Kombinatorikus számok általánosításairól

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: Mező István

Témavezető: Prof. Dr. Phạm Ngọc Ánh

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2010.

Kombinatorikus számok általánosításairól

Doktori (PhD) értekezés

Szerző: Mező István

Témavezető: Prof. Dr. Phạm Ngọc Ánh

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2010.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács *Matematika- és Számítástudományok* Doktori Iskola *Gyűrűelmélet: csoportalgebrák és egységcsoportok* programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2010. január

a jelölt aláírása

Tanúsítom, hogy *Mező István* doktorjelölt 2006 – 2009 között a fent megnevezett Doktori Iskola *Gyűrűelmélet: csoportalgebrák és egységcsoportok* programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javasolom.

Debrecen, 2010. január

a témavezető aláírása

Kombinatorikus számok általánosításairól

Értekezés a doktori (PhD) fokozat megszerzése érdekében
a Matematika tudományágban

Írta: Mező István okleveles matematikus

Készült a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolája (Gyűrűelmélet: csoportalgebrák és egységcsoportok programja) keretében

Témavezető: Prof. Dr. Phạm Ngọc Ánh

A doktori szigorlati bizottság:

elnök:	Dr. Páles Zsolt (DE-TTK) ....
tagok:	Dr. Pintér Ákos (DE-TTK) ....
	Dr. Liptai Kálmán (EKF-TTK) ....

A doktori szigorlat időpontja: 2009. december 30.

Az értekezés bírálói:

Dr. ....
Dr. ....
Dr. ....

A bírálóbizottság:

elnök:	Dr. ....
tagok:	Dr. ....
	Dr. ....
	Dr. ....
	Dr. ....

Az értekezés védésének időpontja: 20 . . ..

Köszönetnyilvánítás

Szeretném köszönetemet kifejezni Phạm Ngọc Ánh professzor úrnak a támogatásáért, Pintér Ákosnak a konzultációkért és a szervezésben való részvételért.

Gát György tanár úrnak itt szeretnék köszönetet mondani, hogy emlékezetes előadásaival és kivételes (tanár-)egyéniségével bevezetett a matematika kutatásába.

Ayhan Dil (University of Akdeniz) kollégámnak hálás vagyok a számtalan matematikáról folytatott beszélgetésért és a problémafelvetésekért.

Hajdu Lajos tanácsai sokat segítettek a dolgozat végső formájának kialakításában.

Odaadásáért és hűségéért tartozom köszönettel Schwarzinak, aki annyi estét kuporgott végig mellettem a számítógépnél. . .

Különös köszönet illeti édesanyámat, aki oly messzemenőkig támogatott a tanulmányaimban és egész eddigi életemben. Ezt a dolgozatot az Ő emlékének ajánlom.

Édesanyám emlékének

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Jelen dolgozatban régi, és újabb keletű, kombinatorikában előforduló leszámlálási problémákból származó ún. kombinatorikus számok általánosításaival foglalkozom.

Röviden arról van szó, hogy halmazokat partíciókra, illetve permutációkat ciklusokra bontva egyes elemeket (r darabot) „megkülönböztetünk”, és azt követeljük meg, hogy ezek különböző blokkokban, illetőleg ciklusokban szerepeljenek. Ezzel a plusz feltétellel egy új számcsalád bontakozik ki, az r-Stirling számoké. Ezeknek a vizsgálata a disszertáció legfőbb célja.

Ha ezt a kikötést nem tesszük, a „hagyományos” Stirling számokat kapjuk. Érdekes tény, hogy az utóbbiak több száz éve ismeretesek ugyan, számos neves matematikus foglalkozott velük, ezek általánosításainak, az r-Stirling számoknak a tulajdonságait csak újabban tárták fel. Ezekre vonatkozóan Broder [10] és Carlitz [13, 14] cikkei alapvetőek, de valószínűségelméleti aspektusukat is tárgyalja Charalambides kiváló könyve [16], valamint Koutras [39] cikke. Történeti érdekesség, hogy ezen számok először 1906-ban tűntek fel Nielsen [52] könyvében. Dolgozatomban az itt elkezdett munkát szándékoztam folytatni.

Az értekezés a következőképpen épül fel. Az első fejezet az elengedhetetlenül szükséges alapvető fogalmakat vezeti be. A rákövetkező fejezet a Bell polinomok r-Stirling számok ismeretében szinte automatikusan adódó általánosítását tárgyalja. A Bell polinomok számos kombinatorikai és valószínűségelméleti kérdésben felmerülnek (elegendő csak Comtet vagy Riordan klasszikus könyveit [20, 56], vagy Charalambides már idézett művét megemlítenünk). Ám az r-Stirlingekből képezhető polinomokról máig nincs összefoglaló, alapvetőnek nyilvánítható közlemény, elszórt eredmények vannak csak (l. pl. Carlitz fent idézett cikkeit). Célom éppen ez a hiánypótlás – számos új eredménnyel kiegészítve.

A következő szakaszban az Euler- és Fubini számok neves szerzők által régen feltárt kapcsolatát veszem alapul (l. többek között [20, 54, 60, 61]), és ezen fogalomkör segítségével – mind analitikus, mind kombinatorikai úton – bemutatom, hogyan kell „áttérni” arra az esetre, amikor a partíciókra és ciklusokra a fentebb említett új feltételt kirójuk. Nevezetesen, egy kombinációs zár-játék segítségével olyan új általánosítását vezetem be az Euler számoknak, melyek egy sor kombinatorikai azonosságot írnak újabb formába. Ezzel a bekezdés elején idézett eredmények továbbfejlesztését nyújtom.

Ezt követően bebizonyítom az r-Stirling számok sorozatainak unimodalitási tulajdonságát, vagyis belátom, hogy ezek a sorozatok egy bizonyos indexig szigorúan növekednek, majd ugyanígy csökkennek. Becslést adok arra az indexre is, melyre ez a maximum felvétetik. Ezen eredmények a [33, 34, 62] munkák egyenes folytatásainak tekinthetők. A Stirling számok „hagyományos” esetével többek között Erdős Pál foglalkozott.

A későbbi fejezetekben (az ötödikben és a hatodikban) az említett számokból képzett végtelen sorok összegezhetőségét vizsgálom, és konvergencia esetén explicit vagy rekurzív képletet adok ezen sorok összegére. Ehhez szükség volt ún. hiperharmonikus számokat tartalmazó bizonyos sorösszegek meghatározására. Tekintve, hogy harmonikus számokat tartalmazó ilyen formátumú sorok összegét Euler írta le, elmondható, hogy ebben az értelemben Euler formuláit sikerült megjavítani.

Végül, egy további általánosító lépést téve olyan új számcsaládot konstruálok, melynek segítségével a Bernoulli polinomok igen régi fogalma kerül új megvilágításba. Nevezetesen, racionális helyeken felvett értékeit az itt definiált számokkal ki lehet számolni. Ezen számok egyébként az r-Stirlingeket és a geometriai hálók elméletében szereplő Whitney számokat ötvözik, közös általánosítást képezve.

1. fejezet

A Stirling- és r-Stirling számok

1.1. Az első- és másodfajú Stirling számok

Mivel dolgozatunk fő tárgyát a Stirling[1] számok általánosítása képezi, minden vonatkozó eredményt ebben az általánosabb formában bizonyítunk. Ezért a „hagyományos" Stirling számok definícióját és alapvető azonosságait csak leírjuk, de – a rekurziók kivételével – nem vezetjük le.

1.1.1. Definíció. *n elemen adott permutáció k darab ciklusra való felbontásainak számát az n, k paraméterű* elsőfajú Stirling szám *adja meg, melyet $\left[{n \atop k}\right]$ módon jelölünk*[2]*.*

Az elsőfajú Stirling számokat – emlékeztetve a jelentésükre – nevezik Stirling-féle *ciklikus számok*nak[3] is [30].

A rájuk érvényes legalapvetőbb összefüggés a következő rekurzió:

(1.1)
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

[1] James Stirling (1692-1770) skót matematikus.

[2] Ezt a jelölést Jovan Karamata (1902-1967) szerb matematikus vezette be.

[3] A British Museum őrzi egy bizonyos Thomas Herriot kéziratát az 1600-as évekből, melyben ezek a számok már feltűnnek.

Ez a következő módon bizonyítható. Az utolsó elem vagy önmagában alkot egy ciklust (egyféleképpen) és a többi $n-1$ elem $k-1$ ciklusban van, ami $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$ eset; vagy az n nem önmagában áll. Utóbbi esetben $n-1$ elem van k ciklusban, ami $\left[{n-1 \atop k}\right]$ módon lehet. Az n-et kell valamelyik ciklusba „beszúrnunk”, és ez $n-1$ módon lehetséges.

Lépten nyomon előkerül a generátorfüggvény fogalma, ezért ezt most definiáljuk. Legyen a_n egy valós számsorozat. Ennek *generátorfüggvénye* alatt a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

hatványsort értjük, míg *exponenciális generátorfüggvény* alatt a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

hatványsort.

Az elsőfajú Stirling számok exponenciális generátorfüggvénye[4]

(1.2)

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left[{n \atop k}\right] \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)^k.$$

A *„vízszintes” generátorfüggvény*t úgy képezzük, hogy az alsó paraméterre összegzünk. Megmutatható, hogy az elsőfajú Stirling számok vízszintes generátorfüggvénye a *növekvő faktoriális*:

(1.3)

$$\sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1).$$

Erre bevezetünk egy – a szakirodalomban egyre elfogadottabb – jelölést és elnevezést:

(1.4)

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) =: x^{\overline{n}}.$$

[4]Most és a továbbiakban tartjuk magunkat ahhoz a megállapodáshoz, hogy polinomok („véges hatványsorok”) változóját x-szel, hatványsorokét z-vel vagy t-vel jelöljük.

Ezt a mennyiséget *növő faktoriális*nak nevezzük.

A legfontosabb paraméterpár, melyre szükségünk lesz a következő: $n+1, 2$. Ekkor ugyanis

$$\frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} =: H_n.$$

A H_n számot *harmonikus szám*nak nevezzük [30].

Áttérünk a másodfajú Stirling számok bevezetésére.

1.1.2. Definíció. *Legyen A egy n elemű halmaz. A olyan partícióit, melyekben pontosan k halmaz (*blokk*) van, az A k-*partíció*inak nevezzük. A k-partíciók számát (n elem esetén) $\left\{ {n \atop k} \right\}$-val jelöljük, és n, k* paraméterű másodfajú Stirling szám*nak nevezzük.*

Röviden itt is felsoroljuk az alapvető tulajdonságokat.

(1.5)
$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}.$$

Ha adott egy n elemű halmaz, k blokkra való felbontása során két eset fordulhat elő. Először, az utolsó elem (az n) önmagában külön blokkot alkot. A többi $n-1$ elem ebből következően $k-1$ blokkra bomlik szét, és ez $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ módon történhet. Másodszor, az n nem önálló blokkban van. Ez k blokk esetén k-féleképpen lehet. Továbbá, a fennmaradó $n-1$ elem k blokkra $\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$-képpen bomlik fel. Együttesen tehát $k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ eset van. A két – egymást kizáró – lehetőséget összeadva megkapjuk, hogy n elem hányféleképpen rendezhető k blokkba. Ez pontosan a fenti rekurzió.

Az exponenciális generátorfüggvény

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{z^n}{n!} = \frac{(e^z-1)^k}{k!},$$

míg a „hagyományos":

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} z^n = \frac{z^k}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-kz)}.$$

A vízszintes generátorfüggvényből két nevezetes is van. Ehhez, a további rövid írásmód céljából, vezessük be a *csökkenő faktoriális* fogalmát és jelölését:

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) =: x^{\underline{n}}.$$

Az első vízszintes generátorfüggvény az elsőfajú eset párja:
(1.6)

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = x^n.$$

A második pedig
(1.7)

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k.$$

Utóbbiakat *Bell*[5]*-polinomok*nak nevezzük, és $B_n(x)$-szel jelöljük. Új eredményeink első csoportja éppen ezen polinomok általánosításaira vonatkozik, amint az a következő fejezetből kiderül.

Végezetül a Bell polinomok $x = 1$ helyen felvett értékeiről vegyük észre, hogy azok egy n elemű halmaz összes partícióját számlálják össze. (Hiszen az összes k-partíciók számát képezzük, így minden partíció szerepel és pontosan egyszer ($k = 1, \ldots, n$).)

1.2. Az első- és másodfajú r-Stirling számok

A Stirling számok elmélete – mint azt megjegyeztük az előző szakaszban – több száz éves. Ezért is érdekes, hogy a következőkben tárgyalandó általánosítás csak 1906-ban jelent meg Nielsen[6] cikkében. Kombinatorikai interpretációjuk pedig csak meglepően későn, 1984-ben született [10]. Ez, az ún. r-Stirling számok fogalma képezi annak a kombinatorikus számokból álló családnak az alapját, melyet a dolgozatban bevezetünk.

A szakasz eredményeit Broder cikkéből vettük át [10].

[5] Eric Temple Bell (1883-1960) skót matematikus.
[6] Niels Nielsen (1865-1931) dán matematikus.

1.2.1. Az elsőfajú r-Stirling számok

1.2.1. Definíció. *Ha n elemen adott permutáció k darab ciklusra való felbontásai közül csak azokat tekintjük, melyek ciklusaiban az $1, 2, \ldots, r$ elemek külön ciklusban vannak, akkor ezek számát az n, k paraméterű* elsőfajú r-Stirling szám *adja meg. Ezt $\left[{n \atop k}\right]_r$ módon jelöljük*[7].

Természetesen annak feltételezése, hogy az *első* r elem szerepel külön ciklusban, átfogalmazható úgy is, hogy r *tetszőleges* elem legyen külön ciklusban.

A rekurzió nem változik, csak a kezdőértékek:

$$\begin{aligned}\left[{n \atop k}\right]_r &= 0 \quad (n < r)\\ \left[{n \atop k}\right]_r &= \delta_{k,r} \quad (n = r) \qquad (1.8)\\ \left[{n \atop k}\right]_r &= (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]_r + \left[{n-1 \atop k-1}\right]_r \quad (n > r).\end{aligned}$$

Ez azért igaz, mert az (1.1) rekurzió levezetése szóról szóra megismételhető (hiszen az utolsó elem $n > r$ esetén bármely ciklusba betehető). Ha $n \le r$, akkor a fenti kezdőértékeket kapjuk.

Az exponenciális generátorfüggvény a következő:

(1.9)
$$\sum_{n=k}^{\infty}\left[{n+r \atop k+r}\right]_r \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^r \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)^k.$$

Ennek a bizonyítása szép kombinatorikai megfontolást tartalmaz, ezért leírjuk. Mindenek előtt a következő azonosságot bizonyítjuk:

(1.10)
$$\left[{n \atop k}\right]_r = \sum_{m=0}^{n-r}\binom{n-r}{m}\left[{n-p-m \atop k-p}\right]_{r-p} p^{\overline{m}} \quad (r \ge p \ge 0).$$

[7] Szokásos még a nemcentrált Stirling szám és a „leszűkített” (restricted) Stirling szám elnevezés is. Utóbbi implikálja az „r” betű használatát.

Egy permutációt k ciklussal (melyben az első r elem különböző ciklusokban szerepel) úgy is létrehozhatunk, hogy kiválasztunk m darab r-nél nagyobb elemet azokból a ciklusokból, melyekben $1, \dots, p \le r$ van külön ciklusokban. Ez $\binom{n-r}{m}\left[{p+m \atop p}\right]_p$ módon történhet. A kimaradó $n-p-m$ elem $k-p$ ciklust alkot úgy, hogy a $p+1, \dots, r$ elemek külön ciklusban vannak. Utóbbiak száma éppen $\left[{n-p-m \atop k-p}\right]_{r-p}$. Rögzített m-re tehát a lehetőségek száma

$$\binom{n-r}{m}\left[{p+m \atop p}\right]_p\left[{n-p-m \atop k-p}\right]_{r-p}.$$

Mivel – az (1.8) rekurzióból adódóan –

$$\left[{n \atop r}\right]_r = (n-1)(n-2)\cdots r = r^{\overline{n-r}},$$

az előbbi átírható a

$$\binom{n-r}{m}\left[{n-p-m \atop k-p}\right]_{r-p} p^{\overline{m}}$$

alakra. Végül m-re összegezve adódik az (1.10) formula.

Ha speciálisan $p = r$ és átparaméterezünk, a következő egyszerű formula adódik:

$$\left[{n+r \atop k+r}\right]_r = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left[{n-m \atop k}\right]_0 r^{\overline{m}} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left[{m \atop k}\right]_0 r^{\overline{n-m}}.$$

(A 0-Stirlingek a hagyományos Stirling számok. A későbbiekben a 0 indexet elhagyjuk.) Azt tudjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^r = \sum_{m=0}^{\infty} r^{\overline{m}}\frac{z^m}{m!}.$$

A Cauchy-szorzat segítségével (1.2) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^r \frac{1}{k!}\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left[{m \atop k}\right] r^{\overline{n-m}}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

Ez az előbb levezetett azonosságunk alapján adja a exponenciális generátorfüggvényt.

A rekurzióval indukció útján azonnal látható, hogy a vízszintes generátorfüggvény

$$\sum_{k=r}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r x^k = x^r(x+r)(x+r+1)\cdots(x+n-1) = x^r(x+r)^{\overline{n-r}}.$$

módon alakul. Ez (1.3) megfelelője.

1.2.2. A másodfajú r-Stirling számok

1.2.2. Definíció. *Az* $\{1,\ldots,n\}$ *halmaz azon* k*-partícióinak számát, melyekben az* $1,2,\ldots,r$ *elemek külön blokkokban vannak, az* n,k *paraméterű* másodfajú r-Stirling szám *adja meg. Ezt az* $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$ *szimbólum jelöli.*

Az (1.5) rekurzió megmarad a kezdőértékek módosítása után:

$$\begin{aligned} \left\{ {n \atop k} \right\}_r &= 0 \quad (n<r) \\ \left\{ {n \atop k} \right\}_r &= \delta_{k,r} \quad (n=r) \\ \left\{ {n \atop k} \right\}_r &= k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}_r + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}_r \quad (n>r). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Az exponenciális generátorfüggvény:

(1.12)

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} e^{rz}(e^z-1)^k.$$

Ez ugyanúgy bizonyítható, mint (1.9). Csak azt kell megfontolni, hogy érvényes az (1.10) megfelelője másodfajú r-Stirling számokra:

(1.13)

$$\left\{ {n \atop k} \right\}_r = \sum_{m=0}^{n-r} \binom{n-r}{m} \left\{ {n-p-m \atop k-p} \right\}_{r-p} p^m \quad (r \geq p \geq 0).$$

Az (1.6) vízszintes generátorfüggvény így módosul:
(1.14)
$$\sum_{k=r}^{n} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^{\underline{k}} = (x+r)^n.$$

Végül (1.7) általánosítása:
$$\sum_{k=r}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}_r x^k.$$

Mivel ezen polinomok $n < r$ esetén mind nullák és x^r kiemelhető, sokkal célszerűbb a következő módosítással élnünk:
(1.15)
$$B_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^k.$$

Ezeket a polinomokat r-*Bell polinomok*nak nevezzük.

Ezzel elérkeztünk dolgozatunk első főbb pontjához és első önálló eredményeinkhez.

2. fejezet

Az r-Bell számok és -polinomok

2.1. Alaptulajdonságok

Amennyire tudjuk, az előző fejezetben definiált $B_{n,r}(1)$ számok Carlitz munkájában bukkannak fel először, de nem lettek elnevezve. Ott a $B(n,r) = B_{n,r}(1)$ jelölést használta a szerző. Ismereteink szerint előttünk nem publikáltak még kifejezetten az r-Bell számokkal (és polinomokkal) foglalkozó közleményt[1]. Ezen szakasz eredményei egyelőre nincsenek referált folyóirathoz benyújtva, az ArXiv oldaláról azonban letölthető egy változat (http://arxiv.org/abs/0909.4417).

Az r-Stirling számok ismeretében könnyű kombinatorikai jelentést tulajdonítani az $B_{n,r} := B_{n,r}(1)$ számoknak (l. (1.15)). $B_{n,r}$ megadja, hogy hányféleképpen lehet úgy részhalmazokra bontani egy n elemű halmazt, hogy az első (illetőleg tetszőlegesen kiválasztott) r darab elem külön halmazokban legyenek. Világos, hogy $B_n = B_{n,0}$.

[1] Az ötlet – miszerint az r-Bell polinomokat definiálni kellene – az r-Stirling számok unimodalitása kapcsán jött elő, mely a 4. fejezetben kerül tárgyalásra. Azonban úgy véljük, a dolgozat eredményeinek sorrendje ebben a formában a legtermészetesebb.

Az első r-Bell számok

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
$r=0$	1	1	2	5	15	52	203
$r=1$	1	2	5	15	52	203	877
$r=2$	1	3	10	37	151	674	3263
$r=3$	1	4	17	77	372	1915	10481
$r=4$	1	5	26	141	799	4736	29371
$r=5$	1	6	37	235	1540	10427	73013
$r=6$	1	7	50	365	2727	20878	163967

2.2. Generátorfüggvények

Levezetjük az r-Bell polinomok generátorfüggvényeit.

2.2.1. Tétel. *Az r-Bell polinomok exponenciális generátorfüggvénye*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}(x)\frac{z^n}{n!} = e^{x(e^z-1)+rz}.$$

Bizonyítás. Megszorozva (1.12) mindkét oldalát x^k-val és összegezve k-ra kapjuk az állítást. ◇

Megjegyezzük, hogy [13, (3.19)] is tartalmazza az eredményt.

2.2.2. Következmény. *Az r-Bell polinomok kifejezhetők a hagyományos Bell polinomokkal a következőképpen:*

$$B_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} r^k \binom{n}{k} B_{n-k}(x).$$

Bizonyítás. A Bell polinomokra vonatkozó addíciós formula ismert (illetve levezethető a fenti tételből $r=0$ esetén):

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x)B_{n-k}(y).$$

Ezért a tételbeli exponenciális generátorfüggvény átírható:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)\frac{z^n}{n!} &= e^{\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)(e^z-1)+rz} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\frac{z^n}{n!}\right)\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{x}{2}\right)\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{x}{2}\right)\frac{z^n}{n!}\right)\right] \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)\frac{z^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} r^k\binom{n}{k}B_{n-k}(x)\right)\frac{z^n}{n!},
\end{aligned}$$

a Cauchy-szorzat segítségével. Az együtthatókat összehasonlítva az eredmény kiadódik. $\diamond$

Érdemes megjegyezni, hogy Carlitz [13, (3.18)] ezt bizonyította, de csak nempolinomiális verzióban.

A hagyományos generátorfüggvény levezetéséhez szükségünk van a *hipergeometrikus függvény* fogalmára. Ezt a növekvő faktoriálisokkal így definiáljuk:

$${}_pF_q\left(\begin{array}{cccc} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_q \end{array}\middle| x\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)^{\overline{k}}(a_2)^{\overline{k}}\cdots(a_p)^{\overline{k}}}{(b_1)^{\overline{k}}(b_2)^{\overline{k}}\cdots(b_q)^{\overline{k}}}\frac{x^k}{k!}.$$

2.2.3. Tétel. *Az r-Bell polinomok generátorfüggvénye*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}(x)z^n = \frac{-1}{rz-1}\frac{1}{e^x}\,{}_1F_1\left(\begin{array}{c} \frac{rz-1}{z} \\ \frac{rz+z-1}{z} \end{array}\middle| x\right).$$

Bizonyítás. Ismert [10], hogy az r-Stirling számokra

(2.1)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{ {n \atop k} \right\}_r z^n = \frac{z^k}{(1-rz)(1-(r+1)z)\cdots(1-kz)} \quad (k \geq r \geq 0)$$

érvényes. Ez átparaméterezhető:

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r z^n = \frac{z^k}{(1-rz)(1-(r+1)z)\cdots(1-(k+r)z)}.$$

A csökkenő faktoriális segítségével kifejezzük a nevezőt:

$$
\begin{aligned}
&(1-rz)(1-(r+1)z)\cdots(1-(k+r)z)\\
&=\frac{(1-z)(1-2z)\cdots(1-(k+r)z)}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-(r-1)z)}=\frac{z^{k+1}\left(\frac{1}{z}\right)^{\underline{k+r+1}}}{\left(\frac{1}{z}\right)^{\underline{r}}}.
\end{aligned}
$$

Így

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r z^n=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\right)^{\underline{r}}\frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)^{\underline{k+r+1}}}.$$

Mivel

$$x^{\underline{n}}=(-1)^n(-x)^{\overline{n}}$$

érvényes, a növekvő- és csökkenő faktoriálisokkal az alábbi átalakítást végezzük:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{z}\right)^{\underline{k+r+1}}&=(-1)^{k+r+1}\left(-\frac{1}{z}\right)^{\overline{k+r+1}}\\
&=(-1)^{k+r+1}\left(-\frac{1}{z}\right)^{\overline{r+1}}\left(-\frac{1}{z}+r+1\right)^{\overline{m}}.
\end{aligned}
$$

Következésképpen

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r z^n=\frac{1}{z}\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{\underline{r}}}{\left(-\frac{1}{z}\right)^{\overline{r+1}}}\frac{(-1)^{k+r+1}}{\left(\frac{rz+z-1}{z}\right)^{\overline{k}}}.$$

Mivel

$$\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{\underline{r}}}{\left(-\frac{1}{z}\right)^{\overline{r+1}}}=(-1)^r\frac{z}{rz-1},$$

kapjuk, hogy

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r z^n=\frac{-1}{rz-1}\frac{(-1)^k}{\left(\frac{rz+z-1}{z}\right)^{\overline{k}}}.$$

Beszorozva x^k-nal és összegezve k-ra,

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,r}(x)z^n=\frac{-1}{rz-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{\left(\frac{rz+z-1}{z}\right)^{\overline{k}}}=\frac{-1}{rz-1}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}1\\ \frac{rz+z-1}{z}\end{matrix}\,\middle|\,-x\right).$$

Végül az

$$e^{-x}\,{}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\middle|\, x\right) = {}_1F_1\left(\begin{array}{c} b-a \\ b \end{array}\middle|\, -x\right)$$

Kummer formulát [1, p. 505.] alkalmazva $b = \frac{rz+z-1}{z}$ és $a = \frac{rz-1}{z}$ paraméterekkel, nyerjük az állítást. $\diamond$

2.2.4. Megjegyzés. A speciális 1, 1 paraméterű ${}_1F_1$ hipergeometrikus függvénynek saját neve van, *konfluens hipergeometrikus függvény*nek (vagy *elsőfajú Kummer függvény*nek) nevezik. A matematikában és azon kívül is számtalan helyen (fizika, műszaki tudományok) előfordul [1].

