Egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

KOORDINÁTAGEOMETRIAI MÓDSZEREK ÖSSZEHASONLÍTÓ ELEMZÉSE ÉS KÜLÖNBÖZŐ SZINTŰ ALKALMAZÁSAIK

COMPARATIVE ANALYSIS OF COORDINATE GEOMETRY METHODS AND ITS APPLICATIONS

Kiss Sándor (Kis Alexandru)

Témavezető: Dr. Kovács Zoltán

DEBRECENI EGYETEM
Matematika- és számítástudományi Doktori Iskola

Debrecen, 2010

A geometriai módszerek összehasonlítása a geometriák szintjén

Amikor az értekezéshez kapcsolódóan a továbbiakban módszerekről fogok beszélni, ez alatt tágabb értelemben mindig tanítási és kutatási, szűkebb értelemben pedig szintetikus (elemi), vektor- és analitikus geometriai módszereket fogok érteni. Hosszú ideje (több mint 10 éve) foglalkoztat az a kérdés, hogy hogyan lehetne a geometriai módszereket osztályozni, csoportosítani, rangsorolni a megoldandó problémák szempontjából. Másképpen kifejezve: az érdekelt, hogy adott feladathoz kiválasztható-e az optimális – a legrövidebb, a legszebb és a legelegánsabb - megoldási módszer? Ez a kérdés nagyon nehéznek tűnik és abban se vagyok biztos, hogy egyáltalán megválaszolható. Ettől függetlenül viszont időnként gondolkodom a kérdésen. Már az is nagy eredmény lenne, ha legalább a különböző geometriák szintjén el tudnánk dönteni a kérdést, azaz ha meg tudnánk mondani, hogy egy feladat a szintetikus vagy az analitikus vagy valamely más geometria keretén belül tárgyalható a legoptimálisabban. Mivel még ez sem teljesen egyértelmű, ezért a kérdések maradnak és a legjobb módszerek keresése, kutatása is.

Ha E a T test feletti n-dimenziós affin tér és V az E eltolási tere, akkor egy O pont és egy K bázis rögzítésével az E bármely pontjához hozzárendelhető egy V-beli vektor, a pont helyvektora, ehhez pedig a K bázisra vonatkozó koordinátái. Mindkét hozzárendelés bijekció, emiatt bármely E-beli pont jellemezhető-azonosítható a helyvektorával vagy a koordinátáival. Ha a helyvektort választom, akkor vektorgeometriát, ha a koordinátákat, akkor analitikus geometriát választottam. A két lehetőség teljesen egyenértékű, de módszertanilag egészen mást jelent, más-más ismeret-rendszert feltételez. Az előbb említett két geometria közül az egyik vagy másik geometria kitüntetése, előnyben részesítése lehet, hogy indokolható, például kialakult hagyományokkal vagy más módon. A romániai egyetemi képzésben mindkét geometria nagyjából egyenlő súllyal szerepel, de a középiskolában hosszú ideig a vektorokat csak a fizikán belül oktatták, néhány éve pedig a vektorgeometria elemeinek tanítása újból bekerült a matematika tantervekbe is.

Egy probléma-helyzetben, az első szakaszban legalábbis, az a legfontosabb, hogy a problémát kielégítően megoldjuk. Az egyszerűségre, eleganciára való törekvés természetes követelmény ugyan, de nem mindig valósítható meg már az első próbálkozáskor. (Persze most nem rutin feladat megoldására gondolok.) A feladat nehézségi foka, komplexitása, természete olyan sajátosságok, amelyek meghatározzák a lehetséges megoldási módszert vagy módszereket. A megoldandó probléma vonzhatja az elemi, a vektor- vagy az analitikus geometria valamelyik módszerét, de pusztán elméleti síkon maradva, a geometriai módszereket elsősorban hatékonyságuk alapján lehet megkülönböztetni vagy rangsorolni. Persze itt még más szempontok is felhozhatók: például melyik módszer ösztönzi jobban a gondolkodást, melyik eredményezi a legszebb megoldást, stb. Széles körben elfogadott álláspont, hogy a szintetikus geometria művelése jobban fejleszti a gondolkodást, mint például az inkább számításra alapozott analitikus geometria. Viszont az is igaz, hogy az analitikus módszerek sokszor hatékonyabbak az elemi módszereknél. Mindezeket figyelembe véve alapelvként azt lehetne mondani, hogy egy (geometriai) probléma megoldásakor mindig a leghatékonyabb geometriai módszereket részesítjük előnyben.

