

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

Szakdolgozat

Dinamikus eszközök használata a geometria oktatásban

készítette: Hellebrand Márk

Szerző neve : Hellebrand Márk

témavezető: dr. Kovács Zoltán

Debrecen, 2007

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindazoknak, akik lehetővé tették ezen szakdolgozat elkészítését. Külön köszönetet mondanék témavezetőmnek dr. Kovács Zoltánnak.

ELŐSZÓ

A szakdolgozat a Debreceni Egyetem Matematikai Intézet matematika-informatika tanár szakán készült annak reményében, hogy majd sok mindenkinek nyújt segítséget a későbbiekben. Témája bővebb értelemben az informatika és a matematika kapcsolata, szűkebben pedig az informatika felhasználásának lehetősége a matematikában ezen belül is a geometria oktatásában. Az elkészítés során fontos szempont volt, hogy csak olyan programok felhasználhatóságát illetve felhasználhatóságának lehetőségeit mutassa be illetve tárgyalja, mely minden diák, tanár vagy iskola számára elérhető és ingyenes.

A felhasznált programok közül néhány a dinamikus geometriai szoftverek családjába tartozik. Azon programok, melyek ebbe a családba tartoznak, röviden DGS programoknak is nevezik a szoftvercsalád nevének rövidítéséből adódóan. Az egyik ilyen program a *GeoGebra*, a másik pedig ennek egy speciálisabb változata a *GeoGebra Pre-Release* nevet viseli. Mind a két említett program – mint arra a nevük is utal – több területet foglalnak magukba. A nevekből lehet is következtetni a két fő felhasználhatósági területre. Az egyik a geometria – erre utal a névben a Geo rész –, a másik területe az algebra – erre utal a Gebra része a névnek.

Egy másik program a grafikus megoldást igénylő területen nyújthat és nyújt segítséget. Ennek a programnak is létezik ingyenesen használható verziója.

A dolgozat megpróbál segítséget nyújtani azoknak akik nehézségekkel küzdenek a pontos szerkesztésekkel, vagy csak szeretnének egy szerkesztés elvégzésének segítségével végtelen számú esetet vizsgálni, diszkussziót végezni. Ezen felül a dolgozat bemutat néhány olyan területet, ahol lehetőség mutatkozik az informatika és a matematika tanításában való alkalmazására.

1. DINAMIKUS GEOMETRIAI RENDSZEREK JELLEMZŐI

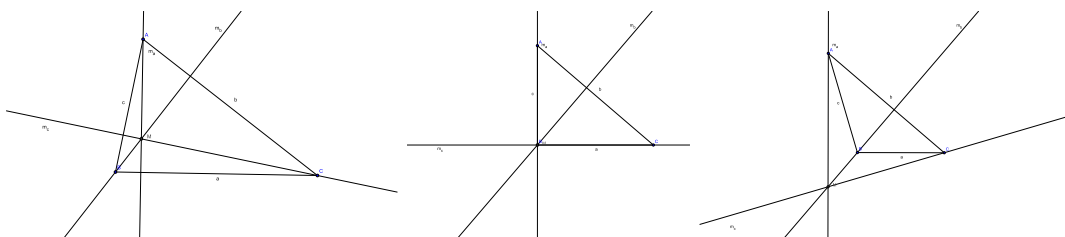
Az alábbiakban a dinamikus szerkesztőprogramok jellemző szolgáltatásainak leírása olvasható, amelyek nem kötődnek egyetlen programhoz sem. Természetesen az ismertetésre kerülő szolgáltatások közel sem jellemeznék teljes egészében egyetlen programot sem.

1.1. Interaktivitás

A geometriai szerkesztőprogramokban a szerkesztések pontokra épülnek fel. A programok kétféle pontot különböztetnek meg; bázispontokat, melyeket a síkon bárhol felvehetünk, valamint származtatott pontokat, melyek szerkesztések útján keletkeznek, így helyzetüket a korábban már felvett bázispontok, esetleg közvetlenül más származtatott pontok határozzák meg. Az interaktivitás azt jelenti, hogy a bázispontok a síkon szabadon megfoghatók, arrébb vihetők, a megszerkesztett ábra úgy változik, hogy az objektumok közti logikai kapcsolat megmarad. Az interaktivitás segítségével már akár általános iskolás csoportokban is lehetőség nyílik a háromszögek és egyéb síkidomok nevezetes pontjainak, vonalainak és köreinek közvetlen, tapasztalásokon alapuló tanulmányozására. Itt számos példát említhetnénk; a háromszög nevezetes vonalait, nevezetes köreinek középpontjait, valamint a háromszög nevezetes pontjait. A dinamikus rendszerek az interaktivitás révén jó szolgálatot tesznek a felfedeztetésen alapuló geometriaoktatás ügye érdekében. Lehetőség nyílik arra, hogy a diákok maguk fedezzenek fel „új tételeket”, fogalmazzanak meg sejtéseket. Vizsgáljuk meg példaként a háromszög magasságpontjának helyzetét!

Tétel : A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást!

Erről a diákok papíron is könnyen meggyőződhetnek, de minden esetben csak egy konkrét háromszögre. Ha valamelyik háromszögcsúcsot odébb visszük, akkor a „papírgeometriában” az egész szerkesztést újra el kell végezni. A dinamikus geometriában a bázispontok mozgathatók, a szerkesztett objektumok követik az alappontok változását. Ez lehetővé teszi a diákok számára az összefüggések könnyebb megértését, majd általános érvényű sejtések megfogalmazását. Természetesen a tanulókkal fontos tisztázni, hogy a szerkesz-



1.1. ábra. Háromszögek magasságpontjának helyzete

tőprogramok segítségével minden esetben csak sejtéseket fogalmazhatunk meg. Ezeket a sejtéseket matematikai precizitással igazolni kell. Így a szerkesztőprogramok lehetőséget nyújtanak a bizonyítás iránti igény kialakítására is.

Az interaktivitás egy másik lehetséges alkalmazási területe a szerkesztési feladatok diszkussziójának tanítása. Az interaktivitás segítségével gyorsan változtathatók a bemenő adatok, a szerkesztőprogramok azonnal követik a változásokat. Így azonnal látható, hogy az aktuális adatfelvétel mellett a feladatnak hány megoldása van. Az ilyen típusú, „interaktív diszkusszió” főleg általános iskolás csoportokban lehet hatékony, hiszen a diákok közvetlenül láthatják, hogy egy-egy szerkesztés végrehajthatósága és eredménye függ a bemenő adatok megválasztásától.

Létezik egy harmadik alkalmazhatósági terület, ami pusztán az interaktivitás tulajdonságát használja ki. Ez a terület a geometriai transzformációk kapcsolatrendszerének oktatása. Az interaktivitást ebben az esetben szemléltetésre, az összefüggések megértésére használhatjuk.

Amennyiben a diákok már tudják, hogy két metsző egyenesre vonatkozó tükrözés egymás utáni elvégzése egy forgatással helyettesíthető, akkor is gyakran gondot szokott okozni annak megértése, hogy a forgatások is felbonthatók két egyenesre vonatkozó tükrözés szorzatára, amelyek közül az egyik szabadon választható, és a másik már egyértelműen meghatározott.

1.2. Nyomvonal megjelenítés

Lényege abban áll, hogy egy megszerkesztett ábrában egy bázispontot végigfuttatunk egy objektumon – mely lehet egy szakasz, félegyenes, egyenes, kör, vagy más kúpszelet –, s eközben egy, a futó bázisponttól valamilyen módon függő, származtatott pont nyomvonalát megjelenítjük.

A nyomvonal megjelenítés funkciójának legfontosabb alkalmazási területe a mértani hely meghatározását igénylő feladatok megoldása.

Mértani helyre adott feladat

Adott egy kör, valamint egy rajta kívül fekvő pont. Mi azon körök középpontjainak mértani helye, amelyek átmennek az adott ponton, valamint érintik az adott kört?

Mértani helyre adott feladat megoldása

Adott tehát a P pont, valamint az O középpontú k kör. Tegyük fel, hogy a szerkeszteni kívánt kör k -t az F' pontban érinti. Az F' pont az F bázispontból vetítés útján keletkezett; így a k kör kerületén bármely pont „előállítható”. A keresett kör középpontja illeszkedik az $\overline{PF'}$ szakasz szakaszfelező merőlegesére, valamint az $\overleftrightarrow{OF'}$ egyenesre, így könnyen szerkeszthető. A Q pontok mértani helye megjeleníthető, ha az F bázispontot „futtatjuk” a k körön. Az szerkesztés alapján sejtethetjük, hogy a kapott mértani hely egy hiperbola, melynek fókuszpontjai O és P . Használjuk ki az interaktivitást, és mozgassuk a P pontot! A szerkesztés minden esetben helyes marad, sőt a P pont akár a k kör belső pontja is lehet. Ebben az esetben a Q pontok egy ellipszisre illeszkednek, mely ellipszis fókuszpontjai továbbra is O és P . A diákok a sejtés megfogalmazása után már könnyen elvégezhetik a bizonyítást. A szerkesztés azt is mutatja, hogy a mértani helyként kapott kúpszelet egy pontjához hogyan kell megszerkeszteni a feltételeknek eleget tevő érintőkört. A példa alapján láthatjuk, hogy a dinamikus geometriai szerkesztők nemcsak megértés-sejtés folyamatát segítik, hanem támogatják a feladat továbbgondolását is.

A nyomvonal megjelenítés egy másik alkalmazási területe lehet a geometriai transzformációk fogalmának kialakítása, mélyítése, dinamikus eszközökkel való vizsgálata. Ide nagyon jó példa az inverzió vagy például a tengelyes affinitás.

1.3. Animáció

A geometriai szerkesztőprogramok leglátványosabb, és ebből következően a diákok számára a leginkább motiváló funkciója. Az animáció lényege abban áll, hogy egy bázispontot futtatunk valamilyen alakzaton (mely lehet szakasz, félegyenes, egyenes, vagy kör), miközben egymás után minden egyes fázisban megjelenik az aktuális szerkesztésnek megfelelő ábra. Általában lehetőség van a fázisok számának beállítására, valamint a fázisok egyidejű megjelenítésére. Módszertani szempontból az animáció alkalmazásának célja kettős. Egyrészt látványosságával motivációs eszközként alkalmazhatjuk, másrészt a tanulók számára új fogalmak szemléltetésére, bevezetésére használhatjuk.

1.4. A szerkesztés visszajátszása

Az elkészített szerkesztést bármikor újra lejátszhatjuk, ezáltal lehetőség nyílik az ábrát keletkezésének minden egyes fázisában alaposan szemügyre venni. Módszertani előnyei abban láthatóak, hogy eközben lehetőség van a tanult anyag átismétlésére, valamint az esetleges szerkesztési hibák felderítésére. Mindemellett legnagyobb előnyét a szerkesztési feladatok diszkussziójának tanításakor vehetjük.

2. A FELHASZNÁLT PROGRAMOKRÓL

2.1. GeoGebra programról

A GeoGebra egy dinamikus matematikai program, mely témájában kapcsolódik a geometriához, algebrahoz és számítási feladatokhoz. Középiskolai oktatási segédletként írta Markus Hohenwarter a Salzburg Egyetemen és minden népszerűbb felhasználó felületre létezik.

A GeoGebra egyrészt egy dinamikus geometriai rendszer. Megadhatók benne pontok, vektorok, szakaszok, egyenesek, kúpszeletek és még sok minden más, amik a későbbi szerkesztés során dinamikusan megváltoztathatók.

Másrészt közvetlenül megadhatók egyenletek és koordináták is. Így a GeoGebra lehetőséget biztosít számok, vektorok és pontok változóként való kezelésére; függvények deriváltjának és integráltjának meghatározására; gyök és szélsőértékek számítására.

Ez a két tulajdonság határozza meg a GeoGebra jellegzetességét: egy kifejezés az algebra ablakban megfelel egy objektumnak a geometria ablakban, és viszont.

A program számos előnyének egyike, hogy ingyenes a másik, hogy az újabb verziókat már magyar nyelven is lehet használni. Természetesen ezenkívül lehetőség van más nyelveket is használni (például: angol, német), így nyelvtanulás szempontjából is hasznos lehet.

