

# **SZAKDOLGOZAT**

Labancz Anita

Debrecen

2009

Debreceni Egyetem  
Informatikai Kar

# **Modellfejlesztés és számítógépes szimuláció keménykötésű betonon**

**Témavezető:**

Kun Ferenc  
egyetemi tanár

**Készítette:**

Labancz Anita  
mérnök informatikus

Debrecen

2009

# TARTALOMJEGYZÉK

1. Motivációk .....	3
1.1. A beton fontossága.....	3
1.2. A beton szerkezete és annak repedése .....	6
2. Beton struktúrájának felépítése .....	10
3. Rendszer időfejlődése terhelés alatt .....	15
3.1. A szimulációhoz szükséges adatok előállítása.....	15
3.2. A molekuláris dinamika és alkotóelemei.....	18
3.3. Szimulációs alapmodell elkészítése.....	19
3.4. A modell részecskéinek méretre igazítása .....	20
3.5. A részecskék méret szerinti színezése .....	21
3.6. A pont kiválasztása .....	22
3.7. A részecske kezdeti kiindulópontjának beállítása .....	23
3.8. A rendszer mozgásegyenlete.....	24
3.9. Tömegpontrendszer mozgásegyenletei .....	26
3.10. Másodrendű Runge-Kutta módszer.....	28
4. Összefoglalás.....	30
5. Irodalomjegyzék.....	31

# 1. MOTIVÁCIÓK

## 1.1. A beton fontossága

A beton a Föld egyik legnagyobb tömegben használt anyaga. „A **beton** kötőanyagból (cementből) és adalékanyagokból (homokos kavicsból) álló, a hidratáció hatására megszilárduló anyag.”<sup>1</sup> Manapság még az alkotó elemeket ki szokták egészíteni különböző adalékszerekkel is.

Elsőnek a rómaiaknál jelent meg a beton (- latinul: *caementum* – durva kötőanyag, *concretus* (beton) – összekevert, összenőtt.). Utak, vízvezetékek, fürdők építésére használták.

Előállításának módját finomítva, elsőnek a Pantheon kupolájának szerkezetében jelent meg a beton. A kupola aljától a közepe felé haladva egyre vékonyodik a szerkezet, a kedvezőbb terhelés szerint. I. sz. 27-ben Pollio Vitruvius építészeti könyvében is szerepel a beton leírása.



1. ábra  
A Pantheon kupolája

A betont számtalan óriási építész is használta Magyarországon a történelmünkben. A Lánchíd alépítményének egyéb részei, pl. a hídfők és a pillérek felmenő falainak belső részei cementhabarcsba rakott kőfalazattal készültek. Az első jelentős magyarországi építmény, amely teljes egészében betont alkalmaztak, az a Ferenc József-hajózsilip. Víz alatti

<sup>1</sup> Forrás: <http://hu.wikipedia.org/wiki/Beton>

betonozással állították elő a felmenőfalak egy részét. Mihalik János kísérletei alapján, a kivitelező a sarkos kavicsot és zúzottkövet lényegesen jobbnak találta, mint a sima kavicsot. Nagy hangsúlyt fektetett arra, hogy a felhasználásra kerülő adalékanyag a portól és piszoktól gondosan megtisztított legyen.

Elsősorban beton alapozással készült épületeknél használták kezdetben. Steindl Imre tervei alapján építették a gyönyörű Országházunkat. Az építménynek egyetlen összefüggő nagy betonlemez (betonlepeny) alapja van. A beton alaplemeznek feladata a terhelések elosztása. Az alapbeton összetétele: 1 térfogatrész lábatlani románcement, 3 térfogatrész dunakavics és 4 térfogatrész budaújlaki zúzottkő. Nendtwich Gusztáv ellenőrizte az Országház épületének alapozási munkáit. Lerögzíti a cementre vonatkozó előzetes vizsgálatok fontosságát. Nagyobb építkezések helyén laboratórium felállítását javasolja, amely lehetővé teszi a cement és beton minőségének ellenőrzését. Ellenőrző vizsgálatok meghatározták a beton húzószilárdságát. A cement kötési idejének kezdetét is ellenőrizték, valamint a kötésben lévő beton mozgását. Dimitrov téri Vámpalota (jelenleg Közgazdasági Egyetem) 1871-ban Ybl Miklós tervezte. Vastartók közötti poroszüveg boltozatos födémekkel épült. 1907-ben egy részét átalakították Biehn János tervei szerint, és ekkor a vasgerendák között vékony betonboltozatos födémeket építettek be. Betonlepenyalapozással készült: a budai hengermalom lisztraktár épülete is, 2 m vastagsággal, Földalatti villamosvasút alagútszelvénye, Műegyetem.

Magyar vonatkozásban meg kell említeni Zielinski Szilárdot (építőmérnök, műegyetemi tanár), aki a magyarországi vasbetonépítés úttörője volt. Magyarországon az Ő nevéhez kötődik a Szegedi víztorony (1903- 1904), Ungar- Mayer – palota vasbeton szerkezete (1911), Hosszúvölgyi viadukt, (vasbeton, 1907), Kikötői elevátor, Fiume (vasbetonból 1910) és a A Lánchíd újjáépítésének tervei (1912-1916).

Nagymértékben került sor beton alkalmazására mólók burkolására, a balatoni kikötőkben partok, és partfalak építésére. Házi kezelésben a hullámtörőket és a kikötőépületek jelentős részét is betonból építették. A marosvásárhelyi vízerőtelepen a Maros folyón 68 m nyílású duzzasztógát épült. A gát teljesen vasalás nélküli betonból épült. Első vasúti háromcsuklós betonhidunk 28,53 m támaszközzel 1913-ban épült a Kelenföld és Adony-Pusztaszabolcs vasúti állomások között. A felszerkezet beton hídfőkön acél sarukra támaszkodik.

Láthatjuk, hogy a betont, mennyire sokszínűen lehet felhasználni. Ha belegondolunk, miért is vált ennyire népszerűvé és miért lett ennyire közkedvelt az építőmérnökök körében? A válasz roppant egyszerű: a beton megfelel az építményekkel szembeni követelményeknek. Mégpedig:

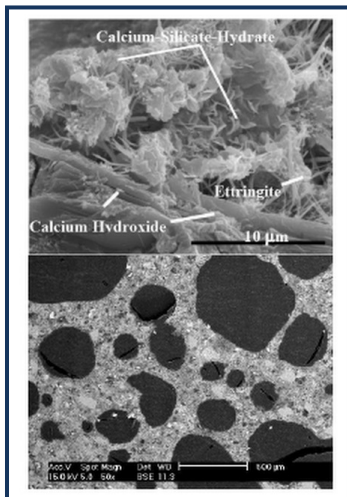
- a mechanikai szilárdság és állékonyság;
- alkalmazási biztonság
- tűz- és zajvédelem
- higiénikus, egészségi és környezeti körülmények
- hőszigetelés

Ezek a feltételek tartósan, meghatározott igénybevételi feltételek mellett az építmény tervezett élettartamáig biztosított.

Legfontosabb tulajdonsága mégis a tartósság – tehát a beton ellenálló képessége a környezet hatásaival szemben – amelyet gazdaságosan teljesít (fenntartási és létesítési költségei kielégítőek).

Napjainkban oly szinten előrehaladott a beton vizsgálata, a vizsgálatok eredményeinek tanulmányozása, és ennek hatására a folyamatos fejlesztése, hogy Magyarországon 15-20 féle betont (szálerősítésű beton, fagyállóbeton, vízzáró beton, kopásálló beton... stb.) tudnak előállítani különböző nagy építő vállalatok, és amelynek száma rohamosan nő.