A kutatás célja, indoklása

Az 1990-es évek második felében háromszög-geometriával, ezen belül pedig a háromszöghöz kapcsolódó nevezetes körök tanulmányozásával foglalkoztam. Valamilyen átfogó, általános képet szerettem volna kialakítani magamban a háromszög körülírt, beírt, kilencpontos, továbbá Apollóniosz-, Taylor-, Brocard-féle köréről, valamint a háromszög Tucker-, Lemoine-, Soddy-féle köreiről, stb. De nemcsak maguk a körök, hanem a háromszögnek e körökhöz köthető nevezetes pontjai és egyenesei is nagyon érdekeltek. Az általam akkor elérhető szakkönyvekre főleg az volt a jellemző, hogy a háromszög-geometria előbb említett témáit jobbára az elemi geometria módszereinek és eszközeinek segítségével tárgyalták. Ezen a területen viszont ezek az elemi módszerek nehézkesnek, körülményesnek bizonyultak, azaz nem voltak elég hatékonyak, ezért az analitikus geometria felé fordultam. Mivel a háromszöghöz a ferdeszögű koordinátarendszer jobban illeszthető, mint a derékszögű (tengelyekként választhatjuk például a háromszög két tartóegyenesét), ezért a paralel-koordináták használatától az egész témakör egyszerűbb és hatékonyabb tárgyalását reméltem. Ugyanakkor helyenként a vektorgeometria eszközeit is igénybe vettem, azt a már említett alapelvet tartva szem előtt, hogy egy (geometriai) probléma megoldására-tárgyalására lehetőleg a legelőnyösebb módszert alkalmazzam. A témával való több éves foglalkozásomnak egy könyv lett a hozadéka, amely 1999-ben az Erdélyi Tankönyvtanácsnál jelent meg *A háromszög nevezetes körei. Háromszögmértan ferdeszögű koordinátákkal* címen.

A könyvem megjelenése után a koordinátageometriai módszerek továbbra is érdekeltek, sőt ez az érdeklődés fokozódott, mivel nemzetközi szakfolyóiratokban több olyan cikkel találkoztam, amelyekben általam akkor még ismeretlen koordináta-fajtákat (trilineáris, baricentrikus) alkalmaztak főleg síkmértani tételek, tulajdonságok bizonyítására.

Később arra is felfigyeltem, hogy a romániai vagy a magyarországi matematikai szakfolyóiratokban például a trilineáris és a baricentrikus koordináták szinte alig fordulnak elő, míg a helyzet egészen más a nyugat-európai vagy az amerikai matematikai szaklapok esetében. A 2000-es évek elején eldöntöttem, hogy amennyire körülményeim lehetővé teszik, elmélyülök ezekben a kérdésekben és ezen a helyzeten megpróbálok változtatni.

Amint azt már említettem a nemzetközi szakfolyóiratokban számos olyan geometriai cikk, dolgozat, tanulmány jelent és jelenik meg, amelyekben az értekezésben tárgyalt koordináta-fajták valamelyikét alkalmazzák, egyre gyakrabban a trilineáris és a baricentrikus koordinátákat. Háromszög-geometriai és más jellegű kutatások szinte elképzelhetetlenek ma már e koordináták ismerete és alkalmazása nélkül. Ezek a meggondolások is indokolják e téma választását.

Jelen értekezés a matematikának az analitikus geometria néven ismert ágához kapcsolódik. A doktori iskolába való felvételem után az alábbi célokat tűztem ki magamnak:

- megismerni minél több vonatkoztatási rendszert és koordináta-fajtát, elmélyülni az analitikus geometriában
- kipróbálni-alkalmazni a különböző koordináta-fajtákat minél változatosabb geometriai helyzetekben-problémákra
- megmutatni, hogy az analitikus geometria módszerei hogyan alkalmazhatók a kutatásban, új eredmények felfedezésében
- népszerűsíteni a koordinátageometriai módszereket, kiemelve előnyeiket és hátrányaikat egyaránt

A következő évek a kutatás és tapasztalatszerzés jegyében teltek el és úgy 2006 körülre ezen a területen egy nagy mennyiségű ismeretanyag birtokába jutottam. Több cikk publikálása mellett egy könyvnyi anyagot is összeállítottam és 2008-ban a bukaresti Tankönyvkiadónál megjelent *Analitikus geometriai módszerek komparatív vizsgálata* című könyvem. Közben hazai és külföldi doktorandusz szemináriumokon, nyári akadémiákon, konferenciákon, a Magyar Tudomány Napja Erdélyben rendezvényein, stb. előadásokat tartottam kutatási eredményeimről.

Az értekezés szerkezete

Az értekezés a bevezetésből, négy fejezetből és egy függelékből áll. A 4. fejezet tartalmazza az alkalmazásokat. Az értekezést szerkezetileg az *analógiá*ra építettem fel, melyet hol az egyes fejezetek alfejezetei között, hol bizonyos alfejezeteken belül érvényesítek. Ennek következtében az értekezésnek vannak vagy teljesen azonos, vagy nagyon hasonló szerkezetű részei. Ezek között a különbségeket csupán az eltérő fogalmi meghatározások jelentik. Ez a felépítés bizonyos szövegrészek szükségszerű ismétlésével jár ugyan, de mindenekelőtt azt tartottam szem előtt, hogy a különböző koordinátarendszerekhez kötődő analitikus geometriai tárgyalási lehetőségek, eljárások, módszerek összehasonlítása minél könnyebb legyen.

