptuellen Wissens in der deutschsprachigen Ausbildung

proz. Wissen		konz. Wissen niedrig	konz. Wissen hoch
	hoch	28	13
	niedrig	25	2

Tabelle 20: gemeinsame Verteilung des prozeduralen und des konzeptuellen Wissens in der ungarischsprachigen Ausbildung

Es ist offensichtlich, dass in beiden Gruppen ein besonders kleiner Anteil der Probanden ein hohes konzeptuelles und gleichzeitig ein niedriges prozeduralen Wissen aufwies, die Kategorie „konzeptuell hoch-prozedural niedrig“ also weniger ausgeprägt ist, während alle anderen Kategorien deutlich vertreten sind. Dies entspricht nach *Haapasalo,Kadijevich, 2000* der vereinfachten Abbildung

proz. Wissen		konz. Wissen niedrig	konz. Wissen hoch
	hoch	x	x
	niedrig	x	

, die derart interpretiert werden kann, dass prozedurales Wissen notwendig aber nicht hinreichend für das konzeptuelle Wissen ist.

Vergleich der Stabilität des Konvergenzbegriffs

Die Auswertung der Teilaufgaben 3b, 3d und 3g erbrachte folgende Ergebnisse in Bezug auf die Stabilität des Konvergenzbegriffs:

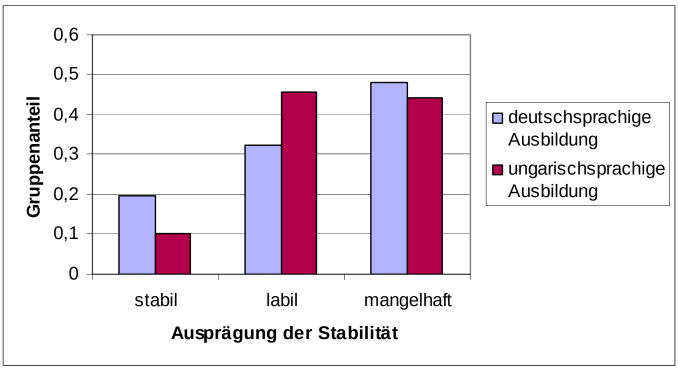


Abbildung 4: **Stabilität** des Konvergenzbegriffs

Der Abbildung entnimmt man, dass es in beiden Ausbildungen ein relativ großer Anteil der Probanden (48 % bzw. 44 %) die drei relevanten Teilaufgaben nur mangelhaft gelöst hat und daher bei ihnen über die Stabilität des Konvergenzbegriffs keine Aussage gemacht werden kann. Deutlich wird überdies, dass in der deutschsprachigen Ausbildung mit 20 % doppelt so viele Probanden wie in der ungarischsprachigen Ausbildung (10%) über einen stabilen Konvergenzbegriff verfügten. Entsprechend gilt andererseits, dass es in der ungarischsprachigen Ausbildung mehr Probanden (46 %) gab, deren Konvergenzbegriff als eher labil eingeschätzt werden kann, der entsprechende Prozentsatz lag in der deutschsprachigen Ausbildung nur bei 32 %.

Ergebnisse der Fehleranalyse

Die Auswertung der von den Probanden begangenen Fehler führt zu folgenden Behauptungen:

- Studenten der deutschsprachigen Ausbildung begangen insgesamt mehr Fehler (141) als Studenten der ungarischsprachigen Ausbildung (130). Wird die Anzahl der Fehler bezüglich der Gruppengröße betrachtet, so ergibt sich, dass in der deutschsprachigen Ausbildung durchschnittlich ca. 2,5 Fehler pro Person begangen wurden, während der Durchschnittswert in der ungarischsprachigen Ausbildung bei etwa 1,9 Fehler pro Person lag. Dies entspricht einer Abweichung um mehr als 30%.
- Unter Ausnahme der 5. Kategorie (unverified solution [S. 76]) begangen Studenten der deutschsprachigen Ausbildung in jeder Kategorie mindestens so viele Fehler wie Studenten der ungarischsprachigen Ausbildung. Abbildung 5a zeigt die absolute Anzahl, Abbildung 5b die relative Anzahl der begangen Fehler, auf die jeweilige Gruppengröße bezogen.

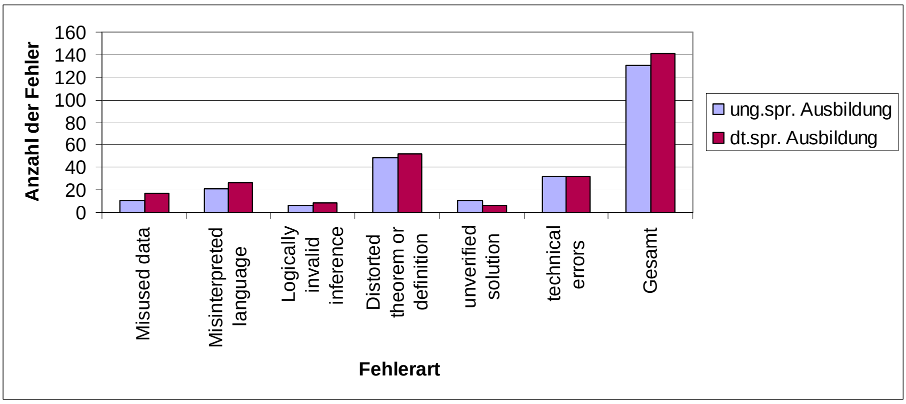


Abbildung 5a: Absolute Anzahl der von den Studenten begangenen Fehler

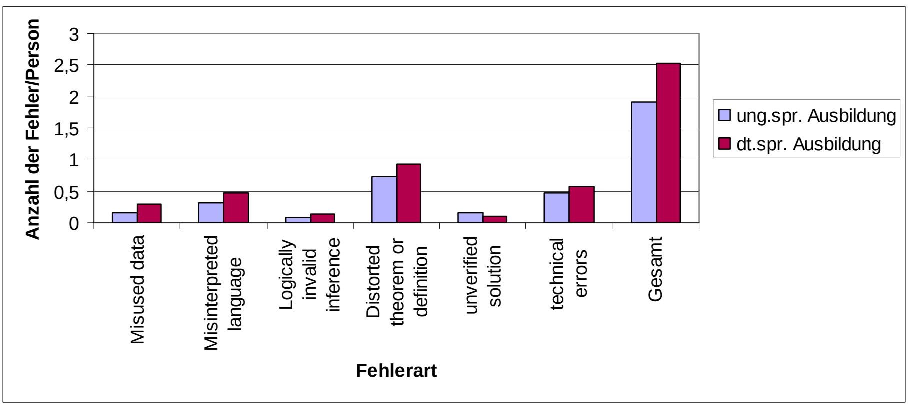


Abbildung 5b: Relative Anzahl der von den Studenten begangenen Fehler

- Ferner wurde ein Vergleich der Fehler der Versuchs- und der Kontrollgruppe kategorienweise durchgeführt. Die größten Unterschiede (0,21Fehler/Person; 0,16 Fehler/Person bzw. 0,14 Fehler/Person) sind in der 4. Kategorie (distorted theorem or definition [S. 76]), in der 2. Kategorie (misinterpreted language [S. 75]) bzw. in der 1. Kategorie (misused data [S. 75]) nachzuweisen. Abbildung 6 veranschaulicht die kategoriellen Differenzen der relativen Anzahl der Fehler zwischen Studenten der deutschsprachigen und ungarischsprachigen Ausbildung.

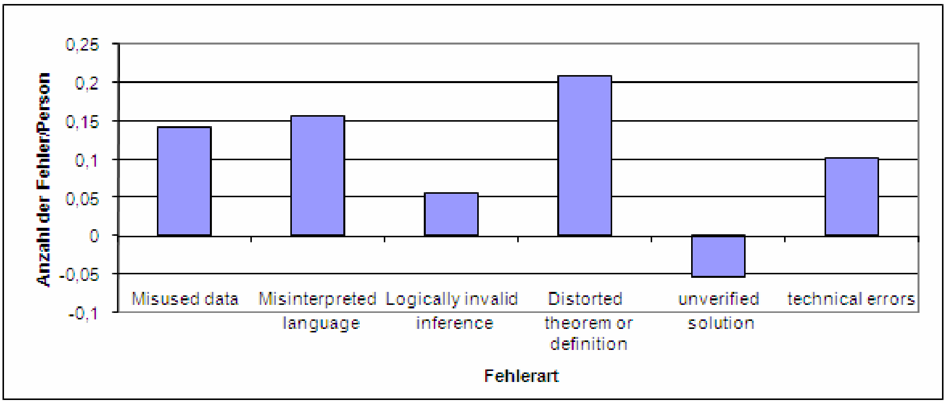


Abbildung 6: Differenz der relativen Anzahl der Fehler zw. Versuchs- und Kontrollgruppe (Abweichung nach oben: zu Gunsten des ungarischsprachigen, nach unten: zugunsten des deutschsprachigen Unterrichtes)

- Eine detaillierte Analyse der einzelnen Kategorien (vgl. Anhang I) ergab offensichtliche Unterschiede zwischen Versuchs- und Kontrollgruppe in vier Unterkategorien:

1. Studenten der deutschsprachigen Ausbildung hatten größere Schwierigkeiten mit der sprachlichen Formulierung mathematischer Inhalte als Studenten der ungarischsprachigen Ausbildung. (9 mangelhafte Formulierung in der fremdsprachigen und 2 in der muttersprachlichen Ausbildung)

2.-3. Aufgaben, deren Lösung die Anwendung komplexer Zusammenhänge (Satz über den Zusammenhang zwischen Konvergenzverhalten von Folgen der Form q^n und deren Basis bzw. Differenzkriterium beim Monotonieverhalten von Folgen – beide sind Sätze mit mehrfacher Fallunterscheidung) bereiteten Studenten der deutschsprachigen Ausbildung eher Schwierigkeiten als Studenten der ungarischsprachigen Ausbildung.

4. Es ist lediglich bei Studenten der deutschsprachigen Ausbildung die Vermischung von mehreren Sätzen vorgekommen.

6. 2. Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

6. 2. 1. Zielsetzung

Diese Fallstudie setzte sich zum Ziel, Verstehensschwierigkeiten beim bilingualen Mathematiklernen zu diagnostizieren, ferner zu untersuchen, ob bei der Überwindung dieser Schwierigkeiten die fremdsprachliche oder die mathematische Kompetenz eine größere Rolle spielt. Bei der Fallstudie lag der Schwerpunkt auf der Frage, ob beim Verstehen mathematischer Begriffe und Zusammenhänge während des fremdsprachlichen mathematischen Wissenserwerbsprozesses sprachliche oder mathematische Faktoren eine größere Rolle spielen. Es ging also um die punktuelle Überprüfung der Hypothese 2 [S. 63].

6. 2. 2. Forschungsdesign

Um an die Forschungsfrage heranzugehen, wurde das Verstehen mathematischer Inhalte im fremdsprachlichen Kontext bei Studenten verglichen, die entweder über hohe mathematische oder über hohe fremdsprachliche Kompetenz verfügten, ihre Vorkenntnisse in dem anderen Bereich jedoch als eher durchschnittlich bezeichnet werden konnte. Die vorhandene mathematische Kompetenz bzw. die Fremdsprachenkompetenz wurden als unabhängige Variablen betrachtet. Das Verstehen fremdsprachlich formulierter mathematischer Inhalte und dessen Abhängigkeit von diesen beiden Kompetenzen wurde näher untersucht.
Die Untersuchung bestand aus drei Teilen: In einem Vortest wurden mathematische (insbesondere geometrische) und fremdsprachliche Vorkenntnisse der Probanden auf Kompetenzstufen [S. 32 bzw. 45] eingeordnet. Für diese Tests waren je ca. 30 Minuten vorgesehen. Der Haupttest bestand aus einer in der Fremdsprache formulierten geometrischen Aufgabe, zu der eine Skizze bzw. eine Konstruktion angefertigt, und die in die Muttersprache übersetzt werden sollte. Es ging also darum, einen fremdsprachlich formulierten mathematischen Sachverhalt in zwei weitere Repräsentationsmodi – in die Muttersprache und in eine graphische Darstellung – zu übersetzen. Im Anschluss daran sollte auch eine vorgegebene Lösung der Aufgabe, deren Verständnis durch zwei Abbildungen unterstützt wurde, in die Muttersprache übersetzt werden. Hierbei ging es darum, anhand zwei vorhandener Repräsentationen (fremdsprachliche und graphische Darstellung) eine dritte Repräsentation, nämlich die in der Muttersprache anzugeben. Für den Haupttest waren etwa 45 Minuten geplant. Für den Fall, dass die Probanden so große Verstehensschwierigkeiten mit dem Text haben sollten, dass diese das Gesamtverständnis verhindern würden, wurde sowohl die Aufgabe als auch ihre Lösung auch in einer sprachlich erleichterten Fassung angefertigt. Diese Fassung, die teilweise auch mathematische Erklärungen enthält, bot gleichzeitig sprachliche und mathematische Hilfe an. Es war aber vorgesehen, diese erst einzusetzen, falls der Proband den Text mit durchschnittlichem Schwierigkeitsgrad nicht bewältigen können sollte. Die Untersuchung wurde durch zwei ca. halbstündige Einzelinterviews nach dem geometrischen Vortest und nach dem Haupttest ergänzt.

6. 2. 3. Bedingungen der Fallstudie

Die Probanden, die an der Fallstudie teilgenommen haben, waren zwei ungarische Studenten der Friedrich-Schiller-Universität Jena: Eine Mathematik- und Informatikstudentin für Lehramt (im Folgenden Testperson 1) und ein Jurastudent (im Folgenden Testperson 2). Beide sind ungarischer Herkunft und haben Ungarisch als Muttersprache. Da allerdings beide Testpersonen infolge des Studiums in Jena ebenfalls ausgezeichnet Deutsch können, wurde in der Untersuchung Englisch als Fremdsprache gewählt.
Bei der Einstufung der Englischkenntnisse durften keine Hilfsmittel benutzt werden, bei der Einstufung der geometrischen Kompetenz waren Zirkel, Lineal und

Taschenrechner erlaubt. Im Haupttest war sowohl ein einsprachiges (*Hawker/Cowley, 1998*) als auch ein zweisprachiges Wörterbuch (*Ország/Magay, 1996*) zugänglich.

6. 2. 4. Aufgabenstellung

Die Einstufung der Englischkenntnisse erfolgte mithilfe eines standardisierten Online-Kompetenztests (von den Carl Duisberg Centren), welcher auf der differenziertere Skala [siehe Fußnote auf S. 47] des Gemeinsamen Europäischen Referenzrahmens die fremdsprachliche Kompetenz misst. Es geht um einen Test, welcher allgemeine sprachliche Kenntnisse in den Bereichen Grammatik, Wortschatz und Leseverstehen ausschließlich schriftlich überprüft. Da im Haupttest keine mündliche Kompetenzen (Hören oder Sprechen) erforderlich waren, wurde dieser schriftliche Online-Test für die Zwecke der Fallstudie für geeignet eingeschätzt. Der Test bestand aus zwei Teilen: Aus einem 60schrittigen Multiple-Choice-Test, nach dessen Auswertung eine erste Abschätzung der Englischkenntnisse formuliert wurde. Abhängig vom Ergebnis dieses Testteils bekam der Proband eine weitere Aufgabe: einen Lückentext, welcher dem Niveau der im ersten Teil erbrachten Leistung nahekam. Auf der Grundlage dieses Ergebnisses wurde dann die erste Einschätzung der Sprachkenntnisse geändert. (Beide Testteile siehe im Anhang J)
Zur Einstufung einer allgemeinen Kompetenz im Bereich der Geometrie wurde der SAT-Test[106] in Betracht gezogen und an die aktuelle Situation angepasst. Gründe für die Wahl dieses Tests waren, dass der SAT-Test auf Fähigkeiten fokussiert bzw. dass er zum Zeitpunkt der Bewerbung um einen Studienplatz diese Fähigkeiten misst, also nach dem Abschluss der Ausbildung auf Schulebene. In Anlehnung an *Israel, 2006* wurde ein aus 23 ausschließlich geometrischen Aufgaben bestehender Test in ungarischer Sprache verfasst, welcher sich auch in seiner Notation und Bezeichnungen an der ungarischen Tradition orientiert. So wurden Winkel mit griechischen Kleinbuchstaben (im englischen Original kamen oft lateinische Kleinbuchstaben als Bezeichnung für Winkel vor) bezeichnet, rechte Winkel in Abbildungen statt  durch  markiert, Dezimalpunkte durch Dezimalkommata ersetzt. Alle Werte, die sich auf Größen bezogen, wurden auch mit Größeneinheiten (in erster Linie um Längen- und Flächeneinheiten) ergänzt. Ferner wurde die Arbeitszeit anteilig auf 28 Minuten gekürzt (normalerweise werden zur Bearbeitung eines SAT-Mathematik-Moduls, welcher aus 50 Aufgaben besteht, 60 Minuten zur Verfügung gestellt.). Die Aufgaben (siehe Anhang K) zielen auf grundlegende Konzepte der Geometrie: Flächeninhalt und Umfang, Winkel, Eigenschaften von Dreiecken (Winkelsummensatz, Winkelgrößen in gleichschenkligen Dreiecken, Sätze in rechtwinkligen Dreiecken), Kreis und Winkel (Zentri- und Umfangswinkel), Eigenschaften von Viereckev und Ähnlichkeit. Es erfolgte weiterhin eine Zuordnung der Aufgaben zu Stufen der mathematischen Kompetenz [S. 33]. Folgende Tabelle fasst zusammen, welche Kompetenzstufen den einzelnen Teilaufgaben aus Sicht der Autorin entsprechen:

[106] Der SAT-Test (ehemals *Scholastic Assessment Test*, davor *Scholastic Aptitude Test* und davor *Scholastic Achievement Test, heute Reasoning Test)* ist ein amerikanischer Multiple-Choice-Test, der dem Vergleich von Fähigkeiten (und nicht unbedingt Kenntnissen) von Studienplatzbewerbern dient.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Flächeninhalt	B						B							
Umfang	B		B									B		
Winkel		B				A								
Dreiecke			B				B	B	B		B	B	A	C
Vierecke					C		B							
Vielecke										B				
Räumliche Figuren				B										C
Kreis und Winkel														
Ähnlichkeit			B									B	A	

	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Flächeninhalt									
Umfang									
Winkel				B					
Dreiecke			C			C	B	C	
Vierecke	A					C			D
Vielecke									
Räumliche Figuren			C				B		
Kreis und Winkel		A			B				
Ähnlichkeit							B	C	

Tabelle 21: Stufen der geometrischen Kompetenz bei dem angepassten SAT-Test (siehe Anhang J)

Es ist ersichtlich, dass der Schwerpunkt unter den präferierten geometrischen Konzepten auf den Eigenschaften der Dreiecke lag, sie kommen in etwa der Hälfte der Aufgaben (12 von insgesamt 23) vor. Damit wurde beabsichtigt, neben der Ermittlung, auf welcher Stufe die allgemeine geometrische Kompetenz des Probanden steht, konzentriert über Kenntnisse und Fähigkeiten in Zusammenhang mit Dreiecken Auskunft zu bekommen, da im Haupttest insbesondere diese Fähigkeiten erforderlich waren. Anhand der erfolgreich gelösten Aufgaben konnte beim jeweiligen Proband eine „Landkarte“ über seine geometrische Kompetenz aber auch über seine Schwächen und Mängel ergestellt werden.
Im Haupttest ging es um folgende, in englischer Sprache formulierte Aufgabe:

The problem of I. Sharygin, published by I.M.Yaglom. Geometrical Transformations, part 1 and 2. Moscow, GITTL, 1954, 1956 (in Russian):

We are given a configuration consisting of three congruent circles meeting in the point S. We consider the triangle ABC bounded by the common tangents and containing the circles. Prove that the circumcentre of triangle ABC, the incentre of triangle ABC, and S are collinear.

a.) Translate the text

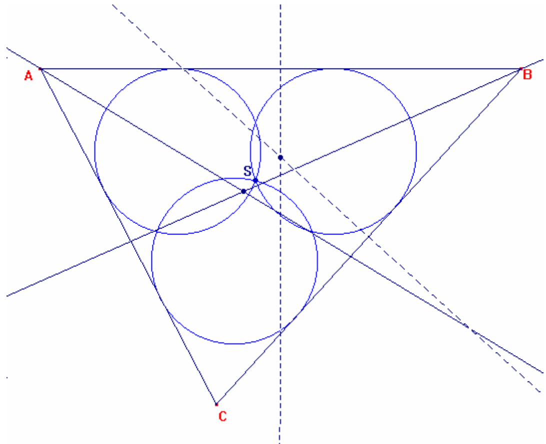
b.) Draw a figure

c.) Construct a corresponding figure by only using ruler and compass

Die Aufgabe bestand also nicht darin, den Beweis durchzuführen, sondern den Text ins Ungarische zu übersetzen, eine Skizze zu zeichnen und eine entsprechende Konstruktion mit Zirkel und Lineal durchzuführen. Im Anschluss daran sollte man auch die Lösung der Aufgabe ins Ungarische übersetzen:

The solution of the problem:

The configuration should look as follows:

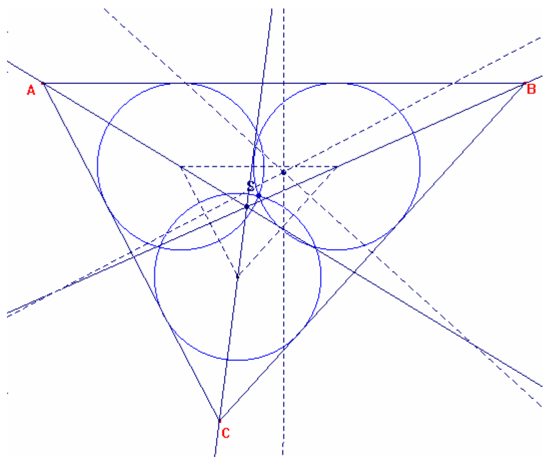


Connect the centres of the three circles.

The new triangle and ABC have the same incentre and they are homothetical regarding to this centre.

The circumcentre of the new triangle is S (because of axial symmetry)

The homothety transforms S (the circumcentre of the new triangle) into the circumcentre of ABC.



Translate the text

Wie oben schon erwähnt sind weitere, sprachlich erleichtere Fassungen sowohl der gestellten Aufgabe als auch von deren Lösung für den Fall angefertigt worden, dass der Proband den Standardtext nicht bewältigen kann. Diese sind im Anhang L zu finden.

6. 2. 5. Didaktische Analyse

Aus mathematischer Sicht sind für die Bewältigung des Aufgabentextes insbesondere folgende Kenntnisse und Fähigkeiten relevant:

We are given a configuration consisting of three congruent circles meeting in the point S.	Kenntnis der Grundbegriffe Kreis, Kongruenz und Schnittpunkt. Fähigkeit, den Kongruenzbegriff auf Kreise beziehen zu können (also Kreise mit gleichem Radius)
We consider the triangle ABC bounded by the common tangents and containing the circles.	Kenntnis der Grundbegriffe Dreieck und Tangente. Fähigkeit, den Begriff der gemeinsamen Tangente anhand des vorhandenen Tangentenbegriffs in der konkreten Situation interpretieren zu können. (keine Tangente möglich, die alle drei Kreise berührt), weiterhin die Fähigkeit, aus mehreren gemeinsamen Tangenten – es sind insgesamt 6 Tangenten denkbar – diejenigen auszuwählen, die solche Halbebenen begrenzen, die alle drei Kreise enthalten.
Prove that the circumcentre of triangle ABC, the incentre of triangle ABC, and S are collinear.	Kenntnis der Begriffe Umkreis- und Inkreismittelpunkt, Kollinearität.
Connect the centres of the three circles.	Kenntnis des Begriffs Mittelpunkt eines Kreises.
The new triangle and ABC have the same incentre and they are homothetical regarding to this centre.	Kenntnis einiger weiterer geometrischer Zusammenhänge bzw. die Fähigkeit, diese in konkreter Situation erkennen und anwenden zu können: Eigenschaften des Inkreismittelpunktes (Inkreismittelpunkt ist Schnittpunkt der Winkelhalbierenden), Eigenschaften von Tangenten (Kreistangenten von einem äußeren Punkt sind symmetrisch in Bezug auf die Gerade, die durch den äußeren Punkt und den Kreismittelpunkt geht, Tangente steht senkrecht auf den Berührungsradius), Eigenschaften bestimmter Winkelpaare (Stufenwinkel sind gleich groß), Ähnlichkeit bei Dreiecken (Ähnlichkeitssatz Winkelgleichheit). Es ist wichtig hervorzuheben, dass die Erkenntnis, dass das Dreieck ABC und das Dreieck, welches die drei Kreismittelpunkte bilden, ähnlich sind bzw. dass eine zentrische Streckung das eine Dreieck in das andere überführt, eine zentrale Rolle im Beweis spielt.
The circumcentre of the new triangle is S (because of axial symmetry)	Kenntnis und Identifizierung des Umkreis-mittelpunktes (Umkreismittelpunkt hat von allen Eckpunkten eines Dreiecks den gleichen Abstand).

The homothety transforms S (the circumcentre of the new triangle) into the circumcentre of ABC.	Kenntnis und Anwendung von Eigenschaften von Ähnlichkeitsabbildungen (Verhältnistreue) bzw. Kenntnis und Anwendung von Eigenschaften der zentrischen Streckung (Zentrum der Streckung, Punkt und Bildpunkt liegen auf der gleichen Geraden)

Aus sprachlicher Sicht ist für eine angemessene Übersetzung beider Texte die Kenntnis von englischen sowie ungarischen Fachtermini im Hinblick auf die oben erwähnten mathematischen Inhalte erforderlich. Im Folgenden wird tabellarisch zusammengefasst, an welchen Stellen ein ungarischer Übersetzer in sprachliche Schwierigkeiten geraten kann:

englischer Fachausdruck	**Erklärung**
congruent	Der ungarische Terminus *´kongruens´*, ein Fachbegriff aus der Zahlentheorie, ist an dieser Stelle irreführend. Die relevante Bezeichnung *´egybevágó´* soll aus dem mathematischen Kontext ermittelt werden. Das Wörterbuch *Ország/Magay, 1996* enthält die Einträge: egybevágó, megegyező, megfelelő, összeillő. Ein weiterer Lösungsweg ist anhand des Kontextes aus diesen Beiträgen die entsprechende Bezeichnung auszuwählen.
common	Bei diesem Fachbegriff ist das breite umgangssprachliche Bedeutungsfeld irreführend, Bedeutungen wie *´gemein´*, *´durchschnittlich´*, *´einfach´*, *´alltäglich´*, *´gewöhnlich´*, *´häufig´* (also *´közönséges´*, *´egyszerű´*, *´átlagos´*, *´mindennapos´*, *´megszokott´*, *´gyakori´*) kommen hier nicht zum Tragen. Die mathematische Bedeutung *´gemeinsam´* also *´közös´* soll wiederum aus dem mathematischen Kontext ermittelt werden. Im Wörterbuch *Ország/Magay, 1996* wird erst an dritter Stelle diese mathematische Bedeutung anhand von Beispielen wie *´common denominator´*, *´common divisor´*, *´highest common factor´* (*´gemeinsamer Nenner´*, *´gemeinsamer Teiler´*, *´größter gemeinsamer Teiler´*) bekannt gegeben.
tangent	Dieser englische Fachbegriff ist polysem: bedeutet gleichzeitig eine Winkelfunktion (im Deutschen Tangens) und eine Gerade, die einen Kreis oder eine Kurve berührt (im Deutschen Tangente). In der ungarischen mathematischen Fachsprache wird aber durch *´tangens´* nur die Winkelfunktion bezeichnet, geht es um eine Tangente, so wird dies *´érintő´* genannt. Daher besteht die Gefahr, den gemeinten Begriff Tangente fehlerhaft als *´Tangens´* zu interpretieren. Hierbei kann wiederum der Kontext behilflich sein.
circumcentre, incentre	Diese Termini sind ausschließlich in der Mathematik gebräuchlich, daher erfordert ihre Übersetzung eine genaue Auseinandersetzung mit dem dahinterstehenden mathematischen Inhalt. Ferner sind sie wegen des fachspezifischen Charakters weder im einsprachigen (*Hawker/Cowley, 1998*) noch im zweisprachigen (*Ors-*

englischer Fachausdruck	Erklärung
	(*Ország/Magay, 1996*) Wörterbuch zu finden. Die Übersetzung wird auch dadurch erschwert, dass diese Fachausdrücke – auf eine für die englische Sprache charakteristische Weise – die Information stark komprimieren. Bei dieser Kompression geht die sprachliche Informationseinheit *´Kreis´* verloren, welche anhand der vermittelten Informationseinheiten *´um´* (d. h. *´körül´*) bzw. *´in´* (also *´belül, bent´*) und *´Mittelpunkt´* (*´középpont´*) und mathematischer Vorkenntnisse ergänzt werden soll.
collinear	Dieser Ausdruck ist ebenfalls ein Fachbegriff der Mathematik. Bei der Übersetzung kann für Probanden, die über geometrische Vorkenntnisse auf Universitätsniveau verfügen, der universelle Charakter des sprachlichen Ausdrucks behilflich sein, da dieser Begriff in vielen Sprachen ähnlich klingt. So sollte auch für ungarische Probanden mit geometrischen Vorkenntnissen auf Universitätsniveau die ungarische Entsprechung *´kollineáris´* bekannt sein. Ohne diese Vorkenntnisse erfordert die richtige Übersetzung eine Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt der Lösung der Aufgabe, da es erst dadurch ersichtlich wird, dass es hierbei um Punkte geht, die auf einer Geraden liegen.
homothetical	Dieser Terminus ist ein sehr spezieller englischsprachiger mathematischer Fachausdruck und bezeichnet die Eigenschaft von geometrischen Figuren, die zueinander ähnlich sind und bei denen die Ähnlichkeitsabbildung, welche die eine Figur in die andere transformiert, eine zentrische Streckung ist. Im Ungarischen heißt es *´középpontosan hasonló´*. Die Übersetzung wird durch mehrere Faktoren erschwert: Einerseits geht es bei diesem englischen Fachausdruck nicht um ein universelles Wort, welches in mehreren Sprachen ähnlich klingen würde, andererseits kann das Wort auch nicht in einzelne Informationseinheiten zerlegt werden, die eventuell auf „Zentrum“ oder „Ähnlichkeit“ hinweisen würden. Anhand des Wortkörpers[107] sind keine solchen Hinweise erkennbar. Die Vorsilbe *´homo´* mit der Bedeutung *´gleich´* kann sogar eine Interpretation in die Richtung auf Kongruenz verleiten. Bei der Übersetzung kann man sich aber auf den mathematischen Kontext stützen. Es sollte anhand der angegebenen Abbildung oder durch mathematische Schlussfolgerung klar sein, dass die Dreiecke ABC und das Dreieck, welches die drei Kreismittelpunkte bilden, zueinander ähnlich sind. Ferner kann der Ausdruck *´regarding to this centre´* als ein Hinweis darauf interpretiert werden, dass es um eine Ähnlichkeit mit einem Zentrum, mit einem Mittelpunkt geht. Die Zusammenfügung dieser Informationen –

[107] Wortkörper bezeichnet die Formseite eines Wortes, also die Lautfolge, die ausgesprochen bzw. die Zeichenfolge, die geschrieben wird.

englischer Fachausdruck	Erklärung
	also mathematische Überlegungen und die Analyse des sprachlichen Umfeldes – kann dazu führen, zu erkennen, dass das Wort *´homothetical´* etwa *´ ähnlich bezogen auf einen Zentrum´*, auf Ungarisch *´középpontosan hasonló´* bedeutet.