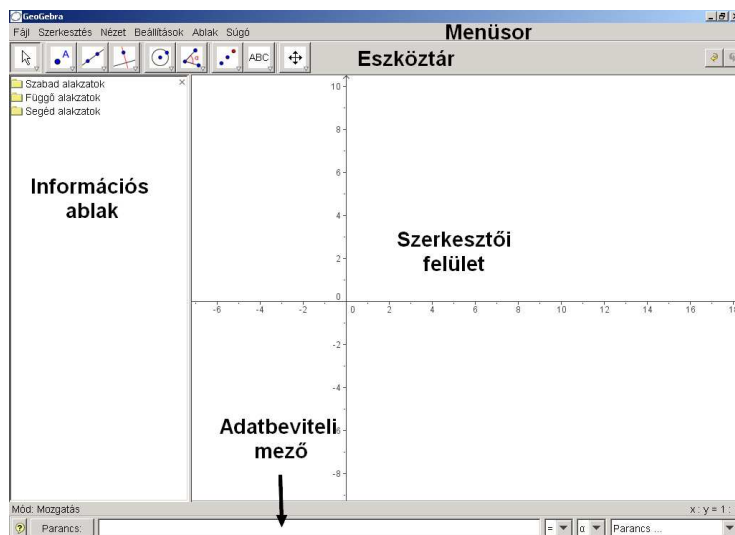
A program letölthető a www.geogebra.at web-címről.

A képernyő felépítése

Az a felület, amin dolgozni fogunk (továbbiakban munkasztal), több részből áll, ezek az alábbiak:

- menüsor
- eszköztár
- információs ablak
- szerkesztői felület

- adatbeviteli mező



2.1. ábra. A GeoGebra 2.7 képernyő felépítése

Az adatokról

Láthatóság Az adatokat az adatbeviteli mező használatával tudjuk bevinni a programba. A bevitt adat egy objektum lesz. Egy objektum lehet látható illetve láthatatlan annak függvényében, hogy szereténk-e a munkalapon az objektumot látni vagy sem. Ez a szerkesztések végén, illetve bonyolultabb szerkesztések közben lehet hasznos. Természetesen az objektumok állapota tetszés szerint változtatható.

Objektumok tulajdonságai

Szabad objektum Ide tartozik minden olyan objektum, mely semmilyen más objektumtól/adattól nem függ. Ha a megadott adatokból előálló objektum nem függ korábban megadott objektum(ok)tól/adat(ok)tól, akkor az ide fog kerülni.

Függő objektum Ebbe a csoportba tartoznak azok az objektumok, melyek valamely más objektumokhoz logikai módon kapcsolódnak (például: metszéspont), s így ha az az objektum megváltozik amitől függ akkor a változást ezen csoportba tartozó, az objektumtól függő objektumok is követik.

Segéd objektum Ide tartozik minden olyan objektum, mely nem sorolható be az előző kettőbe. Ide a felhasználó teheti át az objektumokat.

Fix objektum Olyan opció, mely bekapcsolásával az adott objektum nem lesz mozgatható. Ez a tulajdonság szabad objektumok esetén állítható tetszőlegesen, egyéb esetekben ez nem állítható.

Adatok bevitele Egy adatbeviteléhez használjuk az adatbeviteli mezőt. Ha nem akarunk nevet adni, akkor egyszerűen csak gépeljük be az adatot. Ekkor a program automatikusan ad egy nevet az objektumnak.

Ha szeretnénk már bevitelkor mi nevet adni egy objektumnak, akkor erre is van lehetőség, csakúgy mint az utólagos átnevezésre illetve átdefiniálásra. Fontos azonban tudni, hogy egy munkaasztalon két ugyanolyan nevű objektum nem lehet. De ezt a program egyébként sem engedi meg.

Ha az adatot begépeztük és nyomtunk egy *Enter* billentyűt, akkor az az információs ablak valamely objektumtípusa között meg fog jelenni.

További lehetőségek Lehetőség van a fenti tulajdonságokon kívül a programban használni az alábbiakat:

Szinezés Ennek segítségével tehetjük könnyebben érthetővé az ábráinkat. Lehetőség van előre definiált színeket használni, valamint sajátokat definiálni.

Nyomvonal Ennek az opciónak akkor lehet szerepe például, amikor mértani helyet szeretnénk szemléltetni vagy megsejtenni.

Vizuális effektek Ide sorolhatóak azok az opciók, melyek a látványt hivatottak segíteni (vonalvastagság, vonalstílus, adatfajták megjelenítése).

Szerkesztés visszajátszása Segítségével szemléltethető a teljes szerkesztés, de lehetőséget biztosít arra is, hogy csak bizonyos lépések kerüljenek megmutatásra.

Mentés és exportálás Lehetőség van dinamikus weblapkénti mentésre. Célszerű lehet távoktatásnál¹ vagy házi feladatoknál. Illetve képformátumba² való exportálásra, mely dokumentáció készítésnél lehet hasznos.

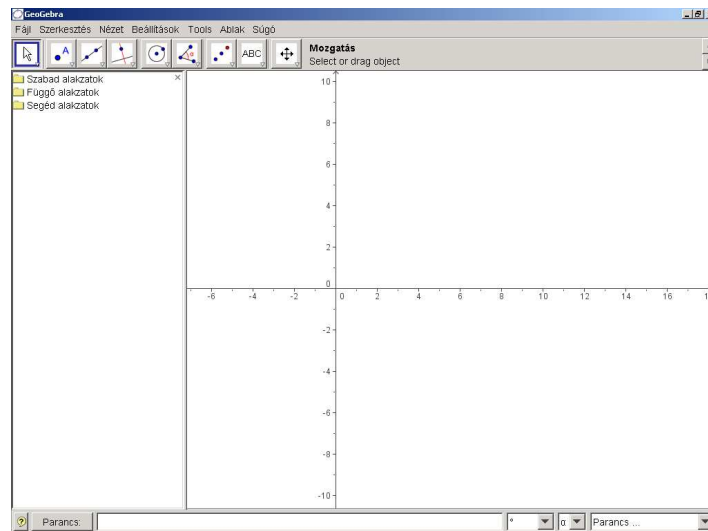
¹dinamikus weblapkénti exportálás esetén

²fájlformátumok: eps, png

A makró és a GeoGebra

Amennyiben olyan szerkesztés végzünk el, melybe egy adott szerkesztési lépést – mely nem feltétlenül áll egy két lépésből – többször is el kell végezni, akkor – mint azt az informatikán belül a programozás területén is tesszük – ki lehet emelni, és el lehet menteni egy menüpontként. Majd amikor ez a lépés következne, akkor a menü segítségével már gyorsan és kényelmesen el tudjuk végezni ezt, s így a szerkesztésre szánt időt – hosszabb vagy bonyolultabb szerkesztés esetén – lehet megtakarítani. Az a lépés, mikor a többször elvégzendő szerkesztés egyszer elvégezzük és abból menüpontot készítünk, makrózásnak vagy makró készítésének nevezzük.

Megjegyzés: Jelen pillanatba csak a *GeoGebra Pre-Release* program tartalmaz ilyen lehetőséget!



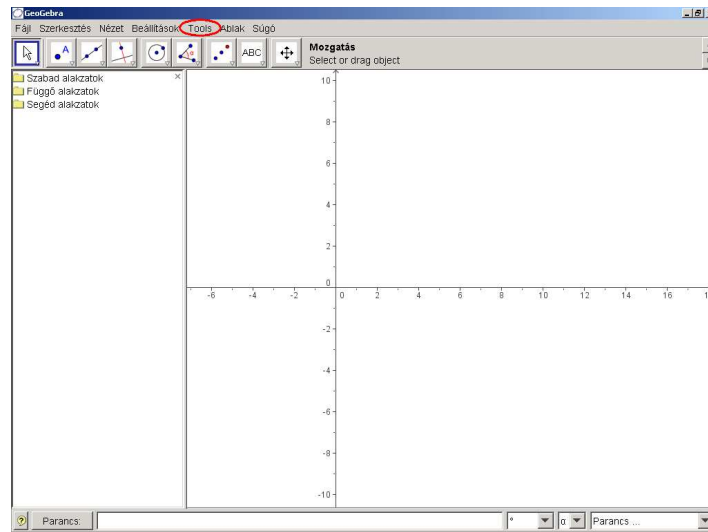
2.2. ábra. GeoGebra Pre-Release

Nézzünk egy példát, hogy hogyan is lehet makrót készíteni. Legyen a példa a háromszögek nevezetes pontjaia szerkesztése.

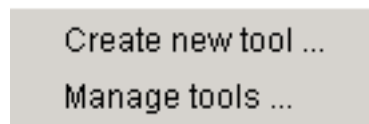
Minden pontot megszerkesztünk a neki megfelelő szerkesztés lépései segítségével. Természetesen ezek a lépések is elkészíthetők makróknak.

A szerkesztés lépései:

- A háromszög felvétele
- A súlypont megszerkesztése
- A köríráható kör középpontjának megszerkesztése
- A beírható kör középpontjának megszerkesztése

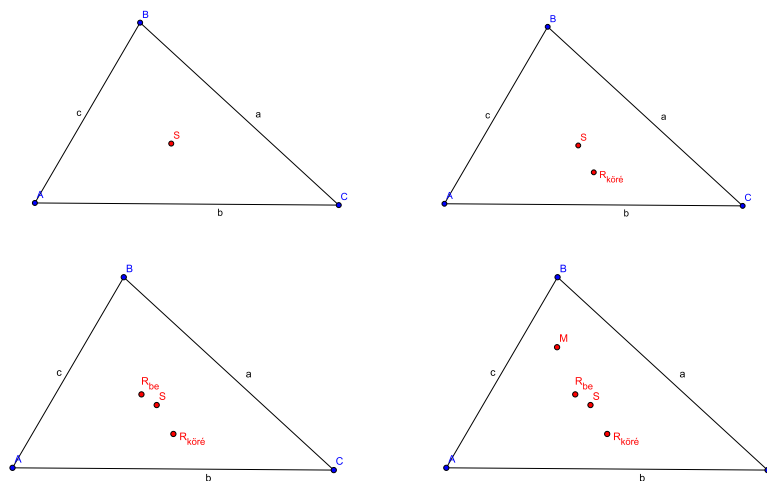


2.3. ábra. GeoGebra Pre-Release makró menüpont



2.4. ábra. GeoGebra Pre-Release makró menüpont lehetőségei

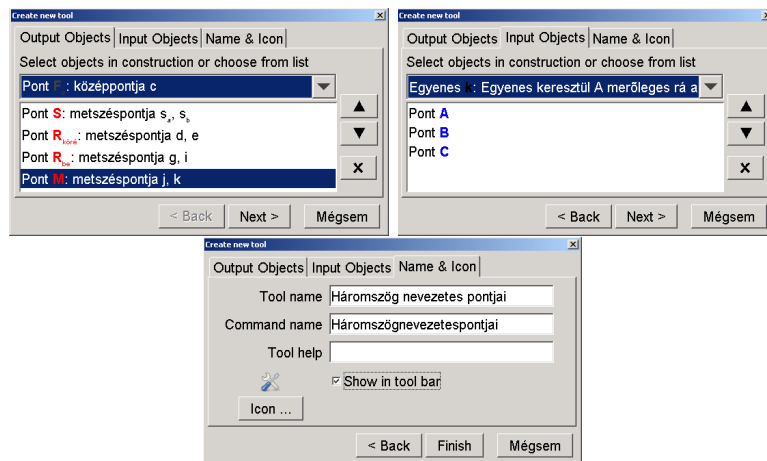
- A magasságpont megszerkesztése



2.5. ábra. A szerkesztés fázisai

Ha a szerkesztéssel elkészültünk, akkor kattintsunk a **Tools** menüpont **Create New Tool** menüpontjára, ekkor kapunk egy felugró ablakot, melyben meg kell adni, hogy a

makrónak mi legyen a bemenete, kimenete valamint, hogy milyen néven szeretnénk a menüpontba tenni.



2.6. ábra. Makrókészítés lépései

Nézzünk további makrózásokat is. Korábban szóba került az inverzió és a tengelyes affinitás. Ezek közül nézzük az inverziót!