2.3. Rekurziók

Az r-Bell polinomok gyökszerkezetéről is nyerhetünk információkat. Ezen szakasz eredményei konkrétan azok, melyek eredeti kutatási témánk – jelesül az r-Stirling számok unimodalitása, 4. fejezet – megválaszolásához „lemmákként" szükségesek voltak (l. 4.3 szakasz).

Belátjuk a következő rekurziókat.

2.3.1. Tétel. *Az r-Bell polinomok előállíthatók alacsonyabb indexűekből az alábbi módokon:*

$$B_{n,r}(x) = x\left(\frac{d}{dx}B_{n-1,r}(x) + B_{n-1,r}(x)\right) + rB_{n-1,r}(x), \tag{2.2}$$

$$e^x x^r B_{n,r}(x) = x\frac{d}{dx}\left(e^x x^r B_{n-1,r}(x)\right). \tag{2.3}$$

Bizonyítás. Az r-Stirling számok (1.11) rekurziójának felhasználásával

$$\begin{aligned} B_{n,r}(x) &= \sum_{k=0}^{n}(k+r)\left\{\begin{matrix} n-1+r \\ k+r \end{matrix}\right\}_r x^k + \sum_{k=0}^{n}(k+r)\left\{\begin{matrix} n-1+r \\ k-1+r \end{matrix}\right\}_r x^k \\ &= \frac{1}{x^{r-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(k+r)\left\{\begin{matrix} n-1+r \\ k+r \end{matrix}\right\}_r x^{k+r-1} + xB_{n-1,r}(x) \\ &= \frac{1}{x^{r-1}}\frac{d}{dx}\left(x^r B_{n-1,r}(x)\right) + xB_{n-1,r}(x). \end{aligned}$$

Ebből a tétel második azonossága azonnal következik, ha abban a jobb oldalon a deriválást elvégezzük. ◇

2.3.2. Következmény. *A $B_{n,r}(x)$ polinomok minden gyöke valós és negatív.*

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk. $B_{1,r}(x) = x + r$, így erre az állítás érvényes. Tegyük fel, hogy az állítás $B_{n-1,r}(x)$-re is igaz. Ekkor (2.3) jobb oldalán a deriválás jele mögött olyan függvény áll, melynek $-\infty$-ben van egy gyöke, $n-1$ negatív gyöke van és a 0 r-szeres gyök. Ekkor – Rolle tétele értelmében – a deriváltnak lesz $-\infty$-től jobbra, de az összes negatív gyöktől balra egy gyöke, az $n-1$ negatív gyök között lesz $n-2$ gyök, továbbá a negatív gyököktől jobbra, a nullától balra is lesz egy. Ez összesen n negatív gyök. A deriválás után a 0 $r-1$-szeres multiplicitású lesz, de az x szorzó miatt végül a 0 multiplicitása r. Ez bizonyítja állításunkat. ◇

A teljesség kedvéért megadunk még néhány előállítást az r-Bell polinomokra vonatkozóan. Az

$$\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r = \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_{r-1} - (r-1)\left\{ {n-1+r \atop k+r} \right\}_{r-1}$$

azonosságot Broder bizonyította [10]. Ez implikálja a

$$B_{n,r}(x) = B_{n,r-1}(x) - (r-1)B_{n-1,r-1}(x).$$

rekurziós azonosságot.

Carlitz [13, (3.22-3.23)] eredményei:

$$\begin{aligned} B_{n+m,r} &= \sum_{j=0}^{m} \left\{ {m+r \atop j+r} \right\}_r B_{n,r+j}, \\ B_{n,r+m} &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \left[{m+r \atop j+r} \right]_r B_{n+j,r}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Mivel

$$e^t \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x(e^t-1)+(r+1)t},$$

a Cauchy-szorzat azonnal maga után vonja a

$$B_{n,r+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{k,r}(x), \tag{2.5}$$

$$B_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B_{k,r+1}(x). \tag{2.6}$$

azonosságokat.

2.4. A Dobiński-formula és Cesàro integrál-reprezentációja

Régóta ismert [18, 24, 30, 53], hogy a Bell számok előállíthatók a következő végtelen sorral:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

Ezt az azonosságot Dobiński-formulának nevezik. Természetesnek tűnik megtalálni ennek az r-Bell számokra (illetve polinomokra) vonatkozó általánosítását. Ezt tesszük a következőkben.

2.4.1. Tétel (Dobiński-formula). *Az r-Bell polinomok előállíthatók végtelen összeggel az alábbi módon:*

$$B_{n,r}(x) = \frac{1}{e^x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)^n}{k!} x^k.$$

Így természetesen

$$B_{n,r} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)^n}{k!}.$$

Bizonyítás. (1.14) alapján, bármely egész m-re

$$\frac{(m+r)^n}{m!} = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \frac{1}{(m-k)!}.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt x^m-mel és összegezzünk $m=0$-tól végtelenig. Ekkor

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+r)^n}{m!}x^m=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\left\{{n+r \atop k+r}\right\}_r\frac{x^m}{(m-k)!}=e^x\left(\sum_{k=0}^{n}\left\{{n+r \atop k+r}\right\}_r x^k\right),$$

a Cauchy-szorzat alapján. ◇

A fenti eredmény egyszerűen kiszámolhatóvá tesz egyes speciális alakú végtelen összegeket. Például, mint táblázatunkból látszik, $B_{2,2}=10$, így

$$\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)^2}{k!}=10.$$

1885-ben Cesàro [15] egy nagyon szép integrál-reprezentációt talált a Bell számokra (l. még [3, 11]):

$$B_n=\frac{2n!}{\pi e}\,\mathrm{Im}\int_0^{\pi}e^{e^{e^{i\theta}}}\sin(n\theta)d\theta.$$

Nem nehéz levezetni az „r-Bell-verziót” a polinomiális esetben sem.

2.4.2. Tétel. *Az r-Bell polinomok az alábbi integrállal reprezentálhatók:*

$$B_{n,r}(x)=\frac{2n!}{\pi e^x}\,\mathrm{Im}\int_0^{\pi}e^{xe^{e^{i\theta}}}e^{re^{i\theta}}\sin(n\theta)d\theta.$$

Bizonyítás. Carlitz cikkében [13] azt találjuk, hogy

(2.7)
$$k!\left\{{n+r \atop k+r}\right\}_r=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(j+r)^n.$$

Egy, a Fourier-analízisből ismeretes azonosságot [11] használunk:

(2.8)
$$\mathrm{Im}\int_0^{\pi}e^{je^{i\theta}}\sin(n\theta)d\theta=\frac{\pi}{2}\frac{j^n}{n!}.$$

Egyesítve a (2.7)-(2.8) formulákat,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}\frac{1}{n!}\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^k &= \frac{x^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\mathrm{Im}\int_0^{\pi} e^{(j+r)e^{i\theta}}\sin(n\theta)d\theta \\
&= \frac{x^k}{k!}\mathrm{Im}\int_0^{\pi}\left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\left(e^{e^{i\theta}}\right)^j\right]e^{re^{i\theta}}\sin(n\theta)d\theta \\
&= \mathrm{Im}\int_0^{\pi}\frac{\left(x(e^{e^{i\theta}}-1)\right)^k}{k!}e^{re^{i\theta}}\sin(n\theta)d\theta,
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^k = \frac{2n!}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(x(e^{e^{i\theta}}-1)\right)^k}{k!}\right)e^{re^{i\theta}}\sin(n\theta)d\theta,$$

és ez adja a kérdéses formulát. $\diamond$

2.4.3. Megjegyzés. A fenti két formulánkat egységbe is zárhatjuk:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+r)^n}{k!} = \frac{2n!}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_0^{\pi} e^{e^{e^{i\theta}}}e^{re^{i\theta}}\sin(n\theta)d\theta.$$

2.5. Hankel-transzformált és log-konkavitás

A (2.5) és (2.6) képletek egy érdekes eredményt szolgáltatnak az r-Bell számok ún. Hankel-transzformáltjára nézve, melyet a következőkben ismertetünk. Egy (a_n) sorozat H Hankel mátrixa [40] a

$$H = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

mátrix, míg az n-edrendű Hankel matrix, melyet h_n-nel jelölünk, H bal felső, $n \times n$-es minormátrixa. Az (a_n) sorozat Hankel-transzformáltja a h_n mátrixok determinánsaiból képzett sorozat.

Aigner és Lenard [2, 41] egy szép eredménye, hogy a Bell számok Hankel-transzformáltja $(1!, 1!2!, 1!2!3!, \dots)$, vagyis, minden rögzített n-re

$$\begin{vmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \cdots & B_n \\ B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_n & B_{n+1} & B_{n+2} & \cdots & B_{2n} \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n} i!$$

Az r-Bell számok Hankel-transzformáltja könnyen kiszámítható a következő fogalom segítségével. Legyen (a_n) ismét egy sorozat. Az (a_n) binomiális transzformáltja a (b_n) sorozat, ha

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k,$$

míg az inverz transzformáció

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k.$$

(l. pl. [55]). Layman [40] egy hasznos állítása szerint minden egész sorozat Hankel-transzformáltja megegyezik binomiális transzformáltjának Hankel-transzformáltjával és fordítva. A (2.5) és (2.6) formulák miatt igaz a

2.5.1. Következmény. *Az r-Bell számok Hankel-transzformáltja*

$$\begin{vmatrix} B_{0,r} & B_{1,r} & B_{2,r} & \cdots & B_{n,r} \\ B_{1,r} & B_{2,r} & B_{3,r} & \cdots & B_{n+1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{n,r} & B_{n+1,r} & B_{n+2,r} & \cdots & B_{2n,r} \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n} i!$$

Egy másik következménye is nyerhető a (2.5) és (2.6) formuláknak. Ismert [44], hogy a Bell számok log-konvexek[2], vagyis

$$B_{n-1}B_{n+1} \geq B_n^2 \quad (n \geq 1).$$

Egy Liu és Wang cikkében [44] idézett állítás (melyet Davenport-Pólya tételként is ismernek) azt állítja, hogy a binomiális transzformált megőrzi a log-konvexitást. Ebből azonnal következik, hogy

$$B_{n-1,r}B_{n+1,r} \geq B_{n,r}^2 \quad (n \geq 1)$$

érvényes minden $r > 0$ számra is.

2.6. Az r-Bell számok egy előfordulása

Már említettük, hogy az r-Bell számok az r-Stirlingek maximumának meghatározásánál szükségszerűen „bukkantak fel". Azonban egy másik momentum is idekívánkozik még. Amikor – egészen más probléma kapcsán – egy Journal of Combinatorial Theory c. folyóiratban közölt cikket[3] [64] lapozgattam, észerevettem, hogy a tanulmány végén egy számtáblázat van, melynek néhány oszlopáról[4] a szerző azt írta, hogy érdekes lenne rájuk kombinatorikai értelmezést adni. A táblázat nagyon ismerősnek tűnt. Hazaérve azonnal ellenőriztem, és azok éppen az r-Bell számok voltak.

Egészen pontosan, az ott használt jelölésekkel:

(2.9)
$$B_{n,r} = b_{n+r,n} \quad (n \geq 1).$$

Mivel E. G. Whitehead a táblázatában szereplő számokra bebizonyította, hogy

$$(n-i)b_{n,i} + b_{n+1,i} = b_{n+1,i+1},$$

[2] Erről a fogalomkörről még részletesen szó lesz.

[3] A dolgozat gráfelméleti megfontolások útján bizonyít Stirling számokra vonatkozó azonosságokat.

[4] A táblázat (n,i)-edik eleme az $x^i(x)_{n-i}$ polinom együtthatóinak összege az ún. teljes gráf bázisra vonatkozóan.

rögtön nyerjük a

$$B_{n+1,r} = rB_{n,r} + B_{n,r+1}.$$

azonosságot. Ez nem új, (2.4) speciális esete. Ám érdekes ezt egy másik szemszögből is bizonyítva látni.

Ezzel sikerült Whitehead kérdését megválaszolni.

3. fejezet

Az r-Fubini- és r-Euler számok

3.1. A Fubini- és Euler számok

Partíciók összeszámlálásánál az egyes partíciók sorrendjére is tekintettel lehetünk. Ha ezt tesszük, egy egészen más fogalomkör tárul elénk.

Habár a Bell számok jól ismertek és széles körben alkalmazottak (pl. valószínűségszámításban, sőt újabban ezen számoknak kvantumtérelméleti hátterű általánosítása [8] is létezik!), a rendezett partíciókat megadó Fubini számokra nagyságrendekkel kevesebb hivatkozást lehet találni.

Jelen fejezetben az r-Stirling számok segítségével építjük fel a Fubini számok általánosítását. Utóbbiak az Euler számokkal állnak szoros kapcsolatban. Ez azt sugallja, hogy található az Euler számoknál általánosabb kombinatorikus fogalom, melyre ez a kapcsolat átvihető. A szükséges fogalmak bevezetése után a fejezet későbbi részeiben ezt a konstrukciót mutatjuk be. A szakasz eredményei kézirat formájában vannak.

3.1.1. Definíció. *Ha egy n elemű A halmaz összes partícióinak számát úgy képezzük, hogy az egyes partíciókban levő blokkok sorrendjét is figyelembe vesszük, akkor a kapott számot az A* rendezett partíciói szám*ának*[1], *másképpen* n-edik Fubini[2] szám*nak nevezzük, és* F_n*-nel jelöljük. A Fubini számokat* rendezett Bell számok*nak is nevezik.*

Világos a következő előállítás:

(3.1)
$$F_n = \sum_{k=1}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Megállapodunk még abban, hogy $F_0 = 1$.

Bizonyítható [61], hogy

(3.2)
$$F_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k}$$

Természetesen a Fubini számok mellett a *Fubini polinomok* is bevezethetők:
$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\} x^k.$$

Ezek generátorfüggvénye [60]
$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(y) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1 - y(e^x - 1)}.$$

A Fubini polinomok szép kapcsolatban állnak az ún. Euler polinomokkal, ezért most ezeket definiáljuk. Ehhez szükséges az *emelkedés* fogalma. Egy
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$$

permutációban k emelkedés van, ha k-szor fordul elő, hogy egy helyen kisebb szám áll, mint a tőle eggyel jobbra levő helyen.

---

[1] angolul preferential arrangement.

[2] Guido Fubini (1879-1943) olasz matematikus.

3.1.2. Definíció. *Azon n elemű permutációk számát, melyek pontosan k emelkedést tartalmaznak, n,k paraméterű* Euler szám*nak nevezzük*[3]*, és rájuk az $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ jelölést*[4] *használjuk.*

Az Euler számokra érvényes a

(3.3)
$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle.$$

rekurzió [30].

Definiálhatjuk az *Euler polinomok*at:

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle x^k.$$

Ez azért hasznos, mert a

$$\sum_{k=0}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\} (x-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle x^k$$

Frobenius-formulán [20] keresztül a Fubini- és Euler polinomok összeköthetők:

$$(x-1)^n F_n\left(\frac{1}{x-1}\right) = E_n(x).$$

A következőkben ezen fogalmak mindegyikét – és még másokat is – átvisszük az r-Stirling számok esetére, ezért a további eredményeket nem itt részletezzük, hanem általánosan mondjuk ki a következő szakaszokban.

[3]Az angolban ez „Eulerian number" néven ismeretes, és nem tévesztendő össze az „Euler number"-rel, ami egészen mást jelent.

[4]Ez a jelölés nem annyira terjedt még el, mint pl. a Stirling számok hasonló jelölése, de kényelmes. 1973-ban vezette be Donald E. Knuth angol matematikus; a $<$ és $>$ jel a relációs jelekre utalnak.

3.2. Az r-Fubini számok

Az r-Bell számok mintájára bevezethetjük az olyan rendezett partíciók összeszámlálását is, melyekben az első r elem különböző halmazokban van. (Ahhoz, hogy a formulákban kellő egyezést kapjunk, és hogy az általánosításból azonnal látsszon a speciális $r = 0$ eset, n elemű halmaz helyett $n + r$ eleműt érdemes tekinteni.)

3.2.1. Definíció. *Legyenek az* r-Fubini számok *vagy* rendezett r-Bell számok *a következőképpen definiálva:*

$$F_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r ,$$

míg az r-Fubini polinomok

$$F_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^k .$$

$F_{n,r}$ tehát azt mondja meg, hogy egy $n+r$ elemű halmaz hányféleképpen bontható diszjunkt halmazok uniójára úgy, hogy minden partícióban az első r elem (vagy ami ugyanaz, r különböző elem) különböző halmazokban van, és a partícióbeli halmazok sorrendje számít. Ezekből következően

$$F_{0,r} = r!, \quad F_{n,1} = F_{n+1,0}, \quad F_{n,0} = F_n,$$

utóbbiban az F_n a „hagyományos” Fubini számokat jelöli.

Az F_n számok Gross [31] munkájában bukkannak fel először, James [36] négyzetmentes egészek rendezett faktorizációinak számlálására vezette be őket. Egy másik interpretáció található Comtet [20, p. 228.] könyvében, illetve Wilf könyvében [65]. Velleman és Call [61] a „biztonsági zár” problémát tárgyalta a segítségükkel, amire még mi is visszatérünk.

Az első rendezett r-Bell számok

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$r=0$	1	1	3	13	75	541
$r=1$	1	3	13	75	541	4683
$r=2$	2	10	62	466	4142	42610
$r=3$	6	42	342	3210	34326	413322
$r=4$	24	216	2184	24696	310344	4304376
$r=5$	120	1320	15960	211560	3063000	48226920
$r=6$	720	9360	131760	2005200	32911920	580919760

3.2.1. Az r-Fubini számok tulajdonságai

A generátorfüggvény meghatározásával kezdjük.

3.2.2. Tétel. *Az r-Fubini polinomok exponenciális generátorfüggvénye*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n,r}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{r!e^{rt}}{(1-x(e^t-1))^{r+1}} = r!e^{rt}\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)^{r+1}.$$

Itt $F_n(x) = F_{n,0}(x)$, a hagyományos Fubini polinomok [54, 60].

Bizonyítás. Mivel $x^{\underline{k}}$ k-adfokú polinom x-ben, ezért az $(x^{\underline{k}})_{k=0}^{\infty}$ bázist alkot a valós együtthatós polinomok V vektorterében. Legyen L egy lineáris operátor V-n, és írjuk elő a hatását a bázison a következőképpen:

$$L(x^{\underline{k}}) = L(x(x-1)\cdots(x-k+1)) := (k+r)!x^k.$$

Mivel ismert [10], hogy

$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^{\underline{k}},$$

ezért

$$L((x+r)^n) = L\left(\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^{\underline{k}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r L(x^{\underline{k}}) =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r (k+r)!x^k = F_{n,r}(x).$$

Tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n,r}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} L((x+r)^n)\frac{t^n}{n!} = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((x+r)t)^n}{n!}\right) = e^{rt}L(e^{xt}).$$

Írjuk fel e^t-t $e^t = 1 + v$ alakban. Ekkor $e^{xt} = (1 + v)^x$. Használjuk fel a következő összefüggést:

$$(1+v)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} v^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\underline{n}}}{n!} v^n.$$

Ekkor – L definíciója miatt –

$$L(e^{xt}) = L((1+v)^x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L(x^{\underline{k}})}{n!} v^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r)!}{n!}(xv)^n.$$

Az utolsó összeg pedig megadható zárt alakban:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+r)!}{n!}(xv)^n = \frac{r!}{(1-xv)^{r+1}}.$$

Behelyettesítve $v = e^t - 1$ értéket, az állítást bebizonyítottuk. Mivel a Fubini polinomok exponenciális generátorfüggvénye ismert [60], a jobb oldal is érvényes. $\diamond$

3.2.3. Következmény.

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n,r}\frac{t^n}{n!} = \frac{r!e^{rt}}{(2-e^t)^{r+1}}. \tag{3.4}$$

$$F_{n,r}(-1) = r!(-1)^n. \tag{3.5}$$

Megjegyezzük, hogy (3.4) az $r = 0$ esetben már korábbról ismert [59]. A második egyenlőség

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n,r}(-1)\frac{t^n}{n!} = \frac{r!e^{rt}}{e^{t(r+1)}} = r!e^{-t}$$

miatt igaz.

3.2.4. Tétel.

$$F_{n,r+1}(x) = (r+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}F_l(x)F_{k-l,r}(x).$$

Bizonyítás. Felhasználva az exponenciális generátorfüggvényre kapott eredményt, és a Cauchy-szorzat definícióját,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{n,r+1}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{(r+1)e^t}{(1-x(e^t-1))}\,\frac{r!e^{rt}}{(1-x(e^t-1))^{r+1}} =$$

$$(r+1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}F_{n,r}(x)\frac{t^n}{n!}\right) =$$

$$(r+1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}F_l(x)F_{n-l,r}(x)\right)\frac{t^n}{n!} =$$

$$(r+1)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}F_l(x)F_{k-l,r}(x)\right)\frac{t^n}{n!}.$$

Az együtthatók összehasonlításával kapjuk az azonosságot. ◇

3.2.5. Következmény. *Az $F_{n,r}$ sorozat log-konvex, mert ilyenek (kettős) konvolúciója [44]. Ez azt jelenti, hogy érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$F_{n-1,r}F_{n+1,r} \geq F_{n,r}^2.$$

Az alábbi rekurziót bizonyítjuk.

3.2.6. Tétel. *Az r-Fubini polinomokra*

$$F_{n,r}(x) = x[(r+1)F_{n-1,r}(x) + (1+x)F'_{n-1,r}(x)] + rF_{n-1,r}(x).$$

Bizonyítás. A rendezett r-Bell polinomok definícióját és az r-Stirling számokra vonatkozó rekurziót felhasználva

$$F_{n,r}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(k+r)!(k+r)\left\{ {n-1+r \atop k+r} \right\}_r x^k + \sum_{k=0}^{n}(k+r)!\left\{ {n-1+r \atop k-1+r} \right\}_r x^k.$$

Az első összegre:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+r)!(k+r)\left\{ {n-1+r \atop k+r} \right\}_r x^k =$$

$$\frac{1}{x^{r-1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+r)!\left\{ {n-1+r \atop k+r} \right\}_r x^{k+r}\right)' = \frac{1}{x^{r-1}}(x^r F_{n-1,r}(x))' =$$

$$rF_{n-1,r}(x) + xF_{n-1,r}(x).$$

(A vessző x szerinti deriválást jelöl.) A másodikra pedig

$$\sum_{k=0}^{n}(k+r)!\left\{ {n-1+r \atop k-1+r} \right\}_r x^k =$$

$$\frac{1}{x^{r-1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+r-1)!\left\{ {n-1+r \atop k+r} \right\}_r x^{k+r}\right)' = \frac{1}{x^{r-1}}(x^{r+1} F_{n-1,r}(x))' =$$

$$= (r+1)xF_{n-1,r}(x) + x^2 F'_{n-1,r}(x).$$

$\diamond$

Az alábbi fontos következményt még használni fogjuk.

3.2.7. Következmény. *A fenti rekurzió alapján könnyen látható az alábbi rekurzió:*

$$x^{1-r}\left[(x^{r+1}+x^r)F_{n-1,r}(x)\right]' = F_{n,r}(x).$$

Speciálisan

$$F_n(x) = x((1+x)F_{n-1}(x))'.$$

Ebből megkaphatjuk az $F_{n,r}$ polinomok gyökstruktúráját: $F_{n,r}(x)$-nek minden gyöke valós, és a $]-1,0[$ intervallumban van.

Bizonyítás. $F_{n,r}(x)$-nek nem lehet pozitív zérushelye. Mivel x^{1-r} véges helyen nem lehet zérus (kivéve $r = 0$ esetén az $x = 0$ helyet), ezért az $F_{n,r}(x)$ csak akkor lehet 0, ha

$$[x^r(x+1)F_{n-1,r}(x)]' = 0.$$

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $F_{n,r}(x)$-nek minden zérushelye valós, sőt $]-1,0[$-beli. Ez igaz az $F_{1,r}(x) = (r+1)!x + rr!$ polinomra. Tegyük fel, hogy $F_{n-1,r}(x)$-nek is csak ilyen zérushelyei vannak.

Ekkor az $x^r(x+1)F_{n-1,r}(x)$ polinomnak a 0 r-szeres, a -1 egyszeres gyöke, és van $n-1$ darab $]-1,0[$-beli gyöke. Rolle tételéből következik, hogy a deriváltnak n darab $]-1,0[$-beli gyöke van: $F_{n-1,r}(x)$ gyökei között $n-2$ darab, az $x+1$ faktor miatt $F_{n-1,r}(x)$ gyökeitől balra, de -1-től jobbra is van egy gyök. Továbbá az x^r faktor miatt $F_{n-1,r}(x)$ gyökeitől jobbra, de a 0-tól balra is van egy. $\diamond$

Végezetül egy érdekes összegzési formulát adunk az r-Fubini számokra, amely a korábban Bell számokra (és polinomokra) bizonyított Dobiński-formula „rendezett" általánosításaként fogható fel.

3.2.8. Tétel.

$$F_{n,r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)^n}{2^{k+r+1}} \frac{(k+r)!}{k!}.$$

Ez $r = 0$ esetben átmegy az ismert

$$F_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$$

formulába [31, 36, 60, 65].

Bizonyítás. Kiindulunk az r-Bell számokra érvényes Dobiński-formulából.

$$B_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)^n}{k!} \frac{x^k}{e^x}.$$

Szorozzunk be $\frac{x^r}{e^x}$-szel, és integráljunk 0-tól végtelenig:

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \int_0^\infty \frac{x^{k+r}}{e^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)^n}{k!} \int_0^\infty \frac{x^{k+r}}{e^{2x}}.$$

A szereplő integrálok ismertek,

$$\int_0^\infty \frac{x^{k+r}}{e^x} = (k+r)!, \quad \int_0^\infty \frac{x^{k+r}}{e^{2x}} = (k+r)!2^{-(k+r+1)}.$$

$\diamond$

3.3. Az r-Euler számok és -polinomok

A Fubini számok szoros kapcsolatban vannak az Euler számokkal, amint azt a fejezet elején is említettük.