Az 1. fejezetben bevezetem a descartes-i koordinátarendszereket és koordinátákat valamint egy adott háromszöghöz kapcsolva a valódi és általános trilineáris illetve a baricentrikus és normált baricentrikus koordinátákat. Egyúttal megadom a háromszög bizonyos pontjainak utóbbi négy típusú koordinátáit. Minden esetben ugyanazokat a pontokat szerepeltetem, hogy a különböző koordináta-típusok összehasonlítása és változásainak követése lehetséges legyen.

A 2. fejezetben egymáshoz viszonyítva sajátos helyzetű koordinátarendszerek leírásával foglalkozom, megadva ugyanazon pont különböző koordináta-típusai közötti összefüggéseket, amelyek lehetővé teszik, hogy az alakzatok koordinátageometriai jellemzőit át tudjuk írni egyik koordináta-fajtából egy másikba. Ez problémamegoldási lehetőségeinket kiszélesíti, változatosabbá teszi, mivel többé nem vagyunk kötve a legrégebbi és talán a leggyakrabban használt derékszögű koordinátarendszerhez.

A 3. fejezetben a geometriai tulajdonságokat különböző fajtájú koordinátákban tárgyalom. A geometriai alakzatok algebrai jellemzőit először derékszögű koordinátákban adom meg, majd áttérek más, az 1. fejezetben felsorolt koordináta-fajtákra. Itt a legelemibb és legismertebb geometriai fogalmakra szorítkoztam, mintegy ízelítőt nyújtva csupán a komparatív tárgyalás mibenlétéből.

A 4. fejezet tartalmazza az alkalmazásokat, amelyek középpontjába most nem a feladatmegoldásokat helyeztem. Az első három fejezet ismereteit felhasználva lehetőség nyílik a geometriai feladatok változatos, több módszerrel történő analitikus megoldására. A 4.1., 4.2. és 4.3. alkalmazásokban a kúpszeletekkel foglalkozom. E részek az ismert eredményeket néhány újjal egészítik ki, amelyek főleg a ferdeszögű koordinátarendszerek használatához kötődnek. Például kiderül, hogy az ellipszis és a hiperbola kanonikus egyenletei formailag változatlanok maradnak a konjugált irányok koordinátarendszerében. Parabola esetén a tengelyirány és egy érintőirány koordinátaendszerében lesz a parabola egyenlete formailag ugyanaz, mint a kanonikus egyenlete.

A 4.3. alfejezetben az egyenlő szárú hiperbola különböző egyenleteivel foglalkozom. Itt bizonyítom, hogy egy elsőfokú racionális kifejezéssel megadott egyváltozós függvény grafikus képe egyenlő szárú hiperbola. A 4.4. rész tárgya a Fermat-pontok általánosítása és ezek metrikus jellemzése. Végül az utolsó, 4.5. részben kerül sor a Kimberling-sejtés igazolására.

Az értekezés eredményei

Értekezésemben analitikus geometriai módszerek összehasonlító vizsgálatával foglalkozom, síkbeli koordinátarendszerekre és koordinátákra korlátozva. Kétfajta vonatkoztatási rendszert használok. Az egyik a síkbeli affin koordinátarendszer, a másik egy adott háromszög. Az 1. fejezetben egy affin koordinátarendszerhez kötve három koordináta-fajtát értelmezek, éspedig a derékszögű, a kontravariáns és a kovariáns koordinátákat. Egy síkbeli háromszöghöz kapcsolva pedig négy koordináta-típust vezetek be: a valódi trilineáris, a trilineáris, a baricentrikus és a normált baricentrikus koordinátákat. A 2. fejezetben levezetem az összes transzformációs képletet, amelyeknek segítségével át lehet térni az egyik vonatkoztatási rendszerből a másikba illetve bármely koordináta-típusból bármely másikra. Az értekezés többi részében lényegében az itt levezetett eredményeket alkalmazom.

A 3. fejezetben a síkmértani alakzatok és a közöttük fennálló kapcsolatok algebrai jellemzését adom meg mindkét vonatkoztatási rendszerben és az előbb felsorolt koordináta-típusokban. Ennek a fejezetnek két sajátosságát emelném ki: az egyik az, hogy a geometriai tulajdonságok és feltételek analitikus leírása egységes tárgyalásban található meg benne. A másik pedig, hogy ennek következményeként lehetőség nyílik az algebrai összefüggések összehasonlítására, aminek az az azonnali előnye, hogy mérlegelhető-eldönthető egyik vagy másik feltétel relatív bonyolultsága, ami a számítások szempontjából nem jelentéktelen. Ugyancsak itt derül ki az is, hogy mely feltételek koordináta-függetlenek, azaz mely feltételek maradnak formálisan változatlanok a felsorolt koordináta-fajtákra. A 3. fejezet csupán illusztrációként szolgál arra, hogy a 2. fejezet eredményeit felhasználva hogyan lehet a különböző algebrai feltételeket más-más koordináta-fajtákra felírni.

