Kiss Géza

FROBENIUS PÉNZVÁLTÁSI PROBLÉMÁJA
COIN EXCHANGE PROBLEM OF FROBENIUS

című PhD értekezés tézisei

Témavezető: Dr. Freud Róbert

Debreceni Egyetem, Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Vezető: Dr. Daróczy Zoltán

Matematika-didaktika Program
Vezető: Dr. Lajkó Károly

2004

1. Bevezetés

Ezen disszertáció egy kiterjedt számelméleti probléma különféle aspektusaival foglalkozik. Az elsőként SYLVESTER [30] által 1884-ben felvetett probléma általános megfogalmazása a következő: adott $A = \{a_1 < \ldots < a_n\}$ relatív prím pozitív egészek esetén, melyek azok a K pozitív egészek, amelyek felírhatók $K = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ alakban, ahol az x_i-k nemnegatív egészek. A második fejezetben egy feladatsor segítségével bemutatjuk a fogalmakat és rávilágítunk az iskolai alkalmazások lehetőségeire. A harmadik fejezetben a legnagyobb nem felírható számra és ennek extremális változatára vonatkozó eredmények bemutatása után fő eredményünk ERDŐS és GRAHAM egy 1972-ben bizonyított tételének általánosítása. A negyedik fejezetben sorra vesszük a nem felírható számok számára vonatkozó eddigi eredményeket és megadjuk az erre vonatkozó extremális probléma teljes megoldását. Az utolsó fejezet a nem felírható számok hatványainak összegzéseiről szól.

2. A pénzváltási probléma az iskolai tehetséggondozásban

A rövid bevezetést követő 2. fejezetnek kettős szerepe van. Egyrészt a feladatok tárgyalása közben ismertetjük mindazokat a fogalmakat, amelyek a későbbi részek megértéséhez szükségesek: a legnagyobb nem felírható szám $G(A)$, a nem felírható számok száma $N(A)$, továbbá ezek extremális változatai: $g(n,t) = \max G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $\nu(n,t) = \max N(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, ahol $a_n \leq t$. Másrészt 15 jellemző feladat bemutatásával az oktatás céljait szeretnénk szolgálni. A feladatok között szerepel diákolimpiai és főiskolai versenyfeladat; korábbi publikációkból kiemelt, rövidebben bizonyítható, a témakör jellegzetes módszereit bemutató tétel és néhány saját javaslat is [18]. Ezek a feladatok feltételezésünk és eddigi tapasztalataink szerint felhasználhatók az iskolai tehetséggondozásban. Az előbb említett feladatok megoldásán kívül kitérünk a történeti vonatkozásokra, az új eredmények közlésére és nyitott kérdések ismertetésére is.

3. Az extremális Frobenius-probléma

A 3. fejezetet $G(A)$ és $g(n,t)$ vizsgálatának szenteljük. A legnagyobb nem felírható szám, $G(A)$ meghatározása már $n = 3$ esetén is nagyon nehéz feladat. A pontos értékek csak speciális feltételek mellett adhatók meg, ezek-re több példát is mutatunk a 2. fejezetben. Talán éppen a nehézségek miatt a témakör fejlődése során előtérbe kerültek a különféle becslések. Tulajdonképpen ezen becslések kapcsán vezette be és kezdte vizsgálni 1971-ben ERDŐS az extremális $g(n,t)$-t. Mivel fő eredményünk is ehhez a függvényhez kötődik, egy szakaszban teljes áttekintést adnuk a $g(n,t)$-vel kapcsolatos eddigi kutatásokról.

Külön is kiemeljük DIXMIER 1990-es becslését [4]:

3.1.3. TÉTEL

$$\left\lfloor \frac{t-2}{n-1} \right\rfloor (t-n+1) - 1 \leq g(n,t) \leq \left(\left\lceil \frac{t-1}{n-1} \right\rceil - 1 \right) t - 1.$$

DIXMIER a felső becslést még élesebb formában is megadta, ennek számtalan következménye van, s szinte az összes korábban ismert eredményt is maga után vonja.