## 1.2. A beton szerkezete és annak repedése

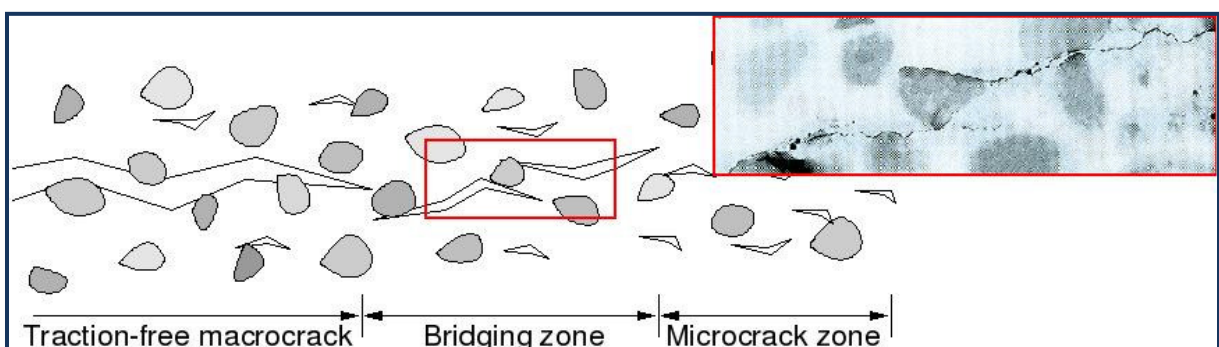


2. ábra  
A beton szerkezete

A korszerű beton tipikus összetétele 60-75% homok és közúzalék, 15-20% víz és 15-20% cement. A cement olyan hidraulikus kötőanyag, amely a víz hatására kémiai reakcióba lép a kötő- és adalékanyagokkal, és azokat összeragasztja. A mai világban, évente százmillió tonna cementet állítanak elő. A beton legnagyobb részét a homok és a kavics teszi ki, amit összefoglaló néven, adalékanyagoknak nevezünk. A különböző méretű kavicsok beágyazódnak a cement mátrixba, ezáltal a beton erősen heterogén szerkezetű. A modern tudománynak köszönhetően különböző adalékszereket is szoktak hozzáadni, elkészítésekor. Ez által befolyásolhatjuk, hogy a beton például hamarabb vagy lassabban kössön meg.

A betont nem tekintjük folytonos közegnek, hanem olyan többkomponensű anyagnak, amelynek komponensei sajátos térstruktúrát alkotnak. Ebből következik, hogy a beton repedése rendkívül különleges folyamat és ennek a struktúrának a megismerése lehetőséget ad arra, hogy magyarázatot találjunk a repedésképződés néhány sajátosságára.

Újhelyi János szerint három szinten lehet vizsgálni a beton struktúrájának és tulajdonságainak az összefüggéseit:



3. ábra  
A beton repedése

1. **Mikroszint:** nanométer (nm) és mikrométer ( $\mu\text{m}$ ) közötti méretűek tartoznak ide. Jellemzői: gél struktúra, a cementkő fázisösszetételei, a cement ásványi összetétele, adalékanyag-kiegészítő anyag vegyi összetevői. Meghatározza az ellenállást alkáli-kovasav és alkáli-karbonát reakcióval szemben, a szilárdulás folyamatát és sebességét, az utószilárdulást, a beton viselkedését hideg vagy meleg időjárás esetén és a hő érlelés eredményét.
2. **Mezoszint:** méretrendje mikrométer ( $\mu\text{m}$ ) és milliméter (mm) közötti. Jellemzői: szilárd beton kapilláris pórusai, cement, finomhomok és kiegészítő anyagok szemcséi, mesterségesen képzett légbuborék, cementkövek és adalékanyag határfelületei, repedések. Meghatározza a fagyállóságot, vízzáróságot, agresszív hatásokkal szembeni ellenállást karbonátosodást, olvasztósó-állóságot, áteresztőképességet, acélbetét korrózióvédelmét, együttműködését a betonnal, száradási zsugorodást, kúszást és repedési hajlam mértékét.
3. **Makroszint:** méretrendje milliméter (mm) és méter (m) közötti. Jellemzői: betonösszetétel, alkotóanyagok aránya (tömeg vagy térfogat szerint porozitás és durva hibák mértéke. Meghatározza a friss betonkeverék bedolgozhatóságát és összetartó képességét, eltarthatóságát, sugárvédelmének mértékét, a szilárd beton szilárdságát, kopásállóságát, tűzállóságát, testsűrűségét és rugalmas tulajdonságait.

A struktúra jellemzőire a létrejövetelének jellemzői adnak magyarázatot. Az adalékanyag a legnagyobb tömeghányadot adó komponens. Már korábban meghatároztuk, hogy az adalékanyag a teret nem folytonosan tölti ki, hanem úgy, hogy az összetámaszkodó különböző nagyságú szemcsék közt üregek és járatok maradnak. A tökéletesen tömörített, ideális szemszerkezetű frissbeton keverékről feltételezhetjük, hogy a szemcsék térbeli vázrendszer alkotnak, amely alaktartó, ha a beton hidrosztatikus nyomás állapotában van. Ezt úgy értelmezhetjük, hogy minden kavicsot, szemcsét az adott helyén rögzít az a támaszerő-rendszer, amellyel a szemcse a környező szemcsékhez támaszkodik. Ez az összetámaszkodás, amelyhez hozzájárul a szemcsék közti súrlódás is, eltérést is lehetővé tesz a hidrosztatikus feszültségállapottól, de – ezt a szemcsés anyagok mechanikájából jól tudjuk, - az eltérésnek erős korlátjai vannak.

Napjainkban az anyagtudomány még mindig nem érte el fő célját, hogy minél jobban megközelítsük az ideális szemcsevázat, amelyek gyakorlati lehetőséget adnának arra, hogy a

már tapasztalt korlátokat és következményeket a szemcseváz diszkrét mechanikai modelljeinek analízisével is meg tudjuk határozni. Egyes kutatók, ebben a témában eredményeket ígérnek a váz strukturális önhasonlóságára épülve.

A vízárosági kérdések tárgyalásánál azt a feltevést alkalmazzuk, hogy cementpép tölti ki az adalékváz szemcsék közti hézagrendszerét. Most vizsgáljuk meg ennek a szerkezetét.

A cement mikron-méretű szemcséit inhomogén anyagnak tekintjük, mivel vízben nem oldható anyagok és mivel a víznek és a cementnek a beton megszilárdulásában különböző szerepei vannak.

A szilárdulás a cementásványok hidratációja révén következik be. „A hidratáció olyan vegyi reakció, amelynek során a hidraulikus kötőanyag szemcsék nagy fajlagos felületű cement-ásványok által alkotott cementkővé alakulnak át. A víz jelentős része beépül a cementkőbe, de eközben a keverék szilárdanyag-tartalmának a térfogata csekély mértékben változik meg. Külsőleg ezt a változást nem is térfogat-növekedésnek, hanem általában a frissbeton keverék térfogat-csökkenésnek észleljük, mert a vízmolekulák cementásványok felületén tömörebb elrendezésben töltik ki a teret, mint a cseppfolyós fázisban. Ezt a térfogat-csökkenést plasztikus zsugorodásnak nevezzük.”<sup>2</sup>

A cementkő a hidratáció során az adalékvázhoz kapcsolódik. A beton megkötése során nem úgy kell elképzelnünk, hogy folytonosan tölti ki a kavicsok közötti teret, hanem a hidratáció előre haladtával egyre jobban csökkenő cseppfolyós halmazállapotú víz helyén vízfilmekkel bélelt, vízpárával és levegővel kitöltött járatok és üregek alakulnak ki. Ebből következik, hogy a beton struktúráját az adalékváz és a cementkő együtteséből határozhatjuk meg.