6. 2. 6. Durchführung der Fallstudie

Die Fallstudie wurde an zwei aufeinanderfolgenden Tagen im Juli 2008 an der Friedrich-Schiller-Universität Jena durchgeführt. Am ersten Tag nahmen beide Testpersonen am englischen sowie am geometrischen Vortest voneinander getrennt teil, am nächsten Tag wurde der Haupttest parallel von ihnen bearbeitet. Die abschließenden Interviews wurden am selben Tag getrennt durchgeführt.
Testperson 1 bearbeitete in 20 Minuten den Multiple-Choice-Test des englischen Einstufungstests und erreichte die Stufe B1+. In den anschließenden 10 Minuten füllte sie den Lückentext aus, ihre Englischkompetenz wurde danach auf Stufe B2 eingeordnet. Nach einer viertelstündigen Pause bearbeitete sie den geometrischen Vortest, nach dem Ablauf der für diesen Test vorgesehenen 28 Minuten war sie allerdings noch nicht fertig. Zur vollständigen Lösung brauchte sie weitere 5 Minuten. Sie löste 20 von den insgesamt 23 Aufgaben richtig: alle Aufgaben auf der Kompetenzstufe A, alle bis auf eine Aufgabe auf Kompetenzstufe B bzw. alle bis auf eine Aufgabe auf Kompetenzstufe C. Im anschließenden Interview konnte sie ihre Lösungswege auch begründen. Somit wurde ihre geometrische Kompetenz auf Stufe C eingestuft. (Die „Landkarte“ der geometrischen Kompetenz für Testperson 1 findet man im Anhang M.)
Testperson 2 fing mit dem geometrischen Vortest an, brauchte aber zur Bearbeitung statt der vorgesehenen 28 Minuten insgesamt 45 Minuten. Sie hatte 17 korrekte Antworten: alle Aufgaben auf Kompetenzstufe A, 7 von insgesamt 13 Aufgaben auf Kompetenzstufe B bzw. 4 aus insgesamt 5 Aufgaben auf Kompetenz stufe C. Das anschließende Interview ergab, dass sie in drei weiteren Aufgaben (zwei auf Kompetenzstufe B und eine auf Kompetenzstufe C) nur geraten hat und ihren Lösungsweg in diesen Fällen nicht begründen konnte. Unter Berücksichtigung dieser Informationen wurde ihre geometrische Kompetenz auf Stufe B eingeordnet. (Siehe die „Landkarte“ der geometrischen Kompetenz für Testperson 2 im Anhang M.) Es soll angemerkt werden, dass sie mangelnde Kenntnisse insbesondere bezüglich Dreiecken (6 richtige Antworten in insgesamt 12 Aufgaben) und der Ähnlichkeit (2 richtige Antworten in insgesamt 5 Aufgaben) aufwies. Gemäß ihrem Wunsch ging sie ohne Pause zum Englischtest über, dessen ersten Teil sie in 13 Minuten löste. Zunächst wurden ihre Kenntnisse auf Stufe B2+ eingestuft. Sie füllte in den anschließenden 8 Minuten den Lückentext aus, wonach ihre Englischkompetenz auf Stufe C1 eingeordnet wurde.
Am Haupttest am nächsten Tag begannen beide Testpersonen gleichzeitig. Testperson 1 benutzte das zweisprachige, Testperson 2 das einsprachige Wörterbuch. Testperson 2 war mit beiden Texten nach ca. 30 Minuten als erste fertig. Das anschließende kurze Interview ergab aber, dass sie die Lösung der Aufgabe keineswegs verstanden hat. Sie willigte ein, sich nach einer Pause (ca. 30 Minuten) mit der

sprachlich erleichterten Fassung der Lösung zu beschäftigen. Nachdem beide Testpersonen die Texte bearbeitet hatten, wurden die abschließenden Interviews getrennt durchgeführt.

6. 2. 7. Auswertung

Bei der Auswertung des Haupttests wurde die Annahme verfolgt, dass sich Schwierigkeiten beim Verstehen mathematischer Inhalte durch fehlerhafte Übertragung in eine andere Repräsentationsform bemerkbar machen. Gemeint sind Schwierigkeiten sprachlicher Natur, wenn das Verstehen beispielsweise durch die Verwendung unbekannter fremdsprachlicher Termini, durch eine komplexe grammatische Konstruktion oder durch unbekannte Wortverbindung verhindert wird. Mathematische Schwierigkeiten entstehen hingegen durch einen Mangel an mathematischen Vorkenntnissen oder durch fehlerhafte Verbindung mathematischer Inhalte.
Dementsprechend wurde bei der Auswertung der Leistung der Testpersonen folgendermaßen vorgegangen: Es wurden alle Stellen im englischsprachigen Text markiert, an denen eine bemerkbar fehlerhafte Übertragung mathematischer Inhalte in die Muttersprache und/oder in die graphische Darstellung von der jeweiligen Testperson erfolgte. Dabei konzentrierte ich mich auf die Übertragung folgender mathematischer Inhalte:
Präferenzen:
congruent, meeting in the point S, common, tangents, containing the circles, circumcentre, incentre, collinear, homothetical, axial symmetry, homothety, transforms into the circumcentre of ABC, ferner *enlargement, with respect to this centre, maps, onto ABC, same distance, from each vertex.*
Die bemerkten problematischen Stellen wurden im anschließenden Interview mündlich thematisiert.

6. 2. 8. Ergebnisse

Bei Testperson 1 war eine stufenweise Übertragung der Inhalte beobachtbar: Sie erstellte 5 verschiedene Skizzen zum Aufgabentext und korrigierte ihre Formulierung sowohl beim Aufgabentext als auch beim Lösungstext mehrfach. Im Folgenden wird die Übersetzung der präferierten Begriffe und Zusammenhänge bei Testperson 1 tabellarisch zusammengefasst (die komplette Übersetzung und die graphische Darstellung sind im Anhang N dargestellt). Fett wurden diejenigen Stellen hervorgehoben, an denen Testperson 1 eine unkorrekte Übertragung angab. In der letzten Spalte sind diejenigen Korrekturen angeführt, die sie selbst schriftlich durchgeführt hat.
Man kann feststellen, dass die Fachbegriffe *´circumcentre´*, *´incentre´*, *´homothety´* und *´homothetical´* Testperson 1 nicht bekannt waren, dass für sie beim Wort *´common´* die umgangssprachliche Bedeutung zugänglich war, bzw. dass ihr bei *´tangents´* die Polysemie des englischen Ausdrucks nicht bekannt war. Weiterhin zeigt sie beim Ausdruck *´containing the circles´* grammatische Unsicherheit. Es wurde vermutet, dass Testperson 1 insbesondere mit sprachlichen Schwierigkeiten zu kämpfen hat. Die durchgeführten Korrekturen lassen allerdings erkennen, dass sie anhand der vorhandenen sprachlichen und mathematischen Informationen bzw. ihrer mathematischen Vorkenntnisse fähig war, die sprachlichen Schwierigkeiten größtenteils zu beseitigen.

Präferenz	ungarische Entsprechung	Übersetzung von TP 1	Korrektur von TP 1
congruent	egybevágó	egybevágó	
meeting in the point S	az S pontban metszik egymást	egy S pontban metszik egymást (találkoznak)	
common	közös	**közönséges**	
tangents	érintők	**tangens**	érintők
containing the circles	tartalmazza a köröket	**tartalmaznak**	tartalmazza a körö-ket
circumcentre	körülírt /körülírható kör középpontja	**körül középpont**	körülírható kör középpontja
incentre	beírt /beírható körközép-pontja	**belső középpont**	háromszögbe írha-tó kör középpontja
collinear	egy egyenesre illeszked-nek	egy egyenesen fekszenek	
homothetical	középpontosan hasonlóak	**homotetikusak**	hasonlóak
axial sym-metry	tengelyes szimmetria	tengelyes szim-metria	
homothety	középpontos hasonlóság /középpontos nyújtás	**homotetikus transzformáció**	hasonlóság
transforms S into the cir-cumcentre of ABC	S-et az ABC háromszög körülírható körének kö-zéppontjába képezi	S-et az ABC háromszög körül írt kör közép-pontjába képezi	

Tabelle 22: Struktur der Übersetzung von Testperson 1

Diese Vermutung wurde auch durch die von Testperson 1 angefertigten Skizzen untermauert: Sie zeigten verschiedene Fallbeispiele zum „Treffen“ dreier Kreise in einem Punkt, zur gegenseitigen Lage von Kreisen und Dreieck. Es erfolgte vermutlich eine Auseinandersetzung mit dem mathematischen Inhalt des Textes, um die sprachlichen Schwierigkeiten zu überbrücken. Die erstellte Konstruktion entspricht in jedem Detail den Angaben der Aufgabe.

Das durchgeführte Interview erbrachte an drei Stellen wichtige Ergebnisse:

- Bei der Thematisierung der Textstelle *´common´* führte Testperson 1 allein die Korrektur zu *´közös´* durch.
- An der Stelle *´containing the circles´* erklärte sie, es wäre ihr zunächst unklar gewesen, ob die Kreise das Dreieck enthalten oder das Dreieck die Kreise. Dies kann als Zeichen für eine grammatische Schwierigkeit interpretiert werden. Nachdem sie aber beide Fälle mit Hilfe von Skizzen überprüft hatte, wurde ihr die Bedeutung dieser grammatischen Konstruktion klar. Sie konnte also mit Hilfe ihrer mathematischen Vorkenntnisse diese sprachliche Schwierigkeit überwinden.
- Ferner ergänzte sie an den Stellen *´homothetical´* und *´homothety´*, dass es hierbei um *´középpontos nagyítás´* (zentrische Vergrößerung) geht, der ungarische Fachterminus *´középpontos nyújtás´* (zentrische Streckung) fiel ihr nicht ein.

Testperson 2 arbeitete ohne Korrekturen des eigenen Textes, erstelle eine „saubere“ Übersetzung. Im Folgenden wird die Übersetzung der präferierten Begriffe und Zusammenhänge bei Testperson 2 tabellarisch zusammengefasst (die komplette Übersetzung und die graphische Darstellung siehe im Anhang O). Fett wurden diejenigen Stellen hervorgehoben, an denen sie eine unkorrekte Übertragung angab.

Präferenz	**ungarische Entsprechung**	**Übersetzung von TP 2**
congruent	egybevágó	egybevágó
meeting in the point S	az S pontban metszik egymást	egy S pontban találkozó
common	közös	közös
tangents	érintők	érintők
containing the circles	tartalmazza a köröket	a körök a háromszögön belül helyezkednek el
circumcentre	körülírt /körülírható kör középpontja	**körközéppont**
incentre	beírt /beírható kör középpontja	**egyensúlyi középpont**
collinear	egy egyenesre illeszkednek	egy **vonalon** fekszenek
homothetical	középpontosan hasonlóak	**homotetikusak**
axial symmetry	tengelyes szimmetria	**tengelyszimmetria**
homothety	középpontos hasonlóság /középpontos nyújtás	**homotetika**
transforms S into the circum-centre of ABC	az ABC háromszög körülírható körének középpontjába képezi S-et	**az S pontot az ABC háromszög körközéppontjává alakítja**

Tabelle 23: Struktur der Übersetzung von Testperson 2

Die von Testperson 2 gezeichnete Skizze und die von ihr erstelle Konstruktion entsprachen den Angaben des Textes. Das durchgeführte Interview erbrachte folgende Ergebnisse:

- Die verunglückte Formulierung *´körközéppont´* für *´circumcentre´* ist auf mangelnde ungarische Fachsprachenkenntnisse zurückzuführen, gemeint, gezeichnet bzw. konstruiert wurde aber der Mittelpunkt des Umkreises.
- Hinter der Formulierung *´egyensúlyi középpont´* und der richtigen Skizze bzw. Konstruktion des Inkreismittelpunktes steht gleichzeitig eine sprachliche und eine mathematische Schwierigkeit: Testperson 2 identifizierte *´incentre´* mit dem Schwerpunkt des Dreiecks, welches sie aber fälschlicherweise als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden interpretierte. Es ging also einerseits um eine sprachliche Schwierigkeit, da ihr der Terminus *´incentre´* nicht bekannt war, andererseits verband sie den Begriff „Schwerpunkt“ mit Eigenschaften, über die der Inkreismittelpunkt verfügt.
- Die Formulierungen *´egy vonalon fekszenek´* bzw. *´tengelyszimmetria´* sind zwar auf Ungarisch nicht präzise, deuten aber weder auf sprachliche noch auf mathematische Schwierigkeiten hin, da die fremdsprachlichen Ausdrücke bekannt waren und die dahinterstehenden mathematische Inhalte erfasst wurden. In diesen Fällen ging es vielmehr um mangelnde ungarische Fachsprachenkenntnisse.

- Die Begriffe *´homothetical´* und *´homothety´* waren für Testperson 2 weder sprachlich noch mathematisch zugänglich, sie kannte weder diese Fachausdrücke noch war sie fähig, diese mit mathematischen Inhalten zu verbinden. Das Nicht-Erfassen dieser Schlüsselbegriffe im Beweis führte dazu, dass Testperson 2 die mathematischen Aussagen der Lösung überhaupt nicht erfassen konnte. Sie war auch nicht fähig, Begriffe oder gar Zusammenhänge der Lösung zu erklären.

An dieser Stelle setzte sie sich mit der sprachlich erleichterten Fassung der Lösung (siehe Anhang L) auseinander. In der Tabelle 24 wird wiederum die Übersetzung der präferierten Begriffe und Zusammenhänge zusammengefasst (die komplette Übersetzung siehe im Anhang O). Fett wurden diejenigen Stellen hervorgehoben, an denen Testperson 2 eine unkorrekte Übertragung angab.

Man kann vermuten, dass manche Begriffe wie *´incentre´* und *´circumcentre´* durch die Verwendung der erleichterten Fassung des Textes für Testperson 2 besser zugänglich wurden und so sprachliche sowie mathematische Schwierigkeiten bezogen auf diese Begriffe überwunden werden konnten. Ferner wurden anscheinend einige inhaltliche Aspekte von *´homothety´* (also der zentrischen Streckung) – beispielsweise, dass es um eine Art Ähnlichkeitsabbildung geht – für Testperson 2 klar. Die fehlerhafte Übersetzung der Termini *´maps onto ABC´* und *´transforms S into the circumcentre of ABC´* legt allerdings die Vermutung nahe, dass es hierbei um mathematische Schwierigkeiten geht. Beide Vermutungen wurden durch das abschließende Interview bestätigt. *´incentre´* und *´circumcentre´* wurden zwar erfasst, aber hinsichtlich der zentrischen Streckung tauchten weitere Probleme auf: Es war für sie unklar, dass das Zentrum der Streckung ein Fixpunkt ist, der Zusammenhang zwischen Zentrum, Punkt und Bildpunkt war ebenfalls unklar. Ferner wurde deutlich, dass der Proband unter „Abbildung“ keine Zuordnung sondern eine Verwandlung verstand.

Präferenz	ungarische Entsprechung	Übersetzung von TP 2
incentre	beírt /beírható kör középpontja	ABC háromszögbe írható kör középpontja
they are similar	hasonlóak	hasonlóak
circumcentre	körülírt /körülírható kör középpontja	ABC háromszög köré írható kör középpontja
enlargement with respect to this centre	erre a pontra vonatkozó nagyítás	ehhez a középponthoz képest nagyítottuk fel a háromszöget
maps onto ABC	az ABC háromszögbe viszi	**az ABC háromszög területére esik**
same distance	egyenlő távolságra	egyenlő távolságra
from each vertex	mindegyik csúcstól	mindhárom csúcsponttól
transforms S into the circum-centre of ABC	az ABC háromszög körülírható körének középpontjába képezi S-et	**az S az ABC háromszög köré írható kör középpontjává válik**

Tabelle 24: Struktur der zweiten Übersetzung von Testperson 2

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass sich bei beiden Testpersonen mehrere Schwierigkeiten diagnostizieren ließen. Bei Testperson 1 waren diese sprachlicher Natur, bei Testperson 2 sprachlicher oder mathematischer Natur, in einem Fall sprachlicher und mathematischer Natur. Außerdem konnten bei ihr auch Mängel in den muttersprachlichen mathematischen Fachsprachenkenntnissen erkannt werden. Die Übertragung mathematischer Inhalte in verschiedene Repräsentationsmodi und das ergänzende Interview erwiesen sich zusammen als geeignetes Mittel zur Diagnostik dieser Schwierigkeiten.
Weiterhin konnte die Vermutung formuliert werden, dass Testperson 1 wegen ihrer hohen mathematischen Kompetenz fähig war, die aufgetauchten sprachlichen Schwierigkeiten zu überwinden. Hinter den Verstehensschwierigkeiten von Testperson 2 stehen dahingegen vermutlich mathematische Schwierigkeiten, insbesondere Mängel an Verständnis hinsichtlich der Eigenschaften von geometrischen Ähnlichkeitsabbildungen, die sie nicht einmal mit Hilfe ihrer hohen fremdsprachlichen Kompetenz überwinden konnte.
Die Einsetzung einer sprachlich erleichterten Fassung des relevanten Textes trug sowohl zur differenzierten Diagnostik als auch zur Beseitigung mathematischer Schwierigkeiten beim fremdsprachlichen mathematischen Wissenserwerb bei.

6. 3. Vergleichende Analyse der ungarischen und deutschen mathematischen Fachsprache

6. 3. 1. Zielsetzung

In diesem Kapitel wird beabsichtigt, die ungarische und deutsche mathematische Fachsprache im Hinblick darauf zu vergleichen, inwieweit eine echte zweisprachige Unterrichtsführung zur Förderung des Verstehens mathematischer Inhalte beitragen kann. Es wurde verglichen, wie ausdrucksvoll die deutsche und die ungarische Sprache mathematische Begriffe bezeichnen bzw. ob es fachsprachliche Phänomene im Deutschen oder im Ungarischen gibt, die eventuell das Verstehen mathematischer Inhalte behindern können, denen aber durch eine Kontrastierung mit der jeweiligen anderen Sprache entgegengewirkt werden kann. Es handelt sich hierbei also um eine theoretische, punktuelle Überprüfung der Teilhypothese 3.1. [S. 64] und der Teilhypothese 3.2. [S. 65]. Die durchgeführte Forschung wurde in erster Linie durch mathematische und nicht durch sprachwissenschaftliche Aspekte gelenkt, so war es nicht mein Ziel, phonetische, lexikologische oder grammatische Unterschiede und Gemeinsamkeiten systematisch aufzudecken, sondern es war die Absicht, solche fachsprachlichen – insbesondere lexikalischen – Elemente der Mathematik in beiden Sprachen zu erschließen, deren Kenntnis und Thematisierung das Verstehen und die Differenzierung mathematischer Begriffe in der jeweiligen anderen Sprache vermutlich erleichtern kann. Es war also das Ziel, solche fachsprachliche Elemente offenzulegen, deren echte zweisprachige Behandlung im Unterricht einer rein monolingualen Unterrichtsführung gegenüber effizienter wirken kann.
Es wird an dieser Stelle also keine umfassende linguistische Beschreibung der deutschen und ungarischen mathematischen Fachsprache gegeben, es soll aber darauf hingewiesen werden, dass man in Bezug auf die deutsche mathematische Fachsprache einen Ansatz bei *Müller, 1971* und eine systematische Darstellung bei *Mai-*

er/Schweiger, 1999 findet, bzw. dass *Pelles, 2005* sich ansatzmäßig mit ungarischen mathematischen Termini beschäftigt. *Czékmán, 2008a* und *Czékmán, 2008b* kontrastierten unter linguistischen Gesichtspunkten die deutsche und ungarische mathematische Fachsprache.
Da in der vorliegenden Arbeit der Schwerpunkt auf nichtfachspezifischem Hochschulmathematikunterricht insbesondere in wirtschaftlichen Ausbildungsgängen liegt, wurde stark auf die Fachsprache der Analysis stark fokussiert und es wurden gelegentlich auch wirtschaftliche Bedeutungen mathematischer Termini herangezogen. Sporadisch werden auch Beispiele aus anderen Bereichen der Mathematik, so aus der Geometrie, Mengenlehre und aus der Zahlentheorie, erwähnt. Zur genauen Beschreibung der umgangssprachlichen Bedeutung von manchen deutschen mathematischen Termini wurde das einsprachige Wörterbuch *Wahrig, 1994* zur Hilfe genommen, ferner wurde bei der fachsprachlichen Arbeit auch *Der kleine Duden Mathematik*[108] als Nachschlagewerk benutzt.

6. 3. 2. Vergleich der Expressivität mathematischer Termini

Mathematische Fachausdrücke sollen nach *Keresztesi, 1935* (zitiert bei *Pelles, 2005*) über folgende Eigenschaften verfügen: Aussagekraft; sprachliche Korrektheit; Flexibilität; Kürze und Einheitlichkeit; bzw. Eindeutigkeit. Unter Aussagekraft – oder mit einer sprachwissenschaftlichen Bezeichnung: unter Expressivität – wird in Anlehnung an *Pelles, 2005* die Eigenheit verstanden, dass die umgangssprachliche Bedeutung oder der Ursprung eines mathematischen Terminus das Denken in die fachliche Bedeutung lenkt. Im Folgenden werden einige mathematische Termini aus dem Deutschen gezeigt und kurz erörtert, die m. E. ausdrucksvoller, expressiver sind als ihre ungarische Entsprechungen bzw. umgekehrt. Es wird dementsprechend die Meinung vertreten, dass eine Thematisierung und Gegenüberstellung dieser Fachausdrücke zum genaueren Verständnis der dahinterstehenden mathematischen Begriffe führen kann.

Deutsche Termini expressiver als die ungarischen Entsprechungen

Beim ersten Beispiel

elementfremd   diszjunkt

erfasst das Wort *'elementfremd'* genau das Wesentliche des Begriffes, zwei Mengen A und B sind nämlich genau dann disjunkt zueinander, wenn sie kein gemeinsames Element haben, also wenn ihre Elemente gegenseitig „fremd“ füreinander sind. Dieser Terminus ist meiner Ansicht nach besonders ausdrucksvoll. Demgegenüber verfügt weder das im Deutschen gebräuchliche Wort *'disjunkt*' noch die ungarische Entsprechung *'diszjunkt*' über diese Aussagekraft. Diese sind Fremdwörter lateinischer Herkunft in beiden Sprachen, ohne jegliche aus der Alltagssprache motivierte Bedeutung. Ähnliches gilt für das Paar *'teilerfremd'* vs. *'relatív prím'*. Beim zweiten Beispiel

überabzählbar   nem megszámlálható

[108] Engesser, 1996

kommt im deutschen Termini im Gegensatz zur ungarischen Bezeichnung (wortwörtlich: *'nicht abzählbar'*) nicht nur zum Ausdruck, dass die Abzählbarkeit negiert wird, sondern durch die Vorsilbe *'über'* auch, dass die Mächtigkeit einer nichtabzählbaren Menge darüber hinausgeht, also größer ist, als die einer abzählbaren Menge. Daher wird der deutsche Terminus für ausdrucksvoller gehalten, als die ungarische Entsprechung. In den nächsten Beispielen

Kehrwert	reciprok
Umkehrfunktion	inverz függvény

enthalten die deutschen Termini das Lexem[109] *'kehr '*, welches in der Bedeutung von *'drehen'*, *'wenden'* gebraucht wird. Damit wird bereits zum Ausdruck gebracht, dass es hierbei um etwas Gedrehtes, Entgegengesetztes geht. Diese Bezeichnungen sind daher m. E. aussagekräftiger als die ungarischen Entsprechungen, die denselben Inhalt durch Fremdwörter ausdrücken. Die im Deutschen üblichen Bezeichnungen für Derivation und Integration (diese Termini sind ebenfalls gebräuchlich, genauso wie Differentiation):

Ableitung	derivált
Aufleitung	integrál

verweisen auf die Derivation und Integration von Potenzfunktionen als prototypische Funktionen aus der Schulmathematik. Demzufolge wird der Begriff bereits mit einer Regel innerhalb des Gebiets verbunden und kann daher sogleich damit assoziiert werden. Die ungarischen Entsprechungen sind wiederum Fremdwörter, die über keine aus der Umgangsprache bekannte Bedeutung verfügen. Es soll angemerkt werden, dass die Bezeichnung *'Ableitung'* ein durchaus auch in der höheren Mathematik akzeptierter Terminus ist, während *'Aufleitung'* eher in der Schulmathematik gebraucht wird und offiziell nicht als Terminus gilt.
Weitere Beispiele dieser Klasse sind: *'Hochpunkt'* - *'maximum'; 'Tiefpunkt'* - *'minimum'; 'Wendepunkt '* - *'inflexiós pont'; 'uneigentliches Integral'* -*'improprius integrál'; 'deckungsgleich'* - *'egybevágó'; 'Stammfunktion'* - *'primitív függvény'*.

Ungarische Termini expressiver als die deutschen Entsprechungen

In unserem ersten Beispiel

függvény	Funktion

wird betont, dass – während das deutsche Wort *'Funktion'* aus der Umgangssprache mit Bedeutungen wie *'Aufgabe'* und *'Zweck'* verbunden ist, und diese Bedeutungen in der Mathematik auch als irreführend wirken können –, im ungarischen Terminus *'függvény'* das Lexem *'függ'* also *'hängen'* enthalten ist. Dies drückt bereits den Kern des Begriffs aus, nämlich, dass es hierbei um eine Abhängigkeit geht und dieser Terminus ist aus meiner Sicht expressiver, ausdrucksvoller als die deutsche Entsprechung. Zwei weitere Beispiele bilden folgende Begriffspaare:

[109] Lexem ist ein sprachwissenschaftlicher Fachbegriff und bedeutet eine abstrakte Basiseinheit, die eine lexikalische Bedeutung trägt. Vgl. auch *Hessky/Knipf, 1998 S. 53-54*.

páros	gerade
páratlan	ungerade.

Das deutsche Wort *'gerade'* bedeutet in der Alltagssprache soviel wie *'ohne Krümmung', 'in gleicher Richtung verlaufend'* oder *'zufällig ', 'genau', 'richtig'*. Die erstere Bedeutung kommt bei dem Terminus *'Gerade'* zum Ausdruck, mit deren Bedeutung die Bedeutung von *'gerade'* nicht verwechselt werden sollte. Aber auch die weiteren umgangssprachlichen Bedeutungen helfen nicht bei der Erschließung der mathematischen Bedeutung dieses Wortes, demzufolge wird es nicht für eine treffende, ausdruckvolle fachliche Bezeichnung gehalten. Dahingegen bedeutet das ungarische Wort *'páros'* etwa wie *'mit Paar'* und deren Negierung *'páratlan'* verfügt über die Bedeutung *'ohne Paar'*. Diese sind m. E. besonders treffende Bezeichnungen für die Begriffe, deren Bedeutung mit *'durch zwei teilbar'* und *'durch zwei nicht teilbar'* beschrieben werden kann, da durch das Lexem *'Paar'* indirekt auf die Rolle der Zwei verwiesen wird. Bei den Beispielen

érintő	Tangente
szelő	Sekante

sind beide deutsche Termini *'Tangente'* und *'Sekante'* Fremdwörter lateinischer Herkunft und verfügen im Deutschen m. E. über wenig Aussagekraft, während die ungarischen Entsprechungen *'érintő' und 'szelő'* in ihrer Bedeutung der *'Berührenden'* und der *'Schneidenden'* nahekommen und demzufolge das Wesentliche der beiden genannten Begriffe zum Ausdruck bringen. Somit werden diese Bezeichnungen für besonders expressiv gehalten. Es wird angemerkt, dass es im Deutschen auch der Terminus *'Berührende'* existiert, aber leider selten gebraucht wird. Eine ähnliche Entsprechung für *'Sekante'* konnte nicht ermittelt werden.
Weitere Beispiele hierfür sind folgende Termini:
'téglalap' - *'Rechteck'; 'téglatest'* - *'Quader'; 'tágabb értelemben vett határérték'* - *'uneigentlicher Grenzwert'; 'számosság'* - *'Mächtigkeit'*.

6. 3. 3. Erschließung von fachsprachlichen Polysemie/Homonymie durch mathematische Termini aus der Fremdsprache

In der Linguistik wird mit polysemem bzw. homonymem Wortgebrauch das sprachliche Phänomen bezeichnet, bei dem zu einer Wortform eines Wortes, also zu dessen Lautfolge, mehrere Bedeutungen gehören. Sollte zwischen den Bedeutungen eine Beziehung nachweisbar sein, so spricht man von Polysemie, während es im Falle der Homonymie um eine rein zufällige Übereinstimmung der Wortformen geht. Oft kann in konkreten Fällen keine strikte Trennung zwischen Polysemie und Homonymie gemacht werden.[110] Ein typisches Beispiel für Polysemie ist das Wort *'Birne'*, diese Wortform verfügt über die Bedeutungen *'Frucht des Birnbaums'* bzw. *'elektrischer Glühkörper'*, zwischen denen aber ein enger Zusammenhang besteht: Wegen äußerer Ähnlichkeit wurde der Glühkörper nach der Frucht benannt. Eine ähnliche Argumentation ist bei der Wortform *'Band'* nicht zu führen, welche

[110] Mit der Problematik der Mehrdeutigkeit von Wortformen beschäftigt sich die Lexikologie als Teildisziplin der Sprachwissenschaft. Zum Thema vgl. z. B. *Lutzeier, 1995, S. 45-58* oder *Schippan, 1992, S. 160-169.*

gleichzeitig *'schmaler Streife aus Stoff'* und *'Kapelle für Tanzmusik'* bedeutet. Daher handelt es sich hierbei um eine Konkretisierung der Homonymie.
Obwohl in den Fachsprachen und insbesondere in der mathematischen Fachsprache eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen Wortform und Bedeutung angestrebt wird, kommen doch polyseme/homonyme Termini in der Mathematik vor. Ein Beispiel hierfür wäre der deutsche Terminus *'Körper'* aber auch seine ungarische Entsprechung *'test'*, beide bezeichnen sowohl eine dreidimensionale geometrische Figur als auch eine algebraische Struktur. *Maier/Schweiger, 1999* schlagen für die Bewusstmachung solcher Mehrdeutigkeiten gerade die Übersetzung in eine geeignete Sprache vor: Im obigen Fall ist beispielsweise die Heranziehung des Englischen nützlich, da erstere Bedeutung durch *'body'* während letztere durch *'field'* übersetzt wird.[111]
Im Weiteren werden Beispiele aus der mathematischen Terminologie behandelt, bei denen in deutsch-ungarischer Relation in der einen Sprache Polysemie/Homonymie besteht, während das in der anderen Sprache nicht der Fall ist.