A következő azonosságok kötik össze a Fubini- és Euler számokat:
(3.6)

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle 2^k,$$

illetve ennek általános, polinomos verziója:
(3.7)

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle (x+1)^k x^{n-k}.$$

De a Stirling- és Euler számok között is található kapcsolat:

(3.8)
$$k! \left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{m=0}^{n} \left\langle {n \atop m} \right\rangle \binom{m}{n-k},$$

illetve – a már említett – *Frobenius-tétel* [20]:
(3.9)

$$\sum_{k=0}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\} (x-1)^{n-k} = \sum_{m=0}^{n} \left\langle {n \atop m} \right\rangle x^m.$$

Ezek azt sugallják, hogy az r-Fubini számokon keresztül az Euler számok is általánosíthatók. Az eredeti gondolatmenetünket követjük, hogy bemutassuk, hogyan jutottunk el az ún. r-Euler számokhoz.

A (3.7) képletet ismerve, a bal oldalra írjuk az r-Fubini polinomokat, a jobb oldalon az ismeretlen együtthatók legyenek – a későbbiekre gondolva – $\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r$ módon jelölve:
(3.10)

$$F_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r (x+1)^k x^{n-k}.$$

Felhasználva az $F_{n,r}(x)$ definícióját:

$$\sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^k = \sum_{m=0}^{n} \left\langle {n \atop m} \right\rangle_r (x+1)^m x^{n-m}.$$

Osszunk be x^n-nel és írjunk x helyére $1/x$-et:
(3.11)

$$\sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^{n-k} = \sum_{m=0}^{n} \left\langle {n \atop m} \right\rangle_r (x+1)^m.$$

A jobb oldal átírásához használjuk a binomiális tételt:

$$\sum_{m=0}^{n} \left\langle {n \atop m} \right\rangle_r (x+1)^m = \sum_{m=0}^{n} \left\langle {n \atop m} \right\rangle_r \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{n-k} x^{n-k}.$$

Ezt beírva az előzőekbe,

$$\sum_{k=0}^{n} (k+r)! \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^{n-k} = \sum_{m=0}^{n} \left\langle {n \atop m} \right\rangle_r \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{n-k} x^{n-k}.$$

Az együtthatókat összehasonlítva

$$(k+r)! \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r = \sum_{m=0}^{n} \left\langle {n \atop m} \right\rangle_r \binom{m}{n-k}.$$

adódik, ami éppen (3.8) általánosítása. Ez igazolja, hogy jó úton járunk.

Sőt, „mellékesen” Frobenius (3.9) tétele is kiadódott. Csak írjunk (3.11) közbenső egyenletben x helyére $x-1$-et:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+r)!\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r (x-1)^{n-k} = \sum_{m=0}^{n} \left\langle {n \atop m} \right\rangle_r x^m.$$

A fentiek alapján jogos az $\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r$ számokat az Euler számok általánosításának nevezni. Ezekre a számokra a továbbiakban az *r-Euler számok* elnevezést használjuk, és később kombinatorikai értelmezést is adunk rájuk.

Az utolsó formulából az r-Euler számokra képlet adható, csak alkalmazzuk a binomiális tételt és hasonlítsuk össze az együtthatókat:

3.3.1. Tétel.

$$\left\langle {n \atop m} \right\rangle_r = \sum_{k=0}^{n}(k+r)!\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \binom{n-k}{m}(-1)^{n-k-m}.$$

Ebből következően pedig

$$\begin{aligned} \left\langle {n \atop n} \right\rangle_r &= r!\left\{ {n+r \atop r} \right\}_r = r!r^n, \\ \left\langle {n \atop 0} \right\rangle_r &= r! \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az $\left\langle {n \atop n} \right\rangle_r = r!r^n$ azonosság nem szorul magyarázatra, a második esetén pedig

$$\left\langle {n \atop 0} \right\rangle_r = (-1)^n \sum_{k=0}^{n}(k+r)!\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r (-1)^k = (-1)^n F_{n,r}(-1) = r!,$$

a (3.5) szerint. ◇

3.3.2. Definíció. *Az* r-Euler polinomok*at a szokásos módon vezetjük be:*

$$E_{n,r}(x) := \sum_{m=0}^{n} \left\langle {n \atop m} \right\rangle_r x^m.$$

A (3.10) egyenlet kapcsolatot létesít az r-Euler polinomok és a rendezett r-Bell polinomok között az alábbi módon. (Az $r = 0$ esetet Prodinger [54] bizonyította.)

3.3.3. Tétel.

$$\begin{aligned} F_{n,r}(x) &= x^n E_{n,r}\left(\frac{x+1}{x}\right), \\ E_{n,r}(x) &= (x-1)^n F_{n,r}\left(\frac{1}{x-1}\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Bizonyítás. Egyszerű transzformáció. ◇

3.3.4. Következmény. *Az $E_{n,r}(x)$ polinom minden gyöke valós, és a $]-\infty, 0[$ intervallumban van.*

Bizonyítás. Az

$$E_{n,r}(x) = (x-1)^n F_{n,r}\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$$

esetből következik, hogy (mivel az 1 nem lehet zérushelye $E_{n,r}(x)$-nek)

$$F_{n,r}\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0,$$

vagyis $\frac{1}{x-1} \in]-1, 0[$, a 3.2.7. következmény alapján. (Még nem tudjuk, hogy az r-Euler számok nem lehetnek negatívak, de ez igaz és megelőlegeztük.) ◇

3.3.5. Következmény. *Az $\left(\left\langle {n \atop m} \right\rangle_r\right)_{m=0}^n$ sorozat szigorúan log-konkáv, azaz érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$\left\langle {n \atop m} \right\rangle_r^2 \geq \left\langle {n \atop m-1} \right\rangle_r \left\langle {n \atop m+1} \right\rangle_r.$$

3.3.6. Tétel. *Az r-Euler polinomok generátorfüggvénye a (3.12) formula alapján egyszerűen meghatározható:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,r}(x)\frac{t^n}{n!} = r!e^{r(x-1)t}\left(\frac{x-1}{x-e^{(x-1)t}}\right)^{r+1} =$$

$$= r!e^{r(x-1)t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)^{r+1}.$$

Itt $E_n(x) = E_{n,0}(x)$ a hagyományos Euler-polinom. Adható egy ekvivalens formula is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,r}(x)\frac{t^n}{n!} = r!e^{(1-x)t}\left(\frac{1-x}{1-xe^{(1-x)t}}\right)^{r+1}.$$

Bizonyítás.

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{n,r}(x)\frac{t^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_{n,r}\left(\frac{1}{x-1}\right)\frac{[(x-1)t]^n}{n!} = \frac{r!e^{r(x-1)t}}{\left[1-\frac{1}{x-1}(e^{(x-1)t}-1)\right]^{r+1}}.$$

(3.13)

$$= r!e^{r(x-1)t}\left(\frac{x-1}{x-e^{(x-1)z}}\right)^{r+1}.$$

A második formula igazolásához Comtet könyvére hivatkozunk [20, p. 244., formula 5i]. Ott a szerző az

(3.14)

$$A(n,k) = \left\langle {n \atop k-1} \right\rangle$$

jelölés használatával belátta, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} A(n,k)x^k\right)\frac{t^n}{n!} = \frac{1-x}{1-xe^{(1-x)z}}.$$

(3.14) miatt

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{\frac{1-x}{1-xe^{(1-x)t}} - 1}{x} + 1 = e^{(1-x)t}\frac{1-x}{1-xe^{(1-x)t}}.$$

Vagyis a (3.13) sorban

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!}\right)^{r+1} = \left(\frac{x-1}{x-e^{(x-1)z}}\right)^{r+1} = \left(e^{(1-x)t}\frac{1-x}{1-xe^{(1-x)t}}\right)^{r+1}.$$

Megint (3.13) egyenlőségsorban az exponenciális taggal egyszerűsítve kapjuk az eredményt. ◇

Az exponenciális generátorfüggvény birtokában található rekurzió az r-Euler számokra, ami igazolja majd, hogy a kombinatorikai értelmezésünk valóban helyes. Legyen ugyanis

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_{n,r}(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Ekkor belátható, hogy $f(x,t)$ kielégíti a következő parciális differenciálegyenletet:

$$(x-x^2)\frac{\partial f}{\partial x} + (tx-1)\frac{\partial f}{\partial t} + (1+rx)f = 0.$$

Ez csak annyiban különbözik az Euler-polinomokra ismert

$$(x-x^2)\frac{\partial f}{\partial x} + (tx-1)\frac{\partial f}{\partial t} + f = 0.$$

differenciálegyenlettől [20], hogy van benne egy rxf additív tag, ami a következő alakúra módosítja a szokásos, Euler számokra érvényes rekurziót:

3.3.7. Tétel.
(3.15)

$$\left\langle {n \atop m} \right\rangle_r = (m+1)\left\langle {n-1 \atop m} \right\rangle_r + (n-m+r)\left\langle {n-1 \atop m-1} \right\rangle_r.$$

Ezen rekurzió alapján:

3.3.8. Következmény. *Az r-Euler polinomokra érvényes az alábbi rekurzív összefüggés:*

$$E_{n,r}(x) = (1 + (n + r - 1)x)E_{n-1,r}(x) + (x - x^2)E'_{n-1,r}(x).$$

Bizonyítás. A rekurzió miatt

$$E_{n,r}(x) = \sum_{m=0}^{n}(m+1)\left\langle {n-1 \atop m} \right\rangle_r x^m +$$

$$\sum_{m=0}^{n}(n-m)\left\langle {n-1 \atop m-1} \right\rangle_r x^m + r\sum_{m=0}^{n}\left\langle {n-1 \atop m-1} \right\rangle_r x^m.$$

Az első két tag ugyanaz, mint a hagyományos Euler-számok rekurziója esetén, a harmadik tag pedig pontosan $rxE_{n-1,r}(x)$. Felhasználva az Euler-polinomokra érvényes

$$E_n(x) = (1 + (n - 1)x)E_{n-1}(x) + (x - x^2)E'_{n-1}(x)$$

rekurziót, készen vagyunk. ◇

3.4. Az r-Euler számok kombinatorikai értelmezése

Ahhoz, hogy az r-Euler számok kombinatorikus jelentéstartalmát felfedjük, a következő érdekes játékot mutatjuk be Velleman és Call nyomán [61].

Tekintsünk egy olyan kombinációs zárat, melyen n számozott gomb van. A zár nyitásához adott sorrendben kell megnyomnunk az összes gombot. Ha feltesszük, hogy mindegyiket csak egyszer nyomhatjuk meg, akkor természetesen az összes lehetséges esetek száma $n!$. Számunkra az lesz az érdekes, ha feltételezzük, hogy megengedett a gombok egyszerre történő megnyomása is. Ekkor egy próbálkozás úgy néz ki, hogy lenyomunk egyszerre g_1 gombot, majd g_2 gombot, végül az utolsó, k. lépésben g_k gombot (nyilván $g_1 + \cdots + g_k = n$). A sorrend fontos. Tehát például öt gomb esetén az

$$1, 2; 3, 4; 5 \quad \text{és} \quad 3, 4; 1, 2; 5$$

gombnyomások különbözőek. (Mivel az egyszerre történő gombnyomásoknál nyilván szóba sem jön a sorrend kérdése, ezért ezeket mindig növekvő sorrendben fogjuk felsorolni.) Jelölje F_n a szimultán gombnyomást is megengedő próbálkozások számát n gomb esetén. Ha 0 gombunk van, azt csak egyféleképpen „választhatjuk” így $F_0 = 0$. A zárnyitás valamilyen $k \geq 1$ hosszúságú szimultán gombnyomással kezdődik. Ezt n gombból $\binom{n}{k}$ módon választhatjuk ki, a fennmaradó $n-k$ gombot pedig úgy kezelhetjük, mintha ezek egy másik zár gombjai lennének, amit így F_{n-k} módon nyithatunk ki. Összegezve k-ra:

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} F_{n-k}.$$

Ez megegyezik a Fubini számok definiáló rekurziójával.

Egy zárnyitási próbálkozás listába foglalható úgy is, hogy leírjuk a szimultán gombnyomások gombjainak sorszámát egymás után növekvő sorrendben. Ha ezt egy permutációnak tekintjük, akkor egy ilyen permutáció legfeljebb annyi futást tartalmaz, ahány nem egyidejű gombnyomás volt. Ez azért van így, mert egy szimultán gombnyomás gombjainak sorszámai egy futásban vannak, továbbá két egymást követő gombnyomáskor lehet, hogy az előző gombnyomás legnagyobb sorszámú gombja (ami leghátul van) kisebb mint a következő gombnyomás legkisebb sorszámú gombja (ami legelöl van), de nem biztos hogy így van. Például

$$5; 3, 4; 1, 2$$

három lépésből áll és három futást tartalmaz,

$$1, 2; 5; 3, 4$$

három lépésből áll de csak két futást tartalmaz, míg

$$1, 2; 3, 4; 5$$

szintén három lépésből áll és csak egy futást tartalmaz.

A futások és lépések számát fordítva is kapcsolatba állíthatjuk. Ha van egy k futást tartalmazó permutáció, akkor az egy olyan zárnyitáshoz tartozik, amiben legalább k lépés van. Ha pedig legalább k lépés van, akkor a k futást esetleg tovább kell bontanunk. Ezt úgy tesszük meg, hogy a futások elemei közé jelzést teszünk, ami a szimultán gombnyomás határát jelzi. Van tehát legalább $k-1$ jelzés, ami k lépést jelent. Az n elem közé összesen $n-1$ jelzés tehető le, amiből mi már $k-1$-et letettünk. Marad $n-1-(k-1)=n-k$ hely. Ebből legfeljebb $n-k$, legalább 0 választandó, ez 2^{n-k} lehetőség. Végül – emlékezve arra, hogy k futás $n-k$ emelkedést jelent –

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} \left\langle {n \atop n-k} \right\rangle 2^{n-k},$$

ami nem más, mint (3.6) átindexelve.

Egy k lépésű zárnyitás úgy is felfogható, hogy az egyszerre történő gombnyomások egy halmaz elemeit alkotják. Ezen halmazok diszjunktak és uniójuk a gombok indexhalmaza. Vagyis a k lépéses zárnyitás n elem k blokkokra történő felbontásainak száma: $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Mivel azzal kezdtük, hogy kikötöttük: a sorrend fontos, a k lépés $k!$ sorrendjével szoroznunk kell. Mivel az összes zárnyitási próba lépésszáma $1, 2, \ldots, n$ ezért erre összegeznünk kell:

$$F_n = \sum_{k=1}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Ez pedig pontosan a Fubini számok (3.1) definíciója.

Az eddigiek segítenek megsejteni, hogy mi az r-Euler számok adekvát definíciója. Mivel a szimultán gombnyomások és futások között megfeleltetés áll fenn, érdemes ezt továbbvinni. Világos, hogy az r-Fubini esetben a szimultán gombnyomások – mivel egy blokkba kerülnek – nem tartalmazhatnak egynél több $\{1, \ldots, r\}$-beli elemet. (Ezeket a továbbiakban kitüntetett elemeknek is nevezzük.) Így célszerűnek látszik a futás fogalmát a következőképpen módosítani:

3.4.1. Definíció. *Egy futást* r-futás*nak nevezünk, ha a futásban szereplő elemek között legfeljebb egy kitüntetett van.*

Könnyű utánagondolni, hogy ez ugyanaz, mintha azt követelnénk meg, hogy két szomszédos, a futásban részt vevő elem közül nem mindkettő kitüntetett.

Például az

$$(1\,2\,3\,6\,4\,5\,7\,8) \tag{3.16}$$

permutációban 4-futás az $1; 2; 3, 6; 4, 5, 7, 8$.

Ahhoz, hogy a futások, emelkedések, süllyedések szokásos „aritmetikáját" megtartsuk, az utóbbi két fogalom módosítására is szükség van.

3.4.2. Definíció. *Egy emelkedést* r-emelkedés*nek nevezünk, ha az emelkedésnek nem mindkét tagja kitüntetett. Továbbá minden süllyedés* r-süllyedés*, és* i_n, i_{n+1} *is* r*-süllyedés, ha mindkettő kitüntetett.*

Ha egy n elemen ható permutációban k darab r-futás van, akkor $k-1$ darab r-süllyedés van, hiszen egy r-futás akkor szűnik meg, ha az elem nagyobb, mint a rákövetkező, vagy mindkét elem kitüntetett. Mivel $n-1$ összehasonlítás lehetséges n elemen, $n-1-(k-1)=n-k$ r-emelkedés van. Tehát

$$\begin{aligned} r\text{-emelkedések} + r\text{-süllyedések} &= n-1, \\ r\text{-futások} &= r\text{-süllyedések} + 1, \\ r\text{-futások} &= n - r\text{-emelkedések}. \end{aligned}$$

Éppen ezek motiválták a fenti definíciókat, hiszen a hagyományos futás- emelkedés- és süllyedésfogalom közötti kapcsolatokat kapjuk vissza, ha r-et töröljük. Illetve még az, hogy ha olyan permutációnak szeretnénk zárkombinációt megfeleltetni, amiben k darab „hagyományos" emelkedés van, akkor az olyan helyekre, ahol kitüntetett elemek szerepelnek egymás mellett, gombnyomásokat határoló jelzést kellene tenni. Ilyen például a következő gombnyomás-sorozat:

$$1; 2; 3, 4, 5.$$

Az ennek megfelelő permutációban 1 és 2, illetve 2 és 3 közé mindenképpen jelzést kell tenni. Ezt automatizáltuk az r-futás bevezetésével.

A fenti (3.16) példában a 4-emelkedések a következők:

$$3,6;4,5;5,7;7,8$$

míg a 4-süllyedések:

$$1,2;2,3;6;4.$$

(Szokatlan, hogy például $1,2$ süllyedésnek számít.)

Bevezethetjük a következő definíciót (a fenti formulákkal való egyezéshez átparaméterezünk, hiszen F_n $n+r$ elemre vonatkozik):

3.4.3. Definíció. *Azon permutációk számát, melyek $n+r$ elemen hatnak, és pontosan k darab r-emelkedést tartalmaznak, n,k paraméterű* r-Euler szám*nak nevezzük és $\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r$ módon jelöljük ($0 \le k \le n+r$).*

Ha a zárnyitási játékban a szimultán gombnyomások során nem engedjük meg azt, hogy kitüntetett indexű gombokat egyszerre nyomjunk le, és a gombnyomásokból kapott permutációk használatakor a futást r-futásra cseréljük, kapjuk a várt (3.6) formulát:

$$F_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r 2^k.$$

Ezek alapján automatikusan kiadódik a (3.15) rekurzió:

$$\left\langle {n \atop m} \right\rangle_r = (m+1)\left\langle {n-1 \atop m} \right\rangle_r + (n-m+r)\left\langle {n-1 \atop m-1} \right\rangle_r.$$

A „hagyományos” Euler számokra vonatkozó rekurzió bizonyítása szóról szóra megismételhető, hiszen abban az utolsó elemet tesszük be úgy, hogy kapjunk és úgy, hogy ne kapjunk újabb emelkedést. Mivel az utolsó elem nem kitüntetett (ha $n > 0$), ezért itt a hagyományos emelkedésfogalom is használható. Az $n-m+r = n+r-m$ szorzótényező különbözik, de csak azért, mert n helyett $n+r$ paramétert használtunk. Ez hasonló ahhoz, ahogyan a Stirling számok rekurziója változatlanul érvényes marad az r-Stirling esetben.

A rekurzió kezdőértékei: $\left\langle{0 \atop 0}\right\rangle_r = 1$ és $\left\langle{n \atop 0}\right\rangle = r!$, ha $n \geq 1$. Ezek szinkronban vannak a 3.3.1. tétellel, másrészt 0 r-emelkedést úgy tudunk kapni, hogy csökkenő sorrendben soroljuk fel az elemeket. Ekkor az utolsó r elem – melyek tehát kitüntetettek – sorrendje lényegtelen, ami $r!$ permutációt eredményez.

Az első r-Euler számok

$r = 0$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
$n = 0$	1						
$n = 1$	1	0					
$n = 2$	1	1	0				
$n = 3$	1	4	1	0			
$n = 4$	1	11	11	1	0		
$n = 5$	1	26	66	26	1	0	
$n = 6$	1	57	302	302	57	1	0

Az $r = 1$ eset egy eltolásban különbözik: $\left\langle{n \atop m}\right\rangle_0 = \left\langle{n-1 \atop m}\right\rangle_1$.

$r = 2$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
$n = 0$	2						
$n = 1$	2	4					
$n = 2$	2	14	8				
$n = 3$	2	36	66	16			
$n = 4$	2	82	342	262	32		
$n = 5$	2	176	1436	2416	946	64	

$r = 3$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$
$n = 0$	6						
$n = 1$	6	18					
$n = 2$	6	60	54				
$n = 3$	6	150	402	162			
$n = 4$	6	336	1956	2256	486		
$n = 5$	6	714	7884	18804	11454	1458	

4. fejezet

Az r-Stirling számok unimodalitása

4.1. Unimodalitás és log-konkavitás

Kombinatorikus sorozatoknál gyakran fontos tudni, hogy hogyan „néz ki" a sorozatunk „globálisan". Vagyis – akárcsak függvények esetében –, növekszik-e a sorozat, illetve csökken? Vagy hol van(nak) a maximuma(i), minimuma(i)? Ez a Stirling számok esetén is izgalmas kérdés. Ahhoz, hogy szabatosan meg tudjuk fogalmazni az előbbi kérdéseket, bevezetjük a következő fogalmakat.

4.1.1. Definíció. *Egy* $a_0, a_1, \ldots$ *(nem feltétlenül véges) sorozatot* unimodális*nak nevezünk, ha növekszik, elér egy maximumot, majd csökken. Még pontosabban, ha létezik olyan* n *index és olyan* k *nemnegatív szám, hogy*

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n = a_{n+1} = \cdots = a_{n+k} \geq a_{n+k+1} \geq \cdots$$

Ha több maximális sorozatelem is van ($k \geq 1$), akkor ezeket *tető*nek nevezzük. Ha csak egy maximális elem van ($k = 0$), azt *csúcs*nak mondjuk.

Az unimodalitásánál létezik erősebb tulajdonság is:

4.1.2. Definíció. *Az* $a_0, a_1, \dots$ *sorozatot* log-konkáv*nak nevezzük, ha minden* $k \geq 1$*-re teljesíti az*

(4.1)
$$a_k^2 \geq a_{k-1}a_{k+1}$$

egyenlőtlenséget. Ha

(4.2)
$$a_k^2 > a_{k-1}a_{k+1}$$

is érvényes, akkor a sorozat szigorúan log-konkáv.

A fejezetben a fenti tulajdonságok teljesülését vizsgáljuk r-Stirling számok esetén. Eredményeinket az *Advances in Applied Mathematics* c. folyóiratban közöltük [45].

Van egy gyakran használható tétel annak eldöntésére, hogy egy sorozat mikor log-konkáv (és így unimodális). Mivel ez számunkra kombinatorikus sorozatokra jelentős, feltehető, hogy minden a_k pozitív.

Ha a

(4.3)
$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

polinomnak csak valós és (az együtthatók pozitivitása miatt) negatív gyökei vannak, akkor

(4.4)
$$a_k^2 \geq a_{k-1}a_{k+1}\frac{k}{k-1}\frac{n-k+1}{n-k} \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

Ez Newton tétele [43].

Mivel $\frac{k}{k-1}\frac{n-k+1}{n-k} > 1$, ebből rögtön következik, hogy az $a_0, \dots, a_n$ sorozat szigorúan log-konkáv.

Illusztrálásképpen legyen $a_k = \left[{n \atop k}\right]$. (1.3) miatt

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1),$$

aminek szintén minden gyöke valós és (a 0 kivételével) mindegyik negatív. Ez azt a fontos eredményt vonja maga után, hogy az $\left[{n \atop k}\right]_{k=0}^{n}$

sorozat szigorúan log-konkáv. Tehát növekszik, legfeljebb kettő elemű teteje van, majd csökken. Valójában ennél több igaz, az elsőfajú Stirling számok sorozatainak (fix n mellett) mindig csúcsa van. Ez a szép állítás Erdős Pál nevéhez fűződik [28, 33]. A csúcs indexére, melyet adott n-hez jelöljünk K_n-nel a következő becslést lehet bebizonyítani:
(4.5)
$$\left[\log n - \frac{1}{2}\right] < K_n < [\log n].$$

ahol a szögletes zárójel a benne levő kifejezés egész részét jelenti. Tehát azt látjuk, hogy a maximum nagyjából $\ln n$ nagyságrendű.

A másodfajú Stirling számok esete egészen más. A kérdés itt annyira bonyolultnak tűnik, hogy sok részlet máig tisztázatlan. Többek között az, hogy csúcsa van-e ezeknek a sorozatoknak vagy teteje? $n = 2$-re $\left\{ {n \atop 1} \right\} = \left\{ {n \atop 2} \right\} = 1$, vagyis itt tető van. A sejtés azonban az, hogy $n = 2$ az egyetlen ilyen eset. Számítógéppel $3 \leq n \leq 10^6$-ig ellenőrizték [12], és ezen tartományban a sejtés igaz[1].

A maximális indexre vonatkozó becslés itt is adható, de ez is jóval gyengébb, mint az elsőfajú esetben. Sok cikk született – és születik a mai napig – a becslésekkel kapcsolatban, mi most egy egyszerűbbet közlünk H. Wegnertől [62]:
(4.6)
$$\frac{n}{\ln n} < K_n < \frac{n}{\ln n - \ln \ln n} \quad (n \geq 13).$$

A fenti tételt alkalmazva azt nem nehéz bemutatnunk, hogy a másodfajú Stirling számok rögzített n mellett log-konkáv sorozatot alkotnak. Ehhez tehát azt kell megmutatnunk, hogy a

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k$$

polinomnak csak valós gyökei vannak. Ez azonban nem más, mint az n-edik Bell polinom, amire viszont érvényes az állítás [34].

[1] Noszály Csaba kollégám egy előadásom után további ellenőrzésbe fogott, ő 10^7 határt ért el.

4.2. Az elsőfajú r-Stirling számok log-konkavitása

Ebben és a következő szakaszban az r-Stirling számok esetében vizsgáljuk meg a log-konkavitás kérdését. Kiderül, hogy ezek a számok az első- és másodfajú esetben is log-konkáv sorozatot formálnak. Sőt, a maximumra is fogunk becsléseket adni. Mindezen eredmények az *Advances in Applied Mathematics* című lapban láttak napvilágot [45].

Először az elsőfajú esetre vonatkozó eredményeket tárgyaljuk.