A 4. fejezetben különböző alkalmazásokat mutatok be. A kúpszeletek egyenletei különböző koordinátarendszerekben és koordinátákban jól ismertek. A 4.1. alfejezetben bemutatok közülük néhányat. A 4.2.-ben pedig részletesen kifejtem és bizonyítom, hogy az ellipszis és a hiperbola egyenlete a konjugált irányok koordinátarendszerében formálisan megegyezik a kanonikus egyenletükkel. A parabolánál a tengelyirány és egy érintőirány koordinátarendszerében lesz a parabola egyenlete formálisan ugyanaz, mint a kanonikus egyenlete. A hiperbolának megadom az egyenletét aszimptotáinak koordinátarendszerében is.

Ezek az eredmények átvihetők az érintők egyenleteire is. Igazolom, hogy az érintők egyenleteit a konjugált irányok koordinátarendszerében szintén az ún. duplázási eljárással kapjuk, mint a kanonikus egyenletek esetében. A 4.2. alfejezet utolsó pontjában nyolc, kúpszeletre vonatkozó, tulajdonságot analitikusan bizonyítok, ferdeszögű koordinátarendszereket használva. Az ismert elemi bizonyításokat összehasonlítva az itt található analitikus geometriai bizonyításokkal világosan kiderül, hogy ez utóbbiak alkalmazása bizonyos helyzetekben előnyösebb.

A 4.3. alkalmazásban az egyenlő szárú (derékszögű) hiperbola különböző formájú egyenletével foglalkozom és részletesen bizonyítom, hogy elsőfokú polinomokkal megadott racionális függvény grafikus képe egyenlő szárú hiperbola. Egyúttal levezetem egy ilyen hiperbola konjugáltjának egyenletét is.

A 4.4. alkalmazásban az általánosított Fermat-pontok metrikus jellemzése baricentrikus koordináták alkalmazásával történik. Ebben az alfejezetben általánosítom a Fermat-pontokat, abban az értelemben, hogy egy adott háromszög oldalaira egyenlő oldalú háromszögek helyett egymással hasonló háromszögeket építek. Ez az általánosítás és a Fermat-pontok metrikus jellemzése hangsúlyozottan a trigonometriára épül. Ennek következtében az analitikus bizonyításon belül sok trigonometriai feltételes azonosság alkalmazására is sor kerül. A kapott eredmények elemi geometriai úton is levezethetők, de hosszadalmasabb, bonyolultabb számításokkal.

Az 4.5. alkalmazásban egy sejtés bizonyításával foglalkozom, amely Clark Kimberlingtől származik:

Ha az ABC háromszög hegyesszögű, akkor talpponti háromszögének érintő és érintő háromszögének talpponti háromszöge homotétikusak.

Az értekezés eredményeinek alkalmazhatósága

A matematikát alapvetően két formában lehet művelni: az elődök által felfedezett, felhalmozott tudást, ismereteket továbbadni az újabb és újabb generációknak, azaz tanítani, oktatni, illetve kisebb vagy nagyobb új eredményekkel (téglákkal) gyarapítani a matematika óriási építményét. Mindkét szellemi tevékenységnek fontos velejárója a „hogyan” kérdése, azazhogy a tanítás is és a kutatás is a megfelelő matematikai módszerek alkalmazása által válhat vagy válik eredményesebbé. A tárgyi tudáson túl az eredményességet legfőképpen, döntően az határozza meg, hogy a matematikát tanító-oktató pedagógusok didaktikailag mennyire felkészültek, illetve hogy a kutatók mennyire uralják a matematika különböző területeinek módszereit.

A matematikának e kétféle művelése jótékonyan, termékenyítőleg hat(hat) egymásra, ha egyazon személy (matematikus) egyidőben oktat is és kutatással is foglalkozik. E két tevékenységi formát együtt tekintem, már csak azért is, mert az értekezés témájának kutatása azzal a céllal történt, hogy az eredményeket az oktatásban is és a kutatásban is lehessen alkalmazni. Ebben az értelemben használom a matematikadidaktika megnevezést is, egy olyan kialakulófélben, fejlődésben levő tudományt értve alatta, amely az oktatás elméletén és módszertanán kívül a kutatás módszertanát is magába foglalja.