Erschließung von Polysemie/Homonymie deutscher mathematischer Termini durch ungarische Entsprechungen

Von den umgangssprachlichen Bedeutungen des Wortes *'gerade'* war bereits im Abschnitt 6. 3. 2. [S. 103] die Rede. Dieses Wort verfügt aber in der Mathematik über zwei weitere verschiedene Bedeutungen: Es bezeichnet einerseits einen Grundbegriff der Geometrie, andererseits aber die Eigenschaft von Zahlen, durch Zwei teilbar zu sein. Da die Wortformen der ungarischen Entsprechungen

Gerade	egyenes
gerade	páros

nicht zusammenfallen, kann die im Deutschen vorhandene Homonymie durch eine Kontrastierung mit den ungarischen Bezeichnungen bewusst gemacht werden. Auch das Wort *'Durchschnitt'* wird in der Mathematik homonym verwendet, es bedeutet sowohl *'Schnitt zweier Mengen'* als auch *'arithmetisches Mittel'*.

Durchschnitt: Schnittmenge	metszethalmaz
Durchschnitt: arithmetisches Mittel	átlag

Es ist ersichtlich, dass die entsprechenden ungarischen Termini nicht die gleiche Wortform haben und demzufolge als Kontrast gelten können. Das Wort *'Fläche'* ist auch doppeldeutig in der deutschen mathematischen Fachsprache:

Fläche: zweidimensionale Mannigfaltigkeit	felület
Fläche: Flächeninhalt	terület

Folgende Termini können im wirtschaftsmathematischen Unterricht Verständnisschwierigkeiten verursachen, da sie sowohl über eine exakte mathematische als auch über eine ökonomische Bedeutung verfügen. Eine Übersetzung ins Ungarische kann wiederum nützlich sein:

[111] Vgl. dazu *Maier/Schweiger, 1999 S. 57.*

Menge	Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte Warenmenge	halmaz árumennyiség
Produkt	Ergebnis einer Multiplikation erzeugte Ware oder Dienstleistung	szorzat termék
Betrag	Absolutwert Geldsumme	abszolútérték pénzösszeg

Erschließung von Polysemie/Homonymie ungarischer mathematischer Termini durch deutsche Entsprechungen

Der Terminus *'szám'* wird im Ungarischen in der Mathematik in zwei Bedeutungen verwendet: Er bezeichnet auf der einen Seite eine durch Zählen gewonnene Größe, auf der anderen Seite aber auch das Ergebnis einer konkreten Zusammenzählung, eine bestimmte Stückzahl. Die deutschen Entsprechungen sind folgende:

szám: durch Zählen gewonnene Größe	Zahl
szám: eine bestimmte Stückzahl	Anzahl

Eine Gegenüberstellung mit den deutschen Bezeichnungen kann auch in diesem Fall behilflich sein, die unterschiedlichen Bedeutungen bewusst zu machen. Der Terminus *'gyök'* bezeichnet ebenfalls zweierlei in der Mathematik: die Lösung einer Gleichung sowie eine Potenz mit einem Stammbruch als Exponent. Auch in diesem Fall kann eine Übersetzung ins Deutsche als nützlich gelten, da die entsprechenden deutschen Bezeichnungen nicht einmal ähnlich sind:

gyök: Lösung einer Gleichung	Lösung
gyök: Potenz mit rationalem Exponent	Wurzel

Weitere Beispiele hierfür in tabellarischer Form:

szakasz	kürzeste Verbindung zw. zwei Punkten Stück vom Ganzen, Teilstück	Strecke Abschnitt
megoldás	Ergebnis, Resultat Beendigung, Lösungsweg	Lösung Auflösung
analízis	Zerlegung eines Ganzes in seine Teile, Untersuchung der Einzelheiten Teilgebiet der Mathematik	Analyse Analysis

6. 3. 4. Vermeidung von fachsprachlichen Interferenzen durch mathematische Termini aus der Fremdsprache

„'Interferenz' ist ein psychologischer, genauer lerntheoretischer Begriff und bezieht sich auf den unangemessenen Transfer von Strukturen oder Regeln eines Systems auf ein anderes System. Im Bereich der Sprachen geht es um analogische Übergeneralisierungen von phonetisch/phonologischen, morhponologischen, syntaktischen, semantischen und auch pragmatischen Gegebenheiten." (Schifko, 1992, S. 297) Sprachliche Interferenz kann sich innerhalb einer Sprache abspielen, in diesem Fall geht es um intralinguale Interferenz, sie kann aber auch durch den Kontakt zweier oder mehrer Sprachen entstehen, in diesen Fällen spricht man von interlin-

gualer Interferenz. Intralinguale Interferenz kann beispielsweise beim Erlernen der Muttersprache vorkommen, aber in den Bereich der intralingualen Interferenz gehört auch das Phänomen, bei dem in einer Sprache die Wortform mehrerer Wörter ähnlich zueinander sind und die Bedeutung der einen Wortform auf die andere oder weitere übertragen wird.

Im Folgenden werden solche Beispiele aus der deutschen bzw. ungarischen mathematischen Fachsprache angeführt, bei denen in der einen Sprache intralinguale Interferenz entstehen kann. Um dieser zu entgehen, sollten sie mit den entsprechenden Bezeichnungen aus der anderen Sprache konfrontiert werden.

Vermeidung von Interferenzen zwischen ungarischen mathematischen Bezeichnungen durch deutsche Entsprechungen

befogó-átfogó	Kathete-Hypotenuse
törtvonal-töröttvonal	Bruchstrich-Streckenzug
sorozat-sor	Folge-Reihe
középérték-közbülső érték	Mittelwert-Zwischenwert
terület-kerület	Fläche-Umfang
görbe-görbület	Kurve-Krümmung

Vermeidung von Interferenzen zwischen deutschen mathematischen Bezeichnungen durch ungarische Entsprechungen

Tangens-Tangente	tangens-érintő
Teilmenge-Teilermenge	részhalmaz-osztók halmaza
Quadrat-Quader	négyzet-téglatest
Kegel-Kugel	kúp-gömb
Inkreis-Ankreis-Umkreis	(háromszög) beírható köre- (háromszög)höz írható érintő kör, (háromszög) körülírható köre
Produktfunktion-Produktionsfunktion	szorzatfüggvény-termelési függvény

6. 3. 5. Beitrag deutscher mathematischer Termini zum Verstehen ungarischer Fachbegriffe

In diesem Abschnitt werden solche ungarische mathematische Termini thematisiert, deren Verständnis durch Kenntnis deutscher – nicht unbedingt entsprechender – Termini gefördert werden kann. In den meisten Fällen steht die gemeinsame lateinische Herkunft im Hintergrund, wodurch ein Zusammenhang zwischen den Bedeutungen der deutschen und ungarischen Fachwörter gewährleistet wird. Es wird aber auch ein Beispiel dafür gegeben, wie ein konsequenterer Wortgebrauch im Deutschen als Richtlinie beim Verstehen ungarischer Termini dienen kann.

Das erste Beispiel ist das ungarische Fachwort *'faktoriális'*, eine Bezeichnung für das Produkt der ersten n positiven ganzen Zahlen, wo es auf den ersten Blick keinen Zusammenhang zwischen Wortform und Bedeutung gibt. Hierbei ist nicht die deutsche Entsprechung *'Fakultät'* behilflich, sondern vielmehr der Terminus *'Faktor'* als Sammelbegriff für Multiplikator und Multiplikand, ungarisch *'szorzótényező'*. Ist es einem bewusst, dass der Stamm des ungarischen Terminus Faktor einer Multiplikation bezeichnet, so ist es besser nachzuvollziehen, dass ein bestimmtes Produkt *'faktoriális'* heißt.

Das nächste Beispiel ist noch offensichtlicher: In der ungarischen mathematischen Fachsprache kommt in Bezug auf die Integralrechnung der Terminus *'additivitás'* also *'Additivität'* vor, beispielsweise in Ausdrücken wie *'a határozott integrál intervallum szerinti additivitása'* oder *'a határozott integrál integrandus szerinti additivitása'*. Ferner bezeichnet man auf Ungarisch Additionstheoreme mit *'addiciós tételek'*. Beide Termini könnten m. E. zugänglicher für Lernende werden, wenn es ihnen bekannt wäre, dass das deutsche Fachwort *'Addition'* das Zusammenzählen, Summieren bezeichnet. Ähnliches gilt für den Terminus *'differenciahányados'*, bei dessen Verstehen die Kenntnis des deutschen Fachwortes *'Differenz'*, eine Bezeichnung für das Ergebnis einer Subtraktion, erleichtern könnte.
Zunächst soll noch das Beispiel *'láncszabály'* beleuchtet werden, welchem im Deutschen der Terminus *'Kettenregel'* entspricht. Diese Entsprechung allein würde den ungarischen Fachausdruck nicht offensichtlicher machen, wichtig ist aber, dass im Deutschen die Zusammensetzung von Funktionen mit *'Verkettung'* also etwa mit *'láncolás'* bezeichnet wird, zusammengesetzte, implizite Funktionen werden auch oft *'verkettete Funktionen'* genannt. Dadurch wird bereits eine Verbindung zwischen dieser Art von Verknüpfung von Funktionen und dem Wort *'Kette'* hergestellt, womit auch deutlich wird – und es klingt nicht künstlich – die Ableitungsregel in Bezug von verketteten Funktionen *'Kettenregel'* zu nennen.

6. 3. 6. Lediglich für eine Sprache charakteristische mathematische Termini

Im Weiteren werden einige deutsche und ungarische mathematische Fachausdrücke dargestellt, die nur in der einen nicht aber in der anderen Sprache vorhanden sind. Das heißt aber auch, dass es bestimmte mathematische Begriffe gibt, die lediglich in einer Sprache existieren. Die Thematisierung dieser Begriffe und ihrer Bezeichnungen kann klar machen, dass verschiedene Sprachen die Welt unterschiedlich differenzieren und dies auch für exakte Wissenschaften wie die Mathematik gilt. Es wird auch deutlich, dass ein und derselbe mathematische Sachverhalt durch Formulierungen in verschiedenen Sprachen unterschiedlich betrachtet werden kann.

Deutsche mathematische Termini ohne entsprechende ungarische Bezeichnung

Der deutsche Terminus *'Steigungsdreieck'* bezeichnet ein solches rechtwinkliges Dreieck, welches im kartesischen Koordinatensystem dadurch entsteht, dass man durch zwei Punkte einer Geraden Parallelen zur x- bzw. y-Achse zeichnet. An einem solchen Dreieck ist es möglich, die Steigung der Geraden direkt abzulesen. In der ungarischen mathematischen Tradition ist es ebenfalls üblich, mit diesem Dreieck zu arbeiten, es trägt aber keinen besonderen Namen. Ein weiterer Begriff aus der deutschen Analysis ist der *'Terrassenpunkt'*, welcher einen Wendepunkt eines Funktionsgraphen bezeichnet, in dem die Tangente an die Kurve parallel zur x-Achse verläuft. In der ungarischen Tradition gehört die Untersuchung von Terassenpunkten nicht zur üblichen Kurvendiskussion, sie werden auch nicht extra bezeichnet. Eine Differenzierung zwischen divergenten Folgen/ Funktionen ist in beiden Sprachen zu finden: Divergente Folgen/Funktionen, bei denen eine bestimmte Tendenz, nämlich Wachstum oder Zerfall über alle Grenzen, also eine Konvergenz gegen Unendlich oder minus Unendlich nachweisbar ist, werden von anderen divergenten Folgen/Funktionen unterschieden und mit *'tágabb értelemben konvergens'* bzw. mit *'bestimmt divergent/uneigentlich konvergent'* bezeichnet. Es ist aber im Ungarischen nicht üblich, das Komplement zu diesen divergenten Folgen/Funktionen auch zu benennen. Im Deutschen ist es möglich, die restlichen Folgen/Funktionen werden mit *'unbestimmt divergent'* bezeichnet. Weitere Beispiele hierfür sind: *'Unstetigkeit'*, *'Integrationskonstante'*, *'Integrationsgrenze'*, *'Normalparabel'*, *'Radikant'*, *'Mittendreieck'*, *'Kreiszahl'*, *'Definitionslücke'*, *'Passante'*, *'Term'*, *'betragen'*.

Ungarische mathematische Termini ohne entsprechende deutsche Bezeichnung

Berechnet man in Ungarn im Falle einer konvergenten Folge zu einer angegebenen Abweichung ε die Folgenummer n_0 desjenigen Folgenglieds, ab dem alle Folgenglieder a_n mit n> n_0 in der ε-Umgebung des Grenzwertes liegen, so wird die Abweichung ε mit *'hibakorlát'* und die Folgenummer n_0 mit *'küszöbszám'* bezeichnet. An entsprechenden deutschen Termini, wie etwa *'Fehlerschranke'* oder *'Schwellenzahl'* mangelt es vollkommen. Für folgende ungarische mathematische Fachausdrücke sind ebenfall keine deutschen Entsprechungen gefunden worden: *'négyzet alapú egyenes hasáb'*, *'hézagpont'*, *'felosztás finomsága'*, *'minden határon túl finomodó felosztás'*, *'helyettesítési érték'*.

6. 3. 7. Exemplarische Textanalyse

In diesem Abschnitt wird anhand eines Texteauszuges aus einem Lehrbuch für Wirtschaftswisenschaftler[112] exemplarisch gezeigt, inwieweit eine zweisprachige Thematisierung mathematischer Inhalte dazu beitragen kann, jene besser zu verstehen. Unter Berücksichtigung der Thematik an der Wirtschaftshochschule Budapest [S. 21] wurde ein Textabschnitt über ein zentrales Thema, nämlich über die Einführung des Ableitungsbegriffs, ausgewählt und auf Stellen hin analysiert, an denen eine zweisprachige Unterrichtsführung einer rein monolingualer Unterrichstführung gegenüber Vorteile haben könnte. Im Folgenden wird der Lehrbuchtext in der linken Spalte unverändert angeführt (auf Verweise auf Abbildungen und auf die Abbildungen wird an dieser Stelle verzichtet) und in der rechten Spalte kommentiert.

„Gegeben sei eine Funktion $y = f(x)$; unser Ziel ist es, die Steigung der Tangente an die Funktionskurve an einer Stelle x_0 zu ermitteln.

Bereits beim ersten Satz kann thematisiert werden, dass das Wort '*Funktion*' in der Mathematik in einer von der umgangssprachlichen *'Aufgabe'*, *'Zweck'* abweichenden Bedeutung gebraucht wird. Ferner kann auf die stärkere Expressivität der ungarischen Entsprechung *'függvény*' hingewiesen werden.

Um eine Interferenz zwischen den deutschen Termini *'Tangente'* und *'Tangens'* zu vermeiden, kann eine Übersetzung des Satzes ins Ungarische nützlich sein, da zwischen den entsprechenden ungarischen Wortformen *'érintő'* und *'tangens'* keine Interferenz vorliegt. Weiterhin kann zum Ausdruck gebracht werden, dass die

[112] Purkert, 2001

ungarische Bezeichnung *’érintő’* aussagekräftiger ist als der deutsche Terminus Tangente und in seiner wortwörtlichen Bedeutung dem deutschen *’Berührenden*’ nahekommt.

Einer Interferenz zwischen den ungarischen Bezeichnungen *’görbe’* und *’görbület’* kann dadurch entgegengewirkt werden, wenn die deutschen Bezeichnungen thematisiert werden. Ersterer entspricht *’Kurve’*, letzterer aber *’Krümmung*’ im Deutschen.

Dazu betrachten wir einen zweiten Punkt P_1 auf der Kurve, der die Abzisse $x_0 + \Delta x$ hat. Die Steigung der Sekante durch P_0 und P_1 ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Dem deutschen Terminus *’Sekante’* entspricht im Ungarischen das Wort *’szelő’*, welches *’Schneidende’* bedeutet. Dadurch wird der gemeinte Begriff – im Gegensatz zur deutschen Bezeichnung –, bereits im Wortlaut zum Ausdruck gebracht.

Dieser Quotient heißt der Differenzenqoutient der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0. x_0 ist fest. Δx fassen wir als variabel auf, dann ist der Differenzenquotient eine Funktion von Δx.

Das Verstehen des deutschen Terminus *’Differenz’* im Wort *’Differenzenquotient’* kann dazu beitragen, die ungarische Entsprechung *’differenciahányados’* mit seiner Bedeutung in Verbindung setzen zu können.

Um nun die Steigung der Tangente zu ermitteln, lassen wir Δx immer kleiner und kleiner werden. Dabei wandert der Punkt P_1 auf der Kurve $y = f(x)$ auf den Punkt P_0 zu; die Sekante durch P_0, P_1 nähert sich immer mehr der Tangente, ihre Steigung nähert sich immer mehr der gesuchten Tangentensteigung. Man wird also die Tangentensteigung erhalten, indem man den Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta x \to 0$ berechnet, d. h.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Es kann auch thematisiert werden, dass die deutsche Sprache besonders geeignet ist, zusammengesetzte Wörter zu bilden. Dabei wird einerseits Information komprimiert, andererseits werden aber bestimmte Verhältnisse nach der Zusammensetzung nicht mehr direkt erkennbar. Die Termini *’Tangentensteigung’* und *’Sekantensteigung’* sind Beispiele hierfür: Sie drücken das Gemeinte komprimiert in einem Wort aus, es ist aber nicht mehr offensichtlich, in welcher Relation die einzelnen Bedeutungseinheiten *’Tangente’ /’Sekante’* bzw. *’Steigung’* stehen. Ein Vergleich mit den entsprechenden ungarischen Termini, die die gemeinte Besitzrelation durch eine attributive Konstruktion zum Ausdruck bringen (az *’érintő/szelő meredeksége’*), kann durchaus behilflich sein, Information über die Quantität der Relation zu gewinnen.

Der Grenzwert des Differenzenqoutienten

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

heißt die erste Ableitung oder kurz die Ableitung von f(x) an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Geometrisch ist $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an die Funktionskurve $y = f(x)$ an der Stelle x_0."

Der deutschen Bezeichnung *'Ableitung'* entspricht im Ungarischen der Terminus *'derivált'*.[113] Obwohl die mathematische Bedeutung hinter diesen Termini dieselbe ist, unterscheidet sich die sprachliche Aussagekraft der beiden Bezeichnungen wesentlich voneinander. Der deutsche Terminus *'Ableitung'* weist auf eine bestimmte Differentationsregel, nämlich auf die Differentation von Potenzfunktionen hin, bei der die Berechnung der Ableitung durch Verminderung des Exponenten um eins erfolgt und anschließend der ursprüngliche Exponent zum konstanten Faktor des Funktionswertes wird. Es geht also in doppelter Hinsicht um 'Ab'-leitung: Einerseits wegen der Verminderung, andererseits aber wegen der Veränderung in der Symbolik, der Faktor steht ja in der symbolischen Notation wesentlich tiefer als der Exponent. Der durch die Bezeichnung *'Ablei-tung'* zum Ausdruck gebrachte sprachliche Verweis spielt wiederum in doppelter Hinsicht eine große Rolle: Er kann auf der einen Seite bei der Einführung der Differentation dazu bei-tragen, bei Potenzfuntionen die dazugehörende Ableitungsregel besser merken, da bereits eine Verbindung zwischen dem Begriff und einer an ihn anschließende Regel sprachlich hergestellt wird. Diese Bezeichnung ist im Unterricht zunächst nicht irreführend, da Potenzfunktionen meist Prototypen für differenzierbare Funktio-nen sind. Auf der anderen Seite kann aber diese Verkopplung in späteren Phasen des Unterrichts auch irreführend sein. Werden nämlich weitere differenzierbare Funktionen, wie z. B. Exponentialfunktionen im Unterricht behandelt, so ist diese Regel nicht mehr relevant. Um solchen Missverständnissen entgegenzusteuern, ist es hilfreich, auf die ungarische Entsprechung *'derivált'* bereits im Anfangsunterricht hinzuweisen und dies eventuell auch später aufzugreifen.

[113] Im Deutschen existieren folgende Termini für Bezeichnung der entsprechenden Tätigkeit: *'Differentiation'*, *'Derivation'*, *'Ableitung'*, im Ungarischen sind die Ausdrücke *'differenciálás'* und *'deriválás'* üblich. Der deutsche Terminus *'Ableitung'* hat also in dieser Hinsicht keine vergleichbare Entsprechung im Ungarischen. Ferner gilt aber, dass das Ergebnis der Differentation an einer bestimmten Stelle im Deutschen durch *'Differentialquotient'* oder *'Ableitung'* bezeichnet werden kann, das Wort *'Derivat'* ist in der

6. 3. 8. Ergebnisse

Zusammenfassend kann man feststellen, dass im Themenbereich Analysis in deutsch-ungarischer Relation Stellen gefunden werden konnten, an denen eine Thematisierung der verschiedenen sprachlichen Ausdrucksmöglichkeiten von mathematischen Inhalten im deutsch-ungarischen bilingualen Mathematikunterricht fördernd fürs Verstehen mathematischer Begriffe bzw. Zusammenhänge wirken könnte. Es konnten u. a. deutsche Begriffsbezeichnungen gefunden werden, die gegenüber entsprechenden ungarischen Bezeichnungen über mehr Aussagekraft verfügen, aber auch umgekehrt, manche ungarischen mathematischen Termini sind ausdrucksvoller und sprachlich motivierter als deren deutsche Entsprechungen. Ferner konnte festgestellt werden, dass einigen im Deutschen interferierenden mathematischen Fachausdrücke solche ungarischen Fachausdrücke entsprechen, die nicht interferieren, bzw. umgekehrt. Auch die Mehrdeutigkeit einiger deutscher und ungarischer mathematischer Termini könnte durch eine Übersetzung in die jeweilige andere Sprache bewusst gemacht werden, da die entsprechenden Bezeichnungen in der anderen Sprache nicht zusammenfallen. Weiterhin wurden ungarische Bezeichnungen aus der Mathematik aufgefunden, insbesondere welche lateinischer Herkunft, deren Verständnis die Kenntnis entsprechender deutscher Bezeichnungen fördern könnte. Es soll zunächst erwähnt werden, dass es in beiden genannten Sprachen mathematische Bezeichnungen und demzufolge mathematische Begriffe gibt, die über keine vergleichbaren Entsprechungen in der jeweils anderen Sprache verfügen.

Mathematik unüblich. Im Ungarischen existieren die Wortformen *'differenciálhányados'* und *'derivált'*. Da es an einer sprachlich entsprechenden Bezeichnung im Ungarischen für den deutschen Terminus *'Ableitung'* und im Deutschen für den ungarischen Terminus *'derivált'* mangelt, führt das dazu, *'Ableitung'* ins Ungarische mit *'derivált'* zu übersetzen.

7. Auswertung der Ergebnisse im Hinblick auf die Hypothesen

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der durchgeführten empirischen [S. 66 bzw. 89] sowie theoretischen Untersuchungen [S. 102] imHinblick auf die im 5. Kapitel formulierten Hypothesen [S. 62] überprüft. Darüber hinaus werden einige weitere Ergebnisse thematisiert, die ebenfalls aus den durchgeführten Untersuchungen resultierten, sich aber nicht direkt auf Hypothesen bezogen. Diese können zukünftig als Ausgangspunkt weiterer Forschungshypothesen dienen.

7. 1. Ergebnisse in Bezug auf die Hypothese 1

Zur punktuellen Überprüfung der Hypothese 1 [S. 62] wurde eine Fallstudie an der Wirtschaftshochschule Budapest [S. 66] durchgeführt. Bezüglich der Teilhypothese 1.1. [S. 62] wurde gefunden, dass es Unterschiede im kognitiven Bereich zwischen muttersprachlich und fremdsprachlich unterrichteten Kursgruppen gibt. Eine leichte Abweichung zugunsten der fremdsprachigen Ausbildung zeigte sich im prozeduralen Bereich, während die Probanden der muttersprachlichen Ausbildung im Durchschnitt im konzeptuellen Bereich wesentlich besser abschnitten. Der erste Teil der Hypothese 1.1. konnte also gestützt werden. Die andere Vermutung aber, dass es auch Unterschiede im Verhältnis zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen gibt, konnte sich in der untersuchten Stichprobe nicht bewähren. Sowohl in der fremdsprachig als auch der muttersprachlich unterrichteten Kursgruppe war das Verhältnis zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen dasselbe und entsprach dem genetischen Ansatz [S. 42].
Auch im Hinblick auf die Teilhypothese 1.2. [S. 63] konnten zwischen den beiden untersuchten Gruppen einige Unterschiede gezeigt werden, obwohl sie keine einheitliche Tendenz erkennen lassen. In Bezug auf die Begriffe Monotonie und Beschränktheit wurde gefunden, dass die Probanden der fremdsprachig unterrichteten Gruppe insgesamt höhere Kompetenzstufen erreichten als die muttersprachlich unterrichtete Gruppe. Ferner galt, dass der Anteil derjenigen Probanden, die die für die weitere Arbeit gestellte Lernbedingung, nämlich das Erreichen der Kompetenzstufe B, nicht erfüllt haben, in der fremdsprachigen Ausbildung deutlich kleiner war als der entsprechende Anteil in der muttersprachlichen Ausbildung. In Bezug auf den Begriff der Konvergenz wurde ebenfalls ein Unterschied gefunden, der aber weniger deutlich war und in die umgekehrte Richtung zeigte. In diesem Fall erreichten die Probanden der muttersprachlichen Ausbildung etwas höhere Kompetenzstufen als die Probanden der fremdsprachigen Ausbildung und es gab etwas weniger Probanden in der muttersprachlich unterrichteten Gruppe, die unter Kompetenzstufe B fielen, als in der fremdsprachig unterrichteten Gruppe. Die Teilhypothese 1.2. wurde damit nicht angezweifelt. Die Uneinheitlichkeit der gefundenen Ergebnisse weisen aber darauf hin, dass die erreichten Kompetenzstufen durch weitere Faktoren beeinflusst werden können und wohl diese Teilhypothese weitere Präzisierung benötigt.

Hinsichtlich der Teilhypothese 1.3. [S. 63] konnten ebenfalls Unterschiede ermittelt werden. Bezogen auf den Konvergenzbegriff ergaben meine Untersuchungen, dass mehr Probanden der fremdsprachigen Ausbildung über einen stabilen Konvergenzbegriff verfügen als Probanden der muttersprachlichen Ausbildung. Diese Teilhypothese konnte damit auch nicht angezweifelt werden, aber der hohe Prozentsatz der unauswertbaren Antworten deutet auf eventuelle Mängel der Forschungsmethodik hin.

7. 2. Ergebnisse in Bezug auf die Hypothese 2

Zur Überprüfung der Hypothese 2 [S. 63] wurde eine Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena [S. 89] durchgeführt. Die Fallstudie zeigte, dass in einem mehrschrittigen Prozess Verstehensschwierigkeiten beim bilingualen mathematischen Wissenserwerb diagnostiziert werden konnten, weiterhin war zu entscheiden, ob diese Schwierigkeiten auf mangelnde mathematische Vorkenntnisse oder auf mangelnde Sprachkenntnisse zurückzuführen sind. Somit werden diese Ergebnisse als ein Beleg für die Hypothese 2 interpretiert, die Hypothese wurde also untermauert.

7. 3. Ergebnisse in Bezug auf die Hypothese 3

Zur Überprüfung der Hypothese 3 [S. 64] wurde eine theoretische Untersuchung, nämlich eine vergleichende Analyse der deutschen und ungarischen mathematischen Fachsprache [S. 102], durchgeführt. Diese Analyse ergab, dass sowohl in der deutschen als auch in der ungarischen mathematischen Fachsprache Termini existieren, die expressiver, aussagekräftiger sind als die entsprechenden Bezeichnungen in der jeweiligen anderen Sprache. Es wurden auch ungarische Fachausdrücke gefunden, deren Inhalt durch die Heranziehung bestimmter deutscher Fachausdrücke ersichtlicher werden kann. Diese Befunde werden derart interpretiert, dass eine theoretische Möglichkeit der in der Teilhypothese 3.1. [S. 64] formulierten Förderung des Verstehens mathematischer Inhalte besteht und man demzufolge berechtigt ist, diese Teilhypothese aufzustellen.
Ferner konnten sowohl in der deutschen als auch in der ungarischen mathematischen Fachsprache Beispiele für fachsprachliche Interferenzen sowie für mehrdeutige Bezeichnungen gefunden werden, deren Entsprechungen in der anderen Sprache nicht interferieren bzw. wo die entsprechenden Wortformen nicht zusammenfallen. Dieses Ergebnis bedeutet aus meiner Sicht, dass auch für die in der Teilhypothese 3.2. [S. 65] formulierte Förderung des Verstehens mathematischer Inhalte eine theoretische Möglichkeit besteht und die Aufstellung dieser Teilhypothese ebenfalls berechtigt ist. Eine spätere empirische Überprüfung dieser beiden Teilhypothesen im deutsch-ungarischen Kontext kann auf Ergebnissen der vorgestellten Untersuchung aufbauen.