3.2.5. TÉTEL

$g(n,t) \leq (v-1)(t-r-1)-1,$ *ahol* $t-1 = v(n-1)-r$ *és* $0 \leq r < n-1.$

A $g(n,t)$ függvényre vonatkozó pontos eredmények két nagyobb csoportra oszthatók. A kisebb számok közül a régóta ismert $n=2$ eset után $n=3$-ra LEWIN adott pontos értéket az 1970-es évek elején. Az $n=4$ és $n=5$ eseteket DIXMIER [4] tételeiből kaphatjuk meg, kivéve a $t=4k+3$ alakú számokat $n=5$-nél. A nagyobb n-ek esetében csak akkor voltak használható eredmények, ha a t értéke nem sokkal nagyobb, mint n. A legáltalánosabb ezek közül ERDŐS és GRAHAM 1972-es tétele [6]:

3.2.3. TÉTEL *Ha n és k pozitív egészek, $n \geq 9k^2+15k+2$, akkor*

$$g(n, 2n+k) = \begin{cases} 2n+4k+1, & \text{ha } n-k \not\equiv 1 \pmod 3; \\ 2n+4k-1, & \text{ha } n-k \equiv 1 \pmod 3. \end{cases}$$

Erre a tételre LEV is adott egy eltérő bizonyítást, amelyben elegendő a $k \leq n-2$ megkötés. Fő eredményünk ennek a tételnek az általánosítása, $g(n, dn+k)$ pontos értékének meghatározása két maradékosztályra mod$(d+1)$ [16]:

3.3.1. TÉTEL *Legyenek a d,n,k olyan természetes számok, hogy $2 \leq d < n,\ 0 \leq k \leq n-d$. Ha $n-k \equiv 0 \pmod{d+1}$ vagy $n-k \equiv -1 \pmod{d+1}$, akkor*

$$g(n, dn+k) = d(d-1)n + 2dk + d^2 - d - 1.$$

A tétel segítségével néhány további speciális esetben is kiszámítható a $g(n,t)$. Pl.

3.4.2. Következmény *Legyenek n és k olyan pozitív egészek, hogy $n > 3$, $0 \le k \le n-3$. Ha $n-k \equiv 0 \pmod 4$ vagy $n-k \equiv -1 \pmod 4$, akkor*

$$g(n, 3n+k) = 6n + 6k + 5.$$

4. A nem felírható számok száma

A legnagyobb nem felírható számig felírhatók és nem felírhatók egyaránt előfordulhatnak, természetesen adódó kérdés, hogy mennyi ezeknek a pontos száma. Már Sylvester vizsgálta és két érme esetén meg is oldotta ezt a kérdést [30]. Selmer norvég matematikus munkássága révén minden olyan esetben kiszámítható $N(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, amikor mod a_1 az egyes maradékosztályokban a legnagyobb nem felírható számokat ismerjük [28]. Legyen H egy teljes maradékrendszer mod a_1. Minden $h \in H$-hoz van olyan $r_h \equiv h \pmod{a_1}$, amely felírható $r_h = a_2y_2 + a_3y_3 + \ldots + a_ny_n$ alakban és a legkisebb. Ezekkel a jelölésekkel:

4.1.2. Tétel

$$N(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{a_1}\sum_{h \in H} r_h - \frac{a_1 - 1}{2}.$$

A módszer gyakorlati alkalmazására a 2. fejezetben több példát is mutatunk, illetve ugyanezt az alapgondolatot használjuk fel a nem felírható számok elemi összegzéseinél is az 5. fejezetben.

Rövid áttekintést adunk az $N(A)$-val kapcsolatos eddigi speciális eredményekről és becslésekről. A két függvény egymáshoz való viszonyáról kiderült, hogy:

$$\frac{G(a_1, a_2, \ldots, a_n) + 1}{2} \le N(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le G(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

és ez az egyenlőtlenség egyik oldalról sem javítható.

