Szakdolgozat

Kovács Károlyné
2009

Debreceni Egyetem
Informatikai kar

Matematikai függvények oktatása számítógépes segédlettel

Témavezető:

Nyakóné Dr Juhász Katalin
Tudományos Főmunkatárs

Készítette:

Kovács Károlyné
Informatikai szakvizsga

Bevezetés

A mai világban már sem a magánéletben sem a munkánk terén nem tudjuk nélkülözni a számítógépet. .Régen, a 80-as években még reménykedni se lehetett, hogy alkalmazzunk ilyen eszközöket, szemléletesebbé tegyük a különböző programok segítségével előadásainkat. Szerencsére ma már minden középiskola tanít informatika tantárgyat, és lehetőséget ad arra, hogy magát a számítógépet használjunk más tantárgyak tanítása során. Talán a gyengébb tanulók is könnyebben megértik a tananyagot. Különböző tudományágakban sok-sok téma feldolgozása egyszerűbb és szemléletesebb a számítógép segítségével, mint a régi táblás módszerrel.

A számítógépek oktatásbeli alkalmazásának a legfontosabb vonása az, hogy a tanulási folyamatban új lehetőségek, módszerek, megjelenését teszi lehetővé. Olyan oktatási eszközként szabad tekinteni, ami nem helyettesítheti a régi módszert (tanár-diák kapcsolat, tábla…). Fontos segédeszköze lehet a megismerésnek, gyakoroltatásnak, esetleg számonkérésnek. Fejlesztheti a tanuló önállóságát, önellenőrzését, de nem szabad engedni, hogy csak a számítógép jelentsen élményt számukra.

Arra vállalkoztam, hogy egy kis programban megmutassam a diákoknak, mi is az a matematikai függvény, mit jelent a grafikonon a meredekség, az y tengelyen való eltolás, milyen lépéseket kell megtenni egy összetettebb függvény ábrázolásánál. A dolgozatomban a középiskolai tananyagok közül a kilencedikes évfolyamon tanított függvényeket választottam. Úgy gondolom, e program segítségével könnyebbé válik e tananyag tanítása, ismétlése. Miért pont a függvények tanítását szeretném megmutatni? Már főiskolás koromban is tetszett az, ahogy ebben a témakörben dolgoztunk, vizsgálódtunk. Ezen a területen könnyebb, és nehezebb problémákkal egyaránt találkozhatunk. A táblán való szemléltetést is fontosnak tartom, de mivel a mi iskolánkba sima tábla van felhelyezve a falra, így a pontosság, nem mindig megfelelően van leolvasva, lemásolva a füzetbe.

A tanulók többségének a matematika nehézséget jelent, így fontosnak tartom, hogy érdekessé tegyem azt e diákok számára is. Nemcsak a középiskolás tanulóknál, de a szakiskolások körében is el lehet érni, hogy felfigyeljenek a tantárgyra, és legalább ilyen megközelítésben, megkedveljék azt.

Céljaim: Szeretném ilyen formában is közelebb hozni a fiatalok körében az ismétlő, gyakorló órákat. Nemcsak a matematika felé nyújt betekintés, de a figyelmet az informatika felé is terelheti azáltal, hogy ő indítja el a programot, önállóan alkalmazhatja a menürendszert. Sőt tanítok informatika szakmacsoportos osztályt, akik tanulnak programozást is. Ezzel a programmal érdeklődést is felkelthetek a programozás iránt, és a tehetségesebb tanulók még ki is próbálhatják a programozás terén is. Ha csak egy fiatalembernél elérem, hogy felfigyel a függvények szépségére, vagy érdeklődéssel kezdjen figyelni a program felé már megférte a fáradtságot.

2. Segédprogramok

Ebben a fejezetben pár szóban megfogalmazom a segédprogramokkal, illetve a matematikai segédprogramokkal kapcsolatos tudnivalókat.

A tanárnak fontos lehet az, hogy a diákjai mindennapos életéhez közelebb vigye azokat az anyagokat, melyek számukra távolinak tűnik, a mai generáció szinte elképzelhetetlen számítógép nélkül. Míg kicsik (óvodások, esetleg kisiskolások) könnyen rávehetők, hogy olyan játékprogramokat próbálgassanak, amivel egyben tanulnak is. Számos ilyen program van. Van, ami egy tudomány területre összpontosít, és van, ami átfogóan szemlélteti a kicsikkel tudnivalókat. Így játékosan megtanulja az alapokat, amire már iskolásként építhet. Valahogy ezt a szemléletmódot kellene a kamaszoknál is alkalmazni, de ez már nehéz. Esetleg a számítógép használata vonzó lehet, de már ők nagyok ahhoz, hogyha nem érdekli az adott téma ne is futtassa le a fájlt. Meg kell próbálni a tananyagot a tanulóhoz közel hozni. Minél több érzékszervvel szerzünk, tapasztalatot annál könnyebben el lehet sajátítani a tanulni valót, és meg lehet érteni a problémát és megoldásait. Azzal, hogy kezeli a számítógépet felkelthetjük az érdeklődést, a fáj futtatásával , kezelésével kicsit beloptuk a játékosságot is és egyben a függvényeket is játszva megfigyelhetik.

2.1 A segédprogramok

A oktatás elmélet funkciója:

- a tanítás értelmezése;
- a modern tanulási tanítási stratégiák alkalmazása az iskolai oktatásban;
- a tanulási, tanítási folyamat teljessé tétele és ehhez megfelelően méretezett tudásanyag biztosítása;
- a képesség intenzív fejlesztése;
- a tanulás megtanítása, s ezzel az egyénnek az állandó képzésre, önképzésre való, felkészítése;
- a tanulási tanítási folyamat egészével a személyiség ideális fejlesztése.

Ezen szempontokat figyelembe kell venni, ha segédprogramot választunk, esetleg írunk. A segédprogramokkal nemcsak tanítani szeretnénk, de valamilyen szempontból akár nevelő hatással is lehet. Ez elsősorban a kicsiknek megírt programokra érvényes. A segédprogram készítői figyelembe veszik a tematikában való illesztés lehetőségeit, sőt egyre több tankönyvíró illetve kiadó csatol a tankönyvei mellé cd-s mellékletet. Igaz, ezeken inkább a tananyag és a feladat megoldása szerepel, nem pedig a tananyag kiegészítésére, gyakorlására, „rögzítésére" szükséges segédanyag. Az internet viszont ebben nyújt segítséget. A mai viszonyoknál egyre kevesebb család engedheti meg magának az internet előfizetését, így egyre kevesebb fiatal tudja segítségül hívni otthon az internetezést, de lehetőség van a könyvtárakban, iskolákban ezt pótolni, ami már csak a diák akaratán múlik. A mi iskolánkban ez a legnagyobb probléma. Azokban a családokban, ahol megengedhetik maguknak ezt a lehetőséget, ott sajnos a fiatalok többsége „csak" játszik esetleg msn-ezik , legjobb esetben levelezgetnek egymással. Sok esetben akár még függőséghez is vezethet, de a tanuláshoz szükséges információt már nem keresik az interneten.

A program készítésének első fázisa a probléma (feladat) átgondolása, majd különböző szempontok alapján részekre bontása, majd lépésekre tagolása. A programom által kitűzött cél érdekében figyelembe kell venni a tanulók képességeit, tanulási módját. Általa fokozható és növelhető a rendszerező látásmód, a tanulási kedv az önálló tanulás fejlesztése.

Jó a segédprogram ha :

- többféle elágazási lehetőséget biztosíts;
- hierarchikus felépítésű, rugalmas szerkezetű;
- szakszerű, világos, pontos, egyértelmű definíciókat tartalmaz;
- fokozatosan nehezedik;
- Figyelemfelkeltő;
- logikusan vezessen rá a megoldásra.

A számítógépes oktatóprogramok lehetnek lineáris és elágazásos stratégiájúak, vagy ezek keveréke.

2.2 A matematikai segédprogramok

Ma már egye több oktatóprogram kapható az üzletekben, de ezek olyan problémát oldanak meg, ami nagyobb témát foglalnak magukba. Úgy tanultuk, hogy csak azok a problémák (feladatok) oldhatók meg számítógép segítségével, amelyek algoritmizálhatók.

Vannak olyan pedagógusok, akik próbálnak programot írni, hogy segítség a munkájukat. Ezekhez a kollégák közé szeretnék csatlakozni. Tapasztalatom szerint kicsit nehezen értik meg a függvénnyel kapcsolatos fogalmakat. Mit is jelent a meredekség, a transzformáció. Mikor is kell az x tengely mentén, és mikor kell y tengely mentén eltolni a függvény ábrát.. Innen az ötlet, kellene egy program, amely bemutatja ezeket a diákoknak. A mi iskolánkba gyengébb képességű fiatalok jelentkeznek, így mindent meg kell ragadni, ami érdeklődésüket felkeltheti. Ilyen terület a számítógép alkalmazása. A függvények kirajzoltatásával a menüpontok kezelésével talán ezt is elérhetem.