Az inverzió makrózása

Legyen adva az α síkon egy O középpontú ρ sugarú kör. Ekkor a kör segítségével a sík O -tól különböző pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk a következő módon:

a sík minden P pontjához rendeljük hozzá azt a P' pontot, amely az \overrightarrow{OP} félegyenesen van, és amelyre:

$$OP * OP' = \rho^2$$

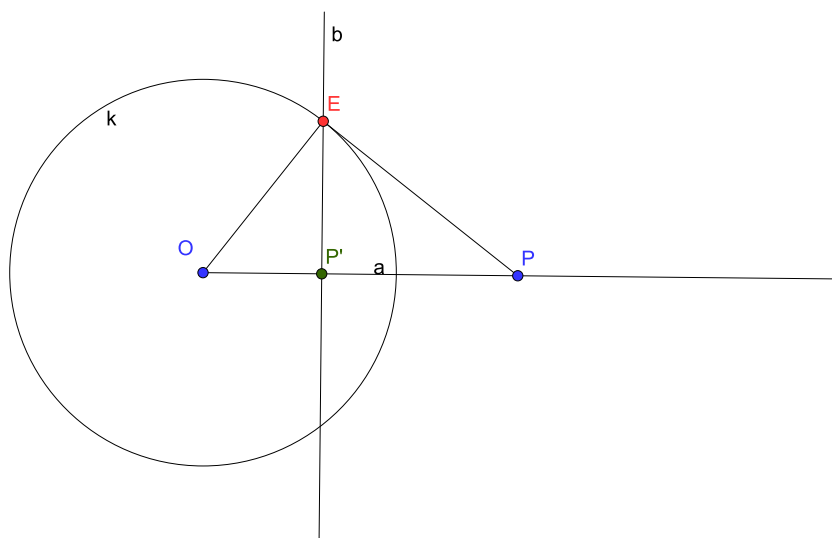
teljesül. O -t az inverzió pólusának, a kört alpkörnek, ρ^2 -et az inverzió hatványának nevezük.

A definícióból azonnal következik a szerkesztés módja.

A szerkesztés menete:

- Vegyük fel, O -t az alpkört és egy P pontot.
- ha P a körön kívül helyezkedik el
 - szerkesszünk a P pontból az alpkörhöz PE érintő
 - szerkesszük meg az OPE háromszög, P csúcsához tartozó magasságot

- a magasságvonal talppontja adja a P' pont inverzét.
- ha P a körön belül helyezkedik el
 - szerkesszük meg az OP félegyenest
 - állítsunk erre merőlegest P -ben, így előáll E
 - szerkesszük meg az OE félegyenest
 - merőlegest állítunk az E pontban OE félegyenesre
 - ezt az egyenest metszve OP félegyenessel kapjuk a P' pontot



2.7. ábra. Pont inverze

Makró feladatokban, témakörökben

1. Legyen adott egy R sugarú k félkör és benne egy $\frac{R}{2}$ sugarú k_1 kör, amely érinti a k kört az O pontban. Szerkesszünk a félkörbe olyan kört, amely érinti mind a k mindpedig a k_1 kört. Itt jól használható az inverzó.
2. Ellipszispont szerkesztése.
3. Háromszögek nevezetes vonalaira illetve pontjaira vonatkozó sejtések kialakítása, összefüggések kialakítása. (amit pontos bizonyítás követ).
4. Geometriai transzformációk.

5. Apollóniusz feladatok.

Természetesen az itt felsorolt lehetőségeken kívül is számtalan más területen felhasználható, mind a makró, mind pedig a GeoGebra valamelyik fajtája.

2.2. GrafEq programról

A GrafEq egy könnyen elsajátítható, rugalmas, pontos és robusztus program implicit egyenletek és egyenlőtlenségek grafikonjának készítéséhez. A program használható mind iskolában, mind otthon. Ezt a programot használják a világ minden részén. Letölthető (más pedagógiai software-rel együtt) a www.peda.com oldalról. Előnye, hogy van olyan verziója, ami ingyenesen kipróbálható illetve használható.

A program a középiskolai matematika tanítás minden olyan területén felhasználható, amelyben valamilyen szerep jut a grafikus ábrázolásnak. Ilyen terület lehet például az egyenletek grafikus megoldása. Ezen felül a felsőoktatásban is használható.

A program használatáról

A program használata nagyon egyszerű, és az adatok bevitele sem jelent túl sok gondot.

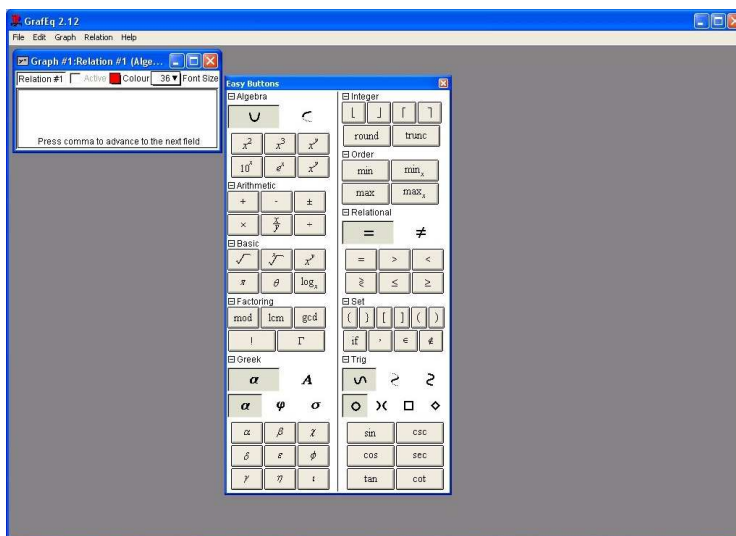
Adatok bevitele

Az adatok bevitelét legjobban a szövegszerkesztéshez lehet hasonlítani. Az adatokat a *Relation* ablakba kell beírni. Az egyenletet vagy egyenleteket csak be kell írni, mintha csak papírra írnánk. Itt lehetőség van az ismeretlen vagy ismeretlenek esetleges korlátainak beállítására, azaz bevitelére. Ha az adatokat megadtuk, akkor már csak azt kell eldönteni, hogy milyen koordináta-rendszerbe szeretnénk ábrázoltatni az egyenleteket illetve függvényeket. Az egyenlet-, illetve egyenletrendszer megoldása is egyszerűen végrehajtható, mivel itt több egyenlet, illetve egyenlőtlenség bevitelére is lehetőség nyílik. Ehhez nem kell mást tenni, mint az egyenleteket egyesével begépelni és minden egyenlet bevitele után egy **TAB** billentyű lenyomásával begépelni a következőt, az utolsó egyenlet után a megjelenítéshez **Enter** billentyűt kell nyomni. Ha van valamilyen megkötés az ismeretlen(ek)re vonatkozóan, akkor azt az utolsó egyenlet bevitele utáni **TAB** billentyű megnyomása után írhatjuk be.

Megjegyzés: Mivel a program meg is rendelhető így indításnál, illetve huzamosabb idejű használat esetén a *Continue* gombra kattintva kezdhethetjük el illetve folytathatjuk munkánkat.

A képernyő A képernyőt az alábbi fontosabb részekre lehet bontani:

- adatbeviteli ablak (Relation ablak)
- segéd ablak (bevitelt segítő ablakok)
- megjelenítő ablak (a relációk bevitele után)



2.8. ábra. GrafEq képernyője

3. EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK ÉS EZEK RENDSZEREIK

3.1. Egyenlet és egyenlőtlenség

A matematikában többféle megközelítése van az egyenleteknek illetve egyenlőtlenségeknek. Itt csak kétféle megközelítési módot adunk meg:

- Ha két kifejezést (melyben számok és változók szerepelnek) egyenlőségjellel „=” kötünk össze, akkor a kifejezést *egyenlet*nek nevezzük, ha más relációs jellel, akkor pedig *egyenlőtlenség*nek .

$$x + 3 = 12 \quad y^2 + 6 = 31 \quad \text{egyenletek}$$

$$x + 3 > 12 \quad y^2 + 6 < 31 \quad \text{egyenlőtlenségek}$$

- A nyitott (hiányos) mondat függvényt ad meg, melynek értékkészlete az {igaz , hamis} kételemű halmaz, az ilyen függvényt *logikai függvény*nek nevezzük. Az egyenlet olyan logikai függvény, melyben két függvény egyenlőségét állítjuk.

$$a \dots + c = d \Leftrightarrow ax + c = d \quad \text{egyenlet}$$

$$a \dots + c < d \Leftrightarrow ax + c < d \quad \text{egyenlőtlenség}$$

Az egyenletek sokfélék lehetnek, ezért valamilyen szempont szerint csoportosíthatóak. Természetesen az itt felsorolt csoportosításon túl másfajta is lehetséges.

Az alábbi csoportosítással találkozhatnak a diákok:

- az ismeretlenek száma szerint

$$x + 3 = 13 \quad \text{egyismeretlenes}$$

$$x + 2y = 27 \quad \text{kétismeretlenes}$$

- amennyiben az egyenletben szereplő számok betűkkel, úgynevezett paraméterekkel vannak jelölve, akkor *paraméteres egyenletről* beszélünk. Fontos megadni, hogy mi vagy mik a paraméterek és ismeretlenek.

$$a + bx = 2a + bx^2 \quad \text{ahol } x \text{ az ismeretlen és } a, b \text{ a paraméterek}$$

- ha az egyenlet jobb és bal oldalán csak *algebrai kifejezés* áll, akkor *algebrai egyenletről* beszélünk

$$(x - 1)(x + 3) = (x + 8)(x - 2)$$

- az algebrai egyenleteken belül megkülönböztetünk az ismeretlenek fokszáma szerint: első-, másod-, harmad-, ..., n -edfokú egyenleteket

$$2x + 3y = 21 \quad \text{kétismeretlenes elsőfokú egyenlet}$$

- amennyiben nem algebrai kifejezések szerepelnek az egyenlet jobb és bal oldalán akkor *transzcendens egyenletekről* beszélünk. Ide tartoznak az alábbiak:
 - exponenciális egyenlet
 - logaritmikus egyenlet
 - trigonometrikus egyenlet
- az egyenletet *határozottnak* nevezzük, ha csak véges számú érték elégíti ki, ellenkező esetben *határozatlannak* nevezzük.

A csoportosítás nem csak egyenletekre hanem egyenlőtlenségekre is alkalmazható.

Azokat az egyenleteket illetve egyenlőtlenségeket melyek a változók tetszőleges értéke mellett teljesülnek *azonosságoknak* nevezzük.

Az egyenleteket megoldhatjuk grafikusán is. Ilyenkor az egyenlet jobb és bal oldalát egy-egy függvénynek tekintjük. Az ilyen típusú feladatmegoldáshoz nyújt segítséget mind a GeoGebra mind pedig a GrafEq.

3.2. Megoldás GeoGebra-val

Példa elsőfokú egyismeretlenes egyenletre

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán !

$$\frac{x}{3} = 4 - x$$

A GeoGebra-val történő megoldás lépései:

1. megoldás Tekintsük az egyenlet két oldalát egy-egy függvénynek, és ennek megfelelően ábrázoljuk. Ebben az esetben a két függvénygörbe metszéspontja adja a megoldást.