Az értekezés témájának általam tudatosan, kényszerűen szűkített és az intézményes követelmények által előírt keretein belül két alapvető szempontot tartottam szem előtt. Az egyik, hogy a matematikai eredményeknek bemutassam a didaktikai vonatkozásait, a másik pedig, hogy megfelelő hangsúlyt fektessek a kapott eredményeknek a gyakorlati alkalmazhatóságára. Mivel sem a romániai, sem a magyarországi matematikai gyakorlatban maga a téma sem, az értekezésben leírt egyes koordináta-típusok sem és főleg ezek alkalmazásai nem eléggé ismertek és elterjedtek, ezért a tudományos leírásukat és az alkalmazhatósági lehetőségeik bemutatását egyidőben kellett elvégeznem. Ezért az értekezésben a tudományos és a didaktikai tárgyalás egyszerre és egyidőben van jelen, anélkül, hogy mereven el lennének különítve.

Kik és hol alkalmazhatják a koordinátageometriai módszereket, az értekezés eredményeit? Az értekezésben foglalt ismeretanyag egy része már a középiskola felsőbb osztályaiban vagy szakkörökön tanítható. Más része főiskolákon, egyetemeken, továbbképzéseken, szemináriumokon, nyári akadémiákon, stb. Például a 2. fejezet áttérési képleteit, ahol lehetett, levezettem kétféleképpen is, éppen azért, hogy azt egy középiskolás diák is megérthesse. Az alkalmazásokat úgy válogattam össze, hogy különböző szintű, nehézségű és összetettségű témákat öleljenek fel és ezek tárgyalásán keresztül mutattam be az analitikus módszer lehetőségeit.

Végső következtetések

Az értekezésben a vektor- és koordinátageometriai tárgyalás nincs mereven szétválasztva, ezek együtt léteznek, de a hangsúly a másodikon van. Időben az értekezés több, mint egy évtizedes kisérletezés-kutatás eredménye, térben pedig országhatárokon átnyúló ismeret- és tapasztalatszerzés összefoglalása. Sőt, a téma elmélyítése során jutottam el, képletesen szólva, az amerikai kontinensre és kerültem kapcsolatba a *Forum Geometricorum* című folyóirattal, amelynek cikkeiből meggyőződhettem, hogy bár sokan a klasszikus geometria hanyatlását jósolták vagy jósolják, e lap munkatársai komolyan foglalkoznak elemi geometriai kérdésekkel, de analitikus geometriai tárgyalásban, trilineáris vagy baricentrikus koordinátákat alkalmazva. És ami még meglepőbb, új és szép elemi geometriai eredményeket publikál ez az elektronikus folyóirat, pedig azt is többen állítják, hogy a klasszikus geometriában már nem lehet újat hozni. (Lásd például Philip J. Davis: The Rise, Fall, and Possible Transfiguration of Triangle Geometry: A Mini-History**,** *The American Mathematical Monthly*, Vol. 102, No. 3. (Mar., 1995), pp. 204-214. http://unx1.shsu.edu/~mth_jaj/math467/ryan_article.pdf)

Véleményem szerint, az analitikus módszerek nagyon erős és hatékony eszközök a matematikai problémák megoldására, de ezeket semmiképpen sem szeretném idealizálni. Sőt inkább arra a következtetésre jutottam, hogy alkalmazásuk önmérsékletet, körültekintést és megfontolást feltételez.

Comparison of Geometric Methods at the Level of Geometries

Henceforth, when I talk about methods in connection with my dissertation, in a wider sense I always mean educational and research methods, while in a narrower sense I mean synthetic (elementary), vector- and analytic geometric methods. I've been interested in the question of how we could classify, group and rank the geometric methods with regard to the unsolved problems for a long time (more than 10 years). To put it otherwise: I've been interested in the question if the optimal solution – the shortest, the most beautiful, and the most elegant solution - could be chosen from the solution methods. This question seems very hard and I am not even sure if it could be answered at all. Irrespective of this fact, from time to time I contemplate this question. It would be a very significant result if we could at least answer this question at the level of different geometries; namely if we could decide whether a problem might be discussed the most optimally at the level of synthetic, analytic or some other geometry. But this is not obvious, that is why the question and the search for the best method still remain open to research.

If E is a n-dimensional affine space over T field and V is E's translation vector space, then if we fix an O point and a K basis then every point of E can be assigned to a vector from V, which is the point's position vector which can be assigned coordinates over K basis. Both mappings are bijections, thus every point of E is identified and characterized with the position vector or the position vector's coordinates. If I choose the position vector, then I'll use vector geometry, but if I choose the coordinates, then I'll use analytic geometry. These two possibilities are equal, but methodologically they are completely different and they presuppose entirely different background knowledge. Favouring one or the other from the above mentioned two geometries can be explained with conventional traditions or in other ways. In the Romanian higher education both geometries have been dealt with the same emphasis, but in the high school education the vectors had been taught only within the confines of physics classes for a long time until a few years ago when teaching of the elements of vector geometry were reintroduced into the mathematics curriculum.