2.3 A függvény segédprogram használata

Matematika órán a program leírását kilencedikben még nem mutatom meg, csak a matematika oldaláról ismertetem velük, vagy ellenőriztetem a megoldásaikat. Diákjaink tanulnak programozást, ezen belül tizenegyedikben Pascalt, tizenkettedikben akár Dev C ++ programozási nyelvet is. Így iskolánkban található gépeken megtalálható e programok. Az utolsó évben újra meg lehet mutatni a programot, de ekkor már nemcsak lefuttatjuk az indító fájlt, hanem meg lehet mutatni magát a programot, és a tehetségesebb talán megpróbálhatja esetleg meg is írni.

Segédprogram indításának feltételei: A program Dev C ++ programozási nyelven íródott. .Matematika órán a fuggvenyek.exe fájlra kattintva a megjelenő kezdőoldalon a menüpontokból lehet választani, mikor milyen típusú függvényt szeretnénk megtekinteni.

A megfelelő menüpont kiválasztása után a megfelelő függvényt ki lehet választani, majd önellenőrzésként össze lehet hasonlítani a tanulók által készített függvényábrával. Természetesen úgy alakítottam ki, hogy az órán ne tudják önállóan feldolgozni a függvények témakört, és a hozzá kapcsolódó fogalmakat.. Nem a tankönyv által előírt sorrendben tanítom, hanem függvénytípusok szerint. Minden egyes függvény ábrázolásakor, és jellemzésekor elölről megbeszéljük a fogalmakat. A régebbieket a tanulóktól kérdem, az új fogalmakat pedig ábrázolás után megbeszéljük. Igaz a többségét már ismerniük kellene, de mivel nem jó képességű tanulók járnak osztályainkba, így az ismétléssel , úgy tanulják meg a transzformációkat, és a hozzájuk tartozó fogalmakat, ha többször elhangzik . A Mozaik kiadó sokszínű matematika tankönyv alapján tanítók más évfolyamon is találkozhatnak a függvény témakörével, nálunk viszont a tizenegyedikes ismétlés kimarad a tananyagból. Így úgy kell megfigyeltetni a tanulókkal, hogy érettségire sem felejtsék el. A 6 pontban bemutatott függvények elővetítik a függvénytanba még szükséges fogalmakhoz (periodicitás…), de ebben a fejezetben csak utalok rá, felkeltve az esetleges érdeklődést.

3. Középiskola kilencedik évfolyam Függvények című rész tematikája

Sokat gondolkodtam azon, hogy órára lebontva mutatom be a fejezethez szükséges elméletet. A tanítási idő miatt ez természetes, ennek ellenére nem mindig sikerül ezt betartanom. A házi feladat ellenőrzésénél, ha kiderül, hogy valamit nem értenek az osztályban, akkor rászánok egy kis időt és a következő tananyagot csak az óra közepén mondom el, amit csak később gyakorolunk. E miatt nem órai lebontást választottam, hanem témánkénti lebontást. Ismétléskor viszont egybefüggően, egy egységként beszéljük át az ismereteket.

3.1 Hozzárendelés vizsgálata, (ismétlés). (1 óra)

Ezen az órán átismétlem a tanulókkal mindazokat a fogalmakat, amit már általános iskolában megismertek, begyakoroltak. Mivel nálunk a gyengébb képességű tanulók járnak, illetve tanítok szakiskolásokat is, így a többségnek mindez új anyagnak fog hatni. Úgy tekintem, mintha nem tanultak volna eddig semmit, de ha a valamelyik diák esetleg partner a feldolgozásban, akkor a kérdéseimre a válaszát meghallgatom, és ha egy mód van rá a táblánál is tanulókkal oldatom meg a feladatot. Lássuk, melyek ezek. Ezen az órán még nem használjuk a programot. Másrészt a szakiskolásaink nem nagyon tanulnak, így ezen diákoknak minden újdonság.

A derékszögű koordináta rendszer definíciója után a hozzárendelés vizsgálatát ismételjük át. Mielőtt még ezt a programot felhasználnánk az óráinkon, előtte már a diákok megismerték a halmaz, halmaz elemei halmazok közötti kapcsolat hozzárendelés fogalmát. A példafeladatokon keresztül bevezetésre kerül a függvény, a koordinátarendszer, sőt a feladatokhoz kapcsolódva a tulajdonságai is. Természetesen nem a pedagógus közli a diákokkal az új információt, hanem ha lehet a feladatokon keresztül a diákok, fogalmazzák meg.

1.példa

A={hal, béka, gyík, kígyó}

B={A magyar ábécé magánhangzói}

A felsorolt szavakhoz rendeljük hozzá azokat a magánhangzókat, amelyek előfordulnak a szavakban. Ez nem egy megszokott feladat a függvény témakörében, de a hozzárendelés ismétléséhez jó. A hozzárendelést szemléltethetjük nyíl diagrammal:

(Táblán oldjuk meg a feladatot. Ha van olyan diák, aki tudja a megoldást, akkor kihívom.)

A : hal béka gyík kígyó

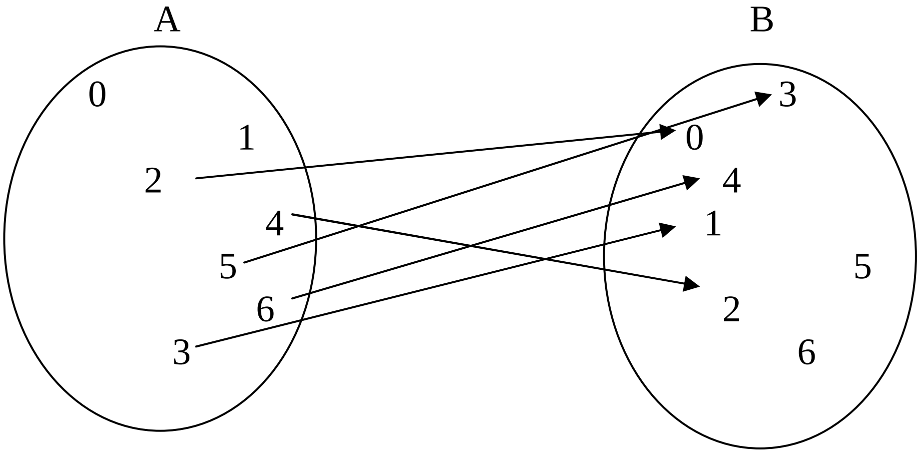
B : a á e é i í o ó ö ő u ú ü ű

Milyen tulajdonságait lehet felsorolni.:

- Az A halmaz elemeihez több B halmaz eleme is tartozhat.
- Az A halmaz minden eleméhez tartozik B halmaz valamely eleme.
- A B halmaznak van olyan eleme, ami több A halmaz eleméhez is tartozik.
- Van olyan B halmaz elem ami, egyetlen A halmaz elemhez sem tartozik.

2.példa

Az A={01,2,3,4,5,6} , a B={0,1,2,3,4,5,6} .Az A halmaz elemeihez rendeljük hozzá a B halmaz elemeit , úgy A halmaz elemeinél kettővel kevesebbet következő szabály szerint: (Később a számítógépes teremben utalok erre a példára, hogyan lehet megoldani koordináta rendszerben. Ekkor a függvény y=x–2).A halmazok közötti hozzárendelést most nyíl diagrammal szemléltethetjük. Szintén a hagyományos módszerrel a táblánál oldjuk meg. Jobban szeretem, ha valamelyik fiatal teszi mindezt

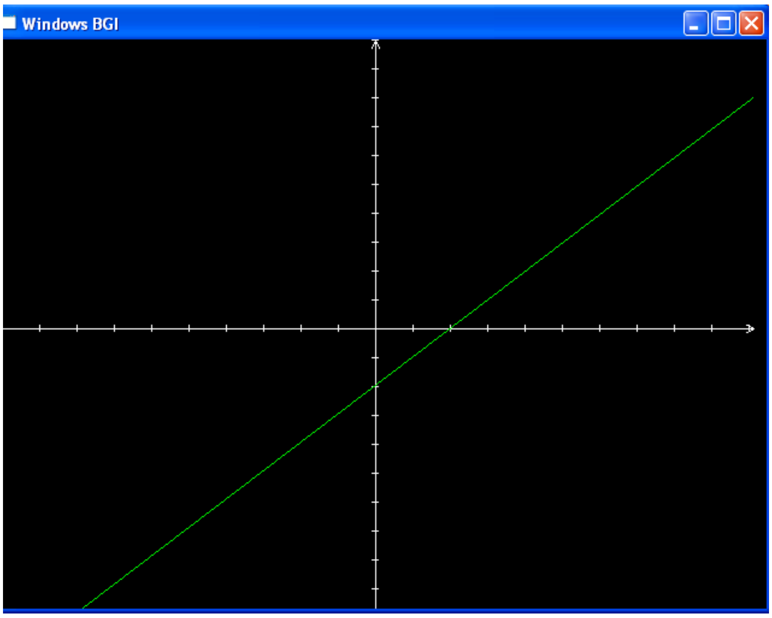


Vizsgáljuk a hozzárendelés tulajdonságait. Ebben az esetben már az A eleméhez csak egy B elem tartozik.

Az A és a B halmaz számhalmaz az összetartozó értékpárokat ábrázolhatjuk derékszögű koordináta rendszerben is. Derékszögű koordináta rendszer René Deskartes nevéhez fűződik, melynek segítségével a sík bármely pontját meg tudjuk határozni. Így minden ponthoz hozzárendelhető egy számpárt. Ha van vállalkozó Descartes életéről-munkásságáról kiselőadást házi feladatként kiadom, amit a következő órán meghallgatunk. Bevezetem a függvény fogalmát, amit majd számon is fogok kérni.