1. A parancssorba gépeljük be az alábbiakat

a) $x/3$

b) $4 - x$

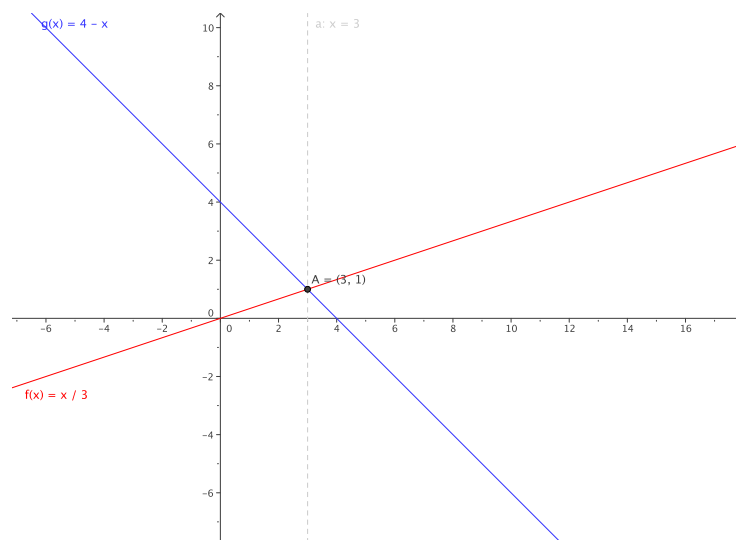
2. A metszéspont kijelölése ikon vagy parancs segítségével



3.1. ábra. Az egyenlet oldalainak bevitele



3.2. ábra. Az egyenlet közvetlen bevitele

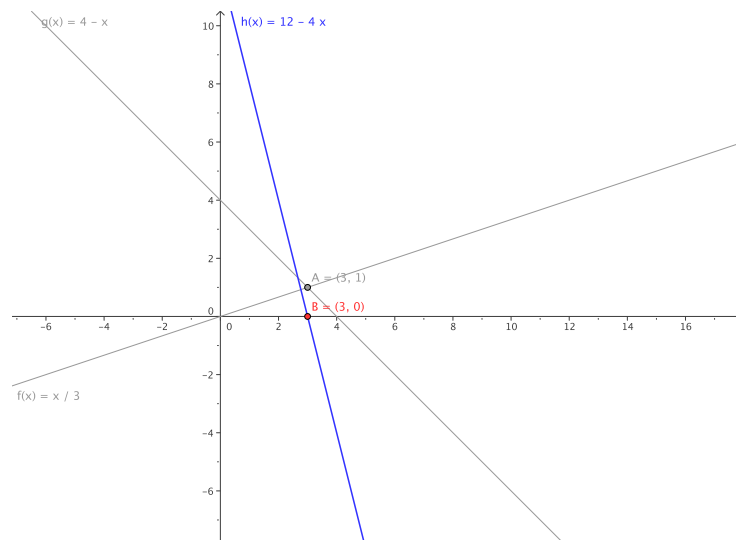


3.3. ábra. Elsőfokú egyenlet megoldása (1. megoldás)

2. megoldás Mielőtt nekilátnánk a grafikus megoldásnak, rendezzük az egyenletet 0-ra. Ekkor a megoldást a függvénygörbe és az x-tengely metszéspontja adja.

1. A parancssorba gépeljük be : $12 - 4x$

2. A metszéspont kijelölése ikon vagy parancs segítségével.



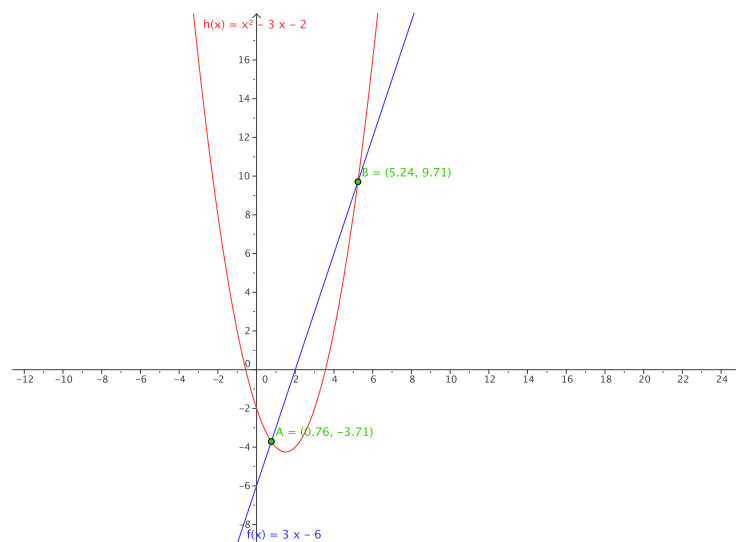
3.4. ábra. Elsőfokú egyenlet megoldása (2.megoldás)

Megjegyzés: Természetesen lehetőség van az egyenlet azonnali begépelésére is, így rögtön a megoldás rajzolódik ki.

Példa másodfokú egyenlet megoldására

Megoldás menete hasonló, mint a korábbi példánál. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^2 - 3x - 2 = 3x + 6$$



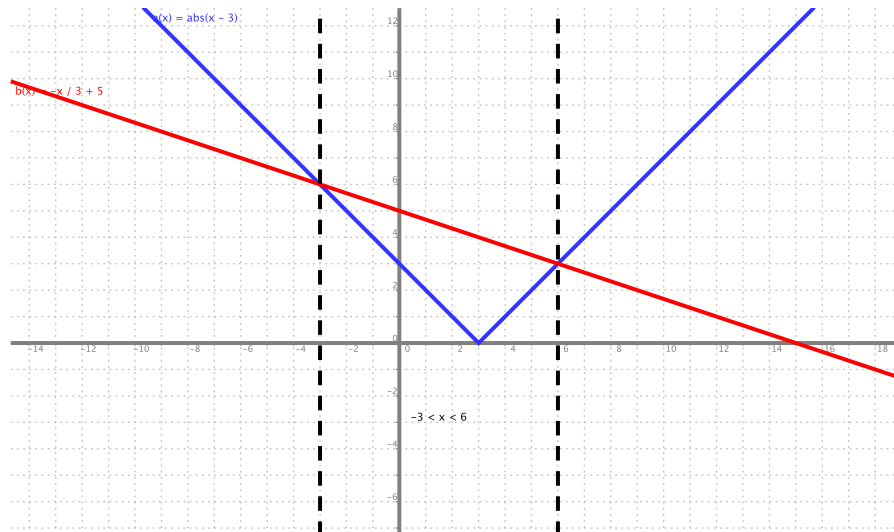
3.5. ábra. Másodfokú egyenlet megoldása

Példa egyismeretlenes abszolútértékes egyenlőtlenségre

Tekintsük a következő egyenlőtlenséget !

$$-\frac{x}{3} + 5 \geq |x - 3|$$

A megoldás menete ebben az esetben is olyan, mint az előzőekben.



3.6. ábra. Abszolútértékes egyenlőtlenség megoldása

3.3. A határhelyzetek vizsgálata

Amikor már elkészítettünk egy konkrét egyenlet megoldását grafikusan, de amit vizsgálnunk kellene az paraméteres formában adott, akkor hívjuk segítségül ismét a dinamikus rendszerek interaktivitási tulajdonságát. Azaz, „mozgatva” a konkrétan megadott függvény képét (azaz változtatjuk a paraméterértéket) diszkussziót végezhetünk, másszóval a két függvénykép egymáshoz viszonyított helyzetét vizsgáljuk, s keressük a határhelyzeteket.

Legyen adva a következő példa !

Keressük azt a p értéket, melyre a

$$-\frac{x}{3} + p \geq |x - 3|$$

egyenlet megoldásainak száma

1. nulla
2. egy

3. kettő.

Ehhez használjuk fel a DGS azon tulajdonságát, hogy ha adott egy szerkesztés és valamely bemenő adat megváltozik, akkor a program a szerkesztést újra elvégzi. Oldjuk meg tehát a példát! Először is vizsgáljuk meg elméletben, hogy a kívánt száma a megoldásoknak valójában mit is jelent.

Ha az a feltétel, hogy ne legyen megoldása az egyenletnek, akkor ez azt jelenti, hogy a két függvénynek nem létezik metszéspontja. Ez csak akkor lehetséges személetesen szólva, ha az abszolútértékes egyenletnek megfelelő függvény

$$f : x \rightarrow |x - 3| \quad x \in R$$

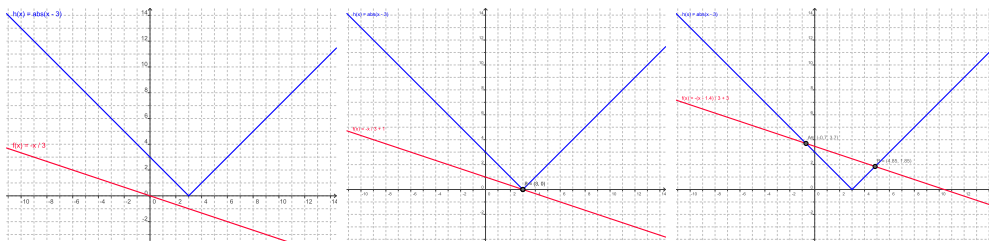
képe a lineáris egyenletnek megfelelő függvény

$$g : x \rightarrow \frac{x}{3} + p \quad x \in R$$

képe felett helyezkedik el. Ez természetesen egy félig nyílt intervallumot határoz meg. Nézzük akkor ennek a megvalósítását a gyakorlatban. Ábrázoljuk az alapegyenletet, ami

$$-\frac{x}{3} \geq |x - 3|$$

alakú, azaz ahol a $p = 0$. „Mozgatva” a $-\frac{x}{3}$ függvény képét vizsgálhatjuk, hogy p mely értékeire vagy értékeire teljesül a kívánt feltétel.



3.7. ábra. Határhelyzetek

3.4. Megoldás GrafEq-val

A GrafEq-val való megoldás más, mint a GeoGebra-val történő. Itt lehetőség van egyszerre akár több egyenlet bevitelére is, valamint arra, hogy az egyenlet egyik oldalának megfelelő függvény képét csak egy adott intervallumban ábrázoljuk.

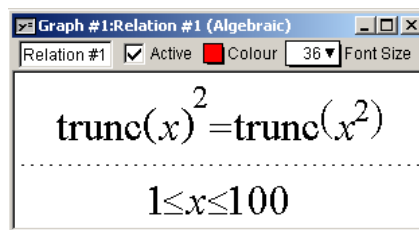
Példa egy ismeretlenes egyenlet megoldására intervallumon

Ábrázoljuk az alábbi egyenletet a $[1..100]$ intervallumban!

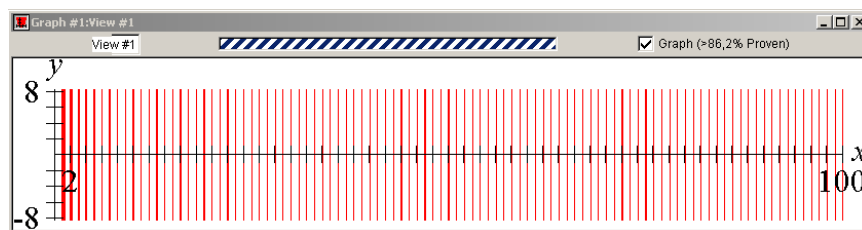
$$\{x^2\} = \{x\}^2$$

A megoldás lépései :

- Gépeljük be az egyenletet a *Relation 1* ablakba! A törtrésznek a *trunc* felel meg.
- Nyomjunk egy **TAB** billentyűt !
- Adjuk meg az intervallumot. Majd **ENTER** !
- Válasszunk koordinátarendszert, majd **Create**.



3.8. ábra. Az egyenlet bevitele GrafEq-ban

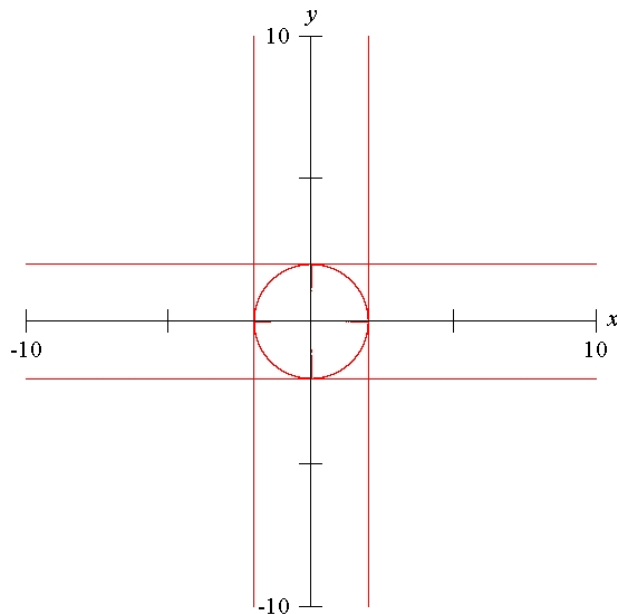


3.9. ábra. Az egyenlet grafikus megoldása

Példa magasabb fokszámú többismeretlenes egyenlet megoldására Határozzuk meg azoknak a pontoknak a halmazát a síkon, amelyeknek $(x;y)$ koordinátái kielégítik a következő egyenletet :

$$\frac{x^3y + y^3x}{\sqrt{4-x^2}\sqrt{4-y^2}} = \frac{4xy}{\sqrt{(x^2-4)(y^2-4)}}$$

A kapott eredmény módszertani szempontból rendkívül érdekes, hiszen a program számos olyan pontot jelenített meg, amely valójában nem elégítheti ki az egyenletet; gondoljunk csak az $x=2$, vagy az $y=2$ koordinátájú pontokra, amelyek biztosan nem tartoznak a felírt kifejezések értelmezési tartományába. Egy másik érdekes jelenség a tengelyekhez tartozó pontok ábrázolása, amelyekben a program nagyon „bizonytalan”, hiszen a tengelyek pontjai egyértelműen kielégítik az egyenletet. Ezzel a példával az a cél, hogy megmutassuk a gépnek sem szabad mindig hinni, fontos az ellenőrzés.