4.2.1. Tétel (Mező, [45]). *A $\left(\left[{n+r \atop k+r}\right]\right)_{k=0}^n$ sorozat szigorúan log-konkáv (és így unimodális).*

Bizonyítás. Definiáljuk a következő polinomot:

(4.7)
$$P_{n,r}(x) := \sum_{k=0}^{n} \left[{n+r \atop k+r}\right]_r x^k.$$

A $P_{n,r}(x)$ polinomok exponenciális generátorfüggvénye (1.9) alapján azonnal kiszámítható, csak összegeznünk kell k-ra. Eredményül kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(1-z)^{r+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r+x-1+n}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{n,r}(x)}{n!} z^n.$$

Az együtthatók összehasonlításával

(4.8)
$$P_{n,r}(x) = n!\binom{r+x-1+n}{n} = (x+r)(x+r+1)\cdots(x+r+n-1).$$

Így $P_{n,r}(x)$ minden gyöke valós és negatív. Newton tétele alkalmazható. $\diamond$

A továbbiakban jelölje $K_{n,r}^1$ a $\left(\left[{n \atop k}\right]_r\right)_{k=0}^n$ sorozat maximumhoz tartozó indexét (az 1, mint felső index az „elsőfajú”-ra utal). Ahhoz, hogy $K_{n,r}^1$-re becslést találjunk, meg kell jegyeznünk, hogy fix n-re $\left[{n \atop k}\right]$ az $1,\dots,n$ számok elemi szimmetrikus polinomja, míg $\left[{n \atop k}\right]_r$ az $r,\dots,n$

elemi szimmetrikus polinomja (l. [10, 28]). Ez azt jelenti, hogy fix n-re a (0-)Stirling számok az első n természetes számból kiválasztott k darab szám szorzatösszegei. r-Stirling esetben az $r, \ldots, n$ számok közül kell k darabot kiválasztani az összes lehetséges módon. Képletben [10],

(4.9)
$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_r = \sum_{r \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n} i_1 i_2 \cdots i_k \quad (n, k \ge 0).$$

Most Erdős és Stone számunkra igen hasznos tételét [28] idézzük:

4.2.2. Tétel (Erdős P. és A. H. Stone). *Legyen* $u_1 < u_2 < \cdots$ *pozitív valós számok végtelen sorozata úgy, hogy*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{u_i} = \infty \quad \textit{and} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{u_i^2} < \infty.$$

Jelölje $\Sigma_{n,k}$ *az első* n *sorozatelemből az öszes módon kiválasztott* k *elem szorzatösszegét,* K_n *pedig azt a legnagyobb* k *indexet, melyre* $\Sigma_{n,k}$ *eléri a maximumát. Ekkor*

$$K_n = n - \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^2} \left(1 + \frac{1}{u_i}\right)^{-1} + o(1) \right].$$

(4.9) alapján világos, hogy

(4.10)
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = \Sigma_{n-r,n-k}$$

ha $u_1 = r, u_2 = r+1, \ldots$ választással élünk. Következményként kapjuk (4.5) eredményének általánosítását:

4.2.3. Tétel (Mező, [45]). *A legnagyobb index, melyre* $\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r\right)_{k=0}^{n}$ *eléri a maximumát, becsülhető a következőképpen:*

$$K_{n,r}^1 = r + \left[\log\left(\frac{n-1}{r-1}\right) - \frac{1}{r} + o(1) \right].$$

Bizonyítás. Ha a $u_1 = r, u_2 = r+1, \ldots$ választást továbbra is tartjuk, akkor (4.10) alapján a maximumhoz tartozó $K^1_{n,r}$ index egyenlő a következővel:

$$\begin{aligned} r &+ \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(r+i-1)(r+i)} + o(1)\right] \\ = \quad r &+ \left[\log\left(\frac{n-1}{r-1}\right) - \frac{1}{r} + o(1)\right], \end{aligned}$$

Jól ismert [19], hogy

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + o(1).$$

Az r additív tag abból a tényből származik, hogy az első nemnulla szimmetrikus függvény a $k = r$ indexhez tartozik az $\left(\left[{n \atop k}\right]\right)_{k=0}^{n}$ sorozatban. ◇

4.2.4. Példa. Adunk egy alkalmazást. A maximális index – a fenti tétel alapján – a $\left(\left[{30 \atop k}\right]_3\right)_{k=0}^{30}$ sorozat esetén a

$$K^1_{30,3} = 3 + \left[\log\left(\frac{30-1}{3-1}\right) - \frac{1}{3} + o(1)\right] = 5$$

indexhez tartozik. És valóban,

$$\left[{30 \atop 5}\right]_3 = 1.259 \cdot 10^{31}$$

tényleg maximális, amint az bármely matematikai programcsomaggal látható.

4.3. A másodfajú r-Stirling számok log-konkavitása

Elérkeztünk ahhoz a ponthoz, ami a korábban tárgyalt fogalmak (r-Bell számok és a kapcsolódó kérdések) gyökere. A kutatási eredmények előtörténete az, hogy korábbi témám – a Walsh analízis – kapcsán felbukkantak a hiperharmonikus számok, melyekről bőven lesz szó később. Ezek viszont kapcsolatban vannak az elsőfajú r-Stirlingekkel. Mikor rábukkantam a maximumhellyel kapcsolatos kérdéskörre, láttam, hogy ezt érdemes megvizsgálni az $r > 0$ esetben is. Ehhez azonban szükség volt a korábban csak érintőlegesen megemlített (és még csak el sem nevezett) r-Bell polinomokra. Ebben gyökerezik tehát a dolgozat eredményeinek többsége.

Most tehát a fentiekhez hasonló tételeket bizonyítunk a másodfajú esetben. Látszani fog, hogy ez sokkal bonyolultabb kérdés.

4.3.1. Tétel (Mező, [45]). *Az* $\left(\left\{{n+r \atop k+r}\right\}_r\right)_{k=0}^{n}$ *sorozat szigorúan log-konkáv.*

Bizonyítás. Mint az elsőfajú esetben, definiáljuk a

$$B_{n,r}(x) := \sum_{k=0}^{n} \left\{{n+r \atop k+r}\right\}_r x^k. \tag{4.11}$$

polinomokat. A 2.3.1. tétel és annak következménye alapján ezen polinomok minden gyöke valós és negatív, így Newton tétele alkalmazható. ◇

Folytatjuk a következő lemmával, amely az ún. *Bonferroni-egyenlőtlenség* egy speciális esetének általánosítása (l. [62, 63]).

4.3.2. Lemma. *A másodfajú r-Stirling számokra érvényes a következő becslés:*

$$\frac{(m+r)^n}{m!} - \frac{(m-1+r)^n}{(m-1)!} < \left\{{n+r \atop m+r}\right\}_r < \frac{(m+r)^n}{m!},$$

minden $n \ge m > 0$ esetén.

Bizonyítás. Az (1.14) következtében

$$(m+r)^n = \sum_{k=0}^{m} \left\{{n+r \atop k+r}\right\}_r \frac{m!}{(m-k)!}.$$

Így
$$\frac{(m+r)^n}{m!} = \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \frac{1}{(m-k)!} + \left\{ {n+r \atop m+r} \right\}_r,$$
ezért a jobb oldali egyenlőtlenség érvényes. Megint alkalmazva (1.14) azonosságot,

$$\begin{aligned} \left\{ {n+r \atop m+r} \right\}_r &> \frac{(m+r)^n}{m!} - \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \frac{1}{(m-1-k)!} \\ &= \frac{(m+r)^n}{m!} - \frac{(m-1+r)^n}{(m-1)!}. \end{aligned}$$

$\diamond$

Mivel az $\left(\left\{ {n \atop k} \right\}_r\right)_{k=r}^n$ sorozat szigorúan log-konkáv, létezik olyan $K_{n,r}^2$ index, melyre
$$\cdots < \left\{ {n \atop K_{n,r}^2 - 1} \right\}_r \le \left\{ {n \atop K_{n,r}^2} \right\}_r > \left\{ {n \atop K_{n,r}^2 + 1} \right\}_r > \cdots$$

Most erre az indexre adunk becsléseket.

4.3.3. Tétel (Mező, [45]). *Legyen $K_{n,r}^2$ a legnagyobb maximalizáló index. Ekkor*
$$\begin{aligned} K_{n,r}^2 &< \frac{n-r}{\log(n-r) - \log\log(n-r)} \qquad (n \ge r+3), \\ \frac{n-r}{\log(n-r)} &< K_{n,r}^2 \qquad (n \ge r + \max\{18, \log 2/\log(1+1/r)\}). \end{aligned}$$

Bizonyítás. A felső becsléshez alkalmazzuk Broder cikkének [10] (32)-es egyenletét:
$$\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop k} \right\}_1 r^{n-j},$$

ezért
$$\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r - \left\{ {n+r \atop k-1+r} \right\}_r = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left[\left\{ {j \atop k} \right\}_1 - \left\{ {j \atop k-1} \right\}_1 \right] r^{n-j}.$$

A $\left\{ {j \atop k} \right\}_1 - \left\{ {j \atop k-1} \right\}_1$ tagok bizonyosan negatívak, ha $k > K_{n,1}^2$ a másodfajú Stirling számok log-konkavitása miatt és amiatt, hogy $K_{n,1}^2 \geq K_{n-1,1}^2$ minden n-re (l. [25, 50]). Így $\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r < \left\{ {n+r \atop k-1+r} \right\}_r$ minden $k > K_{n,1}^2$ esetén, ahonnan $K_{n+r,r}^2 < K_{n,1}^2$ következik. Wegner (4.6) becslését alkalmazzuk a felső becslés végső alakjához.

Az alsó becsléshez Bonferroni egyenlőtlenségének általánosítását alkalmazzuk (4.3.2. lemma). A rövidség kedvéért legyen $M = K_{n+r,r}^2$. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &> \left\{ {n+r \atop M+1} \right\}_r - \left\{ {n+r \atop M} \right\}_r \\ &\geq \frac{(M+1)^n}{(M+1-r)!} - \frac{M^n}{(M-r)!} - \frac{M^n}{(M-r)!} \\ &= \frac{1}{(M-r)!}\left(\frac{(M+1)^n}{M+1-r} - 2M^n \right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Bevezetjük az

$$f_{n,r}(x) := \frac{x^{n-1}}{1-\frac{r}{x}} - 2(x-1)^n,$$

függvényt és ennek logaritmusát:

$$g_{n,r}(x) := \log f_{n,r}(x) = (n-1)\log x - n\log(x-1) - \log 2 - \log\left(1 - \frac{r}{x}\right).$$

Ekkor világos, hogy (4.12) utolsó része az

$$\frac{1}{(M-r)!}\left(\frac{(M+1)^n}{M+1-r} - 2M^n \right) = \frac{1}{(M-r)!} f_{n,r}(M+1) \tag{4.13}$$

formában írható.

Először meghatározzuk $f_{n,r}(x)$ gyökeinek számát. Ha $f_{n,r}(x) = 0$, akkor

$$\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^n = 2(x-r).$$

A bal oldal szigorúan csökkenő, a jobb oldal szigorúan növekvő függvénye x-nek, tehát legfeljebb egy megoldás létezik. De
(4.14)
$$f_{n,r}(r+1) > 0 \quad \text{ha} \quad n > \frac{\log 2}{\log\left(1+\frac{1}{r}\right)},$$
((4.12) miatt x csak akkor érdekes, ha nem kisebb, mint $r+1$) és
$$\lim_{x\to\infty} f_{n,r}(x) = -\infty,$$
emiatt $f_{n,r}(x)$-nek van legalább egy gyöke. Következésképpen, $f_{n,r}$ pontosan egy gyökkel rendelkezik, legyen ez mondjuk $Z_{n,r}$. Azt is tudjuk, hogy $f_{n,r}(x) > 0$, ha $x < Z_{n,r}$ és $f_{n,r}(x) < 0$, ha $x > Z_{n,r}$. (4.13) egyenletet tekintve kapjuk, hogy $M+1 > Z_{n,r}$.

Könnyen látható, hogy $g_{n,r}(x)$ előjele ugyanaz, mint $f_{n,r}(x)$-é minden x-re és így $g_{n,r}(Z_{n,r}) = 0$ is igaz. A következő formulába sűrítjük az eddig elmondottakat:
$$f_{n,r}(x), g_{n,r}(x) \begin{cases} > 0 & r < x < Z_{n,r}, \\ = 0 & x = Z_{n,r}, \\ < 0 & x > Z_{n,r}, \end{cases}$$
ha a (4.14) alatti feltételek teljesülnek n-re.

A $g_{n,r}(x)$ függvény szétbontható a következő tagokra:
$$g_{n,r}(x) = h_n(x) - \log\left(1 - \frac{r}{x}\right).$$
A $h_n(x)$ függvényt Wegner [62] vizsgálta $g_{n,2}(x)$ jelölés mellett, és bebizonyította, hogy
(4.15)
$$h_n\left(\frac{n}{\log n}+1\right) > 0 \quad (n \geq 18)$$
ami miatt h_n zérushelye nagyobb, mint $\frac{n}{\log n}+1$.

Mivel h_n és $g_{n,r}$ monotonitása ugyanaz (l. [62]), $g_{n,r}(x)$ gyöke nagyobb, mint $h_n(x)$ gyöke. Ez azért igaz, mert $-\log(1-r/x)$ pozitív, ha $x > r$. Így $\frac{n}{\log n}+1 < Z_{n,r} < M+1$. Összegyűjtve az n-re vonatkozó szükséges feltételeket ((4.14), (4.15)) az $M = K^2_{n+r,r}$ jelölés mellet a bizonyítás teljes. $\diamond$

4.3.4. Példa. Ebben az esetben is adunk egy példát. A tétel szerint

$$12.78 = \frac{50}{\log 50} < K^2_{58,8} < \frac{50}{\log 50 - \log\log 50} = 19.62.$$

Ténylegesen pedig a maximális tag

$$\left\{ {58 \atop 19} \right\}_8 = 9.687 \cdot 10^{55}.$$

4.3.5. Megjegyzés. A 4.3.3. tétel bizonyításában azt is felhasználtuk, hogy $K^2_{n+1,1} = K^2_{n,1}$ vagy $K^2_{n,1} + 1$. Két bizonyítás is van erre a [25] és [50] cikkekben. Előbbi bizonyítás minden megkötés nélkül átvihető az $r > 0$ esetre, így nyerjük a következőt:

$$K^2_{n+1,r} = K^2_{n,r} \text{ vagy } K^2_{n,r} + 1 \quad (r \geq 1).$$

4.4. Néhány megjegyzés Darroch tételéről

Ebben a szakaszban olyan eredmények lesznek átültetve az r-Stirling számok esetére, melyekre Bóna Miklós, a Floridai Egyetemen dolgozó magyar matematikus hívta fel a figyelmemet. Ezért külön köszönettel tartozom neki.

A következő hasznos tételt Darroch [6, 22] bizonyította:

4.4.1. Tétel (J. N. Darroch). *Legyen $A(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ egy olyan polinom, melynek csak valós gyökei vannak és $A(1) > 0$. Más szavakkal,*

$$A(x) = a_n \prod_{j=1}^n (x + r_j)$$

alakú, ahol $r_j > 0$. Legyen K_n a legkisebb maximumhoz tartozó indexe az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sorozatnak, és legyen

$$\mu = \frac{A'(1)}{A(1)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{r_j + 1}.$$

Ekkor

$$|K_n - \mu| < 1.$$

Látjuk tehát, hogy a polinommal és deriváltjával – illetőleg a gyökökkel – közelítő értéket adhatunk K_n-re. A 4.2.1. tétel bizonyításában azt találjuk, hogy

$$P_{n,r}(x) := \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r x^k = (x+r)(x+r+1)\cdots(x+r+n-1),$$

ezért azonnal adódik a következő

4.4.2. Következmény. *Darroch tétele alapján*

$$\left| K^1_{n+r,r} - \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \cdots + \frac{1}{r+n} \right) \right| < 1,$$

ami gyakorlatilag visszaadja Erdős tételének általánosítását (l. 4.2.3.).

A másodfajú eset valamivel bonyolultabb. Korábban beláttuk (l. (2.2)), hogy

$$B'_{n,r}(x) = \frac{B_{n+1,r}(x)}{x} - \frac{rB_{n,r}(x)}{x} - B_{n,r}(x).$$

Így

$$\mu = \frac{B'_{n,r}(1)}{B_{n,r}(1)} = \frac{B_{n+1,r}}{B_{n,r}} - (r+1).$$

4.4.3. Következmény. *Érvényes a következő egyenlőtlenség:*

$$\left| K^2_{n+r,r} - \left(\frac{B_{n+1,r}}{B_{n,r}} - (r+1) \right) \right| < 1,$$

amely Harper [34] eredményének általánosítása.

4.5. Az r-Stirling számok normalitása

A (4.7) és (4.11) polinomok gyökeinek valós volta lehetőséget ad arra, hogy az együtthatóikból – az r-Stirling számokból – képzett eloszlásfüggvények *aszimptotikus normalitás*át bizonyítsuk. Hogy ez mit jelent, azt most részletesebben kifejtjük.

Legyen $a_n(k)$ nemnegatív valós számok egy háromszöge, az alábbi indexhatárokkal: $n = 1, 2, \dots ; k = 0, 1, \dots , m$ (m függ n-től). Legyen X_n egy valószínűségi változó:

$$P(X_n = k) = p_n(k) = \frac{a_n(k)}{\sum_{j=0}^{m} a_n(j)},$$

és definiáljuk a következő mennyiséget:

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_n(k)x^k.$$

A normálásra használni fogjuk az $\tilde{X} = \frac{X-E(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$ jelölést. Végül, $X_n \to \mathcal{N}(0, 1)$ azt jelenti, hogy X_n eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz. Erről több is olvasható Rucinski [57] könyvében.

A következő tételt fogjuk alkalmazni.

4.5.1. Tétel (E. A. Bender [4]). *A fenti jelöléseket használva, ha $g_n(x)$ polinomnak csak valós gyökei vannak, és*

$$\sigma_n = \sqrt{Var(X_n)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{r_i^{(n)}}{\left(r_i^{(n)} + 1\right)^2} \to \infty,$$

akkor $\tilde{X}_n \to \mathcal{N}(0, 1)$. Itt $(-r_i)$-k a $g_n(x)$ gyökeit jelölik.

Az első- és másodfajú Stirling számok a fenti értelemben normálisak. Ezt Goncharov és Harper bizonyították [57]. Mi igazoljuk, hogy az eredményeik érvényesek az r-Stirling számokra is.

Először is, legyen $a_n(k) = \left[{n+r \atop k+r}\right]_r$. Ekkor (4.8) miatt

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k + r}{(k + r + 1)^2} \to \infty.$$

Ezért Bender tételének feltételei teljesülnek.

Rucinski és Voigt [57, 223. o.] egy eredménye szerint, ha

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} a_n(k)(x - c_0)\cdots(x - c_{k-1})$$

valamilyen nemnegatív $c_0, c_1, \ldots$ számtani sorozatra áll, akkor az $a_n(k)$ tömb normális. Az (1.14) képlet az $x \rightsquigarrow x - r$ helyettesítéssel implikálja, hogy $a_n(k) = \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r$ normális.

Hogy mit jelentenek a fentiek, az egyszerűen megvilágítható. Ha veszünk egy n elemű halmazt és véletlenszerűen kiválasztunk egy tetszőleges partíciót, akkor annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott partíció pontosan k blokkot tartalmaz,

$$p_n(k) = \frac{\left\{ {n \atop k} \right\}}{B_n}.$$

Ezzel egy eloszlást (pontosabban eloszlások sorozatát) definiáltunk. És ez – a fentiek értelmében – eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz, amint n tart végtelenhez.

Hasonló gondolatmenettel az elsőfajú eset is szemléletessé tehető.

5. fejezet

Az r-Stirling számok Dirichlet-generátorfüggvényei

A Stirling számokból képzett sorok vizsgálata nem új, már a századelőn N. Nielsen munkássága nyomán sikerült az elsőfajú Stirling számokat – egyébként igen bonyolult formulákkal – reprezentálni. A másodfajú eset egyszerűbb, köszönhetően annak, hogy jól használható formulák léteznek. Ezeket az eredményeket általánosítjuk a fejezetben. A közölt tételek a *Journal of Number Theory* és *Acta Mathematica Hungarica* folyóiratokban lettek publikálva [48, 49].

Ha adott egy (a_n) sorozat, akkor (a_n) *Dirichlet generátorfüggvénye*i alatt a $q = 1, 2, \ldots$ paraméter melletti

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n^q}$$

alakú sorokat értünk. Természetesen felmerülő kérdés, hogy milyen alakú összegeket kapunk, ha az eddig vizsgált számok Dirichlet-generátorfüggvényeit tekintjük. Mi a következő sorokat fogjuk részletesebben tárgyalni:

$$G^{1,r}_{k,m,q}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k+r \\ m+r \end{bmatrix}_r \frac{z^n}{n^q n!},$$

$$G^{2,r}_{k,m,q}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+k+r \\ m+r \end{Bmatrix}_r \frac{z^n}{n^q n!},$$

$$\hat{G}^{2,r}_{k,m,q}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+k \\ m \end{Bmatrix}_r \frac{z^n}{n^q}$$

bármely pozitív egész k, m, q paraméterre és valós $|z| \leq 1$ esetén. Esetleg hiányolhatnánk a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k+r \\ m+r \end{bmatrix}_r \frac{z^n}{n^q}$$

összeget, de nem nehéz látni, hogy ez semmilyen q-ra nem létezik, ha $z > 0$. Az r-et azért adjuk hozzá a paraméterekhez, hogy a k, m paraméterek nullától futhassanak. (Az utolsó esetben pedig ezt azért nem tesszük, mert a kapott formulák így egyszerűbbek.)

Mivel az összegeket a rekurziók segítségével kisebb paraméterekre lehet visszavezetni, ezért először a speciális eseteket tárgyaljuk.

5.1. Az elsőfajú eset

5.1.1. Nielsen általánosított polilogaritmusai

N. Nielsen monográfiájában [51] bevezette az

$$S_{n,p}(z) := \frac{(-1)^{n+p-1}}{(n-1)!p!} \int_0^1 \log^{n-1}(t) \log^p(1-zt) \frac{dt}{t}.$$

integrálokat. Az ő eredményeit a nyolcvanas években Kölbig [37] tette szélesebb körben ismertté. A minket érintő tény az, hogy az elsőfajú Stirling számokból képzett Dirichlet sorok kifejezhetők ezekkel a függvényekkel, mégpedig a következő módon:

$$G^{1,0}_{0,m,q}(z) = S_{q,m}(z),$$

vagyis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \frac{z^n}{n^q n!} = S_{q,m}(z).$$

Nem könnyű zárt alakot adni a Nielsen-féle polilogaritmusokra [38]. Mindenesetre

$$S_{1,m} = \zeta(m+1) + \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \operatorname{Li}_{p+1-k}(1-z) \log^k(1-z),$$

amiből

(5.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_0 \frac{z^n}{nn!} = \zeta(m+1) + \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \operatorname{Li}_{p+1-k}(1-z) \log^k(1-z)$$

következik.

5.1.2. Euler formulája

Euler a következő összeget találta meg [9] (persze nem ezekkel a jelölésekkel):

$$G_{0,1,m}^{1,1}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{n^m n!} =$$

(5.2)

$$= \frac{1}{2}(m+2)\zeta(m+1) - \sum_{k=1}^{m-2} \zeta(m-k)\zeta(k+1).$$

Pontosabban, Euler a harmonikus számok Dirichlet-generátorfüggvényeit kereste (nyilván ezeket a fogalmakat abban az időben még nem úgy nevezték...).

Látjuk tehát, hogy az $r = k = 0, m, q \in \mathbb{N}$ paraméterosztályra a $G_{k,m,q}^{1,r}(z)$ sorok kifejtését Nielsen munkája tartalmazza, Euler pedig az $r = 0, k = 1, m = 2, q \in \mathbb{N}$ esetet dolgozta ki. A rekurziók segítségével a többi eset ezekre visszavezethető.

Ha $r > 0$, akkor elég a $k = 0, m = 1, q, r \in \mathbb{N}$ paraméterekre eredményeket találni. Ehhez a hiperharmonikus számokon keresztül vezet az út.

5.2. A hiperharmonikus számok fogalma

Ismeretes, hogy az $n, 2$ paraméterpárhoz tartozó elsőfajú Stirling számok az ún. *harmonikus számok*at adják [30]:
(5.3)
$$\frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n.$$

Ezzel (5.2) így is írható:
(5.4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^m} = \frac{1}{2}(m+2)\zeta(m+1) - \sum_{k=1}^{m-2} \zeta(m-k)\zeta(k+1).$$

Ennek általánosításaként (az $r > 0$ esetben) a *hiperharmonikus számok* szerepelnek. Ezeket rekurzív módon definiáljuk. Legyen először $H_n^{(1)} = H_n$, és $r > 1$ esetén legyen
(5.5)
$$H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} H_k^{(r-1)}.$$

$H_n^{(r)}$-et r-edrendű hiperharmonikus számnak nevezzük. Tehát például $H_n^{(2)} = H_1 + H_2 + \cdots + H_n$.

Amennyire tudható, a hiperharmonikus számok fogalma nem régi, Conway és Guy könyvében [19] bukkannak fel először.

A következő azonosság (5.3) általánosítása, mely összeköti a hiperharmonikus számokat és az elsőfajú r-Stirling számokat [7]:

$$\frac{\begin{bmatrix} n+r \\ 1+r \end{bmatrix}_r}{n!} = H_n^{(r)}.$$

Szükségünk lesz még a

$$H_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r-1}(H_{n+r-1} - H_{r-1}). \tag{5.6}$$

azonosságra is [19].

5.3. Euler formulájának általánosítása hiperharmonikus számokra

A fentiek miatt minket elsősorban a hiperharmonikus számokból képzett

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n^m}$$

alakú sorok érdekelnek. (Ezeknek teljes leírását a [48] cikk tartalmazza.) Megmutatjuk, hogy ezek végesek, ha $m > r$.

Ehhez szükségünk van a harmonikus számok aszimptotikus viselkedésére [19].

(5.7)

$$\frac{1}{2(n+1)} + \ln(n) + \gamma < H_n < \frac{1}{2n} + \ln(n) + \gamma \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ahol $\gamma = 0.5772\ldots$ az *Euler-Mascheroni konstans*.