In a problem solving situation, at least in the first phase, the most important thing is to adequately solve the problem. The intention of simplicity and elegance is a natural requirement, but it cannot be always achieved at the first attempt. (Of course I don't think about routine problems.) The problem's difficulty level, its complexity and its kind determine the possible problem solving method or methods. The problem to be solved could attract any of the elementary, vector or analytic geometrical methods, but - to remain on the theoretical level - the geometric methods can be primarily differentiated and ranked based on their efficiency. Naturally other considerations can also be mentioned, for example which method stimulates our way of thinking better, which results in the most beautiful solution, etc. It is a widely accepted fact that synthetic geometry improves thinking better than calculation based analytic geometry. But it is true that analytic methods are often more efficient than basic methods. Considering all this, the principle of (geometric) problem solving is always to find the most efficient geometric methods.

The Purpose of the Research, Justification

In the second part of the 1990s I studied triangle-geometry, more precisely the remarkable circles connected to triangles. I wanted to form a comprehensive, general idea about the circumcircle or incircle of the triangle, the nine point circle, the circle of Apollonius, the Taylor circle, the Brocard circle, the Lemoine circles, the Tucker circles and the Soddy circles, etc. I wasn't only interested in these circles, but also in the points of the triangles connected to these circles. The available books at that time treated the above mentioned triangle geometry topics with the help of elementary geometric methods and tools. But these elementary methods seemed laborious, circuitous and hard, so they were not efficient enough; thus I turned to analytic geometry. The triangles are better treated in oblique coordinates than in Cartesian coordinates (we can choose the two support lines of the triangle as the two axes), so because of the usage of parallel coordinates I hoped for a simpler and more efficient handling. At the same time I sometimes used the tools of vector geometry to obey the principle of (geometric) problem solving; thus I tried to find the most efficient geometric methods. The accomplishment of this research was the book entitled *A háromszög nevezetes körei. Háromszögmértan ferdeszögű koordinátákkal,* which appeared at Erdélyi Tankönyvtanács (Transylvanian Coursebook Council) in 1999.

After the appearance of my book I have still been interested in coordinate geometric methods and my interest intensified in this topic because I encountered some articles in international journals where they used new types of coordinates (trilinear, barycentric) –which had been unknown for me until that time – to prove plane geometric theorems and properties.

Later I noticed the fact that the Romanian and Hungarian mathematical journals barely include trilinear and barycentric coordinates, while the situation is completely different in Western European and American mathematical journals. At the beginning of this century I decided that I would dive into this question and I would change this situation as far as my circumstances allowed.

As I mentioned, a great number of articles, studies using any of the above mentioned coordinates - mostly trilinear and barycentric coordinates - have been appearing in international journals. Triangle geometry and other research nowadays are almost impossible without knowledge and application of coordinates. These facts also underline the choice of this topic.

This dissertation is connected to analytic geometry. After my successful application to the doctoral school, I set the following aims:

- studying as many types of coordinates, coordinate systems and reference systems as I could, diving into analytic geometry;
- trying-applying these different types of coordinates in various geometric problem situations;
- showing the way these analytic geometric methods can be used in research and in discovering new issues;
- popularizing the coordinate geometric methods, emphasising their advantages and disadvantages.

I did research and assembled some experience in the past few years and, by about 2006, I acquired a lot of background knowledge. Besides publishing a lot of articles, I complied the book entitled *Analitikus geometriai módszerek komparatív vizsgálata*, which appeared at a coursebook publisher in Bucharest in 2008. Meanwhile I participated in national and international doctoral seminars, summer academies, conferences and the programs of The Hungarian Science Day in Transylvania (Magyar Tudomány Napja Erdélyben), etc and I gave talks on my findings.

The Structure of the Dissertation

The dissertation includes an introduction, four chapters and an appendix. Chapter 4 includes the practical applications. The structure of the dissertation is based on *analogy*, which is used either between the subchapters of the four main chapters or within the subchapters. This is why the dissertation includes either the same or very similar structural parts. The difference between these structural parts is only the term definitions. Although this structure means the repetition of some parts of the text, I wanted to put emphasis on the lightness of comparison of coordinate system related analytic analyses, procedures and methods.

In the first chapter I introduce Descartes' Coordinate Systems and coordinates, the true and general trilinear coordinates related to a given triangle, and also the barycentric and normed barycentric coordinates. I also provide the coordinates of some points of the triangle in the above mentioned four coordinate systems. I always use the same points, so that we could compare the different types of coordinates and follow their changes.

In the second chapter I describe the correlation between specially positioned coordinate systems, giving the relation between the different types of coordinates of the same point, which makes it possible to transcribe the different coordinate geometric properties of a shape from one coordinate type to another. This fact widens our problem solving possibilities, makes it more diverse, because we are no longer tied to the oldest and maybe the most often used Cartesian coordinate system.

In the third chapter I discuss the geometric properties in different types of coordinate systems. First I provide the algebraic properties of geometric shapes in Cartesian coordinates, and then I switch to other types of coordinates mentioned in the first chapter. Here I provide the most basic and most well-known geometric terms to show how comparative discussion works.