3.10. ábra. Magasabb fokszámú többismeretlenes egyenlet megoldása

3.5. Egyenlőség- és egyenlőtlenségrendszer

Ha két vagy több egyenlet közös gyökeit keressük, akkor egyenletrendszerről beszélünk. Az egyenletrendszer alaphalmaza, az egyes egyenletek alaphalmazainak a közös része, megoldáshalmazának elemei pedig rendezett n -esek (attól függően, hogy mennyi az ismeretlenek száma az egyenletrendszerben).

Az egyenletrendszer megoldásai olyan rendezett számpárok, amelyekre az egyenletek egyszerre teljesülnek. Amennyiben az egyenletrendszert alkotó egyenletek egymásnak ellentmondanak, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása. Amennyiben az egyenletrendszerben szereplő egyenletek egymástól függetlenek, akkor az egyenletrendszernek pontosan egy gyöke van. Az egyenletrendszer megoldása is lehetséges a grafikus ábrázolás segítségével.

Az egyenlőtlenségrendszerek hasonlóképpen definiálhatóak.

Mivel az egyenletrendszerek is megoldhatóak grafikusán, itt is használhatjuk mind a *GeoGebra* mind pedig a *GrafEq* program valamelyikét.

3.6. GrafEq és az egyenlőtlenségrendszerek

Miután egyenleteket illetve egyenlőtlenségeket is meg tudunk oldani dinamikus eszközök segítségével, így már csak ezek rendszereik vannak hátra. A rendszereik megoldására a GrafEq-t használjuk. A rendszerek relációit egymás után kell begépelni **TAB** billentyű

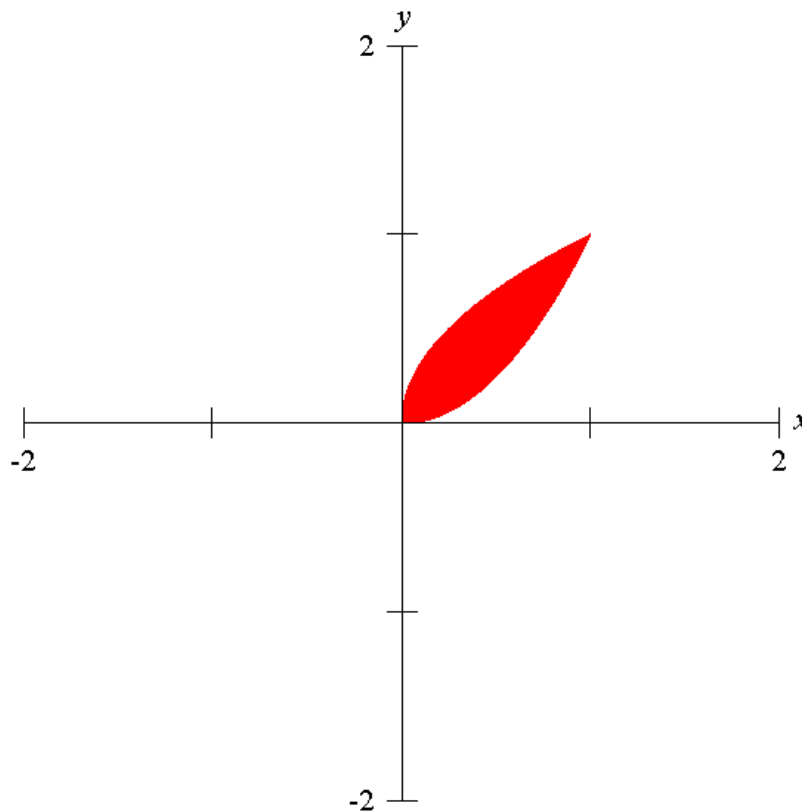
megnyomásával vihetjük fel a gépre a következő egyenletet vagy az ismeretlenekre vonatkozó kikötéseket. Nézzünk egy példát!

Példa: Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségrendszert:

$$y > x^2, x > y^2$$

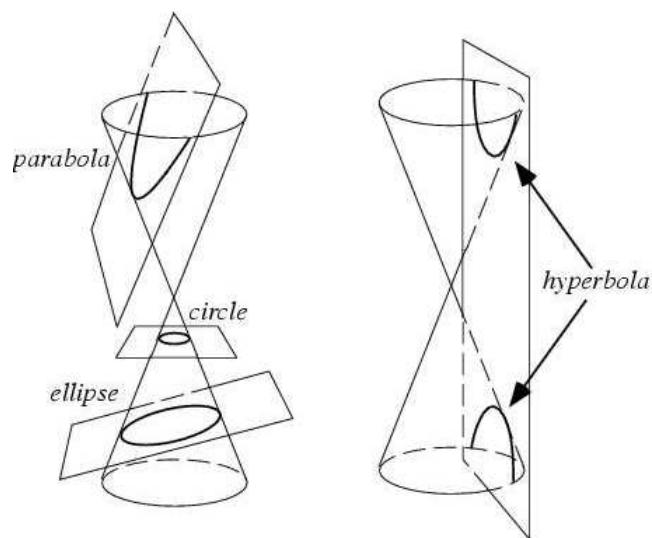
A megoldása menete:

Gépeljük be a *Relation 1* ablakba az első egyenlőtlenséget majd **TAB** billentyűvel elválasztva a másodikat és ha elkészültünk, akkor az eredmény megtekintéséhez nyomjunk **ENTER** billentyűt. A felugró ablakban beállíthatjuk, hogy a koordináta-tengelyek mettől-meddig legyenek kirajzolva, s hogy mekkora legyen a megjelenítendő kép mérete. Ha a beállításokkal végeztünk, akkor *Creat* gombra kattintva a feladat grafikus megoldása azonnal adódik.



3.11. ábra. Egyenlőtlenség-rendszer megoldása

4. A KÚPSZELETEKRŐL



4.1. ábra. A kúpszeletek fajtái

4.1. A kúpszeletekről általánosságban

Kúpszeletek néven három síkgörfajtát foglalunk egy csoportba:

- az ellipszist (kört)
- a hiperbolát
- és a parabolát.

Az elnevezésnek az az alapja, hogy mindhárom görbe előállítható forgáskúp (illetve forgáshenger) síkmetszeteként. Mindhárom számos olyan tulajdonsággal rendelkezik, amely definiálásukra alkalmas, a sok lehetőség közül az úgynevezett fokális definíciójuk az alábbi:

- Az ellipszis azon pontoknak a halmaza, amelyeknek két rögzített ponttól, a két fókuszról (a gyújtópontól) mért távolságösszege állandó.

- A hiperbola azon pontoknak a halmaza, amelyeknek két rögzített ponttól, a két fókuszról mért távolságösszege abszolút értékben állandó.
- A parabola azon pontoknak a halmaza, amelyeknek egy rögzített ponttól (a fókuszról) és egy rögzített egyenestől (a vezéregyenestől, direktxtről) egyenlő távolságra vannak.

4.2. Kúpszeletek szerkesztése

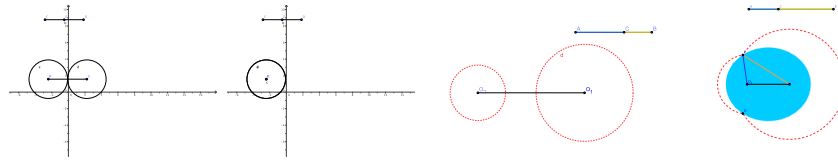
Dinamikus eszközök használatával megmutatható és jól szemléltethető, hogy milyen kapcsolat is áll fenn ezen kúpszeletek között.

Végezzük el az alábbi szerkesztést:

Legyen adott egy szakasz (\overline{AB}) , a szakasz egy pontja (C) , valamint egy arányszám $\lambda = \frac{1}{2}$. Vegyünk fel a síkban egy pontot tetszőlegesen (O_1) . Ettől a ponttól $\lambda * \overline{AB}$ távolságra egy másik pontot (O_2) . Ezek lesznek a fókuszpontok. Ha O_1 -ből kört rajzolunk \overline{AC} sugárral, valamint O_2 -ből is kört rajzolunk a \overline{BC} sugárral, akkor ha az $\frac{AC}{BC}$ változik, akkor ezek a pontok adják az ellipszis pontjait. Itt lehet nagyon jól kihasználni a program nyújtotta lehetőségeket (nyomvonal).

Nézzük a szerkesztés lépéseit GeoGebrával:

1. Vegyünk fel egy egyenest!
2. Az egyenest definiáló két pontot tegyük láthatatlanná, majd az egyenesen vegyünk fel két pontot, és tüntessük el az egyenest. Rajzoljuk meg a szakaszt, valamint vegyünk fel egy pontot a szakasz belsejében.
3. Definiáljuk a λ számot!
4. Vegyük fel tetszőlegesen az O_1 pontot!
5. Parancssorba gépeljük be az alábbiakat:
 - a) Szakasz[O_1 , λ Szakasz[A,B]]
 - b) Kör[O_1 , Távolság[A,C]]
 - c) Kör[O_2 , Távolság[B,C]]
6. Jelöljük ki a metszéspontokat! Erre használhatjuk például a metszéspont ikont.
7. Kapcsoljuk be a nyomvonalat!



4.2. ábra. Szerkesztés lehetséges eredményei változó helyzetek esetén

Megjegyzés: A szerkesztés első két lépése egy „csúszka” szerkesztése. Ennek megszerkesztése nem kötelező, mert van rá beépített mód. A beépített csúszkára igaz, hogy a csúszka elhelyezkedése abszolút a képernyőhöz és relatív a koordinátarendszerhez képest.

Joggal merül fel a kérdés, hogy mi történik akkor, ha változik a λ értéke. Legyen például $\lambda = 1$. Ha erre az esetre vagyunk kíváncsiak, nem kell mást tennünk, mint a parancsok között a \uparrow segítségével visszakeresni azt a parancsot amikor a λ arányt definiáltuk, vagy az adaton, a jobb egérgombra előugró menüben az *Újra definiál* menüpontot választva új értéket adni neki. Jól látható, hogy ebben az esetben a két körnek csak egy közös pontja lesz. Így egy elfajuló ellipszishez, azaz egyeneshez (párhuzamos egyenesekhez) jutottunk.

Ebben a szerkesztésben nem csak a λ arányt vehettük fel tetszőlegesen, hanem a magát a két fókuszpont távolságát befolyásoló \overline{AB} szakasz egy belső pontját is. Nézzük meg mi történik akkor, ha a szakasz belső pontja éppen a szakasz felezőpontja, és $\lambda = 0$, azaz $\frac{|AC|}{|BC|} = 1$. Mozgassuk tehát a szakasz belső pontját a szakasz felezőpontjába. Ekkor a két fókuszpont egybeesik, azaz $O_1 = O_2$. Rögtön látható a munkalapon, hogy a metszéspontokat ekkor egy kör pontjai adják, tehát egy kör lesz a megoldás.

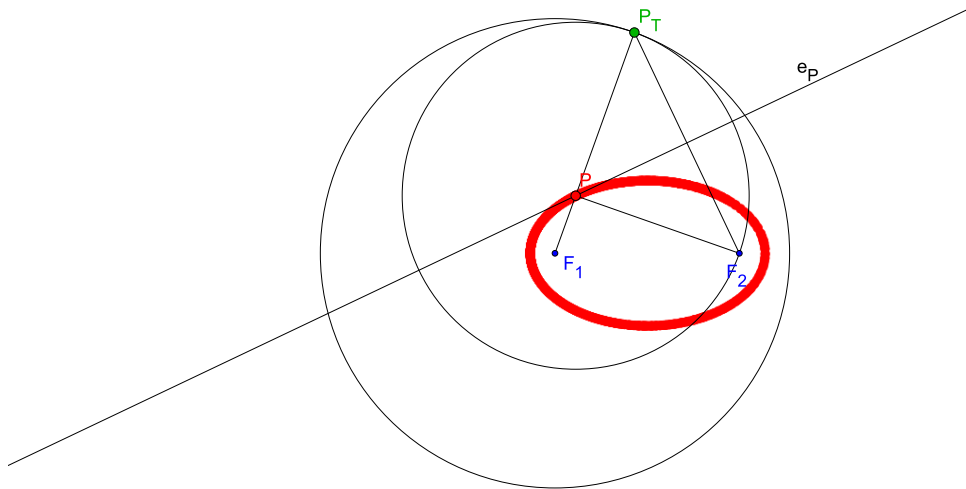
Ha a λ értéket 1-nél nagyobbra választjuk, akkor látható, hogy a két körnek nem lesz közös pontja, ekkor kapjuk az üres halmazt.