5.3.1. Lemma. *Minden $n \in \mathbb{N}$ és rögzített $r \geq 2$ esetén*

$$H_n^{(r)} \sim \frac{1}{(r-1)!}\left(n^{r-1}\ln(n)\right),$$

vagyis a két oldal hányadosa 1*-hez tart, amint $n \to \infty$.*

Bizonyítás. Az (5.6) képletben szereplő binomiális együtthatóra nyilván

$$\binom{n+r-1}{r-1} \sim \frac{1}{(r-1)!} n^{r-1}.$$

Egy rövid időre bevezetjük a $t := r-1$ jelölést a $H_{n+t} - H_t$ faktor becsléséhez. Alkalmazva az (5.7) közelítést,

$$\ln(n+t) - \ln(t\sqrt{e}) < H_{n+t} - H_t < \ln(n+t),$$

ahonnan

$$1 - \frac{\ln(t\sqrt{e})}{\ln(n+t)} < \frac{H_{n+t} - H_t}{\ln(n+t)} < 1.$$

A bal oldal határértéke 1 amint n tart végtelenhez. Emiatt (emlékezve hogy $t = r - 1$)

$$H_{n+r-1} - H_{r-1} \sim \ln(n + r - 1) \sim \ln(n).$$

A lemmát bebizonyítottuk. ◇

5.3.2. Következmény. *A hiperharmonikus számokból képzett sorokra*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n^m} < +\infty,$$

amint $m > r$.

5.3.1. Egy képlet a Hurwitz zeta függvényre

Érdekes, hogy a hiperharmonikus számok kapcsolatba hozhatók a *Hurwitz zeta függvénny*el, amelyet így definiálunk:

$$\zeta(m, n) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(n+p)^m}.$$

Ebből a következő állítás nyerhető:

5.3.3. Tétel (Ayhan Dil, [48]). *Ha $r \geq 1$ és $m \geq r + 1$, akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n^m} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(r-1)} \zeta(m, n).$$

Speciálisan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(m, k)}{k}.$$

Euler (5.4) formulájából az alábbi sorösszegek nyerhetők:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2, k)}{k} = 2\zeta(3),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(3, k)}{k} = \frac{5}{4}\zeta(4).$$

Bizonyítás. A bal oldal a következőképpen transzformálható:

$$\begin{aligned}
&\frac{H_1^{(r)}}{1^m}+\frac{H_2^{(r)}}{2^m}+\frac{H_3^{(r)}}{3^m}+\cdots\\
&=\frac{H_1^{(r-1)}}{1^m}+\frac{H_1^{(r-1)}+H_2^{(r-1)}}{2^m}+\frac{H_1^{(r-1)}+H_2^{(r-1)}+H_3^{(r-1)}}{3^m}+\cdots\\
&=H_1^{(r-1)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^m}+H_2^{(r-1)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(p+1)^m}+H_3^{(r-1)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(p+2)^m}+\cdots\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}H_n^{(r-1)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n-1)^m},
\end{aligned}$$

és az eredményt ezzel beláttuk. ◇

Megjegyezzük, hogy ezt az előállítást egy debreceni téli iskolán ötlötte ki a tétel címében is szereplő Ayhan Dil törökországi PhD-hallgató (University of Akdeniz).

5.4. Az összegzési formula

A fenti rövid, Hurwitz zetára vonatkozó kitérő után bebizonyítjuk Euler (5.4) tételének általánosítását a hiperharmonikus számokra vonatkozóan. Ehhez a következő lemmára lesz szükségünk:

5.4.1. Lemma. *A következő integrálra*

$$\int \frac{\ln(z)}{(1-z)z}dz=\mathrm{Li}_2(1-z)+\frac{1}{2}\ln^2(z),$$

és minden $2\le r\in\mathbb{N}$ *esetén*

(5.8)
$$\int \frac{\ln(z)}{(1-z)z^r}dz=\int \frac{\ln(z)}{(1-z)z^{r-1}}dz-\frac{\ln(z)}{(r-1)z^{r-1}}-\frac{1}{(r-1)^2z^{r-1}},$$

vagy, ekvivalens módon,

$$\int \frac{\ln(z)}{(1-z)z^r}dz=\mathrm{Li}_2(1-z)+\frac{1}{2}\ln^2(z)-\sum_{k=1}^{r-1}\left(\frac{\ln(z)}{kz^k}+\frac{1}{k^2z^k}\right)$$

(additív konstans erejéig).

Itt Li_2 a $k=2$ paraméterű polilogaritmus függvényt jelöli:
(5.9)
$$\mathrm{Li}_k(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^k}\quad (k=1,2,\dots).$$

Bizonyítás. A $\mathrm{Li}_2(z)$ definíciója azonnal adja, hogy
$$\mathrm{Li}_2'(1-z)=\frac{\ln(z)}{1-z}.$$
Továbbá
$$\left[\frac{1}{2}\ln^2(z)\right]'=\frac{\ln(z)}{z},$$
ahonnan
$$\mathrm{Li}_2'(1-z)+\left[\frac{1}{2}\ln^2(z)\right]'=\frac{\ln(z)}{(1-z)z}.$$
A lemma első részét ezzel bizonyítottuk. A második rész belátásához deriváljuk (5.8) jobb oldalát:
$$\frac{\ln(z)}{(1-z)z^{r-1}}-\frac{(r-1)z^{r-2}-(r-1)^2\ln(z)z^{r-2}}{(r-1)^2(z^{r-1})^2}-\frac{-(r-1)}{(r-1)^2z^r}=$$
$$\frac{\ln(z)}{z^r(1-z)},$$
ami éppen az, amit keresünk. ◇

A formulák egyszerűsítése érdekében bevezetjük az
$$S(r,m):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(r)}}{n^m},$$
és
$$B(k,m):={}_{m+1}F_m\left(\begin{matrix}1, & 1, & \dots, & 1, & k+1\\ 2, & 2, & \dots, & 2 & \end{matrix}\,\middle|\,1\right).$$
jelöléseket. Ezekkel Euler (5.2) tételének általánosítása $r>0$ esetére így hangzik:

5.4.2. Tétel (Mező, [48]). *Ha $r \geq 2$ és $m \geq r+1$, akkor*

$$S(r,m) = S(1,m) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k} \left[S(k,m-1) - B(k,m) \right].$$

Bizonyítás. Kezdjük a hiperharmonikusok generátorfüggvényével [30]:

(5.10)
$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(r)} z^n = -\frac{\ln(1-z)}{(1-z)^r},$$

amiből
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n} z^n = -\int \frac{\ln(1-z)}{z(1-z)^r} dz.$$

Az előző lemma alapján

$$-\int \frac{\ln(1-z)}{z(1-z)^r} dz = \int \frac{\ln(z)}{(1-z)z^r} dz =$$

$$= \mathrm{Li}_2(z) + \frac{1}{2}\ln^2(1-z) - \sum_{k=1}^{r-1} \left(\frac{\ln(1-z)}{k(1-z)^k} + \frac{1}{k^2(1-z)^k} \right).$$

(5.10) és (1.2) felhasználásával

(5.11)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n} z^n = \mathrm{Li}_2(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \frac{z^n}{n!} -$$

$$\sum_{k=1}^{r-1} \left(\frac{1}{k}(-1) \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(k)} z^n + \frac{1}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} z^n \right).$$

Foglalkozzunk a második taggal. Az elsőfajú Stirlingek rekurziójából

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + (n-1)! \quad (n > 0).$$

Most átírjuk az (5.3) formulát:

$$H_n = \frac{1}{n!}\left[{n+1 \atop 2}\right] = \frac{1}{(n-1)!}\left[{n \atop 2}\right] + \frac{1}{n},$$

ahonnan

$$\frac{1}{n!}\left[{n \atop 2}\right] = \frac{H_n}{n} - \frac{1}{n^2}.$$

Ezért (5.11) második tagja a következővel egyenlő:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[{n \atop 2}\right]\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}z^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}.$$

Ebben a második tag éppen $\mathrm{Li}_2(z)$, amely így kiejti (5.11) első tagját. Ami marad:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(r)}}{n}z^n =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}z^n + \sum_{k=1}^{r-1}\left(\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(r)}z^n - \frac{1}{k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}z^n\right).$$

Egyszerű indukcióval belátható (z-vel való osztás, integrálás, ezek $(m-1)$-szeres alkalmazása, majd $z=1$ helyettesítés után), hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(r)}}{n^m} =$$

(5.12)

$$S(1,m) + \sum_{k=1}^{r-1}\left(\frac{1}{k}S(r,m-1) - \frac{1}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}\frac{1}{n^{m-1}}\right).$$

Utolsó lépésként a legutolsó tagot transzformáljuk. A növő faktoriális (1.4) definíciója alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}\frac{1}{n^{m-1}} = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\overline{k}}}{n^m},$$

Másfelől $B(k,m)$ értelmezése szerint

$$B(k,m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^m}{(n+1)!^m} \frac{(k+1)^{\overline{n}}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^m} \frac{(k+1)^{\overline{n}}}{n!}.$$

A következő átalakítást alkalmazzuk:

$$\frac{k!(k+1)^{\overline{n}}}{n!} = \frac{(k+n)!}{n!} = (n+1)(n+2)\cdots(n+k) = (n+1)^{\overline{k}}.$$

Ez azt jelenti, hogy
(5.13)

$$B(k,m) = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)_k}{(n+1)^m} = \frac{1}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n)_k}{n^m}$$

érvényes. Tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} \frac{1}{n^{m-1}} = kB(k,m).$$

Ezt és (5.12) eredményt tekintve készen vagyunk ◇

5.4.1. Összegek alacsony paraméterekre

A következő táblázatokban összegyűjtjük az összegzési tétel alacsony paraméterekre vonatkozó eredményeit. Az alábbi egyenlőségeket használjuk:

$$\begin{aligned} B(1,m) &= \zeta(m-1), \\ B(2,m) &= \frac{1}{2}\left(\zeta(m-1) + \zeta(m-2)\right), \\ B(3,m) &= \frac{1}{6}\zeta(m-3) + \frac{1}{2}\zeta(m-2) + \frac{1}{3}\zeta(m-1). \end{aligned}$$

Ezek levezethetők $B(k,m)$ definíciójából.

$$S(2,m)$$

n hatványa	Zárt alak	Közelítő érték
$m=3$	$\frac{\pi^4}{72}-\frac{\pi^2}{6}+2\zeta(3)$	2.112083781
$m=4$	$\frac{\pi^4}{72}+3\zeta(5)-\zeta(3)\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$	1.284326055
$m=5$	$\frac{\pi^6}{540}-\frac{\pi^4}{90}-\frac{1}{2}\zeta(3)^2+3\zeta(5)-\frac{\pi^2}{6}\zeta(3)$	1.109035642
$m=6$	$\frac{\pi^6}{540}+4\zeta(7)-\frac{\pi^4}{90}\zeta(3)-\frac{1}{2}\zeta(3)^2-\zeta(5)\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$	1.047657410
$m=7$	$\frac{\pi^8}{4200}-\frac{\pi^6}{945}-\zeta(5)\zeta(3)+4\zeta(7)-\frac{\pi^2}{6}\zeta(5)-\frac{\pi^4}{90}\zeta(3)$	1.022090029
$m=8$	$\frac{\pi^8}{4200}+5\zeta(9)-\frac{\pi^6}{945}\zeta(3)-\frac{\pi^4}{90}\zeta(5)-\zeta(5)\zeta(3)-\zeta(7)\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$	1.010557246
$m=9$	$\frac{\pi^{10}}{34020}-\frac{\pi^8}{9450}-\zeta(7)\zeta(3)-\frac{1}{2}\zeta(5)^2+5\zeta(9)-\frac{\pi^2}{6}\zeta(7)-\frac{\pi^6}{945}\zeta(3)-\frac{\pi^4}{90}\zeta(5)$	1.005133570
$m=10$	$\frac{\pi^{10}}{34020}+6\zeta(11)-\frac{\pi^8}{9450}\zeta(3)-\frac{\pi^6}{945}\zeta(5)-\frac{1}{2}\zeta(5)^2-\frac{\pi^4}{90}\zeta(7)-\zeta(7)\zeta(3)-\zeta(9)\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$	1.002522063

$$S(3,m)$$

n hatványa	Zárt alak	Közelítő érték
$m=4$	$\frac{\pi^4}{48}-\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{6}\zeta(3)-\frac{1}{4}\zeta(3)+3\zeta(5)$	1.628620203
$m=5$	$\frac{\pi^6}{540}-\frac{\pi^4}{144}-\frac{\pi^2}{4}\zeta(3)-\frac{3}{4}\zeta(3)-\frac{1}{2}\zeta(3)^2+\frac{9}{2}\zeta(5)$	1.180103635
$m=6$	$\frac{\pi^6}{360}-\frac{\pi^4}{120}+4\zeta(7)-\frac{\pi^2}{6}\zeta(5)-\frac{\pi^4}{90}\zeta(3)-\frac{3}{4}\zeta(3)^2+\frac{1}{4}\zeta(5)-\frac{\pi^2}{12}\zeta(3)$	1.072362484
$m=7$	$\frac{\pi^8}{4200}-\frac{\pi^6}{2520}-\frac{\pi^4}{60}\zeta(3)-\frac{1}{4}\zeta(3)^2-\zeta(5)\zeta(3)-\zeta(5)\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{3}{4}\right)+6\zeta(7)$	1.032351029

$m=8$	$\frac{\pi^8}{2800}-\frac{\pi^6}{1260}-\zeta(3)\left(\frac{\pi^4}{180}+\frac{\pi^6}{945}\right)-\zeta(5)\left(\frac{\pi^2}{12}+\frac{\pi^4}{90}\right)-\frac{3}{2}\zeta(5)\zeta(3)+\zeta(7)\left(\frac{3}{4}-\frac{\pi^2}{6}\right)+5\zeta(9)$	1.015179175

$S(4,m)$

n hatványa	Zárt alak	Közelítő érték
$m=5$	$\frac{\pi^6}{540}-\frac{\pi^4}{810}-\frac{11\pi^2}{216}-\zeta(3)-\frac{11\pi^2}{36}\zeta(3)-\frac{1}{2}\zeta(3)^2+\frac{11}{2}\zeta(5)$	1.310990854
$m=6$	$\frac{11\pi^6}{3240}-\frac{\pi^4}{80}-\zeta(3)\left(\frac{\pi^4}{90}+\frac{1\pi^2}{6}+\frac{11}{36}\right)++\frac{11}{12}\zeta(3)^2+\zeta(5)\left(\frac{59}{36}-\frac{\pi^2}{6}\right)+4\zeta(7)$	1.103348021
$m=7$	$\frac{\pi^8}{4200}-\frac{11\pi^4}{3240}+\frac{\pi^6}{2430}-\frac{1}{2}\zeta(3)^2-\zeta(3)\left(\frac{11\pi^4}{540}-\frac{\pi^2}{36}\right)-\zeta(3)\zeta(5)-\zeta(5)\left(\frac{5}{6}-\frac{11\pi^2}{36}\right)+\frac{22}{3}\zeta(7)$	1.043816710
$m=8$	$\frac{11\pi^8}{25200}-\frac{5\pi^6}{4536}-\zeta(3)\left(\frac{\pi^6}{945}+\frac{\pi^4}{90}\right)-\frac{1}{12}\zeta(3)^2-\frac{11}{6}\zeta(3)\zeta(5)-\zeta(5)\left(\frac{\pi^4}{90}+\frac{\pi^2}{6}+\frac{11}{36}\right)+\zeta(7)\left(\frac{95}{36}-\frac{\pi^2}{6}\right)+5\zeta(9)$	1.020093103

5.5. Az elsőfajú r-Stirling számok Dirichlet-generátorfüggvényei

Miután a kisebb paraméterekre vissza nem vezethető eseteket letárgyaltuk, jöhet a tetszőleges paraméterek esete. A szakasz minden eredménye egy cikkből származik (Mező, [49]), ezért ezt nem tüntetjük fel külön az egyes tételeknél.

A következő rekurziós eredményt bizonyítjuk.

5.5.1. Tétel. *Ha* $|z| < 1$ *és* $m, q, r \in \mathbb{N}, r > 1$, *akkor*

$$G^{1,r}_{0,m,q}(z) =$$

$$\frac{1}{r-1}\left(G^{1,r-1}_{0,m,q-1} + (r-1)G^{1,r-1}_{0,m,q} + G^{1,r-1}_{0,m-1,q} - G^{1,r}_{0,m-1,q}\right)(z).$$

Továbbá, $k = 1, 2, \ldots$ *esetén*

$$G^{1,r}_{k,m,q}(z) = G^{1,r}_{k-1,m,q-1}(z) + (k+r-1)G^{1,r}_{k-1,m,q}(z) + G^{1,r}_{k-1,m-1,q}(z).$$

Bizonyítás. Broder [10] cikkében van egy hasznos rekurzió, melyet felhasználunk:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_r = \frac{1}{r-1}\left(\begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix}_{r-1} - \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix}_r\right) \quad (n \geq r > 1).$$

Másképpen,

$$\begin{bmatrix} n+r \\ m+r \end{bmatrix}_r = \frac{1}{r-1}\left(\begin{bmatrix} n+r \\ m-1+r \end{bmatrix}_{r-1} - \begin{bmatrix} n+r \\ m-1+r \end{bmatrix}_r\right),$$

ebből, használva az (1.8) rekurziót, adódik, hogy

$$\begin{bmatrix} n+r \\ m-1+r \end{bmatrix}_{r-1} = (n-1+r)\begin{bmatrix} n-1+r \\ m-1+r \end{bmatrix}_{r-1} + \begin{bmatrix} n-1+r \\ m-2+r \end{bmatrix}_{r-1}.$$

Ezért

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n+r \\ m+r \end{bmatrix}_r &= \tfrac{1}{r-1}\Big(n\left[\begin{smallmatrix} n+r-1 \\ m+r-1 \end{smallmatrix}\right]_{r-1} + (r-1)\left[\begin{smallmatrix} n+r-1 \\ m+r-1 \end{smallmatrix}\right]_{r-1} + \\ &\qquad \left[\begin{smallmatrix} n+r-1 \\ m-1+r-1 \end{smallmatrix}\right]_{r-1} - \left[\begin{smallmatrix} n+r \\ m-1+r \end{smallmatrix}\right]_r\Big).\end{aligned}$$

Beszorozva z^n-nel, osztva n^q-nal és összegezve kapjuk az első részt.

Most legyen k pozitív egész szám. Az (1.8) miatt

$$\begin{bmatrix} n+k+r \\ m+r \end{bmatrix}_r = (n+k-1+r)\begin{bmatrix} n+k-1+r \\ m+r \end{bmatrix}_r + \begin{bmatrix} n+k-1+r \\ m-1+r \end{bmatrix}_r.$$

Ez azt jelenti (lehagyva a z változót), hogy

$$G^{1,r}_{k,m,q} = G^{1,r}_{k-1,m,q-1} + (k+r-1)G^{1,r}_{k-1,m,q} + G^{1,r}_{k-1,m-1,q}.$$

$\diamond$

5.5.2. Példa. Alkalmazzuk a tételt a következő problémához: találjuk meg a $G^{1,2}_{0,2,1}\left(\frac{1}{2}\right)$ összeg zárt alakját!

$$G^{1,2}_{0,2,1}\left(\frac{1}{2}\right) = G^{1,1}_{0,2,0}\left(\frac{1}{2}\right) + G^{1,1}_{0,2,1}\left(\frac{1}{2}\right) + G^{1,1}_{0,1,1}\left(\frac{1}{2}\right) - G^{1,2}_{0,1,1}\left(\frac{1}{2}\right),$$

a fenti tétel alapján. Az utolsó előtti tagra [9, 26]:

$$G^{1,1}_{0,1,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n+1 \atop 2 \right] \frac{1}{2^n n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{2^n n} = \frac{\pi^2}{12},$$

míg

$$G^{1,2}_{0,1,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n+2 \atop 3 \right]_2 \frac{1}{2^n n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^{(2)}_n}{2^n n} = \frac{\pi^2}{12} + 2\ln(2) - 1.$$

Ezt az 5.4.1. lemma alapján látjuk be. A hiperharmonikus számok (5.10) generátorfüggvénye alapján

$$-\frac{\ln(1-x)}{x(1-x)^r} = \sum_{n=1}^{\infty} H^{(r)}_n x^{n-1}.$$

Integrálással adódik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^{(r)}_n}{n} x^n = \int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{t(1-t)^r} dt.$$

Az $1-t=x$ helyettesítés adja a

$$\int_0^a -\frac{\ln(1-t)}{t(1-t)^r} dt = \int_1^{1-a} \frac{\ln(x)}{(1-x)x^r} dx$$

integrált, ám ez éppen az 5.4.1. lemma (5.8) képletének bal oldala. Most $r = 2$ és legyen $x = \frac{1}{2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{2^n n} = \left[\mathrm{Li}_2(t) + \frac{1}{2}\ln^2(t) - \frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t}\right]_{t=1}^{t=\frac{1}{2}} =$$

$$= \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1}{2}\right) - 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{12}\pi^2 + 2\ln(2) - 1,$$

mivel $\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2}\ln^2(2)$ (ehhez l. [42]).

A fennmaradóak könnyen kezelhetők.

$$G_{0,2,0}^{1,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+1 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{1}{2^n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} \frac{n}{2^n n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2^n n!} = \ln^2(2),$$

hiszen itt a rekurzió és a generátorfüggvény használható. Vagyis,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} \frac{n}{2^n n!} = z\left(\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} \frac{z^n}{n!}\right)'\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} =$$

$$z\left(\frac{1}{3!}\ln^3\left(\frac{1}{1-z}\right)\right)'\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln^2(2).$$

Most foglalkozzunk a $G_{0,2,1}^{1,1}\left(\frac{1}{2}\right)$ összeggel.

$$G_{0,2,1}^{1,1}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+1 \\ 3 \end{bmatrix}_0 \frac{1}{2^n n n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_0 \frac{1}{2^n n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_0 \frac{1}{2^n n n!}.$$

A generátorfüggvény szerint ez $\frac{1}{3!}\ln^3(2)$, míg az (5.1) formula szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}_0 \frac{1}{2^n n n!} =$$

$$\zeta(3) - \mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{2}\right)\ln^2\left(\frac{1}{2}\right).$$

A polilogaritmusok elmélete alapján a fentiek zárt alakra hozhatók [42]:

$$\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{\pi^2}{12}\ln(2) + \frac{1}{6}\ln^3(2),$$

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2(2), \quad \mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2).$$

Végül összevonás után kapjuk a végeredményt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+2 \\ 4 \end{bmatrix}_2 \frac{1}{2^n n n!} = \frac{1}{8}\zeta(3) + \ln^2(2) - 2\ln(2) + 1 \approx 0.244416.$$

5.6. A másodfajú r-Stirling számok Dirichlet-generátorfüggvényei

Most a másodfajú r-Stirling számokkal foglalkozunk és először az exponenciális esetet tárgyaljuk (vagyis amikor $n!$ van a nevezőben). Ehhez az (1.12) exponenciális generátorfüggvényt alkalmazzuk.

5.6.1. Exponenciális eset

5.6.1. Tétel. *Minden $m, q, r \in \mathbb{N}$ paraméterre igaz a következő:*

$$G_{0,m,q}^{2,r} = \sum_{k=0}^{m} A_k^m (r+k) z_{q+1}F_{q+1}\left(\begin{matrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ 2, & 2, & \ldots, & 2 \end{matrix} \,\middle|\, (r+k)z \right),$$

ahol

$$A_k^m = \frac{1}{m!}\binom{m}{k}(-1)^{m-k} \quad (k = 0, \ldots, m).$$

Bizonyítás. Az (1.12) és a binomiális tétel szerint

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+r \\ m+r \end{Bmatrix}_r \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{m!} e^{rz}(e^z - 1)^m =$$

$$= \frac{1}{m!} e^{rz} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} e^{kz} (-1)^{m-k} =$$

$$\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} e^{(r+k)z} (-1)^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} A_k^m e^{(r+k)z}.$$

Mivel

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = {}_0F_0(\mid z),$$

(5.14)

$$\int \frac{e^{(r+k)z}}{z} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(r+k)z]^n}{nn!} = (r+k)z\, {}_2F_2 \left(\begin{array}{cc} 1, & 1 \\ 2, & 2 \end{array} \middle| (r+k)z \right),$$

amint az könnyen levezethető. Ezt a sort *Puiseux*[1]*-sor*nak nevezik, ha $r + k = 1$. A hipergeometrikus függvény értelmezése szerint

$$\int {}_qF_q \left(\begin{array}{cccc} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ 2, & 2, & \cdots, & 2 \end{array} \middle| z \right) dz =$$

(5.15)

$$z\, {}_{q+1}F_{q+1} \left(\begin{array}{cccc} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ 2, & 2, & \cdots, & 2 \end{array} \middle| z \right).$$

A továbblépéshez osszuk z-vel és integráljuk a bizonyítás első sorában szereplő formulát. Ezután tekintsük az (5.14) képletet hogy megkapjuk a következőt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ m+r \end{matrix} \right\}_r \frac{z^n}{nn!} = \sum_{k=0}^{m} A_k^m (r+k)z\, {}_2F_2 \left(\begin{array}{cc} 1, & 1 \\ 2, & 2 \end{array} \middle| (r+k)z \right).$$

Az általános tétel az (5.15) formulából adódik. ◇

Ezt könnyű kiegészíteni a $k > 0$ esetre:

5.6.2. Tétel. *Legyen k pozitív egész. Ekkor*

$$G_{k,m,q}^{2,r} = m G_{k-1,m,q}^{2,r} + G_{k-1,m-1,q}^{2,r}.$$

[1]Victor Alexandre Puiseux (1820-1883) francia matematikus.

Bizonyítás. Csak az (1.11) rekurziót kell alkalmazni. $\diamond$

Alkalmazásképpen lássuk a következőt.

5.6.3. Példa. Tekintsük a $G_{0,3,2}^{2,2}(1)$ összeget. Világos, hogy $A_0^3 = -\frac{1}{6}, A_1^3 = \frac{1}{2}, A_2^3 = -\frac{1}{2}, A_3^3 = \frac{1}{6}$. Ezért

$$G_{0,3,2}^{2,2}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ {n+2 \atop 5} \right\} \frac{1}{n^2 n!} = -\frac{1}{3} {}_3F_3 \left(\begin{array}{ccc} 1, & 1, & 1 \\ 2, & 2, & 2 \end{array} \middle| 2 \right)$$

$$+\frac{3}{2} {}_3F_3 \left(\begin{array}{ccc} 1, & 1, & 1 \\ 2, & 2, & 2 \end{array} \middle| 3 \right) - 2 {}_3F_3 \left(\begin{array}{ccc} 1, & 1, & 1 \\ 2, & 2, & 2 \end{array} \middle| 4 \right) +$$

$$\frac{5}{6} {}_3F_3 \left(\begin{array}{ccc} 1, & 1, & 1 \\ 2, & 2, & 2 \end{array} \middle| 5 \right) \approx 0.181477092.$$

5.6.2. Nemexponenciális eset

Most a nemexponenciális esetet tárgyaljuk. Érdekes, hogy az ún. Lerch[2] transzcendens függvény fellép az összegekben.