Mi is a függvény? Minden olyan hozzárendelés, aminél minden A-beli elemhez hozzárendelünk B tetszőleges elemét akkor a hozzárendelést függvénynek, nevezzük. Ha egy-egy A-beli elemhez csak egy-egy B-beli elemet rendelünk, akkor egyértelmű hozzárendelésről beszélünk. Az A halmazt (amihez hozzárendelünk) *Értelmezési tartománynak* nevezzük, a B halmazt, (amihez hozzárendelünk). *Érték készletnek* nevezzük. Új fogalomnak tekintik, amelyeket sokat fogom kérdezni. Ezen fogalmak nem csak ezen témakörben alkalmazzuk, így fontosnak tartom a fogalmak bevésését.

Térjünk vissza a példánkra. Ez a hozzárendelés egy függvény, így ábrázolható koordináta rendszerben is. Ekkor még nem kerestetem ki a függvényképet, csak mikor már ismételünk.

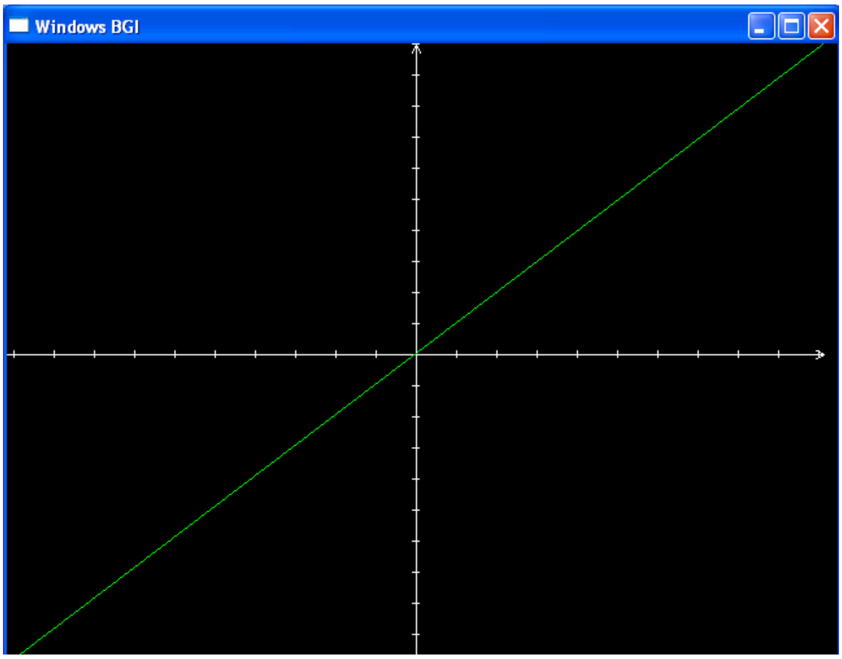


6-3 kép.

3.2 Lineáris függvények

Megbeszéljük, mi is a lineáris függvény és átismételjük a hozzá tartozó fogalmakat. Ebben a tanévben úgy tervezem, hogy a segédprogramom ismétlés órán fogom bemutatni, ennek ellenére a fogalmakat pontosítani szeretném, illetve a tudást mélyíteni. Későbbiekben szeretném, ha egy-egy típusú függvény áttekintése után néznénk meg, két, három óránként. Pontosítom a lineáris függvény definícióját, vagyis az f(x)=mx+b alakú függvényeket elsőfokú függvényeknek nevezzük, illetve *lineáris függvényeknek*. Az m a függvény *meredeksége*, ha m=0 akkor a függvényünk f(x)=b alakú, és függvény képe a koordináta rendszerben az x tengellyel párhuzamos. Ha a b=0 akkor f(x)=mx függvényt kapjuk, aminek képe az origón megy át. Ez utóbbit szokták *egyenes arányosságnak* is nevezni. Lássuk ezt feladatokban is.

Feladat: Ábrázoljuk az **y=x** függvényt!



1-1 kép

Jellemezzük ezt a függvényt! Hangsúlyozom, hogy számonkérésnél, legyen az szóbeli felelés, írásbeli témazáró dolgozat ezt kérni fogom. (Legyen adott két nem üres számhalmaz . Az egyik A és B. A halmaz elemihez rendeljük hozzá a B halmaz valamely elemeit.)Már ismert fogalmak. Hangsúlyozom a definíciókat, és lediktálom, hisz későbbiekben többször kérdezem, számonkérem.

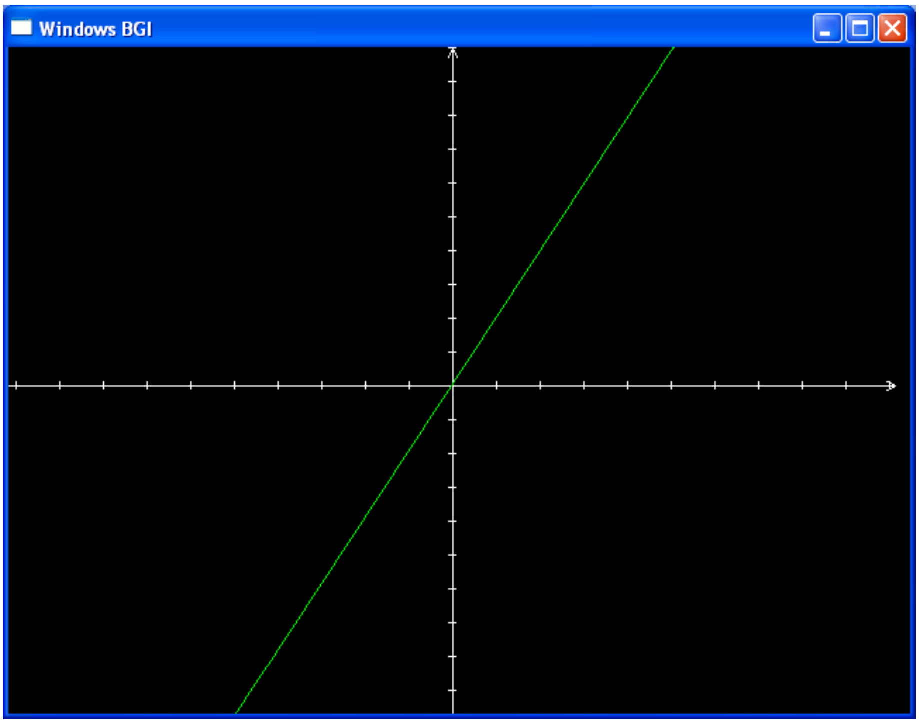
1. *Értelmezési tartomány*: Azt a számhalmazt, amihez hozzárendeljük az B halmaz elemeit, értelmezési tartománynak nevezzük.(addig ismételjük, míg el nem tudják mondani, míg nem tudják adott függvényre megfogalmazni. Fennhangon mondatom el, hogy a füzetében olvassa is, és hallja is minél többször.)
Ebben az esetben: R (Valós számok halmaza)

2. *Érték készlet*: Azt a számhalmazt, amit hozzárendeltünk az A halmazhoz értékkészletnek nevezzük. Ebben az esetben: Érték készlet: R (Valós számok halmaza)

3.*Zérushely***:** Azt az értéket ahol a függvényértéke nulla, másképpen ahol metszi az x tengelyt. Sok tanulóm van akik nem tudják , vagy nem akarják megtanulni a fogalmakat, de mivel nem akarnak rossz jegyet ezért hajlandók megjegyezni a saját nyelvezetükön, ebben az esetben x=0

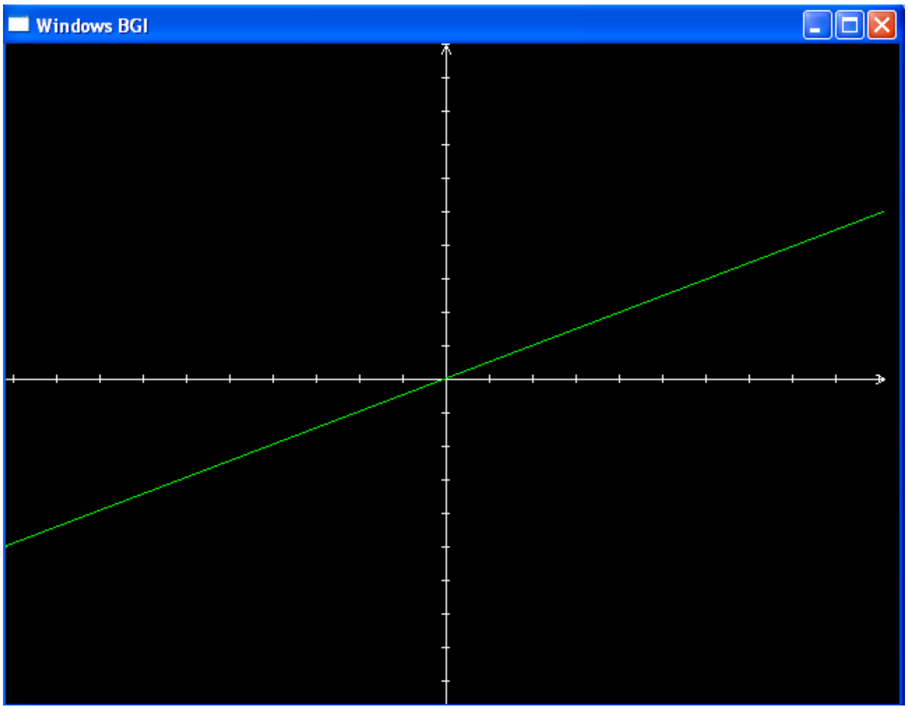
4. Folytonos. (Vagyis nem emeljük fel a ceruzát rajzolás közben.)Maga a fogalom nem tisztázott, de fontos, hogy megértsék mit jelent., tudják a függvénynél használni.