Megjegyzés: A továbbiakban ellipszis szerkesztése alatt ellipszispont szerkesztést értünk.

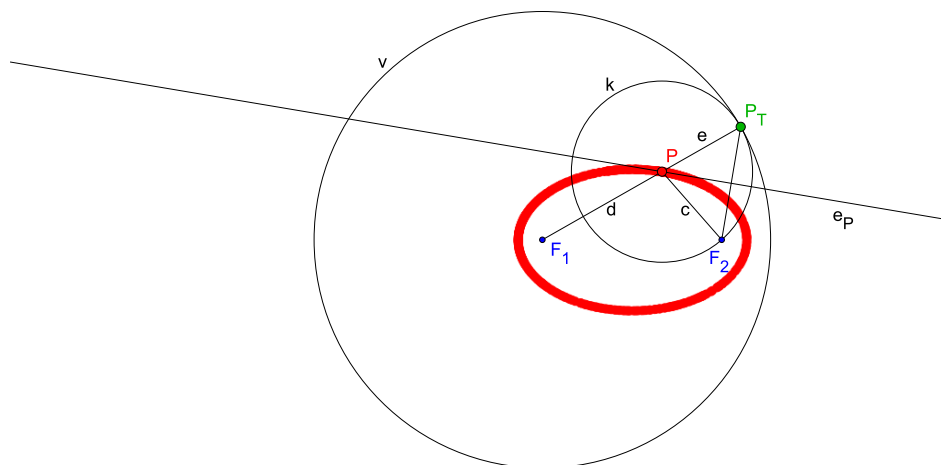
4.3. Ellipszis szerkesztése kosárgörbe módszerrel

Ennél a szerkesztésnél adott: \overline{AB} nagytengely, \overline{CD} kistengely.

1. A O pontból $|\overline{OA}|$ sugárral körívet rajzolunk, a kistengelyen E pontot jelöljük.
2. A és C pontokon keresztül egyenest rajzolunk.
3. C pontból $|\overline{CE}|$ sugárral körívet rajzolunk, \overline{AC} egyenesen F pontot jelöljük.
4. Az \overline{AF} szakaszra felezőmerőlegest állítunk, jelöljük a O_1 és O_3 pontokat.



4.5. ábra. Ellipszispont szerkesztése vezérgörbe módszerrel



4.6. ábra. Ellipszispont szerkesztése vezérgörbe módszerrel (bizonyítás)

pont lesz, és $P \in e_P$ -nek mint tükörtengelynek (azaz fixpontja), így a tengelyes tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt $c = e$. Vagyis, az eredeti

$$c + d = 2a$$

állítás a következőképpen módosul:

$$d + e = 2a$$

mellyel igazoltuk, hogy a P pont ellipszispont.

□

Megjegyzés:

1. A dinamikus geometriai rendszerek interaktivitási tulajdonsága miatt, ami azt állítja, hogy „a bázispontok a síkon szabadon megfoghatók, arrébb vihetők, a megszerkesztett ábra úgy változik, hogy az objektumok közti logikai kapcsolat megmarad.” Mivel a P_T pontot tetszőlegesen vettük fel a v körön, így „mozgatva” a kör ívén, a P pontra igaz marad a fenti bizonyítás, tehát a pont ellipszis görbét ír le.
2. Tétel: Az ellipszis azoknak a pontoknak a mértani helye, melyek körül az egyik fókuszon áthaladó és a másik fókusz körüli vezérkört érintő körök írhatók.
A kört érintő és egy a középponttal nem azonos belső pontján áthaladó körök középpontjainak mértani helye ellipszis.¹
3. A vezérkör sugarának változtatásával kaphatunk
 - ellipszist, ha a vezérkör sugara a fókuszpontok távolságánál nagyobb
 - pontot (mint nulla sugarú kör), ha a vezérkör sugara a fókuszpontok távolsága
 - hiperbolát, ha a vezérkör sugara a fókuszpontok távolságánál kisebb.
4. A fókuszpontok helyzetének változtatásával kaphatunk
 - ellipszist, ha a fókuszpontok távolsága a vezérkör sugaránál kisebb
 - pontot (mint nulla sugarú kör), ha a fókuszpontok távolsága a vezérkör sugarával egyezik meg
 - hiperbolát, ha a fókuszpontok távolsága a vezérkör sugaránál nagyobb
 - kört, ha a két fókuszpont egybeesik, és ekkor a kör sugara a vezérkör sugarának felével egyezik meg.

¹dspace.lib.unideb.hu:8080/dspace/bitstream/2437/90/1/szakdolgozat_571.pdf

5. SZÁMÍTÓGÉP ÉS ISKOLA

5.1. A számtógép, mint oktatási segédeszköz

Az oktatás folyamatában a különböző szervezeti keretekben alkalmazott tanítási stratégiák, szervezési módok, módszerek során különböző oktatási eszközöket, taneszközöket használunk, amelyek a különböző tanítási-tanulási feladatok megvalósításában jelentős szerepet tölthetnek be.

Oktatási eszközön vagy taneszközön azokat az anyagi, technikai tárgyakat, berendezéseket, anyagokat értjük, amelyek a tanítási és a tanulási célok elérését segítik, valamint a tanítás, a tanulás hatékonyságát növelik.

A tanítás és a tanulás során felhasznált eszközök egy része történetileg alakult ki, és szokásokhoz, hagyományokhoz kapcsolódik. Ezek mellett azonban mindig megjelennek azok a tanulást segítő eszközök is, melyek az adott kor aktuális technikai szintjét tükrözik. A taneszköztörténet a technika fejlődését szem előtt tartva is nyomon követhető, hiszen egy-egy technikai újdonság általában hosszabb- rövidebb idő után bekerült az iskolába, megváltoztatva ezzel az ott folyó munkát.

A taneszközök története egyidős az oktatás történetével is. Taneszköznek tekinthetők például azok a táblázatok, amelyek segítségével az ókori Babilon diákjai számításait a 60-as számrendszerben elvégezték, vagy az ókori Görögországban használatos szorzótábla, illetve abakusz, amellyel a korabeli, az ábécé betűit felhasználó, meglehetősen bonyolult műveleteket jelentősen le lehetett egyszerűsíteni.

A technika eddigi fejlődésének a taneszközökhöz kötődő legfontosabb állomása a könyvnyomtatás feltalálása volt a 15. század derekán. (Azóta is az egyik legjelentősebb taneszköz az oktatásban használt, nyomtatott tankönyv.) A 16-17. századra a természettudományos oktatás fellendülése jellemző. Az iskolák különböző fizika, kémia, biológia, stb. szertárai igen jól felszereltek voltak szemléltető és kísérleti eszközökkel. A 17. századtól az empiria, a tapasztalat hangsúlyozása, a szemléltetés fontossága került előtérbe. A szemléltetés taneszközei ekkor születtek, és azóta gyarapodnak, fejlődnek mind a mai napig. A 18. század végén és a 19. század elején terjedtek el a könyvek, a falitérképek, a föld- és éggömbök az iskolákban. A máig is szinte nélkülözhetetlen oktatási segédeszköz, a fekete tábla 1835-ben

jelent meg először a tantermekben. A 19. század végének nagy találmányát, a mozgófilmet nagyon hamar felhasználták az oktatásban. Az írásvetítő őse az 1930-as években készült. A 20. századtól szerepet kaptak az iskolákban az auditív eszközök, elsőnek a fonográf. A detektoros rádió iskolai alkalmazása az 1920-as években indult. Az első oktatógépek a 19. század végén és a 20. század elején jelentek meg. A programozott oktatás divatjának tetőfoka a 70-es évekre tehető. Hatására a taneszköz funkciója megváltozott: eddig csak a szemléltetés, ezután a tanulás irányítása, a tananyag-feldolgozás elősegítése is megvalósítható.

A 20. század elejének pedagógiai irányzatai a tanulói aktivitásra, öntevékenységre épülő, cselekvéses tanulást hangsúlyozták, melynek taneszközigénye messze túlhaladta az előző korokét. A 20. század második felében az audiovizuális eszközök, a számítógépek térhódítása az iskolában a tanulás irányítását, segítségét egyre magasabb fokon képes megvalósítani.

Napjainkban a fejlett technikai színvonalat az elektronikus számítógépek képviselik. Az elektronika rohamos fejlődése és a mikroelektronikára épülő eszközök széleskörű térhódítása a számítógépet a film, az írásvetítő, a magnetofon, a televízió és a videó mellett az iskolai oktatásban is szerephez juttatják. A számítógép iskolai felhasználásával egyre több számítógépes oktatóprogram segíti az iskolai és az önálló tanulást. A 20. század végén a számítástechnika fejlődése lehetővé tette az oktatószoftverek, az adatbázisok, az interaktív médiumok, stb. megjelenését és a taneszközök közé kerülését. A tendencia az, hogy a csak körülményesen, vagy egyáltalán nem szemléltethető jelenségek esetében, illetve bizonyos nehezen beszerezhető vagy drága szemléltető-, illetve kísérleti eszközök helyettesítésére is mind gyakrabban használják a különböző, az esetek többségében szimuláción alapuló, multimédiás szoftvereket. A számítógép tehát egyre inkább átveszi a hagyományos oktatástechnikai eszközök szerepét is.

A bonyolultabb technikai eszközök iskolai elterjedését és alkalmazását az oktatásban sok esetben az azok kezelésére és felhasználására vonatkozó ismeretek valódi vagy vélt hiánya hátráltatja. Az iskolai tábla és kréta használata nyilvánvalóan senkinek sem okoz problémát. A faliképek, térképek bemutatásához is csak az szükséges, hogy a tanár ismerje a tanítandó anyagot. Az írásvetítő, a videó-projektor, a magnetofon, a filmvetítő, a videó, a televízió alkalmazása már némi technikai felkészültséget kíván, azonban az ehhez szükséges ismeretek rövid idő alatt elsajátíthatók. A számítógépek az előbb említetteknél bonyolultabb berendezések, de a fejlődés tendenciája azt mutatja, hogy ezek kezelése és alkalmazása is mind egyszerűbbé válik.

Minden, az oktatásban használt eszközre igaz azonban, hogy csak akkor lehet igazán hatékony, ha a felhasználó – a tanár vagy a tanuló – saját céljainak elérése, feladatainak

megoldása érdekében mind az eszközre magára, mind pedig annak alkalmazására vonatkozóan megfelelő háttérismerettel rendelkezik.

A számítógép kétféle módon jelenhet meg az oktatásban. A számítógéppel szervezett oktatás során a tanulók nincsenek közvetlen kapcsolatban a számítógéppel. A számítógép ebben az esetben oktatóanyagot nem tárol, megőrzi viszont a tanulók eredményeit, elsajátított ismereteit. A fentiekén kívül segíti a tanulásban való előrehaladás menetének, módszerének kiválasztását, szervezi az oktatás folyamatát. A számítógéppel segített oktatás során a számítógép oktatástechnikai eszköz, oktatógépként vesz részt a tanítási-tanulási folyamatban, tartalmi és tanulásirányító információkat tárol és közvetít, többféle tanítási-tanulási feladat megoldásában ad segítséget a tanárnak, illetve a tanulóknak.

A számítógép oktatási eszközként való felhasználása a tanárt és a tanulót felmentheti a mechanikus tevékenységek végzése alól, és olyan információforrásként szolgálhat, mely a tárolt ismereteket rendezett és rendszerezett formában nyújtja. Az új eszközrendszer lehetővé teszi a tanítási-tanulási folyamat jobb szervezését, ellenőrzését, gyakorló feladatok generálását és a folyamat irányítását is. A számítógépnek a tanításban való megjelenésével olyan új módszerek kerültek előtérbe, mint a modellezés, a szimuláció és a játék. A tanulásban a melléktevékenységek vagy ezek egy részének mechanikus elvégzése válik feleslegessé, ezzel idő és energia szabadul fel.