---

<sup>2</sup> Forrás:

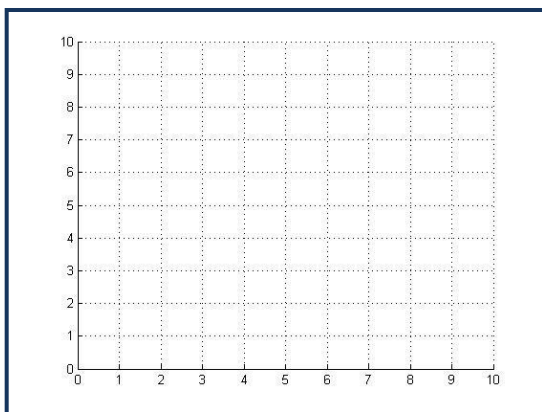
<http://209.85.129.132/search?q=cache:seSwiHNRqTYJ:www.vbt.bme.hu/oktatas/melyep/Eloadasok/Alakv.doc+A+beton+nem+rugalmas+alakvatozasairól&cd=3&hl=hu&ct=clnk&gl=hu>



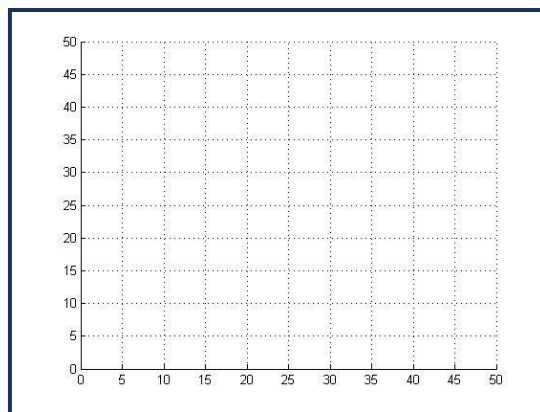
4. ábra  
A beton repedése 2

A beton struktúrájának ismeretében felmerül a kérdés, hogy mi történik a betonnal, ha arra valamilyen külső hatást gyakorolunk? Mondjuk, erőt fejtünk ki az egyik pontjára és azt utána „szabadjára engedjük” és hagyjuk, hogy az, a betont alkotó szemcsékkel kölcsönhatásba kerüljön. Ez volt a kiindulási pontom a szakdolgozat írásának kezdetekor. Előállítottam egy beton szerkezetét Matlab segítségével, majd az ebből nyert adatokból a számítógép segítségével, két dimenzióban Runge-Kutta módszerrel szimuláltam ennek a viselkedését.

## 2. BETON STRUKTÚRÁJÁNAK FELÉPÍTÉSE



5. ábra  
10 x 10-es modell



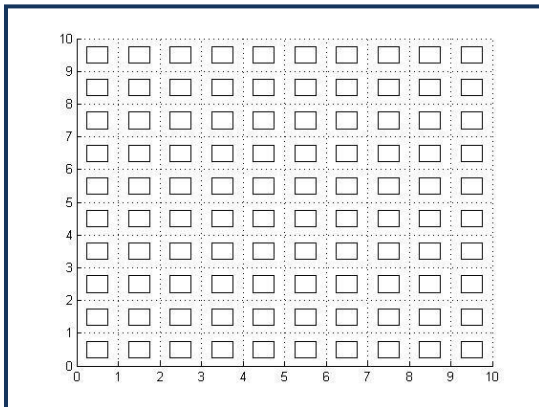
6. ábra  
50 x 50-es modell

```
grid on
axis([0 50 0 50])
imax=50;
jmax=50;

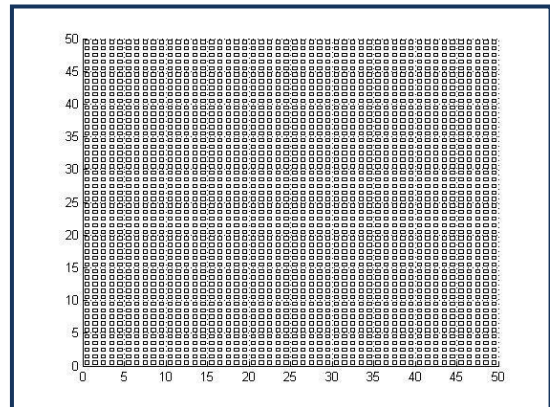
n=imax*jmax;
posx=zeros(1,n);
posy=zeros(1,n);
(...)
```

```
%axis([0 10 0 10])
%imax=10;
```

Legfontosabb kiindulási pont, hogy beállítsuk a számunkra legmegfelelőbb képernyőnek a méretét és ezt megjelenítsük. Kezdetben tízszer tízes méretű volt ez a beállítás, amelyet a későbbiekben megnöveltünk ötvenszer ötvenesre, amit később ennél sokkal nagyobb méretűre is fel lehet nagyítani.



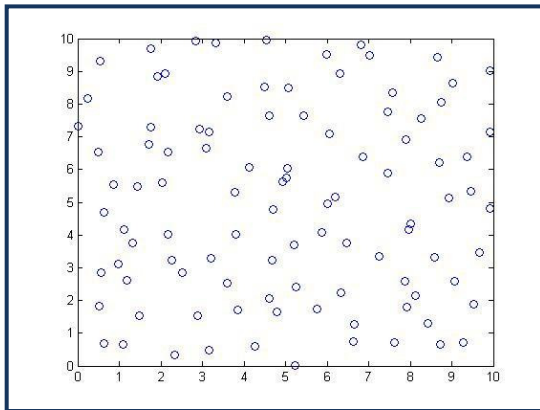
7. ábra  
Négyzetek rajzolása  
a 10 x 10-es modellben



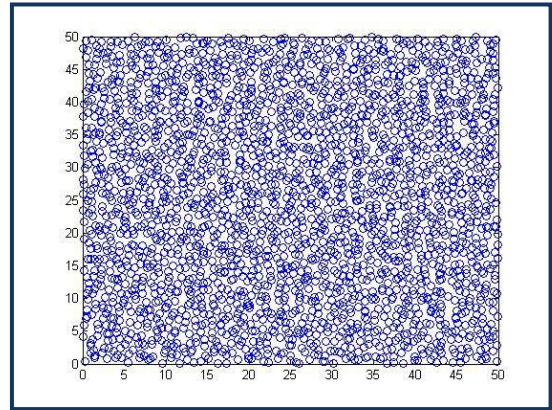
8. ábra  
Négyzetek rajzolása  
az 50 x 50-es modellben

```
(...)  
aa = 0.5;  
m = aa;  
sz = aa;  
  
k = 0;  
  
%téglalap  
for i=1:imax  
    for j=1:jmax  
        A = (1 - aa)/2;  
        k = k + 1;  
        x=A:50;  
        y=A:50;  
        posx(k) = i-0.5;  
        posy(k) = j-0.5;  
        rectangle('Position', [x(j), y(i), m, sz]);  
    end  
end  
(...)
```

A felületet benégyzetrácsoztuk, ami segítségével jobban szemmel tudjuk követni a további tevékenységeimet. Minden négyzetrács belsejében kirajzoltunk egy négyzetet, aminek a különlegessége, hogy a négyzetrács minden oldalától egyenlő távolságra van.



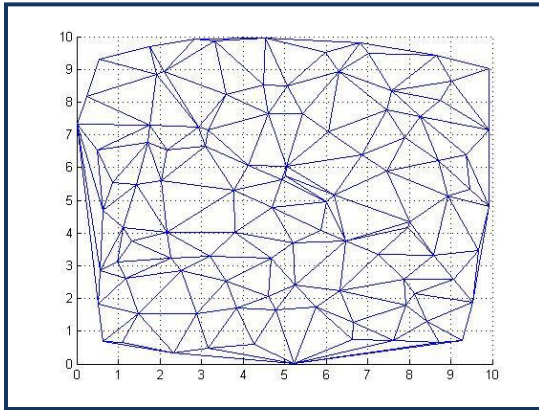
**9. ábra**  
**Véletlen pontok rajzolása**  
**a 10 x 10-es modellben**



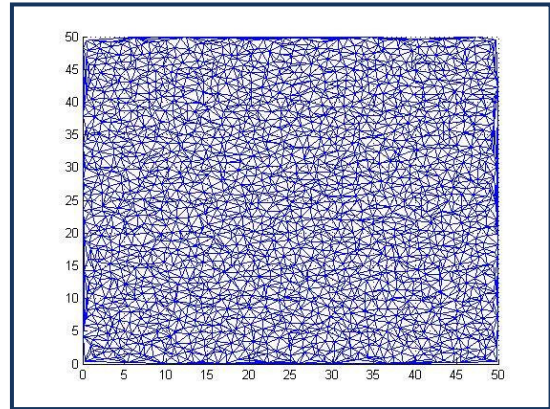
**10. ábra**  
**Véletlen pontok rajzolása**  
**az 50 x 50-es modellben**

```
(...)  
rx=2.0*aa*rand(1,n)-aa;  
ry=2.0*aa*rand(1,n)-aa;  
  
posx=posx+rx;  
[x,y]=size(posx);  
posy=posy+ry;  
[x2,y2]=size(posy);  
  
figure(2);  
plot(posx,posy,'o');  
%koordináták  
mappa2 = fopen('koordinatak.txt','wt');  
  
for i = 1 : k  
    fprintf(mappa2, '%f %f\n',posx(i),posy(i))  
end  
(...)
```

Minden kirajzolt négyzetbe véletlenszerűen elhelyezünk egy pontot. Minden ponthoz tartozik egy-egy koordináta pár, amit a szimuláció során majd felhasználunk.