5.6.4. Tétel. *Minden $m, q, r \in \mathbb{N}$ esetén és*

$$z \begin{cases} < \frac{1}{m} & \textit{if } q = 1, \\ \leq \frac{1}{m} & \textit{if } q > 1. \end{cases}$$

változóra igaz a

$$\hat{G}_{0,m,q}^{2,r}(z) = \sum_{k=1}^{m} A_k^m \left[\sum_{l=0}^{r-1} c_l z^l \Phi(kz, q, l) \right],$$

előllítás, ahol

$$A_k^m = \frac{-\left(\frac{1}{k}\right)^{m-1}}{[(1-z)(1-2z)\cdots(1-mz)]'|_{z=\frac{1}{k}}} =$$

$$= \frac{1}{m!} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{5.16}$$

[2]Mathias Lerch (1860-1922) cseh matematikus.

míg c_l *a* z^l *együtthatója az* $(1-z)(1-2z)\cdots(1-(r-1)z)$ *polinomban és* Φ *az ún.* Lerch transzcendens *függvény:*
(5.17)

$$\Phi(z,q,l)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(n+l)^q}.$$

Az $r=1$ *speciális esetben*

$$\hat{G}^{2,1}_{0,m,q}=\sum_{k=1}^{m}A_k^m\operatorname{Li}_q(kz),$$

ahol $\operatorname{Li}_q(z)$ *a korábban már tárgyalt polilogaritmus* (5.9)*. Emiatt tehát* $\Phi(z,q,0)=\operatorname{Li}_q(z)$*.*

Bizonyítás. A következő előállítást használjuk [30]:
(5.18)

$$\left\{ n \atop m \right\}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m!}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}k^n,$$

ahonnan

$$\left\{ n \atop m \right\}\frac{z^n}{n^q}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m!}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\frac{(kz)^n}{n^q},$$

ezért az összeg megadható:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{ n \atop m \right\}\frac{z^n}{n^q}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m!}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\frac{(kz)^n}{n^q}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m!}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(kz)^n}{n^q}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m!}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Li}_q(kz). \tag{5.19}$$

Tanulságos egy másik bizonyítást is adni. Használva a (2.1) generátorfüggvényt,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{ n \atop m \right\}z^n=z\frac{z^{m-1}}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-mz)}.$$

Ezt átalakítjuk a következő módon:

$$z\frac{z^{m-1}}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-mz)} = z\left(\frac{A_1^m}{z-1}+\frac{A_2^m}{z-\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{A_m^m}{z-\frac{1}{m}}\right),$$

ahol
(5.20)

$$A_k^m = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^{m-1}}{[(1-z)(1-2z)\cdots(1-mz)]'|_{z=\frac{1}{k}}},$$

használva a parciális törtekre bontás módszerét.

z-vel osztva és integrálva

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{{n \atop m}\right\}\frac{z^n}{n} = \int\frac{z^{m-1}}{(1-z)(1-2z)\cdots(1-mz)}dz =$$
$$= \int\frac{A_1^m}{z-1}dz+\int\frac{A_2^m}{z-\frac{1}{2}}dz+\cdots+\int\frac{A_m^m}{z-\frac{1}{m}}dz.$$

Az

$$\frac{A_k^m}{z-\frac{1}{k}} = -kA_k^m\frac{1}{1-kz} \quad (k=1,\ldots,m)$$

átalakítás és az

$$\int\frac{1}{1-kz}dz = -\frac{1}{k}\ln(1-kz) \quad (k=1,\ldots,m)$$

integrál együttesen adják, hogy

$$\int\frac{A_k^m}{z-\frac{1}{m}}dz = A_k^m\ln(1-kz).$$

Jól ismert (l. [30]), hogy

$$\ln\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = \mathrm{Li}_1(z),$$

ezért $\ln(1-kz) = -\operatorname{Li}_1(kz)$, így

$$\hat{G}^{2,1}_{0,m,1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \atop m \right\} \frac{z^n}{n} = -A_1^m \operatorname{Li}_1(z) - A_2^m \operatorname{Li}_1(2z) - \cdots - A_m^m \operatorname{Li}_1(mz).$$

Ha az előjelet módosítjuk: $A_k^m \rightsquigarrow -A_k^m$, akkor ezen együtthatók egybeesnek a korábbival. Összehasonlítva (5.19) és (5.20) képleteket, az önmagában is érdekes (5.16) azonosságot kapjuk.

A $\hat{G}^{2,1}_{0,m,1}$ összegre kapott formulát minden további nélkül átvihetjük $\hat{G}^{2,1}_{0,m,q}$ összegre tetszőleges q esetére, ha figyelembe vesszük, hogy

$$\int \frac{\operatorname{Li}_{k-1}(z)}{z} dz = \operatorname{Li}_k(z),$$

ami pedig a polilogaritmus (5.9) definíciójából jön.

Most legyen r nagyobb, mint 1. Ekkor (2.1) alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \atop m \right\}_r z^n = (1-z)(1-2z)\cdots(1-(r-1)z) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \atop m \right\} z^n.$$

Legyen c_l az az együttható, melyet már korábban megadtunk. Innen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \atop m \right\}_r z^n =$$

$$c_{r-1} z^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \atop m \right\} z^n + \cdots + c_1 z \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \atop m \right\} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \atop m \right\} z^n.$$

z-vel osztva, integrálva és ezt q-szor megismételve:

$$c_{r-1} z^{r-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \atop m \right\} \frac{z^n}{(n+r-1)^q} + \cdots + c_1 z \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \atop m \right\} \frac{z^n}{(n+1)^q} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \atop m \right\} \frac{z^n}{n^q}.$$

Használva az (5.16) képletet,

$$\sum_{l=0}^{r-1} c_l z^l \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ {n \atop m} \right\} \frac{z^n}{(n+l)^q} = \sum_{l=0}^{r-1} c_l z^l \sum_{k=1}^{m} A_k^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kz)^n}{(n+l)^q} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} A_k^m \sum_{l=0}^{r-1} c_l z^l \Phi(kz, q, l),$$

ami az állítást bizonyítja.

Végül megemlítjük, hogy $\mathrm{Li}_1(kz) = \ln\left(\frac{1}{1-kz}\right)$, $(k = 1, \ldots, m)$ kifejezésnek nincs értelme, ha $kz \geq 1$, vagyis ha $z \geq \frac{1}{m}$. Másfelől $\mathrm{Li}_q(kz)$ esetén (ha $q > 1$), az argumentum legfeljebb egy lehet, ami maga után vonja a tétel elején adott megszorításokat z-re. $\diamond$

5.6.5. Példa. Fejezzük ki $G_{0,4,3}^{2,3}\left(\frac{1}{4}\right)$ összeget a Lerch transzcendens függvény segítségével! Mivel $(1-z)(1-2z) = 1 - 3z + 2z^2$, az együtthatókra $c_0 = 1$, $c_1 = -3$, $c_2 = 2$. Továbbá $A_1^4 = -\frac{1}{6}$, $A_2^4 = \frac{1}{4}$, $A_3^4 = -\frac{1}{6}$, $A_4^4 = \frac{1}{24}$. Így

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ {n \atop 4} \right\}_3 \frac{1}{4^n n^3} = &-\frac{1}{6}\left(\Phi\left(\frac{1}{4}, 3, 0\right) - \frac{3}{4}\Phi\left(\frac{1}{4}, 3, 1\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1}{4}, 3, 2\right)\right) \\
&+ \frac{1}{4}\left(\Phi\left(\frac{1}{2}, 3, 0\right) - \frac{3}{4}\Phi\left(\frac{1}{2}, 3, 1\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{1}{2}, 3, 2\right)\right) \\
&- \frac{1}{6}\left(\Phi\left(\frac{3}{4}, 3, 0\right) - \frac{3}{4}\Phi\left(\frac{3}{4}, 3, 1\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{3}{4}, 3, 2\right)\right) \\
&+ \frac{1}{24}\left(\Phi(1, 3, 0) - \frac{3}{4}\Phi(1, 3, 1) + \frac{1}{2}\Phi(1, 3, 2)\right) \\
&\approx 0.00031.
\end{aligned}$$

Sajnos a $\Phi(z, q, l)$ Lerch transzcendens értékeiről nagyon keveset tudunk. A matematika külön ága foglalkozik ezen függvényre adható zárt alakok megtalálásával illetve rá vonatkozó formulák, közelítések bizonyításával (l. pl. [32]).

5.6.6. Tétel. *Az 5.6.4. tétel feltételei mellet legyen k pozitív egész. Ekkor*

$$\hat{G}^{2,r}_{k,m,q} = m\hat{G}^{2,r}_{k-1,m,q} + \hat{G}^{2,r}_{k-1,m-1,q}.$$

Bizonyítás. Lásd 5.6.2. ◇

5.6.7. Példa. Meghatározzuk a $\hat{G}^{2,3}_{1,4,3}\left(\frac{1}{4}\right)$ összeget.

$$\hat{G}^{2,3}_{1,4,3} = 4\hat{G}^{2,3}_{0,4,3} + \hat{G}^{2,3}_{0,3,3}.$$

Az első tagot az előző példában számoltuk ki. Mivel $\left\{ {n \atop 3} \right\}_3 = \frac{3^n}{3^3}$ ha $n \geq r$ (l. [10]), kapjuk az összeget:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ {n+1 \atop 4} \right\}_3 \frac{1}{4^n n^3} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ {n \atop 4} \right\}_3 \frac{1}{4^n n^3} + \frac{1}{27}\,\mathrm{Li}_3\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{105}{128}$$
$$\approx 0.00213.$$

6. fejezet

További eredmények a hiperharmonikus számokra vonatkozóan

6.1. Az Euler-Seidel mátrixok

Miután feltártuk az r-Stirling számok Dirichlet-generátorfüggvényei esetén játszott fontos szerepét, a hiperharmonikus számok újabb tulajdonságait tárgyaljuk. A két legfontosabb az, hogy ezek kiterjeszthetők negatív rendekre is, ezzel szép általánosítást nyújtva az ún. binomiális harmonikus formulára, másrészt Gosper 1996-os eredménye is kiterjeszthető. A fejezet eredményei az *Central European Journal of Mathematics* illetve az *Applied Mathematics and Computation* c. folyóiratokban jelentek meg [46, 47].

Mindezekhez az ún. *Euler-Seidel konstrukció* lesz segítségünkre. Ezt a következőkben építjük fel [23, 27].

Mindenek előtt, legyen adott egy (a_n) valós számsorozat. A rá vonatkozó *Euler-Seidel mátrix*ot az elemei közötti rekurzióval definiáljuk:

$$
\begin{aligned}
a_n^0 &= a_n \quad (n \geq 0), \\
a_n^k &= a_n^{k-1} + a_{n+1}^{k-1} \quad (n \geq 0,\, k \geq 1).
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

Itt az alsó index az oszlopot, a felső a sort indexeli. Ezzel kiolvasható a rekurzió első sorából, hogy az Euler-Seidel mátrix első sora az a_n sorozat, a további sorokat úgy nyerjük, hogy a sor kérdéses eleme fölötti és attól eggyel jobbra levő elemeket összeadjuk:

$$
\begin{pmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & a_n^{k-1} & a_{n+1}^{k-1} & \cdots \\
 & & \downarrow & \swarrow & \\
\cdots & \cdots & a_n^k & & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{pmatrix}.
$$

A 6.1 alapján indukcióval belátható [27], hogy az első sor és -oszlop egymásba transzformálható:

$$
\begin{aligned}
a_0^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k^0, \\
a_n^0 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_0^k.
\end{aligned} \tag{6.2}
$$

Ezeket *Dumont-azonosságok*nak nevezik. Két tetszőleges sorozat esetén ezen transzformációkat *binomiális transzformáció*ként ismerjük. Az első sort *bemeneti sorozat*nak, az első oszlopot *kimeneti sorozat*nak nevezzük.

Már Euler felismerte, hogy az első sor $((a_n) = (a_n^0))$ és -oszlop (a_0^n) generátorfüggvényei között a következő kapcsolat áll fenn [29]:

6.1.1. Állítás (Euler). *Legyen*

$$
a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 t^n
$$

a kezdő sorozatunk (az első, 0 indexű sor) generátorfüggvénye. Ekkor az első oszlop generátorfüggvénye

$$\overline{a}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n t^n = \frac{1}{1-t} a\left(\frac{t}{1-t}\right).$$

A Cauchy szorzat segítségével azonnal látható, hogy az exponenciális generátorfüggvények között a következő kapcsolat van [58]:

6.1.2. Állítás (Seidel). *Legyen*

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 \frac{t^n}{n!}$$

az (a_n^0) exponenciális generátorfüggvénye. Ekkor (a_0^n) exponenciális generátorfüggvénye

$$\overline{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} = e^t A(t).$$

6.2. A hiperharmonikus számok kezdő sorozata

Most nem a szokásos menetet követjük, miszerint a bemeneti sorozatból határozzuk meg az Euler-Seidel mátrix első oszlopát (mint kimeneti sorozatot), hanem az első oszlop ismeretében (ezek lesznek a hiperharmonikusok) számítjuk ki az első sort. Ennek ismeretében érdekes tételeket tudunk bizonyítani.

Ehhez az r rendet végig bal-felső indexben jelöljük.

6.2.1. Tétel (Mező, [46]). *Legyen r fix. Ha ${}^r a_0^n = H_n^{(r)}$ a kimeneti sorozat, akkor a bemeneti sorozat*

$${}^r a_n^0 = \begin{cases} H_n^{(r-n)} & \textit{if } 0 \le n < r, \\ \frac{(r-1)!(-1)^{n+\delta_r}}{n(n-1)\cdots(n-(r-1))} & \textit{if } n \ge r, \end{cases}$$

Itt

$$\delta_r = \begin{cases} 0 & \textit{ha } r \textit{ páros,} \\ 1 & \textit{ha } r \textit{ páratlan.} \end{cases}$$

Továbbá, az r rendű hiperharmonikusok bemeneti sorozata megegyezik az $r-1$ rendű hiperharmonikusok Euler-Seidel mátrixának második sorával.

Bizonyítás. A bemenő sorozat meghatározásához kiszámítjuk ${}^r a(t)$ együtthatóit.

$$ {}^r\overline{a}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(r)} t^n = -\frac{\ln(1-t)}{(1-t)^r} = \frac{1}{1-t} \cdot {}^r a\left(\frac{t}{1-t}\right), $$

Euler állítása alapján. Így

$$ {}^r a\left(\frac{t}{1-t}\right) = -\frac{\ln(1-t)}{(1-t)^{r-1}}. $$

Helyettesítve az inverz $\frac{t}{1+t}$ függvényt,

(6.3)
$$ {}^r a(t) = (1+t)^{r-1} \ln(1+t). $$

Ez azt jelenti, hogy $r \geq 2$ esetén

$$ {}^r a(t) = (1+t)(1+t)^{r-2} \ln(1+t) = (1+t) \cdot {}^{r-1}a(t). $$

Vagyis

$$ {}^r a(t) = {}^{r-1}a(t) + t \cdot {}^{r-1}a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{r-1}a_n^0 t^n + \sum_{n=1}^{\infty} {}^{r-1}a_{n-1}^0 t^n. $$

A két oldal együtthatóit összehasonlítva kapjuk, hogy

(6.4)
$$ {}^r a_n^0 = {}^{r-1}a_n^0 + {}^{r-1}a_{n-1}^0 \quad (n = 1, 2, \dots), $$

(és ${}^r a_0^0 = {}^{r-1}a_0^0 = 0$) vagy ekvivalens módon

(6.5)
$$ {}^r a_{n+1}^0 = {}^{r-1}a_{n+1}^0 + {}^{r-1}a_n^0 \quad (n = 0, 1, \dots). $$

Másfelől a (6.1) alapján általánosan

$$a_n^1 = a_{n+1}^0 + a_n^0 \quad (n = 0, 1, \dots),$$

tehát az $r-1$ rendre

$${}^{r-1}a_n^1 = {}^{r-1}a_{n+1}^0 + {}^{r-1}a_n^0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Ezt (6.5) egyenlettel összehasonlítva

$${}^{r}a_{n+1}^0 = {}^{r-1}a_n^1.$$

Ezzel második állításunkat nyerjük.

Az Euler-Seidel mátrix „bal felső sarka” az 5.5 rekurzió alapján könnyen kiszámítható. Nevezetesen,

$$\begin{pmatrix} H_0^{(r)} & H_1^{(r-1)} & H_2^{(r-2)} & H_3^{(r-3)} & \cdots & H_{r-1}^{(1)} & \cdots \\ H_1^{(r)} & H_2^{(r-1)} & H_3^{(r-2)} & H_4^{(r-3)} & \cdots & H_r^{(1)} & \cdots \\ H_2^{(r)} & H_3^{(r-1)} & H_4^{(r-2)} & H_5^{(r-3)} & \cdots & H_{r+1}^{(1)} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \end{pmatrix}.$$

Ezért ${}^{r}a_n^0 = H_n^{(r-n)}$ $(0 \le n < r)$ valóban érvényes, amint a tétel szövegében állítottuk.

A helyzet megváltozik, ha a további elemeket tekintjük. A megelőző számításokat szem előtt tartva a fennmaradó részt indukcióval bizonyítjuk. Először is legyen $r = 1$. Ekkor ${}^{1}a_0^n = H_n$, és a fenti számítások alapján

$${}^{1}a(t) = \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n,$$

amely egybevág az állításunkkal. Most legyen $r > 1$. Az indukciós feltevés az, hogy

$${}^{r-1}a_n^0 = \frac{(r-2)!(-1)^{n+\delta_{r-1}}}{n(n-1)\cdots(n-(r-2))}.$$

(6.4) egyenletet felhasználva,

$$\begin{aligned}
{}^{r}a_n^0 &= {}^{r-1}a_n^0 + {}^{r-1}a_{n-1}^0 \\
&= \frac{(n-(r-1))(r-2)!(-1)^{n+\delta_{r-1}} + n(r-2)!(-1)^{n+\delta_{r-1}-1}}{n(n-1)\cdots(n-(r-1))} \\
&= \frac{(-(r-1))(r-2)!(-1)^{n+\delta_{r-1}}}{n(n-1)\cdots(n-(r-1))} = \frac{(r-1)!(-1)^{n+\delta_r}}{n(n-1)\cdots(n-(r-1))}.
\end{aligned}$$

Az utolsó lépésben azt a nyilvánvaló felismerést használtuk, hogy

$$(-1)(-1)^{n+\delta_{r-1}} = (-1)^{n+\delta_r}.$$

Ezzel az állítást beláttuk minden n és r esetére. $\diamond$

6.2.2. Megjegyzés. A tétel második állítása azt az érdekes tényt fejezi ki, hogy az $r-1$ rendű hiperharmonikusok Euler-Seidel mátrixának második (1 indexű) sora egybeesik az r rendű hiperharmonikusok bemeneti sorozatával, eltolástól eltekintve. Nézzük meg, hogyan működik ez a gyakorlatban.

6.2.3. Példa. Hogy lássuk, hogyan működik a tétel, felírjuk a kis ($r \leq 3$) rendű hiperharmonikusok Euler-Seidel mátrixait. Legyen $r = 1$. Ekkor ${}^{1}a_0^0 = 1$ és ${}^{1}a_n^0 = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ $(n \geq r = 1)$. Így

(6.6)
$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
H_1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & \cdots & \\
H_2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \cdots & & \\
H_3 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & \cdots & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{pmatrix}.$$

Ha r-ret 2-nek választjuk, kapjuk a következőt: ${}^{2}a_0^0 = 0$, ${}^{2}a_1^0 = 1$ és ${}^{2}a_n^0 = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ $(n \geq 2)$.

(6.7)
$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & \cdots \\
H_1^{(2)} & H_2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \cdots & \\
H_2^{(2)} & H_3 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & \cdots & & \\
H_3^{(2)} & H_4 & \frac{1}{5} & \cdots & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{pmatrix}.$$

Legyen végül $r = 3$. Ekkor megint ${}^2a_0^0 = 0$, ${}^2a_1^0 = 1$, ${}^2a_2^0 = H_2^{(3-2)} = \frac{3}{2}$, továbbá ${}^2a_n^0 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n(n-1)(n-2)}$ $(n \geq 3)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \cdots \\ H_1^{(3)} & H_2^{(2)} & H_3 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & \cdots & \\ H_2^{(3)} & H_3^{(2)} & H_4 & \frac{1}{5} & \cdots & & \\ H_3^{(3)} & H_4^{(2)} & H_5 & \cdots & & & \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Azt mutatjuk még meg, hogy a hiperharmonikusok bemenő sorozata nem is olyan „misztikus”, hiszen ez nem más csak negatív rendű hiperharmonikusok sorozata... Mielőtt azonban ezt belátnánk, előbbi tételünk még egy következményét tárgyaljuk.

6.2.4. Következmény. *A Dumont-azonosságok miatt*

$$H_n^{(r)} = {}^ra_0^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {}^ra_k^0.$$

Ha speciálisan $r = 1$, akkor
(6.8)

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Ez a formula binomiális harmonikus azonosság*ként ismert. Ha $r = 2$, akkor a másodrendű hiperharmonikusokra egy új formulát nyerünk. A fentebbi példákból is láthatjuk a bemenő sorozatot, amiből*

$$H_n^{(2)} = \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k(k-1)}.$$

Hasonlóan,

$$H_n^{(3)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} H_2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{2!(-1)^{k+1}}{k(k-1)(k-2)},$$

$$H_n^{(4)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} H_2^{(2)} + \binom{n}{3} H_3 + \sum_{k=4}^{n} \binom{n}{k} \frac{3!(-1)^k}{k(k-1)(k-2)(k-3)},$$

és így tovább. Ezeket az azonosságokat binomiális hiperharmonikus azonosságok*nak nevezhetnénk.*

6.3. Negatív rendű hiperharmonikusok

Azt tudjuk, hogy a $(H_n^{(r)})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat generátorfüggvénye $-\frac{\log(1-t)}{(1-t)^r}$. Ha ebbe $r = 0$ értéket helyettesítünk, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(0)} t^n = -\log(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n.$$

Vagyis

$$H_n^{(0)} = \frac{1}{n} \quad (n > 0).$$

Ez egybevág a hiperharmonikusok rekurziójával:

$$H_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} H_k^{(0)}.$$

A negatív rendek is érdekesek. Legyen $r > 0$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(-r)} t^n = (1-t)^r(-\ln(1-t)).$$

Tekintve a (6.3) egyenletet, a $t \rightsquigarrow -t$ helyettesítés és -1-gyel való szorzás után

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} H_n^{(-r)} t^n = (1+t)^r(\ln(1+t)) = {}^{r+1}a(t).$$

Ezzel azt kaptuk, hogy az r rendű hiperharmonikus számok az ${}^{r+1}a(t)$ függvény hatványsorának együtthatói, $(-1)^{n+1}$ faktortól eltekintve.

A 6.2.1. tétel emiatt „zárt” alakot ad a negatív rendű hiperharmonikusokra. Fordítva, a hiperharmonikus számok kezdő sorozatai a negatív rendű hiperharmonikus számok. Még pontosabban fogalmazza ezt meg a következő

6.3.1. Állítás (Mező, [46]). *Az $r+1$ rendű hiperharmonikusok kezdő sorozata a $-r$ rendű hiperharmonikusok sorozata, képletben:*

$$(-1)^{n+1}H_n^{(-r)} = {}^{r+1}a_n^0.$$

Így a binomiális hiperharmonikus azonosság a kompakt

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} H_k^{(-r+1)}$$

formát ölti.

6.4. A hiperharmonikus számok exponenciális generátorfüggvénye

Abból, hogy ismerjük a hiperharmonikusok kezdő sorozatát, még nem arattunk le minden eredményt. Ugyanis ezen ismeret alapján számaink exponenciális generátorfüggvénye is leszármaztatható. Ezzel R. W. Gosper 1996-os, publikálatlan eredményét általánosítjuk.

6.4.1. Tétel (Mező, [46]). *Minden $r = 1, 2, \ldots$ esetén*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} =$$

$$e^t \left[\sum_{n=1}^{r-1} H_n^{(r-n)} \frac{t^n}{n!} + \frac{(r-1)!}{(r!)^2} t^r {}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ r+1 & r+1 \end{matrix} \middle| -t \right) \right].$$

Bizonyítás. Seidel állítása szerint
(6.9)

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} = {}^r\overline{A}(t) = e^t \cdot {}^r A(t),$$

emiatt elegendő ${}^rA(t)$ függvényt megadnunk.

$$ {}^rA(t) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^ra_n^0 \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{r-1} H_n^{(r-n)} \frac{t^n}{n!} + \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(r-1)!(-1)^{n+\delta_r}}{n(n-1)\cdots(n-(r-1))} \frac{t^n}{n!}, $$

korábbi tételünk miatt. Most olyan alakra hozzuk ezt, hogy a hipergeometrikus függvény közvetlenül alkalmazható legyen. A nevezők: $\frac{r!}{0!} = \frac{r!(r+1)^{\underline{0}}}{0!}$, $\frac{(r+1)!}{1!} = \frac{r!(r+1)^{\underline{1}}}{1!}$, $\frac{(r+2)!}{2!} = \frac{r!(r+1)^{\underline{2}}}{2!}, \ldots$, amint rendre $n = r, r+1, r+2, \ldots$. Emiatt (felhasználva a tényt, hogy $(n+r)! = r!(r+1)_n$)

$$ \sum_{n=r}^{\infty} \frac{(r-1)!(-1)^{n+\delta_r}}{n(n-1)\cdots(n-(r-1))} \frac{t^n}{n!} = $$

$$ \begin{aligned} &= (r-1)!(-1)^{\delta_r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{r!(r+1)^{\underline{n}}} \frac{t^{n+r}}{(n+r)!} \\ &= \frac{(r-1)!(-1)^{\delta_r}(-t)^r}{(r!)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(r+1)^{\underline{n}}} \frac{(-t)^n}{(r+1)^{\underline{n}}} \\ &= \frac{(r-1)!(-1)^{\delta_r}(-t)^r}{(r!)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^{\underline{n}}(1)^{\underline{n}}}{(r+1)^{\underline{n}}(r+1)^{\underline{n}}} \frac{(-t)^n}{n!} \\ &= \frac{(r-1)!(-1)^{\delta_r}(-t)^r}{(r!)^2} {}_2F_2\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ r+1 & r+1 \end{matrix} \middle| -t \right). \end{aligned} $$

Világos, hogy $(-1)^{\delta_r}(-1)^r = 1$ minden r-re, így (6.9) adja az eredményt. ◇

6.4.2. Következmény. *Amint már szó volt róla, 1996-ban Gosper megadta az $r = 1$ speciális esetet, a harmonikus számok exponenciális generátorfüggvényét. Ha $r = 1$ helyettesítéssel élünk a tételünk két oldalán, visszakapjuk az ő képletét:*

$$ \sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{t^n}{n!} = e^t t\, {}_2F_2\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \middle| -t \right). $$

Érdemes megjegyezni, hogy a Gosper-azonosság felhasználható, hogy a (6.8) binomiális harmonikus azonosságot megkapjuk.