A fejezet fő eredményeként bebizonyítjuk, hogy az extremális $\nu(n,t)$ számot akkor kapjuk, ha azt az n darab legnagyobb egész számot választjuk, amely nem nagyobb mint t [17]. Ez Erdős és Graham egy 1980-ból származó sejtése volt [7, 86.old.].

4.2.1. Tétel *Legyenek n és t egész számok, $1 < n \leq t$. Ekkor*

$$\nu(n,t) = N(t-n+1, t-n+2, \ldots, t).$$

Azt is bebizonyítjuk, hogy végtelen sok n és t esetében az extremális $\nu(n,t)$ elérhető más olyan A halmazzal is, amely különbözik a legnagyobb n darab egésztől t-ig.

4.2.4. Tétel *Legyenek d, n, k egészek, $2 \leq d < n$, $0 \leq k < n-d$. Ha $n-k \equiv 0 \pmod{d+1}$ vagy $n-k \equiv -1 \pmod{d+1}$, ekkor $t = dn+k$-ra létezik legalább két optimális A halmaz, azaz amelyre*

$$N(A) = \nu(n, dn+k).$$

Érdekes kettősség, hogy az ilyen n és t értékek mellett $G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ általában kisebb lesz $g(n,t)$-nél, amikor az a_i-ket, az eredeti sejtés szerint, szomszédosaknak választjuk, s mégis ekkor kapjuk a legtöbb nem felírható számot. Ugyanakkor a maximális $G(A)$-t adó halmaz esetében is pontosan ugyanennyi lesz a fel nem írhatóak száma.

Továbbra sem ismerjük a választ arra a kérdésre, hogy minden t-re megadható-e a szomszédos elemek konstrukcióján kívül még legalább egy optimális halmaz, illetve vannak-e további, az említettektől eltérő optimális halmazok is.

5. A nem felírható számok összegzése

Az utolsó fejezetben a nem felírható számok $S_k(A)$-val jelölt k-adik hatványösszegeivel foglalkozunk. Először részleteiben bemutatjuk, hogyan használhatók fel az analízis eszközei $S_1(A) = S(A)$ meghatározására $n = 2$ esetén [2]. A vizsgálat alapja a generátorfüggvény, amely problémánk esetében a következő alakú:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\cdots(1-x^{a_n})}.$$

$G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a legnagyobb olyan k lesz, amelyre a fenti függvényben x^k együtthatója nulla.

Ezt követően diszkutáljuk Rödseth [27] magasabb hatványokra vonatkozó általános tételének néhány speciális esetét, azaz a tétel segítségével kiszámítjuk $S_2(a,b)$ és $S_3(a,b)$ pontos értékét.

Végül megmutatjuk, hogy egy teljesen elemi módszerrel is kiszámíthatók ezek a hatványösszegek, pontosabban tetszőleges A halmazra kiszámítható az összeg, amennyiben a mod a_1 maradékosztályokból ismerjük a legkisebb felírható elemeket.

5.4.1. Tétel *Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ relatív prím pozitív egészek. Vegyük* $\mod a_1$ *mindegyik nemnulla maradékosztályból az $a_2, a_3, \ldots, a_n$ segítségével felírható legkisebb elemet, legyenek ezek $x_1, x_2, \ldots, x_{a_1-1}$. Ekkor*

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{a_1-1} \left(\frac{x_j^2}{2a_1} - \frac{x_j}{2} \right) + \frac{a_1^2 - 1}{12}.$$

Így $n = 2$ esetén a nem felírható számok összegét háromféleképpen is meghatároztuk.

5.4.2. Következmény *Legyenek a és b relatív prím pozitív egészek. Ekkor*

$$S(a, b) = \frac{1}{12}(a-1)(b-1)(2ab - a - b - 1).$$

Hasonló szerkezetű, kezelhető eredmény adódik a második és harmadik hatványok összegére is (5.5.3. és 5.5.6. Következmények). Annak illusztrálására, hogy $n > 2$ esetén is alkalmazható az elemi módszer, kiszámítjuk a 2. fejezet 1. feladatában szereplő számokra $S_1(ab, bc, ca)$ értékét (5.4.3. Tétel).