**11. ábra**  
**Delaunay háromszögelés**  
**a 10 x 10-es modellben**

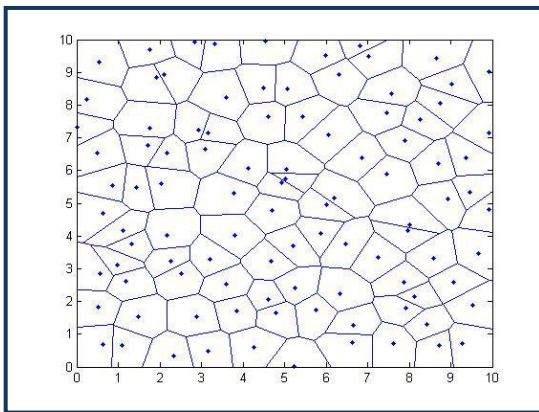


**12. ábra**  
**Delaunay háromszögelés**  
**az 50 x 50-es modellben**

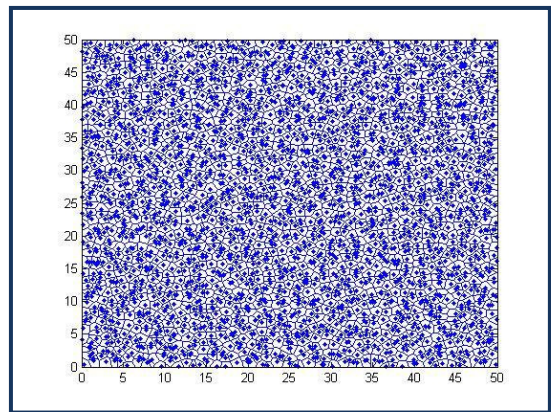
```
(...)  
%A háromszög pontjainak kiíratása  
mappa = fopen('haromszog.txt','wt');  
t = delaunay(posx, posy);  
[sor, oszlop] = size(t);  
  
for i = 1 : sor  
    fprintf(mappa, '%5d %5d  
%5d\n', t(i,1), t(i,2), t(i,3))  
end  
  
fclose(mappa);  
  
figure(3);  
clf;  
grid on  
hold on  
triplot(t, posx, posy);  
(...)
```

Minden szabálytalan elrendezésű pont köré szerkeszthető egy olyan sokszög (poliéder), melynek belső pontjai közelebb vannak egy adott ponthoz, mint az összes többi ponthoz. Ezek a háromszögek konvexek és folytonosan töltik ki a síkot.

Ebből következik, hogy a sokszög oldalai merőlegesek a körülvett pontot a többi ponttal összekötő egyenesekre és felezik azokat. Természetesen csak azokat a merőlegeseket vesszük figyelembe, amelyek metszéspontjaiból létrejön a zárt konvex sokszög, vagyis létrejön az egyértelmű, optimális háromszögfelbontás. Ezt a felbontást nevezzük Delaunay háromszögelésnek.



**13. ábra**  
**Voronoi sokszögelés**  
**a 10 x 10-es modellben**



**14. ábra**  
**Voronoi sokszögelés**  
**az 50 x 50-es modellben**

```
(...)  
figure(4);  
grid on  
voronoi(posx, posy);  
(...)
```

A Voronoi sokszögek csúcspontjai, a háromszögekre szerkeszthető körök középpontjai lesznek. A legvégén pedig .txt file-ba kimentjük az összes adatot a modelltől (a koordináta párokat és a delaunay háromszögelés eredményeit). Ezeket az adatokat dolgozzuk fel, hogy a megfelelő szerkezetű betontömböt állítsuk elő a szimulációhoz.

## 3. RENDSZER IDŐFEJLŐDÉSE TERHELÉS ALATT

### 3.1. A szimulációhoz szükséges adatok előállítása

A program futtatása esetén elsőnek is kér egy .txt kiterjesztésű file-t, ahonnan beolvassa a kívánt adatokat. Ez az állomány: haromszog.txt. Ebben az állományban van, a Matlab által generált Delaunay háromszögelés eredményei, egy kétdimenziós tömb, aminek minden sorában a modell beszámozott pontjai találhatóak és soronként a pontok meghatároznak egy háromszöget.

2490	2475	2456
100	50	99
101	2201	951
(...)		

Minden létrehozott tömböt dinamikusan kezelünk. Négy tömböt állítottam elő: pontok, pont\_egyedi, hany\_szomszed, szomszedok .

Az összes pontot beletesszük a pontok tömbbe, amin végigmegyünk és soronként elkezdjük a pontokat vizsgálni. Vesszük az első pontot, és ha talál egy vele egyezőt, akkor kilép a ciklusból, máskülönben beleteszi a pontot a pont\_egyedi tömbben. Ezek szerint, minden pont ebben a tömbben pontosan egyszer fog szerepelni.

A hany\_szomszed tömb szintén kétdimenziós, aminek első oszlopába kerül a pont száma, és a második oszlopba pedig, hogy annak a pontnak hány szomszédja van. Vagyis minden pont szomszédjának a darabszámát tárolja.

2490	10
2475	9
2456	12
100	6
50	5
99	5
101	11
2201	10
951	12
(...)	

A szomszedok tömbben pedig soronként felsorolja a hany\_szomszed-ban található pontok szomszéd pontjainak a sorszámát

2475	2456	2488	2489	2440	2491	2492	2487	2482	2481		
2490	2456	2477	2476	2425	2472	2474	2473	2481			
2475	2490	2451	2454	2472	2460	2463	2455	2457	2405	2459	2458
50	99	450	250	550	150						
100	99	47	45	49							
50	100	150	49	149							
2201	951	701	501	1	51	52	20	251	151	152	
101	951	2251	2301	2351	2101	1751	2152	1701	2151		
2201	101	701	801	1051	1251	1001	851	1002	902	901	1701

## 3.2. A molekuláris dinamika és alkotóelemei

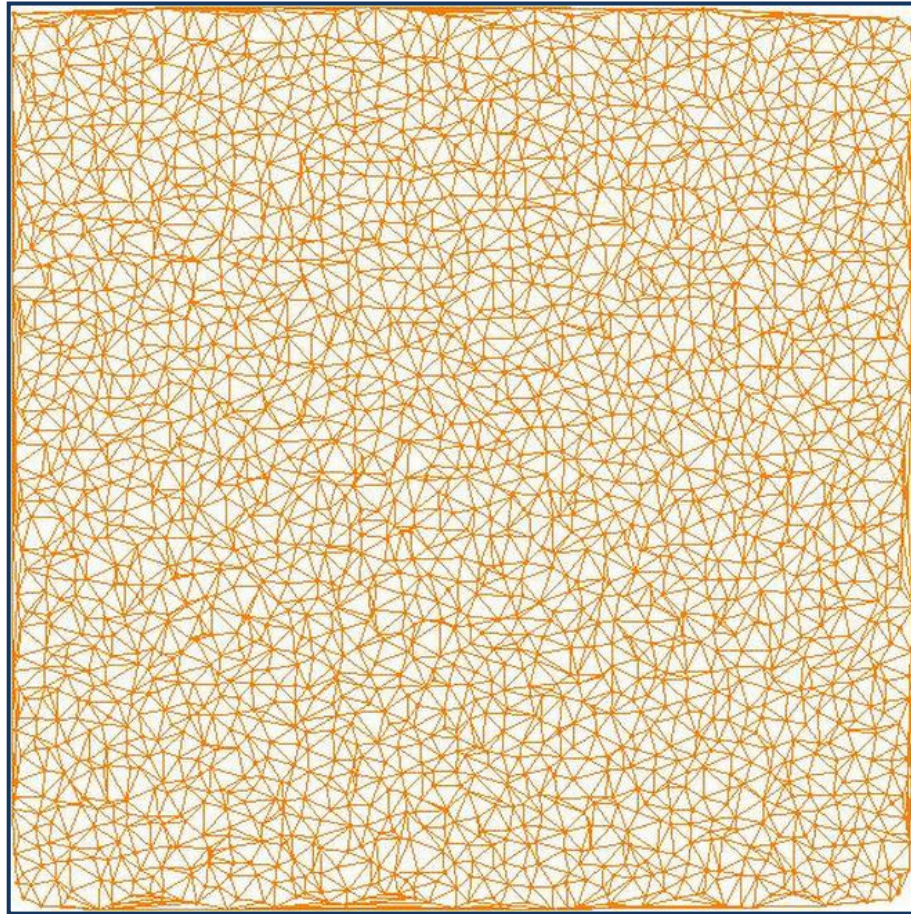
„A *molekuláris dinamika* olyan számítógépes szimulációs eljárás, amely egy kölcsönható részecskerendszer időfejlődését a részecskék klasszikus mozgásegyenlet rendszerének integrálásával állítható elő.”