Változtassuk meg az előző függvény meredekségét. Nyújtsuk meg a függvényt, vagyis ábrázoljuk az f(x)=2x függvényt!. Házi feladatnak adom fel e függvény jellemzését. A következő órán kikérdezem szóban, és ha nem tudják szépen folyamatosan elmondani, akkor újra átveszem.



1-2 kép

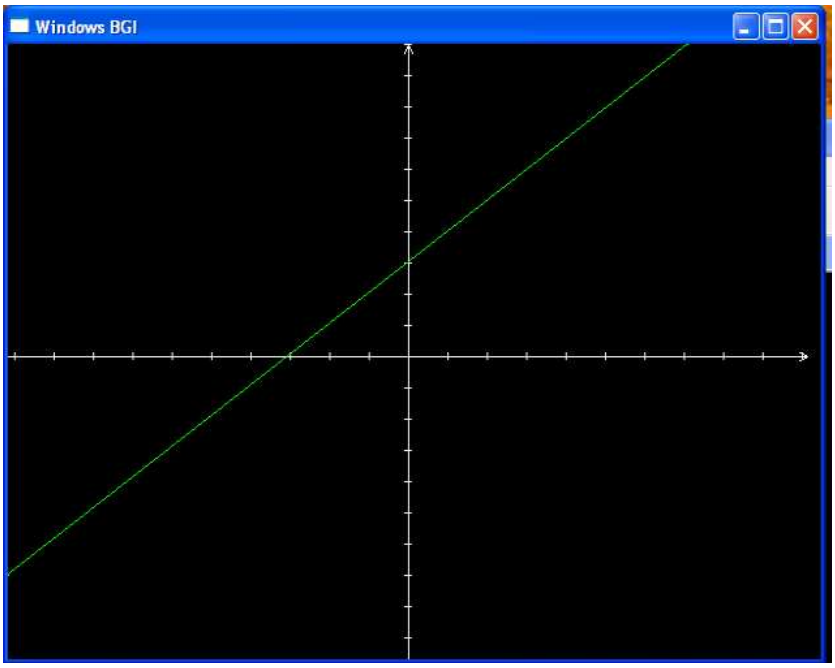
A következő függvény esetén az eredeti függvényt zsugorítani fogjuk. Ábrázoljuk a következő f(x)= ½ x függvényt! Szintén házi feladatként fogom feladni a jellemzését. Eddig megengedem a diákjaimnak, hogy ha úgy gondolják táblázatot is készíthetnek, de ennél az esetnél meg is beszéljük, hogy lehet ábrázolni a lineáris függvényt nélküle.



6-4 kép.

Ábrázolás: Az f(x)=a/c x+ b. A b azt mutatja meg, hogy a függvénykép hol metszi az y tengelyt, ahonnan elkezdünk" lépegetni" c-vel vízszintesen, jobbra az x tengely irányában, a-val függőlegesen. Ha pozitív a tört, akkor felfele, ha negatív, akkor lefele az y tengely irányába

Gyakorlásként minden ki elkészíti a füzetébe az f(x)= x + 3 függvény ábrázolását és a jellemzését , majd önellenőrzésként az 1-3 kép segítségével ellenőrzését végeznek.



1-3 kép.

1. Értelmezési tartomány: R (Valós számok halmaza)

2.Értékkészlete: R (A valós számok halmaza)

3 Zérus helye: X= – 3

4. Folytonos.

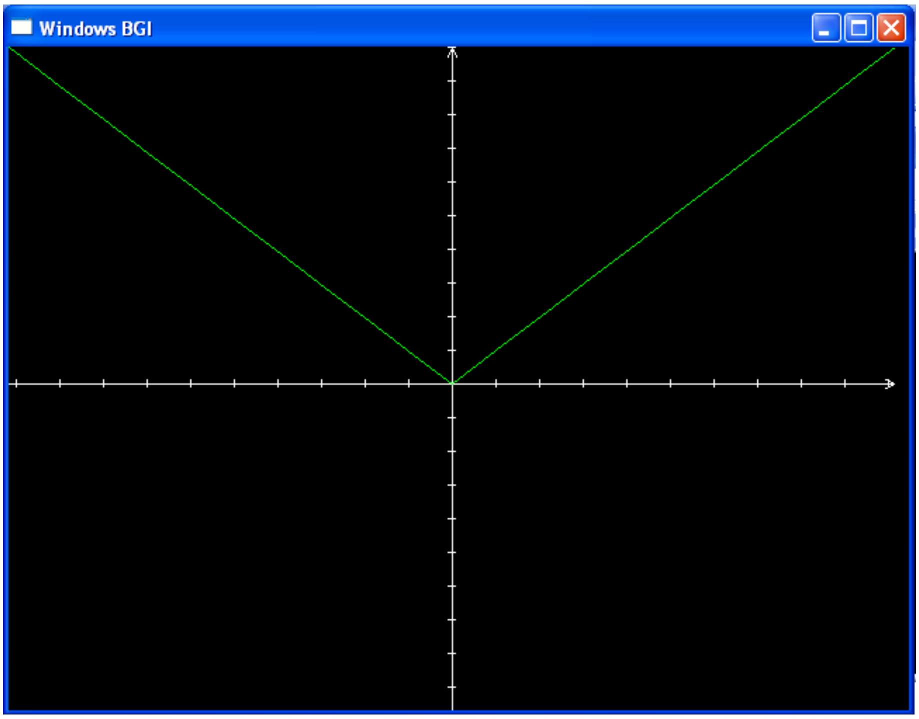
5.Új fogalmat vezetek be a *monotonitás* fogalmát**.**: Legyen x1 és x2 egy függvény értelmezési tartomány két értéke, f(x1) és f(x2) az ezekhez tartozó függvényérték. Ha x1<x2 és a hozzájuk tartozó függvényérték f(x1)>=f(x2) akkor azt mondjuk, hogy a függvény monoton csökkenő, illetve, ha f(x1)>f(X2) akkor azt mondjuk, hogy a függvény szigorúan monoton csökkenő. Hasonlón, ha f(x1)<=f(x2) akkor monoton növekvő illetve, ha f(x1)<f(x2) akkor szigorúan monoton növekvő a függvény. Ebben az esetben-. Szigorúan monoton növekvő. Közben mutatom is. Egyszerűbben is megfogalmazom, hogy a szakiskolások is könnyebben meg tudják megjegyezni. Ha a ceruzámat jobbra felfele mozgatom, akkor növekszik a függvény, ha jobbra lefele mozgatom a ceruzát, akkor csökkenő függvényről beszélünk. A szakiskolásoknál, már ez utóbbit megjegyzik, már elégedet, vagyok, a szakközepes osztályoknál viszont a pontos definíciót követelem. Ahogy magyarázok mutatom a kivetített képen.

3.3 Abszolút érték függvény

Az abszolút érték definícióját már ismerik, de ismétlés is szükséges.:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ , ha } x \geq 0 \\ -x \text{ , ha } x < 0 \end{cases}$$

Nézzük meg az abszolult érték függvény ábráját! Ábrázoljuk és jellemezzük az f(x)= $|x|$ függvényt!



2-1 kép

Ismétlésként jellemzést is készítsünk. (A füzetbe leíratom.):

1. Értelmezési tartomány: R (Valós számok halmaza)

2.Értékkészlet:. R^+ (Pozitív valós számok halmaza)

3 Zérus hely: x=0

4. Folytonos

5. Monotonitás: $]-\infty;0]$ intervallumon szigorúan csökkenő és

$[0;+\infty[$intervallumon szigorúan növekvő.