A számítógépnek taneszközként való alkalmazása nem jelenti azt, hogy az összes többi, eddig használt vagy ismert eszközt számítógéppel lehetne vagy kellene az oktatásban helyettesíteni vagy felváltani. A fizika, a kémia vagy a biológia valóságos fizikai modelljei és jelenségei nem helyettesíthetők és nem hozhatók létre más eszközökkel. Ugyanakkor egy valódi kísérlet mélyebb nyomott hagy a tanulóknak, maradandóbb élményt jelent. A gőzgép mozgó modellje (a kicsinyített, de valóságos gőzgép) vagy egy kis méretű villanymotor csak önmagát képes megfelelően demonstrálni. A számítógép laboratóriumi eszközként való alkalmazása a szemléltetést segíti, de nem helyettesíti a közvetlen tapasztalatokat. A könyv, a televízió és más médiumok információközvetítő funkciója a tanulási folyamatban várhatóan továbbra is jelentős marad. Mindig lesznek olyan fogalmak, jelenségek, amelyek tanításában és tanulásában ezeknek a közvetítőknak a felhasználása hatékonyabb vagy gazdaságosabb.

Az oktatási eszközként használt számítógép viszont különösen jelentős szerepet játszik, amikor térben és időben változó eseményeket, jelenségeket kell szemléltetni, bemutatni. Egy dinamikus, folyamatában bemutatott jelenség, eseménysor a megértést jobban elősegíti, mint egy – akár több információt is hordozó – statikus bemutatás vagy verbális ismertetés. Az elektronikus számítógép a legfejlettebb olyan eszköz, amely a jelenségeket, eseményeket dinamikusan változó formában, interaktív módon képes létrehozni, model-

lezni és demonstrálni. Ha a fizikai, kémiai, biológiai, történelmi és társadalmi jelenségek, események egyes jellemzőit, paramétereit megváltoztatjuk, a jelenségek másként folynak le, az események másképp zajlanak. Így például a ferdén elhajított test mozgása függ az elhajítás szögétől és sebességétől, a népesség számának a következő évtizedekben való alakulása függ a születési és halálozási aránytól. Ha ezeket a jelenségeket számítógép segítségével állítjuk elő, azaz szimuláljuk, a számítógép képernyőjéről az eredmények leolvashatók, a folyamatok, események lépésről-lépésre követhetők, és a választott paramétereiktől függően különböző módon lejátszathatók lesznek.

Az adatok, paraméterek változtatását a tanár vagy a tanuló végezheti közvetlen, interaktív kapcsolatban a számítógéppel. A tanuló ekkor aktívan vesz részt a jelenség vagy egy – a valóságban nehezen megfigyelhető – kísérlet szimulációjában, demonstrációjában. A tanuló így nem passzív szemlélő, hanem aktív részese a tanulási folyamatnak. Ugyanakkor a szimulációs technika elsajátítása egyúttal közelebb visz a tudományos megismerés és kutatás módszereihez, és a számítógéppel mint eszközzel való manipuláció az általános számítástechnikai kultúra fejlesztését is szolgálja.

A számítógép oktatási eszközként való alkalmazása során többféle feladatot, funkciót tölthet be. Segítheti a tanárt, átveheti annak bizonyos feladatait, de pedagógusi, emberi jelenlétét, az oktatásban betöltött szerepét soha nem pótolhatja. A számítógép helyettesítheti a táblát, intelligens rajzeszközként jelenhet meg, amikor bonyolult görbék rajzolását teszi lehetővé. Kísérleti eszközként szerepelhet olyan esetekben, amikor vagy magára a modellre vonatkozóan szolgál új eredményekkel, vagy pedig valódi, illetve mesterségesen előállított adatok feldolgozásával a valóságos világ jelenségeire vonatkozóan tár fel összefüggéseket.

A számítógép maga is szerepelhet információforrásként. A különböző adatkezelő programokkal bevitt adathalmazok, adatbázisok különböző szempontok szerint csoportosíthatók, rendezhetők, azokból adatok leihívhatók, kiírathatók. Ez a funkció főként a tanulást segítő tevékenységek hatékonyabb, gyorsabb, dinamikusabb elvégzését jelenti. Ilyenek lehetnek szavak szótárból való keresése, speciális adatok leihívása, lekérdezése, csoportosítása.

Gyors működése, nagy memóriakapacitása révén a számítógép alkalmas arra, hogy a tanuló számára gyakorló partnerül szolgáljon, a tanárt pedig segítse a tanuló munkájának, előrehaladásának ellenőrzésében, figyelemmel kísérésében. Programok segítségével különböző szintű feladatokat tűz ki, majd ellenőrzi és értékeli azok megoldását. Ezek a feladatok a legegyszerűbb lexikális ismeretek kikérdezésétől az önálló problémamegoldásig terjedhetnek.

5.2. Digitális pedagógia

A számítógépek megjelenését az iskolában nem előzte meg a pedagógusok meggyőzése és felkészítése. Ennek következtében ma is kevesen használják szakértelemmel a gépeket azokon az órákon, melyeken a számítógépek használata nem feltétlenül szükséges, azaz az informaiika vagy számítástechnika órákon. Az a tény nem vitás, hogy a színes képek használata szebbé és érdekesebbé tehetik a frontális munkát, de igazán csak a páros, csoportos munkára épülő, a tanulókat önállóan megoldandó feladatok elé állító munkaformákban fejthetik ki hatásukat. Azonban ha a számítógépekkel való oktatásról van szó, akkor nem csak annak előnyeit, hanem hátrányait is meg kell említeni. Ellentét mutatkozhat a számítógépekben valamint a hagyományos pedagógiai gyakorlat között, mert a gépekben veszélyesnek látszó módszerek és tartalmak rejlenek.

A számítógépek megjelenése az iskolában nem csak új taneszközök, segédeszközök megjelenését jelenti, hanem ezzel együtt új módszerek és természetesen új tananyagot is. A fogadtatás felemás volt az iskolákban – vannak akik örültek, és olyanok is akadtak akik nem örültek az újdonságoknak. Mivel a gépek megjelenése és az oktatási szoftverek megjelenése nem egy időben történ így, – mint az lenni szokott ilyen esetekben – az első idők a kísérletezés ideje volt. Hamar kiderült, hogy a számítógépek sajátos oktatási eszközök és hogy minden rendben van vele, de hamar kiderült, hogy ez közel sincs így. A programok többsége, melyről az állították, hogy segítségével egybeköthető a tanulás és szórakozás kudarcot vallott. Kudarc abban az értelemben, hogy a túl sok információt és képet tettek a programokba. Mára ez a helyzet nagyon sokat javult. Javulás következett be abban is, hogy ma már majdnem minden nyelven elérhető valamilyen oktatási segédprogram.

Azonban fel kell tenni néhány kérdést, melynek megválaszolása alapvető szerepet játszhat a pedagógusok gondolkodásában arra vonatkozóan, hogy használjunk-e számítógépet a tanórán vagy sem. A kérdések az alábbiak :

- Minden tantárgy oktatásában használhatók-e a számítógépre kifejlesztett eszközök és módszerek, vagy vannak olyan területek, amelyeken többet árt, mint használ?
- Milyen módszerekkel, mely tananyag típusok, tartalmak közvetíthetők? Alapvetően más-e a számítógéppel segített tanítás és tanulás, mint a hagyományos pedagógia?
- Diszkriminál-e a géppel segített oktatás? Vajon minden átlagos képességű tanuló alkalmas-e arra, hogy a számítógép segítségével szerezzé ismereteit? Mi a helyzet a lányokkal, a lassan haladókkal, a rossz olvasási képességekkel rendelkezőkkel, a vizuális információt gyengén kezelő „verbális típusokkal”?

A kérdés nemcsak az, hogy mire jók a ma hozzáférhető digitális oktatási segédanyagok, hanem az is, hogyan működhet együtt tanár és kutató, programozó és grafikus abban, hogy a jövő taneszközei – a tanárok mindennapi tapasztalatai és a megbízható, elfogulatlan vizsgálatok tükrében egyaránt – jobbak legyenek.

A taneszközöket többféleképpen is lehet csoportosítani. A csoportosítások az alábbiak lehetnek:

1. a tananyagok fajtái: (ANDERSEN 1997; COLLIS 1996)

- mechanikus begyakoroltató feladatok ellenőrzéssel („drill-and-practice”)
- oktatási segédlet, magyarázatokkal (tutorial)
- interaktív információs rendszer (multimedia dialogue system)
- oktatásszervező programok (management)

2. A gép szerepe az oktatási folyamatban (TAYOR 1980; SLAVIN 1989; KULIK 1994)

- „házitanár” (tutor)
- bemutatja a tananyagot, majd kérdez
- értékeli a válaszokat
- válaszok minősége alapján új tananyagot ad/gyakoroltat
- dokumentálja a diák haladását
- segédeszköz (tool)
- mérőeszköz
- szimuláció (kísérleti eszköz)
- „edutainment”: a tananyaghoz kapcsolódó vagy jutalmazó játékok
- tanuló (tutee)
- a diák programoz
- a diák maga állítja be a tanulási környezetet
- a diák átalakítja a meglévő eszközt
- adott problémára programot készít
- oktatásszervező (manager)
- felméri a tanuló meglévő tudását/igényeit
- kiválasztja a tananyagot, vizsgafeladatot, illetve információs forrást

- vizsgáztat és visszajelez
- nyilvántartja a haladást, összeméri a tanulókat/osztályokat

Az elektornikus tananyag, illetve a számítógéppel támogatott oktatással nem csak időt és energiát lehet megspórolni, hanem szolgálhatja a tanulók kreativitását és gondolkodását. Meg kell jegyezni, hogy nemcsak előny származhat a technikai újdonságok iskolai felhasználásából. Például, ha nagyon sokat használjuk a számítógépeket a tanórán akkor annak lehet olyan jellegű hatása is, hogy a tanuló nem fog elgondolkodni a feladatok megoldásán, hiszen van eszköz amely elvégzi ezt a feladatot helyette. Illetve meg van annak az esélye is, hogy a gép nem helyes eredményt szolgáltat. A gépekkel csak a gondolkodás menetének irányát lehet jól megszabni, illetve minden diák kipróbálhatja vele saját elképzeléseit és annak eredményét, eredményeit.

Az elektronikus tananyag szemléletében és módszereiben más, mint a hagyományos tananyag: kreativitásra serkent, interaktív, fölhasználja a technika aktuális lehetőségeit. Ha a diák nem monoton szöveget olvas, hanem képekkel, zenével segítik a tananyag megértését és bevésését, ha saját maga működhet közre az eredmény elérésében, akkor könnyebben és eredményesebben sajátítja el a tananyagot. A számítógépes szoftverek és az online lehetőségeket is kihasználó eszközök lehetővé teszik mind az egyéni, iskolán kívüli munkát, mind az együtt tanulást (kollaboratív tanulás). Az iskolákban gyakran használják ki a helyi hálózatot oly módon, hogy az egyszerű fájlmegosztás és a közös mappák lehetőségével élnek. A számítógéppel segített oktatás és az elektronikus kommunikáció megfelelő pedagógiai eszközökkel lehetőséget ad a differenciálásra, a csoportmunka különböző megvalósításaira, így biztosítva a különböző képességű és háttérű diákok fejlődését.

6. DGS ÉS A GEOMETRIA TANÍTÁSA

6.1. Motiváció a matematikaórán

Pólya György egyik írásában a matematikatanárt egy jó árushoz hasonlította, azaz olyanak kell lennie, aki el tudja adni a „portékáját”¹ a vevőnek aki, ebben a példában a diákokot hivatott megjeleníteni.

Descartes egyszer azt mondta a matematikáról, hogy: „hozzászoktatja a szemünket, hogy lássa az igazságot tisztán és világosan”. Ha ezt az állítást vesszük alapul, akkor ebből következik, hogy a matematika óra lehet érdekes, színes, hasznos, de még több is. Éppen ezért fontos feladata a matematikát oktató tanároknak, hogy kialakítsák a tanulói motivációt, majd ennek erősítése, tervszerű és tudatos fejlesztése. Ez bizony nem könnyű feladat, hiszen a tanulói motivációt igen sokféle és bonyolult hatásmechanizmus alakítja ki.

A didaktikában a motiváció mint alapelv szerepel. A motiválásnak rengeteg formája lehetséges, s így a számítógépes oktatás is egyfajta motiváló hatással rendelkezhet.

6.2. A geometria tanítása

Mára már széles körben elfogadottá vált (bár a gyakorlatban nem mindig érvényesül), hogy az iskolai geometria nem szigetelhető el a matematika más témaköreitől, sőt cél a többi tárgykörrel való kapcsolat érzékeltetése és bemutatása.