7. 4. Weitere Ergebnisse

Bei der Auswertung der durchgeführten empirischen [S. 66 bzw. 89] sowie theoretischen Untersuchungen [S. 102] wurden einige weitere Ergebnisse ermittelt. Diese Ergebnisse zeigen Möglichkeiten auf, in welche Richtung eine Fortsetzung der durchgeführten Forschungstätigkeit denkbar ist:

- Bei der Fallstudie an der Wirtschaftshochschule Budapest [S. 66] wurde gefunden, dass unter den dargestellten Bedingungen [S. 67] das Verhältnis zwischen dem konzeptuellen und prozeduralem Wissen dem genetischen Ansatz entspricht [S. 42]. Es kann daher die Vermutung formuliert werden, dass in einer nichtfachspezifischen Mathematikausbildung an Fachhochschulen, also in Fachhochschulausbildung, in der Mathematik als Nebenfach unterrichtet wird, und der Schwerpunkt im Unterricht auf Analysis liegt, welche man im Unterricht nach dem [1] Ansatz [S. 20] behandelt, der genetische Ansatz [S. 42] das Verhältnis zwischen dem konzeptuellen und dem prozeduralen Wissen charakterisiert.
- In der Fallstudie an der Wirtschaftshochschule Budapest [S. 66] war es auffallend, dass der Anteil derjenigen Probanden, die keine Teilaufgaben bearbeiteten, in der muttersprachlichen Ausbildung deutlich höher lag als in der fremdsprachigen Ausbildung. (Bezüglich der Begriffe Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz der Reihe nach: 9%, 13% und 6%, während diese Prozentsätze in der deutschsprachigen Ausbildung niedriger sind: 0%, 7% bzw. 4%). Es wird vermutet, dass dieses Phänomen mit motivationalen Aspekten zusammenhängt.
- In der Fallstudie an der Wirtschaftshochschule Budapest [S. 66] war ebenfalls ins Auge fallend, dass sowohl die mutter- als auch die fremdsprachlich unterrichteten Probanden bezüglich der Beschränktheit am wenigsten Erfolg aufwiesen. Es wird vermutet, dass der relativ hohe Misserfolg der auf Beschränktheit bezogenen Teilaufgaben damit zusammenhängt, dass sie bzw. deren Lösung eine Kompetenz auf mindestens Stufe C benötigt. Eine weitere Vermutung ist, dass der Misserfolg auf den Aufbau der mathematischen Inhalte im vorangehenden Unterricht zurückzuführen ist.
- Die Auswertung der Fehleranalyse bei der Fallstudie an der Wirtschaftshochschule Budapest [S. 66] zeigte, dass es im bilingualen Mathematikunterricht mehr Fehlerquellen gibt. Es wird insbesondere vermutet, dass es bilingual Lernenden Schwierigkeiten bereitet, mathematische Inhalte aus dem einen Repräsentationsmodus in den anderen zu übersetzen (insbesondere aus dem symbolischen in den sprachlichen), bzw. mit komplexen Sachverhalten umzugehen.
- In der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena [S. 89] konnten Verstehensschwierigkeiten im bilingualen Kontext durch die Übertragung mathematischer Inhalte in verschiedene Repräsentationsmodi bzw. durch die Einsetzung sprachlich abgestufter Fassungen desselben Textes diagnostiziert werden. Es wird daher die Vermutung formuliert, dass sich diese Methoden als geeignetes Mittel zur Diagnostik von Verstehensschwierigkeiten im bilingualen Mathematikunterricht erweisen. Ferner wurde gefunden, dass die Einsetzung sprachlich abgestufter Fassungen desselben Textes auch zur Beseitigung mathematischer Schwierigkeiten beim fremdsprachlichen mathematischen Wissenserwerb beitrug. Demzufolge wird vermutet, dass durch eine sprachliche Abstufung im bilingualen Mathematikunterricht eingesetzter Texte nicht nur sprachliche sondern auch fachliche Schwierigkeiten beseitigt werden können.
- Ebenfalls anhand der Ergebnisse der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena [S. 89] kann die Vermutung formuliert werden, dass Lernende mit einer hohen mathematischen Kompetenz aber niedriger fremdsprachlicher

Kompetenz fähig sind, sprachliche Schwierigkeiten zu überwinden, während Lernende mit einer hohen fremdsprachlichen aber niedrigen mathematischen Kompetenz nicht fähig sind, mathematische Schwierigkeiten zu überwinden. Es kann also vermutet werden, dass im bilingualen Mathematikunterricht die mathematische Kompetenz eine größere Rolle spielt als die fremdsprachliche Kompetenz.

- Bei der durchgeführten vergleichenden Analyse der deutschen und ungarischen mathematischen Fachsprache [S. 102] konnten in der deutschen sowie in der ungarischen mathematischen Fachsprache Begriffe gefunden werden, die über keine Entsprechung in der anderen Sprache verfügen [S. 109]. Dies wird als Beleg für die Kulturabhängigkeit der Mathematik[114] interpretiert.

[114] Vgl. Die Diskussion um die Kulturabhängigkeit-Kulturunabhängigkeit der Mathematik in der einschlägigen Literatur [S. 58]

8. Zusammenfassung, Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine spezielle Form des bilingualen Mathematikunterrichts, nämlich der nichtfachspezifische Mathematikunterricht im Hochschulbereich näher unter die Lupe genommen.
Die Arbeit wurde neben persönlichem Interesse durch die mangelnde theoretische Grundlegung der durchaus vorhandenen bilingualen Unterrichtspraxis motiviert. Es war primär das Ziel, zur theoretischen Begründung des bilingualen Mathematikunterrichts beizutragen, was als Ausgangspunkt für weitere Forschungen in diesem Bereich dienen kann. Ein sekundäres Ziel der Arbeit bestand darin, durch Untersuchungen im Bereich des bilingualen Mathematikunterrichts je nach Möglichkeit die herkömmliche Mathematikdidaktik mit neuen Impulsen zu bereichern.
Die durchgeführte Forschung bezog sich in erster Linie auf bilingualen nichtfachspezifischen Mathematikunterricht im Hochschulbereich. In diesem Kontext wurden die Forschungsfragen untersucht, ob die Verwendung einer Fremdsprache im Mathematikunterricht einen Einfluss auf die erworbenen mathematischen Kenntnisse hat und wenn ja, in welcher Hinsicht; ferner welche speziellen Schwierigkeiten im bilingualen Mathematikunterricht auftauchen bzw. inwieweit es möglich ist, ihn effektiver zu gestalten.
Um an diese Forschungsfragen wissenschaftlich herangehen zu können, wurde bezüglich des nichtfachspezifischen bilingualen Mathematikunterrichts im Hochschulbereich ein theoretischer Rahmen entwickelt. Dabei wurde versucht, das komplexe Wirkungssystem zu überblicken, in dessen Schnittpunkt der nichtfachspezifische bilinguale Mathematikunterricht steht. Charakteristika und Zielsetzungen der Hochschulausbildung, des Mathematikunterrichts, insbesondere des Analysisunterrichts wurden dargestellt, mathematische und fremdsprachliche Kompetenz thematisiert und kognitive Komponenten des mathematischen Wissens ausführlich behandelt. Ferner wurde ein Überblick über den aktuellen Stand des bilingualen Unterrichts unter spezieller Berücksichtigung des bilingualen Mathematikunterrichts gegeben und die einschlägige Fachliteratur recherchiert.
Anhand des entwickelten theoretischen Rahmens und der Literaturrecherche wurden die anfangs formulierten Forschungsfragen als drei Forschungshypothesen präzisiert. Erstens wurde die Vermutung formuliert, dass es qualitative Unterschiede zwischen fremdpsrachig und muttersprachlich erworbenen mathematischen Kenntnisse gibt, und sich diese Unterschiede insbesondere im prozeduralem bzw. konzeptuellem Wissen, in erreichten Kompetenzstufen und in der Stabilität neu erworbener mathematischer Begriffe bemerkbar machen. Zweitens wurde die Vermutung zum Ausruck gebracht, dass sich Verstehensschwierigkeiten und deren sprachliche oder mathematische Herkunft beim bilingualen mathematischen Wissenserwerb diagnostizieren lassen. Drittens wurde formuliert, dass eine bewusste zweisprachige Unterrichtsführung im bilingualen Mathematikunterricht dazu beitragen kann, mathematische Inhalte besser zu verarbeiten, worunter eine bewusste Ermittlung und Thematisierung derjenigen Begriffe verstanden wurde, deren Bedeutung eine Kontrastierung mit der jeweils anderen Sprache fördern kann.

Zur punktuellen Überprüfung der von mir formulierten Hypothesen wurden drei Untersuchungen durchgeführt: eine theoretische und zwei empirische. Eine Fallstudie, die unter Studenten der deutsch- und ungarischsprachigen Ausbildung an der Wirtschaftshochschule Budapest im Jahre 2004 durchgeführt wurde, nahm auf die Hypothese 1 Bezug. In einer weiteren Fallstudie, an der ungarische Studenten der Friedrich-Schiller-Universität Jena teilgenommen haben, wurde beabsichtigt, die Plausibilität der Hypothese 2 zu testen. Ferner wurde die deutsche und die ungarische mathematische Fachsprache unter dem Aspekt verglichen, inwieweit fachsprachliche Ausdrücke in der einen Sprache geeignet sind, das Verstehen entsprechender Ausdrücke in der jeweiligen anderen Sprache zu fördern, es ging also um eine theoretische Überprüfung der Hypothese 3.
Die durchgeführten Untersuchungen stützten zumindest teilweise oder ganzheitlich jede Aussage der Hypothesen.
Die Ergebnisse der Fallstudie an der Wirtschaftshochschule Budapest zeigten, dass es qualitative Unterschiede in der Leistung von Probanden der fremdsprachigen und der muttersprachlichen Ausbildung geben kann. Es konnten hier Unterschiede sowohl im prozeduralen-konzeptuellen Bereich, als auch in den erreichten Kompetenzstufen sowie in der Stabilität der neu erworbenen Begriffe nachgewiesen werden. Bezüglich der Kompetenzstufen konnte allerdings keine einheitliche Tendenz erfasst werden. Somit wurde die Hypothese 1 gestützt.
Im Rahmen der an der Friedrich-Schiller-Universität Jena durchgeführten Fallstudie konnten in einem mehrschrittigem Prozess Verstehensschwierigkeiten beim bilingualem mathematischen Wissenserwerb diagnostiziert werden und es konnte überwiegend auch entschieden werden, ob diese Schwierigkeiten sprachlicher oder mathematischer Herkunft sind. Diese Ergebnisse wurden als Stütze für die Hypothese 2 interpretiert und sie wurde somit nicht verworfen.
Im Rahmen der vergleichenden Analyse der deutschen und ungarischen mathematischen Fachsprache konnten in beiden Sprachen Bezeichnungen ermittelt werden, deren Bezug zur Begriffsseite des Wortes durch die Heranziehung der anderen Sprache gefördert werden kann. Dies wurde derart interpretiert, dass es in deutsch-ungarischem Kontext die theoretische Möglichkeit besteht, durch eine bewusste zweisprachige Unterrichtsführung die kognitive Verarbeitung mathematischer Inhalte zu fördern, somit wurde die Hypothese 3 ebenfalls nicht verworfen.
Die durchgeführten Untersuchungen liessen einige weitere Fragen offen. So blieb beispielsweise die Frage unbeantwortet, welche Gründe bei den gefundenen Unterschieden zwischen fremdsprachig und muttersprachlich erworbenen mathematischen Kenntnissen eine Rolle spielen konnten, bzw. ob auch eine empirische Überprüfung der in der Hypothese 3 formulierten Aussage diese bestätigen kann. Ferner erbrachten die durchgeführten Untersuchungen einige weitere Ergebnisse, die weitere Zusammenhänge bezüglich des bilingualen Mathematikunterrichts vermuten lassen. Als Ausgangspunkt für weitere Forschungen können u. a. folgende Vermutungen aufgeführt werden:

- Lernende der fremdsprachigen Ausbildung im Hochschulbereich sind motivierter als Lernende der muttersprachlichen Ausbildung.
- Bilingual Lernenden bereitet Schwierigkeiten, mathematische Inhalte aus dem einen Repräsentationsmodus in den anderen zu übersetzen (insbesondere aus

symbolischem in sprachlichen), bzw. mit komplexen Sachverhalten umzugehen.

- Die Übertragung mathematischer Inhalte in verschiedene Repräsentationsmodi bzw. die Einsetzung sprachlich abgestufter Fassungen desselben Textes sind geeignete Mittel zur Diagnostik von Verstehensschwierigkeiten im bilingualen Mathematikunterricht.
- Durch eine sprachliche Abstufung im bilingualen Mathematikunterricht eingesetzter Texte können nicht nur sprachliche sondern auch fachliche Schwierigkeiten gemildert werden.
- Lernende mit einer hohen mathematischen Kompetenz aber niedriger fremdsprachlicher Kompetenz sind fähig, sprachlichen Schwierigkeiten zu überwinden, während Lernende mit einer hohen fremdsprachlichen aber niedrigen mathematischen Kompetenz nicht fähig sind, mathematische Schwierigkeiten zu überwinden. Es kann also vermutet werden, dass im bilingualen Mathematikunterricht die mathematische Kompetenz eine größere Rolle spielt als die fremdsprachliche Kompetenz.

Somit wurde das primäre Ziel der vorliegenden Arbeit bereits erreicht. Es wurden grundlegende Fragestellungen bezüglich des bilingualen Mathematikunterrichts untersucht, ferner aber auch weitere offene Fragen ermittelt, die als Ausganspunkt für zukünftige Forschungen dienen können. Es soll auch betont werden, dass auch ein breites empirisches Instrumentarium bezüglich des bilingualen Mathematikunterrichts entwickelt wurde – man denke an den empirischen Vergleich von Kompetenzstufen, von prozeduralem und konzeptuellem Wissen, von der Stabilität von Begriffen und von begangenen Fehlern in der Fallstudie an der Wirtschaftshochschule Budapest bzw. an das diagnostische Verfahren in der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena –, auf welche zukünftige Forschungen auf diesem Gebiet zurückgreifen können.

Einige Ergebnisse der Untersuchungen deuten auf von der Unterrichtssprache unabhängige Zusammenhänge hin. Man kann z. B. vermuten, dass in einer nichtfachspezifischen Mathematikausbildung an Fachhochschulen, also in einer Fachhochschulausbildung, wo Mathematik als Nebenfach unterrichtet wird, der genetische Ansatz [S. 42] das Verhältnis zwischen dem konzeptuellen und dem prozeduralen Wissen charakterisiert. Dieses Ergebnis und weitere ähnliche Ergebnisse können neue Aspekte für die herkömmliche Mathematikdidaktik bedeuten, womit auch das sekundäre Ziel der vorliegenden Arbeit verwirklicht wurde. Zusammenfassend kann die durchgeführte Forschung also als erfolgreich bewertet werden.

9. Összefoglalás

Dolgozatomban a kéttannyelvű matematikaoktatás egy kis szeletével, a felsőfokú, nem szakirányú kéttannyelvű matematikaoktatással foglalkoztam.

A dolgozat elkészítését személyes érintettség mellett elsősorban a meglévő kéttannyelvű oktatási gyakorlat hiányos elméleti megalapozottsága indokolta. Bár a két-, ill. többnyelvű oktatás minden kontinensen jelen van, Európában pedig alig akad olyan ország, ahol a kéttannyelvű oktatás ne lenne szerves része az oktatási rendszernek, egyelőre hiányoznak annak didaktikai alapjai. Mivel bármiféle kéttannyelvű szaktárgyi oktatás esetén elsődlegesen a szaktárgy oktatásáról van szó, így elsősorban a megfelelő szakdidaktika hivatott arra, hogy megalapozza a speciális kéttannyelvű oktatási forma didaktikáját. Ebből kifolyólag alapvetően a matematikadidaktika feladata, hogy a kéttannyelvű matematikaoktatás didaktikájának alapjait lefektesse. Kutatásom elsődleges célja abban állt, hogy hozzájáruljon ehhez a megalapozáshoz, és kiindulópontként szolgáljon további, a kéttannyelvű matematikaoktatásra vonatkozó kutatásokhoz. Ugyanakkor az is kiderült, hogy a kéttannyelvű matematikaoktatás vizsgálata új impulzusokat adhat a hagyományos egynyelvű matematika didaktikának is, többek között azáltal, hogy betekintést nyújt a matematikai fogalomalkotás, ill. a matematikatanulás közben lezajló kognitív folyamatokba, valamint rávilágít a szaknyelv matematikatanítás és -tanulás során betöltött szerepére és fontosságára. Így kutatásom másodlagos célja az volt, hogy a kéttannyelvű matematikaoktatás vizsgálatán keresztül lehetőség szerint új aspektusokkal gazdagítsa a matematikadidaktika hagyományos kérdésfelvetéseit.

A kéttannyelvű matematikaoktatás felsőfokú, nem szakirányú környezetben történő vizsgálata több szempontból is indokolt. A felsőfokú, nem szakirányú matematikaoktatás ugyanis a matematika néhány jól körülhatárolható részterületére – elsősorban analízisre, valószínűségszámításra – koncentrálódik, ezeken a területeken belül a középiskolai matematika fogalmaiból kiindulva azok általánosításán, ill. keresztkapcsolatok létrehozásán keresztül juttat újabb, mélyebb ismeretekhez. Ebben a helyzetben, ha a meglévő fogalmi bázis anyanyelvű, de a ráépülő ismeretek megszerzése idegen nyelven történik, elemi módon vizsgálható az idegen nyelv hatása a matematikatanulás folyamatára, a matematikai ismeretszerzésre és a matematikai fogalomalkotásra. Mindezek alapján dolgozatomban döntő többségében kéttannyelvű felsőfokú, nem szakirányú matematikaoktatás keretében végzett vizsgálatokon keresztül kerestem arra a választ, hogy hat-e, és ha igen, hogyan az idegen nyelv használata a megszerzett matematikai ismeretekre, az elsajátított matematikai fogalmakra, milyen speciális nehézségek merülnek fel a kéttannyelvű matematikaoktatás során, ill. hogy hogyan lehetne hatékonyabbá tenni azt.

Dolgozatom első felében áttekintettem azt az összetett hatásrendszert, amelynek metszetében a kéttannyelvű felsőfokú, nem szakirányú matematikaoktatás áll. A felsőfokú oktatás részeként szervezésében nyilvánvalóan szerepet játszanak a felsőoktatás jellemzői, annak célkitűzései, hatnak rá az oktatás, azon belül a felsőoktatás változásai. A matematikaoktatás részeként illeszkedik annak hagyományaihoz, jellemzőihez és célkitűzéseihez. Mivel vizsgálataimban elsősorban az analízis témakörére szorítkoztam, így áttekintettem a matematikaoktatáson belül az analízis oktatásának jelentőségét, sajátosságait, felépítésének lehetőségeit, valamint rámutattam arra, hogy a matematikai analízis nem csak olyan eszközrendszert jelent, amely rendkívül alkalmas többek között gazdasági problémák modellezésére és megoldására, hanem olyan szemléletmódot is közvetít, amely hozzájárulhat további fontos kompetenciák (kulcs-, ill. munkahelyi kompetenciák) fejlesztéséhez. A Budapesti Gazdasági Főiskola Kereskedelmi, Vendéglátóipari és Idegenforgalmi Főiskolai Karának példáján keresztül megvizsgáltam a fentiek gyakorlati megvalósulását és kis kitérőként javaslatot tettem arra, hogy hogyan lehetne gazdasági és matematikai problémák szorosabb összekapcsolásával az analízisoktatás célkitűzéseihez közelebb kerülni. A kéttannyelvű matematikaoktatás tanulói oldalához visszatérve áttekintettem a matematikai és az idegen nyelvi kompetencia jellemzőit és szintjeit, ill. megvizsgáltam a matematikai tudás kognitív összetevőit. Ez utóbbit egy olyan modellen keresztül mutattam be, amely ötvözi a megértés hierarhikusan egymásra épülő szintjeit, az ún. Bloom-féle taxonómiát a procedurális-konceptuális tudás elméletével. Mivel a kéttannyelvű felsőfokú, nem szakirányú matematikaoktatás nem csak a felsőoktatás és a matematikaoktatás része, hanem a kéttannyelvű szaktárgyi oktatás és azon belül is a kéttannyelvű matematikaoktatás egy speciális formája is, így a fentieken túlmenően áttekintettem a kéttannyelvű szaktárgyi oktatás európai és magyarországi történetét, ill. jellemzőit, valamint a kéttannyelvű matematikaoktatás európai helyzetét, és az ezzel kapcsolatos kutatásokat.

Az elméleti háttér és a szakirodalmi áttekintés alapján a fent megfogalmazott kutatási kérdéseket a következő három kutatási hipotézisként pontosítottam:

1. Minőségében eltérőek az anyanyelven, ill. az idegen nyelven elsajátított matematikai ismeretek.

Mivel érdeklődésem középpontjában az idegen nyelv matematikai fogalomalkotásra, ill. a matematikai ismeretszerzés kognitív folyamataira gyakorolt hatása állt, így ezt a hipotézist a következő további három alhipotézisre bontottam:

- *1.1.* Anya-, ill. idegen nyelven elsajátított matematikai ismeretek esetében eltérés mutatkozik procedurális, ill. konceptuális tudás kiépülésében és azok kapcsolatában.
- *1.2.* Anya-, ill. idegen nyelven elsajátított matematikai ismeretek esetében eltérés mutatkozik a matematikai kompetencia fejlődésében.
- *1.3.* Anya-, ill. idegen nyelven elsajátított matematikai fogalmak esetében eltérés mutatkozik a fogalmak stabilitásában és tisztaságában.

Továbbá:

2. A kéttannyelvű matematikaoktatás során felmerülő megértési nehézségek esetében diagnosztizálható, hogy ezek matematikai, vagy nyelvi eredetűek-e.

3. Kéttannyelvű matematikaoktatás esetén a tudatos kétnyelvű óravezetés segítheti a közvetítendő matematikai ismeretek megértését.

Ennek a hipotézisnek a következő két alhipotézisét fogalmaztam meg:

- *3.1.* Kéttannyelvű matematikaoktatás esetén segítheti a közvetítendő matematikai ismeretek megértését, ha feltárjuk és tudatosan tárgyaljuk a tanórán azokat a matematikai fogalmakat, amelyeket az idegen nyelv szabatosabban fejez ki, mint az anyanyelv, ill. fordítva, ahol az anyanyelv kifejezőbb, szabatosabb az idegen nyelvvel szemben.

3.2. Kéttannyelvű matematikaoktatás esetén segítheti a közvetítendő matematikai ismeretek megértését, ha feltárjuk és tudatos tárgyaljuk a tanórán azokat a fogalmakat, amelyek szaknyelvi jelölésében anyanyelven megértést zavaró nyelvi tényezők (interferencia, többjelentésű szavak) fordulhatnak elő, míg az idegen nyelvű megfelelők között ezek a jelenségek nem állnak fenn, ill. fordítva, idegen nyelven előfordulhatnak megértést zavaró nyelvi tényezők, de az anyanyelvi megfelelőkre mindez nem áll fenn.

A megfogalmazott hipotézisek vizsgálatára három különböző, két gyakorlati és egy elméleti kutatást végeztem. A Budapesti Gazdasági Főiskola Kereskedelmi, Vendéglátóipari és Idegenforgalmi Főiskolai Karának (a továbbiakban: BGF-KVIFK) elsőéves hallgatói körében 2004-ben készített feladatlapos felmérés az *1.* hipotézis vizsgálatára irányult. A magyar, ill. német nyelvű képzés hallgatóinak teljesítményét a sorozat témakörére vonatkozóan összehasonlítva arra kerestem a választ, hogy idegen nyelvű matematikaoktatás esetén a hallgatók matematikára vonatkozó procedurális ill. konceptuális tudása eltér-e az anyanyelvű oktatásban részesült hallgatókétól, és ha igen, milyen tekintetben; eltérő-e a kapcsolat a procedurális és a konceptuális tudás között az anyanyelvű képzés hallgatóihoz képest; eltérnek-e a hallgatók által elért kompetenciaszintek az anyanyelvű oktatásban részesült hallgatók kompetenciaszintjeitől, és ha igen, milyen irányban és mértékben; továbbá, hogy van-e különbség az újonnan elsajátított fogalmak stabilitásában idegen nyelvű ill. anyanyelvű óravezetés esetén. A jénai Friedrich-Schiller-Universität-en (a továbbiakban: jénai FSU) 2008-ban készített esettanulmány célja a *2*. hipotézis vizsgálata volt. Két magyar anyanyelvű hallgató angol nyelvű matematikai ismeretszerzésének során megpróbáltam az előforduló megértési nehézségeket nyomon követni, ill. diagnosztizálni, hogy azok matematikai vagy nyelvi hiányosságokban gyökereznek-e. Az elvégzett harmadik kutatás elméleti jellegű: A magyar és a német – elsősorban analízisre vonatkozó – matematikai szaknyelvet hasonlítottam össze abból a szempontból, hogy előfordulnak-e ezekben a nyelvekben olyan nyelvi jelenségek, ahol a másik nyelvvel történő szembesítés segíthet a háttérben húzódó matematikai tartalmak megértésében. Az összehasonlítás során két fő területre összpontosítottam: Léteznek-e egyrészt a magyar matematikai szaknyelvben olyan szakkifejezések, amelyek német megfelelője szabatosabb, erősebb kifejezőerővel bír, valamint fordítva: léteznek-e a német matematikai szaknyelvben olyan terminusok, amelyek magyar megfelelője szabatosabb? Másrészt léteznek-e a magyar matematikai szaknyelvben olyan szakszavak, amelyek adott esetben gátolhatják a mögöttes matematikai fogalmak megértését, de a német megfelelő(k)re mindez nem áll fenn, valamint fordítva: léteznek-e a német matematikai szaknyelvben olyan terminusok, amelyek adott esetben gátolhatják a mögöttes matematikai fogalmak megértését, de a magyar megfelelő(k)re ez nem jellemző.

Az elvégzett kutatások eredményei mindhárom hipotézis állítását részben vagy egészben igazolták.

A BGF-KVIFK-on végzett feladatlapos felmérés eltérést mutatott ki az anya-, ill. idegen nyelvű képzés hallgatóinak teljesítménye között, bár egységes tendencia nem volt felismerhető. Az idegen nyelvű képzés hallgatói valamivel eredményesebbek voltak a procedurális tudás tekintetében, de konceptuális tudásuk összességében lényegesen alacsonyabb volt, mint az anyanyelvű képzésben részt vevőké. Ugyanakkor a két tudásfajta közötti kapcsolat mindkét csoportban azonosnak mutatkozott, így az *1.1.* alhipotézis állításának első része megerősítést nyert, de másik része nem igazolódott be. Ezért ezen alhipotézis első részét elfogadtam, míg a másodikat elvetettem. Ennek a kutatásnak további eredménye, hogy az idegen nyelvű képzés hallgatói számottevően magasabb kompetenciaszinteket értek el bizonyos fogalmakkal kapcsolatban (monotonitás, korlátosság), míg más fogalmakra vonatkozóan (konvergencia) nem jelentősen, de alulmaradtak az anyanyelvű csoporttal szemben. További kutatás tárgya lehet annak feltárása, hogy mely okok húzódnak meg a tapasztalt jelenség mögött. A kimutatható különbségek alapján az *1.2.* alhipotézist is elfogadtam. Az újonnan elsajátított fogalmak stabilitására vonatkozó vizsgálat azzal az eredménnyel szolgált, hogy az idegen nyelvű képzés hallgatói között arányában többen akadnak olyanok, akik stabil konvergenciafogalommal rendelkeznek, mint az anyanyelvű képzésben, ezt az. *1.3.* alhipotézis igazolásaként értékeltem. Szintén további kutatás tárgyát képezheti annak a vizsgálata, hogy ez a jelenség milyen okokra vezethető vissza.

A jénai FSU-en készített esettanulmány keretében sikerült egy többlépcsős folyamatban angol nyelvű környezetben olyan megértési nehézségeket diagnosztizálni, amelyek két magyar anyanyelvű hallgató matematikai ismeretszerzése során merültek fel. A vizsgálat során jórészt az is eldönthető volt, hogy ezek a nehézségek nyelvi vagy matematikai hiányosságokban gyökereznek-e. Ezeket az eredményeket a 2. hipotézis megerősítéseként értékeltem.

A magyar és a német matematikai szaknyelv – elsősorban az analízis témakörére szorítkozó – összehasonlítása azt mutatta, hogy mind a magyar, mind a német matematikai szaknyelvben előfordulnak olyan terminusok, amelyek kevésbé kifejezőek, mint a másik nyelv megfelelő szakkifejezése. Feltártam továbbá olyan magyar nyelvű matematikai szakszavakat, amelyek jelentése nyilvánvalóbbá válik bizonyos – nem feltétlenül ugyanarra a fogalomra vonatkozó – német nyelvű matematikai szakkifejezések ismeretével. Fellelhetőek voltak ezeken túlmenően mind a magyar mind a német matematikai terminusok között olyanok, amelyek adott nyelven belüli megértését valamilyen nyelvi tényező nehezíti, pl. szaknyelven belüli interferencia vagy több jelentés, de a másik nyelv megfelelő hangalakjaira mindez nem jellemző. Feltételezhető tehát, hogy ezeknek a szakszavaknak és jelentésüknek kontrasztív kétnyelvű tárgyalása a kéttannyelvű matematikaoktatás keretében hozzájárulhat az interferenciák elkerüléséhez és a több különböző jelentés közül a megfelelő kiválasztásához. Mindezek tükrében a. *3.1.* és *3.2.* alhipotézisekkel kapcsolatban azt állapítottam meg, hogy magyar-német viszonylatban elméleti szinten valóban segítheti matematikai tartalmak megértését egy tudatos kétnyelvű óravezetés, elméleti síkon tehát igazolást nyertek az alhipotézisek állításai. Hogy ezek az állítások gyakorlati szinten is megállják-e a helyüket, további, empirikus vizsgálatot igényel.

A fentiek alapján látható, hogy az elvégzett vizsgálatok nem csak olyan közvetlen eredményekkel szolgáltak, amelyek alátámasztják, illetve egy esetben részben cáfolják az általam megfogalmazott hipotézisek állításait, hanem további kutatási kérdéseket vetnek fel. Utalás történt már arra, hogy további kutatás tárgyát képezheti a kapott eredmények hátterében húzódó okok kiderítése, például annak a vizsgálata, hogy miért érnek el bizonyos fogalmakkal kapcsolatban magasabb, míg más fogalmakkal kapcsolatban alacsonyabb kompetenciaszinteket az idegen nyelvű képzésben részt vett hallgatók, mint az anyanyelvű képzésben részesültek. Összefügg-e mindez esetleg a fogalmak összetettségével, vagy más tényezők játszanak ennél a jelenségnél közre? Hasonlóan vetődött fel az a kérdés is, hogy milyen okokra vezethető az a tény vissza, hogy a kompetenciaszintekkel kapcsolatos eredményeknek látszólag ellentmondva az idegen nyelvű képzés hallgatói rendelkeztek stabilabb konvergenciafogalommal. További kézenfekvő kérdésnek bizonyult annak a vizsgálata, hogy a német-magyar viszonylatban elméleti síkon indokolt kontrasztív kétnyelvű óravezetés a gyakorlatban is hozzájárul-e a matematikai fogalmak pontosabb megértéséhez.

Mindezeken túlmenően az elvégzett vizsgálatok néhány olyan további eredménnyel is szolgáltak, amelyek további összefüggéseket sejtetnek, ezek ellenőrzése szintén újabb kutatást igényel. A következőkben ezeket az eredményeket foglalom össze.