Ez az utolsó rész tekinthető bizonyos értelemben a 2. fejezet folytatásának is, mivel felhasználható azoknak a tanároknak a továbbképzéséhez, akik már ismerik a témakör alapvető tényeit és módszereit.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Freud Róbert tanár úrnak, aki egyetemista éveim óta, több mint 25 éve segíti szakmai munkámat. Célt és irányt mutató tanácsai, folyamatos biztatása és ezernyi segítő, kiegészítő tényleges közreműködése nélkül sem a publikációk, sem ez a dolgozat nem jöhetett volna létre.

1. Introduction

The thesis investigates various aspects of an extensive number-theoretical problem first raised by SYLVESTER [30] in 1884: Given a set $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_n\}$ of relatively prime positive integers, which positive integers K can be represented as $K = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$, where x_i are non-negative integers. In Chapter 2 we introduce the notions and show the possibility of applications at school through a sequence of exercices. In Chapter 3, after presenting results on the greatest non-representable number and on the corresponding extremal version, our main result is a generalization of a theorem by ERDŐS and GRAHAM from 1972. In Chapter 4 we summarize the results on the number of the non-representable integers and we give a complete solution of the corresponding extremal problem. The last chapter deals with the sum of powers of the non-representable integers.

2. The coin exchange problem in a class of talented students

The short introduction is followed by Chapter 2, which plays a double role. On the one hand, we present here all notions necessary for the understanding of the later parts: the greatest non-representable number $G(A)$, the number of non-representable numbers $N(A)$, and the extremal versions of these: $g(n,t) = \max G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and $\nu(n,t) = \max N(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, where $a_n \leq t$. On the other hand, our presentation of 15 characteristic problems is planned to serve also educational purposes. These include problems of competitions for college students and international mathematical olympics, shorter proofs of some theorems from earlier publications, representing typical methods of the topic, and also some new propositions of the author [18]. According to our assumption and experience these problems can be used for theaching talented students. Besides the solutions of the abovementioned problems we include historical remarks, comment on new results and mention also open questions.

3. The extremal Frobenius problem

Chapter 3 is devoted to be investigation of $G(A)$ and $g(n,t)$. The determination of the geatest non-representable number, $G(A)$, seems to be a very difficult task already in the case $n = 3$. The exact values can be given only under special conditions, for which we show several examples in Chapter 2.

Maybe, just these difficulties induced that the evolution of the topic brought the various estimations into the center of interest. In fact, in connection with these estimations ERDŐS introduced and began to study the extremal function $g(n,t)$ in 1971. Since our main result is related to this function, we give a complete survey of the previous investigations about $g(n,t)$.

Particularly we stress DIXMIER's estimate from 1990 [4]:

THEOREM 3.1.3.

$$\left\lfloor \frac{t-2}{n-1} \right\rfloor (t-n+1) - 1 \le g(n,t) \le \left(\left\lceil \frac{t-1}{n-1} \right\rceil - 1 \right) t - 1.$$

DIXMIER gave an even sharper upper bound, which has many consequences and implies nearly all previously known results.

THEOREM 3.2.5.

$g(n,t) \le (v-1)(t-r-1)-1,$ *where* $t-1 = v(n-1)-r$ *and* $0 \le r < n-1$.

The exact results on $g(n,t)$ can be divided into two larger groups. For the smaller values of n, the case $n=2$ has been known long since, and later LEWIN gave the exact value for $n=3$ in the early 70-es. The cases $n=4$ and $n=5$ follow from Dixmier's theorems [4], except for the numbers $t=4k+3$ and $n=5$. For larger values of n one could obtain exact values only if t was not much greater than n. The most general result of this type was the theorem of ERDŐS and GRAHAM from 1972 [6]:

THEOREM 3.2.3. *Let* n *and* k *be positive integers,* $n \ge 9k^2 + 15k + 2$, *then*

$$g(n, 2n+k) = \begin{cases} 2n+4k+1, & \text{if } n-k \not\equiv 1 \pmod 3; \\ 2n+4k-1, & \text{if } n-k \equiv 1 \pmod 3. \end{cases}$$