6.4.3. Következmény. *Néhány érdekes összeg számítható ki a fentiek alapján.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n!}=e\left[1+\frac{1}{4}{}_2F_2\left(\begin{array}{cc}1&1\\3&3\end{array}\middle|-1\right)\right]\approx 3.33076.$$

A $t=\frac{1}{2}$, $r=4$ *helyettesítéssel pedig*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(4)}}{2^n n!}=\sqrt{e}\left[\frac{H_1^{(3)}}{2^1 1!}+\frac{H_2^{(2)}}{2^2 2!}+\frac{H_3^{(1)}}{2^3 3!}+\frac{3!}{2^4(4!)^2}{}_2F_2\left(\begin{array}{cc}1&1\\5&5\end{array}\middle|-\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$\approx 1.40361.$$

A $2,2$ paraméterű hipergeometrikus függvényekre – tudomásunk szerint – nincs túl sok ismeret illetve alkalmazás. Ez a mi szempontunkból egyszerre lehet sajnálatos és örvendetes. Előbbi azért, mert így ezen az úton nem tudjuk összekötni a hiperharmonikusokat más mennyiségekkel. Utóbbi pedig azért, mert eredményünk éppen egy ritka paramétercsaládú hipergeometrikus függvényre ad alkalmazást.

6.5. Egy új formula az r-Stirling számokra

A fejezet zárása képpen még egy alkalmazást adunk az Euler-Seidel mátrixokra. Nevezetesen, új azonosságot bizonyítunk a másodfajú r-Stirling számokra.

6.5.1. Tétel (Mező, [46]). *Minden m és r esetén érvényes a következő azonosság:*

$$\left\{ n \atop m \right\}_r=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{l-1}\binom{l+r-2}{l-1}\left\{ k-l \atop m-1 \right\}_{r-1}.$$

Speciálisan, a hagyományos másodfajú Stirling számokra $(r=1)$*:*

$$\left\{ n \atop m \right\}=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{l-1}\left\{ k-l \atop m-1 \right\}.$$

Bizonyítás. Legyen ${}_m^r a_0^n := \left\{ {n \atop m} \right\}_r$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
{}_m^r\overline{a}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_m^r a_0^n t^n &= \frac{t^m}{(1-rt)(1-(r+1)t)\cdots(1-mt)} \\
&= \frac{1}{1-t} \cdot {}_m^r a\left(\frac{t}{1-t}\right).
\end{aligned}
$$

Beszorozva $\frac{1}{1-t}$-vel és használva ennek a $\frac{t}{1+t}$ inverzét,

$$
\begin{aligned}
{}_m^r a(t) &= \left(1 - \frac{t}{1+t}\right) \frac{\left(\frac{t}{1+t}\right)^m}{\left(1 - r\frac{t}{1+t}\right)\left(1-(r+1)\frac{t}{1+t}\right)\cdots\left(1-m\frac{t}{1+t}\right)} \\
&= \frac{1}{1+t} \frac{\frac{t^m}{(1+t)^m}}{\frac{1-(r-1)t}{1+t}\frac{1-rt}{1+t}\cdots\frac{1-(m-1)t}{1+t}} \\
&= \frac{t}{(1+t)^r} \frac{t^{m-1}}{(1-(r-1)t)(1-rt)\cdots(1-(m-1)t)} \\
&= \frac{t}{(1+t)^r} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ {n \atop m-1} \right\}_{r-1} t^n.
\end{aligned}
$$

A továbblépéshez megjegyezzük, hogy

$$
\frac{1}{(1-t)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{n} t^n,
$$

így

$$
\frac{t}{(1+t)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+r-1}{n} t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \binom{n+r-2}{n-1} t^n.
$$

Ezért

$$
{}_m^r a(t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \binom{n+r-2}{n-1} t^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ {n \atop m-1} \right\}_{r-1} t^n \right)
$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{l-1} \binom{l+r-2}{l-1} \left\{ {n-l \atop m-1} \right\}_{r-1} \right) t^n,$$

a Cauchy-szorzat definíciója miatt. Ebből

$${}_m^r a_0^0 = {}_m^r a_1^0 = 0,$$

$${}_m^r a_n^0 = \sum_{l=1}^{n-1} (-1)^{l-1} \binom{l+r-2}{l-1} \left\{ {n-l \atop m-1} \right\}_{r-1} \qquad (n \geq 2).$$

Az Euler-Seidel mátrixok első sora és oszlopa közötti Dumont-azonosság segítségével

$$\left\{ {n \atop m} \right\}_r = {}_m^r a_0^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {}_m^r a_k^0$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l-1} \binom{l+r-2}{l-1} \left\{ {k-l \atop m-1} \right\}_{r-1},$$

amint állítottuk. Az $r = 1$ eset az utóbbi azonosságból természetesen azonnal következik. $\diamond$

7. fejezet

Egy új azonosság a Bernoulli polinomokra

Dolgozatunk zárásául – és annak címéhez hűen – a Stirling számok (r-Stirlingeken túli) általánosítását fogalmazzuk meg. Ez azért hasznos, mert segítségükkel a Bernoulli számokra és -polinomokra egy új, eddig ismeretlen reprezentáció adható. Figyelembe véve, hogy a Bernoulli polinomok milyen régiek, az általunk feltárt (közlésre benyújtott) azonosság talán még érdekesebbnek tűnik.

Ráadásul „melléktermékként" az ún. harmonikus polinomok új előállítása is kiadódik.

7.1. Stirling-típusú párok

Az L. C. Hsu és J-S. Shiue [35] által felvetett módszer alapján a Stirling számok úgy is általánosíthatók, hogy az általánosított faktoriálisok közötti lineáris transzformációk együtthatóit vesszük. Mi is ezt tesszük, és két új számosztályt vezetünk be, amelyek közös általánosításai lesznek a Stirling-, r-Stirling- és Whitney[1] számoknak[2].

[1] Hassler Whitney (1907-1989) amerikai matematikus.

[2] A Whitney számokról eddig még nem esett szó. Ezek a Stirling számok hálóelméleti úton történő általánosításai. Bővebben erről l. [5] és a benne foglalt hivatkozásokat.

Követve [35] jelöléseit, $(z \mid \alpha)_n = z(z-\alpha)\cdots(z-(n-1)\alpha)$ ($n = 1, 2, \dots$) az ún. *általánosított faktoriálisok* ($(z \mid \alpha)_0 = 1$). Ezekkel definiálták az $\{S^1(n,k), S^2(n,k)\} = \{S(n,k;\alpha,\beta,r), S(n,k;\beta,\alpha,-r)\}$ *Stirling-típusú párok*at, ahol

$$\begin{aligned}(t \mid \alpha)_n &= \sum_{k=0}^{n} S^1(n,k)(t-r \mid \beta)_k,\\ (t \mid \beta)_n &= \sum_{k=0}^{n} S^2(n,k)(t-r \mid \beta)_k.\end{aligned}$$

Az α, β, r paraméterek valós (vagy éppen komplex) számok azzal a kikötéssel, hogy $(\alpha, \beta, r) \neq (0,0,0)$.

Hsu és Shiue cikkében tizenegy példa szerepel, amelyeknek ezek a számok közös általánosításai. Mi most bővítjük ezt a listát a következő módon.

Legyen $mx + r$ egy számtani sorozat (x futó változóval). Ennek n-edik hatványa nyilván kifejezhető a csökkenő faktoriális segítségével (hiszen ezek bázist alkotnak a valós együtthatós polinomok vektorterében, és $(mx+r)^n$ polinomja x-nek):
(7.1)

$$(mx+r)^n = \sum_{k=0}^{n} m^k W_{m,r}(n,k) x^{\underline{k}}$$

Az együtthatók pontosan azok, melyekre nekünk szükségünk lesz. Azonnal mondunk róluk többet. A fenti relációk inverzének is léteznie kell:
(7.2)

$$m^n x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)(mx+r)^k.$$

A $W_{m,r}(n,k)$ és $w_{m,r}(n,k)$ számok visszaadják a Stirling-, r-Stirling-és Whitney számokat, rendre a következő paraméterekkel:

$$\begin{aligned} W_{1,0}(n,k) &= \left\{ n \atop k \right\} \equiv S^2(n,k), \\ W_{1,r}(n,k) &= \left\{ n+r \atop k+r \right\}_r, \\ W_{m,0}(n,k) &= W_m(n,k). \end{aligned}$$

Az első fajú eset ugyanez. Természetesnek tűnik ezeket a számokat *másodfajú r-Whitney számok*nak nevezni, míg $w_{m,r}(n,k)$ *elsőfajú r-Whitney szám*nak nevezhető.

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy ezek valóban Stirling-típusú párt alkotnak, meghatározzuk az exponenciális generátorfüggvényeket:

$$\sum_{n=k}^{\infty} W_{m,r}(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^k. \tag{7.3}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} w_{m,r}(n,k)\frac{z^n}{n!} = (1+mz)^{\frac{-r}{m}}\frac{\ln^k(1+mz)}{m^k k!}. \tag{7.4}$$

(A folytonos tárgyalás kedvéért a fejezet bizonyításait a végére hagytuk.)

Mivel az általános másodfajú Stirling-típusú szám $S(n,k,\alpha,\beta,r)$ exponenciális generátorfüggvénye [35]

$$\frac{(1+\alpha z)^{\frac{r}{\alpha}}}{k!}\left(\frac{(1+\alpha z)^{\frac{\beta}{\alpha}}-1}{\beta}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k;\alpha,\beta,r)\frac{z^n}{n!},$$

láthatjuk, hogy

$$W_{m,r}(n,k) = S(n,k;0+,m,r), \quad w_{m,r}(n,k) = S(n,k;m,0+,-r).$$

Alkalmazva Hsu és Shiue eredményeit [35], és Benoumhani Whitney számokra vonatkozó bizonyításainak menetét [5], az r-Whitney számokra egy sor azonosság – köztük talán a leglényegesebb a rekurzió –

nyerhető:

$$
\begin{aligned}
w_{m,r}(n,k) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} m^{i-k} r^{n-i} S^2(i,k),\\
W_{m,r}(n,k) &= \frac{1}{m^k k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-j} (mj+r)^n,\\
w_{m,r}(n,k) &= w_{m,r}(n-1,k-1) + (m-nm-r) w_{m,r}(n-1,k),\\
W_{m,r}(n,k) &= W_{m,r}(n-1,k-1) + (km+r) W_{m,r}(n-1,k),\\
\delta_{m,p} &= \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k) W_{m,r}(k,p).
\end{aligned}
$$

Végül definiáljuk a *Bernoulli polinomok*at az exponenciális generátorfüggvényeiken keresztül:

$$\frac{ze^{zx}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

Ezek rendkívül fontosak a matematikában, de azon kívül is. A $B_n = B_n(0)$ számokat *Bernoulli számok*nak nevezik. (A Bell számokat is így jelöltük. Azonban a kettőt nem lehet összekeverni, mert utóbbiakat már nem használjuk.)

7.2. Az r-Whitney számok alkalmazásai

Az újonnan definiált r-Whitney számok a Bernoulli polnomokkal szoros kapcsolatba hozhatók.

7.2.1. Tétel. *A Bernoulli számokra és -polinomokra*

$$
\begin{aligned}
\binom{n+1}{l} B_{n-l+1} &= \frac{n+1}{m^{n-l+1}} \sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k) \frac{w_{m,r}(k+1,l)}{k+1}, \qquad (7.5)\\
\binom{n+1}{l} B_{n-l+1}\left(\frac{r}{m}\right) &= \frac{n+1}{m^p} \sum_{k=0}^{n} m^k W_{m,r}(n,k) \frac{1}{k+1} \begin{bmatrix} k+1 \\ l \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Figyeljük meg, hogy r és m az első egyenlőségben csak a jobb oldalon szerepel.

Megjegyezzük, hogy ezek a képletek visszaadják a klasszikus

$$\binom{n+1}{l}B_{n-l+1} = (n+1)\sum_{k=0}^{n} S^2(n,k)\frac{1}{k+1}\left[{k+1 \atop l}\right]$$

formulát (l. [30]) ha $m = 1$ és $r = 0$. A bizonyítást a többivel együtt – mint már szó volt róla – a fejezet végére tettük.

Egy másik alkalmazás is adható az r-Whitney számokra. Ehhez bevezetjük a $H_n(z)$ *harmonikus polinomok*at, melyeket G-S. Cheon és M. E. A. El-Mikkawy [17] tárgyalt először 2008-ban[3]. A

$$H(n,r) = \sum_{1\le n_0+n_1+\cdots+n_r\le n} \frac{1}{n_0 n_1 \cdots n_r} \quad (n \ge 1,\ r \ge 0)$$

számokat *általánosított harmonikus számok*nak nevezzük és ezekkel definiáljuk a harmonikus polinomokat:

$$H_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k H(n+1,k)}{k!} z^k.$$

Generátorfüggvényük:

$$\frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)^{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z)x^n.$$

Az elsőfajú r-Whitney számok lehetőséget adnak arra, hogy egy új előállítását adjuk ezeknek a polinomoknak:

7.2.2. Állítás. *A harmonikus polinomokra*

$$H_{n-1}\left(1 - \frac{r}{m}\right) = \frac{1}{m^{n-1}n!}|w_{m,r}(n,1)|.$$

[3] A fejezetben hivatkozott cikkek 2008-as ill. 2001-es keltezésüek, amiből az látszik, hogy a tárgyalt eredmények kapcsolódnak a legújabb kutatásokhoz.

Mivel

$$\begin{aligned} H_{n-1}(0) &= H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ H_{n-1}(1-r) &= H_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r-1}(H_{n+r-1} - H_{r-1}) = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n+r \\ r+1 \end{bmatrix}_r, \end{aligned}$$

a mi formulánk általánosabb (csak helyettesítsünk $r = m = 1$ értékeket, ám ebben az esetben az n és k indexek el vannak tolva: $|w_{1,1}(n,k)| = \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix}\right]$).

Megéri bevezetni a

(7.6)
$$H_{n,m}^{(r)} = \frac{1}{m^{n-1}n!}|w_{m,r}(n,1)|.$$

jelölést. (Az elsőfajú r-Whitney számok előjeles számok.) Ezzel is mutatjuk, hogy a hiperharmonikus számok egy általánosításáról van szó.

Bebizonyítjuk, hogy

(7.7)
$$H_{n,m}^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{\frac{r}{m} - 1 + n - k}{n-k}\frac{1}{k}.$$

Mivel harmonikus polinomokra hasonló lett bizonyítva [17]:

$$H_{n-1}(1-m) = \sum_{k=1}^{n} \binom{m - 1 + n - k}{n-k}\frac{1}{k},$$

és hiperharmonikus számokra [7, 47]

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{r - 1 + n - k}{n-k}\frac{1}{k},$$

világos, hogy újonnan bevezetett $H_{n,m}^{(r)}$ számaink a harmonikus polinomok racionális argumentumokra, valamint a hiperharmonikusok általánosítása racionális r rendre:

(7.8)
$$H_{n-1}\left(1 - \frac{r}{m}\right) = H_{n,m}^{(r)}, \quad H_n^{\left(\frac{r}{m}\right)} = H_{n,m}^{(r)}.$$

7.3. Bizonyítások

Legelőször az r-Whitney számok exponenciális generátorfüggvényét adjuk meg.

Szorozzuk be (7.1) mindkét oldalát $\frac{z^n}{n!}$-sal és összegezzünk n-re:

$$e^{(mx+r)z} = \sum_{k=0}^{n} m^k x^{\underline{k}} \sum_{n=k}^{\infty} W_{m,r}(n,k)\frac{z^n}{n!}.$$

Másfelől,

$$e^{(mx+r)z} = e^{rz}(e^{mz}-1+1)^x = e^{rz}\sum_{k=0}^{\infty} x^{\underline{k}}\frac{(e^{mz}-1)^k}{k!}.$$

Az $x^{\underline{k}}$ csökkenő faktoriálisok együtthatóit összehasonlítva készen vagyunk.

(7.2) alapján

(7.9)

$$m^n\left(\frac{x-r}{m}\right)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)x^k.$$

Ismét szorozzunk be $\frac{z^n}{n!}$-sal és összegezzünk:

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^n\left(\frac{x-r}{m}\right)^{\underline{n}}\frac{z^n}{n!} = (1+mz)^{\frac{x-r}{m}} = (1+mz)^{\frac{-r}{m}}\exp(\frac{x}{m}\ln(1+mz)) =$$

$$= (1+mz)^{\frac{-r}{m}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k\ln^k(1+mz)}{m^k k!},$$

(7.9) jobb oldalára

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)x^k\right)\frac{z^n}{n!}.$$

x^k együtthatói szolgáltatják a (7.4) képletet.

(7.5) bizonyításához

$$\sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)\frac{w_{m,r}(k+1,l)}{k+1}$$

összegnek mint n sorozatának generátorfüggvényét számítjuk ki. (7.4) miatt könnyű látni, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_{m,r}(k+1,l)}{k+1}\frac{z^k}{k!} = \frac{1}{z}(1+mz)^{-\frac{r}{m}}\frac{\ln^l(1+mz)}{m^l l!}.$$

Ennélfogva

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} W_{m,r}(n,k)\frac{w_{m,r}(k+1,l)}{k+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w_{m,r}(k+1,l)}{k+1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} W_{m,r}(n,k)\frac{z^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{w_{m,r}(k+1,l)}{k+1}\frac{e^{rz}}{k!}\left(\frac{e^{mz}-1}{m}\right)^k = \frac{m}{e^{mz}-1}\frac{z^l}{l!} = \frac{z^{l-1}}{l!}\frac{mz}{e^{mz}-1}$$

$$= \frac{z^{l-1}}{l!}\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{(mz)^n}{n!} = \sum_{n=l-1}^{\infty} B_{n-l+1}m^{n-l+1}\frac{z^n}{l!(n-l+1)!}$$

$$= \sum_{n=l-1}^{\infty}\binom{n+1}{l}B_{n-l+1}\frac{m^{n-l+1}}{n+1}\frac{z^n}{n!}.$$

Ez bizonyítja a Bernoulli számok előállítására vonatkozó tételünk első azonosságát. A második, polinomokra vonatkozó azonosság bizonyítása lényegében ugyanígy történik.

Végül foglalkozzunk a (7.7) formulánkkal. $H_{n,m}^{(r)}$ generátorfüggvénye – amint (7.4) és (7.6) alapján látszik –

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n,m}^{(r)} z^n = \frac{-\ln(1-z)}{(1-z)^{\frac{r}{m}}}.$$

Ez rögtön mutatja (7.8) alatti egyenlőségeinket és ezzel implikálja a (7.7) előállítást is.

Summary/Összefoglaló

Summary

A generalization of Stirling and Bell numbers

The main subject of this dissertation belongs to the theory of enumerative combinatorics. More exactly, we deal with the ways of generalizations of some known combinatorial numbers.

The Stirling number of the first kind with parameters n and k gives the number of permutations on n letters with exactly k cycles. These numbers are denoted by $\left[{n \atop k}\right]$.

Similarly, the Stirling number of the second kind with parameters n and k enumerates the number of partitions of n elements with k groups or blocks. The notation for these numbers is $\left\{{n \atop k}\right\}$.

These notions are very well known and their theory is fully developed. But there exists a modification of them, which seems to be relatively new. Namely, one can introduce a new parameter r. The r-Stirling number of the first kind with parameters n, k gives the number of permutations on n letters with k cycles such that the first r elements are in distinct cycles. The definition of the second kind case is similar. Sometimes we call these r elements as marked elements.

If we sum over the parameter k (while n is fixed), we get a new sequence. It's elements are called Bell numbers and denoted by B_n. A more general notion is the Bell polynomial:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k.$$

The combinatorial meaning of the Bell numbers $B_n = B_n(1)$ is obvious. Of course, one may consider the case when $r > 1$. In this case we get the so-called $B_{n,r}$ r-Bell numbers. Hence $B_{n,r}$ gives the number of partitions on n elements when the marked ones are in distint blocks. (Since $n \geq r$, we consider $n+r$ elements instead of n elements.)

The first chapter of the thesis contains the systematic description of the r-Bell numbers and polynomials. For example, a power series with general term $B_n(x)/n!$ (also known as exponential generating function) is

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,r}(x)\frac{z^n}{n!} = e^{x(e^z-1)+rz}.$$

The r-Bell polynomials can be expressed with the ordinal ones as

$$B_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} r^k \binom{n}{k} B_{n-k}(x).$$

Two additional recursion are also given:

$$\begin{aligned} B_{n,r}(x) &= x\left(\frac{d}{dx}B_{n-1,r}(x) + B_{n-1,r}(x)\right) + rB_{n-1,r}(x), \\ e^x x^r B_{n,r}(x) &= x\frac{d}{dx}\left(e^x x^r B_{n-1,r}(x)\right). \end{aligned}$$

Moreover, the next identities are verified:

$$\begin{aligned} B_{n,r} &= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+r)^n}{k!}, \\ B_{n,r} &= \frac{2n!}{\pi e}\,\mathrm{Im}\int_0^{\pi} e^{e^{e^{i\theta}}} e^{re^{i\theta}} \sin(n\theta)d\theta. \end{aligned}$$

A generalization of the Fubini and Euler numbers

When a partition is constructed, one may consider the order of the blocks. If the restriction on the marked elements is eliminated, we get the classical notion of Fubini numbers, denoted as F_n:

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} k!\left\{ {n \atop k} \right\}.$$

In the case when the parameter r is involved, an unrevealed notion appears. We gave the name r-Fubini numbers to these sequences.

Our goal was to phrase and derive the well known identities and other results on Fubini numbers with respect to r-Fubini numbers.

One of the most interesting result is the connection of Fubini numbers and the Eulerian numbers:

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle 2^k.$$

In short, the Eulerian number $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ with parameters n and k counts the permutations on n letters in which exactly k elements are greater than the previous element ("ascent"). We used a combination lock game to conjecture the proper definition of the r-Eulerian numbers. This is the following.

Definition: The r-Eulerian number with parameters n, k, denoted by $\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r$, counts the permutations on n letters in which there are k ascents such that in the ascents there is at most one marked element.

We proved the next identity:

$$F_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r 2^k.$$

There is a number of identities with respect to these numbers in Chapter 3.

Unimodality

A sequence is called unimodal, if it increases and the decreases. Often hard to prove this simple property. We deduced that even a stronger property also holds for r-Stirling numbers. Our theorem is as follows.

Theorem: There is an index $K^1_{n,r}$, depending on n and r, for which

$$\cdots < \left[{n \atop K^1_{n,r} - 1} \right]_r \leq \left[{n \atop K^1_{n,r}} \right]_r > \left[{n \atop K^1_{n,r} + 1} \right]_r > \cdots .$$

Moreover, this index can be estimated as

$$K^1_{n,r} = r + \left[\log \left(\frac{n-1}{r-1} \right) - \frac{1}{r} + o(1) \right].$$

Theorem: The r-Stirling numbers are also unimodal with at most two maxima, and the least maximum can be approximated by

$$\begin{aligned} K_{n,r}^2 &< \frac{n-r}{\log(n-r)-\log\log(n-r)} \quad (n \geq r+3), \\ \frac{n-r}{\log(n-r)} &< K_{n,r}^2 \qquad (n \geq r+\max\{18, \log 2/\log(1+1/r)\}). \end{aligned}$$

In the fifth chapter we ran on the next series formed by r-Stirling numbers.

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k+r \\ m+r \end{bmatrix}_r \frac{z^n}{n^q n!}, \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+k+r \\ m+r \end{Bmatrix}_r \frac{z^n}{n^q n!}, \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+k \\ m \end{Bmatrix}_r \frac{z^n}{n^q}. \end{aligned}$$

The recursions and explicit expressions are relatively complicated, so we cite only the results with some special parameters.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+r \\ r+1 \end{bmatrix}_r \frac{z^n}{n^q n!}.$$

It is known that for this special case, the r-Stirling numbers of the first kind give back the so-called hyperharmonic numbers. Now we define them.

$$\begin{aligned} H_n &= 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, \\ H_n^2 &= H_1+H_2+\cdots+H_n, \\ H_n^3 &= H_1^2+H_2^2+\cdots+H_n^2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

In the first line there is the nth harmonic number, while in the other lines there are the hyperharmonic numbers of order one, two, three... To go back to the former considerations, we cite a known result

$$H_n^r = \frac{1}{n!}\left[\begin{matrix} n+r \\ r+1 \end{matrix}\right]_r.$$

Thanks to this identity, our series has a more readable form:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^r}{n^m}$$

We need also the hypergeometric function:

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_q \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)^{\overline{k}}(a_2)^{\overline{k}}\cdots(a_p)^{\overline{k}}}{(b_1)^{\overline{k}}(b_2)^{\overline{k}}\cdots(b_q)^{\overline{k}}} \frac{x^k}{k!},$$

where $(a)^{\overline{k}} = a(a+1)\cdots(a+k)$ is the Pochhammer-symbol. We introduce the abbreviation

$$S(r,m) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n^m} \quad (m > r),$$

and

$$B(k,m) := {}_{m+1}F_m\left(\begin{matrix} 1, & 1, & \ldots, & 1, & k+1 \\ 2, & 2, & \ldots, & 2 & \end{matrix} \middle| 1\right).$$

With these we win the next

Theorem: Suppose that $r \geq 2$ and $m \geq r+1$, then

$$S(r,m) = S(1,m) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k}\left[S(k,m-1) - B(k,m)\right].$$

As a corollary of the results in the cited chapter, we have calculated that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} n+2 \\ 4 \end{matrix}\right]_2 \frac{1}{2^n n n!} = \frac{1}{8}\zeta(3) + \ln^2(2) - 2\ln(2) + 1 \approx 0.244416.$$

Here ζ is the Riemann function.