The fourth chapter includes the practical applications where the emphasis is not on problem solving. Applying the knowledge from the first three chapters, there are possibilities for analytical solutions of the geometric problems with the help of various, different methods. In the subchapters 4.1., 4.2. and 4.3 I show the application on conic sections. These sections complement the so far known results with some new ones, mostly with those connected to oblique coordinate systems. For example, the canonical equations of the ellipsis and hyperbola remain formally unchanged in the conjugate directions coordinate system. In the case of parabole, its canonical equation is formally the same in the coordinate system formed by the axis direction and a tangent direction.

In subchapter 4.3. I deal with the different equations of the rectangular hyperbola. Here I prove that the graph of a function of one variable given with a first grade rational polynom is a rectangular hyperbola. The topic of the subchapter 4.4. is the generalization of the Fermat points and their metric characterization. Finally, in the subchapter 4.5. I'll prove Kimberling's conjecture.

The Results of the Dissertation

In my dissertation I deal with the comparative study of analytic geometric methods restricted to plane coordinate systems and coordinates. I use two types of reference systems. This first one is the plane affine coordinate system, while the second one is a given triangle. In the first chapter, related to the affine coordinate system I define three types of coordinates, namely Cartesian, contravariant and covariant coordinates, while related to a given triangle I define four types of coordinates, namely real trilinear, trilinear, barycentric and normed barycentric coordinates. In the second chapter I prove all the transformational formulas, which provide the possibility to switch between the reference systems, respectively from any type of coordinates to any other type of coordinates. In essence the rest of the dissertation is about the application of the results of this proof.

In the third chapter I provide the algebraic properties of the relationships of plane figures in both reference systems in the above mentioned types of coordinates. The peculiarities of this chapter are that the analytic description of the geometric properties and conditions appears in a unified discussion and that it is possible to compare the algebraic connections whereby the immediate advantage is that you can decide how complicated each condition is, which is important from the point of calculations. Likewise, this is the chapter where those conditions emerge that are independent of coordinates, namely which conditions remain formally the same in the above mentioned types of coordinate. Thus the third chapter is just an illustration of how the results of the second chapter can be used in noting the different algebraic conditions for different types of coordinates.

The fourth chapter includes the practical applications. The equations of conic sections in different coordinate systems and coordinates are well-known. I show some in subchapter 4.1., while in 4.2. I fully explicate and prove that the canonical equation of the ellipsis and hyperbola is formally the same as their equation in the conjugate directions coordinate system. Connected to the parabola I found that its canonical equation is formally the same equation as in the axis directions and tangent directions coordinate systems. In the case of the hyperbola I also provide its equation in its asymptotes' coordinates.

These results can be transferred to the equations of the tangents. I prove that the equations of tangents in the conjugate directions coordinate system is also drawn with the help of so called doubling procedure as in the case of the canonical equations. In the last section of subchapter 4.2. I analytically prove some properties of eight conic sections using oblique coordinate systems. Comparing the well-known elementary proofs with these analytic geometric proofs, it clearly comes out that the application of the latter is more preferable in some situations.

In the application in subchapter 4.3. I deal with the different forms of the equation of the rectangular hyperbole and I prove in detail that the graph of a function of one variable given with a first-grade rational polynom is a rectangular hyperbola. I also deduce the conjugate equation of such a hyperbole.

In the application in subchapter 4.4. the properties of the generalized Fermat points and their metric properties are presented with the help of barycentric coordinates. In this subchapter the Fermat points are generalized to the effect that I construct similar triangles instead of equilateral triangles on the sides of the triangle. This generalization and the metric properties of Fermat points are based on trigonometry; thus a lot of conditional trigonometric identities are used in the analytic proof. The results can be deduced using elementary geometry but the calculations are longer and more complicated.

In the application in subchapter 4.5. I deal with the proof of Clark Kimberling's conjecture:
If triangle ABC is acute angled, then its intouch-of-orthic and orthic-of-intouch triangles are homothetic.

The Applicability of the Results of the Dissertation

Mathematics can be done in two different ways: the knowledge that our predecessors discovered and accumulated can be handed down from generation to generation, namely it can be taught, or the enormous mathematic equipment can be augmented with smaller or bigger new findings. Both intellectual activities are accompanied by the question "how", so both teaching and research can become more effective if we apply the appropriate mathematical methods. Beyond theoretical knowledge the effectiveness is mostly, decisively determined by the fact how prepared the mathematics teachers and lecturers are to use different methods, respectively how the researchers command the methods of the different fields of mathematics.

These two ways of cultivation of mathematics can have beneficial and productive effect on each other if the same person teaches and does research at the same time. I take these two activities together because my research has been done with the aim of being used both in education and research. I use the didactics of mathematics term for an evolving and developing science which besides the theory and method of education also includes the method of research.

The topic of this dissertation was deliberately narrowed due to the institutional requirements; thus I have considered two fundamental principles. The first one is to show the didactic references of mathematical results, while the second is to put enough emphasis on the practical applicability of the findings.