Egy konkrét rendszer vizsgálatakor a molekuláris dinamikai megközelítés megkonstruálja, a rendszer egy mikroszkopikus modelljének felállításával kezdődik, amit már részben el is készítettünk.

A mikroszkopikus modell megkonstruálásának lépései a következők:

1. **Részecske:** az első lépés, hogy meghatározzuk a releváns mikroszkopikus szabadsági fokokat az adott rendszerben a vizsgált folyamat szempontjából, amit részecskének nevezünk. A mi modellünkben, ezek a részecskék a betonban elhelyezkedő kavicsok lesznek.
2. **Kölcsönhatások:** a rendszer részecskéinek meghatározása után, definiáljuk a közöttük levő kölcsönhatásokat. A kölcsönhatás függ attól, hogy a részecskét magát hogy definiáltuk. Minden részecske össze van kötve mindegyik szomszédjával. Ezeket a kötések rugónak tekintjük a részecskék között és ez által a beton részecskéit főként az összenyomott rugó által kifejtett erővel tudjuk leírni.
3. **Mozgásegyenletek:** A kölcsönhatások ismeretében fel tudjuk írni a klasszikusmechanikai differenciálegyenlet rendszerét. A vizsgált rendszer időfejlődését úgy írjuk le, hogy a differenciál-egyenletrendszer numerikus megoldásával minden részecskének külön-külön előállítjuk a pályáját. Ezek után a rendszert jellemző makroszkopikus mennyiségek az egyes időpillanatokban, a részecskék fölötti átlagok formájában kaphatók meg.

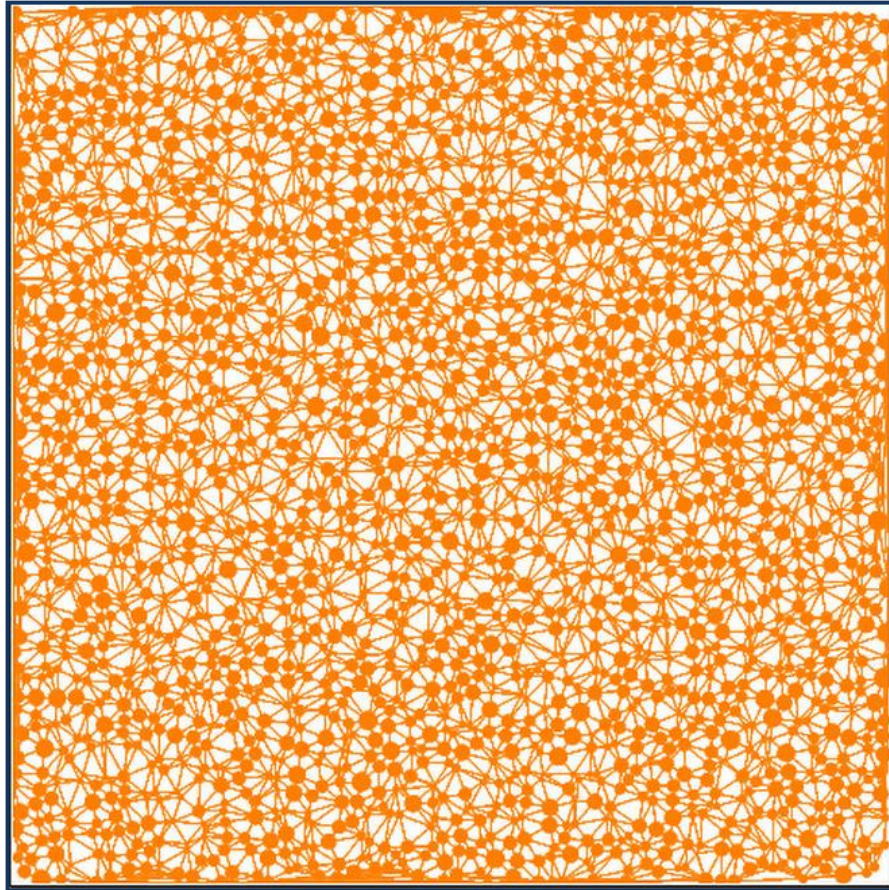
### ***3.3. Szimulációs alapmodell elkészítése***



**15. ábra**  
**Az alapmodell**

Az eddig összegyűjtött adatokból, előállítottuk a Matlab-ban kapott Delaunay háromszögelést.

### 3.4. A modell részecskéinek méretre igazítása



16. ábra

#### A modell részecskéinek méretre igazítása

Minden egyes részecskére kiszámítottuk, hogy a vele összekötött szomszédok milyen távol vannak tőle. Ha a kérdéses pont az  $i$  és ennek a szomszédja a  $j$ , akkor a két pont távolságát a következő képlettel lehet kiszámítani:

$$\text{Ezután az } i. \text{ részecske összes} \quad \text{A két pont távolsága} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (3.3.1.)$$

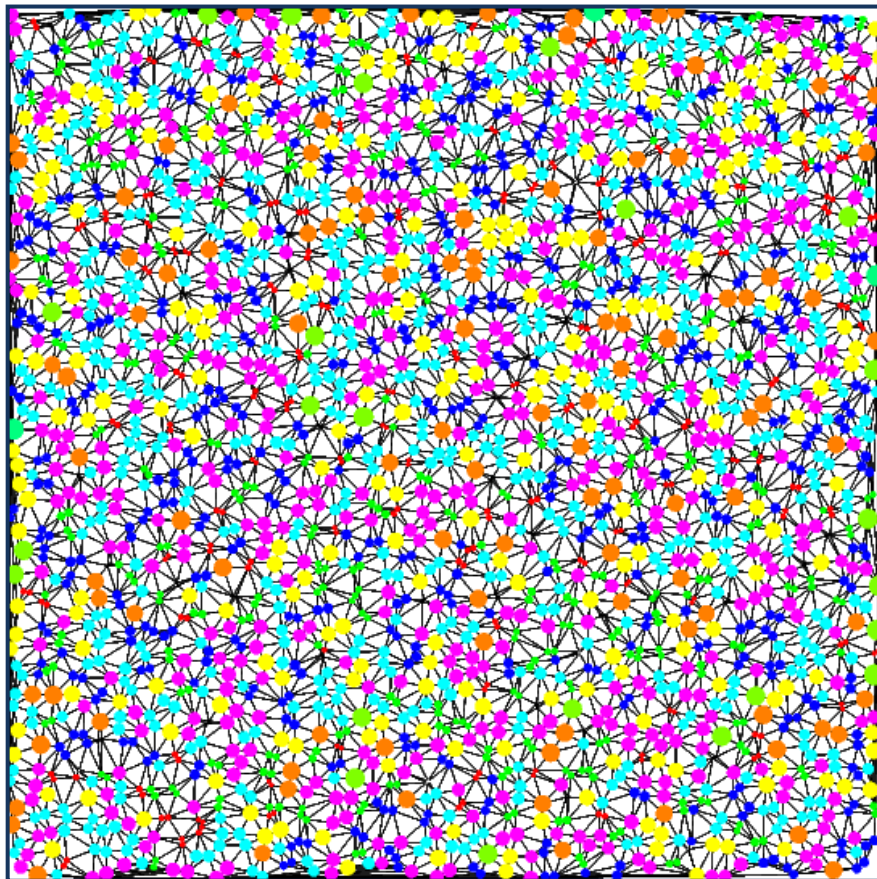
szomszéd távolságát megvizsgáljuk és minimum kiválasztásos kereséssel megkeressük a tőle legkisebb távolságra levő szomszédját. A kapott értéknek a 0.95-ötöd részének a felét vesszük és hozzárendeljük az  $i$ . részecskéhez,

mint sugár (3.3.2.).