Without the sake of completeness, we cite some results with respect to the hyperharmonic numbers. For example, we pointed out that

$$H_n^{(2)} = \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k(k-1)}.$$

Similarly,

$$H_n^{(3)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} H_2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{2!(-1)^{k+1}}{k(k-1)(k-2)},$$

$$H_n^{(4)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} H_2^{(2)} + \binom{n}{3} H_3 + \sum_{k=4}^{n} \binom{n}{k} \frac{3!(-1)^k}{k(k-1)(k-2)(k-3)},$$

and so on. Introducing the hyperharmonic numbers of negative order (that is, when $r < 0$ in $H_n^{(r)}$), the identities above can be compressed in the compact form

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} H_k^{(-r+1)}.$$

As a further result, we generalized Gosper's theorem

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{t^n}{n!} = e^t t\, {}_2F_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ 2 & 2 & -t \end{array} \right).$$

to the case when in the nominator there are hyperharmonic numbers.

Theorem: For all $r = 1, 2, \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} =$$

$$e^t \left[\sum_{n=1}^{r-1} H_n^{(r-n)} \frac{t^n}{n!} + \frac{(r-1)!}{(r!)^2} t^r {}_2F_2 \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ r+1 & r+1 & -t \end{array} \right) \right].$$

In the last chapter we give a new formula for the very old Bernoulli polynomials. To do this, we find a common generalization of the r-Stirling and Whitney numbers (latter appears in the theory of geometric lattices). We enforce the next two polynomials to be equal.

$$\begin{aligned}(mx+r)^n &= \sum_{k=0}^{n} m^k W_{m,r}(n,k) x^{\underline{k}}\\ m^n x(x-1)\cdots(x-n+1) &= \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)(mx+r)^k.\end{aligned}$$

(These formulae really define the numbers $W_{m,r}(n,k)$ and $w_{m,r}(n,k)$ uniquely as the coefficients of the polynomials above.) The Bernoulli polynomials are determined by their generating function

$$\frac{ze^{zx}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!},$$

and we can express them with our numbers as

$$\binom{n+1}{l} B_{n-l+1}\left(\frac{r}{m}\right) = \frac{n+1}{m^p}\sum_{k=0}^{n} m^k W_{m,r}(n,k)\frac{1}{k+1}\begin{bmatrix}k+1\\ l\end{bmatrix}.$$

Összefoglaló

A Stirling- és Bell számok általánosításai

A disszertáció tárgyát a matematika „enumeratív kombinatorika” nevű ágának Stirling számok néven ismert fogalma – pontosabban ezek általánosítása – képezi.

Az elsőfajú, n és k paraméterű Stirling szám megadja, hogy hány olyan permutációja van n elemnek, mely k ciklusból áll. Ciklus alatt olyan sorrendcserét értünk, amikor valamely elemhez egy másik, ahhoz egy harmadik, s.í.t., végül az utolsóhoz a kiinduló elem rendelődik. Ezen számokat $\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix}$ módon jelölik.

A másodfajú, n és k paraméterű Stirling szám azt adja meg, hogy n elemet hányféleképpen lehet k csoportba (blokkba) foglalni. Ezekre a számokra az $\left\{ {n \atop k} \right\}$ jelölés eléggé elterjedt.

Ezen fogalmak régről ismertek és elméletük jól kidolgozott. Azonban létezik egy olyan módosításuk, melyről ugyanez egyáltalán nem mondható el. Nevezetesen, egy új, tipikusan r-rel jelölt paramétert is bevezetünk és ezzel az előbbi meghatározásokat a következőképpen módosítjuk.

Az n és k paraméterű elsőfajú r-Stirling szám n elem azon permutációit számlálja, melyekben r darab, meghatározott és rögzített elem *különböző* ciklusokban van. Hasonlóan módosul a másodfajú Stirling számok definíciója. Most is és a permutációknál is az általánosság csorbítása nélkül feltehető, hogy ez az r elem az első r elemet jelenti.

A kifejezésmód színesítése kedvéért az elsőfajú Stirling számokat ciklikus számoknak, míg a másodfajúakat partíciós számoknak is fogjuk nevezni.

Új, a kombinatorikában igen sok helyen előforduló számsorozatot kapunk, ha a partíciós számokat rögzített n mellett $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ értékekre összegezzük. Az így kapott sorozat elemeit Bell számoknak nevezik és B_n-nel jelölik. Ezek kombinatorikai jelentése a fentiek fényében világos. Természetesen megtehető, hogy az r paramétert is figyelembe vesszük egy ilyen sorozat képzésénél. Ekkor az ún. $B_{n,r}$ r-Bell számokat kapjuk. Az n-edik r-Bell szám tehát megadja, hogy hányféleképpen lehet n elemet úgy csoportokra bontani, hogy az első r elem különböző csoportokba kerüljön. (Ilyenkor természetesen $n \geq r$, ami miatt inkább $n + r$ elemet tekintünk, emlékeztetve arra, hogy van elkülönülve r „kitüntetett” elem.) Az értekezés első fejezetét az r-Bell számok tulajdonságainak leírása teszi ki. Többek között az alábbi előállítások adhatók:

$$
\begin{aligned}
B_{n,r} &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+r)^n}{k!}, \\
B_{n,r} &= \frac{2n!}{\pi e} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} e^{e^{e^{i\theta}}} e^{re^{i\theta}} \sin(n\theta) d\theta.
\end{aligned}
$$

A Fubini- és Euler számok általánosításai

Ezt követően n elem csoportokra bontásánál azt is tekintetbe veszszük, hogy az egyes csoportok milyen sorrendben jelennek meg. Ha az r paramétert – és az ezzel járó plusz megkötést – nem figyeljük, klasszikus fogalomhoz jutunk, az ún. Fubini számokhoz:

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} k! \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

Ha azonban feltesszük, hogy a csoportba sorolásnál az r megadott elem közül semelyik kettő nem kerülhet közös csoportba, akkor eleddig még feltáratlan fogalomhoz, az általunk r-Fubini számoknak nevezett sorozathoz jutunk.

Az r-Fubini számok kapcsán az volt a fő cél, hogy a hagyományos Fubini számokra ismert eredményeket megfogalmazzuk $r > 0$ esetben is. Az egyik legfontosabb ilyen ezen számok és az ún. Euler számok közötti kapcsolat:

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle 2^k.$$

Röviden, az n és k paraméterű $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ Euler számok azon permutációkat számlálják össze n elem esetén, melyekben k-szor fordul elő, hogy két szomszédos szám közül a kisebbhez kisebbet rendel, mint a nagyobbikhoz. Egy kombinációs-zár konstrukciót hívtunk segítségül az $r > 0$ esetben érvényes definíció „megsejtéséhez". Ez a következő:

Definíció: Az n, k paraméterű r-Euler szám n elem azon permutációit számolja, melyekben k-szor fordul elő, hogy két szomszédos szám közül a kisebbhez kisebbet rendel, mint a nagyobbikhoz, *és a hozzárendelt számok között legfeljebb egy kitüntetett van az r-ből.* Az r-Euler számokat $\left\langle {n \atop k} \right\rangle_r$ módon jelöljük.

Ezzel a következő azonosságot láttuk be, ismét csak a kombinációs-zár játékkal:

$$F_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} \left\langle {n \atop k} \right\rangle_r 2^k.$$

További azonosságok sorozata szerepel ezekre a számokra vonatkozóan a disszertáció 3. fejezetében.

Unimodalitás

Egy sorozatot unimodálisnak nevezünk, ha növekszik, majd csökken. Ez az egyszerű tulajdonság gyakran csak igen nehézkesen bizonyítható. Ezt a tulajdonságot – sőt erősebbet, az ún. szigorú log-konkavitást – bizonyítottuk az r-Stirling számokra. Egyik tételünk a következő:

Tétel: Az elsőfajú r-Stirling számokra létezik olyan n-től és r-től függő $K^1_{n,r}$ index, melyre

$$\cdots < \left[{n \atop K^1_{n,r}-1}\right]_r \leq \left[{n \atop K^1_{n,r}}\right]_r > \left[{n \atop K^1_{n,r}+1}\right]_r > \cdots .$$

Továbbá ez az index nagyságrendileg:

$$K^1_{n,r} = r + \left[\log\left(\frac{n-1}{r-1}\right) - \frac{1}{r} + o(1)\right].$$

Tétel: A másodfajú r-Stirlingek is unimodálisak legfeljebb két maximumhellyel, melyek közül a kisebbikre

$$\begin{aligned} K^2_{n,r} &< \frac{n-r}{\log(n-r) - \log\log(n-r)} \qquad (n \geq r+3), \\ \frac{n-r}{\log(n-r)} &< K^2_{n,r} \qquad (n \geq r + \max\{18, \log 2/\log(1+1/r)\}) . \end{aligned}$$

Végtelen összegek

A dolgozat ötödik fejezetében az r-Stirling számokból képzett, következő alakú végtelen összegeket vizsgáltuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k+r \\ m+r \end{bmatrix}_r \frac{z^n}{n^q n!},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+k+r \\ m+r \end{Bmatrix}_r \frac{z^n}{n^q n!},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} n+k \\ m \end{Bmatrix}_r \frac{z^n}{n^q}.$$

A talált rekurziós vagy explicit képletek relatíve komplikáltak és hosszadalmasak, ezért csak egy egészen speciális paraméterre vonatkozót mutatunk be, nevezetesen az első sorban található összeget, melyben $k = 0, m = 1$. Mint az látható, ekkor a következő adódik:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+r \\ r+1 \end{bmatrix}_r \frac{z^n}{n^q n!}.$$

Ismeretes, hogy erre a speciális paraméterezésre az elsőfajú r-Stirling számok az ún. hiperharmonikus számokat adják. Most ezeket definiáljuk.

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \\ H_n^{(2)} &= H_1 + H_2 + \cdots + H_n, \\ H_n^{(3)} &= H_1^{(2)} + H_2^{(2)} + \cdots + H_n^{(2)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Az első sor a „klasszikus” harmonikus számok esete, a további sorokban levő számokat adott rendű hiperharmonikus számoknak nevezzük. Visszatérve a fentiekre, megmutatható, hogy

$$H_n^{(r)} = \frac{1}{n!} \begin{bmatrix} n+r \\ r+1 \end{bmatrix}_r.$$

Ennek az eredménynek köszönhetően összegünk a sokkal áttekinthetőbb

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n^m}$$

formára hozható. Ahhoz hogy legalább ennek az összegzését megmutathassuk, be kell még vezetnünk a hipergeometrikus függvényt:

$$ {}_pF_q\left(\begin{array}{cccc} a_1, & a_2, & \ldots, & a_p \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_q \end{array} \middle| \, x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)^{\overline{k}}(a_2)^{\overline{k}} \cdots (a_p)^{\overline{k}}}{(b_1)^{\overline{k}}(b_2)^{\overline{k}} \cdots (b_q)^{\overline{k}}} \frac{x^k}{k!}, $$

ahol $(a)^{\overline{k}} = a(a+1)\cdots(a+k)$ a Pochhammer-szimbólumnak nevezett mennyiség. Ha még bevezetjük az

$$ S(r,m) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(r)}}{n^m} \quad (m > r), $$

és

$$ B(k,m) := {}_{m+1}F_m\left(\begin{array}{ccccc} 1, & 1, & \ldots, & 1, & k+1 \\ 2, & 2, & \ldots, & 2 & \end{array} \middle| \, 1 \right). $$

rövidítéseket, akkor nyerjük a következőt:

Tétel: Ha $r \geq 2$ és $m \geq r+1$, akkor

$$ S(r,m) = S(1,m) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{1}{k} \left[S(k, m-1) - B(k,m) \right]. $$

A fejezet eredményei közül bemutatunk még egy következményként kapott összeget:

$$ \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+2 \\ 4 \end{bmatrix}_2 \frac{1}{2^n n n!} = \frac{1}{8}\zeta(3) + \ln^2(2) - 2\ln(2) + 1 \approx 0.244416. $$

Itt ζ az ún. Riemann-féle függvény.

A későbbiekben speciálisan a hiperharmonikus számokra vonatkozó eredményeket idézünk, a teljesség igénye nélkül. Bebizonyítottuk például, hogy

$$ H_n^{(2)} = \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k(k-1)}. $$

Hasonlóan,

$$ H_n^{(3)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} H_2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \frac{2!(-1)^{k+1}}{k(k-1)(k-2)}, $$

$$H_n^{(4)} = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} H_2^{(2)} + \binom{n}{3} H_3 + \sum_{k=4}^{n} \binom{n}{k} \frac{3!(-1)^k}{k(k-1)(k-2)(k-3)},$$

s.í.t. A negatív rendű hiperharmonikusok bevezetésével (mikor $H_n^{(r)}$-ben $r < 0$) a

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} H_k^{(-r+1)}$$

képlet a fenti egyenlőségeket egyszerű formájúra transzformálja.

Egy további eredményként a régebbről ismert

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n \frac{t^n}{n!} = e^t t \, {}_2F_2 \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \middle| -t \right).$$

tételt általánosítottuk arra az esetre, amikor a számlálóban a hiperharmonikus számok szerepelnek.

Tétel: Minden $r = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(r)} \frac{t^n}{n!} =$$

$$e^t \left[\sum_{n=1}^{r-1} H_n^{(r-n)} \frac{t^n}{n!} + \frac{(r-1)!}{(r!)^2} t^r {}_2F_2 \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ r+1 & r+1 \end{array} \middle| -t \right) \right].$$

Az utolsó fejezetben a több száz éve felfedezett Bernoulli polinomokra adunk új formulát azzal, hogy az r-Stirling és ún. Whitney számok közös általánosítását adjuk. Ezt a következőképpen tesszük: két polinomról „kikényszerítjük”, hogy egyenlőek legyenek, amivel az együtthatóikat egyértelműsítjük. Ezek a polinomok

$$\begin{aligned} (mx+r)^n &= \sum_{k=0}^{n} m^k W_{m,r}(n,k) x^{\underline{k}} \\ m^n x(x-1)\cdots(x-n+1) &= \sum_{k=0}^{n} w_{m,r}(n,k)(mx+r)^k. \end{aligned}$$

(A képletek tényleg egyértelműen definiálják a $W_{m,r}(n,k)$ és $w_{m,r}(n,k)$ számokat, mint polinomok együtthatóit. A dolgozatban ezen számokat

r-Whitney számoknak nevezzük, hogy a két eredeti szám – r-Stirling és Whitney – nevét ötvözzük, innen a W és w jelölés.) Ezekkel tehát a

$$\frac{ze^{zx}}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{z^n}{n!}$$

módon definiált $B_n(x)$ polinomokat előállíthatjuk a

$$\binom{n+1}{l}B_{n-l+1}\left(\frac{r}{m}\right)=\frac{n+1}{m^p}\sum_{k=0}^{n}m^kW_{m,r}(n,k)\frac{1}{k+1}\left[{k+1 \atop l}\right]$$

módon.

Irodalomjegyzék

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun (editors), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover, New York, 1972.

[2] M. Aigner, A characterization of the Bell numbers, *Disc. Math.* 205 (1999), 207-210.

[3] H. W. Becker and D. H. Browne, Problem E461 and solution, *Amer. Math. Monthly* 48 (1941), 701-703.

[4] E. A. Bender, Central and local limit theorems applied to asymptotic enumeration, *J. Combin. Theory Ser. A* 15 (1973), 91-111.

[5] M. Benoumhani, On Whitney numbers of Dowling lattices, *Disc. Math.* 159 (1996), 13-33.

[6] M. Bóna, Partitions with no singleton blocks and real zeros (kézirat).

[7] A. T. Benjamin, D. Gaebler and R. Gaebler, A combinatorial approach to hyperharmonic numbers, *INTEGERS: The Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, Vol 3 (2003), p. 1-9, #A15.

[8] P. Blasiak, K. A. Penson, G. Duchamp, A. Horzela, A. I. Solomon, Hierarchical Dobiński-type relations via substitution and the moment problem, *J.Phys. A: Math.Gen.* 37 (2004), 3475-3487.

[9] D. Borwein, J. M. Borwein, On an intriguing integral and some series related to $\zeta(4)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 123 (1995), 1191-1198.

[10] A. Z. Broder The r-Stirling numbers, *Disc. Math.* 49 (1984), 241-259.

[11] D. Callan, Cesaro's integral formula for the Bell numbers. A szerző kézirata online elérhető a következő internetcímen: http:// www. stat. wisc.edu/˜callan/notes/

[12] E. R. Canfield, C. Pomerance, On the problem of uniqueness for the maximum Stirling number(s) of the second kind, *Integers* 2, Paper A01 (2002).

[13] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind – I, *Fibonacci Quart.* 18 (1980), 147-162.

[14] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind – II, *Fibonacci Quart.* 18 (1980), 242-257.

[15] M. E. Cesàro, Sur une équation aux différences melées, *Nouv. Ann. Math.* 4 (1885), 36-40.

[16] Ch. A. Charalambides, Combinatorial methods in discrete distributions, John Wiley & Sons, New Jersey, 2005.

[17] G-S. Cheon, M. E. A. El-Mikkawy, Generalized harmonic numbers with Riordan arrays, *J. Number Theory* 128(2) (2008), 413-425.

[18] S. Chowla, and M. B. Nathanson, Mellin's formula and some combinatorial identities, *Monat. Math.* 81 (1976), 261-265.

[19] J. H. Conway and R. K. Guy, The book of numbers, Springer-Verlag, New York, 1996.

[20] L. Comtet, Advanced Combinatorics, D. Reidel, Boston, 1974.

[21] C. B. Corcino, An asymptotic formula for the r-Bell numbers, *Matimyás Mat.* 24 (2001), 9-18.

[22] J. N. Darroch, On the distribution of the number of successes in independent trials, *Ann. Math. Stat.* 35 (1964), 1317-1321.

[23] A. Dil, V. Kurt, M. Cenkci, Algorithms for Bernoulli and Allied Polynomials, *J. Integer Seq.* 10 (2007) Article 07.5.4.

[24] G. Dobiński, Summirung der Reihe $\sum n^m/n!$ für $m = 1, 2, 3, \ldots$ *Grunert Archiv (Arch. für Mat. und Physik)* 61 (1877), 333-336.

[25] A. J. Dobson, A note on Stirling numbers of the second kind, *J. Combin. Theory* 5 (1968), 212-214.

[26] P. J. de Doelder, On some series containing $\Psi(x) - \Psi(y)$ and $(\Psi(x) - \Psi(y))^2$ for certain values of x and y, *J. Comp. Appl. Math.* 37 (1991), 125-141.

[27] D. Dumont, Matrices d'Euler-Seidel, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 1981, B05c.

[28] P. Erdős, On a conjecture of Hammersley, *J. London Math. Soc.* 28 (1953), 232-236.

[29] L. Euler, De transformatione serierum, *Opera Omnia*, series prima, Vol. X, Teubner, 1913.

[30] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, Concrete Mathematics, Addison Wesley, 1994.

[31] O. A. Gross, Preferential arrangements, *Amer. Math. Monthly* 69 (1962), 4-8.

[32] J. Guillera, J. Sondow, Double integrals and infinite products for some classical constants via analytic continuations of Lerch's transcendent, *Ramanujan J.* 16(3) (2008), 247-270.

[33] J. M. Hammersley, The sums of products of the natural numbers, *Proc. London Math. Soc.* 3(1) (1951), 435-452.

[34] L. H. Harper, Stirling behavior is asymptotically normal, *Ann. Math. Stat.* 38 (1967), 410-414.

[35] L. C. Hsu, P. J-S. Shiue, A unified approach to generalized Stirling numbers, *Adv. Appl. Math.* 20 (1998), 366-384.

[36] R. D. James, The factors of a square-free integer, *Canad. Math. Bull.* 11 (1968), 733-735.

[37] K. S. Kölbig, *Nielsen's generalized polylogarithms*, *SIAM J. Math. Anal.* 17(5), 1232-1256.

[38] K. S. Kölbig, On Nielsen's generalized polylogarithms and their numerical calculation, *BIT Numerical Mathematics* 10(1) (1970), 38-73.

[39] M. Koutras, Non-central Stirling numbers and some applications, Disc. Math. 42 (1982), 73-89.

[40] J. W. Layman, The Hankel transform and some of its properties, *J. Integer Seq.* 4 (2001), Article 01.1.5.

[41] A. Lenard, In Fractal Music, Hypercards, and More Mathematical Recreations from Scientific American Magazine. (M. Gardner). W. H. Freeman, New York (1992), 35-36.

[42] L. Lewin, Dilogarithms and Associated Functions, Macdonald, London, 1958.

[43] E. H. Lieb, Concavity properties and a generating function for Stirling numbers, *J. Combin. Theory* 5 (1968), 203-206.

[44] L. L. Liu, and Y. Wang, On the log-convexity of combinatorial sequences *Adv. Appl. Math.* 39 (2007), 453-476.

[45] I. Mező, On the maximum of r-Stirling numbers, *Adv. Appl. Math.* 41 (2008), 293-306.

[46] I. Mező, A. Dil, Euler-Seidel method for certain combinatorial numbers and a new characterization of Fibonacci sequence, *Cent. Eur. J. Math.* 7(2) (2009), 310-321.

[47] A. Dil, I. Mező, A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers, *Appl. Math. Comput.* 206 (2008), 942-951.

[48] I. Mező, A. Dil, Hyperharmonic series involving Hurwitz zeta function, *J. Number Theory* 130(2) (2010), 360-369.

[49] I. Mező, New properties of r-Stirling series, *Acta Math. Hungar.* 119(4) (2008), 341-358.

[50] R. Mullin, On Rota's problem concerning partitions, *Aequationes Math.* 2 (1969), 98-104.

[51] N. Nielsen, Der Eulerische Dilogarithmus und seine Verallgemeinerungen, *Nova Acta Leopoldine*, 90 (1909), 123-211.

[52] N. Nielsen, Handbuch der Theorie des Gammafunktion, Chelsea, New York, Reprint (1966).

[53] J. Pitman, Some probabilistic aspects of set partitions *Amer. Math. Monthly* 104 (1997), 201-209.

[54] H. Prodinger, Ordered Fibonacci partitions, *Canadian Math. Bull.* 26 (1983), 312-316.

[55] J. Riordan, Inverse relations and combinatorial identities, *Amer. Math. Monthly* 71 (1964), 485-498.

[56] J. Riordan, Combinatorial identities, Wiley, New York, 1958.

[57] A. Rucinski, T. Luczak, S. Janson, Random Graphs vol. 2., John Wiley, New York, 1992, 215-231.

[58] L. Seidel, Über eine einfache Enstehung weise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen, *Sitzungsberichte der Münch. Akad. Math. Phys. Cl.* (1877), 157-187.

[59] R. Sprugnoli, Riordan arrays and combinatorial sums, *Disc. Math.* 132 (1994), 267-290.

[60] S. M. Tanny, On some numbers related to the Bell numbers, *Canad. Math. Bull.* 17 (1975), 733-738.

[61] D. J. Velleman, G. S. Call, Permutations and combination locks, *Math. Mag.* 68(4) (1995), 243-253.

[62] H. Wegner, Über das Maximum bei Stirlingschen Zahlen zweiter Art, *J. Reine Angew. Math.* 262/263 (1973), 134-143.

[63] H. Wegner, Stirling numbers of the second kind and Bonferroni's inequalities, *Elem. Math.* 60 (2005), 124-129.

[64] E. G. Whitehead, Stirling number identities from chromatic polynomials, *J. Combin. Theory Ser. A* 24 (1978), 314-317.

[65] H. S. Wilf, Generatingfunctionology, Academic Press, 1994.

[66] J. Worpitzky, Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, *J. Reine Angew. Math.* 94 (1883), 203-232.

A szerző publikációi[4]

1. Mező I., *Modulus of continuity and best approximation with respect to Vilenkin-like systems in some function spaces*, Georgian Math. J. 13(2) (2006), 315-332.

2. Mező I. és Simon P., *Integrals of weighted maximal kernels with respect to Vilenkin systems*, Publ. Math. Debrecen 71(1-2) (2007), 57-65.

3. Mező I., *Some inequalities for hyperharmonic series*, Advances in Inequalities for Special Functions, Nova Science Publishers, 121-125. (2006).

4. Mező I., *About the non-integer property of hyperharmonic numbers*, Annales Univ. Sci. Budapest 50 (2007), 1-8.

5. **Mező I., *New properties of r-Stirling series*, Acta Math. Hungar. 119(4) (2008), 341-358.**

6. **Mező, I., *On the maximum of r-Stirling numbers*, Adv. Appl. Math. 41 (2008), 293-306.**

7. **A. Dil és Mező I., *A Symmetric Algorithm for Hyperharmonic and Fibonacci Numbers*, Appl. Math. Comput. 206 (2008), 942-951.**

8. **Mező I. és A. Dil, *Euler-Seidel method for certain combinatorial numbers and a new characterization of Fibonacci sequence*, Cent. Eur. J. Math. 7(2) (2009), 310-321.**

9. Mező I. *Analytic extension of hyperharmonic numbers*, Online J. Anal. Comb. 4 (2009).

10. Mező I., *Several generating functions for second-order recurrence sequences*, J. Integer Seq. 12(3) (2009) Article 09.3.7.

[4]Félkövérrel szedve azok, melyekre a dolgozatban hivatkozás történt.

11. **Mező I. és A. Dil, *Hyperharmonic series involving Hurwitz zeta function*, J. Number Theory 130(2) (2010), 360-369.**

A szerző konferencia-előadásai

1. *Integrals of kernel functions on Vilenkin groups*, International Students' Conference on Analysis, 2008. február 3., Zamárdi.
2. *r-Stirling numbers, Whitney numbers and their common generalization*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 2008. szeptember 22., Anadia (Portugália).
3. *Harmonic numbers, their generalizations and the integer property*, Winter School on Explicit methods in Number Theory, 2009. január 28., Debrecen.
4. *Generating functions of powers of combinatorial sequences*, vendég-előadás, 2009. április 10., Antalya (Törökország).
5. *On the maximum of r-Stirling numbers and generalized Bell polynomials*, vendég-előadás, 2009. április 12., Antalya (Törökország).