LEV gave a different proof for this theorem, with the weaker assumption $k \le n-2$. Our main result is a generalization of this theorem, determining the exact value of $g(n, dn+k)$ for two residue classes mod $(d+1)$ [16]:

THEOREM 3.3.1. *Let* d,n,k *be integers such that* $2 \le d < n$, $0 \le k \le n-d$. *If* $n-k \equiv 0 \pmod{d+1}$ *or* $n-k \equiv -1 \pmod{d+1}$ *then*

$$g(n, dn+k) = d(d-1)n + 2dk + d^2 - d - 1.$$

Using our theorem we can compute $g(n,t)$ also in some further special cases, for instance

Corollary 3.4.2. *Let n and k be integers such that $n > 3$, $0 \le k \le n-3$. If $n-k \equiv 0 \pmod 4$ or $n-k \equiv -1 \pmod 4$ then*

$$g(n, 3n+k) = 6n + 6k + 5.$$

4. The number of the non-representable numbers

Both representable and non-representable numbers occur up to the greatest non-representable number, so it is a natural question, what is the exact number of these. Already Sylvester studied and solved this problem for two coins [30]. The Norwegian mathematician, Selmer showed that $N(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ can be computed in all cases, when we know the greatest non-representable number in the every residue class mod a_1 [28]. Let H be a complete residue system mod a_1. To every $h \in H$ there exists an $r_h \equiv h \pmod{a_1}$, which is representable as $r_h = a_2y_2 + a_3y_3 + \ldots + a_ny_n$ and is the minimal with this property. Then by this notation:

4.1.2. Theorem

$$N(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{a_1}\sum_{h \in H} r_h - \frac{a_1 - 1}{2}.$$

We present several examples in Chapter 2 for the practical application of this method, and we use the same idea also at the summation of the non-representable numbers in Chapter 5.

We give a short survey about the special results and estimates related to $N(A)$. About the relation of the two functions we have:

$$\frac{G(a_1, a_2, \ldots, a_n) + 1}{2} \le N(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le G(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

and these inequalities cannot be improved.

As the main result of this chapter we prove that the extremal number $\nu(n,t)$ is obtained when we choose the n largest integers not exceeding t [17]. This was a conjecture by Erdős and Graham from 1980 [7, p.86].

THEOREM 4.2.1. *Let n and t be positive integers, $1 < n \leq t$. Then*

$$\nu(n,t) = N(t-n+1, t-n+2, \ldots, t).$$

We also prove that for infinitely many values of n and t, the extremal value $\nu(n,t)$ is achieved also for another set A differing from the set of the greatest n numbers up to t.

THEOREM 4.2.4. *Let d, n, k be integers such that $2 \leq d < n$, $0 \leq k < n-d$. If $n-k \equiv 0 \pmod{d+1}$ or $n-k \equiv -1 \pmod{d+1}$ then for $t = dn+k$ there exist at least two optimal sets A, i.e. for which*

$$N(A) = \nu(n, dn+k).$$

It is an interesting duality, that for these values of n and t, the value $G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ will be smaller in general than $g(n,t)$, when we choose the a_i as adjacent numbers according to the original conjecture, yet we get the most non-representable numbers. The number of the non-representable numbers, however, will be just the same also for the set giving the maximal $G(A)$.

We do not know, whether there exists at least another optimal set for every t besides the construction of the adjacent elements, and whether there exist other types of optimal sets differing from the above-mentioned ones.

5. Summation of the non-representable numbers

In the last chapter we deal with the sum $S_k(A)$ of k^{th} powers of the non-representable munbers. First we illustrate, how analysis can be used for determining $S_1(A) = S(A)$ when $n = 2$ [2]. The investigation is based on the generating function, which is the following in the case of our problem:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\cdots(1-x^{a_n})}.$$

$G(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ is the greatest integer k, for which the coefficient of x^k is zero in $f(x)$.

Then we discuss some special cases of a general result by RÖDSETH [27] for higher powers, namely we compute the exact value of $S_2(a,b)$ and $S_3(a,b)$ with the aid of this theorem.