$$SUGÁR_i = \frac{A \text{ legkisebb szomszéd távolsága} * 0,95}{2} \quad (3.3.2.)$$

Így minden egyes részecske akkora sugarú kör lesz, hogy a szomszédos körök éppen nem fogják átfedni egymást és helyenként lesz némi üres terület is a részecskék között. Végül az *i*. részecskéhez tartozó sugarakat lementjük egy .txt file-ba.

### 3.5. A részecskék méret szerinti színezése

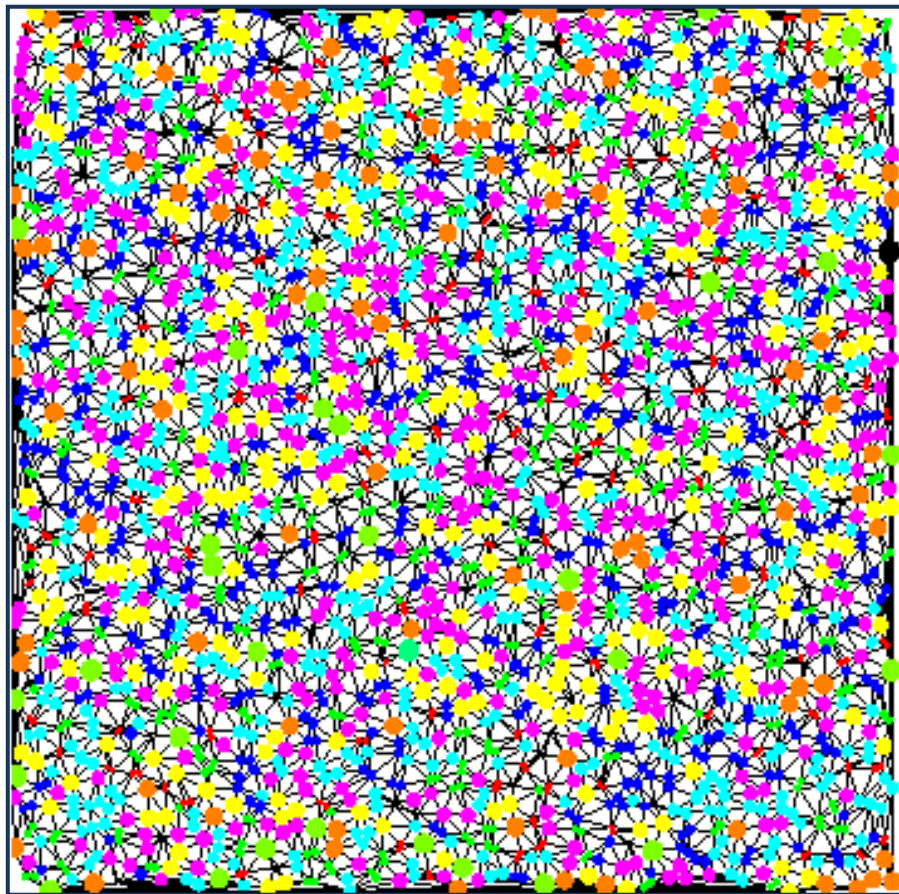


17. ábra

A részecskék méret szerinti színezése

Az előző lépésben megkaptuk a részecskék méretét a sugár által. Most méretük szerint be fogjuk színezni a részecskéket. Megkeressük a legkisebb (a legkisebb sugárú pont: 0.035380) és a legnagyobb (a legkisebb sugárú pont: 0.035380) sugárú részecskét, majd a távolságot tíz egyenlő részre osztjuk és mindegyik résznek egy külön álló színt adunk.

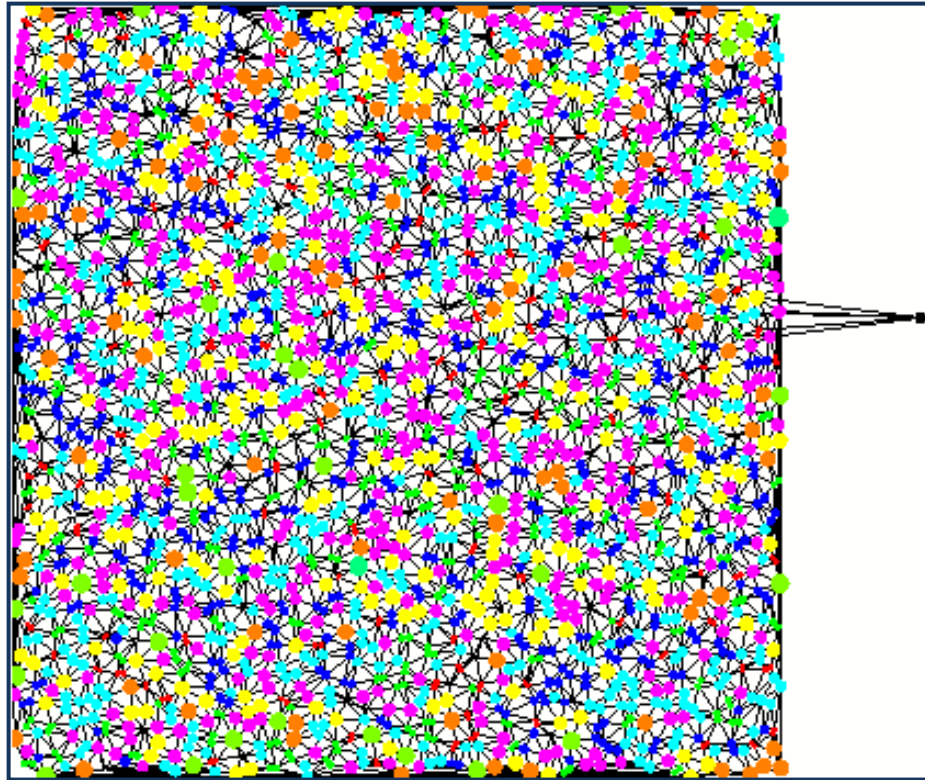
### 3.6. *A pont kiválasztása*



18. ábra  
A pont kiválasztása

A repedés kiindulási pontját ki kell jelölni. A legegyszerűbben úgy lehet, ha maga a tömb egy részecskéjét fogjuk meg. A részecskére ható erő által, az egész tömbre fejtünk ki erőt. A tömb jobb széléről választunk ki egy részecskét.

### 3.7. A részecske kezdeti kiindulópontjának beállítása



19. ábra

#### A részecske kezdeti kiindulópontjának beállítása

A jobb szélén, amelyik részecskét kiválasztottuk véletlenszerűen, azt megfogjuk, és kihúzzuk jobbra. Növeljük az  $x$  tengelyen felvett értékét, de az  $y$  koordinátájához nem nyúlunk.

### 3.8. A rendszer mozgásegyenlete

Az egyetlen tömegpont mozgásának vizsgálata után elemezzük a tömegpontok rendszereinek mozgását. A  $\vec{r}_i, \vec{p}_i, \dots$  jelöli a pontrendszer  $i$ -dik elemének helyvektorát, impulzusvektorát, ..., továbbá teljesül, hogy  $\dot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{v}_i}{m_i}$ , értelmezhető az  $\vec{s}_i$  út, stb. Egy tömegpontrendszert a

$$\{\vec{r}_i, m_i\}_N$$

módon jelölünk, ahol  $\vec{r}_i, m_i$  az  $i$ -dik tömegpont helyvektora és tömege,  $N$  jelöli a pontrendszer eleminek a számát.