- A BGF-KVIFK-án végzett felmérésben mindkét csoportban azt tapasztaltam, hogy a procedurális tudás szükséges, de nem elégséges feltétele a konceptuális tudásnak. Ennek alapján megfogalmazható az a sejtés, hogy felsőfokú nem szakirányú képzésben részt vevő hallgatók számára az oktatás nyelvétől függetlenül az analízis érintett területein belül a két tudásfajta között ez a kapcsolat dominál. Utalni szeretnék arra, hogy a sejtés beigazolódása komoly ellenérvet szolgáltatna az érintett tananyag jelenlegi deduktív építkezésével és a deduktív óravezetéssel szemben.
- Ugyanebben a feladatlapos felmérésben tapasztaltam, hogy az anyanyelvű képzésben részt vevő hallgatók között lényegesen magasabb azoknak az aránya, akik adott matematikai fogalmakkal kapcsolatban egyetlen részfeladatot sem oldottak meg, mint az idegen nyelvű képzés hallgatóinál. Sejtésem, hogy ez a tény a hallgatók felsőoktatással, ill. matematikatanulással kapcsolatos motivációjával állhat összefüggésben.
- Szembeötlő volt ugyanezen felmérés a során a korlátosság fogalmára vonatkozó feladatok sikertelensége. Mivel mind az anyanyelvű mind az idegen nyelvű képzés hallgatói egyaránt gyengén teljesítettek ezekben a részfeladatokban, feltételezhető, hogy szintén az oktatás nyelvétől független jelenséggel állunk szemben. Az okok véleményem szerint a tananyag felépítésében, tanórai tárgyalásában, ill. esetleg a feladatlap összeállításában keresendők.
- Szintén a BGF-KVIFK-án végzett feladatlapos felmérés eredménye annak igazolása, hogy idegen nyelvű oktatásban részt vett hallgatók lényegesen több hibát követnek el matematika feladatok megoldása során, mint az anyanyelvű oktatás hallgatói. Az elkövetett hibák részletes elemzése azt mutatta, hogy különös gondot jelent szimbolikus matematikai összefüggéseket nyelvi reprezentációba átülteni, ill. összetett matematikai tételeket, összefüggéseket alkalmazni. Ezek a tények olyan jelzésként értelmezhetőek, amelyek felhívják a figyelmet a kéttannyelvű matematikaoktatás gyenge pontjaira és rámutatnak arra, hogy az oktatáson belül mely területekre érdemes különös gondot fordítani.

- A jénai FSU-en készített esettanulmány során geometriai fogalmak és összefüggések több különböző reprezentációjának, ill. különböző nyelvi nehézségű szövegek használata alkalmas eszköznek bizonyult idegen nyelvű matematikai ismeretszerzés folyamán előforduló, különböző eredetű megértési nehézségek diagnosztizálására. Ezek alapján megfogalmazható az a sejtés, hogy ezek a módszerek a matematika más részterületein belül is jól alkalmazhatóak megértési nehézségek feltárására. Továbbmenve, a vizsgálat során különböző nyelvi nehézségű szövegek használata hozzájárult bizonyos matematikai és nyelvi nehézségek eloszlatásához is, így feltételezhető, hogy ez a módszer hatékony eszköz lehet a kéttannyelvű matematikaoktatásban. Ezek a sejtések is további vizsgálatra szorulnak.
- Szintén a jénai FSU-en készített esettanulmány alapján fogalmazható meg a sejtés, hogy idegen nyelvű matematikai ismeretszerzés során magas matematikai kompetencia képes átsegíteni nyelvi eredetű megértési nehézségeken, míg magas idegen nyelvi kompetenciával rendelkezve nem leszünk képesek matematikai eredetű nehézségeket, hiányosságokat áthidalni. Ennek a sejtésnek az igazolása is további empirikus kutatást igényel, de utalnék arra, hogy mindez azt is jelentené, hogy a kéttannyelvű matematikaoktatásban a matematikai kompetencia fontosabb szerepet játszik, mint az idegen nyelvi. Ennek egy lehetséges következménye a kéttannyelvű oktatás bemeneti feltételeinek felülvizsgálatában állhat.
- A magyar és a német matematikai szaknyelv összehasonlítása során sikerült feltárni olyan szakkifejezéseket és ezen keresztül olyan fogalmakat, amelyek csak az egyik nyelven használatosak, a másik nyelvben nincs megfelelőjük. Ez a tény alátámasztja azokat a nézeteket, melyeket magam is osztok, és amelyek szerint a matematika függ az adott kultúrától és minden egyes nyelven más-más árnyalatot kap.

Megállapítható tehát, hogy az elvégzett kutatás a kéttannyelvű matematikaoktatással kapcsolatos alapvető kérdéseket vizsgált. A kutatás megmutatta, hogy van különbség a kéttannyelvű és az anyanyelvű matematikai ismeretszerzés között, de ugyanakkor irányt mutatott arra nézve is, hogy mely pontokon lehet érdemes eltérni a hagyományos matematika didaktikától, hogy hatékonyabbá tegyük a kéttannyelvű oktatást. Mindemellett a vizsgálatok jelentős számú további kérdést vetettek fel, amelyek kiindulópontként szolgálhatnak jövőbeli kutatások számára. Ezzel jelen kutatás elérte elsődleges célját. Fontos kiemelni továbbá, hogy a kutatás során olyan diagnosztikai és kognitív matematikai teljesítményt összehasonlító gyakorlati eljárásokat sikerült kidolgozni – gondolva itt a BGF-KVIFK-n készített esettanulmány keretében kidolgozott eljárásokra, amelyek segítségével összehasonlíthatóak a matematikai fogalmakkal kapcsolatban elért kompetenciaszintek, egy adott témakörön belül megszerzett procedurális, ill. konceptuális tudás, az elsajátított matematikai fogalmak stabilitása, ill. a feladatmegoldás során elkövetett hibák mennyisége és minősége, valamint a jénai FSU-n elvégzett esettanulmány keretében kidolgozott diagnosztikai eljárásra –, amelyekre jövőbeli empirikus kutatások eredményesen nyúlhatnak vissza. A vizsgálatok során néhány olyan további eredmény is napvilágra került, amelyek az oktatás nyelvétől független összefüggésre utalhatnak, és ezáltal a hagyományos matematikadidaktika számára jelenthetnek új aspektusokat. Ezzel a kutatás másodlagos célja is megvalósult, így azt összességében eredményesnek értékelem.

10. Literaturverzeichnis

137/2008 (V.16.) Kormányrendelet, 1§, (6).

Abendroth-Timmer, D./Bonnet, A./Breidbach, S./Hoffmann, R./Kircher, E./Küster, L./Rymarczyk, J./Vollmer, H.J./Zydatiß, W. (2004): Didaktiken im Dialog - für eine integrative Didaktik des bilingualen Unterrichts. In: Bonnet, A./Breidbach, S. (Hrsg.): Didaktiken im Dialog. Konzepte des Lehrens und Wege des Lernens im bilingualen Sachfachunterricht. Frankfurt am Main: Peter Lang, S. 13-28.

Ambrus, A. (1995): Bevezetés a matematikadidaktikába. Budapest: Eötvös Kiadó.

Anderson, L. W./Krathwohl, d. R./Airasian, P. W./Cruikshank, K. A./Mayer, R. E./Pintrich, P. R./Raths, J./Wittrock, M. C. (Hrsg.) (2001): A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing. A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives. New York et al.: Addison Wesley Longman.

Atkinson, R. L./Atkinson, R. C./Smith, E. E./Bem, D. J. (1997): Pszichológia. Budapest: Osiris.

Bach, G. (2000): Bilingualer Unterricht: Lehren-Lernen-Forschen. In: Bach, G./Niemeier, S. (Hrsg.): Bilingualer Unterricht. Grundlagen, Methoden, Praxis, Perspektiven. Frankfurt am Main: Peter Lang, S. 11-26.

Bach, G./Niemeier, S. (Hrsg.) (2002): Bilingualer Unterricht. Grundlagen, Methoden, Praxis, Perspektiven. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Bartha, Cs. (2005): A kétnyelvűség alapkérdései. Beszélők és közösségek. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Barwell, R. (1999a): "Give me a number that is less then 9": Making sense of mathematics in an additional language. In: Bills, L. (Hrsg.): Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 19, H. 3, S. 43-48.

Barwell, R. (1999b): How many burgers can a human being eat? Writing word problems when English is an additional language. In: Rowland, T. (Hrsg.): Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 20, H. 3, S. 1-6.

Barwell, R. (1999c): Plus, and and add: Addition and English additional language learners of mathematics. In: Bills, L. (Hrsg.): Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 19, H. 3, S. 1-6.

Barwell, R. (2003): Linguistic Discrimination: an Issue for Research in Mathematics Education. In: For the Learning of Mathematics 23, H. 2, S. 37-43.

Barwell, R. (2004): ‚Guessing' in a year 1 mathematics lesson when english is an additional language. In: McNamara, O. (Hrsg.): Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 24, H. 1, S. 13-18.

Barwell, R. (2005): A framework for the comparison of PME research into multilingual mathematics education in different sociolinguistic settings. In: Chick, H. L./Vincent, J. L. (Hrsg.): Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2, Melbourne: PME, S. 145-152.

Barwell, R./Barton, B./Setati, M. (2007): Multilingual Issues in Mathematics Education: Introduction. In: Educational Studies in Mathematics 64, H. 2, S. 113-119.

Barwell, R./Setati, M. (2005): Multilingualism in mathematics education: A conversation between the north and the south. In: For the Learning of Mathematics 25, H. 1, S. 20-23.
Bauer, L. (1978): Mathematische Fähigkeiten. Mathematische Fähigkeiten in der Sekundarstufe II und ihre Bedeutung für das Lösen von Abituraufgaben. Paderborn: Ferdinand Schöningh.
BGF-KVIFK Módszertani Intézeti Tanszéki Osztály (2006): Gazdasági matematika 1. - általános leírás. Unter: http://web.kvif.bgf.hu/main.php?temp=institute_ subject.pge&lang=HUN&subid=862&inst_id=7 (letzter Zugriff am 22. 10. 2008)
BME Nemzetközi Igazgatóság (2008): Idegen nyelvű képzések a Műegyetemen – áttekintés. Unter: http://www.tanok.bme.hu/attekintes/index_hu.html (letzter Zugriff am 20.10.2008)
Bloom, B. S: (1956): Taxonomy of Educational Objectives. Handbook 1: Cognitive domain. New York: Longman.
Bloom, B. S. (1976): Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich. Weinheim: Beltz Studienbuch Verlag.
Blum, W./Drüke-Noe, Ch./Hartung, R./Köller, O.(Hrsg.) (2006): Bildungsstandards. Mathematik: konret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Berlin: Cornelsen.
Bonnet, A (2002): 47%-Das Spracherwerbspotenzial englischsprachigen Chemieunterrichts. In: Breidbach, S./Bach, G./Wolff, D. (Hrsg.): Bilingualer Sachfachunterricht: Didaktik, Lehrer-/Lernerforschung und Bildungspolitik zwischen Theorie und Empirie. Frankfurt am Main: Peter Lang, S. 125-139.
Breidbach, S. (2002): Bilingualer Sachfachunterricht als neues interdisziplinäres Forschungsfeld. In: Breidbach, S./Bach, G./Wolff, D. (Hrsg.): Bilingualer Sachfachunterricht: Didaktik, Lehrer-/Lernerforschung und Bildungspolitik zwischen Theorie und Empirie. Frankfurt am Main: Peter Lang, S. 11-27.
Breidbach, S./Bach, G./Wolff, D. (Hrsg.) (2002): Bilingualer Sachfachunterricht: Didaktik, Lehrer-/Lernerforschung und Bildungspolitik zwischen Theorie und Empirie. Frankfurt am Main: Peter Lang.
Butzkamm, W. (2002): Über die planvolle Mitbenutzung der Muttersprache im bilingualen Sachfachunterricht. In: Breidbach, S./Bach, G./Wolff, D. (Hrsg.): Bilingualer Sachfachunterricht: Didaktik, Lehrer-/Lernerforschung und Bildungspolitik zwischen Theorie und Empirie. Frankfurt am Main: Peter Lang, S. 97-113.
Byrnes, J. P./Wasik, B. A. (1991): Role of Conceptual Knowledge in Mathematical Procedural Learning. In: Developmental Psychology 27, H. 5, S. 777-786.
Carl Duisberg Centren: Online Einstufungstest Englisch und Deutsch. Unter: http://www.cdc.de/Einstufungstest-Englisch.1322.0.html (letzter Zugriff am 24. 03. 2009)
Carpenter, Th. P. (1986): Conceptual knowledge as a foundation for Procedural Knowledge. In: Hiebert, J. (Hrsg.): Conceptual and procedural knowledge: The case of Mathematics. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, S. 113-132.
Clarkson, P. C. (2005): Two perspectives of bilingual students learning mathematics in Australia: A discussion. In: Hewitt, D./Noyes, A. (Hrsg.): Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education, S. 33-40.

Clarkson, P. C. (2007): Australian Vietnamese Students Learning Mathematics: High Ability Bilinguals and Their Use of Their Languages. In: Educational Studies in Mathematics 64, H. 2, S. 191-215.

Claus, H. J. (1989): Einführung in die Didaktik der Mathematik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Curdes, B. (2008): Genderbewusste Mathematikdidaktik an der Fachhochschule. In: Zeitschrift für Hochschulentwicklung 3, Nr. 2, S. 17-29.

Csapó, B. (2001): A kognitív képességek szerepe a tudás szervezésében. In: Báthory, Z./Falus, I. (Hrsg.): Tanulmányok a neveléstudomány köréből. Budapest: Osiris, S. 270-293.

Csapó, B. (2002): A tudáskoncepció változása: nemzetközi és hazai helyzet. In: Új Pedagógiai Szemle, H. 2. S. 38-45.

Csernyák, L. (2006): Analízis. Matematika a közgazdasági alapképzés számára. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Czékmán, O. (2008a): Magyar matematikai terminusok német-magyar kontrasztív vizsgálata. In: Magyar Terminológia 2008/02, S. 217-242.

Czékmán, O. (2008b): Matematikai terminusok német-magyar kontrasztív vizsgálata. In: Sárdi, Cs. (Hrsg.): Kommunikáció az információs technológia korszakában. A XVII. MANYE Kongresszus előadásai. Pécs-Siófok: MANYE – Kodolányi János Főiskola, S. 466-471.

Dalton-Puffer, Ch./Smit, U. (2007): Introduction. In: Dalton-Puffer, Ch./Smit, U. (Hrsg.): Empirical Perspectivies on CLIL Classroom Discourse. Frankfurt am Main: Peter Lang, S. 7-23.

Danckwerts, R./Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. München: Spektrum Akademischer Verlag.

de Cillia, R. (1994): Was heißt hier eigentlich bilingual? Formen und Modelle bilingualen Sprachunterrichts. In: Koschat, F./Wagner, G. (Hrsg.): Bilinguale Schulen: Lernen in zwei Sprachen. Bildungskooperation mit Ungarn, Tschechien, und der Slowakei. Bilingualer Unterricht in Österreich. Wien: Bundesministerium für Unterricht und Kunst, S. 11-22.

Diegeser, A. (1988): Fremdsprachendidaktik und ihre Bezugswissenschaften: Einführung, Darstellung, Kritik, Unterrichtsmodelle. Stuttgart: Klett.

Engesser, H. (1996): Der kleine DUDEN Mathematik. Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich: Dudenverlag.

Észak-magyarországi Regionális Képző Központ: A kompetencia fogalmának értelmezése. Unter: http://www.erak.hu/szemelvenyek/kompetenciafoglom.pdf (letzter Zugriff am 18. 10. 2008)

European Comission (2006a): Content and language integrated learning (CLIL) at school in Europe. Country reports. Hungary. National description 2004/2005.

European Comission (2006b): Content and language integrated learning (CLIL) at school in Europe. Country reports. Unter: http://eacea.ec.europa.eu/portal/page/portal/Eurydice/PubContents?pubid=070EN&country=null (letzter Zugriff: 21.06.2009)

European Comission (2006c): Content and language integrated learning (CLIL) at school in Europe. Unter: http://eacea.ec.europa.eu/portal/page/portal/Eurydice/PubContents?pubid=071EN (letzer Zugriff: 21.06.2099)

Evans, S. W. (2007): Differential Performance of Items in Mathematics Assessment Materials for 7-Year-Old Pupils in English-Medium and Welsh-Medium Versions. In: Educational Studies in Mathematics 64, H. 2, S. 145-168.
Farrugia, M. T. (2002): The sharing of meaning of mathematical words in a bilingual classroom: A semiotic interpretation. In: Pope. S. (Hrsg.): Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 22, H. 3, S. 31-36.
Finkbeiner, C. (2002): Bilingualer Sachfachunterricht: eine Angelegenheit für alle. In: Finkbeiner, C. (Hrsg.): Bilingualer Unterricht. Lehren und Lernen in zwei Sprachen. Hannover: Schroedel, S. 5-7.
Finkbeiner, C./Fehling, S. (2002): Bilingualer Unterricht: Aktueller Stand und Implementierungsmöglichkeiten im Studium. In: Finkbeiner, C. (Hrsg.): Bilingualer Unterricht. Lehren und Lernen in zwei Sprachen. Hannover: Schroedel, S. 9-22.
Gálné Mészáros, B. (2007): Szaknyelvi előkészítés a magyar-német két tannyelvű gimnáziumokban. In: Új Pedagógiai Szemle , H. 3, S. 219-228.
Gnutzmann, K. (2007): Zur Einführung in den Themenschwerpunkt. Themenschwerpunkt: Fremdsprache als Arbeitssprache in Schule und Studium. In: Fremdsprachen Lehren und Lernen 36, S. 3-12.
Gorgorió, N. /Planas, N. (2001): Teaching mathematics in multilingual classrooms. In: Educational Studies in Mathematics 47, H.1, S. 7-33.
Gruber, H./Mandl, H. (1996): Das Entstehen von Expertise. In: Bierbaumer, N. (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie, Bd. 7. Lernen. Göttingen, Bern, Toronto, Seattle: Hogrefe, S. 583-615.
Gutstein, E. (2007): Multiple Language Use and Mathematics: Politicizing the Discussion. In: Educational Studies in Mathematics 64, H. 2, S. 243-246.
Haapasalo, L. (2003): The conflict between conceptual and procedural knowledge: Should we need to understand in order to be able to do, or vice versa? In: Haapasalo, L./Sormunen, K. (Hrsg.): Towards meaningful mathematics and science education. Proceedings on the IXX Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association. University of Joensuu, S. 1-20.
Haapasalo, L. (2003): Von der Katastrophe zum Erfolg mit den Brüchen – Ein möglicher Weg zur Lösung von Problemen der Bruchrechnung. In: Der Mathematikunterricht 49, H. 1, S. 58-69.
Haapasalo, L./Kadijevich, D. (2000): Two Types of Mathematical Knowledge and Their Relation. In: Journal für Mathematik-Didaktik 21, H. 2, S. 139-157.
Hajdú, N. (2005): A többnyelvűség és a többnyelvű oktatás. In: Új Pedagógiai Szemle , H. 3, S. 114-119.
Hartinger, A./Fölling-Albers, M. (2002): Schüler motivieren und interessieren. Ergebnisse aus der Forschung und Anregungen für die Praxis. Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.
Hasemann, K. (1986): Mathematische Lernprozesse. Analysen mit kognitionstheoretischen Modellen. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.
Hawker, S./Cowley, Ch. (Hrsg.) (1998): Quick Reference Dictionary& Thesaurus. New York: Oxford University Press.
Herber, H.-J./Vásárhelyi, É. (2005): Empirische Forschung in der Didaktik der Mathematik und ihre wissenschaftliche Dokumentation. In: Parisot, K. J./Vásárhelyi, É. (Hrsg.): Positionen – Mathematikdidaktik in Entwicklung. Salzburg: Abacus Verlag, S. 65-90.

Hessky, R./Knipf, E. (1998) (Hrsg.): Ein Textbuch zur Lexikologie. Budapest: Holnap Kiadó.
Heuser, H. (2006): Lehrbuch der Analysis. Teil 1. Wiesbaden: Teubner Verlag.
Hiebert, J./Lefevre, P. (1986): Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In: Hiebert, J. (Hrsg.): Conceptual and procedural knowledge: The case of Mathematics. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, S. 1-27.
Hildebrandt, S. (2002): Analysis 1. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.
Israel, E. (2006): The Official SAT Subject Tests in Mathematics Levels 1&2. Study Guide. USA: B&T.
Kadijević, D. /Krnjaić, Z. (2003): Is cognitive style related to link between procedural and conceptual mathematical knowledge? In: The teaching of mathematics 6, H. 2, S. 91-95.
Kadijevich, D. (1999): Conceptual tasks in mathematics education. In: The Teaching of Mathematics 11, H. 1, S. 59-64.
Kadijevich, D. (2003): Linking procedural and conceptual knowledge. In: Haapasalo, L./Sormunen, K. (Hrsg.): Towards meaningful mathematics and science education. Proceedings on the IXX Symposium of the Finnish Mathematics and Science Education Research Association. University of Joensuu, S. 21-28.
Kadijevich, D./Haapasalo, L. (2001): Linking procedural and conceptual mathematical knowledge through CAL. In: Journal of Computer Assisted Learning 17, S. 156-165.
Kazima, M. (2007): Malawian Student's Meanings for Probability Vocabulary. In: Educational Studies in Mathematics 64, H. 2, S. 169-189.
Koch, A./Bünder, W. (2006): Fachbezogener Wissenserwerb im bilingualen naturwissenschaftlichen Anfangsunterricht. In: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften 12, S. 67-76.
Kommission der Europäischen Gemeinschaften (2005): Vorschlag für eine Empfehlung des Europäischen Parlaments und des Rates zu Schlüsselkompetenzen für lebenslanges Lernen. Brüssel, 2005/0221 (COD).
Königs, F. G. (2000): Zur Einführung in den Themenschwerpunkt oder: Vom Positionspoker zur Positionsbestimmung. In: Fremdsprachen Lehren und Lernen 29, S. 3-7.
Königsberger, K. (1999): Analysis 1. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.
Koschat, F./Wagner, G. (Hrsg.) (1994): Bilinguale Schulen: Lernen in zwei Sprachen. Bildungskooperation mit Ungarn, Tschechien, und der Slowakei. Bilingualer Unterricht in Österreich. Wien: Bundesministerium für Unterricht und Kunst.
Kürschner, Wilfried (1997): Grammatisches Kompendium. Systematisches Verzeichnis grammatischer Grundbegriffe. Tübingen/Basel: Francke.
Laurén, Ch. (1994): Sprachbad oder Immersion – eine kanadische (Neu-) Erfindung. In: Koschat, F./Wagner, G. (Hrsg.): Bilinguale Schulen: Lernen in zwei Sprachen. Bildungskooperation mit Ungarn, Tschechien, und der Slowakei. Bilingualer Unterricht in Österreich. Wien: Bundesministerium für Unterricht und Kunst, S. 23-29.
Leisen, J. (Hrsg.) (1999): Methoden Handbuch Deutschsprachiger Fachunterricht (DFU). Bonn: Varus Verlag.
Leisen, J. (2004): Der bilinguale Sachfachunterricht aus verschiedenen Perspektiven – Deutsch als Arbeitssprache, als Lernsprache, als Unterrichtssprache und

als Sachfachsprache im Deutschsprachigen Fachunterricht (DFU). In: Fremdsprache Deutsch 30, S. 7-14.
Le Pape Racine, Ch. (2006): Der stetige Aufstieg der Immersion in den Schulen Europas. In: Babylonia , H. 2, S. 17-20.
Lesznyák, M. (1996): Kétnyelvűség és kétnyelvű oktatás. In: Magyar Pedagógia 96, H. 3, S. 217-230.
Leuders, Timo (Hrsg.) (2003): Mathematikdidaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen.
Lorbeer, W. (2006a): Gibt es eine Didaktik bilingualen Mathematikunterrichts? Unter: https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~didaktik/doc/kolloquium/GibtEsDidaktik.pdf (letzter Zugriff am 08. 11. 2008)
Lorbeer, W. (2006b): Bilingual Mathematics - Arguments Pro. Unter: http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~didaktik/doc/kolloquium/Confutatio23_eng.pdf (letzter Zugriff am 08. 11. 2008)
Lutzeier, P. R. (1995): Lexikologie: Ein Arbeitsbuch. Tübingen: Stauffenburg Verlag.
Lück, H. E. (2002): Geschichte der Psychologie: Strömungen, Schulen, Entwicklungen. Grundriss der Psychologie Bd. 1. Stuttgart: Kohlhammer.
Maier, H./Schweiger, F. (1999): Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht. Wien: ÖBV.
Mäsch, N. (2007): Historische Entwicklung des bilingualen Lehrens und Lernens. Bilingualer deutsch-französischer Bildungsgang an Gymnasien. In: Mentz, O./Nix, S./Palmen, P. (Hrsg.): Bilingualer Unterricht in der Zielsprache Französisch. Entwicklung und Perspektiven. Tübingen: Gunter Narr Verlag, S. 23-40.
Mendes, J. R. (2007): Numeracy and Literacy in a Bilingual Context: Indogenous Teachers Education in Brazil. In: Educational Studies in Mathematics 64, H. 2, S. 217-230.
Meyerhöfer, W. (2004): Das Kompetenzstufenmodell von PISA: Eine empirische Dekonstruktion. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 381-384.
Meyerhöfer, W. (2005): Tests im Test. Das Beispiel PISA. Opladen: Verlag Barbara Budrich.
Mihály, I. (2006): Európai áttekintés a két tannyelvű oktatás tapasztalatairól. In: Új Pedagógiai Szemle, H. 5, S. 99-106.
Morgan, C. (2007): Who is not multilingual now? In: Educational Studies in Mathematics 64, H. 2, S. 239-242.
Moschkovich, J. (2007): Using Two Languages When Learning Mathematics. In: Educational Studies in Mathematics 64, H. 2, S. 121-144.
Movshovitz-Hadar, N./ Zaslavsky, O./Inbar, S.(1987): An Empirical Classification-Model of Errors in High School Mathematics. *In:* Journal of Research in Mathematics Education *18*, H 1, S. 3-14.
Müller, W. (1971): Bemerkungen zu den sprachlichen Ausdrucksformen der Mathematik. In: Sprachpflege, 1971/1, S. 9-14.
Nesher, P. (1986): Are Mathematical Understanding and Algorithmic Performance Related? In: For the Learning of Mathematics 6, H. 3, S. 2-9.
North, B./Avermaet, P. V./Figueras, N./Takala, S./Verhelst, N. (2005): Nyelvvizsgák szintillesztése a Közös Európai Referenciakerethez. Budapest: Nyelvvizsgát Akkreditáló Testület, PH Nyelvvizsgáztatási Akkreditációs Központ.

Novotná, J./Moraová, H. (2005): Cultural and linguistic problems in the use of authentic textbooks when teaching mathematics in a foreign language. In: Zeitschrift für Didaktik der Mathematik 37, H. 2, S. 109-115.
Nöth, W. (2000): Handbuch der Semiotik. Stuttgart/Weimar: Metzler. S. 340.
Oktatási és Kulturális Minisztérium (2001): Kéttannyelvű iskolák jegyzéke. Unter: http://www.okm.gov.hu/letolt/kozokt/kettannyelvu_isk adatok.pdf (letzter Zugriff am 23. 09. 2008)
Oktatási Minisztérium/Országos Felsőoktatási Felvételi Iroda (2003): Felsőoktatási felvételi tájékoztató 2004. Budapest: Magyar Hivatalos Közlönykiadó Kft.
Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung (2001): Lernen für das Leben. Erste Ergebnisse der internationalen Schulleistungsstudie PISA 2000. Paris: OECD.
Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung (2004): Lernen für die Welt von morgen. Erste Ergebnisse von PISA 2003. Paris: OECD.
Országh, L./Magay T. (1996): Angol-magyar kéziszótár. Budapest: Akadémiai Kiadó.
Országos Felsőoktatási Felvételi Iroda (2005a): Munkaerő-piaci elvárások felmérése 1. unter: http://www.eduport.hu/cikk.php?id=12692 (letzter Zugriff am 19. 10. 2008)
Országos Felsőoktatási Felvételi Iroda (2005b): Munkaerő-piaci elvárások felmérése 2. unter: http://www.eduport.hu/cikk.php?id=126923 (letzter Zugriff am 19. 10. 2008)
Országos Felsőoktatási Információs Központ: Vonalhúzási eredményekre vonatkozó statisztikák. Unter: http://felvi.hu/statisztika/statisztikak.ofi?mfa_id=1&stat=13 (letzter Zugriff am 11. 12. 2008)
Otten, E./Wildgage, M. (2003): Content and Language Integrated Learning. Eckpunkte einer "kleinen" Didaktik des bilingualen Sachfachunterrichts. In: Wildhage, M./Otten, E. (Hrsg.): Praxis des bilingualen Unterrichts, Berlin: Cornelsen Verlag, S. 12-45.
Palmiter, J. (1991): Effect of computer algebra systems on concept and skill acquisition in calculus. In: Journal for Research in Mathematics Education 22, H. 2, S. 151-156.
Pelles, T. (2005): A terminológia szerepe a megértésben. Példák a matematikából. In: Cs. Jónás, E./Székely, G. (Hrsg.): Nyelvek és nyelvoktatás Európa és a Kárpát-medence régióiban. A XIV. Magyar Alkalmazott Nyelvészeti Kongresszus előadásai. Pécs, Nyíregyháza: MANYE-Bessenyei György Könyvkiadó. S. 232-236.
Prenzel, M./Artelt, C./Baumert, J./Blum, W./Hammann, M./Klieme, E./Pekrun, R. (2007) (Hrsg.): PISA 2006. Die Ergebnisse der dritten internationalen Vergleichsstudie. Münster/New York/München,/Berlin: Waxmann.
Purkert, W. (2001): Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler. Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden: Teubner Verlag. S. 236-237.
Reinmann-Rothmeier, G./Mandl, H. (1998): Wissensvermittlung: Ansätze zur Förderung des Wissenserwerbs. In: Birbaumer, N./Frey, D./Kuhl, J./Prinz, W./Weinert, F. E. (Hrsg.): Enzyklopädie der Psychologie, Themenbereich C: Theorie und Forschung, Serie II: Kognition, Band 6: Wissen, Göttingen, Bern, Toronto, Seattle: Hogrefe Verlag für Psychologie, S. 457-500.

Reiss, K./Heinze, A./Pekrun, R. (2007): Mathematische Kompetenz und ihre Entwicklung in der Grundschule. In: Prenzel, M./Gogolin, I./Krüger, H.-H. (Hrsg.): Kompetenzdiagnostik. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 10, Sonderheft 8, S. 107-127.

Rolka, K. (2004): Barrieren für den Einsatz einer Fremdsprache im Mathematikunterricht. In: Heinze, A./Kuntze, S. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2004, Hildesheim: Franzbecker, S. 473-476.

Roos, R. (1998): Weg von der traditionellen Mathematikvorlesung. Aktivierungsstrategien in der Mathematik. In: Schwarze, B./Webler, W-D. (Hrsg.): Lernen in Europa. Neue Anforderungen an die Ausbildung von Ingenieurinnen und Ingenieuren. Weinheim: Beltz Deutscher Studien Verlag, S. 221-234.

Schifko, P. (1992): Morphologische Interferenzen im Bereich des fachsprachlichen Wortschatzes. In: Albrecht, J./Baum, R. (Hrsg.): Fachsprache und Terminologie in Geschichte und Gegenwart. Tübingen: Narr.

Schippan, T. (1992): Lexikologie der deutschen Gegenwartssprache. Tübingen: Niemeyer Verlag.

Schlöglmann, W. (2004): Ist Routinelernen ohne inhaltliches Verstehen möglich? In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 509-512.