Finally, we show, that these power suns can be computed also with a completely elementary method, moreover the sum can be calculated for any set A, if we know the smallest representable elements of the residue classes mod a_1.

Theorem 5.4.1. *Let $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ be relatively prime positive integers. Consider from each non-zero residue class mod a_1 the smallest integer representable by $a_2, a_3, \ldots, a_n$, and denote these by $x_1, x_2, \ldots, x_{a_1-1}$. Then*

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{a_1-1} \left(\frac{x_j^2}{2a_1} - \frac{x_j}{2} \right) + \frac{a_1^2 - 1}{12}.$$

Thus we determined the sum of non-representable numbers by three different methods in the case $n = 2$.

Corollary 5.4.2. *Let a and b be relatively prime positive integers. Then*

$$S(a, b) = \frac{1}{12}(a-1)(b-1)(2ab - a - b - 1).$$

We obtain similar results also for the sum of second and third powers (Corollaries 5.5.3. and 5.5.6.). For illustrating that our elementary method is applicable also for $n > 2$, we compute the exact value of $S_1(ab, bc, ca)$ for the numbers in Problem 1 of Chapter 2 (Theorem 5.4.3.).

This final part can also be considered as a continuation of Chapter 2 in a certain sense, since it can be used as a material for continued training of teachers who know already the basic facts and methods of the topic.

Acknowledgement

I would like to say thanks to my thesis advisor, Professor Róbert Freud, who has been helping my professional work for more than 25 years, since my studies at the university. Neither my publications, nor this thesis could have been born without his suggestions showing aims and directions, his continuous encouragement and his helpful collaboration.

Hivatkozások – References

(A disszertációbeli hivatkozási számokat használjuk. We keep the reference numbers of the thesis.)

A disszertáció a szerző következő publikációin alapul: [18] (2. fejezet), [16] (3.3 – 3.4 szakaszok) és [17] (4.2 szakasz). (Az 5.4 – 5.5 szakaszok eredményei nincsenek publikálva.)

The thesis is based on the following publications of the author: [18] (Chapter 2), [16] (Sections 3.3 – 3.4) and [17] (Section 4.2). (The results of Sections 5.4 – 5.5 are unpublished.)

[2] T. C. Brown and P. J. Shiue, A remark related to the Frobenius problem, *The Fibonacci Quarterly* **31**(1) (1993), 32 – 36.

[4] J. Dixmier, Proof of a conjecture by Erdős and Graham concerning the problem of Frobenius, *J. Number Theory,* **34** (1990), 198 – 209.

[6] P. Erdős and R. L. Graham, On a linear diophantine problem of Frobenius, *Acta Arithmetica,* **21** (1972), 399 – 408.

[7] P. Erdős and R. L. Graham, Old and New Problems and Results in Combinatorial Number Theory, *Monographies de l'Enseignement Mathématique,* **28** Université de Genève, 1980.

[16] G. Kiss, Extremal Frobenius numbers in some special cases, *Annales Univ. Sci. Budapest,* **44** (2001), 27 – 31.

[17] G. Kiss, On the extremal Frobenius problem in a new aspect, *Annales Univ. Sci. Budapest,* **45** (2002), 139 – 142.

[18] G. Kiss, The Frobenius problem on competitions and in classroom, *Teaching Mathematics and Computer Science,* **1/2** (2003), 203 – 218.

[24] J. L. Ramírez Alfonsín, The Diophantine Frobenius Problem, *Equipe Combinatoire Université Pierre et Marie Curie, Paris* Report, June 2003.

[27] Ö. J. Rödseth, A note on Brown and Shiue's paper on a remark related to the Frobenius problem, *Fibonacci Quarterly,* **32**(5) (1994), 407 – 408.

[28] E. S. Selmer, On the linear diophantine problem of Frobenius, *Journal für reine und angewandte Mathematik,* **293/294** (1) (1977), 1 – 17.

[30] J. J. Sylvester, Mathematical questions with their solution, *Educational Times,* **41** (1884), 21.