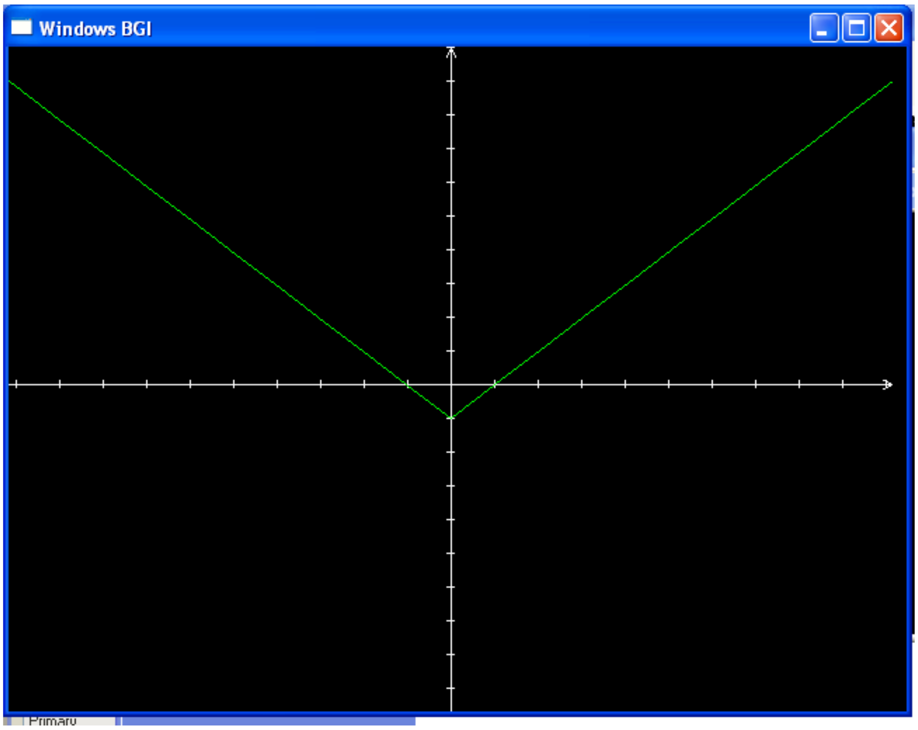
6. A következő definícióval eddigi tanulmányaikban még nem találkozhattak,ez pedig a *szélsőérték* fogalma. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az x=a helyen maximuma [illetve minimuma] van, ha van az a helynek olyan környezete, amelyben minden x-re $f(a) \geq f(x)$ $[f(a) \leq f(x)]$. (Van olyan érték, aminél kisebb értéket már nem vesz fel, akkor azt mondjuk, hogy minimuma van a függvénynek. Ha van olyan érték, aminél nagyobb értéket nem vesz, fel a függvény azt mondjuk, hogy maximuma van.). Jellemzéskor meg kell határozni a szélsőérték helyét (x) és értékét,milyen értéket vesz fel ebben az esetben a függvény.(f(x)). A korlátosságot ha jó képességű a csoport megemlítem, de ekkor még nem kérem.

Jelenleg: Minimuma van, minimum helye: x=0

minimum értéke: f(x)= 0.

Transzformáljuk. Toljuk el a függvény képet függőlegesen –1 egységgel, ami nem jelent mást, minthogy az alapfüggvényhez hozzáadunk egyet.

Ábrázoljuk $f(x)= |x| - 1$ függvényt! (Önálló feldolgozásként adom fel a jellemzést.) Megrajzolás után mindenki kikeresi magának és megtekinti jól készítette –e el, ha nem korrigálja.



2-2 kép.

Önellenőrzésként a függvény jellemzése:

1.ÉT, Értelmezési tartomány: Valós számok halmaza.

2.ÉK, érték készlet: $-1 < f(x)$.

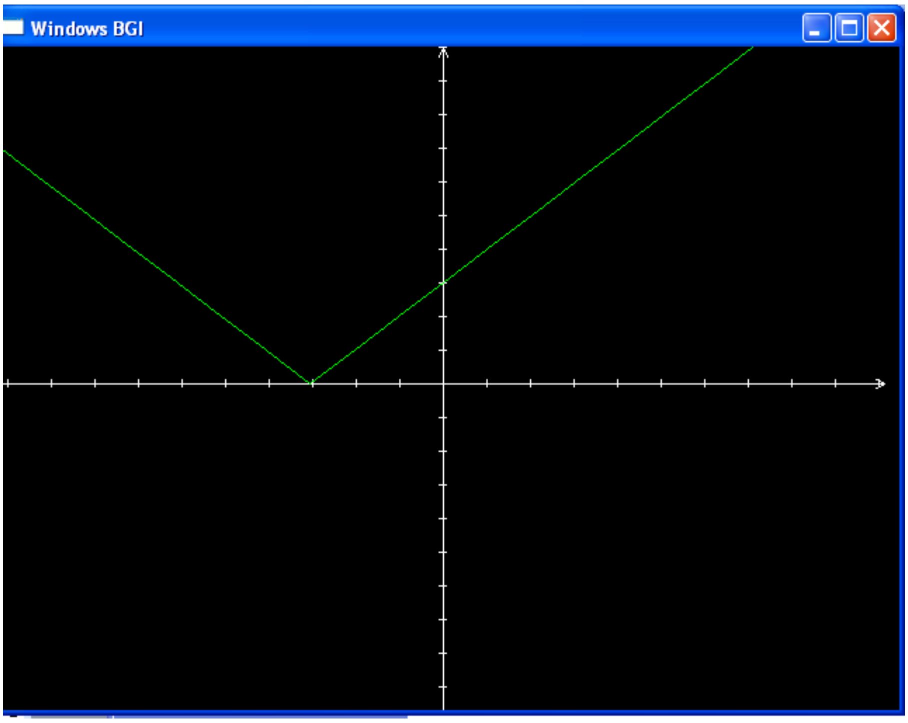
3.Zérus helyei: $x=-1$ és $x=1$.

4.Folytonos.

5.Monotonitás: Mínusz végtelentől nulláig szigorúan monoton csökkenő, nullától plusz végtelenig szigorúan monoton növekvő.

6.Szélsőérték: Minimuma van, minimum helye: $x=0$, minimum értéke: $f(x)=-1$.

Ezután vízszintesen toljuk el negatív irányba 3 egységgel. Ezt a következő képen érhetjük el. Ábrázoljuk $f(x)= |x+3|$ függvényt! (Jellemzése szintén önálló, vagy egyéni feldolgozásként, vagy házi feladatként adom meg.).



2-3 kép.

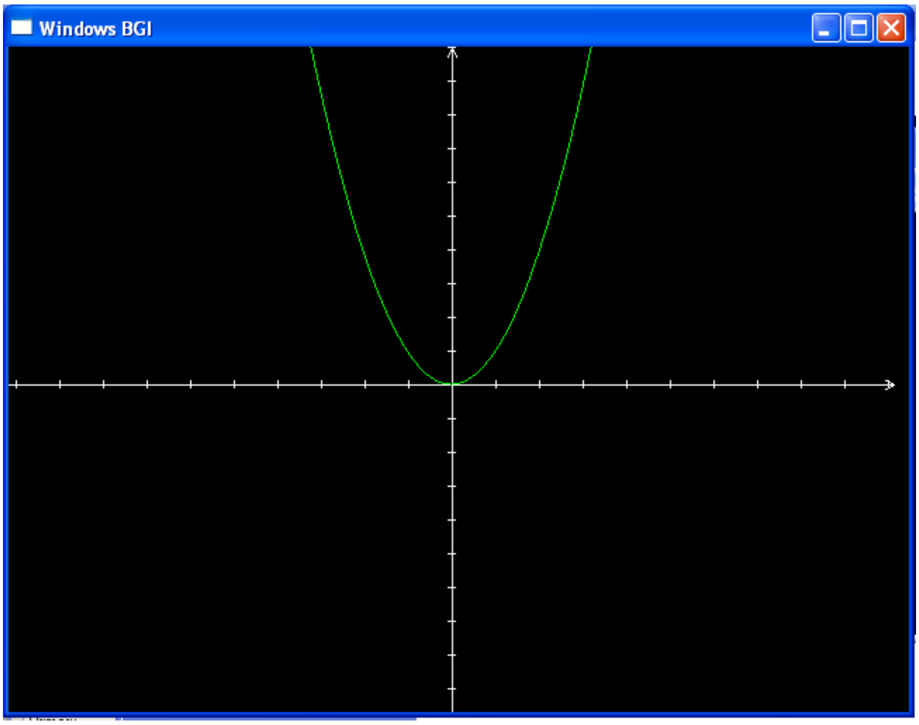
Ismétlésként a függvény jellemzése:

1. ÉT, Értelmezési tartomány: Valós számok halmaza.
2. ÉK, érték készlet: R^+ Pozitív valós számok halmaza..
3. Zérus helyei: x=− 3.
4. Folytonos.
5. Monotonitás:]− ∞; −3] szigorúan monoton csökkenő; [− 3; ∞[szigorúan monoton növekvő..
6. Szélsőérték: Minimuma van, minimum helye: x=−3 , minimum értéke: f(x)= 0.

3.4 Másodfokú függvény

Az $y=x^2$ függvényt másodfokú függvénynek nevezzük, és a függvényképe egy parabola. A parabola nem más, mint egy adott ponttól és egy adott egyenestől egyenlő távolságra levő pontok halmaza. Ebben az esetben az adott pontot a parabola fókuszának, az adott egyenest a parabola vezéregyenesének nevezzük. Ezeket, a fogalmakat nem tanítom, ha jobb képességű a csoport, akkor ez utóbbi definíció elhangzik, de a szakiskolásoknál semmiképp se. .Kivetítem a függvényképet és úgy magyarázom az ábrázolását. A szakiskolásoknál, illetve a nagyon gyengéknél készítettek táblázatot, de aki megérti, hogyan is készítjük a függvényképet attól csak a koordináta rendszerben való ábrázolást kérem.

Ábrázoljuk, majd együtt jellemezzük az f(x)= x^2 függvényt!



3-1 kép.

Jellemzést megbeszéljük, és mindent leírnak a diákok. A fogalmakat nemcsak meghatároztatom, hanem a fogalmát szóban kérdezem.

1) Értelmezési tartomány: R (valós számok halmaza).

2) Érték készlet: Nem negatív valós számok halmaza.