Schmidt-Thieme, B. (2004): Zur Exaktheit der Sprache im Mathematikunterricht. In: Heinze, A./Kuntze, S. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2004, Hildesheim: Franzbecker, S. 513-516.

Schneider, M./Stern, E. (2005): Conceptual and procedural knowledge of a mathematics problem: Their Measurement and Their Casual Interrelations. In: Proceedings of the 27th Annual Conference of the Cognitive Science Society.

Schnubel, Y. (2004): Mathematikunterricht in Frankreich und Deutschland: Gemeinsamkeiten und Unterschiede am Beispiel der Vierecke. Grundlagen für einen bilingualen Unterricht. In: Heinze, A./Kuntze, S. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim: Franzbecker, S. 529-532.

Schöwe, R./Knapp, J./Borgmann, R. (1996): Mathematik zur Fachhochschulreife. Kaufmännisch-wirtschaftliche Richtung. Analysis und lineare Algebra. Berlin: Cornelsen.

Setati, M. (2005): Teaching Mathematics in a Primary Multilingual Classroom. In: Journal for Research in Mathematics Education 36, H. 5, S. 447-466.

Setati, M./Adler, J. (2000): Between languages and discourses: language practises in primary multilingual classrooms in South Afrika. In: Educational Studies in Mathematics 43, H. 3, S. 243-269.

Sfard, A. (1994): Reification as the Birth of Metaphor. In: For the Learning of Mathematics 14, H. 1, S. 44-55.

Silver, E. A. (1986): Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In: Hiebert, J. (Hrsg.): Conceptual and procedural knowledge: The case of Mathematics. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, S. 181-198.

Skemp, R. R. (1975): A matematikatanulás pszichológiája. Budapest: Gondolat.

Star, J. R: (2000): On the Relationship Between Knowing and Doing in Procedural Learning. In: Fishman, B./O’Connor-Divelbiss, S. (Hrsg.): Fourth International Conference of The Learning Sciences. Mahwah, NJ: Erlbaum, S. 80-86.

Stathopolou, Ch./Kalabasis, F. (2007): Language and Culture in Mathematics Education: Reflections on Observing a Romany Class in a Greek School. In: Educational Studies in Mathematics 64, H. 2, S. 231-238.

Stern, E./Felbrich, A./Schneider, M.(2006): Mathematiklernen. In: Rost, D. H. (Hrsg.): Handwörterbuch: Pädagogische Psychologie. Weinheim: Beltz, S. 461-469.

Strube, G./Becker, B./Freksa, Ch./Hahn, U./Opwis, K./Palm, G.(1996): Wörterbuch der Kognitionswissenschaft. Stuttgart: Klett-Cotta.

Suhrmüller, G. (2005): Spracharbeit im bilingualen Erdkundeunterricht-spracherwerbstheoretisch fundiert und sachfach- sowie fremdsprachendidaktisch perspektiviert. In: Blell, G./Kupetz, R. (Hrsg.): Bilingualer Sachfachunterricht und Lehrerausbildung für den bilingualen Unterricht. Forschung und Praxisberichte. Frankfurt am Main: Peter Lang, S. 101-109.

Szűcs, K. (2005): Theoretische Überlegungen zur Rolle und Funktion der Sprache im fremdsprachigen Mathematikunterricht. Ein Plädoyer für die Förderung der fremdsprachlichen Fachsprachenkompetenz. In: Parisot, K.J./Vásárhelyi, É. (Hrsg.): Positionen – Mathematikdidaktik in Entwicklung. Salzburg: Abacus Verlag, S. 203-210.

Szűcs, K. (2006): Untersuchung der Reichweite der allgemeinen fremdsprachlichen Lesekompetenz in mathematischer Lernumgebung – Eine Fallstudie an der Budapester Wirtschaftshochschule. In: Cohors-Fresenborg, E. u.a. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunericht 2006. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, S. 517-520.

Tietze, J. (2006): Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik. Wiesbaden: Vieweg.

Trim, J./North, B./Coste, D./Sheils, J. (2001): Gemeinsamer europäischer Referenzrahmen für Sprachen: lernen, lehren, beurteilen. Straßburg: Europarat.

Vass, V. (2005): A kompetencia fogalmának értelmezése. In: Kerber, Z. (Hrsg.): Hidak a tantárgyak között. Kereszttantervi kompetenciák és tantárgyközi kapcsolatok. Budapest: Országos Közoktatási Intézet.

Walach, H. (2005): Wissenschaftstheorie, philosophische Grundlagen und Geschichte der Psychologie. Stuttgart: Kohlhammer, S. 208-217.

Wahrig, G. (1994): Deutsches Wörterbuch. Güterloh: Bertelsmann Lexikon Verlag.

Walter, R. (2007): Einführung in die Analysis 1. Berlin, New York: Walter de Gruyter.

Walter-Gropius-Schule Berlin: Mathematik auf Englisch (Sachfach im bilingualen Zweig). Unter: http://www.wgs.cidsnet.de/englisch/engmath.htm (letzter Zugriff am 08. 11. 2008)

Weinert, F. E. (2001) (Hrsg.): Leisungsmessungen in Schulen. S. 27-28.

Wissenschaftsrat (1999): Stellungnahme zum Verhältnis von Hochschulausbil-dung und Beschäftigungssystem. Würzburg, Drs. 4099/99.

Wittmann, E. (1976): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg.

Wolff, D. (2007): Bilingualer Sachfachunterricht in Europa: Versuch eines systematischen Überblicks. In: Fremdsprachen Lehren und Lernen 36, S. 13-29.

Zorich, V. A. (2006): Analysis I. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

11. Anhang

Anhang A: Zielsetzung, Inhalt und Thematik des Analysisunterrichts an der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus der Wirtschaftshochschule Budapest

Anhang B: Heuristische Strategien und Folgen

Anhang C: Deskriptoren zur Teilaktivität Kreatives Schreiben der Aktivität schriftliche Produktion (In: Trim et al., 2001 S. 67-68)

Anhang D: Deskriptoren zur Teilaktivität Interviewgespräche der Aktivität mündliche Interaktion (In: Trim et al., 2001 S. 85)

Anhang E: Tabelle der Argumente für und gegen bilingualen Mathematikunterricht

Anhang F: Tabellarischer Überblick der in den letzten 8 Jahren im Zusammenhang mit dem bilingualen Mathematikunterricht erschienenen Publikationen

Anhang G: Mindestpunktwerte bei der Zulassung zum Studium an der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus der Wirtschaftshochschule Budapest im Jahr 2004

Anhang H: Studentenlösungen und ihre Einordnung bei der Fallstudie an der Wirtschaftshochschule Budapest

Anhang I: Detaillierte Analyse der Fehlerkategorien bei der Fallstudie an der Wirtschaftshochschule Budapest

Anhang J: Online-Einstufungstest Englisch (http://www.cdc.de/Einstufungstest-Englisch.1322.0.html) bei der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Anhang K: SAT-Geometrie-Test bei der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Anhang L: Sprachlich erleichterte Fassung der Aufgabe von Sharygin und deren Lösung

Anhang M: „Landkarte" der geometrischen Kompetenz bei Testperson 1 und Testperson 2 in der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Anhang N: Lösungen von Testperson 1 in der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Anhang O: Lösungen von Testperson 2 in der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Anhang A: Zielsetzung, Inhalt und Thematik des Analysisunterrichts an der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus der Wirtschaftshochschule Budapest

Kurs	**Wirtschaftsmathematik I.**						
Fachgruppe:	Grundstudium: Methodik						
Anzahl der Semesterwochenstunden:	**Vorlesung:**	**1**	**Seminar:**	**2**	**Insgesamt**	**3**	
Form der Leistungsmessung:	Kolloquium						
Leistungspunkte:	3						
notwendige Vorstudien:	**keine**						
Unterrichtsziele:							
Entwicklung der logischen Denkweise und einer Betrachtungsweise, die einen befähigt, wichtige wirtschaftliche Begriffe zu verstehen, wie Grenzgewinn, Grenznachfrage, Elastizität usw. Kenntnis solcher mathematischen Begriffe und Methoden, die unerlässlich für den Unterricht der Studienfächer Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Ökonomie, und Finanzen sind. Der Student soll befähigt werden, Probleme zu erkennen, das zum Problemlösen nötige mathematische Werkzeug auszuwählen, anzuwenden und das Ergebnis auszuwerten. Angleichung der Vorkenntnisse.							

Thematik: Vorlesungen:	
1. Woche	Folgenbegriff, Angabe und Eigenschaften von Folgen, konvergente Folgen, Verknüpfung konvergenter Folgen, spezielle divergente Folgen
2. Woche	
3. Woche	Grenzwert, linksseitiger- rechtsseitiger Grenzwert von Funktionen. Stetigkeit. Grenzwertsätze über verknüpfte Funktionen. Grenzwert von Funktionen im Unendlichen. Uneigentliche Grenzwerte.
4. Woche	
5. Woche	Begriff Differentialquotient, Ableitung. Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Ableitung elementarer Funktionen. Ableitungsregeln. Ableitung einiger weiterer Grundfunktionen.
6. Woche	
7. Woche	Ferien
8 Woche	
9. Woche	Untersuchung differenzierbarer Funktionen. Notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremwertes, Monotonie. Hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Extremwertes. Links- und rechtsgekrümmte Funktionen.
10. Woche	
11. Woche	Begriff des bestimmten Integrals. Eigenschaften des bestimmten Integrals. Formel nach Newton und Leibniz.
12. Woche	
13. Woche	Funktionen mit mehreren Variablen. Isohöhenlinien. Partielle Ableitung. Extrema von Funktionen mit zwei Variablen.
14. Woche	
15. Woche	Methode der kleinsten Quadrate. Lösen ökonomischer Probleme. Gemischte Aufgaben.

Thematik: Übungen:	
1. Woche	Neuer Stoff: Verknüpfung und Verkettung von Funktionen, Umkehrfunktion. Cobb-Dougles-Funktion, logistische Funktionen. Wiederholung: Funktionsbegriff, reelle Funktionen, natürlicher Definitionsbereich. Aus der Sekundarstufe bekannte elementare Funktionen. Abschnittsweise lineare Funktionen. Eigenschaften von Funktionen: Nullstelle, Extremwert, Monotonie, Parität, Beschränktheit. Funktionstransformationen.
2. Woche	Aufgaben zur Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz von Zahlenfolgen.
3. Woche	Neuer Stoff: Unendliche Reihen, Summe von unendlichen geometrischen Reihen. Quotientenkriterium und absolute Konvergenz. Potenzreihen. Aufgaben zu Zahlenfolgen, unendlichen Reihen und Potenz-reihen.
4. Woche	Neuer Stoff: Ganzrationale und gebrochen-rationale Funktionen, Potenzfunktion mit Bruchexponent, Exponential- und Logarithmusfunktion Aufgaben zu Grenzwert und Stetigkeit von Funktionen
5. Woche	Neuer Stoff: Ableitung höherer Ordnung. Aufgaben zur Differentation.
6. Woche	Gemischte Aufgaben
7. Woche	Ferien
8 Woche	Aufgaben für Anwendung der Differentialrechnung. Tangente, Grenzertrag, Grenzgewinn, Elastizität. Dichte.
9. Woche	Aufgaben zur Untersuchung differenzierbarer Funktionen. Beispiele aus der Ökonomie: Kostenminimierung und Ertragmaximierung, Nachfrage – und Produktionsfunktionen.
10. Woche	Neuer Stoff: Stammfunktion, unbestimmtes Integral. Grundintegrale, Verknüpfung von Integralen. Integrationsregeln. Integration durch Substitution. Partielle Integration.
11. Woche	Aufgaben zum unbestimmten Integral.
12. Woche	Aufgaben zum bestimmten Integral, zur Flächeninhaltsberechnung. Uneigentliche Integrale.
13. Woche	Aufgaben zu Funktionen mit mehreren Variablen, Isohöhenlinien. Partielle Ableitung.
14. Woche	Aufgaben zur Ermittlung der Extrema von Funktionen mit zwei Variablen. Gemischte Aufgaben.
15. Woche	Aufgaben zur Ermittlung der Extrema von Funktionen mit zwei Variablen. Bewertung.

Pflichtliteratur:	
Dr. Csernyák László: Matematika a közgazdasági alapképzés számára: Analízis, Nemzeti Tankönyvkiadó Bp., 2006. Rsz. 42656 Szentelekiné dr. Páles Ilona: Analízis feladatgyűjtemény, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006. Budapest	
Empfohlene Literatur:	
Czétényi-Felber-Rejtő-Zimányi: Feladatgyűjtemény a gazdasági matematikához, BGF-KVIFK, Bp. 2001. (SZ.: F-402).Denkinger-Gyurkó: Analízis: Gyakorlatok. Nemzeti Tankönyvkiadó Bp. 2003. Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás: Példatár, Bolyai-könyvek, Műszaki Kvk., Bp. 2002. Bárczy Barnabás: Integrálszámítás: Példatár, Bolyai-könyvek, Műszaki Kvk., Bp. 2003.	

im Laufe des Semsters anzueignenden Schlüsselbegriffe:
Mengenlehre: Mengenbegriff, Mengenverknüpfungen, kartesisches Produkt. Reelle Zahlen: Axiome, Intervalle, Umgebungen, abzählbare Mengen, Mächtigkeit. Funktionentheorie: Funktionsbegriff, Verknüpfung von Funktionen, Verkettung von Funktionen, Umkehrfunktion, Eigenschaften. Zahlenfolgen: Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz, Divergenz, Verknüpfung konvergenter Folgen*. Unendliche Reihen: Begriff der unendlichen Reihe, unendliche geometrische Reihe, Quotientenkriterium*. Grenzwert von Funktionen: Grenzwert an endlichen und an unendlichen Stellen. Stetigkeit von Funktionen: Begriff der Stetigkeit, Verknüfung stetiger Funktionen, Stetigkeit elementarer Funktionen*, Darboux-Eigenschaft*. Differentialrechnung: Differentialquotient, Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit, Ableitungsregeln für Summe, Differenz, Produkt und Quotient von Funktionen, Ableitung verketteter Funktionen*, Ableitung höherer Ordnung, Taylor-Reihe**. Kurvendiskussion: Monotonie, Extremwerte, linksgekrümmte und rechtsgekrümmte Funktionen. Unbestimmtes Integral: Stammfunktion, Integrationsregeln, partielle Integration, Integration durch Substitution* Das bestimmte Integral: Begriff und Eigenschaften, Formel nach Newton und Leibniz, Anwendungen. Funktionen mit mehreren Variablen: Isohöhenlinien, partielle Ableitung, Extrema. Anmerkungen: Die durch * markierten Abschnitte werden ohne Beweisführung behandelt; im Falle von Sätzen, die sich auf Verknüpfungen beziehen, wird der Beweis bei einer einzigen Verknüpfung geführt. Das durch ** markierte Thema ist fakultativ wählbar.

Anhang B: Heuristische Strategien und Folgen

Beispiele für Ausprägung in der Analysis (Folgen)	Heuristische Strategie	Gruppe von Heurismen
Überprüfung einzelner Fälle durch Einsetzen spezieller Werte: Berechnung der ersten Folgenglieder um Hypothesen über das Monotonieverhalten der Folge zu formulieren	systematisches Probieren	Induktion
Aus dem Gegebenen erste Folgerungen ziehen: Ist eine Folge monoton steigend, so ist sie nach unten beschränkt	Vorwärtsarbeiten	
arithmetische/geometrische Folge→allgemeiner Folgenbegriff	Verallgemeinern	
Überprüfung des Konvergenzverhaltens der Folge 2^n Durch Variation der Basis Hypothesen über den Grenzwert von Folgen von der Gestalt q^n formulieren	das Gegebene variieren	Variation
$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ als Spezialfall von $\lim\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ auffassen	Allgemeinheitsgrad variieren	
Abschätzung von Größenordnungen: $2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$	Exaktheitsstufe variieren	
Geometrische Darstellung des Zusammenhanges zwischen Folgenglieder einer Folge, ihrem Grenzwert einem konkreten Fehler und der daraus berechneten Schwellenzahl	In einen anderen Kontext übersetzen	Interpretation
Darstellung von Folgen durch Funktionsgraph, in einer Wertetabelle oder auf dem Zahlenstrahl	Verfertigung eines Modells	
Monotonie/Beschränktheit von Folgen und Funktionen monoton fallende/steigende Folgen nach unten/nach oben beschränkte Folgen	Analogie	
Untersuchung der Konvergenz von Teilfolgen, um Konvergenz der Folge zu überprüfen	Fallunterscheidung	Reduktion
Divergenz der harmonischen Folge ← Teilsummenfolge unbeschränkt	Rückwärtsarbeiten	
Durch die Annahme, eine Folge hätte zwei Grenzwerte, kommt man zum Wiederspruch. Damit ist bewiesen, dass eine Folge höchstens einen Grenzwert hat.	Argumentation durch Widerspruch	

Anhang C: Deskriptoren zur Teilaktivität Kreatives Schreiben der Aktivität schriftliche Produktion (In: Trim et al., 2001 S. 67-68)

	Kreatives Schreiben
C2	Kann klare, flüssige und fesselnde Geschichten und Beschreibungen von Erfahrungen verfassen, und zwar in einem Stil, der dem gewählten Genre angemessenen ist.
C1	Kann klare, detaillierte, gut strukturierte und ausführliche Beschreibungen oder auch eigene fiktionale Texte in lesergerechtem, überzeugendem, persönlichem und natürlichem Stil verfassen.
B2	Kann klare, detaillierte, zusammenhängende Beschreibungen realer oder fiktiver Ereignisse und Erfahrungen verfassen, dabei den Zusammenhang zwischen verschiedenen Ideen deutlich machen und die für das betreffende Genre geltende Konventionen beachten.
	Kann klare, detaillierte Beschreibungen zu verschiedenen Themen aus seinem/ihrem Interessengebiet verfassen. Kann eine Rezension eines Films, Buchs oder Theaterstücks schreiben.
B1	Kann unkomplizierte, detaillierte Beschreibungen zu einer Reihe verschiedener Themen aus seinem/ihrem Interessengebiet verfassen. Kann Erfahrungsberichte schreiben, in denen Gefühle und Reaktion in einem einfachen zusammenhängenden Text beschrieben werden. Kann eine Beschreibung eines realen oder fiktiven Ereignisses oder einer kürzlich unternommenen Reise verfassen. Kann eine Geschichte erzählen.
A2	Kann in Form verbundener Sätze etwas über alltägliche Aspekte des eigenen Umfeldes schreiben, wie z. B. über Menschen, Orte, einen Job oder Studienerfahrungen. Kann eine sehr kurze, elementare Beschreibung von Ereignissen, vergangenen Handlungen und persönlichen Erfahrungen verfassen.
	Kann in einer Reihe einfacher Sätze über die eigenen Familie, die Lebensumstände, den Bildungshintergrund oder die momentane oder vorige berufliche Tätigkeit schreiben. Kann kurze, einfache, fiktive Biographien und einfache Gedichte über Menschen schreiben.
A1	Kann einfache Wendungen und Sätze über sich selbst und fiktive Menschen schreiben: wo sie leben und was sie tun.

Anhang D: Deskriptoren zur Teilaktivität Interviewgespräche der Aktivität mündliche Interaktion (In: Trim et.al., 2001 S. 85)

	Interviewgespräche
C2	Kann seine/ihre Dialogrolle außerordentlich gut ausführen, strukturiert die Redebeiträge, interagiert überzeugend und vollkommen flüssig als Interviewer/in oder Interviewte/r; hat gegenüber Muttersprachlern keine Nachteile.
C1	Kann uneingeschränkt an einem Interview teilnehmen, sowohl als Interviewer/in als auch als Interviewte/r; kann die diskutierte Frage flüssig und ohne fremde Hilfe ausführen und entwickeln; kann gut mit Einwürfen umgehen.
B2	Kann wirksam und flüssig ein Interviewgespräch führen, von vorbereiteten Fragen spontan abweichen, auf interessante Antworten näher eingehen und nachfragen.
	Kann in einem Interviewgespräch – ohne viele Hilfen oder Anstöße des Interviewers – die Initiative ergreifen, Gedanken ausführen und entwickeln.
B1	Kann in einem Interview- oder Konsultationsgespräch konkrete Auskünfte geben (z. B. beim Arzt Symptome beschreiben), tut das aber mit begrenzter Genauigkeit. Kann ein vorbereitetes Interview durchführen, Informationen kontrollieren und bestätigen, muss aber möglicherweise gelegentlich um Wiederholung bitten, wenn der Gesprächspartner zu schnell oder zu ausführlich antwortet.
	Kann in einem Interview- oder Konsultationsgespräch gewisse Initiative ergreifen (z. B. ein neues Thema einführen), ist aber bei der Gesprächsführung sehr stark von Interviewer abhängig. Kann mit Hilfe eines vorbereiteten Fragebogens en stark gesteuertes Interview mit einigen spontanen Zusatzfragen führen.
A2	Kann sich in einem Interview verständig machen und Informationen und Ideen zu vertrauten Themen mitteilen, vorausgesetzt, er/sie kann gelegentlich um Klärung bitten und erhält Hilfe, das auszudrücken, was er/sie sagen möchte.
	Kann in einem Interview einfache Fragen beantworten und auf einfache Fragestellungen reagieren.
A1	Kann in einem Interviewgespräch einfache, direkte Fragen zur Person beantworten, wenn die Fragen langsam, deutlich und in direkter, nicht-idiomatischer Sprache gestellt werden.

Anhang E: Tabelle der Argumente für und gegen bilingualen Mathematikunterricht

Argumentationsbasis	pro	contra
Einschätzung der Beziehung zw. Mathematik als Wissenschaft und Kultur	mathematical communication is not culture free (Novotná&Moraová, 2005) doing mathematics is different in different languages (Barwell, 2003)	Mathematik ist eine international neutrale Wissenschaft, d.h. Mathematik trägt zum interkulturellen Lernen nicht bei (Rolka, 2004)
Einschätzung der Rolle der Sprache im MU	Geringer Sprachanteil (Petit, zitiert bei Schnubel, 2004) einige Arbeitsfelder der Mathematik mit hohem Maß an Ausdrucksmöglichkeit sind ideal für den bil. Mathematikunterricht (Lorbeer)	wenig Möglichkeit zur Diskussion (Rolka, 2004)
Einschätzung der Rolle der Fremdsprache im MU	Zweisprachigkeit wiederum hilft Mathematik lernen (Petit, zitiert bei Schnubel, 2004)	Fremdsprache verhindert das Verstehen (Lorbeer) Students don't feel mathematics belongs to them (Barwell&Setati, 2005)
Gesellschaftlich-wirtschaftliche Ebene	mehr Berufschancen Vorteile im Studium (http://www.wgs.cidsnet.de/)	
Indirekte Argumente (im Zusammenhang mit naturwissenschaftlichen Fächern)	Keine Behinderung der Lernprozesse beobachtbar (Koch&Bünder, 2006) naturwiss. Denkweise und ein analytischer Weltzugriff tragen hohes Potenzial für Fremdheitserfahrungen in sich (Bonnet, 2000 zitiert bei Breidbach, 2002) handlungsorientierter Unterricht wirkt positiv auf den Spracherwerb (Bonnet, 2000 zitiert bei Breidbach, 2002)	Nachgewiesene Schwierigkeiten im fremdsprachigen naturwissenschaftlichen Unterricht (Vögedings 1995, zitiert bei Butzkamm in Breidbach, 2002)

Anhang F: Tabellarischer Überblick der in den letzten 8 Jahren im Zusammenhang mit dem bilingualen Mathematikunterricht erschienenen Publikationen

Autor/Zeitschrift	Thema/Fragenstellung	Aspekt
Barwell 1999a Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics	Fallstudie: Analyse des paradigmatischen/ syntagmatischen Verstehens von mathematischen Fachbegriffen bei Migrantenschülern	Linguistik
Evans 2007 ESM	Vergleich der englischen und der welschen mathematischen Fachsprache	Linguistik
Kazima 2007 ESM	Fallstudie: Analyse des Verstehens der englischen wahrscheinlichkeitstheoretischen Terminologie bei malawischen Schülern	Linguistik
Farugia 2002 Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics	Fallstudie: Analyse der Kodewechsel zw. Englisch und Maltesisch von Mathematiklehrern	Linguistik
Rolka 2004 Beiträge zum MU	Interkulturalität und Sprachgebrauch im MU	Linguistik, Soziologie
Novotná&Moraová 2005 ZDM	Vergleich von authentisch und nichtauthentisch englischsprachigen Mathematiklehrbüchern	Linguistik, Soziolinguistik
Barwell 1999c Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics	Fallstudie: Vergleich des Wortgebrauchs von Muttersprachlern und Nichtmuttersprachlern beim Thema Addition	Linguistik, Soziolinguistik
Mendes 2007 ESM	Fallstudie: Analyse der fachsprachlichen Fehler von angehenden multilingualen Mathematiklehren	Soziolinguistik
Barwell 2005 Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education	Überblick der PME-Beiträge aus den letzten 10 Jahren, die die Multilingualität aus der Perspektive der Soziolinguistik behandeln	Soziolinguistik
Moschkovich 2007 ESM	Komplexität der Kodewechsel aus soziolinguistischer Sicht	Soziolinguistik

Autor/Zeitschrift	Thema/Fragenstellung	Aspekt
Setati 2005 JRME	Fallstudie: Analyse der Kodewechsel zw. Englisch und Setswanisch einer Mathematiklehrerin, politische und soziologische Rolle der beiden Sprachen	Soziolinguistik, Soziologie
Setati&Adler 2000 ESM	Analyse der Kodewechsel von Mathematiklehrern in Südafrika	Soziolinguistik, Soziologie
Gorgorió&Planas 2001 ESM	Fallstudie: Soziale Rolle der Sprache, bzw. Sprache als Vermittler bei der Wissenskonstruktion bei Migrantenkindern in Katalonien	Soziolinguistik, Soziologie
Barwell 2003 FLM	Kulturabhängigkeit der Mathematik, dominante Rolle der englischen Sprache in der Forschung	Soziologie
Barwell&Setati 2005 FLM	Einfluss der Multilingualität auf den mathematischen Wissenserwerb, Kulturabhängigkeit der Mathematik	Soziologie
Barwell 2004 Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics	Fallstudie: Analyse der Hintergründe fürs Raten im MU eines Migrantenschülers	Soziologie, Sozialpsychologie
Clarkson 2007 ESM	Fallstudie: Metakognitive Funktion der Kodewechsel bei vietnamesischen Schülern	Kognitionspsychologie
Stathopolou& Kalabasis 2007 ESM	Fallstudie: Mathematische Leistung von Roma-Schülern in Griechenland aus soziologischer Sicht	Mathematik, Soziologie
Schnubel 2004 Beiträge zum MU	Vergleich der Behandlung von Vierecken im MU in Deutschland und in Frankreich, Vorschlag für einen bilingualen Ansatz im Themenbereich	Mathematik
Clarkson 2005 Proceedings of the 6th British Congress of Mathematics Education	Kognitive Auswirkungen der bilingualen Umgebung auf den mathematischen Wissenserwerb/ auf die mathematische Leistung	Mathematik

Anhang G: Mindestpunktwerte bei der Zulassung zum Studium an der Fakultät für Handel, Gastronomie und Tourismus der Wirtschaftshochschule Budapest 2004

Fachrichtung	GFF	Anzahl zugelassener Studierender	Punktgrenze
Tourismus und Hotel Management	GPS	165	123
Tourismus und Hotel Management (deutsch)	GPS	50	114
Handel	GPS	134	120
Handel (deutsch)	GPS	44	104
Gastronomie	GPS	104	120
Tourismus und Hotel Management	GPG	42	113
Tourismus und Hotel Management (deutsch)	GPG	26	84
Handel	GPG	72	101
Handel (deutsch)	GPG	6	76
Gastronomie	GPG	88	104

Zeichenerklärung: Grad des Studiums, Form des Studiums, Finanzierungsform

Grad des Studiums:
- **G** –grundständiges Studium
- **P** –postgraduales Studium

Form des Studiums:
- **P –** Präsenzstudium
- **T -** Teilzeitstudium
- **F -** Fernstudium

Finanzierungsform:
- **S –** staatlich gefördertes Studium
- **G –** gebührenpflichtiges Studium

Anhang H: Studentenlösungen und ihre Einordnung bei der Fallstudie an der Wirtschaftshochschule Budapest

<table>
<tr><th colspan="2">(1a) Monotonie der Folge $a_n = \frac{2n+1}{3n+5}$</th></tr>
<tr><th>Studentenlösungen, Lösungsansätze</th><th>Didaktische Analyse</th></tr>
<tr><td>Bestimmung und Vergleich der ersten 4-5 Glieder
$a_1 = \frac{2\cdot 1+1}{3\cdot 1+5} = \frac{3}{8} = 0{,}375$
$a_2 = \frac{2\cdot 2+1}{3\cdot 2+5} = \frac{5}{11} = 0{,}4545$
$a_3 = \frac{2\cdot 3+1}{3\cdot 3+5} = \frac{7}{14} = 0{,}5$
$a_4 = \frac{2\cdot 4+1}{3\cdot 4+5} = \frac{9}{17} = 0{,}5294$
die Folge ist (streng) monoton steigend</td><td>Bei diesem Ansatz wird auf einer intuitiven Ebene gehandelt. Es wird (nur) in Erinnerung gerufen und exemplarisch überprüft: Monotonie hängt damit zusammen, dass es eine bestimmte Beziehung zw. der Größe aufeinanderfolgender Folgenglieder gibt. Es wird allerdings noch nicht erkannt, dass sich eine richtig erfasste Tendenz, die für endlich viele Elemente gilt, nicht ohne Weiteres auf unendlich viele Elemente übertragen lässt. Die Formulierung einer Hypothese wird mit der Überprüfung dieser Hypothese gleichgesetzt, es fehlen also sowohl eine genaue Vorstellung von der Monotonie als auch bestimmte Techniken, Verfahren, Methoden zu deren Überprüfung. Damit entspricht dieser Ansatz der Kompetenzstufe A. Die Bestimmung der Folgenglieder erfordert weiterhin P1, wird auch eine Hypothese formuliert, so geht es bereits um P2, da diese Elemente auch verglichen und eine Tendenz erkannt wurde.</td></tr>
<tr><td>die Aufgabe durch Differenzbildung auf Vorzeichenanalyse zurückführen
$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+5} - \frac{2n+1}{3n+5} =$
$= \frac{2n+3}{3n+8} - \frac{2n+1}{3n+5} =$
$= \frac{(2n+3)(3n+5)-(3n+8)(2n+1)}{(3n+8)(3n+5)}$
$= \frac{7}{(3n+8)(3n+5)} > 0 \quad \forall n \in N$
$\Rightarrow$ die Folge ist streng monoton steigend</td><td>Diese Lösung lässt nicht nur eine intuitive, sondern bereits eine detaillierte Vorstellung von der Monotonie einer Folge (Erfassen der Tendenz von unendlich vielen Elementen) erkennen, wobei die Herstellung von Verbindungen zu anderen Begriffen noch nicht notwendig ist. Demzufolge erfordert diese Lösung Kompetenzen auf der Kompetenzstufe B.
Hierbei wird eine Strategie und im Zusammenhang damit ein praktisches Verfahren, also eine Prozedur zur Überprüfung der Monotonie angewandt, damit erfordert diese Lösung P3.</td></tr>
</table>

Anmerkungen

- Anhand des vorangegangenen Unterrichts ist die Lösung auf Kompetenzstufe B zu erwarten, das Verfahren der Differenzbildung ist für die Studenten bekannt und kam auch ihre praktische Umsetzung in den Übungsstunden mehrmals vor. Varianten, wie z. B. $a_n - a_{n-1}$ oder $a_n - a_{n+1}$ auf Vorzeichen zu überprüfen, sind selbstverständlich akzeptiert und analog bewertet worden.
- Es wurde bei der Auswertung von Lösungen, die den Ansatz der Differenzbildung benutzt haben, zwischen drei Stufen des prozeduralen Wissens differenziert: Bei Studenten, die zwar das Verfahren kannten, aber keine weitere Schritte ausführen konnten (also Notierung von $a_{n+1} - a_n$ o. ä.), wurde diese Teilaufgabe mit P1 bewertet. Studenten, die darüber hinaus Elemente erfolgreich identifizierten, bekamen P2. Erst im Falle einer vollständigen Anwendung des Verfahrens wurde P3 zugeordnet.
- Es sind anhand der Vorkenntnisse der Studenten und des vorangegangenen Unterrichts weitere Lösungen denkbar, die allerdings nicht vorgekommen sind. Da die Glieder der Folge $a_n = \frac{2n+1}{3n+5}$ alle positiv sind, ist es z. B. möglich, das Quotientenkriterium anzuwenden. Ein anderer Ansatz bestünde darin, den rationalen Teil abzutrennen: $\frac{2n+1}{3n+5} = \frac{2}{3} - \frac{7}{9n+15}$ und anschließend damit zu arbeiten. Beide Lösungen entsprechen der Kompetenzstufe B und erfordern P3.