Egy tömegpontrendszer elemei nemcsak egymással, de a pontrendszerhez nem tartozó más tömegpontokkal is kölcsönhatásban lehetnek, ezért elsőnek határozzuk meg az erő fogalmát.

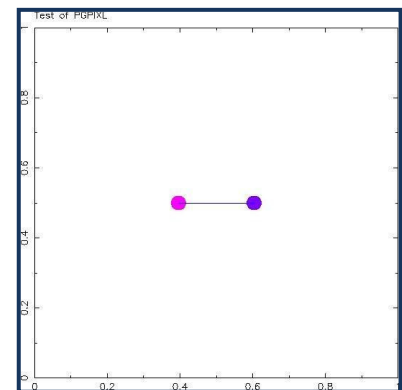
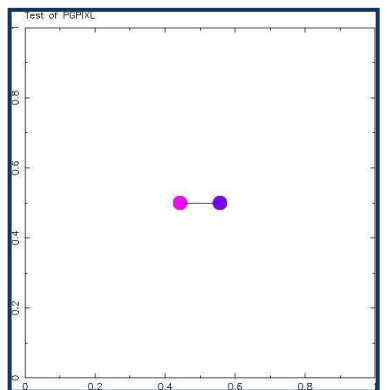
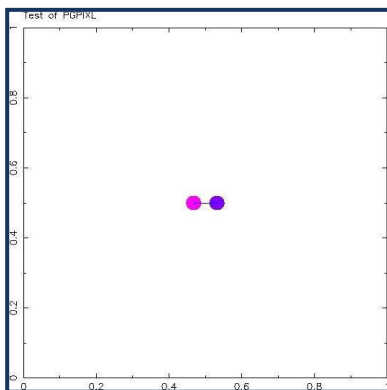
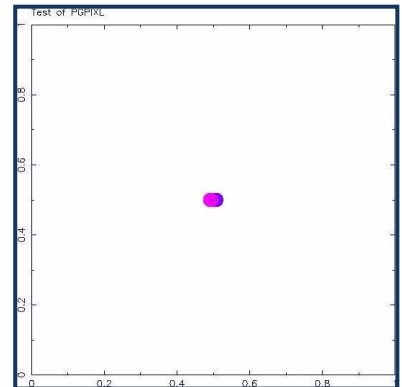
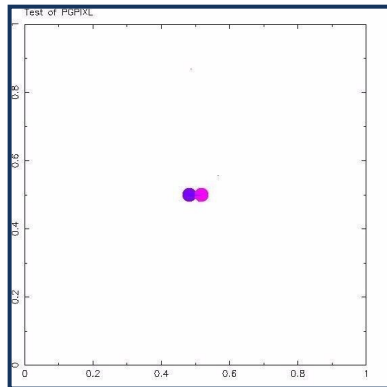
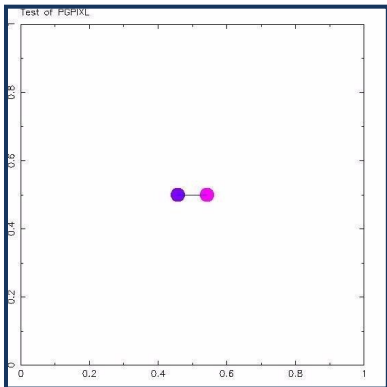
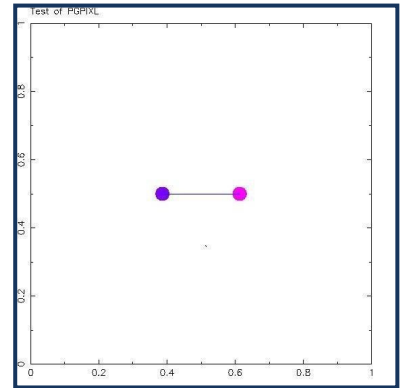
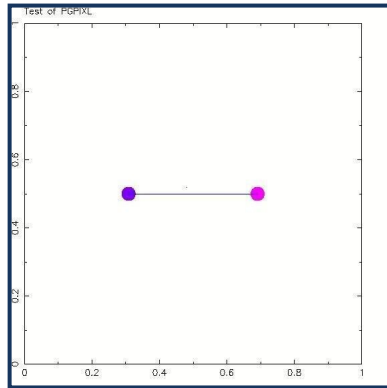
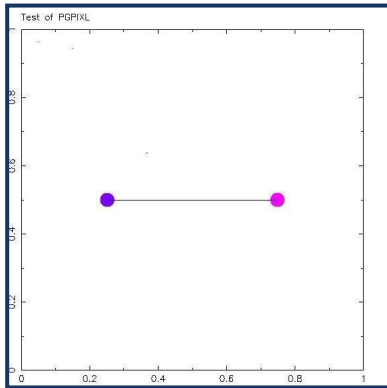
Belső-erőnek nevezzük az  $\{\vec{r}_i, m_i\}_N$  tömegpontrendszer elemei közötti kölcsönhatást jellemző  $\vec{F}_i^B$  erőket.  $\vec{F}_{j \rightarrow i}$  jelöli a rendszer  $j$ -edik eleme által az  $i$ -dik elemre kifejezett erőt, ekkor

$$\vec{F}_i^B = \sum_{j=1, j \neq i}^N \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

azaz az  $i$ -dik tömegpontra ható belső erő a többi tömegpont által rá kifejtett erők összessége.

Külső erőnek nevezzük az  $\{\vec{r}_i, m_i\}_N$  tömegpontrendszerhez nem sorolt testekkel való kölcsönhatást jellemző  $\vec{F}_i^K$  erőket.

Következő képeken kitűnően lehet látni, hogy a rendszer két részecskéje, hogy viselkedik egymással:



Nagyon jól lehet látni a képeken, hogy két különböző tömegű tömegpont rugóval van összekötve. A tömegpontrendszer elemeinek száma 2. A két tömegpont a rugón keresztül erőt fejt ki egymásra. Az ábrákon szereplő rendszer zárt, mert a rendszerhez nem tartozó más testekkel nem áll kölcsönhatásban. A rúgó által a két tömegpontra kifejtett erő

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -D(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

centrális, mert mindig párhuzamos a két tömegpontot összekötő  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  vektorral.

### 3.9. Tömegpontrendszer mozgásegyenletei

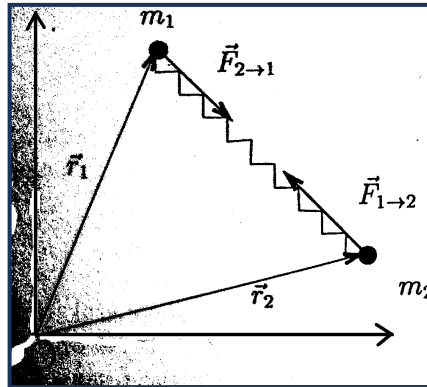
Egy tömegpontrendszer mozgását akkor ismerjük, ha annak minden elemének mozgását ismerjük. Az összes  $\vec{r}_i(t)$  függvény ismert. A tömegpont mozgását egyenletekből kiindulva kapjuk a tömegpontrendszer mozgásegyenlet rendszerét

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^B + \vec{F}_i^K, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.8.1.)$$

ahol  $\vec{F}_i^B$  és  $\vec{F}_i^K$  jelöli a rendszer  $i$ -edik tömegpontjára ható belső és külső erők eredőjét,  $N$  pedig a rendszer elemeinek a száma ( $N=2500$ ). Az egyenletrendszer megoldásához kezdőfeltételeket kell megadnunk, ami az ismeretlen függvények nulladik és első deriváltjának értéke valamilyen kezdeti  $t_0$  időpontban:

$$\vec{r}_{i0} = \vec{r}_i(t_0), \quad \text{és} \quad \vec{v}_{i0} = \vec{v}_i(t_0), \quad (3.8.2.)$$

azaz meg kell adnunk minden részecske kezdeti helyét és sebességét. A fenti differenciálegyenlet rendszer megoldása szolgáltatja a rendszer egyes elemeinek  $\vec{r}_i(t)$  pályafüggvényét.