3) Zérus hely: X=0

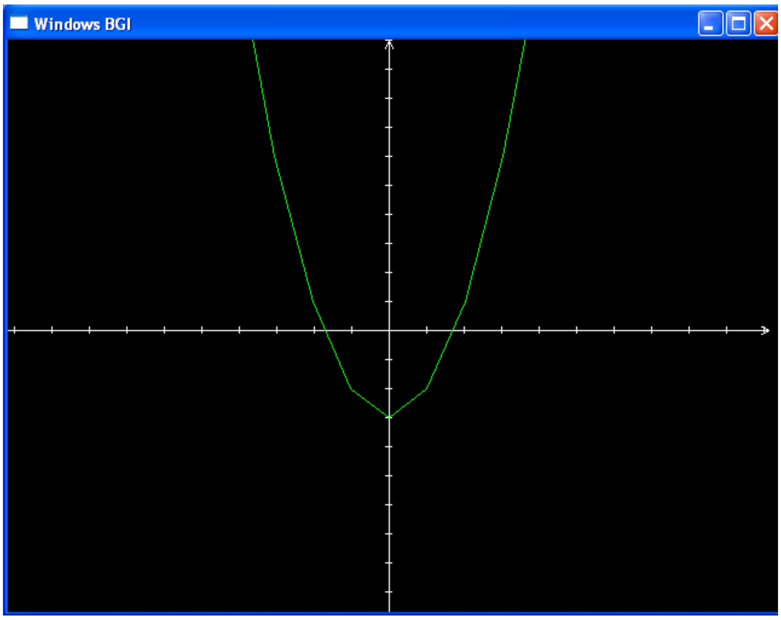
4) Folytonos.

5) Monotonitás:]-∞;0] intervallumon szigorúan csökkenő és
[0;+∞[intervallumon szigorúan növekvő.

6.) Szélsőérték: Minimuma van, minimum helye: x=0
minimum értéke f(x)=0.

7.) Ismeretlen fogalomként lediktálom a paritás definícióját. Azokat a függvényeket, amelyeknél az értelmezési tartomány minden elemére f(x)= – f(x) teljesül, páros függvénynek nevezzük. (Vagyis ha a függvényképe az y tengelyre tükrös). Azokat a függvényeket, amelyeknél az értelmezési tartomány minden elemére f(– x)= – f(x) teljesül páratlan függvényeknek nevezzük.(Vagyis az origóra tükrös.) Így a másodfokú függvény páros függvény.

Transzformáljuk az alap másodfokú függvényt, és toljuk el függőleges irányban – 3 -mal. Ábrázoljuk a f(x)= x^2 – 3 fügvényt!



3-3 kép

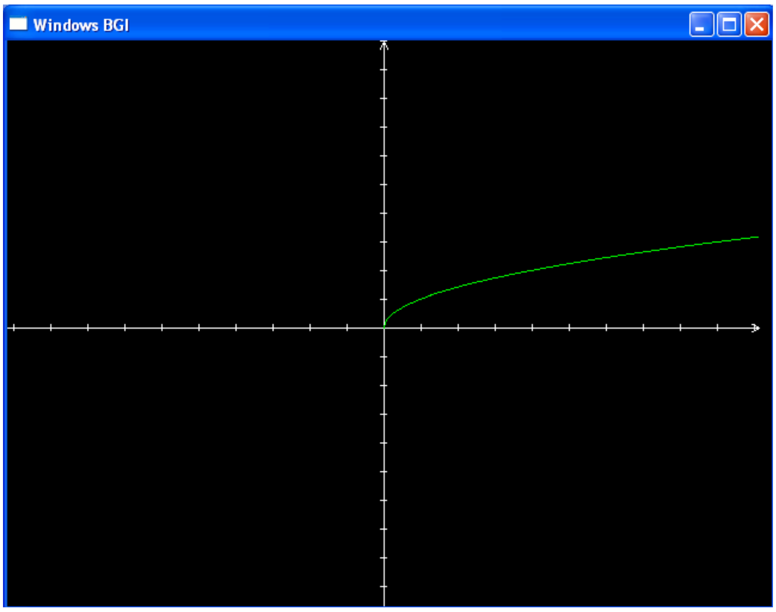
Jellemzést már önállóan kell készíteni, hisz egy pont kivételével már minden kifejezés ismert. Ahhoz, hogy kézség szintjén tudják alkalmazni, sokszor kell ismételtetni, ezért kérdezem ki. Sokszor egy tanuló mondja el a fogalmakat, és pontosan az adott függvényre pontosítja, akkor osztályzattal jutalmazom. Értelmezési tartomány: R (Valós számok halmaza). Értékkészlet: − 3 –nál nagyobb valós számok halmaza. Folytonos. Mínusz végtelentől nulláig szigorúan monoton csökkenő, illetve nullától végtelenig szigorúan növekvő. Minimuma van az x=0 helyen, melynek értéke f(x) =− 3. Páros. Zérus helyét nem határozzuk meg pontosan, mivel a másodfokú egyenletek csak tízedik évfolyamon fogjuk megbeszélni.

3.5 Négyzetgyök függvény

A négyzetgyök fogalmának ismétlése után definiálom a függvényt. Ez egy kicsit nehezen értik meg, ábrázolás előtt táblázatot is készítettek. Az f: R+ $\rightarrow$ R f(x)= $\sqrt{x}$ függvényt négyzetgyök függvénynek nevezzük.

x	−1	0	1	4	9
$\sqrt{x}$	Nincs értelmezve	0	1	2	9

Majdcsak ezen táblázat után ábrázoltatom.



4-1 kép.

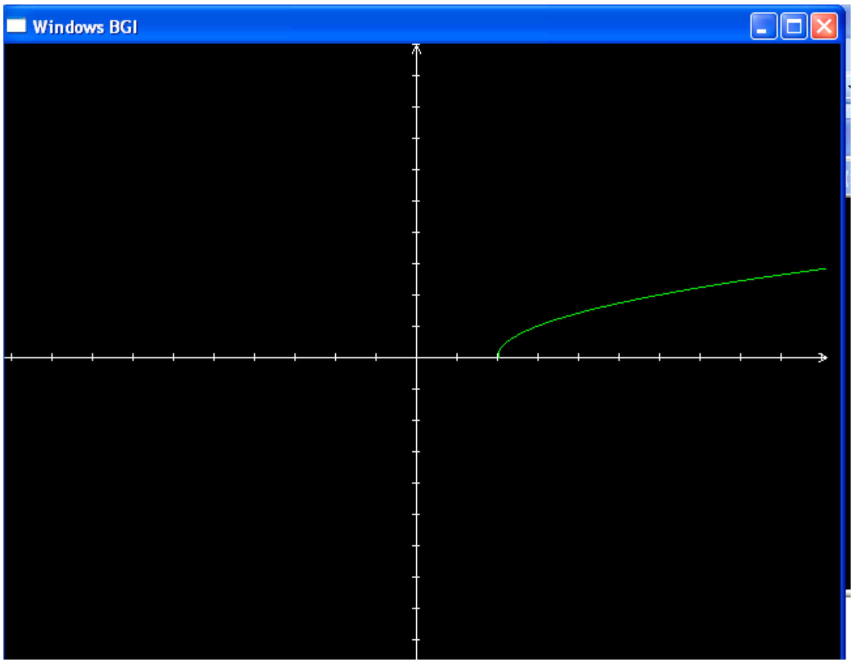
A jellemzést közösem megbeszéljük

1. Értelmezési tartomány: Nem negatív valós számok.
2. Érték készlet: Valós számok halmaza.
3. Zérus helyek. X=0.
4. Folytonos.
5. Monotonítás: szigorúan monoton növekvő.
6. Szélsőérték: minimuma van: minimum helye: x=0
   minimum értéke: f(x)=0.
7. Se nem páros, se nem páratlan.

Ha megfigyeljük ezt a grafikont az x^2 másodfokú függvénynek az y=x egyenesre való tükörképe. Az ilyen függvényeket egymás **inverz** függvényének nevezzük. A két függvényt egy koordináta rendszerbe ábrázoltatom.

Transzformációt a tanulókkal próbálom kimondatni, én csak korrigálok. Feladatként adom fel, toljuk el vízszintesen pozitív irányba 2 egységgel a négyzetgyök függvényt!

Ezt a transzformációt mutatja meg a következő $y=\sqrt{x+3}$ függvény.

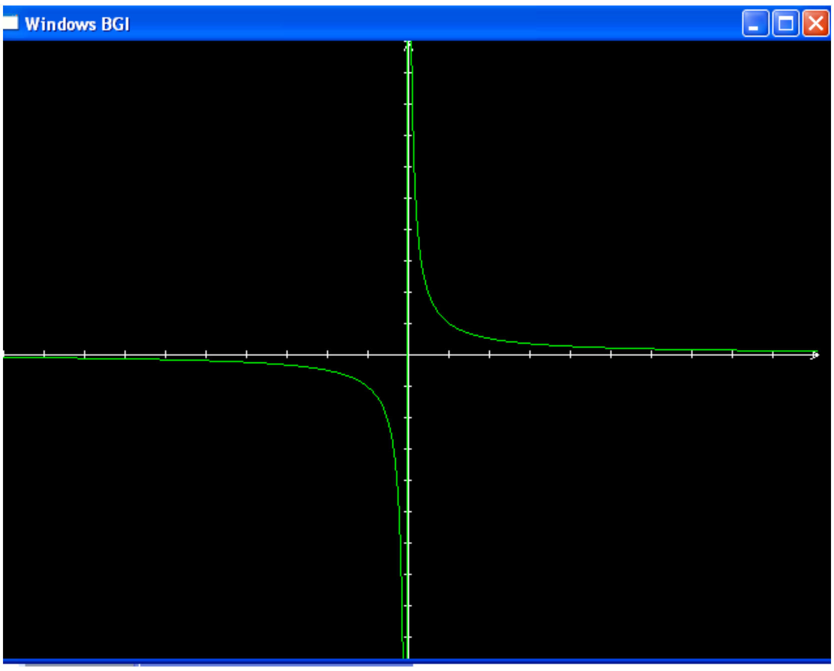


4-2 kép.