(1b) Beschränktheit der Folge $a_n = \frac{2n+1}{3n+5}$	
Studentenlösungen, Lösungsansätze	**Didaktische Analyse**
Bestimmung und Vergleich der ersten 4-5 Glieder $a_1 = \frac{2\cdot 1+1}{3\cdot 1+5} = \frac{3}{8} = 0{,}375$ $a_2 = \frac{2\cdot 2+1}{3\cdot 2+5} = \frac{5}{11} = 0{,}4545$ $a_3 = \frac{2\cdot 3+1}{3\cdot 3+5} = \frac{7}{14} = 0{,}5$ $a_4 = \frac{2\cdot 4+1}{3\cdot 4+5} = \frac{9}{17} = 0{,}5294$ Formulierung von Schlussfolgerungen: z. B. *die Folge ist nach unten beschränkt,* *0 ist eine untere Schranke,* *die Folge ist kleiner als 1*	Bei diesem Ansatz wird ebenfalls auf einer intuitiven Ebene gehandelt: Beschränktheit hängt mit der Größe der Folgenglieder zusammen. Es wird hier wiederum noch nicht erkannt, dass eine richtig erfasste Tendenz, die für endlich viele Elemente gilt, z. B. dass die Folgenglieder positiv sind, sich nicht ohne Weiteres auf unendlich viele übertragen lässt. Die Formulierung einer Hypothese wird mit deren Überprüfung gleichgesetzt, es fehlen also sowohl eine genaue Vorstellung von Beschränktheit als auch bestimmte Techniken und Verfahren zu deren Überprüfung. Damit entspricht dieser Ansatz der Kompetenzstufe A. Die Bestimmung der Folgenglieder erfordert P1, wird auch eine Hypothese formuliert, so geht es um P2, da diese Elemente auch verglichen und eine Tendenz erfasst wurde.

(1b) Beschränktheit der Folge $a_n = \frac{2n+1}{3n+5}$	
Abtrennung des rationalen Teils $\frac{2n+1}{3n+5} = \frac{2}{3} - \frac{7}{9n+15}$ Schlussfolgerung: $\frac{2}{3}$ *ist eine obere Schranke der Folge* $\left.\begin{matrix} 2n+1>0 \text{ für jedes } n\in N \\ 3n+5>0 \text{ für jedes } n\in N \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow a_n = \frac{2n+1}{3n+5} > 0 \text{ für jedes } n\in N$ *⇒ 0 ist eine untere Schranke der Folge* *die Folge ist also beschränkt*	Diese Lösung lässt nicht nur eine intuitive, sondern bereits eine detaillierte Vorstellung von der Beschränktheit einer Folge (Erfassen der Größe von unendlich vielen Elementen) erkennen, wobei die Herstellung von Verbindungen zu anderen Begriffen noch nicht notwendig ist. Demzufolge erfordert diese Lösung Kompetenzen auf der Stufe B. Hierbei werden Strategien und im Zusammenhang damit praktische Verfahren, also Prozeduren zur Überprüfung der Beschränktheit angewandt, damit erfordert diese Lösung P3.
Nach der Überprüfung der Monotonie und der Konvergenz: die Folge a_n ist streng monoton steigend ⇒ sie ist nach unten beschränkt $a_1 = \frac{3}{8} \le a_n$ Die Folge a_n ist konvergent ⇒ sie ist beschränkt, der Grenzwert ist in diesem Fall die kleinste obere Schranke: $a_n < \frac{2}{3} = \lim a_n$	Bei dieser Lösung werden zwischen dem Begriff der Beschränktheit und anderen Begriffen wie Monotonie und Konvergenz Verbindungen hergestellt, damit geht es hier bereits um die Kompetenzstufe C. Die Schranken wurden nicht nur durch Kenntnisse von bestimmten Verfahren deren Anwendung bestimmt, sondern durch eine Analyse des Begriffs bzw. sein Verhältnis zu anderen Begriffen: Monotonie, Konvergenz und Beschränktheit begründen gemeinsam den Grenzwert als Schranke. Somit erfordert diese Lösung bereits P4.

Anmerkungen

- Wegen des vorangegangenen Unterrichts war die Lösung auf Kompetenzstufe C zu erwarten. Die Verbindung zwischen dem ersten Glied einer monotonen Folge und deren Beschränktheit bzw. zwischen dem Grenzwert und Supremum/Infimum sollte den Studenten bekannt sein. Da allerdings diese Lösung die Kombination mehrerer Informationen und die Verbindung zwischen drei zentralen Begriffen erfordert, kommt diese Lösung selten vor.
- Auf der Kompetenzstufe C ist auch vorstellbar, aus der Konvergenz der Folge auf ihre Beschränktheit zurückzuschließen. In diesem Fall geht es um rein konzeptuelles Wissen, um Kenntnis dieses Zusammenhangs, dessen Erfassen und Anwendung in der konkreten Situation, also um K3.
- Von Studenten waren noch weitere Lösungsvarianten auf der Kompetenzstufe B zu beobachten. So wurde z. B. aus $2n+1 < 3n+5 \text{ für jedes } n\in N$ oder nach der Umformung $\frac{2n+1}{3n+5} = 1 - \frac{n+4}{3n+5}$ geschlussfolgert, dass die Folge kleiner als 1 ist. Diesen und ähnlichen Lösungen wurde P3 zugeordnet.

(1c) Konvergenz der Folge $a_n = \frac{2n+1}{3n+5}$	
Studentenlösungen, Lösungsansätze	**Didaktische Analyse**
Bestimmung und Vergleich einiger Folgenglieder $a_1 = \frac{2\cdot 1+1}{3\cdot 1+5} = \frac{3}{8} = 0{,}375$ $a_2 = \frac{2\cdot 2+1}{3\cdot 2+5} = \frac{5}{11} = 0{,}4545$ $a_3 = \frac{2\cdot 3+1}{3\cdot 3+5} = \frac{7}{14} = 0{,}5$ $a_4 = \frac{2\cdot 4+1}{3\cdot 4+5} = \frac{9}{17} = 0{,}5294$ $a_{100} = \frac{2\cdot 100+1}{3\cdot 100+5} = \frac{201}{305} = 0{,}6590$ Formulierung der Schlussfolgerung: *die Folge geht gegen* $\frac{2}{3}$	Bei diesem Ansatz wird mit einer intuitiven Vorstellung von der Konvergenz gearbeitet: Konvergenz bedeutet eine Tendenz der Folgenglieder, sich einem Wert anzunähern. Dieser Lösungsansatz ist schon ein Schritt in die Richtung systematischer Analyse. Es wird allerdings noch nicht erkannt, dass eine richtig erfasste Tendenz, die für endlich viele Elemente gilt, z.B. dass sich die Folgenglieder anscheinend dem Wert $\frac{2}{3}$ nähern, nicht ohne Weiteres auf unendlich viele Elemente übertragen lässt. Die Formulierung einer Hypothese anhand endlich vieler Werte scheint für diese Probanden deren exakte Überprüfung überflüssig zu machen. Es fehlen also sowohl eine genaue Vorstellung von Konvergenz als auch eine exakte Methode zu deren Überprüfung. Damit entspricht dieser Ansatz der Kompetenzstufe A. Die Bestimmung der Folgenglieder erfordert P1, da auch eine Hypothese formuliert wurde, wurde bereits P2 erreicht, da diese Elemente auch verglichen und eine Tendenz erfasst wurde.
Durch Division des Zählers und des Nenners wird die Aufgabe auf $\lim\frac{1}{n}$ zurückgeführt: $\lim\frac{2n+1}{3n+5} = \lim\frac{2+\frac{1}{n}}{3+5\cdot\frac{1}{n}} =$ $= \frac{2+0}{3+5\cdot 0} = \frac{2}{3}$	Bei dieser Lösung wurde bereits eine detaillierte und bekannte Darstellung notwendiger Schritte vorgenommen, die schließlich den Grenzwert einer Folge erkennen lässt. Die Herstellung von Verbindungen zu anderen Begriffen muss dabei noch nicht notwendig erfolgt sein. Demzufolge wird dieser Lösung nur die Kompetenzstufe B und P3 zugeordnet.
Nach Überprüfung der Monotonie und der Beschränktheit wird gefolgert, dass die Folge konvergent ist.	Bei diesem Ansatz wurde eine Verbindung zur Monotonie und zur Beschränktheit hergestellt. Die Lösung erfordert Kenntnis, Erfassen und Anwendung von begrifflichen Zusammenhängen in konkreter Situation. Somit lässt sich diese Lösung der Kompetenzstufe C und K3 zuordnen.

Anmerkungen

- Bei Lösungen auf Kompetenzstufe A wird die Tendenz oft falsch erkannt, so wird z. B. von manchen Studenten geschlussfolgert, dass die Folge gegen $+\infty$ oder gegen 1 geht. Somit wurde P2 nicht erreicht und daher diesen Lösungen P1 zugeordnet.

- Anhand des vorangegangenen Unterrichts ist eine Lösung auf Kompetenzstufe B zu erwarten.
- Bei der Lösung oben, die mit der Kompetenzstufe B verbunden wurde, wäre sogar eine Einschätzung als Kompetenzstufe C gerechtfertigt, wenn es zusätzliche Hinweise über die Verwendung wesentlicher prozeduralen Anwendungen bestimmter konzeptueller Zusammenhänge ($\lim \frac{1}{n} = 0$, Grenzwert von konstanten Folgen, Grenzwertsätze) gäbe.
- Bei der Auswertung von Lösungen auf Kompetenzstufe B wurde zwischen drei Stufen des prozeduralen Wissens differenziert: Bei Studenten, die zwar das Verfahren kannten, dessen Inhalt aber nicht erfassen konnten (es wurde z. B. $\frac{1}{5}$ als Grenzwert betrachtet, o. ä.), wurde diese Teilaufgabe mit P1 bewertet. Studenten, die darüber hinaus Elemente erfolgreich identifizierten, den Grenzwert aber nicht bestimmen konnten, bekamen P2. Erst im Falle einer vollständigen Anwendung des Verfahrens wurde P3 zugeordnet.

(1d) Bestimmung der Schwellenzahl zum Fehler 10^{-2} und ihre Interpretation	
Studentenlösungen, Lösungsansätze	**Didaktische Analyse**
$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; $n_0 = \frac{2 \cdot 0 + 1}{3 \cdot 0 + 5} = \frac{1}{5}$	Diese falschen Ansätze stellen wirre formelle Versuche auf intuitiver Ebene dar. Nicht einmal Kompetenzstufe A wird erreicht, der Student zeigt weder konzeptuelles noch prozedurales Wissen.
Den Zusammenhang zw. Fehler, Grenzwert und Folge durch eine Ungleichung erfassen $\lvert a_n - A \rvert < \varepsilon$ $\left\lvert \frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2}{3} \right\rvert < \frac{1}{100}$ $\left\lvert \frac{3(2n+1) - 2(3n+5)}{3(3n+5)} \right\rvert < \frac{1}{100}$ $\left\lvert \frac{-7}{9n+15} \right\rvert < \frac{1}{100}$ $\frac{7}{9n+15} < \frac{1}{100}$ $76 < 76{,}1111 \approx \frac{685}{9} < 77 \leq n$ $n_0 = 76$ Das Ergebnis wird interpretiert: *Ab dem 77sten Glied liegen alle Folgenglieder in der* $\frac{1}{100}$*-Umgebung des Grenzwertes* $\frac{2}{3}$	Die Aufstellung der nebenstehenden Ungleichung zeigt eine detaillierte Vorstellung von Konvergenz. Diese Lösung lässt weiterhin auf Kenntnis, Erfassen und Anwendung bestimmter Prozeduren (algebraische Terme auf gemeinsamen Nenner bringen, Absolutbetrag von algebraischen Termen bestimmen, ordnen und umformen), bzw. Kenntnis, Erfassen und Anwendung bestimmter weiterer Zusammenhänge (Schwellenzahl ist der Index des größten Folgengliedes, welches noch nicht zur ε-Umgebung des Grenzwertes gehört) schließen. Demzufolge wird dieser Lösung die Kompetenzstufe B und P3 zugeordnet. Die richtige Interpretation des Ergebnisses erfordert eine begriffliche Analyse der durchgeführten Prozedur, dadurch soll eine Verbindung zw. Schwellenzahl, Fehler, Grenzwert und Folgenglieder hergestellt werden. Demzufolge wird diese Lösung auf Kompetenzstufe C und K4 eingestuft.

Anmerkungen

- Anhand des vorangegangenen Unterrichts ist eine Lösung auf Kompetenzstufe C zu erwarten. Es ist erwünscht, dass die Studenten die prozedural erworbenen Resultate auch in ihr mentales Begriffsnetz einordnen können.
- Bei der Auswertung von Lösungen auf Kompetenzstufe B wurde zwischen drei Stufen des prozeduralen Wissens differenziert: Bei Studenten, die zwar das Verfahren kannten, dessen Inhalt aber nicht erfassen konnten (die Ungleichung wurde aufgestellt), wurde diese Teilaufgabe mit P1 bewertet. Studenten, die darüber hinaus Elemente erfolgreich identifizierten, die Schwellenzahl aber nicht bestimmen konnten, bekamen P2. Erst im Falle einer vollständigen Anwendung des Verfahrens wurde P3 zugeordnet.
- Bei der Auswertung von Lösungen auf Kompetenzstufe C wurde zwischen vier Stufen des konzeptuellen Wissens differenziert: Bei Studenten, die über bestimmte Kenntnisse über die Schwellenzahl verfügten, deren begrifflichen Inhalt aber nicht erfassen konnten (es wurde z B. die Schwellenzahl derart interpretiert, dass die Folgenglieder größer als n_0 sind, o. ä.), wurde diese Teilaufgabe mit K1 bewertet. Studenten, die darüber hinaus Tendenzen erfolgreich identifizierten (für alle Folgenglieder mit $n > n_0$ gilt ein bestimmter Zusammenhang, o. ä.), bekamen K2. Wurde weiterhin der Begriff der Konvergenz so weit angewandt, dass die Folgenglieder mit $n > n_0$ in einem bestimmten Bereich liegen, wurde dies mit K3 bewertet. Erst im Falle einer vollständigen Analyse und richtigen Interpretation wurde K4 zugeordnet.

(2a) Angabe einer Nullfolge	
Studentenlösungen, Lösungsansätze	**Didaktische Analyse**
$\frac{1}{n}$	Da im vorangegangenen Unterricht die Folge $\frac{1}{n}$ als Prototyp der konvergenten Folgen behandelt wurde, wurde zur Angabe dieser Folge diese Information aus dem Gedächtnis abgerufen. Demzufolge wird diese Lösung auf Kompetenzstufe A und K1 eingeordnet.
$\frac{1}{n^3}$; $\frac{n^2+2}{3n^3-1}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^n$	Hinter der Angabe dieser und ähnlicher Folgen kann man eine differenziertere Vorstellung von der Konvergenz erkennen. Es wurden bestimmte Eigenschaften der Folgen mit ihren Grenzwerten in Verbindung gesetzt. Deswegen lassen sich diese Lösungen der Kompetenzstufe B und K3 zuordnen.

Anmerkung

Erwartet wurde zunächst eine Lösung auf Kompetenzstufe A.

Angabe von Folgen, die gegen (2b) 3, (2c) e, (2d) -1000 konvergieren	
Studentenlösungen, Lösungsansätze	**Didaktische Analyse**
$3+\frac{1}{n}$; $\frac{9n+5}{3n+2}$; $3+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $e+\frac{1}{n}$; $\frac{en+1}{n+5}$; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\frac{1}{n}-1000$; $\frac{-20n^3}{0{,}02n^3}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^n-1000$	Hinter der Angabe dieser und ähnlicher Folgen steht schon eine differenzierte Vorstellung von der Konvergenz. Es wurden bestimmte Eigenschaften der Folgen mit ihren Grenzwerten in Verbindung gesetzt. Deswegen lassen sich diese Lösungen der Kompetenzstufe B und K3 zuordnen.

Anmerkung

Erwartet wurden bei allen drei Teilaufgaben Lösungen auf der Kompetenzstufe B.

(2e) Angabe einer nicht monotonen Nullfolge	
Studentenlösungen, Lösungsansätze	**Didaktische Analyse**
$\frac{1}{n}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^n$	Diese Lösungsansätze geben über ein intuitives Verständnis von Konvergenz Auskunft. Die Frage nach der Nicht-Monotonie wurde nicht beachtet. Damit wurde keine Verbindung zwischen diesen beiden zentralen Forderungen hergestellt. Somit handelt es sich hierbei um eine Kompetenzstufe A und K1.
$(0)^n$	Hinter diesem Ansatz kann man eine differenziertere Vorstellung sowohl von der strengen Monotonie als auch von der Konvergenz erkennen. Es wurde allerdings nicht zwischen Monotonie und strenger Monotonie unterschieden. Es handelt sich also um eine Leistung der Kompetenzstufe B und K3.
$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; $\left(-\frac{1}{n}\right)^n$	Hinter diesem Ansatz kann man eine differenzierte Vorstellung sowohl von der Monotonie als auch von der Konvergenz und deren Verbindung erkennen. Es handelt sich also um eine Leistung der Kompetenzstufe C und K4.

Anmerkung

Erwartet wurde eine Lösung auf Kompetenzstufe C.

(2f) Angabe einer nicht monotonen Folge, die gegen 3 konvergiert	
Studentenlösungen, Lösungsansätze	**Didaktische Analyse**
$\frac{1}{3^n}+3$; $\frac{1}{n^3}+3$	Diese Lösungsansätze geben über ein intuitives Verständnis von Konvergenz Auskunft. Die Frage nach der Nicht-Monotonie wurde nicht beachtet. Damit wurde keine Verbindung zwischen diesen beiden zentralen Forderungen hergestellt. Somit handelt es sich hierbei um eine Kompetenzstufe A und K1.
$(-1)^n+3$; $(-3)^n$ $3\cdot(-5)^n$	Diese Lösungsansätze geben über ein intuitives Verständnis von der Monotonie Auskunft. Die Bedingung „Konvergenz gegen 3“ wurde nicht erreicht. Somit handelt es sich hierbei um eine Kompetenzstufe A und K2.
$3\cdot 1^n$	Hinter diesem Ansatz kann man eine differenziertere Vorstellung sowohl von der strengen Monotonie als auch von der Konvergenz erkennen. Es wurde allerdings nicht zwischen Monotonie und strenger Monotonie unterschieden. Es handelt sich also um eine Leistung der Kompetenzstufe B und K3.
$3+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$	Hinter diesem Ansatz kann man eine differenzierte Vorstellung sowohl von der Monotonie als auch von der Konvergenz und deren Verbindung erkennen. Es handelt sich also um eine Leistung der Kompetenzstufe C und K4.

Anmerkung

Erwartet wurde eine Lösung auf Kompetenzstufe C.

(2g) Angabe einer nicht monotonen, divergenten Folge	
Studentenlösungen, Lösungsansätze	**Didaktische Analyse**
$\left(\sqrt{2}\right)^n$	Bei diesem Lösungsansatz wurde die Frage nach der Nicht-Monotonie nicht beachtet, die Konvergenz im engeren Sinne betrachtet und erfolgreich negiert. Deswegen wurde bei diesem Ansatz Kompetenzstufe A und K2 zugeordnet.
$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$	Bei diesem Lösungsansatz wurde die Frage nach der Divergenz nicht beachtet, die Monotonie aber erfolgreich negiert. Deswegen wurde bei diesem Ansatz Kompetenzstufe A und K2 zugeordnet.

(2g) Angabe einer nicht monotonen, divergenten Folge	
1^n	Hinter diesem Ansatz kann man eine differenziertere Vorstellung sowohl von der strengen Monotonie als auch von der Konvergenz erkennen. Es wurde allerdings nicht zwischen Monotonie und strenger Monotonie unterschieden. Weiterhin wurde noch nicht erkannt, dass konstante Folgen marginale Fälle der Konvergenz darstellen. Es handelt sich also um eine Leistung der Kompetenzstufe B und K3.
$(-1)^n$; $(-5)^n$; $(-1)^n \cdot n$	Hinter diesen Ansätzen kann man eine differenzierte Vorstellung sowohl von der Monotonie als auch von der Konvergenz und deren Verbindung erkennen. Es handelt sich also um eine Leistung der Kompetenzstufe C und K4.

Anmerkung

Erwartet wurde eine Lösung auf Kompetenzstufe C.

3 a.) *„Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt."*	
Gegenbeispiele	**Didaktische Analyse**
$\frac{1}{n}$; $\frac{1}{n^2}$	Diese Lösungsansätze geben über ein intuitives Verständnis von Konvergenz Auskunft. Die Widerlegung der Aussage durch Nicht-Monotonie oder Nicht-Beschränktheit wurde nicht beachtet. Damit wurde keine Verbindung zwischen diesen zentralen Forderungen hergestellt. Somit handelt es sich hierbei um eine Kompetenzstufe A und K2.
$\frac{1}{4}$	Hinter diesem Ansatz kann man eine differenziertere Vorstellung sowohl von der strengen Monotonie als auch von der Konvergenz erkennen. Es wurde allerdings nicht zwischen Monotonie und strenger Monotonie unterschieden. Es handelt sich also um eine Leistung der Kompetenzstufe B und K3.
$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; $(2)^n$; $\frac{n^8+1}{n^3+3}$	Diese Ansätze zeigen, dass es nicht nur eine analytische Auseinandersetzung mit der inhaltlichen Seite der Aussage und mit den dahinterstehenden Begriffen erfolgte, sondern es auch zu einer Synthese dieser Inhalte gekommen ist. Dementsprechend wird diesen Lösungen Kompetenzstufe D und K5 zugeordnet.

Anmerkung

Erwartet wurde in jeder Teilaufgabe der Aufgabe 3 eine Lösung auf Kompetenzstufe D.

3 c.) „*Jede konvergente Folge ist monoton*”	
Gegenbeispiele	**Didaktische Analyse**
$3+\frac{1}{n}$	Dieser Lösungsansatz gibt über ein intuitives Verständnis von Konvergenz Auskunft. Die Widerlegung der Aussage durch Nicht-Monotonie wurde nicht beachtet. Damit wurde keine Verbindung zwischen diesen beiden zentralen Forderungen hergestellt. Somit handelt es sich hierbei um eine Kompetenzstufe A und K2.
$(-1)^n$	Dieser Lösungsansatz gibt über ein intuitives Verständnis von der Monotonie Auskunft. Die Bedingung „konvergent“ wurde nicht erreicht. Somit handelt es sich hierbei um eine Kompetenzstufe A und K2.
1^n	Hinter diesem Ansatz kann man eine differenziertere Vorstellung sowohl von der strengen Monotonie als auch von der Konvergenz erkennen. Es wurde allerdings nicht zwischen Monotonie und strenger Monotonie unterschieden. Es handelt sich also um eine Leistung der Kompetenzstufe B und K3.
$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; $(-0{,}00001)^n$	Diese Ansätze zeigen, dass es zu einer Synthese der begrifflichen Inhalte gekommen ist. Dementsprechend wird diesen Lösungen Kompetenzstufe D und K5 zugeordnet.

3 e.) „*Jede divergente Folge ist nicht beschränkt*”	
Gegenbeispiele	**Didaktische Analyse**
2; 1^n	Hinter diesem Ansatz kann man eine differenziertere Vorstellung von der Konvergenz erkennen. Es wurde allerdings noch nicht erkannt, dass konstante Folgen marginale Fälle der Konvergenz darstellen. Es handelt sich also um eine Leistung der Kompetenzstufe B und K3.
$(-1)^n$	Diese Lösung zeigt, dass es zu einer Synthese der begrifflichen Inhalte gekommen ist. Dementsprechend wird hier Kompetenzstufe D und K5 zugeordnet.

3 f.) „*Jede beschränkte Folge ist konvergent.*”	
Gegenbeispiele	**Didaktische Analyse**
$\lvert n\rvert$	Bei diesem Lösungsansatz wurde die Bedingung „beschränkt“ nicht erreicht. Somit handelt es sich hierbei um eine Kompetenzstufe A und K2.
$(-1)^n$	Diese Lösung zeigt, dass es zu einer Synthese der begrifflichen Inhalte gekommen ist. Dementsprechend wird hier Kompetenzstufe D und K5 zugeordnet.

Anhang I: Detaillierte Analyse der Fehlerkategorien bei der Fallstudie an der Wirtschaftshochschule Budapest

	abs. Anzahl der Fehler		relative Anzahl der Fehler		
	ung. spr. Ausb.	dt. spr. Ausb.	ung. spr. Ausb.	dt. spr. Ausb.	Differenz
Misused Data					
1000 statt -1000	3	1	0,0441	0,0179	-0,0263
1000-1 statt -1000	1	2	0,0147	0,0357	0,0210
1/100 statt 10-3	0	3	0,0000	0,0536	0,0536
fehlerhafte Abschrift	2	4	0,0294	0,0714	0,0420
Bedingung, Information ausser Acht lassen	5	7	0,0735	0,1250	0,0515
Misinterpreted Language					
unkorrekte Verwendung von Symbolen	12	9	0,1765	0,1607	-0,0158
unzulängliche sprachliche Formulierung	2	9	0,0294	0,1607	0,1313
nicht interpretierbar	7	8	0,1029	0,1429	0,0399
Logically invalid inference					
Vertauschung von Bedingung und Folge	2	2	0,0294	0,0357	0,0063
unlogische Schritte in der Schlussfolgerung	2	4	0,0294	0,0714	0,0420
unbegründete Schritte in der Schlussfolgerungskette	2	2	0,0294	0,0357	0,0063
distorted theorem or definition					
fehlerhafte Anwendung des Absolutbetrags	5	8	0,0735	0,1429	0,0693
fehlerhafte Anwendung des Satzes über den Grenzwert von Potenzfolgen	2	9	0,0294	0,1607	0,1313
fehlerhafte Anwendung des Satzes über den Grenzwert von gebrochen-rationalen Folgen	6	5	0,0882	0,0893	0,0011

	abs. Anzahl der Fehler		relative Anzahl der Fehler		
	ung. spr. Ausb.	dt. spr. Ausb.	ung. spr. Ausb.	dt. spr. Ausb.	Differenz
fehlerhafte Anwendung sonstiger Grenzwertsätze	3	0	0,0441	0,0000	-0,0441
Nicht-Unterscheidung zwischen Monotonie und strenger Monotonie	7	3	0,1029	0,0536	-0,0494
Deformierung der Folge $(1+1/n)^n$	15	13	0,2206	0,2321	0,0116
Deformierung des Folgenbegriffs	2	0	0,0294	0,0000	-0,0294
Vermischung von Sätzen	0	4	0,0000	0,0714	0,0714
Deformierung des Differenzenkriteriums	1	5	0,0147	0,0893	0,0746
Deformierung des Begriffs der Beschränktheit	0	1	0,0000	0,0179	0,0179
Deformierung der Ungleichung $\|a_n - A\|<\varepsilon$	8	4	0,1176	0,0714	-0,0462
Unverified solution					
Gleichetzung von Annahme und Beweis	11	6	0,1618	0,1071	-0,0546
Technical errors					
Fehler, Mängel in der Notation	18	17	0,2647	0,3036	0,0389
Rechenfehler bei Termumformungen	11	11	0,1618	0,1964	0,0347
Sonstige	3	4	0,0441	0,0714	0,0273

Anhang J: Online-Einstufungstest Englisch bei der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena (http://www.cdc.de/Einstufungstest-Englisch.1322.0.html)

Erster Teil

1. What ______________ name?
   your
   are your
   is your
   are you
2. ________________ John.
   My name it's
   Is
   My name
   My name's
3. Where ___________ from?
   you come
   you are
   you
   are you
4. What time ________________work in the morning?
   she starts
   does she start
   she start
   she does start
5. They ______________ in London.
   work
   works
   working
   's working
6. He plays football but he ____________rugby.
   don't play
   not play
   plays
   doesn't play
7. ________________ to get to the coast from here?
   How long it takes
   How long it take
   How long
   How long does it take
8. Where is _____________?
   my father car
   my father's car

the car of my father
my father car's

9. Is that book interesting? No, quite the opposite. It's really _________.
boring
annoying
funny
fascinating

10. ___________ a bus at 8.30?
It is
There is
Is
Is there

11. __________ many advantages to living in a big city.
They are
There's
There are
Are they

12. What _____________________ on Saturdays?
Ken usually does
does Ken usually do
does Ken usually
usually does Ken do

13. _______________ children?
You got any
Have you got any
You have any
Have you the

14. How often _______________ a holiday?
do you have
you have
have you
have you got

15. We met each other while I ___________ in Japan.
worked
have worked
was working
have been working

16. I __________ off my bicycle last Saturday.
fall
fell
fallen
have fallen

17. I like your new car. How much _____________ for it?
    you pay
    you paid
    did you pay
    have you paid
18. I bought this house __________________.
    10 years ago
    10 years away
    since 10 years
    for 10 years
19. _____________ another cup of coffee?
    You like
    Do you like
    Will you like
    Would you like
20. Elephants are ______________ sheep.
    as big as
    more than
    bigger than
    biggest
21. ______________ living person in the world is 121 years old.
    Oldest
    The older
    The elderly
    The oldest
22. I am responsible ______________________ the visit.
    for organising
    for organise
    to organising
    to organise
23. Thanks for your help." "_______________________________"
    Oh well.
    Never mind.
    It doesn't matter.
    You're welcome.
24. Sorry. Jane's not here at the moment. She______________ a friend in New York.
    visit
    visits
    visiting
    's visiting
25. I am writing _____________you of my change of address.
    for informing

to inform
for to inform
to informing

26. We need to walk more_____________ or we will miss our train.
quick
speedy
quickly
fast

27. ____________ read any of Shakespeare's works before?
Do you
Did you
Have you
Will you

28. I haven't finished my homework ______________.
just
yet
already
also

29. Hamlet ______________ by William Shakespeare.
written
is written
has been written
was written

30. Could you ____________ him I'll be a bit late?
ask
say
tell
explain

31. We played golf ________________ the rain.
in spite
despite
although
even though

32. "What can I get you?" "_________________________"
I'd love a cup of coffee.
Can you give me a lift to the station.
I'd like some help with the shopping
I'll be at home all morning

33. I'm going to book some theatre tickets this afternoon.
If you're interested, I ___________ one for you too.
get
'm getting

'm going to get
'll get

34. Are you free tomorrow evening? Sorry, I'm busy.
I ____________ to the cinema with some friends.
go
'm going
'll go
'd go

35. ______________________________ drive you to the airport?
Will I
Shall I
Have I to
Do I need

36. When you were a child, _________________ camping?
do you ever go
did you ever go
have you ever been
have you ever gone

37. What is the delay?
I __________________since 6 o'clock this morning.
wait
waited
am waiting
have been waiting

38. There were ____________ people at the carnival this year.
fewer
less
not as much
so little

39. You ________________to sit so close to the television.
It's bad for your eyes.
needn't
oughtn't
shouldn't
mustn't

40. If I ________ a lift , I'll call you.
need
will need
needed
'm needing

41. If I ____________ the answer, I'd tell you, but I don't.
know
knew

have known
had known

42. ___________________the Forbidden City when you were in Beijing?
Have you visited
You visited
Did you visit
Were you visiting

43. I ___________ since 7 o'clock this morning and I have nearly finished my book.
am reading
read
have been reading
have read

44. By the time he was five, Mozart ___________________several pieces of music.
composed
has composed
had been composing
had composed

45. Once she _________ the letter, she posted it immediately.
wrote
was writing
has written
had written

46. Would you mind ______________ the window?
to open
to have open
if I open
if I opened

47. Could you tell me where__________________?
does your brother work
your brother does work
your brother works
works your brother

48. You couldn't help me prepare dinner, ____________?
couldn't you
can't you
could you
can you

49. This time next week _______________ on the beach in the Caribbean.
I lie
I'm lying
I'll lie
I'll be lying

50. By the time we get to Naples, we _______________ nearly 2000 miles.
will drive
have driven
will have driven
would have driven

51. My cousin shares a flat with Alan Davis _______________ a Marine Biologist.
, who's
, that's
who's
that's

52. It's impossible! She _________ be a grandmother. She only looks about 35.
mustn't
can't
shouldn't
mightn't

53. She looks __________________ cry.
like she's going to
as if she's going to
like she'll
as if to

54. I found ____________________ writing desk in an antique shop at the weekend.
an old beautiful mahogany
an old mahogany beautiful
a beautiful old mahogany
a mahogany beautiful old

55. Under no circumstances __________ walk home late at night by yourself.
you should have
you should
should you
should you have

56. I'd like _____________ give me a hand with this please.
you to
that you
for you to
you

57. I _________________ to the theatre with you next Saturday if I hadn't already arranged to visit my parents.
will come
would come
had come
'll have come

58. Never in my life ____________ such a beautiful country.

did I visit
I visited
I have visited
have I visited

59. You knew he was coming tonight! I remember __________________ you!
    to tell
    telling
    to have told you
    that I tell
60. ____________________ to him, I could have prevented the accident.
    If I spoke
    I had spoken
    Had I spoken
    If I would have spoken to him

Zweiter Teil

Marks and Spencer is one of_________best-known shops and tourist attractions. It has stores in nearly every high street in Britain, as well as shops in other countries all over the world.