Because neither the topic of the dissertation nor the different types of coordinates and their applications are well-known and widespread neither in the Romanian nor in the Hungarian mathematical practice, that is why I had to deal with their scientific description and their applicability at the same time; thus the scientific and didactic discussion is done simultaneously at the same time without being rigidly separated.

Who can use the coordinate geometric methods and the findings of the dissertation? Where can they be used? Some part of the dissertation can even be taught at higher level in high schools or different specialized mathematical groups, while other parts can be taught at college, at university, in postgraduate courses, at seminars, at summer academies, etc. For example the transforming formulas from chapter 2 were deduced in two different ways, so that it could be understood by high school students as well. The applications were grouped according to the level, difficulty and complexity of the topic, and with the help of the discussion of these topics I showed the possibilities of analytic methods.

Final Conclusions

The discussions of vector and coordinate geometry are not rigidly separated, they exist together, but emphasis is on the second in the dissertation. The dissertation is the result of experimenting and research done for more than ten years, where this knowledge and experience gaining stretched across boarders. Moreover, during digging into the topic, allegorically saying, I managed to reach the American continent and I got in touch with the journal *Forum Geometricorum*, where the articles show that - although classical geometry was and is said to show decadence - the staff of the journal is seriously interested in elementary geometric questions using trilinear and barycentric coordinates in analytic geometric discussions. And it is more striking that this electronic journal publishes new and beautiful geometric findings despite the fact that a lot of scientists say that it is impossible to find anything new in classical geometry. (See also for example Philip J. Davis: The Rise, Fall, and Possible Transfiguration of Triangle Geometry: A Mini-History**,** *The American Mathematical Monthly*, Vol. 102, No. 3. (Mar., 1995), pp. 204-214. http://unx1.shsu.edu/~mth_jaj/math467/ryan_article.pdf)

In my opinion the analytic methods are very strong and efficient tools for solving mathematical problems, but I would not like to idealize them. Moreover, I would rather come to the conclusion that their application assumes moderation, prudence and consideration.

Az értekezéssel kapcsolatos publikációim

I. Szakkönyvek:

1. Kiss Sándor, *Analitikus geometriai módszerek komparatív vizsgálata*
Editura didactică şi pedagogică, Bukarest, 2008, 171 oldal

2. Kiss Sándor, *A háromszög nevezetes körei. Háromszögmértan ferdeszögű koordinátákkal,*
Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár, 1999, 206 oldal

II. Szakfolyóiratokban megjelent cikkek és tanulmányok:

1. Kiss Sándor, *Az egyenlő szárú hiperbola egyenleteiről*
Matlap, XII. évf., 2008 június, 6. szám, 215-218.

2. Sándor Kiss, *The sum and difference of the areas of Napoleon triangles*
Teaching Mathematics and Computer Science, **1** (2007), p. 99-108.

3. Sándor Kiss, *The Orthic-of-Intouch and Intouch-of-Orthic Triangles* Forum Geometricorum **6** (2006) pp. 171-177.
http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200617.pdf

4. Kiss Sándor, *A kúpszeletek egyenleteiről*
II. Felvidéki Matematikai Szakmódszertani Doktorandusz Konferencia, Pont Társadalomtudományi folyóirat 2005./1. - Matematikai Szakmódszertani különszám.

5. Sándor Kiss, *Using SMS rules to hit elementary results on conic sections*
In: KARL JOSEF PARISOT & VÁSÁRHELYI ÉVA Positionen - Mathematikdidaktik in Entwicklung Publikationen des Dissertantenseminars Salzburg 2004,
Pozíciók - Matematikadidaktika fejlődésben, A 2004-es Salzburgi doktorandusz szeminárium publikációi, 117-125.

6. Kiss Sándor, *Paralelogrammákba írható paralelogrammák(II)*
Matlap, VIII. évf., 2004 március, 3. szám, 85-86.

7. Kiss Sándor, *Paralelogrammákba írható paralelogrammák(I)*
Matlap, VIII. évf., 2004 február, 2. szám, 41-45.

8. Sándor Kiss, *A new proof and generalizations of Malfatti's problem*
Octogon, Vol. 10. Nr. 1. April 2002. pp. 117-125.

9. Kiss Sándor, *Módszertani javaslatok a parabola tanításához*
Matlap, VI. évf., 2002 január, 1. szám, 2-6.

10. Kiss Sándor, *A merőleges affinitás és néhány alkalmazása*
Matlap, V. évf., 2001 november, 9. szám, 330-334.

11. Sándor Kiss, *Concurrent lines in connection with Morley's triangle*
Octogon, Vol. 9., No.2., October 2001, pp. 846-851.

12. Sándor Kiss, *About Morgan's theorem*
Octogon, Vol. 8., Nr.1., April 2000, pp. 60-69.

Szatmárnémeti, 2010 január