Jellemzését közösen írjuk le, és beszéljük meg. Értelmezési tartomány minden x>=2 ; értékkészlete: nem negatív valós számok halmaza; folytonos; zérus hely x=2; szigorúan monoton növekvő; minimum helye: x=2, minimum értéke f(x)=0; se nem páros, se nem páratlan.

3.6 Lineáris tört függvény

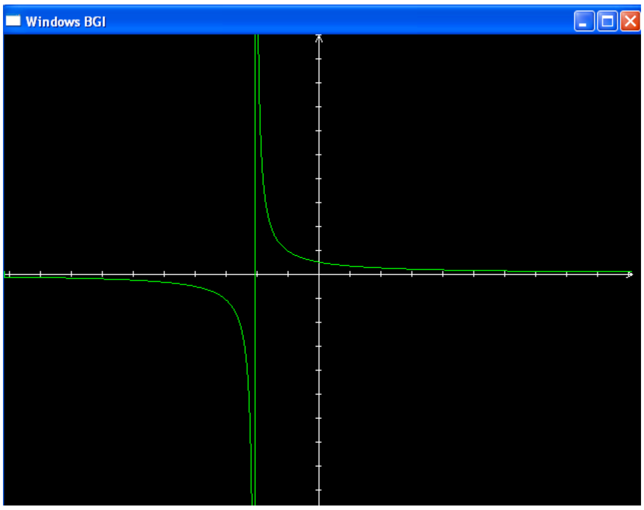
Ábrázoljuk és jellemezzük az y=1/x függvényt! Ezt a függvényt szokás fordított arányosság függvényképének is említeni. Táblázat segíthet a gyengébb tanulóknak.



A képet kivetítve a jellemzését megbeszéljük. : Függvényképét hiperbolának nevezzük..

1. Értelmezési tartománya: a valós számok halmaza, kivéve a 0-t.
2. Értékkészlet: 0-tól különböző valós számok halmaza.
3. Zérus helye nincs
4. Nem folytonos. Szakadási helye van.
5. Monotonitás: Szigorúan monoton csökkenő
6. Szélsőérték: nincs szélsőértéke
7. Paritás: Páratlan (Origóra tükrös)

A transzformációkat közösen végezzük, míg kivetítem, egyben minden diák nézheti a saját monitorján is jellemezzük a h: y= $\frac{1}{x+2}$ függvényt!



Az alapfüggvényt eltoltuk vízszintesen 2 egységgel negatív irányba. (Olyan mintha az y tengelyt az x=− 2 pontba toltuk volna.)

Értelmezési tartománya a valós számok halmaza, kivéve a mínusz kettőt;

Értékkészlete a valós számok halmaza, kivéve a nullát.

Nincs zérus helye.

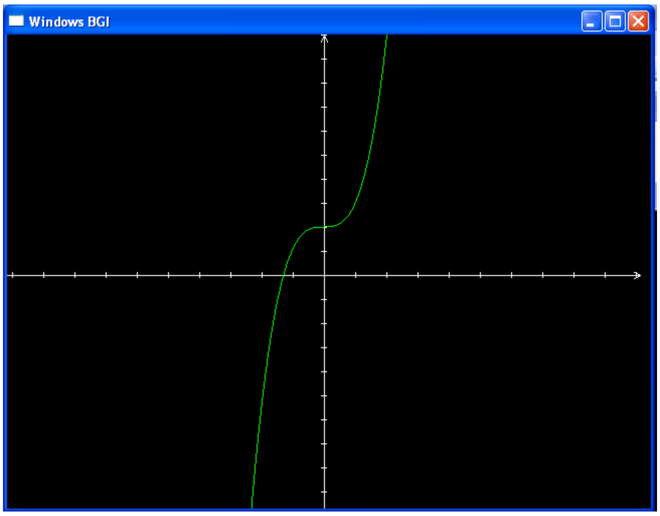
Nem folytonos, szakadása van.

Szigorúan monoton csökkenő

Nincs szélsőértéke. Se nem páros, se nem páratlan.

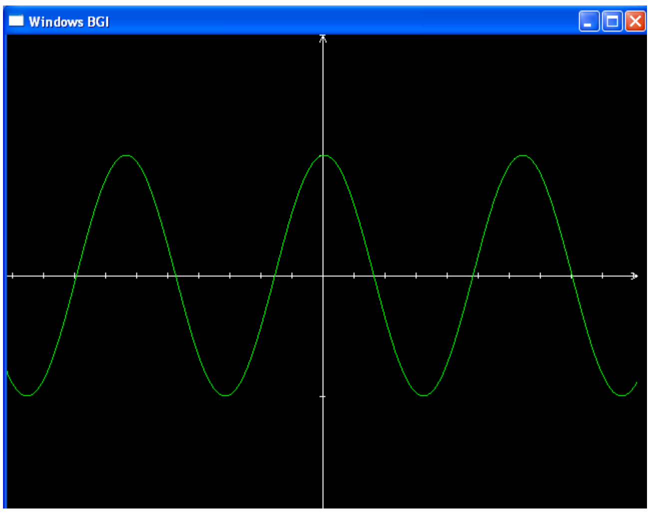
3.7 Egyéb érdekes függvények

Nem kilencedikes anyag, de azért érdekesség képen meg lehet mutatni előre vetítve a tizedikes függvényeket. Nem ábrázoltatom, csak megmutatom a projektoron kivetítve. az f(x)= x^3+2 függvényt! A jobb képességű tanuló megpróbálja maga is elkészítni, de nem mindenkivel készíttetem el.



6-2 kép.

Tízedikbe fogjuk kiegészíteni a függvény jellemzését a periódus és a korlátosság fogalmával Erre példa a következő cos (x) függvény. (nem magyarázok, csak megmutatom, hogy kicsit motiváljam a diákokat és talán a periodicitást is megfigyelik.). Ha olyan a csoport összetétele akkor a kivetített függvényt szóban még jellemezzük is, de a szakiskolásoknál nem, a gyengébb csoportoknál sem teszem.

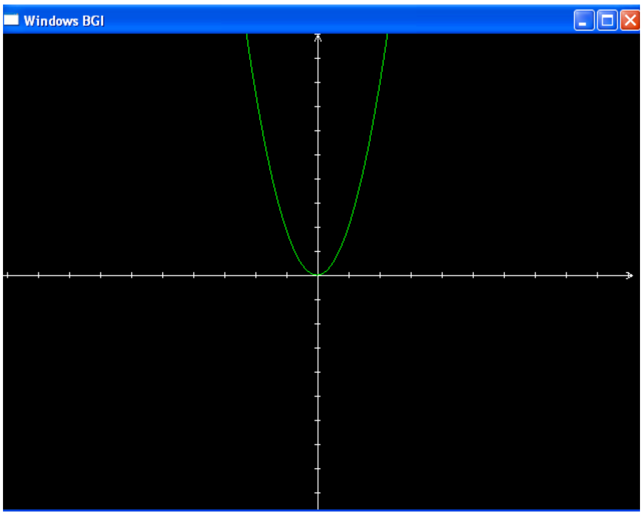


6-1 kép.

4 Gyakorlati alkalmazások

Matematika órán a tanulók nagyon könnyűnek tekintik a függvények rajzolását. Mikor már nem lehet alkalmazni a táblázatot, vagy más segítséget, csak akkor szembesülnek azzal, hogy nem is olyan könnyű. Így sokat kell gyakoroltatni, nagyobb hangsúlyt fektetve a transzformációkra. Gyakorlás képen önálló munkaként feladom a következő függvényeket, majd kivetítem a képet. Ábrázolja önállóan a következő függvényeket. Házi feladat ellenőrzésére is alkalmazható. Így órán önállóan indítva fájlt, kiválasztva a menü pontokat, ellenőrizheti az elkészített feladatát.

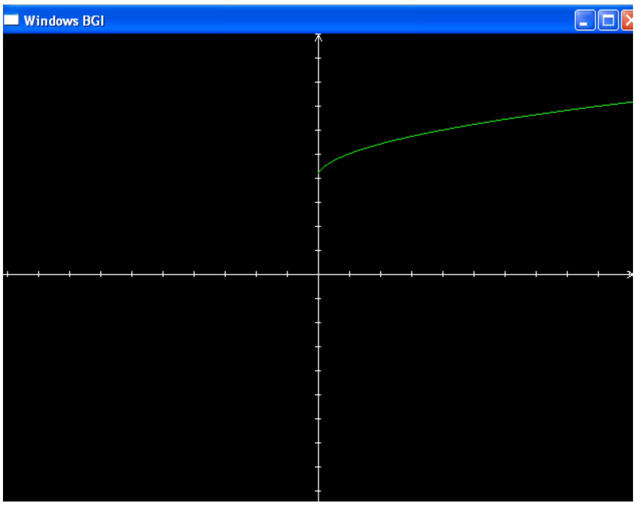
Ábrázolták az $y = 2x^2$



3-2 kép.