Különösen a halmazelméleti és a logikai (következtetési) alapokra épülő kapcsolatok az erősek. Ám lehetőség van például egyes algebrai fogalmak geometriai modellezésére (törttel való szorzás esetén a területmodell, egészek kivonása értelmezésének támogatása „vektormodellel” illetve „módosított vektormodellel”, algebrai műveletek geometriai transzformációkkal illusztrálva, stb.).

Az analitikus geometria elemeinek algebrai kapcsolata nyilvánvaló. Ám például a geometriai transzformációk, mint ponthalmazon értelmezett függvények, kombinatorikus geometriai problémák; geometriai tárgyú sorozatok; konvergens mértani sorok területmodell-

¹jelen esetben a matematikát

je stb., mind ezen „belső koncentráció” természetességét mutatják. Ez a belső integrációs törekvés egyrészt a geometria tananyag évszázados elmaradásának csökkentését célozza („boubaki iskola”) másrészt a matematikai gondolkodás és intelligencia fejlesztési lehetőségei bővíti. Ehhez jön még hozzá a külső koncentráció (a más tantárgyakkal való kapcsolatok) és a mindennapi életben is hasznos tudás és képességek fejlesztésének igénye.

A matematika és így természetesen a geometria mai fejlettségi foka és „szigorúsága” természetesen nem érvényesíthető az iskolai oktatásban. Az, hogy nem tanítható közvetlenül a „kész geometria”, vagyis a tételek, definíciók és bizonyítások rendszere, ennek okai az alábbiak:

- mert egy adott ismeretrendszerhez képest magasabb szintű fogalom általában nem közvetíthető definícióközlással (értelmetlen magolás lenne), hanem a tapasztalatgyűjtés, elemzések, indukciók részleges (konkrétumhoz kötődő) majd fokozatosan tovább absztrahálódó dedukciók sorozatában folyó matematizálással;
- mert az egyetemi hallgatóknak is nehézséget okoz például az euklideszi geometria axiomatikus tárgyalása, vagy egyéb geometriák tárgyalása
- mert sem terjedelme miatt, sem a szerteágazó geometriai diszciplínák nagy részének magasfokú absztrakciós szintje miatt nem fér el az iskolai tantárgy keretekben.

Másrészt cél, hogy a tanulók megismerjék a matematikához jutás mellett a kész matematika és az alkalmazás lényegét is. Tovább a tanulók feljetttsége és fejleszthetősége, érdekei és érdeklődése valamint általános személyiségfejlesztő célok sem hagyhatók figyelmen kívül.

Ezért a tananyag, valamint annak szerkezete, a módszerek és munkaformák mindig kompromisszumosak (szerencsés esetben még harmonikusak is).

Több irányú, párhuzamosan futó és egymást átható építkezés az, ami a mai kísérletileg és a sikeres tanítási tapasztalatok alapján is javasolható.

A térelemek és más alapvető geometriai fogalmak megismerését konkrét tárgyakkal való ismerkedéssel kezdjük. A mértani alakzatok tájékozódó megismerése után következik azok elemző megismerése, tulajdonságok feltárása, majd az objektumhalmazok és kapcsolataik megismerése, miközben egyre több geometriai fogalom alakul ki és lép be a további vizsgálatokba (például: párhuzamossági reláció).

Közben a geometriai transzformációk kiépítését is elkezdjük és segítségükkel a bizonyítás is belép a logikai rendezésbe. Alapszerkesztések, majd szerkesztési alapfeladatok és összetettebb szerkesztési problémák is megjelennek.

Egy másik vonal a méretes geometria kiépülése (ide tartozik például a szögmérés, terület-, térfogatmérés). Korán elkezdhető az analitikus sík vagy tér óvatos kiépítése is. Közben adott tulajdonságú ponthalmazokkal ismerkednek meg a tanulók.

Szemléletes topológiai elemek „előtanítása”, valamint kombinatorikus geometriai, ábrázoló geometriai, mozgásgeometriai, átdarabolási, nem euklideszi-geometriai problémák is szóba jöhetnek.

De nem érdemes korán kezdeni a trigonometria tanítását.

Általában érvényes, hogy nem szerencsés a hipotetikus-deduktív tárgyalás korai erőltetése, a túlzott formalizmus és szimbólumhasználat.

6.3. Geometria oktatása számítógéppel

A kalkulátorok és számítógépek alkalmazása csak kis mértékben befolyásolta az iskolai geometria órákat. Az első generációs geometriai programok csak körző és vonalzó használatával végzett szerkesztéseket tudták bemutatni. A számítógép bővület után felvetődött a kérdés, hogy lehet-e olyan programot csinálni, amely többet jelent mint az egyszerű körzős-vonalzós szerkesztés.

A második generációs geometriai programokkal dinamikus konstrukciókat lehet készíteni. Ez a mozgathatóság lehetőségét jelenti, ahol egy ábra elemei elmozdíthatók, miközben az elemek közötti geometriai kapcsolat megmarad. Például egy pontot elmozdíthatunk az egérrel megragadva, de a rajta áthaladó egyenest is magával viszi, amely továbbra is merőleges marad egy másik egyenesre. Sok geometriai tételt meg lehet figyelni így. További tulajdonság, hogy a programot meg lehet tanítani új konstrukciókra. Az egyszer elvégzett komplex szerkesztés elmenthető mint **makro**, amelyet később új parancsként használhatunk. Végül lehetőség van egy vagy több pontnak a pályáját kirajzolni az ábra mozgatása során. Ez a nyomkövetés, trace funkció.

Ez a három lehetőség (mozgathatóság, makro és trace) minőségi ugrást eredményez. Az iskolai geometria tananyag sok fontos kérdése élvezetesebben tanulmányozható egy ilyen programmal.

Fontos hangsúlyozni, hogy az új dinamikus geometriai programok a munka új formáját, a kísérletezve tanulás lehetőségét kínálják. A leckék kipróbálva és kitalálva válnak alapismeretté, és vezetnek rá a bizonyítások gondolatára.

Eddig több ilyen programot kidolgoztak és továbbfejlesztettek (például: C.a.R., Euklid, Geometer's Sketchpad, GeoGebra), amelyek lehetőségeikben és a megoldás módszereiben különböznek, de a fenti lényeges tulajdonságokkal mindegyik rendelkezik. Magyar nyelvű

program is található. A GeoGebra és GeoGebra Pre-Release különösen sok lehetőséget kínál a felhasználásra.

7. ÖSSZEGZÉS

A dolgozat megpróbálta bemutatni az informatika alkalmazásának lehetőségeit a matematika oktatásának bizonyos területein. Ez a téma természetesen tovább bővíthető, itt csak szemelvény található ebből. A geometria oktatás nem különíthető el olyan élesen, mint azt az ember gondolná. Az említett témakörök is mutatják, hogy lehet kapcsolatokat találni más területekkel is. Az, hogy a számítógépet be lehet venni a geometriaoktatás segédeszközei közé, jól mutatja, hogy nemcsak a matematikán belüli kapcsolat határai mosódnak el, hanem már a tantárgyi határok sem olyan élesek.

Továbbá egy kis része a dolgozatnak utal a jövőre, pontosabban a jövő oktatására illetve az akkori oktatási lehetőségekre. Emellett bemutatja, hogy milyen utat kell bejárnia egy technikai eszköznek, hogy bekerüljön az iskolai segédeszközök körébe.

ÁBRÁK JEGYZÉKE

1.1. Háromszögek magasságpontjának helyzete	4
2.1. A GeoGebra 2.7 képernyő felépítése	8
2.2. GeoGebra Pre-Release	10
2.3. GeoGebra Pre-Release makró menüpont	11
2.4. GeoGebra Pre-Release makró menüpont lehetőségei	11
2.5. A szerkesztés fázisai	11
2.6. Makrókészítés lépései	12
2.7. Pont inverze	13
2.8. GrafEq képernyője	15
3.1. Az egyenlet oldalainak bevitele	18
3.2. Az egyenlet közvetlen bevitele	18
3.3. Elsőfokú egyenlet megoldása (1. megoldás)	18
3.4. Elsőfokú egyenlet megoldása (2.megoldás)	19
3.5. Másodfokú egyenlet megoldása	19
3.6. Abszolótértékes egyenlőtlenség megoldása	20
3.7. Határhelyzetek	21
3.8. Az egyenlet bevitele GrafEq-ban	22
3.9. Az egyenlet grafikus megoldása	22
3.10. Magasabb fokszámú többismeretlenes egyenlet megoldása	23
3.11. Egyenlőtlenség-rendszer megoldása	24
4.1. A kúpszeletek fajtái	25
4.2. Szerkesztés lehetséges eredményei változó helyzetek esetén	27
4.3. Ellipszis szerkesztése kosárgörbe módszerrel	28
4.4. Ellipszis szerkesztése paralelogramma módszerrel	29
4.5. Ellipszispont szerkesztése vezérgörbe módszerrel	30
4.6. Ellipszispont szerkesztése vezérgörbe módszerrel (bizonyítás)	30

TARTALOMJEGYZÉK

1	Dinamikus geometriai rendszerek jellemzői	3
1.1.	Interaktivitás	3
1.2.	Nyomvonal megjelenítés	4
1.3.	Animáció	5
1.4.	A szerkesztés visszajátszása	6
2	A felhasznált programokról	7
2.1.	GeoGebra programról	7
2.2.	GrafEq programról	14
3	Egyenletek, egyenlőtlenségek és ezek rendszereik	16
3.1.	Egyenlet és egyenlőtlenség	16
3.2.	Megoldás GeoGebra-val	17
3.3.	A határhelyzetek vizsgálata	20
3.4.	Megoldás GrafEq-val	21
3.5.	Egyenlőség- és egyenlőtlenségrendszer	23
3.6.	GrafEq és az egyenlőtlenségrendszerek	23
4	A kúpszeletekről	25
4.1.	A kúpszeletekről általánosságban	25
4.2.	Kúpszelet szerkesztése	26
4.3.	Ellipszis szerkesztése kosárgörbe módszerrel	27
4.4.	Ellipszis szerkesztése paralelogramma módszerrel	28
4.5.	Ellipszis szerkesztése vezérgörbe módszerével	28
5	Számítógép és iskola	32
5.1.	A számítógép, mint oktatási segédeszköz	32
5.2.	Digitális pedagógia	36

6 DGS és a geometria tanítása	39
6.1. Motiváció a matematikaórán	39
6.2. A geometria tanítása	39
6.3. Geometria oktatása számítógéppel	41
7 Összegzés	43
Ábrák jegyzéke	44
Tartalomjegyzék	45
Irodalomjegyzék	47

ÍRODALOMJEGYZÉK

- [1] Nyakóné Juhász Katalin: *Az informatika iskolai alkalmazásai*, Debrecen, 2000
- [2] Kántor Sándorné - Sümegi László : *Elemi matematika II*, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 1998
- [3] Kárpáti Andrea : *Digitális pedagógia*, Új pedagógiai szemle, 1999/04
- [4] Tót Éva : *A számítógép, mint a tanárok kommunikációs eszköze*¹
- [5] Hajnal Imre – dr. Nemetz Tibor – dr. Pintér Lajos – dr. Urbán János : *Matematika (fakultatív B) IV. osztály*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1982
- [6] dr. Kovács Zoltán: *Geometria*, Debreceni Egyetem – Kossuth Egyetemi Kiadó, 2002
- [7] Ambrus András: *Bevezetés a matematikai-didaktikába*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004
- [8] dr. Tóth László: *Pszichológia a tanításban*, Pedellus Tankönyvkiadó Kft., Debrecen
- [9] Árki Tamás: *A GrafEq programról cikk*²
- [10] Árki Tamás: *Dinamikus módszerek alkalmazása a geometriaoktatás különböző területein*, SzTE JGYTFT Matematika Tanszék
- [11] Reimann István: *Geometria és határterületei*, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft., 1999
- [12] Dr. Czeglédy István–Dr. Orosz Gyuláné–Dr. Szalontai Tibor–Szilák Aladárné *Matematikai tanrágypedagógia I-II*, Bessenyei György Könyvkiadó, Nyíregyháza, 2000

¹<http://www.oki.huoldal.php?tipus=cikk&kod=egyeb-tot-szamitogep#kapcs>

²<http://www.sulinet.hu/tart/cikk/Raf/0/18477/1>