20. ábra  
Tömegrendszer

Az ábrán bemutatott rendszer mozgásegyenletei a következők:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (3.8.3.)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = +D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

A kezdőfeltételek:

$$\vec{r}_1(t_0), \vec{v}_1(t_0)$$

$$\vec{r}_2(t_0), \vec{v}_2(t_0)$$

Ha a referenciaponthoz koordináta-rendszert rögzítjük, akkor a vektorokra felírt 3.8.3. egyenletrendszer, négy darab skalár egyenletből álló egyenletrendszerré alakítható:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -D(x_1 - x_2) \quad (3.8.4.)$$

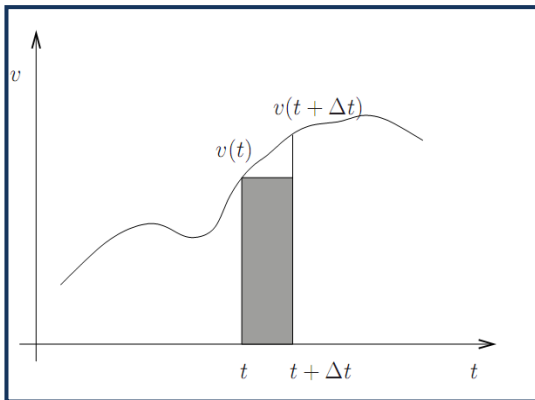
$$m_1 \ddot{y}_1 = -D(y_1 - y_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = D(x_1 - x_2)$$

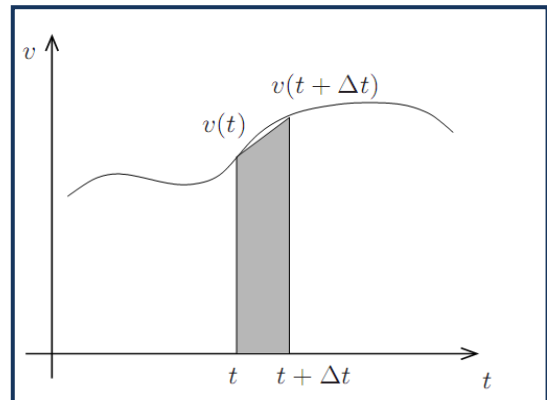
$$m_2 \ddot{y}_2 = D(y_1 - y_2)$$

### 3.10. Másodrendű Runge-Kutta módszer

A 22. ábra alapján látható, hogy jobb, pontosabb, iterációs módszert kapunk, ha a  $v(t)$  görbe alatti terület nem téglalap módszerrel, hanem trapéz módszerrel kíséreljük meg kiszámítani. Ekkor a közelítő módszerünk a következők:



21. ábra  
Euler-módszer szemléltetése



22. ábra  
Integrálás trapéz módszerrel

$$\mathbf{x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{2} [v(t) + v(t + \Delta t)]\Delta t, \quad (3.9.1.)}$$

$$\mathbf{v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{1}{2} [a(t) + a(t + \Delta t)]\Delta t,}$$

$$\mathbf{a(t + \Delta t) = \frac{F(x(t + \Delta t), v(t + \Delta t), t + \Delta t)}{m}}$$

A 3.9.1. Egyenlet még nem használható, mert az egyenletek jobb oldalán nemcsak a  $t$  időpillanatbeli mennyiségek, hanem már a  $t + \Delta t$  időpillanatbeli mennyiségek is szerepelnek, amelyeket nem ismerünk. A jobboldalon szereplő  $x(t + \Delta t)$ ,  $v(t + \Delta t)$  kiszámítására használjuk fel az Euler-módszert.

Ekkor

$$x(t + \Delta t)^{\text{Euler}} = x(t) + v(t)\Delta t$$

$$v(t + \Delta t)^{\text{Euler}} = v(t) + a(t)\Delta t$$

$$a(t + \Delta t)^{\text{Euler}} = F(x(t + \Delta t)^{\text{Euler}}, v(t + \Delta t)^{\text{Euler}}, t + \Delta t)$$

Behelyettesítve a fenti egyenleteket a (4.4.4.) egyenletrendszerbe, már használható eljárást kapunk.

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{1}{2} [v(t) + v(t + \Delta t)^{\text{Euler}}]\Delta t,$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{1}{2} [a(t) + a(t + \Delta t)^{\text{Euler}}]\Delta t,$$

Az egyenletek jobb oldalán csak a  $t$ -beli értékek állnak. Mivel az egyenletrendszer jobboldalán  $\Delta t$  a második hatványom szerepel, a megkonstruált eljárás másodrendű. A differenciálegyenletek ily módon történő integrálását másodrendű **Runge-Kutta** módszernek nevezzük. Ennek az a hatása, hogy a gyorsulást egy iterációs lépésben nem egyszer, hanem kétszer kell kiszámítani.

## 4. ÖSSZEFOGLALÁS

Szakdolgozatom keretében a beton struktúráját és annak repedését tanulmányoztam.

A beton szerkezetéről megállapítható, hogy erősen heterogén (a kavicsok véletlenszerű mérete miatt) szerkezetű és a fő alkotórészei: a cement, az adalékanyagok (kavics) és különféle adalékszerkezetek. A cement pedig nem folytonosan tölti ki a kavicsok közötti teret.

A betont nem tekintjük folytonos közegnek, hanem olyan többkomponensű anyagnak, amelynek komponensei sajátos térstruktúrát alkotnak. Ebből következik, hogy a beton repedése rendkívül különleges folyamat és ennek a struktúrának a megismerése lehetőséget ad arra, hogy magyarázatot találjunk a repedésképződés néhány sajátosságára.

A beton szerkezetének ismeretében megállapítható, hogy a másodrendű Runge-Kutta módszer által elvégzett számítások eredményeként, a betonon egy hullámmozgás megy végbe és ennek következményében reped meg a beton.

A betonnal való kísérletezések és tanulmányok mai napig nagyon jelentősek és számtalan szakmai lap foglalkozik ezekkel. Magyarországon ilyen jelentős szakmai lapja a Beton című havilap, ami a mérnökök számára szól és próbálja a hazai szakembereket értesíteni az újabbnál újabb fejlesztésekről. Nagy lehetőség van még a betonban, ami még nincs kiaknázva megfelelően és hiszem, hogy egyszer el fogunk érni az ideális betonszerkezethez. Ez által, még erősebb, még használhatóbb anyagként tudjunk használni céljaink megvalósítására.

## 5. IRODALOMJEGYZÉK

- [1.] Beton  
*[http://www.kislexikon.hu/beton\\_a.html](http://www.kislexikon.hu/beton_a.html) (2009. 11. 19.)*
- [2.] Beton szilárdsági vizsgálatok  
*<http://www.muszakiak.com/diagnosztika-es-anyagvizsgalat/beton-szilardsagi-vizsgalatok.html> (2009. 11. 19.)*
- [3.] Bérces Balázs (2006): Alapvető tudnivalók a betonról. Ezermester.  
*<http://www.ezermester.hu/articles/article.php?getarticle=584> (2009. 11. 19.)*
- [4.] Noteszlapok  
*<http://www.betonopus.hu/notesz/notesz-tart-tem.htm> (2009. 11. 19.)*
- [5.] Concrete. Wikipedia.  
*<http://en.wikipedia.org/wiki/Concrete> (2009. 11. 19.)*
- [6.] Dr. Tassi Géza (2004): A feszítőerő okozta rugalmas alakváltozás hatása feszített vasbeton tartók erőjátékára. Vasbetonépítés.  
*[http://fib.bme.hu/fib/cikk/v04\\_2\\_teljes/cikk04-1-2.php3](http://fib.bme.hu/fib/cikk/v04_2_teljes/cikk04-1-2.php3) (2009. 11. 19.)*
- [7.] A beton nem rugalmas alakváltozásairól  
*<http://www.vbt.bme.hu/oktatas/melyep/Eloadasok/Alakv.doc> (2009. 11. 19.)*
- [8.] Kun Ferenc (2001): Számítógépes fizika kézirat. Debreceni Egyetem, Elméleti Fizikai Tanszék