How _______________? 120 years__________, a Russian refugee called Michael Marks began selling household goods in a market in Leeds.____________he didn't speak much English and it was difficult _________about prices with his customers, _________ above his market stall he put a notice, which said "Don't ask how much - it's a penny." By the time he met Tom Spencer in 1884, he____________another seven market stalls.

They started Penny Stalls in many towns in the north of England and the famous "Marks and Spencer" chain was born.

Originally, Marks and Spencer sold only household goods and clothes but _____the 1920's, they also started selling food. Now they sell a wide variety of products, ____________furniture and financial services.

Things__________difficult for the company recently. People_____________to find Marks and Spencer's clothes_____________and preferred more modern shops. The company lost_______money and had to close most of its European branches. However, their new chairman, Luc Vandevelde, cut costs and employed a famous fashion designer to design new styles for M&S. The future looks bright and profits ___________steadily.______________closing their European stores, they still have shops in 30 countries worldwide, employ nearly 70,000 people and have a turnover of £8 billion.

Last year, the company________a profit of around £647 million,_________of 30%. They have new plans for the future. They_______some shops at big stations around Britain which will sell just food. Each store will also have an M&S coffee bar.

The company______________offering good value, good quality and good service. They also believe that to have happy customers, you must first have happy staff. Working conditions are excellent and as well as subsidised lunches, there are company doctors, dentists and____________hairdressers.

Anhang K: SAT-Geometrie-Test bei der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

A következő feladatoknál azt kell eldönteni, hogy a **megadott** válaszok közül melyik a **legjobb**. Ha egy feladat megoldásának pontos értéke nem szerepel a válaszok között, válaszd azt a megoldást, amelyik a leginkább megközelíti a helyes választ.

Tudnivalók:

1. Néhány feladat megoldásához szükséged lesz számológépre. Azonban minden egyes feladatnál Neked kell mérlegelned, hogy szükséges-e a számológép használata, vagy sem.

2. A teszt során minden esetben kizárólag fokokban mérjük a szögeket. Ügyelj arra, hogy a számológéped fokokban számoljon.

3. A feladatokhoz kapcsolódó ábrák célja, hogy hasznos információkkal szolgáljon a feladatok megoldásánál. A lehető legnagyobb pontossággal készültek, kivéve, ha olyan feladathoz kapcsolódnak, ahol nem szükséges, hogy az ábra méretarányos legyen.

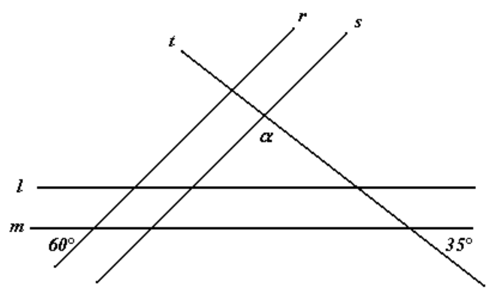
4. A feladatok mellett üresen hagytuk a lapok jobb szélét, hogy legyen helyed piszkozatokat készíteni. Kérjük, hogy minden mellékszámítást, rajzot, ábrát, becslést itt készíts el, és semmiképpen ne dolgozz általad hozott papíron.

5. A rendelkezésre álló idő 28 perc.

1. Egy téglalap négyszer olyan hosszú, mint amilyen széles. Ha a téglalap kerülete 40 cm, mekkora a területe?

   (A) 4 cm^2
   (B) 16 cm^2
   (C) 20 cm^2
   (D) 40 cm^2
   (E) 64 cm^2

2 Az alábbi ábrán látható egyenesekre teljesül, hogy $l \parallel m$ és $r \parallel s$. Mekkora az α-val jelzett szög?

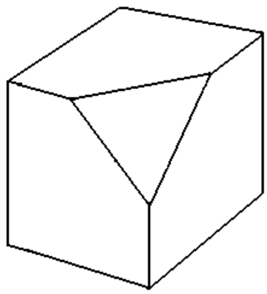


   (A) 65°
   (B) 80°
   (C) 85°
   (D) 95°
   (E) 115°

3 Az FGH háromszög hasonló a JKL háromszöghöz. A GH oldal hossza 2,1 m, a neki megfelelő KL oldalé 1,4 m, ismert ezenkívül, hogy a JKL háromszög kerülete 3,6 m. Mekkora az FGH háromszög kerülete?

(A) 2,4 m
(B) 3,3 m
(C) 4,3 m
(D) 5,1 m
(E) 5,4 m

4 Levágtunk egy tetraédert egy kocka csúcsából oly módon, hogy a tetraéder három csúcsa a kocka három egy csúcsba futó élének felezőpontjával esik egybe. Ha a kocka fennmaradó hét csúcsánál is levágunk egy-egy ugyanekkora tetraédert, hány oldala lesz a kapott testnek?

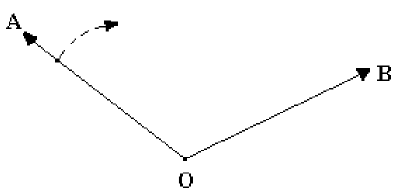


(A) 6
(B) 8
(C) 12
(D) 14
(E) 16

5 Egy paralelogramma csúcsait jelölje rendre A, B, C, D (ebben a sorrendben). Az alábbiak közül melyek **nem** feltétlenül egybevágóak:

(A) BAC∠ ill. ACD∠
(B) ABC∠ ill. CDA∠
(C) $\overline{AC}$ ill. $\overline{BD}$
(D) $\overline{AB}$ ill. $\overline{CD}$
(E) $\overline{AD}$ ill. $\overline{BC}$

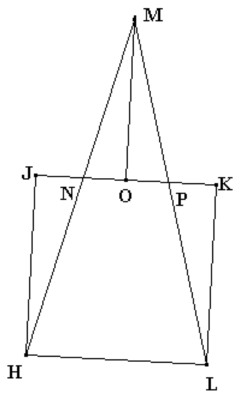
6 Ha az ábrán látható OA szakaszt az óramutató járásával megegyezően 7°-kal elforgatjuk az O pont körül, akkor az merőleges lesz OB-re. Mekkora volt az AOB∠ szög a forgatás előtt?



(A) 97°
(B) 90°
(C) 87°

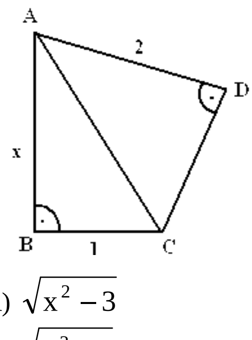
(D) 83°
(E) 80°

7 Az alábbi ábrán a HJKL négyszög négyzet, és $\left|\overline{JN}\right| = \left|\overline{NO}\right| = \left|\overline{OP}\right| = \left|\overline{PK}\right|$. Hogyan aránylik az MNP háromszög területe a HJKL négyzet területéhez?



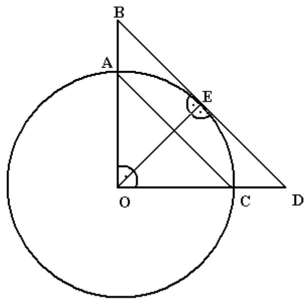
(A) $\frac{1}{8}$
(B) $\frac{1}{4}$
(C) $\frac{1}{3}$
(D) $\frac{3}{8}$
(E) $\frac{1}{2}$

8 Az alábbi ábrán látható ABC ill. ADC háromszögek derékszögűek. Mekkora a CD szakasz?



(A) $\sqrt{x^2 - 3}$
(B) $\sqrt{x^2 + 1}$
(C) $\sqrt{x^2 + 1} + 2$
(D) $\sqrt{x^2 + 3}$
(E) $\sqrt{x^2 + 5}$

9 A következő ábrán látható kör középpontja O, sugara r. Ha tudjuk, hogy $\left|\overline{OB}\right| = \left|\overline{OD}\right|$, hány olyan (végpontjaival jelölt) szakasz látható az ábrán, amelynek hossza r?

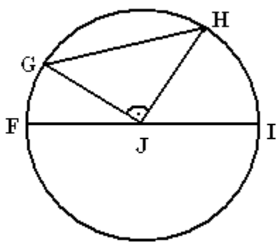


(A) kettő
(B) három
(C) négy
(D) öt
(E) hat

10 Egy konvex sokszögben a belső szögek összege 1800°. Hány oldala van a sokszögnek?

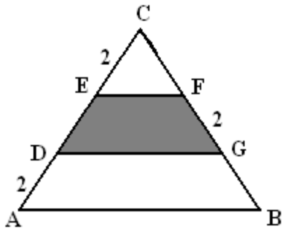
(A) 8
(B) 10
(C) 12
(D) 14
(E) 18

11 Az ábrán látható kör középpontja J, sugara 6 cm. Mekkora a GH húr hossza?



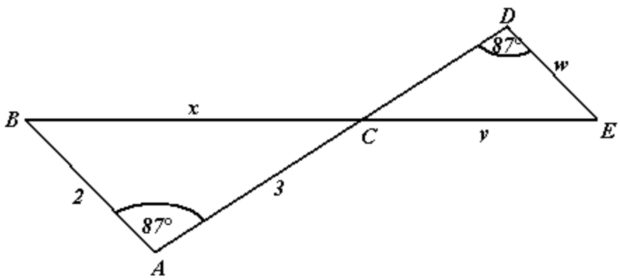
(A) 6 cm
(B) 8,49 cm
(C) 10,39 cm
(D) 12 cm
(E) 16,97 cm

12 A következő ábrán látható ABC háromszög szabályos, valamint tudjuk, hogy EF ‖ DG ‖ AC. Mekkora a satírozott rész kerülete?



(A) 4
(B) 6
(C) 8
(D) 9
(E) 10

13 Az ábrán látható ABC és DEC háromszögek hasonlóak és w = 5. Mekkora az $\frac{x}{y}$ hányados értéke?



Figyelem! Az ábra nem méretarányos!

(A) $\frac{2}{5}$

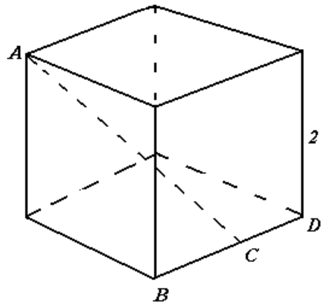
(B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{2}$

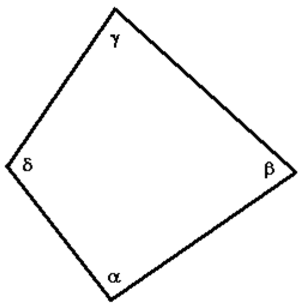
(E) $\frac{5}{2}$

14 A következő ábrán látható kocka éle 2 cm hosszúságú. Mekkora a BD él C felező-pontjának távolsága az A csúcstól?



(A) $\sqrt{7}$ cm
(B) $2\sqrt{2}$ cm
(C) 3 cm
(D) 5 cm
(E) $\sqrt{29}$ cm

15 Ha az alábbi ábrán látható négyszög esetében $60° < \alpha + \gamma < 160°$ teljesül, melyik egyenlőtlenség írja le a $\beta + \delta$ összeg összes lehetséges értékét?

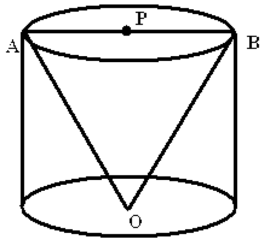


(A) $0° < \beta + \delta < 60°$
(B) $60° < \beta + \delta < 120°$
(C) $120° < \beta + \delta < 200°$
(D) $200° < \beta + \delta < 300°$
(E) $420° < \beta + \delta < 520°$

16 Az R, S és T pontok egy körvonalra illeszkednek. Ha a kör középpontja az RT szakaszon fekszik, az RST háromszög

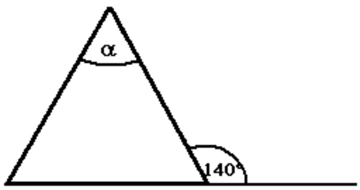
(A) hegyesszögű
(B) tompaszögű
(C) derékszögű
(D) egyenlőszárú
(E) egyenlő oldalú

17 A következő ábrán látható egyenes körhengerben P és O jelöli a két alap középpontját, $\overline{AB}$ az egyik alap átmérője. Mekkora az ABO háromszög kerülete, ha a henger magassága 5 cm, az alap sugara 3 cm?



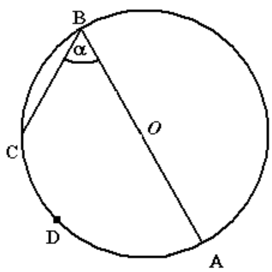
(A) 11,83 cm
(B) 14,66 cm
(C) 16 cm
(D) 17,66 cm
(E) 27,66 cm

18 Mekkora az alábbi ábrán látható α szög?



(A) 40°
(B) 60°
(C) 80°
(D) 100°
(E) 140°

19 A következő ábrán $\overline{AB}$ az O középpontú kör átmérője, $\overline{CB}$ a kör egy húrja, és $\alpha = 45^o$. Hogyan aránylik egymáshoz a CDA körív hossza és a kör kerülete?



(A) $\frac{1}{12}$

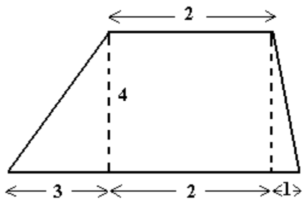
(B) $\frac{1}{10}$

(C) $\frac{1}{9}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{1}{18}$

20 A következő ábra egy trapézt ábrázol, amellyel kapcsolatban ismertek az ábrában feltüntetett adatok (minden érték cm-ben értendő). Mekkora a trapéz rövidebb átlója?



Figyelem! Az ábra nem méretarányos!

(A) 2 cm
(B) 3 cm
(C) 4 cm
(D) 5 cm
(E) $\sqrt{6}$ cm

21 Egy egyenes körkúp alapjának sugara 6 cm, és egy az alappal párhuzamos metszet sugara 4 cm. Mekkora a kúp magassága, ha a metszet távolsága az alaptól 8 cm?

(A) 11 cm
(B) $13\frac{1}{3}$ cm
(C) 16 cm
(D) 20 cm
(E) 24 cm

22 Egy téglatest oldalai 8, 4 és 1 cm. Mekkora a legnagyobb olyan szakasznak a hossza, amelynek végpontjai a téglatest két csúcspontja?

(A) $4\sqrt{5}$ cm
(B) 9 cm
(C) $3\sqrt{10}$ cm
(D) 10 cm
(E) 12 cm

23 Egy négyszög két-két oldala egyenlő hosszú, ill. van két derékszöge. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

I. A négyszög téglalap

II. A négyszög átlói merőlegesek egymásra

III. A másik két szög összege 180°

(A) csak I.

(B) csak I. és II.

(C) csak I. és III.

(D) csak III.

(E) I., II. és III.

Anhang L: Sprachlich erleichterte Fassung der Aufgabe von Sharygin und deren Lösung bei der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Die Aufgabe:

The problem of I. Sharygin, published by I.M.Yaglom. Geometrical Transformations, part 1 and 2. Moscow, GITTL, 1954, 1956 (in Russian):
Three circles of the same size meet in the point S. We consider the triangle ABC bounded by the common tangents[115] and containing the circles. Prove that the circumcentre[116] of triangle ABC, the incentre[117] of triangle ABC, and S lie in a straight line.

a.) Translate the text

b) Draw a figure

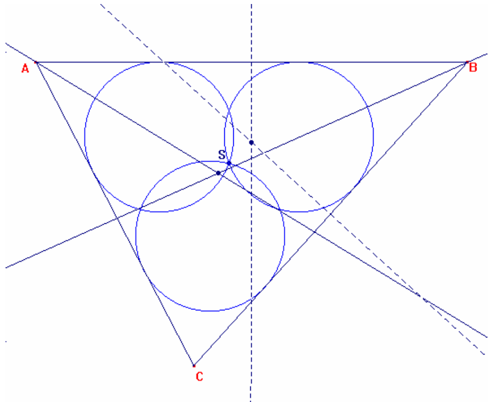
c) Construct a corresponding figure by only using ruler and compass

[115] The tangent to a circle is a straight line that just touches the circle, it means the circle and the straight line have only one common point.
[116] The centre of the circumscribed circle. The point at which the perpendicular bisectors intersect.
[117] The centre of the inscribed circle. The point at which the angle bisectors intersect.

Die Lösung:

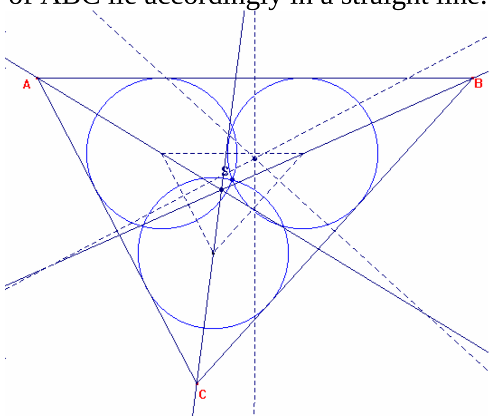
The solution of the problem:

The configuration should look like this:



Connect the centres of the three circles.

- The new triangle and ABC have the same incentre[118] and they are similar, because of an enlargement with respect to this centre maps the new triangle onto ABC.
- The circumcentre[119] of the new triangle is S (because S has the same distance from each vertex)
- The enlargement with respect to the common incentre of the new triangle and ABC maps S (the circumcentre of the new triangle) onto the circumcentre of ABC.
- Because every enlargement with respect to a point (i.e. the centre of the enlargement) has the property that an arbitrary point, its image point, and the centre of the enlargement lie in a straight line. S, the incentre and the circumcentre of ABC lie accordingly in a straight line.



Translate the text

[118] The centre of the inscribed circle. The point at which the angle bisectors intersect.

[119] The centre of the circumscribed circle. The point at which the perpendicular bisectors intersect.

Anhang M: ”Landkarte” der geometrischen Kompetenz bei Testperson 1 und Testperson 2 in der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Flächeninhalt	B						B								
Umfang	B		B									0			
Winkel		B				A									
Dreiecke			B				B	B	B		B	0	A	0	
Vierecke					C		B								A
Vielecke										B					
Räumliche Figuren				B										0	
Kreis und Winkel															
Ähnlichkeit			B									0	A		

	16	17	18	19	20	21	22	23
Flächeninhalt								
Umfang								
Winkel			B					
Dreiecke		C			C	B	C	
Vierecke					C			0
Vielecke								
Räumliche Figuren		C				B		
Kreis und Winkel	A			B				
Ähnlichkeit						B	C	

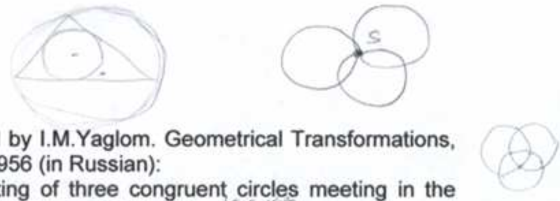
Testperson 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Flächeninhalt	B						B								
Umfang	B		B									0			
Winkel		B				A									
Dreiecke			B				B	0	0		B	0	A	C	
Vierecke					C		B								A
Vielecke										0					
Räumliche Figuren				0										C	
Kreis und Winkel															
Ähnlichkeit			B									0	A		

	16	17	18	19	20	21	22	23
Flächeninhalt								
Umfang								
Winkel			0					
Dreiecke		C			0	0	0	
Vierecke					0			0
Vielecke								
Räumliche Figuren		C				B		
Kreis und Winkel	A			0				
Ähnlichkeit						0	0	

Testperson 2

Anhang N: Lösungen von Testperson 1 in der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena



The problem of I. Sharygin, published by I.M.Yaglom. Geometrical Transformations, part 1 and 2. Moscow, GITTL, 1954, 1956 (in Russian):

We are given a configuration consisting of three congruent circles meeting in the point S. We consider the triangle ABC bounded by the common tangents and containing the circles. Prove that the circumcentre of triangle ABC, the incentre of triangle ABC, and S are collinear.

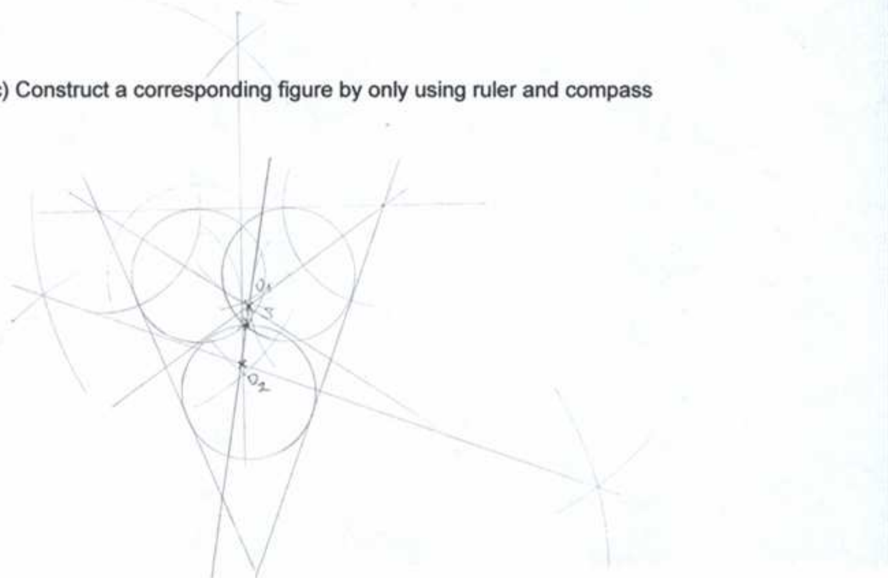
közös tartalmaz köré középpont belső kör középpont

a.) Translate the text

Megadtunk egy alakzatot, amely 3 egybevágó körből áll, amelyek egy S pontban metszik egymást. (találkoznak). ~~Figyeljük meg, hogy az ABC háromszög közös tangensek határolják~~ Azt az ABC háromszöget vesszük figyelembe, amelyet közös érintők határolnak és tartalmazza ~~nak~~ a köröket. Bizonyítsd be, hogy az ~~háromszög~~ ABC háromszög köré írt kör középpontja, az ABC △ körülírható kör középpontja és az S pont egy egyenesen fekszenek.

b) Draw a figure

c) Construct a corresponding figure by only using ruler and compass



Az alakzat a következőképpen néz ki:

...

Kössük össze a három kör középpontját

- ~~Az új háromszög~~ér és az ABC Δ-nek ~~[illegible]~~ ugyanaz a ~~belső~~ beírható kör középpontjuk és ~~homotetikusan~~ ~~homotetikusak~~ hasonlóak a középpontra nézve. *

- ~~A körülírt kör középpontja~~

  Az új háromszög körülírt kör középpontja S (~~mert~~ tengelyes szimmetria miatt)

- A ~~homotetikus~~ ~~homotetia~~ hasonlóság ~~transzformáció~~ S ~~abszolútja~~ S-et (az új háromszög körülírt kör középpontja) az ABC Δ ~~köré~~ körülírt kör középpontjába képezi.

* Az új háromszög és az ABC Δ-be írható körök középpontja megegyezik és..

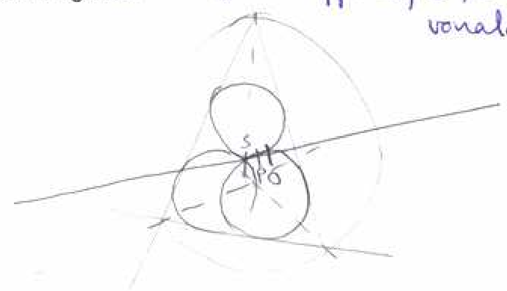
Anhang O: Lösungen von Testperson 2 in der Fallstudie an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

The problem of I. Sharygin, published by I.M.Yaglom. Geometrical Transformations, part 1 and 2. Moscow, GITTL, 1954, 1956 (in Russian):
We are given a configuration consisting of three congruent circles meeting in the point S. We consider the triangle ABC bounded by the common tangents and containing the circles. Prove that the circumcentre of triangle ABC, the incentre of triangle ABC, and S are collinear.

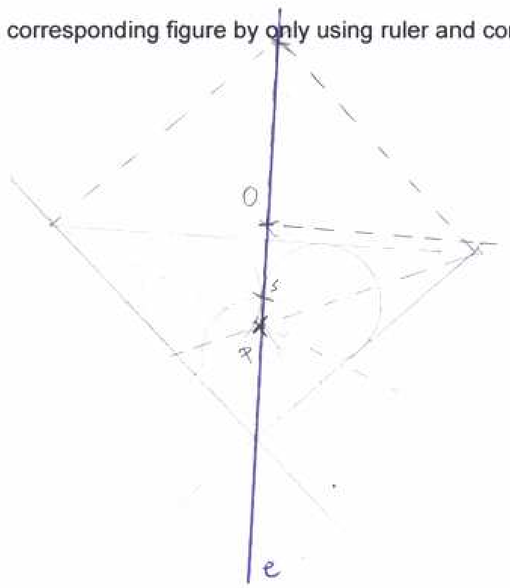
a.) Translate the text

Adott egy ábra, melyen 3 egybevágó, az S pontban találkozó kör látható. Az ABC háromszöget a körökhöz tartozó közös érintők alkotják, s a körök a háromszögön belül helyezkednek el. Bizonyítsa be, hogy az ABC háromszög körülírt középpontja, egyensúlyi középpontja, s az S pont egy vonalon fekszenek!

b) Draw a figure



c) Construct a corresponding figure by only using ruler and compass



a 1. Sharygin-féle probléma, az I. M. Yaglom: Geometriai transzformációk című könyvből (Moszkva, GITTL, 1954, 1956; orosz nyelven):

Az ábrának így kell kinéznie:

Kösse össze a három kör középpontját!

- Az új háromszögnek és az ABC háromszögnek ugyanaz az egyensúlyi középpontja és homotetikusak erre a pontra nézve.
- Az új háromszög körközéppontja (a tengelyszimmetria miatt): S.
- A homotetika az S pontot (az új háromszög körközéppontját) az ABC háromszög körközéppontjává alakítja.

Az ábrának így kell kinéznie:

Kösse össze a három kör középpontját!

- Az új és az ABC háromszögbe írható kör középpontja egybeesik és a háromszögek hasonlóak, mert ehhez a középponthoz képest nagyítottuk fel a háromszöget, s így az új Δ az ABC Δ területére esik.

- Az új háromszög köré írható kör középpontja S (mert S mindhárom csúcsponttól egyenlő távolságra van).

- A nagyítás az új és az ABC háromszögbe írható kör körés középpontjához képest történik. Így az S (az új háromszög köré írható kör középpontja) az ABC háromszög köré írható kör középpontjává válik) /az is lesz.