A jellemzést kikérdezem, önellenőrzést is végezhet. Így az ÉT: Valós számok halmaza; ÉK: nem negatív valós számok halmaza; folytonos;zérus helye a x=0; mínusz végtelentől, nulláig szigorúan monoton csökkenő. Nullától végtelenig szigorúan monoton növekvő. Minimuma van, helye: x=0, értéke f(x)=0; páros függvény.

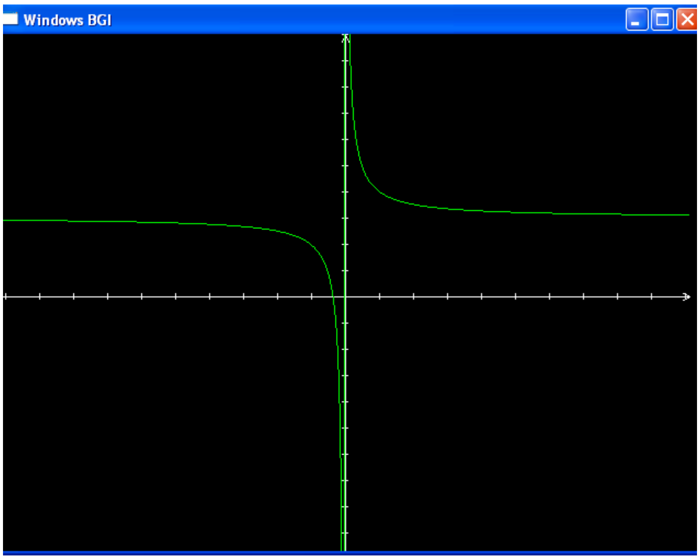
Következő függvény amit ábrázolniuk kell a g: $R \rightarrow R$, $y = \sqrt{x} + 4$



4-3 kép.

Gyakorlásként a jellemzését is megbeszéljük. Milyen transzformációt végeztünk ? Eltoltuk az alap függvényt, az $\sqrt{x}$ t 4 egységgel függőlegesen. Jellemzésnél az értelmezési tartományt kérdezem, ami 4-nél nagyobb valós számok halmaza, Értékkészlete nem negatív valós számok halmaza; folytonos; szigorúan monoton növekvő minimuma van a x=0 helyen f(x)= 4 értékben. Se nem páros, se nem páratlan. Nincs zérus helye.

A legnehezebb függvény az y= $\frac{1}{x}$ +3 . ezt kivetítem és közösen megbeszéljük Értelmezési tartománya nullától különböző valós számok halmaza, értékkészlete háromtól különböző valós számok halmaza; nem folytonos; zérus helye $-\frac{1}{3}$; szigorúan monoton csökkenő; nincs szélső értéke; se nem páros és se nem páratlan.



5-3 kép.

5. Tapasztalat

Sajnos ebben az évben nincs kilencedikes osztályom, így kapva-kaptam az alkalmon mikor a tizenkettedikes informatika csoportom a függvényeket ismételte matematika órán. Először csak a program alkalmazását kértem a fiataloktól. Eleinte csak játszadoztak a menü pontokon, majd egyre inkább elkezdték érdekelni őket a téma is. Ekkor kezdtük elölről megbeszélni a témakört. Érettségi előtti összefoglalásnak is jó ez a segédprogram. A lineáris függvényeket, majd az abszolult érték függvényeket együtt megbeszéltük, jellemeztük. Később a következő órán átismételték a további függvényeket, és önállóan ellenőrizték a függvényábrázolást. A jellemzést, pedig közösen egymást kijavítva elmondták..

Az egyik tanulónk magán tanuló, így otthon készül fel az év végi vizsgákra. Őt is megkértem, hogy a segéd program és a szakdolgozatom 3. fejezete segítségével vegye át a függvény kilencedikes témakört. Ekkor határoztam el, hogy kiegészítem a dolgozatom a eddig nem tervezett jellemzésekkel is, hisz ezzel egy új lehetőséget biztosítok azon tanulóknak akik betegség miatt nem tudnak bejárni órára, és ép ebből fakadóan nehezen tudják elsajátítani a fogalmakat, gyakorolni a feladatokat.
Véleménye szerint sokat segített a tanulásban az állomány, és a fejezet, amit adtam neki. Kezdetben az alfejezeteknél először kirajzoltatta a függvény képet, majd elolvasta a jellemzésüket. A következő lépése az volt, hogy a függvényeket a saját füzetébe lerajzolta, jellemezte, és önellenőrzést végzett. Konzultáción nem volt kérdése.

Matematikát tizenegyedikes csoportban tanítok, és mivel ebben az évben is ismétlésként tananyagban szerepel, így úgy gondoltam nekik is megmutatom ezt a fájlt. Feladtam házi feladatnak, a különböző típusú függvények ismétlését, majd órán a gép előtt átismételtük. A csoportom nagyon gyenge, így volt olyan tanuló, aki nem egészen tudott mit kezdjen magával az állománnyal, hogyan is indítsa el, annak ellenére, hogy elhangzott. A kíváncsiak először a menü pontokat nézegették, és olyan is akadt, aki már a programot listázta ki és azon törte a fejét, hogy lehetne ehhez hasonló programot írni. A következő órán már megtárgyaltuk a függvényeket is, sajnos volt olyan, mikor táblázatot is kellett készíteni. Megbeszéltük, hogy is kell a transzformációkat elvégezni, és mit kell figyelembe venni a jellemzésnél.

Számomra az volt az igazi élmény mikor egy gyenge tanulóm, szeme felcsillant, és láttam rajta, hogy most megértette mi is az a függvény. Én amúgy is szeretem a projektoron való kivetítést, informatika órán csak nem mindig ezt alkalmazom.

Matematika téma feldolgozásnál most először tapasztalhattam meg mindezt. Jó volt, hogy nem kell külön oda figyelnem az egységekre , arra, hogy ha lehet arányosan ábrázoljam a függvényt, kifér –e a koordináta rendszerembe. A szükséges eszközökért el ne felejtsek lemenni a tanáriba, ahol tároljuk. Ezen problémákra nem kellett foglalkozzak, hisz adott volt a gép is, a fájl is. Kevesebb időt töltöttem a rajzolással, csak kivetítettem, és magyaráztam, ami után, míg a diák a füzetébe is leírta, amit mondok, akár egyenként is odamehettem és elakadásnál segíthettem. Mivel járkáltam a padok között, így ha valaki elakad, vagy nem értett valamit, akkor a többieket nem zavarva csak az egyén problémájával tudtam foglalkozni, személyesen csak neki magyaráztam. Amikor visszautaltam egy már megtárgyalt függvényre nem kellett újra fölrajzolnom, csak a megfelelő menüpontra kattintva újra előhoznom. A másodfokú és a négyzetgyökös függvényeket önálló feldolgozásként adtam ki, amit az órán végeztek el. Én nagyon élveztem, hogy minden tanuló a saját tempójában tud haladni, és amit nem ért azt ketten meg tudtuk beszélni. Azok a diákok, akik kicsit fogékonyabbak, azok a 3.7 pontban szereplő függvényekkel is foglalkozhattak. Nagyon jól éreztem magam ezeken az órákon. Igaz több időt kell rászánni, míg ez az állomány elkészült, és ki tudtam próbálni, viszont amikor csak tanítom ezeket a témaköröket, mindig elő tudom venni, és meg tudom mutatni. Úgy láttam diákjaim arcán, hogy ők is szívesebben ülnek be ezekre az órákra, mint ez hagyományos órára. Egyéni képességüknek megfelelően tudnak haladni.

Elhatároztam, ha lehetőséget kapok arra, hogy számítógépes terembe tartsak matematika órát is, akkor időt nem kímélve egyre több témakört fogok feldolgozni a gép segítségével. Nagyon megtetszett ez a lehetőség. (Pont ezért keresem, majd már meglévő olyan segédprogramokat is, amit esetleg fel tudok használni óráimra, eddig ez nem sikerült.)

Többen voltak, akik a program megírása után is érdeklődtek, de nálunk tizenegyedikben Pascalt tanulnak, így ezen a téren még nem tudtunk értekezni. Úgy érzem viszont, hogy a motiváció elérte a célját, és ezek a fiatalok, a következő tanévben is szerepelni fognak a programozási versenyeken, illetve érdeklődést fognak mutatni a programozás felé.

Amit utólag egy kicsit sajnálok, hogy a függvények jellemzését nem készítettem el, hogy maga a segédprogram segítségével fel lehessen dolgozni akár az órán akár, mint magán tanuló ezt a témakört.

Irodalom jegyzék

Dr Nyakóné Dr Juhász Katalin: Az informatika iskolai alkalmazásai

Szabó József: Számítógépi grafika

Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István: sokszínű Matematika 9 (9. osztályosok részére. Mozaik kiadó)

Kovács Károlyné 1997-ben írt szakdolgozata

Tartalomjegyzék